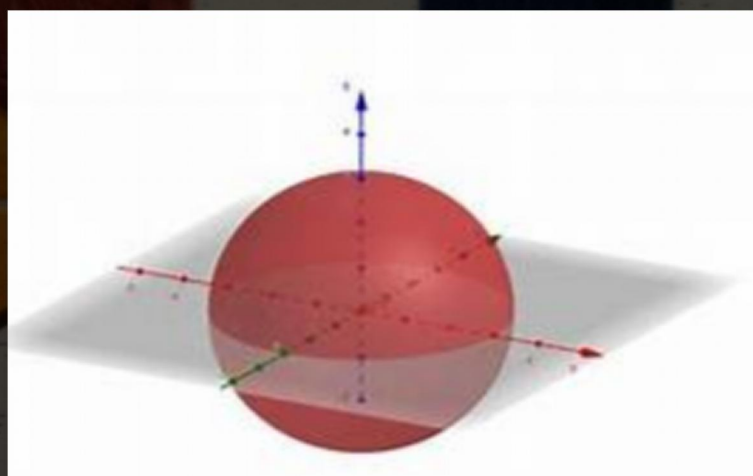


**2023**

**APRENDIZAGEM MATEMÁTICA POR  
MEIO DA UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA :  
CALCULADORA PARA O VOLUME DA ESFERA**



**Vitor Vasconcelos Silva  
Fábio José da Costa Alves  
Cinthia Cunha Maradei Pereira**

---

SILVA, Vitor Vasconcelos; PEREIRA, Cinthia Cunha Maradei; ALVES, Fábio José da Costa.  
**APRENDIZAGEM MATEMÁTICA POR MEIO DA UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA:**  
CALCULADORA PARA O VOLUME DA ESFERA. Livreto Educacional de Tecnologia de  
Informática no Ensino de Matemática do Programa de Mestrado Profissional em Ensino  
de Matemática da Universidade do Estado do Pará, (PPGEM/UEPA), 2023.

ISBN: 978-65-84998-40-7

Modelagem Matemática. Geometria Espacial. Software Geogebra. Esfera

---

## Sumário

<b>1</b>	
<b>APRESENTAÇÃO.....</b>	<b>4</b>
1.1.CONHECENDO A INTERFACE DO <i>APP GEOGEBRA</i> NA MODALIDADE ON-LINE.....	5
<b>2 PROGRAMANDO UMA CACULADORA NO <i>SOFTWARE GEOGEBRA</i> PARA DETERMINAR O VOLUME DE UMA ESFERA.....</b>	<b>7</b>
2.1 CRIANDO O SELETOR DE VALORES PARA O RAIO DA ESFERA.....	11
2.2 CRIANDO A CIRCUNFERÊNCIA COM EFEITO DESLIZANTE.....	14
2.3 CRIANDO UMA ESFERA COM EFEITO DESLIZANTE .....	20
2.4 FINALIZANDO A CALCULADORA PARA O VOLUME DE UMA ESFERA.....	22
<b>3 PROBLEMA ENVOLVENDO O CÁLCULO DE UMA ESFERA.....</b>	<b>30</b>
3.1 EXERCÍCIOS PARA O ALUNO RESOLVER UTILIZANDO A CALCULADORA.....	31
<b>REFERÊNCIA .....</b>	<b>32</b>

## 1 APRESENTAÇÃO

Com o intuito de orientar os professores durante as aulas de matemática para o ensino do Cálculo do Volume de uma Esfera, que corresponde a um dos sólidos pertencentes ao estudo de Corpos Redondos da Geometria Espacial. Contribuindo para a implementação da tecnologia em sala de aula, obedecendo aos princípios da BNCC (BRASIL, 2018), garantindo que o aluno seja o agente do próprio conhecimento.

Nesse sentido, buscamos mostrar nesse trabalho o passo a passo da construção de uma calculadora digital em um software gratuito on-line, com finalidade didática para o ensino-aprendizagem de matemática em sala de aula, apresentando ao Professor um método de utilização do Software para o ensino diferenciado em que o aluno tenha uma nova visão de como realizar cálculos precisos e de forma mais divertida e agradável, participando da construção desde o começo da aula e observando seus próprios resultados.

Assim sendo, pelo site de uma Calculadora gráfica on-line, é possível acessar diversas ferramentas para construções geométricas com um pacote gratuito, inclusive na construção de gráficos, geometrias, álgebra, 3D, estatísticas, probabilidade, tudo em um único suporte lógico.

O software pode ser acessado pelo computador ou pelo celular no site < <https://www.geogebra.org> > nele estão vários recursos interativos e dinâmicos que podem ser usados em sala de aula, contribuindo para um ensino mais simples e agradável de assuntos complexos da matemática, com diversas ferramentas para criação de objetos, inclusive no âmbito tridimensional.

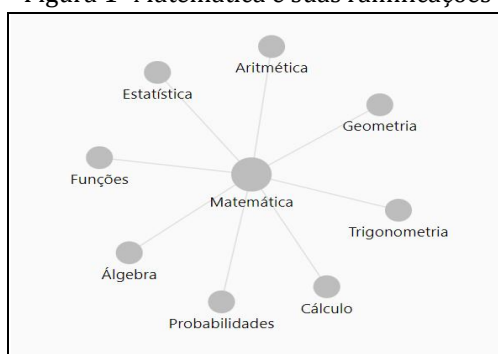
Portanto, este trabalho vem acrescentar ao ensino da matemática, assim como diversos outros trabalhos, uma maneira didática de o professor de matemática repassar o conteúdo pretendido, que neste caso é a construção de uma calculadora para encontrar o volume de uma esfera qualquer.

## 1.1 CONHECENDO A INTERFACE DO *APP GEOGEBRA* NA MODALIDADE ON-LINE

GeoGebra é um software gratuito criado pelo austríaco Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburg, deu início ao projeto em 2001 com o intuito de ser uma ferramenta educacional para auxiliar no ensino da Matemática, (GEOGEBRA, 2013).

O app possui uma multi-plataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em uma mesma ferramenta. Por ser on-line e inteiramente gratuita, a ferramenta pode ser facilmente utilizada em celulares e computadores, desenvolvida para o ensino-aprendizagem da matemática nas escolas, sendo possível a realização de cálculos e construções de figuras e sólidos pelo próprio aluno durante as aulas.

Figura 1- Matemática e suas ramificações



Fonte: <https://www.geogebra.org/materials>

Este trabalho baseia-se em atividades de elaboração de artefatos que garantam a gênese instrumental, conceito proposto por Rabardel (1995, 2003):

os instrumentos humanos têm um duplo caráter: eles contêm componentes dos artefatos e componentes dos esquemas de utilização dos usuários. Para ele, a elaboração de artefatos e a adaptação informal das atividades humanas para os artefatos, está relacionada, por um lado, às variações locais das situações e das tarefas e, por outro (mais importante), ao desenvolvimento de instrumentos através da gênese instrumental. (Rabardel (2003), apud Lousada(2015)).

Os artefatos propostos por Rabardel, nesse trecho, indicam que as tarefas propostas pelo professor, tendem a familiarizar o aluno ao conteúdo tratado, através dos respectivos esquemas que neste trabalho podem ser verificados em diversas plataformas do GeoGebra.

Para acessar essa calculadora gráfica, como é conhecido o GeoGebra, basta entrar no site < <https://www.geogebra.org> >. Nesse site, será possível ter acesso a todas as ferramentas necessárias ao conteúdo da plataforma:

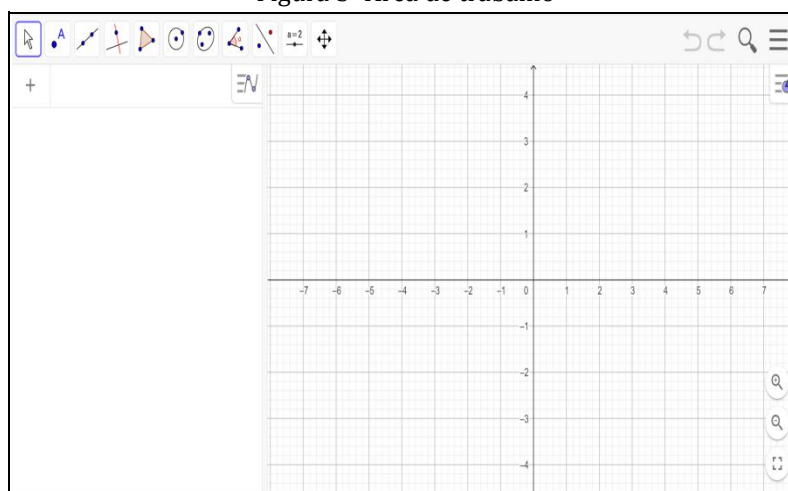
Figura 2- Interface do GeoGebra on-line



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Essa é a aparência inicial do site que nos revela a grande abrangência do app, mostrando todas as possibilidades que o aplicativo oferece. Para esse estudo faremos o uso do “GeoGebra Clássico”, na parte onde ficam os “pronto para testes”. Veremos abaixo como essa cessão se apresenta:

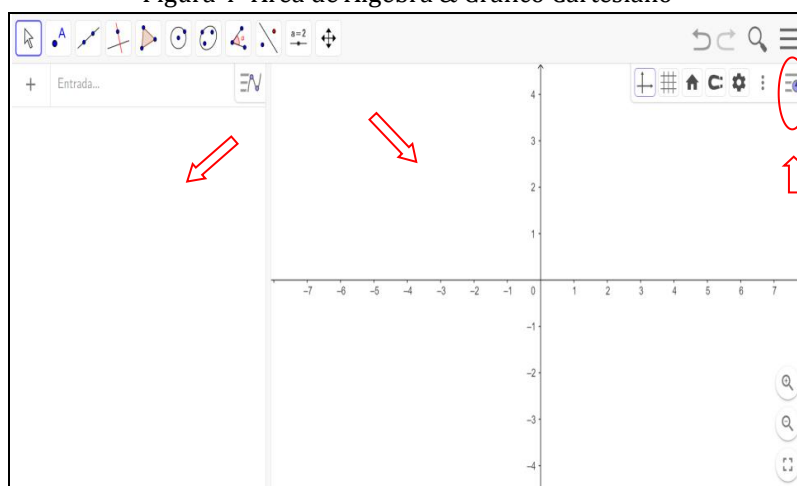
Figura 3- Área de trabalho



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Essa é a plataforma onde ocorre toda construção do nosso trabalho, possui uma aparência simples e bem estruturada. Em seguida, apresentamos o botão que altera algumas configurações importantes na plataforma:

Figura 4- Área de Álgebra & Gráfico Cartesiano



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

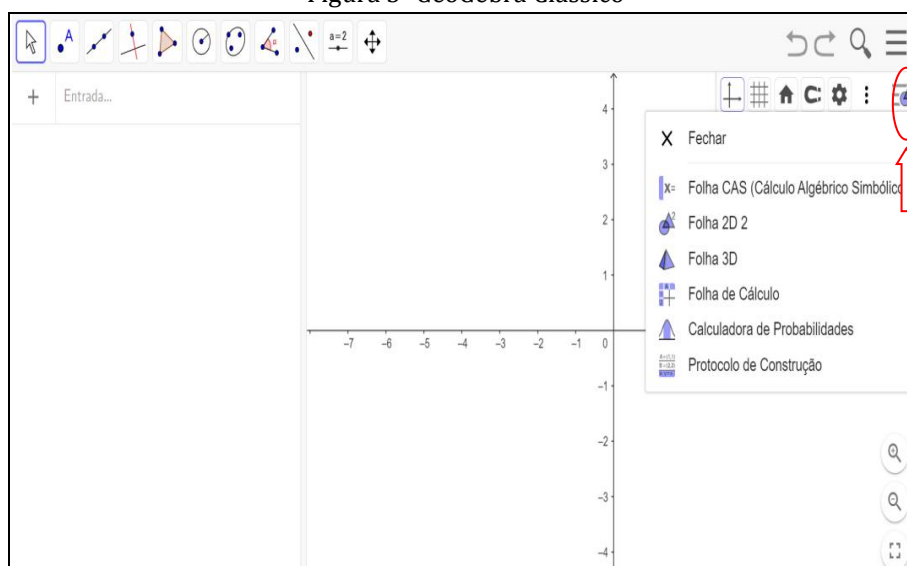
Clicando no botão em evidência na Figura, é possível definir uma nova aparência para a apresentação do GeoGebra, onde podemos, inclusive, retirar as grades da configuração do gráfico. Existem diversas outras funções, que podem ser investigadas pelo professor ou pelo próprio aluno para novas atividades no futuro.

Na próxima seção, faremos o passo a passo para programação da calculadora no software geogebra para determinar o “volume de uma esfera”. Essa calculadora será uma pequena demonstração da utilização do software para o ensino da matemática em sala de aula, que dará ao professor uma visão bem clara e didática de como manusear o app e assim poder utilizá-lo como ferramenta para o ensino de outros conteúdos, inclusive

## 2 PROGRAMANDO UMA CACULADORA NO *SOFTWARE GEOGEBRA* PARA DETERMINAR O VOLUME DE UMA ESFERA

Para a programação da calculadora que nos forneça o volume de uma esfera, iniciaremos pela configuração da plataforma em um novo ambiente, seguindo as orientações da figura 4, que nos proporcionará os recursos específicos. Como estamos tratando do estudo do volume de uma esfera, então o ideal é configurar a plataforma em 3D.

Figura 5- GeoGebra Clássico



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)


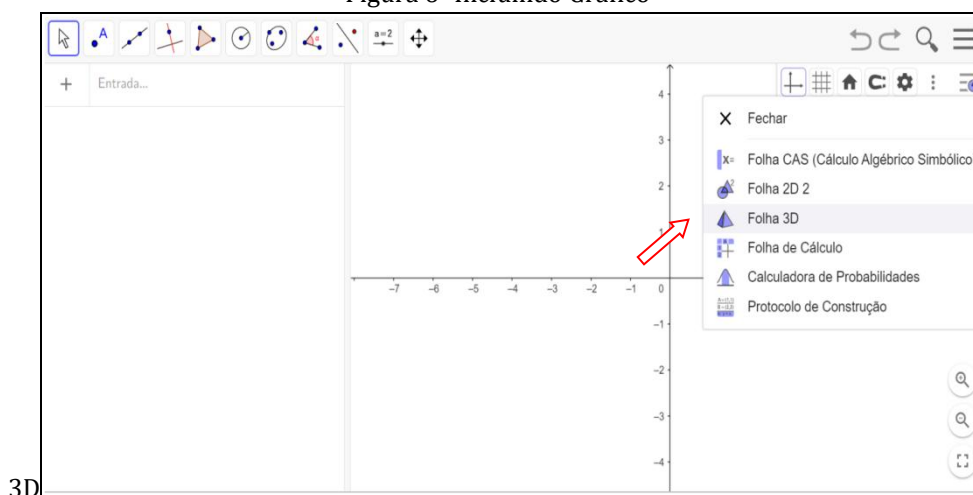
Nessa Figura é apresentado o botão de configuração (  ) para deixar o ambiente favorável ao nosso trabalho de construir a calculadora. Assim sendo, ao clicar nele, abrirá uma aba onde selecionaremos a função “Folha 3D”, como está apresentado na Figura a seguir:

Figura 6- Incluindo Gráfico

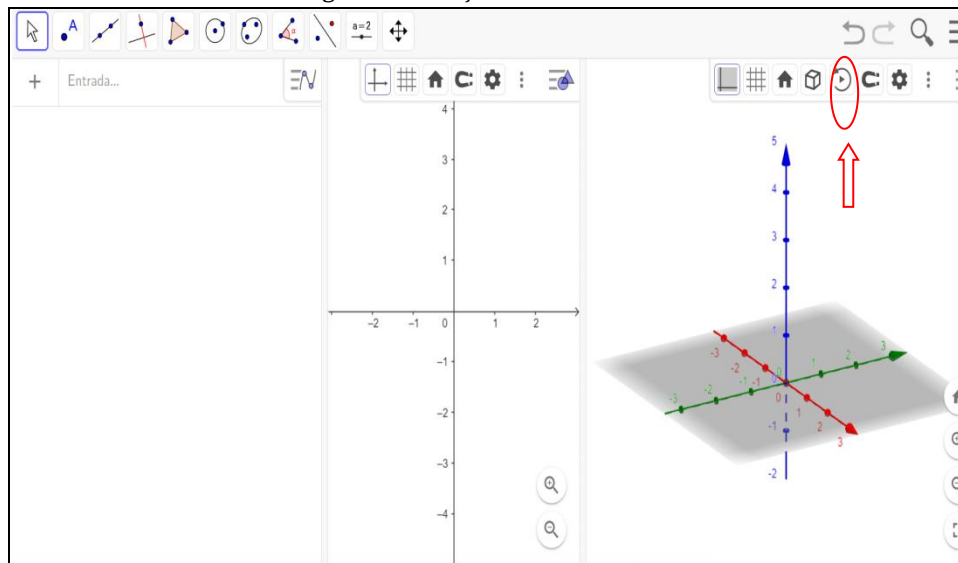


Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Ao teclar na função “Folha 3D” surgirá um gráfico tridimensional, onde será construído um modelo de Esfera que será a base para a calculadora do volume pretendido. A imagem da tela de trabalho ficará assim:



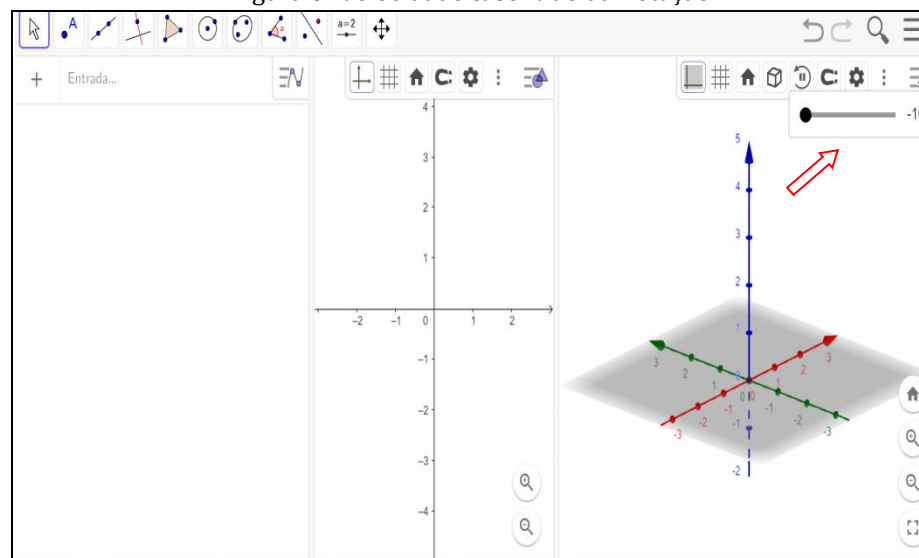
Figura 7- Rotação tridimensional



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Para que o aluno se sinta familiarizado com a plataforma e entenda a funcionalidade de um sistema tridimensional desse, mostre a ele o gráfico em Rotação, todos irão se impressionar e a aula se tornará mais prazerosa e dinâmica. Para isso, selecione a função Rotação em evidência na Figura 5 e daí abrirá uma aba com valores de -10 a 10, onde poderá mostrar ao aluno o gráfico em rotação anti-horário no caso dos valores negativos até o número -10 e no sentido horário no caso dos valores positivos até o número 10, como é mostrado a seguir:

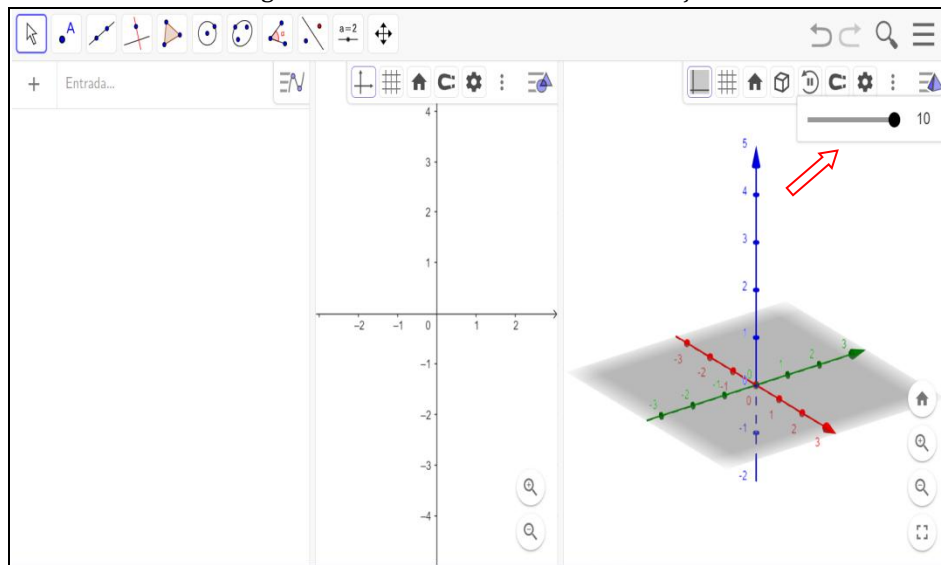
Figura 8- Velocidade &amp; sentido da Rotação



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Assim como o Figura anterior, com valor negativo, fazendo o gráfico rotacionar no sentido anti-horário, a Figura a seguir, com valor escolhido positivo, faz o gráfico rotacionar no sentido horário:

Figura 9- Velocidade &amp; sentido da Rotação

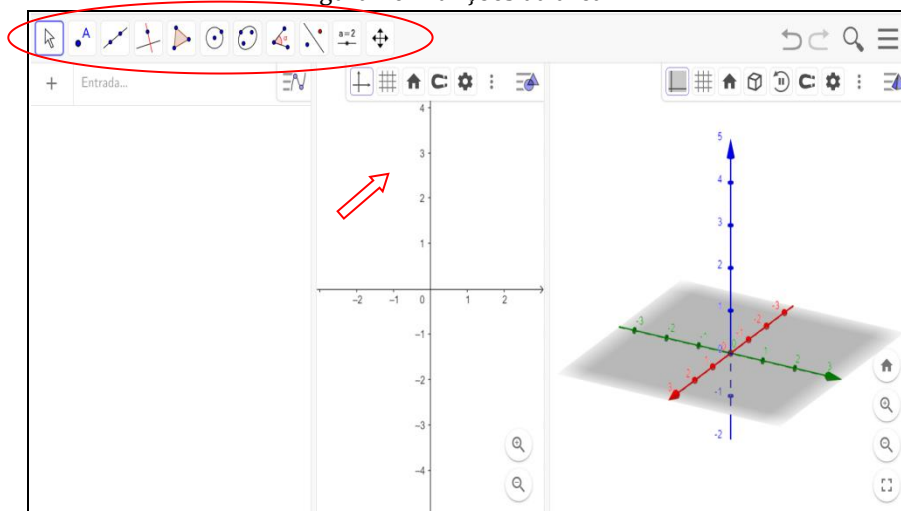


Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Com essa simples demonstração, o aluno passa a sentir que tem o domínio do conteúdo que está aprendendo, e constrói a base do conhecimento para a calculadora que está criando juntamente com o professor em sala de aula.

Nas próximas duas Figuras serão mostradas as ferramentas referentes às funções de cada gráfico que aparece na plataforma. Fazendo um clique dentro do primeiro gráfico, surgem na aba superior as funções referentes a construção nessa área correspondente ao plano cartesiano que fará a movimentação e surgimento do objeto tridimensional no gráfico ao lado. Vejamos quais ferramentas aparecem ao clicarmos dentro do primeiro gráfico:

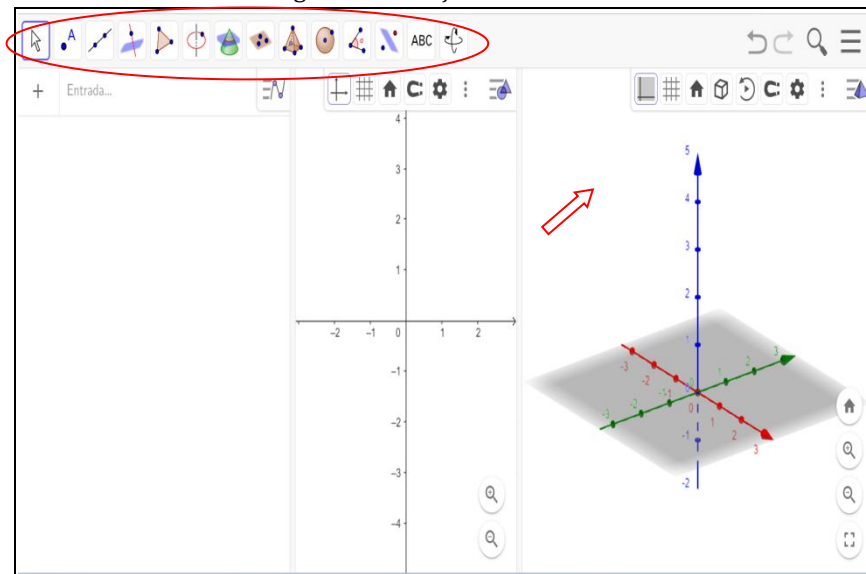
Figura 10- Funções da área 2D



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Aqui mostraremos quais funções aparecem ao clicarmos dentro do segundo gráfico:

Figura 11- Funções da área 3D

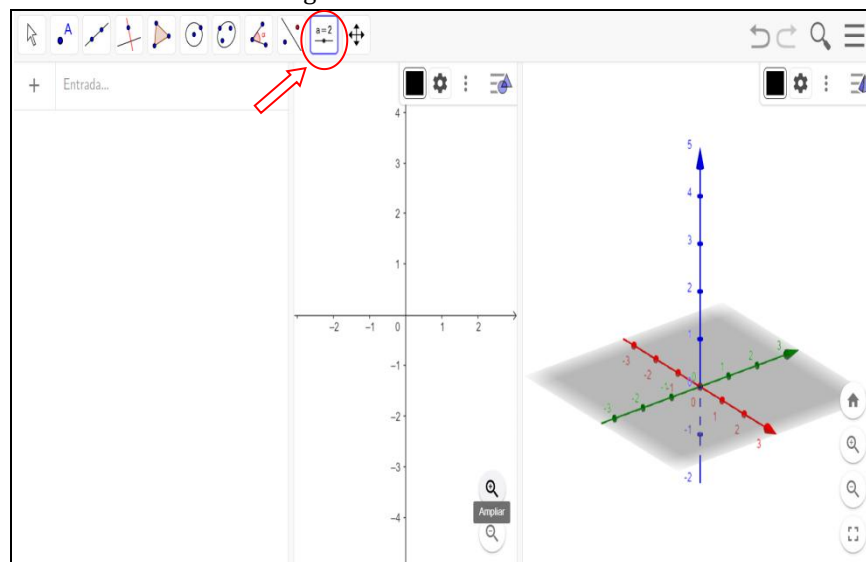


Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

## 2.1 CRIANDO O SELETOR DE VALORES PARA O RAIOS DA ESFERA

Nessa seção iremos mostrar como criar o seletor de valores para o tamanho do raio (R), componente essencial para o cálculo do volume da Esfera que o aluno irá criar, juntamente com o professor em sala de aula.

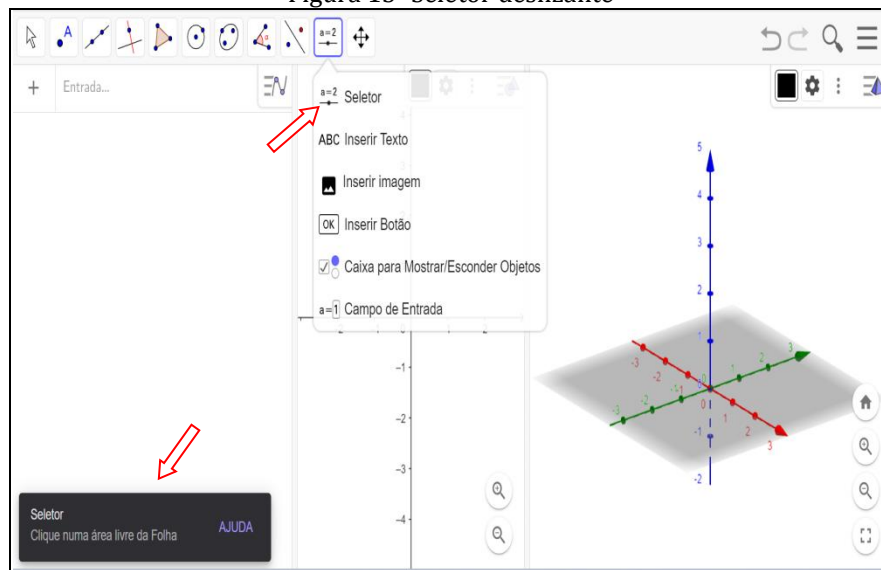
Figura 12- Seletor deslizante



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Ao clicar no botão em evidência do conjunto de ferramentas do primeiro gráfico da plataforma, será exibida uma aba com várias outras ferramentas como mostra a Figura seguinte:

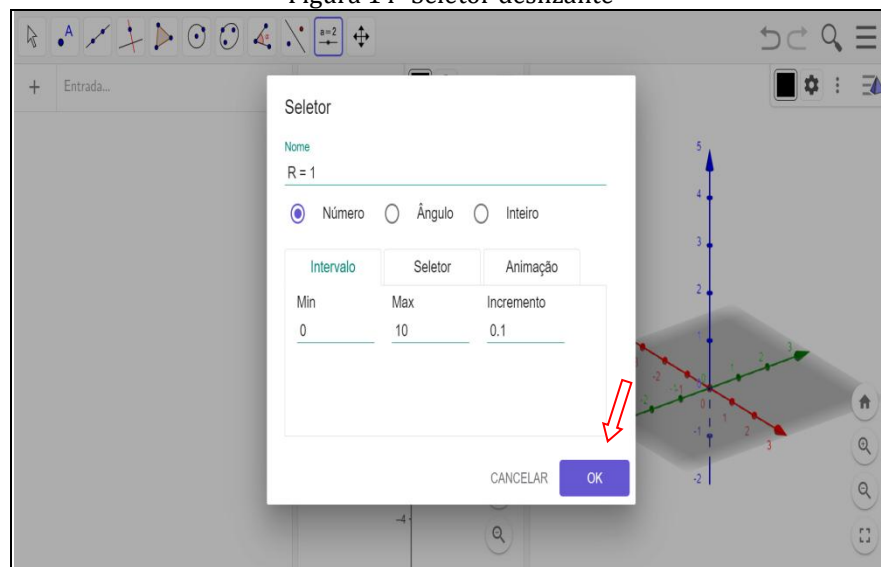
Figura 13- Seletor deslizante



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Nesse momento, ao clicar em “Seletor” uma mensagem aparecerá na tela na parte inferior esquerda que informa o próximo passo numa caixinha preta dizendo “Clique numa área livre da Folha” essa área deve ser a área do primeiro gráfico, onde fica o plano cartesiano de dois eixos, uma aba abrirá como mostra a figura abaixo

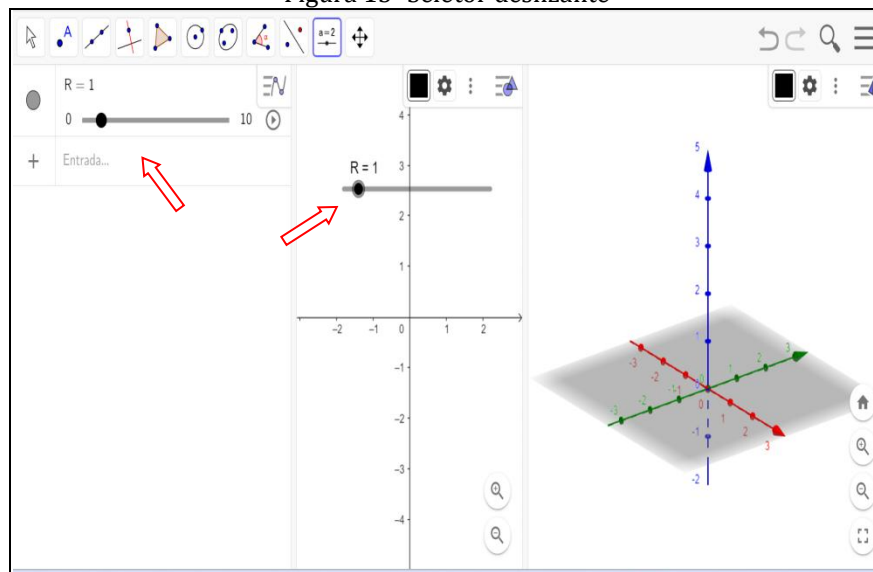
Figura 14- Seletor deslizante



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Dáí o professor instruirá o aluno a acrescentar ( $R=1$ ) para o nome do seletor, após isso ele deverá selecionar o campo “número” e em seguida um intervalo de valores possíveis para o comprimento do raio da esfera que estamos construindo, podem escolher o  $\text{Min}=0$  e o  $\text{Max}=10$ , por exemplo, podendo ser qualquer outro intervalo e depois acrescenta um incremento de variação desse raio igual a  $0,1$  e conclui o seletor teclando ok. Aparecerá uma régua deslizante na área do gráfico intermediário e outra na área da álgebra como podemos ver a seguir

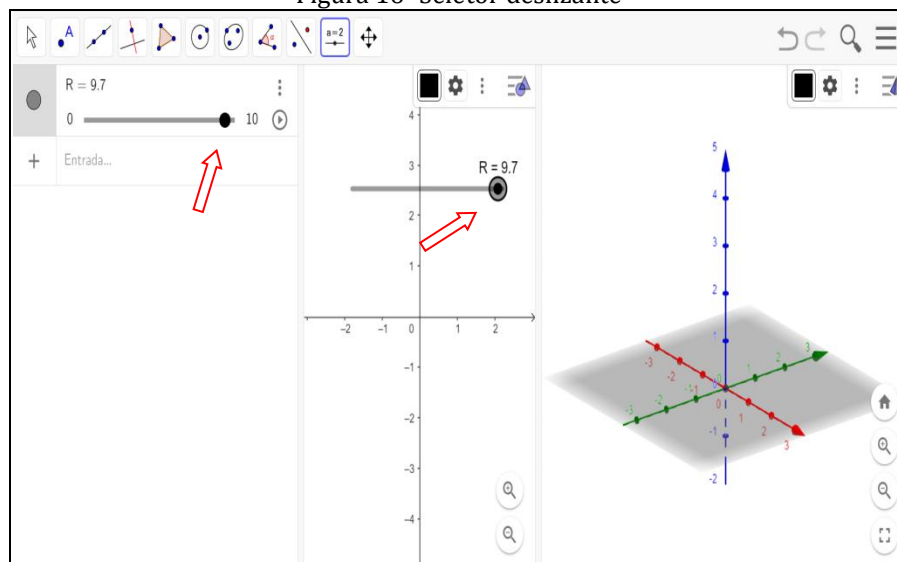
Figura 15- Seletor deslizante



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Essa barra deslizante será o seletor para os prováveis valores de [0 a 10] correspondentes ao raio nessa calculadora, escolhidos anteriormente, como exemplo, para compor a calculadora do volume da esfera que será criada neste trabalho. Não descartando a hipótese de criação de outra com valores maiores, caso seja necessário para o estudo de grandes corpos geométricos. Essa Figura 15 representa a barra deslizante com valor do Raio igual a 1, porém mostraremos que, nesta mesma barra, podemos encontrar outros valores. Vejamos:

Figura 16- Seletor deslizante



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

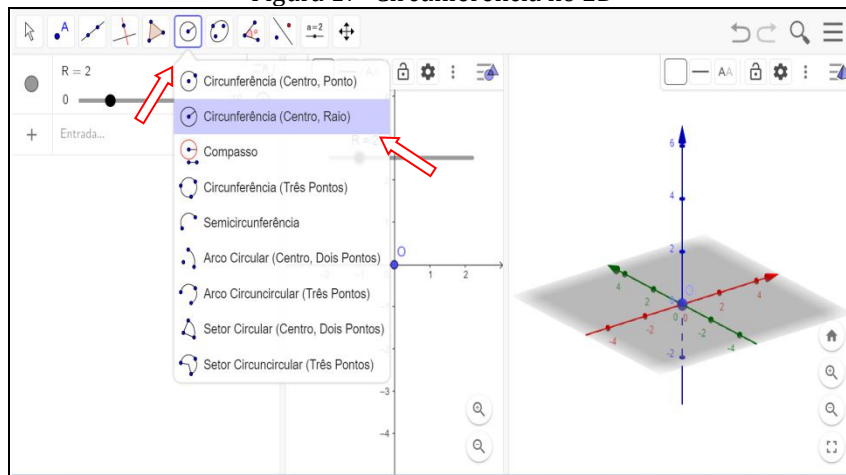
Nessa figura temos um valor 9,7 para mostrar que deslizando pela barra podemos obter um novo valor para o referido Raio. Note, também, que ao movimentar um seletor o outro se move automaticamente. Essa é uma ferramenta muito importante do GeoGebra para a construção da calculadora e para o entendimento do aluno, pois

além de nos fornecer o volume do nosso objeto, mostrará o tamanho da esfera com dimensões tridimensionais.

## 2.2 CRIANDO A CIRCUNFERÊNCIA COM EFEITO DESLIZANTE

Esse capítulo vai apresentar a principal função da calculadora, a qual consiste em fazer a relação entre o objeto e a fórmula do volume que introduziremos ao finalizar a calculadora. A circunferência será criada no ambiente virtual intermediário correspondente ao gráfico cartesiano que produzirá imediatamente uma Equação na área das configurações algébricas, dando origem, também, a outra circunferência no gráfico tridimensional, onde será criada a esfera, que é o nosso objeto de pesquisa para esse trabalho. Vejamos o passo a passo de como criar essa circunferência:

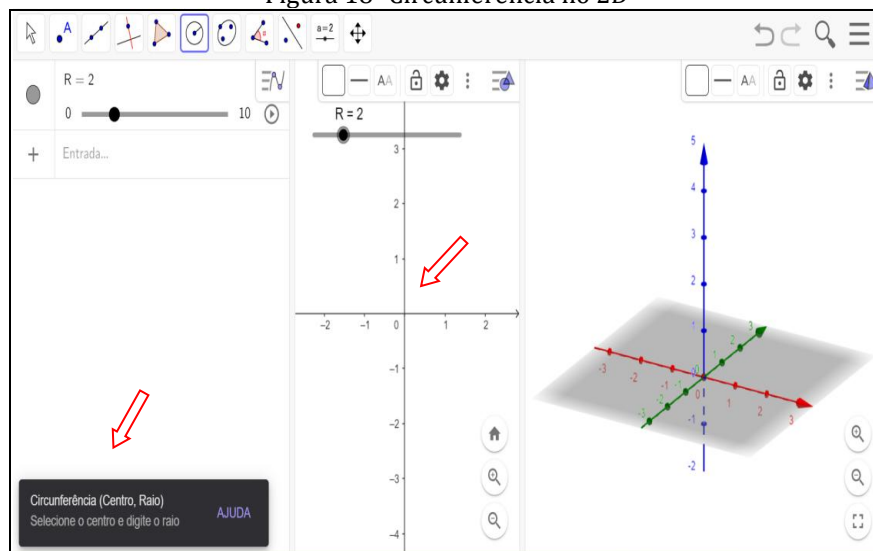
Figura 17- Circunferência no 2D



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Na barra de ferramentas em evidência, você clica no botão circunferência, o qual abrirá uma aba, onde você escolherá a opção “Circunferência (Centro, Raio)”,

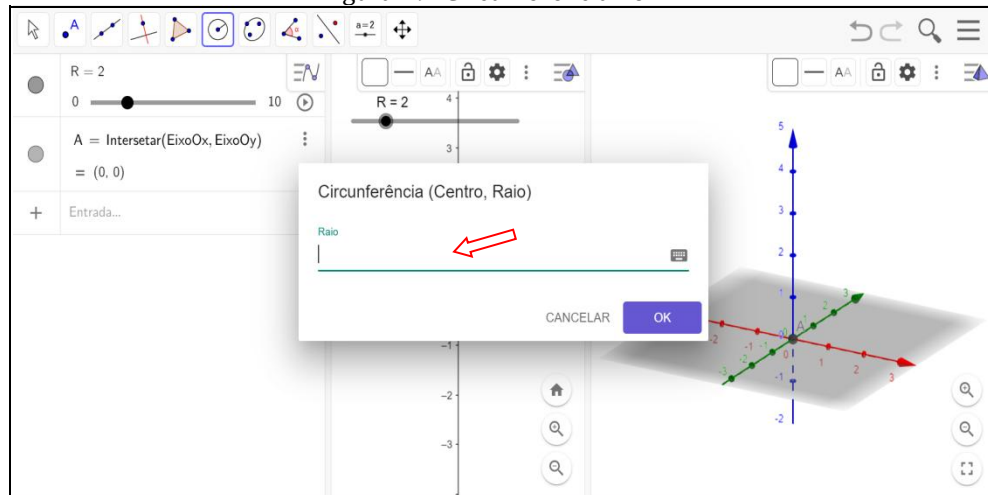
Figura 18- Circunferência no 2D



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Nesse momento aparecerá no canto inferior da tela no lado esquerdo, uma caixa preta informando o próximo passo, “Selecione o centro e digite o Raio”, esse centro se refere ao centro onde você quer que esteja posicionada a circunferência. Sendo assim, você vai escolher o ponto indicado no gráfico acima nas coordenadas (0,0) e observar que abrirá uma solicitação para você acrescentar o valor desse Raio.

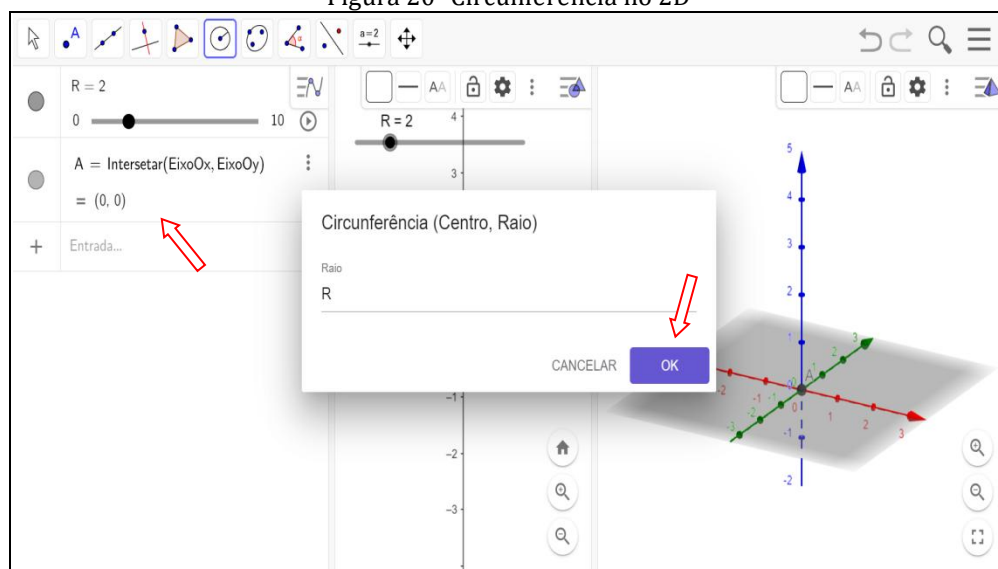
Figura 19- Circunferência no 2D



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Essa opção solicita que você acrescente um valor ao Raio, porém você incluirá todos os valores que acrescentamos no seletor incluindo apenas a letra “R” que representa todos esses valores que escolhemos para o seletor do Raio anteriormente. Vejamos como ficará:

Figura 20- Circunferência no 2D



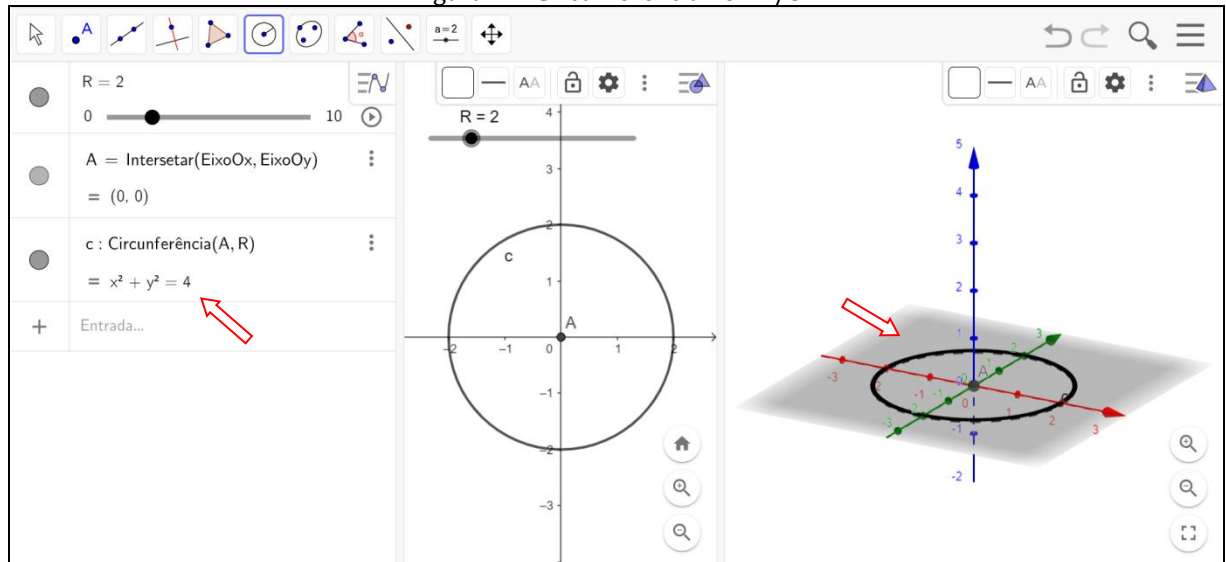
Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Antes de finalizar, observe que na área da álgebra apareceu o ponto que você teclou no gráfico, neste caso, como foi bem no centro, então ficou (0,0), também surge

um ponto no cento do gráfico tridimensional e após acrescentar a letra R, tecla OK finalizando a construção da circunferência.

Ao teclar OK, a circunferência aparece:

Figura 21- Circunferência no 2D/3D

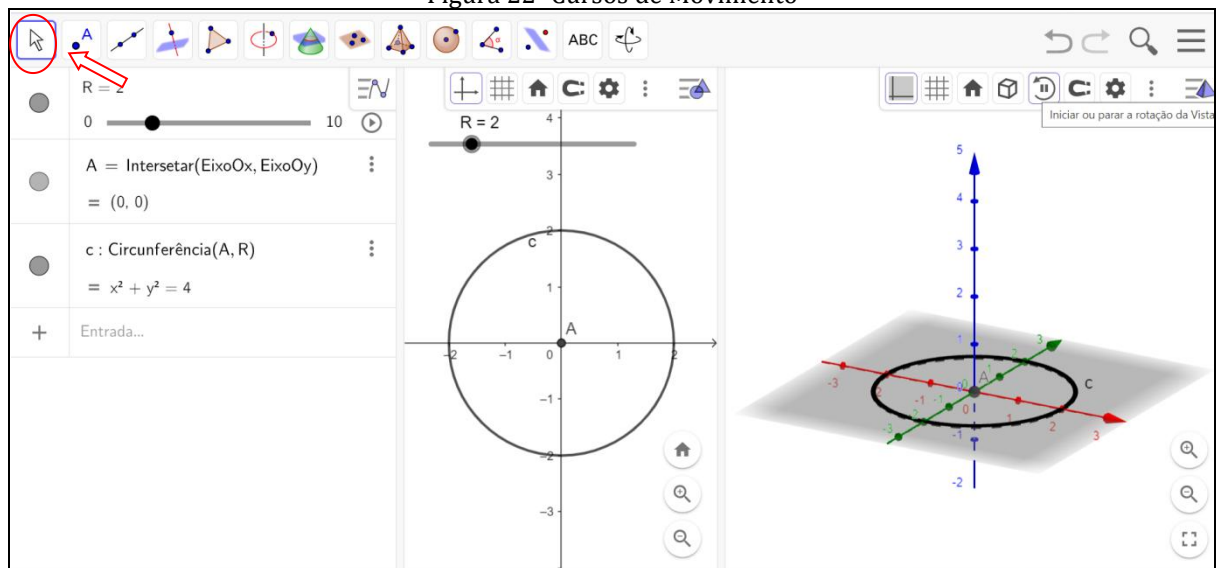


Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

A Equação da circunferência ( $x^2 + y^2 = r^2$ ) já aparece na área da álgebra, com  $r=2$ , pois o seletor está posicionado no raio 2, note que ao mesmo tempo criamos uma circunferência no gráfico 3D.

Agora vamos ajustar alguns elementos:

Figura 22- Cursos de Movimento

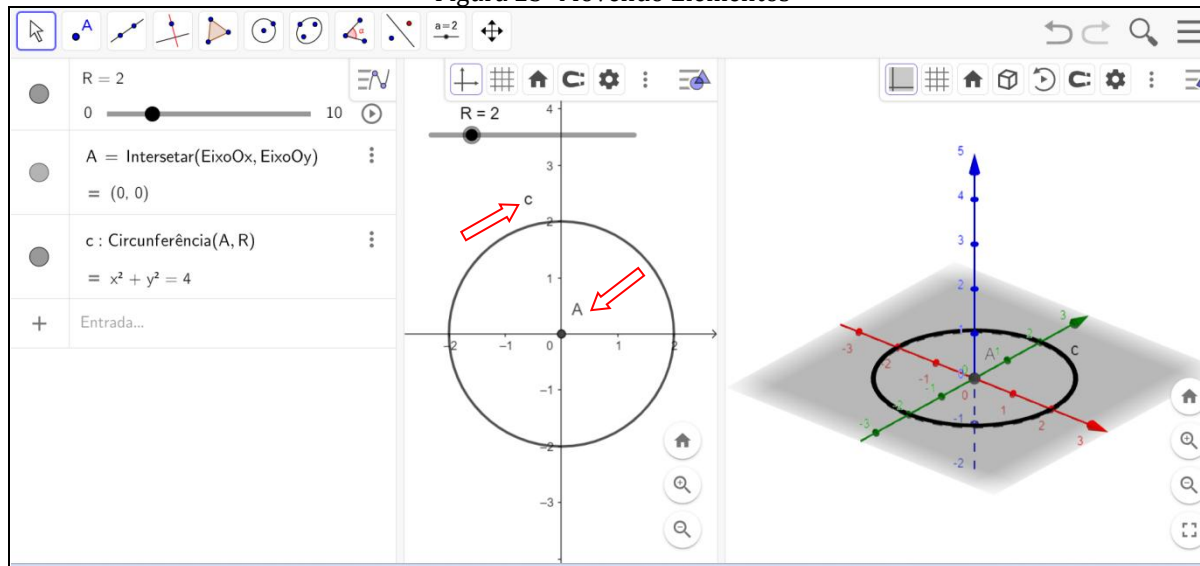


Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)



Teclando nesse cursor, você poderá mover diversos elementos no gráfico e inclusive o próprio gráfico. Primeiro posicionamos as letras que representam a circunferência em um local mais visível:

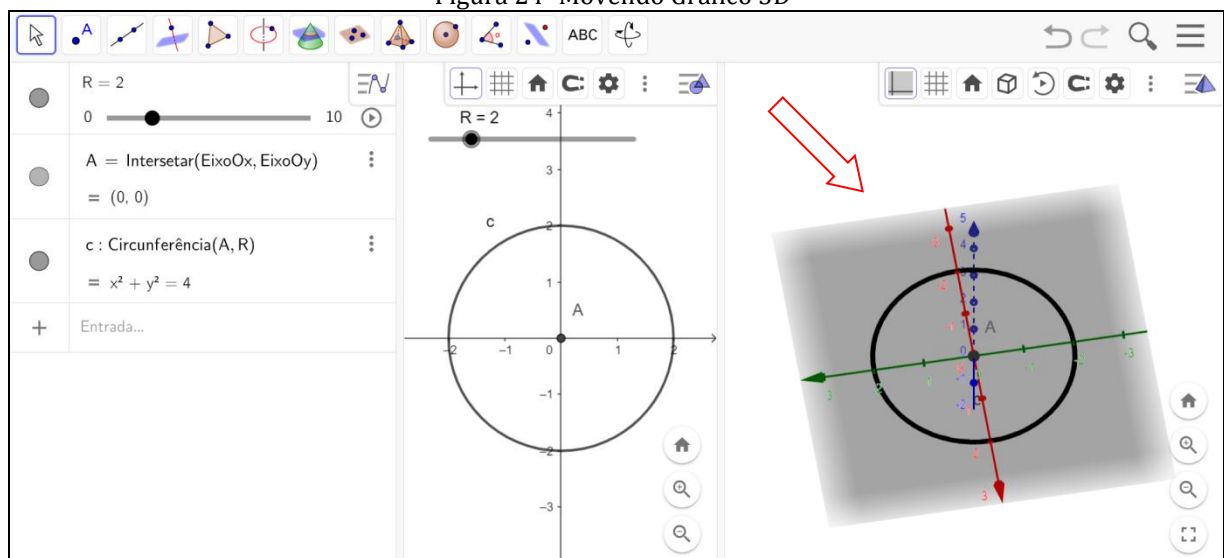
Figura 23- Movendo Elementos



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Você pode posicionar esses elementos onde achar melhor, veja que ao mesmo tempo essas letras se moverão no gráfico 3D. Em seguida veja uma posição para seu gráfico 3D:

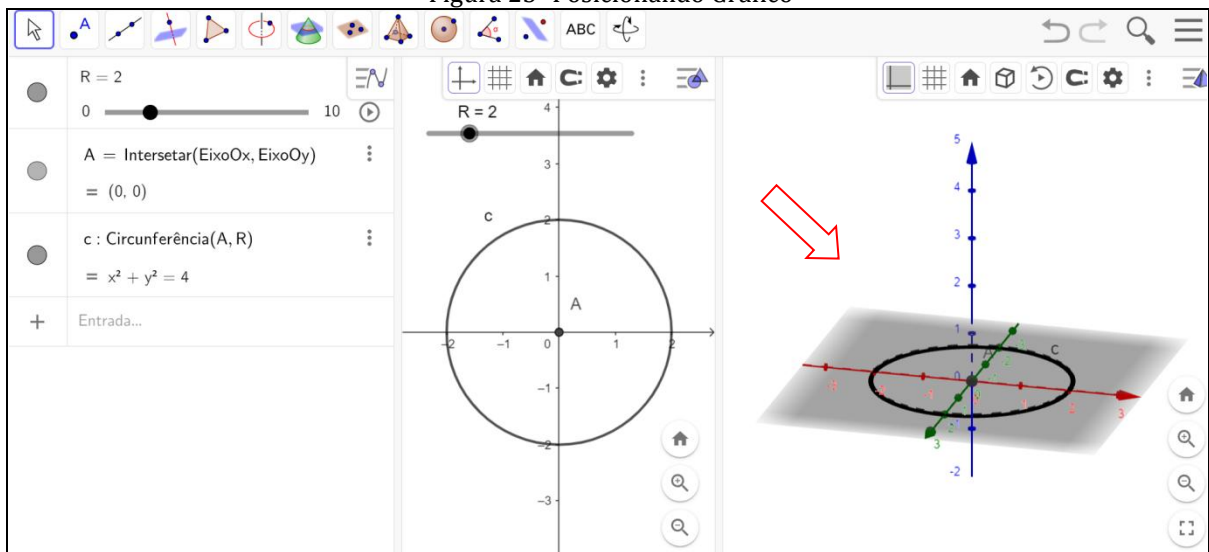
Figura 24- Movendo Gráfico 3D



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Para movimentar esses elementos e o gráfico 3D, você deve dar dois toques no touch screen e segurar para arrastar ou um clique com o botão esquerdo do mouse e segurar para arrastar. O gráfico 3D se move em todas as direções, escolha uma que seu objeto fique bem visível, de início vamos posicionar da seguinte maneira:

Figura 25- Posicionando Gráfico

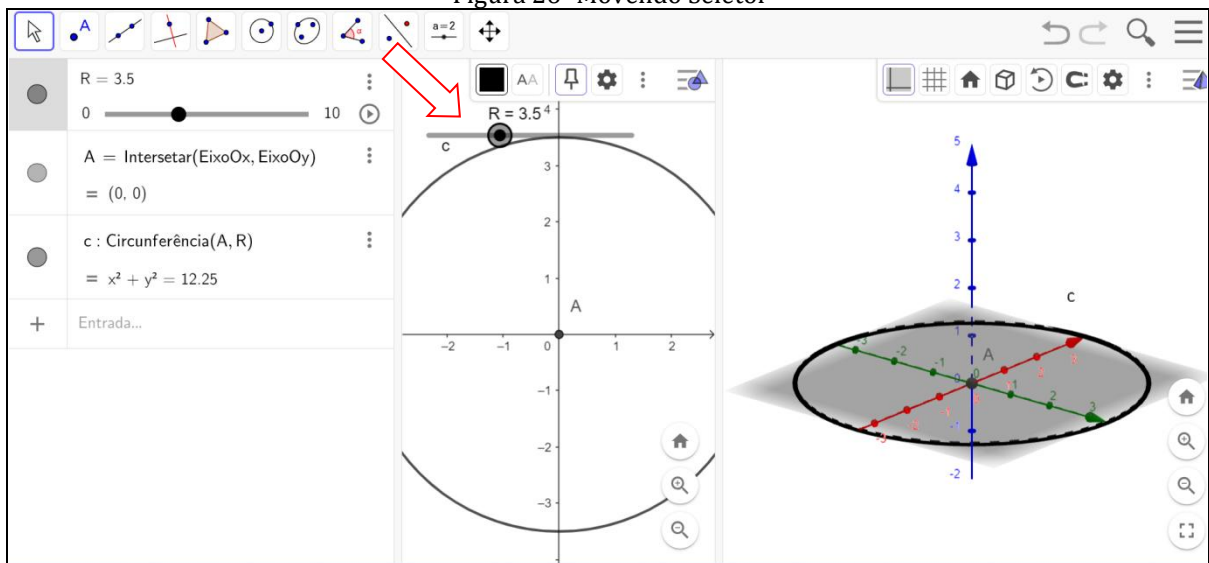


Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Essa é uma posição que fica bem visível a circunferência e onde podemos colocar a esfera para crescer facilmente.

Mova o seletor do Raio e você verá como a circunferência cresce e diminui de acordo com o tamanho desse Raio.

Figura 26- Movendo Seletor

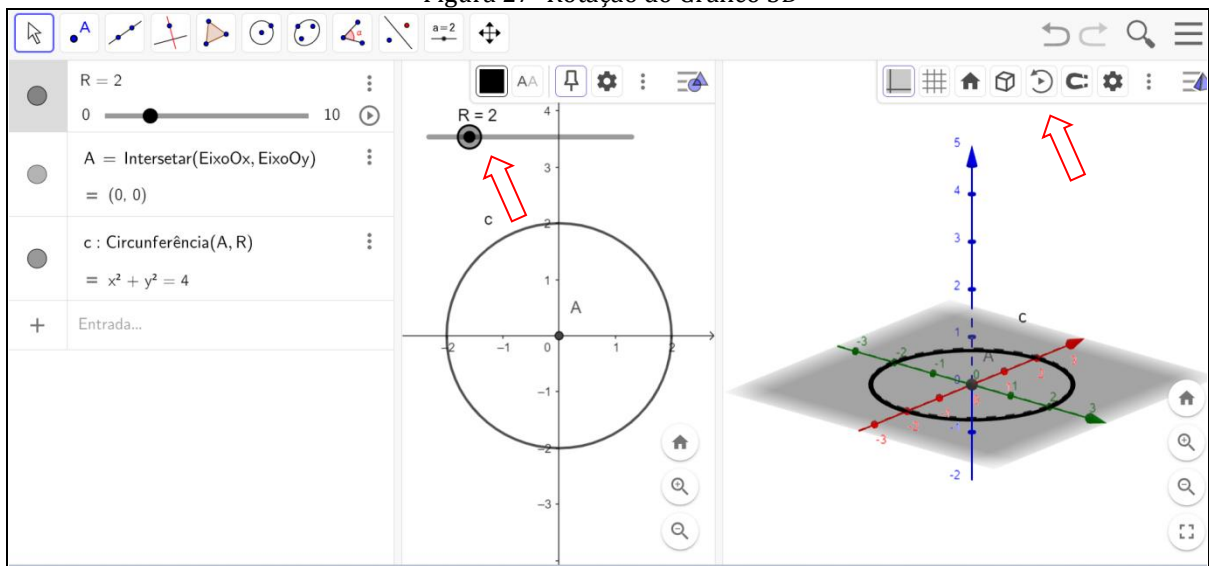


Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Observe que a circunferência está maior e muda de tamanho sempre que mudamos o comprimento do Raio.

Por enquanto, posicione o raio em 2, e nas ferramentas do gráfico 3D, você tecla em rotação para mostrar ao aluno o movimento da circunferência que ele criou.

Figura 27- Rotação do Gráfico 3D

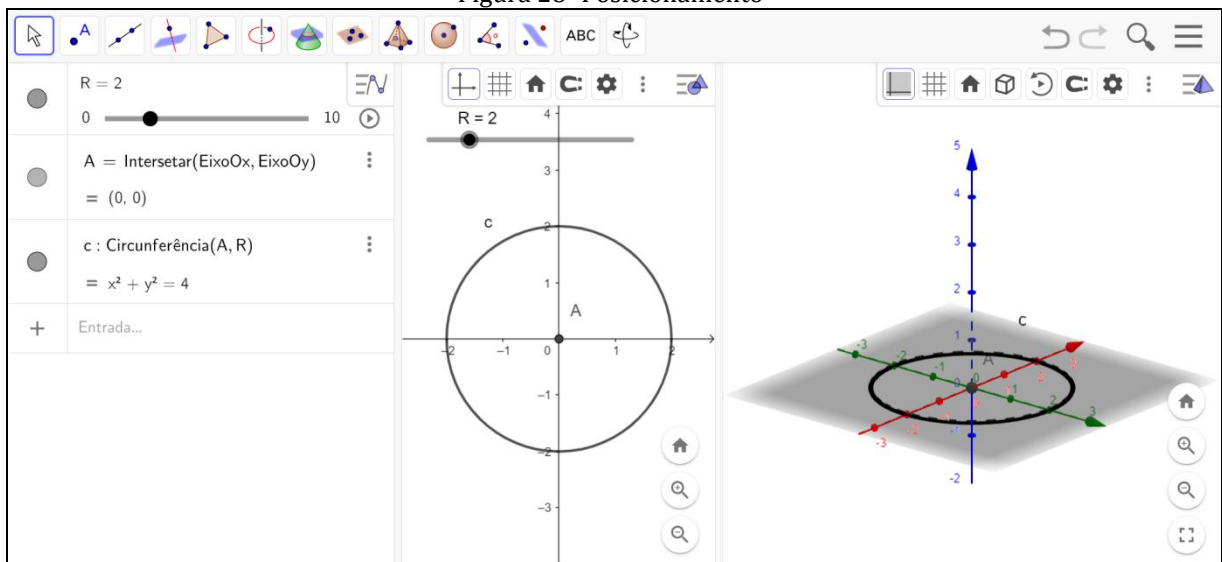


Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Sempre finalizar as construções com movimentação para a aula ficar dinâmica e prazerosa, e nesse momento introduzir algum conceito importante na relação do conteúdo com o cotidiano do aluno, pois nesse momento estão todos prestando muita atenção na aula.

Pare a rotação e dê um clique dentro da área 3D.

Figura 28- Posicionamento



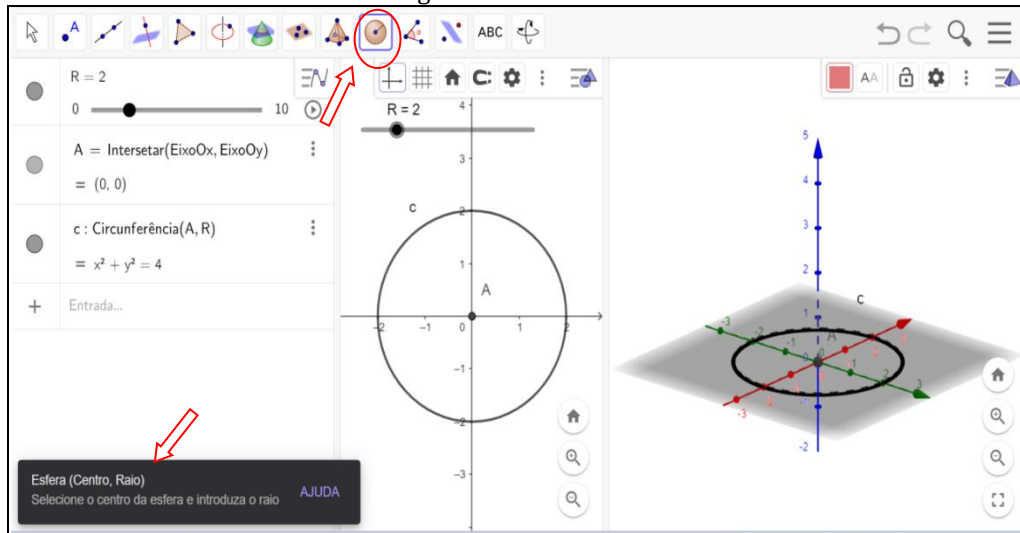
Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Essa será a janela que criaremos a esfera, colocando dentro dessa circunferência com as mesmas referências da circunferência e do seletor de Raio, para dar forma a nossa calculadora.

### 2.3 CRIANDO UMA ESFERA COM EFEITO DESLIZANTE

Nessa seção faremos a construção da Esfera de maneira que ela apresente uma relação com a barra deslizante criada anteriormente para os valores do Raio. Com isso, será possível mover a barra deslizante ao mesmo tempo em que a Esfera adquire novas capacidades proporcionais ao tamanho do raio, coincidindo inclusive com as dimensões da circunferência.

Figura 29 – Esfera 3D



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)


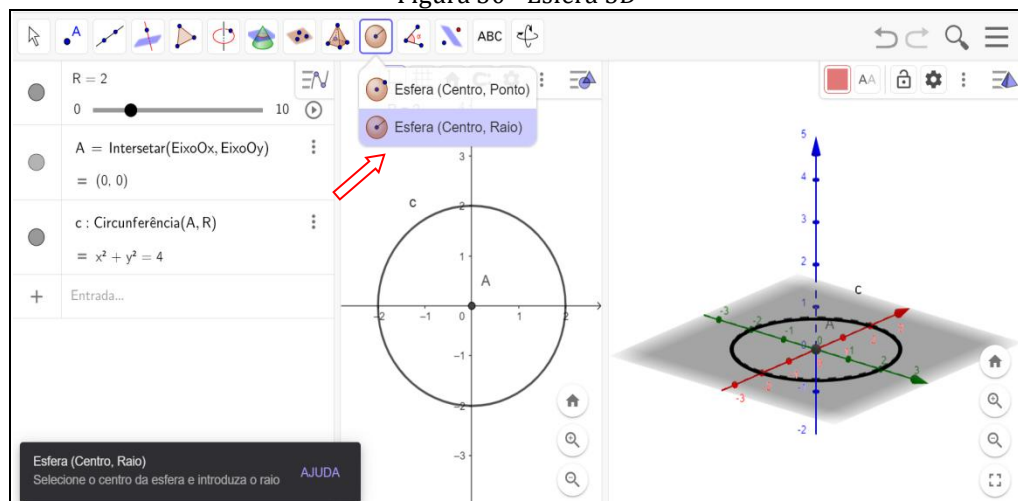
Seguindo na construção da calculadora para o volume da Esfera, utilize  $R=2$  e dê um clique dentro da área tridimensional. As ferramentas na barra superior nos oferecem as opções de criação, escolheremos teclar no botão esfera .

Figura 30 - Esfera 3D

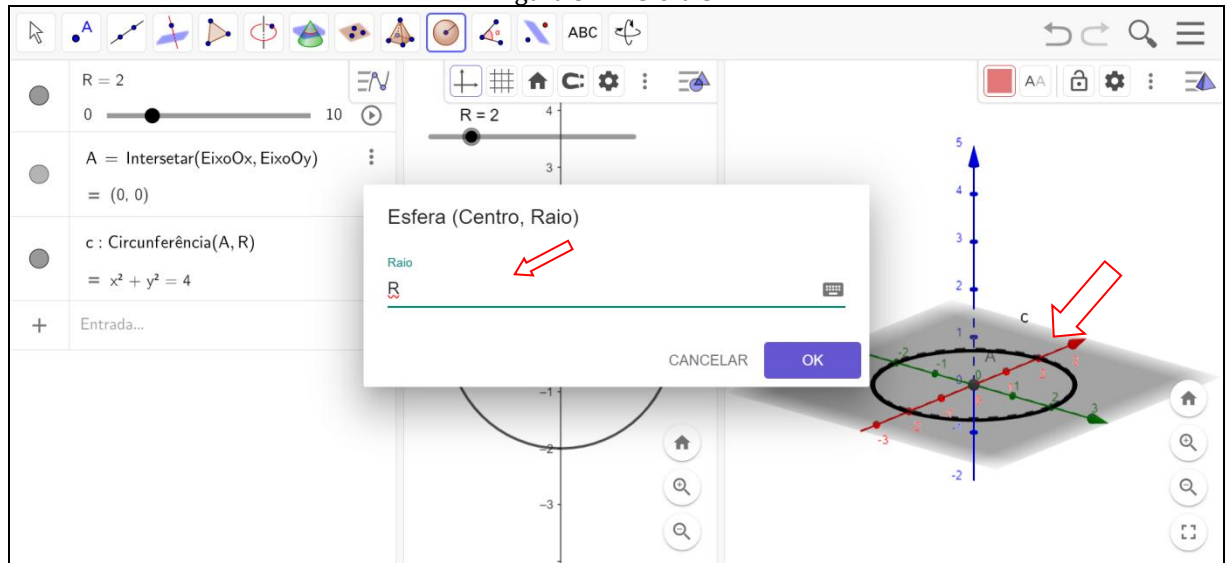


Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Ao escolhermos a opção Esfera (Centro, Raio), uma mensagem surge na parte inferior da tela “Selecione o centro da esfera e introduza o raio”, nesse momento você

escolhe o centro da circunferência no gráfico 3D, onde a esfera será criada, observe o procedimento na figura abaixo:

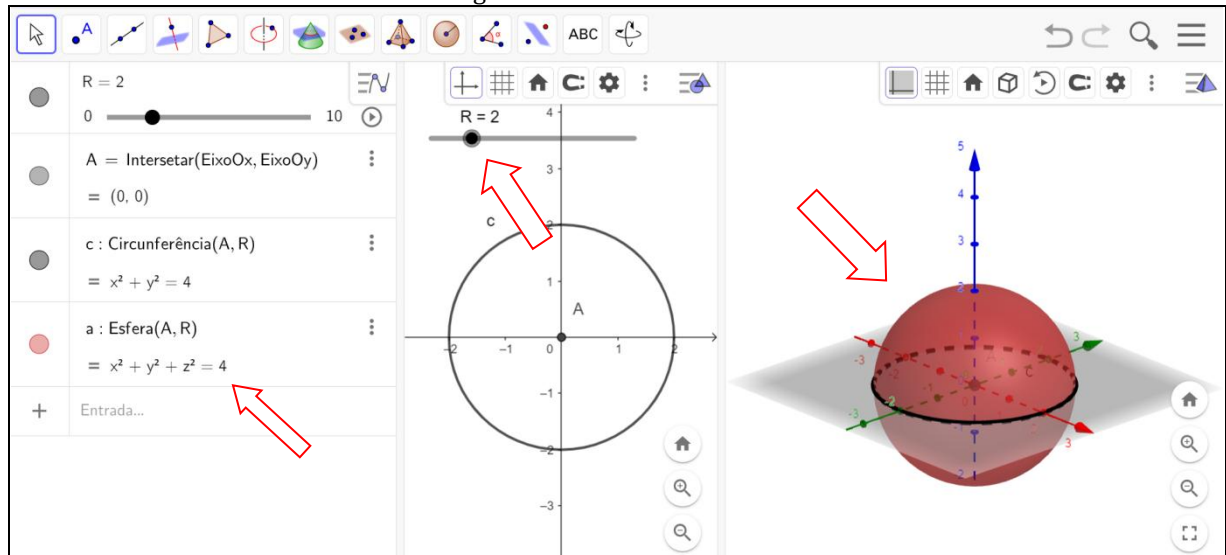
Figura 31 - Esfera 3D



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Escolha o centro da circunferência para o centro da esfera também, nesse momento surge na tela uma janela perguntando o valor do raio, colocaremos novamente a letra “R” que serão todos os raios do seletor (barra deslizante) que criamos anteriormente. Ao teclar OK, a Esfera aparece:

Figura 32 – Efeito deslizante

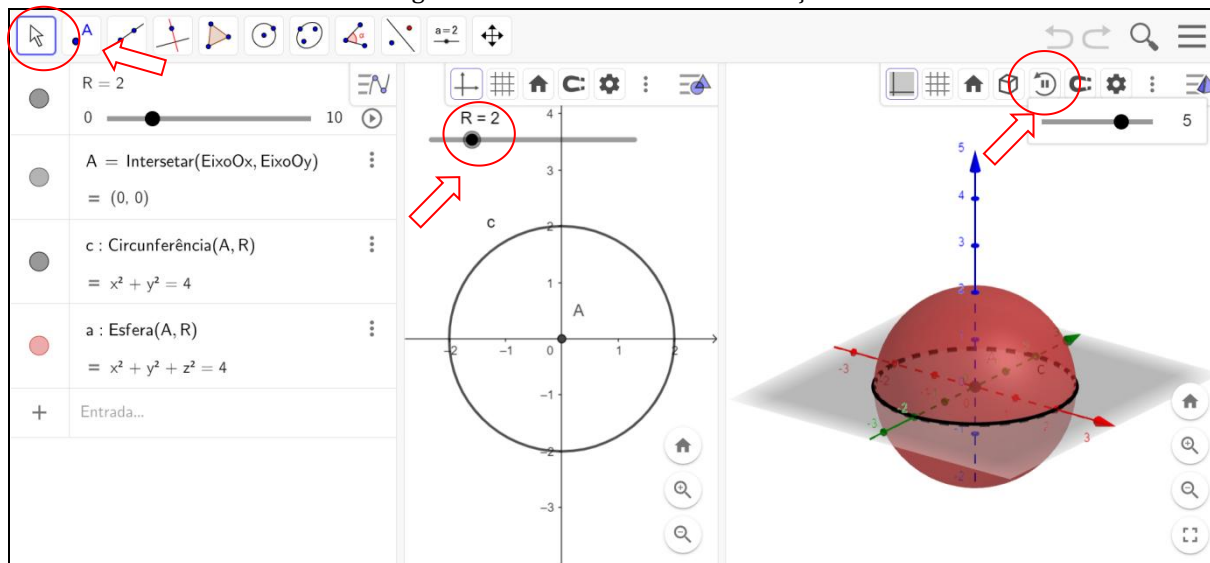


Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

A Esfera está criada no gráfico tridimensional, note também que, na área da álgebra, a primeira do lado esquerdo da tela, aparece a Equação dessa Esfera ( $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ) como o raio está valendo 2 no seletor de valores na barra deslizante, então  $r^2 = 4$ .

Sempre, ao terminar a construção de um objeto, busque as seguintes funções no geogebra para movimentar o trabalho.

Figura 33 – Efeito deslizante & Rotação



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Com essas três ferramentas é possível movimentar todo o trabalho, a primeira é o cursor que se você teclar nele, você poderá clicar no seu gráfico da esfera e movimentar para qualquer lado, lembre de deixar nessa posição novamente para continuarmos a construção da calculadora. A barra do seletor para os valores do Raio tem a função de aumentar ou diminuir o raio, e assim aumentar e diminuir a circunferência e a Esfera também, ao mesmo tempo.

Utilize essas duas funções para deixar a aula bem dinâmica e prazerosa, finalize os movimentos teclando na ferramenta em evidência no gráfico 3D, essa Rotação do gráfico tridimensional já foi feito na figura 7, 8 e 9 deste trabalho. Para o aluno, será um prazer enorme, ver o seu trabalho se movendo no espaço e aparecendo como uma esfera real.

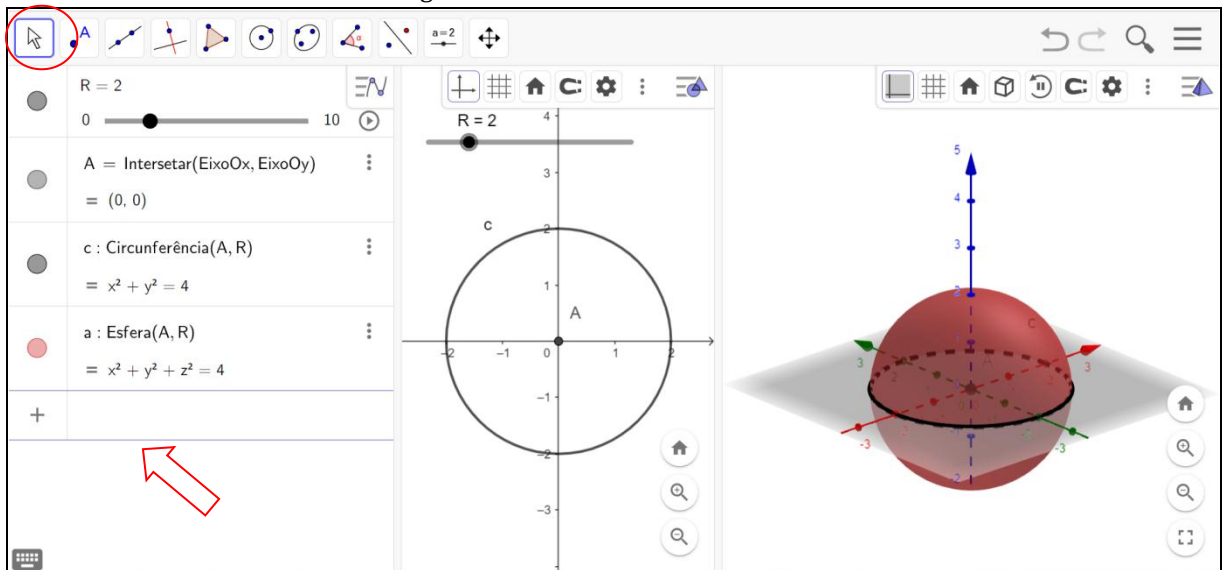
Nesse momento é uma boa hora para conversar com os alunos sobre a Esfera, no sentido geral, e fazer com que lembrem, por exemplo, quais são as utilidades da esfera no cotidiano, enquanto aquela que criaram durante a aula continua girando em seus computadores ou smartphones.

## 2.4 FINALIZANDO A CALCULADORA PARA O VOLUME DA ESFERA

Nessa seção, introduziremos a fórmula do Volume da Esfera  $(4\pi R^3)/3$ , a qual fará a conta sempre que o valor do raio mudar. Em fim, teremos a calculadora para o volume de uma Esfera com raios dentro do intervalo que criamos. Lembrando que sempre será possível criar outros intervalos para raios maiores. Vejamos como proceder:



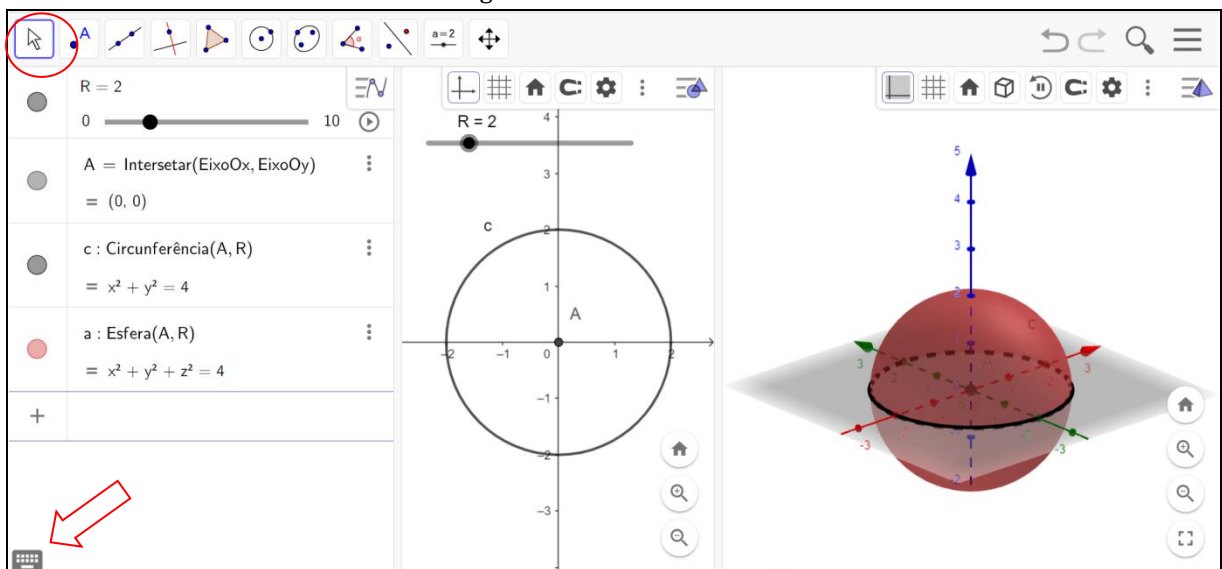
Figura 34 – Acrescentando a Fórmula



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Nesse local em evidência na figura acima, introduziremos a fórmula do volume da Esfera “Volume =  $(4 \pi R^3)/3$ ”, acrescentando “R” na fórmula, sendo que esse “R” corresponde aos valores da barra de seleção que é o mesmo Raio da Circunferência e da Esfera. Assim garantimos a construção da calculadora.

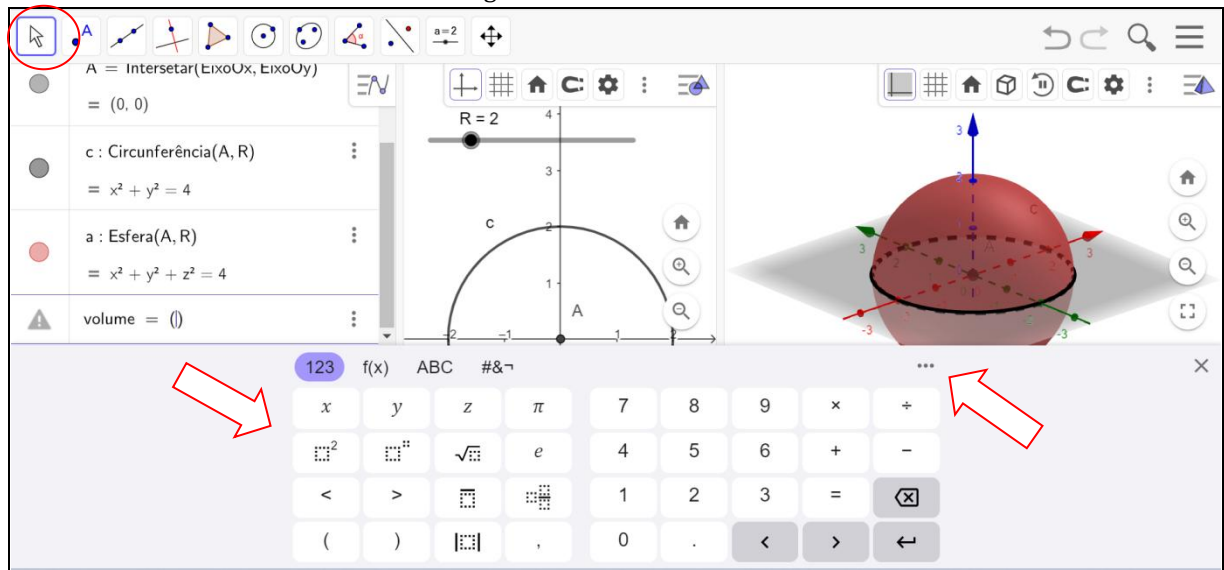
Figura 35 – Teclado virtual



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Como podemos ver, o GeoGebra possui um teclado próprio com calculadora especial para introdução de fórmulas, ao clicarmos nesse botão ele se apresenta assim:

Figura 36 - Teclado virtual



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Nesse teclado encontramos expressões muito utilizadas em fórmulas, e nesses três pontinhos, uma infinidade de elementos importantes para construção de fórmulas. Vejamos sua apresentação:

Figura 37 - Teclado virtual



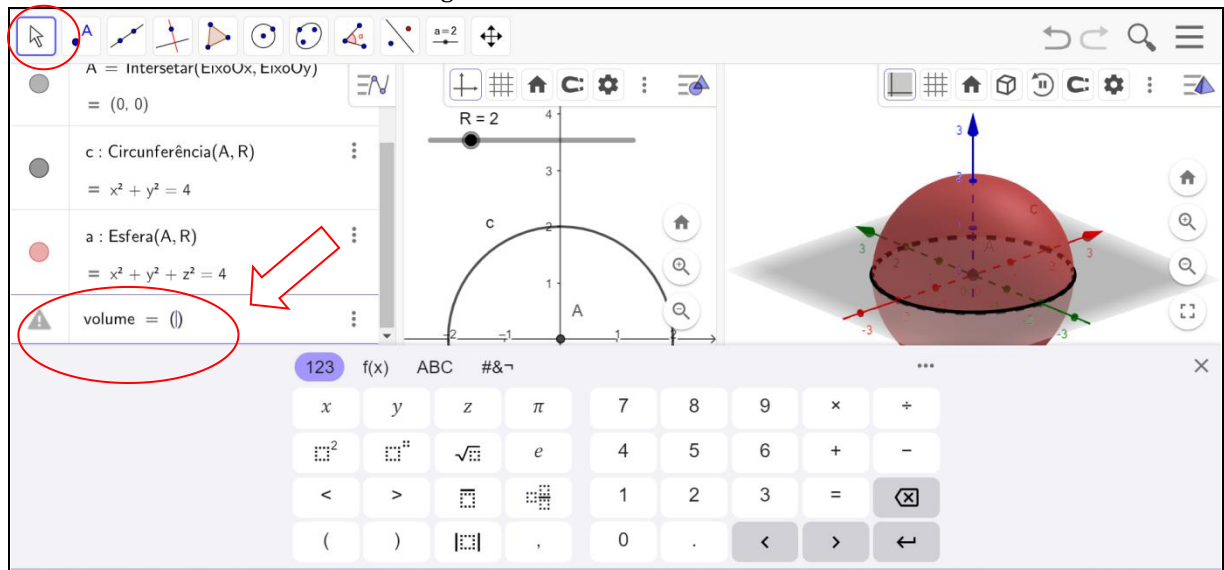
Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Ao teclar nos três pontinhos, uma janela de funções abre com diversos elementos para o professor e o aluno explorarem e criarem um novo mundo virtual para o estudo da matemática em sala de aula.

Para concluirmos a construção da calculadora, acrescentamos a fórmula no local indicado a baixo:



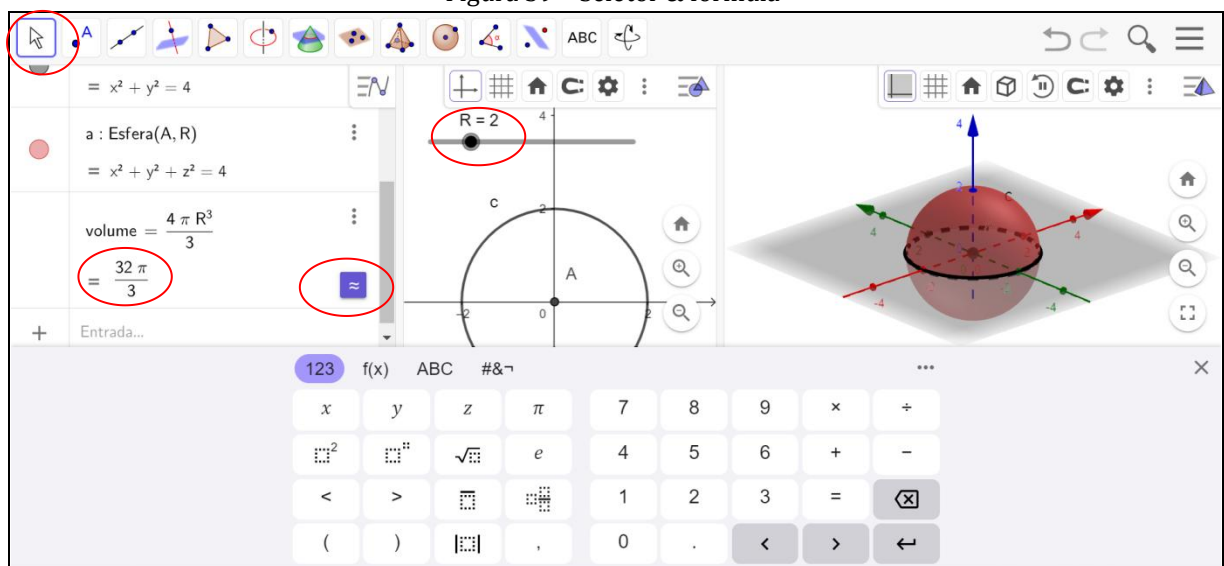
Figura 38 – Introduzindo Fórmula



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Damos um clique no local indicado e escrevemos a palavra  $\text{volume} = ( )$  o geogebra abrirá o teclado para você introduzir os elementos da fórmula  $(4 \cdot \pi \cdot R^3)/3$ , acrescente dentro do parênteses e tecla Enter em seu teclado.

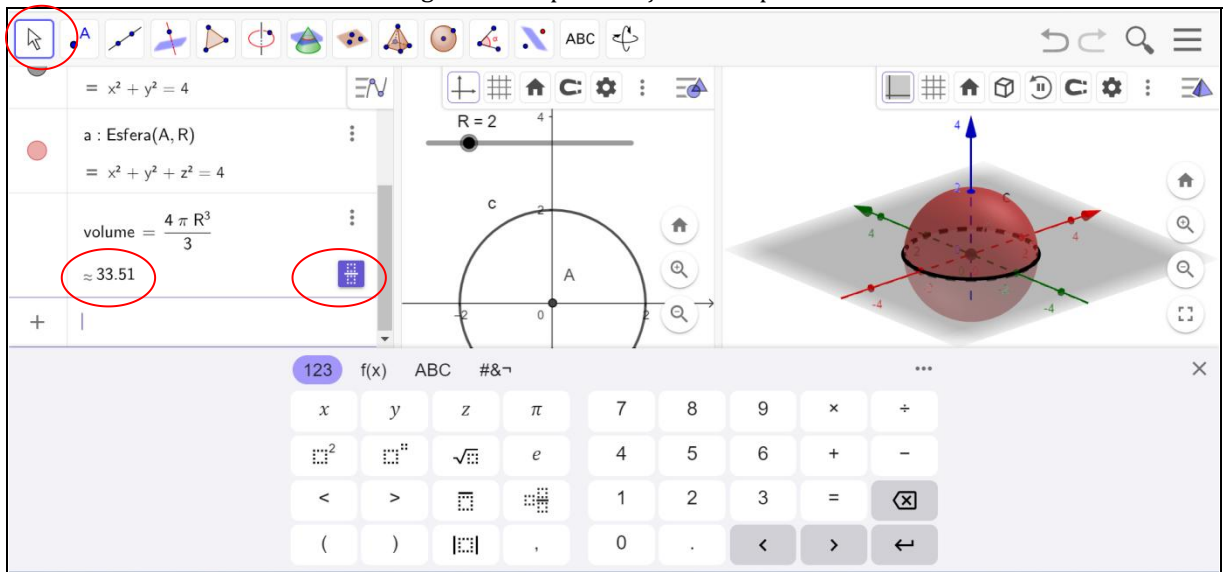
Figura 39 – Seletor &amp; fórmula



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Observe que a resposta aparece automática para o Volume da Esfera com o raio igual a 2, pois foi o valor que deixamos na barra de seleção, veja também que a resposta está em função de pi, mas ao lado temos um botão que nos dá o valor aproximado desse resultado. Como podemos ver na próxima figura:

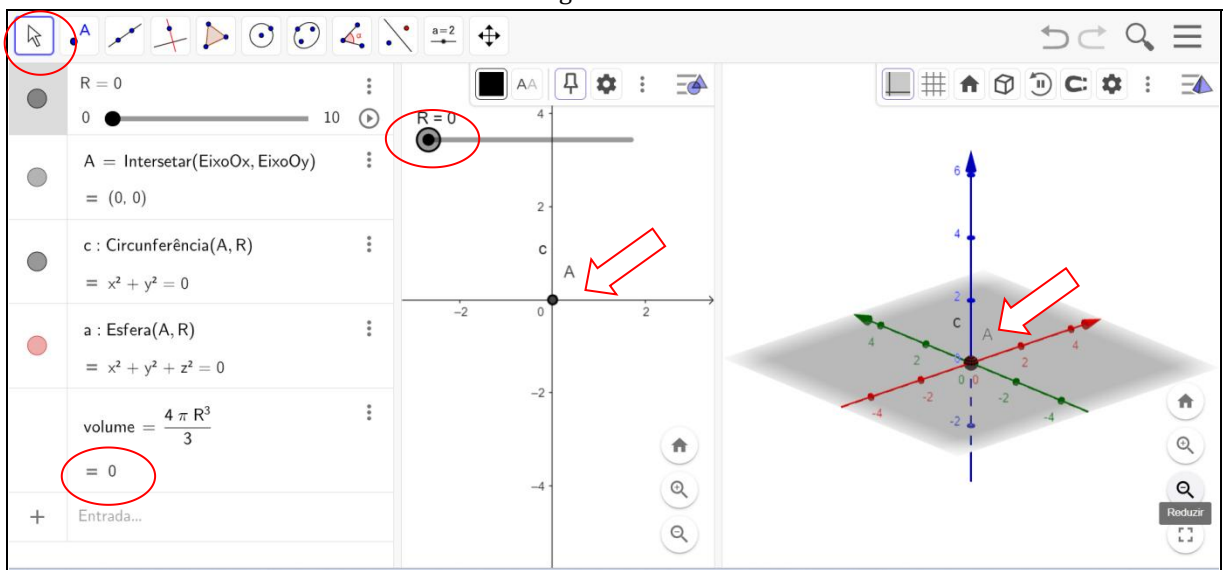
Figura 40 – Aproximação da resposta



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Se for necessário a resposta ser informada em função de “ $\pi$ ” ou em forma de fração, basta teclar na figura ao lado do resultado.

Figura 41 – Raio zero

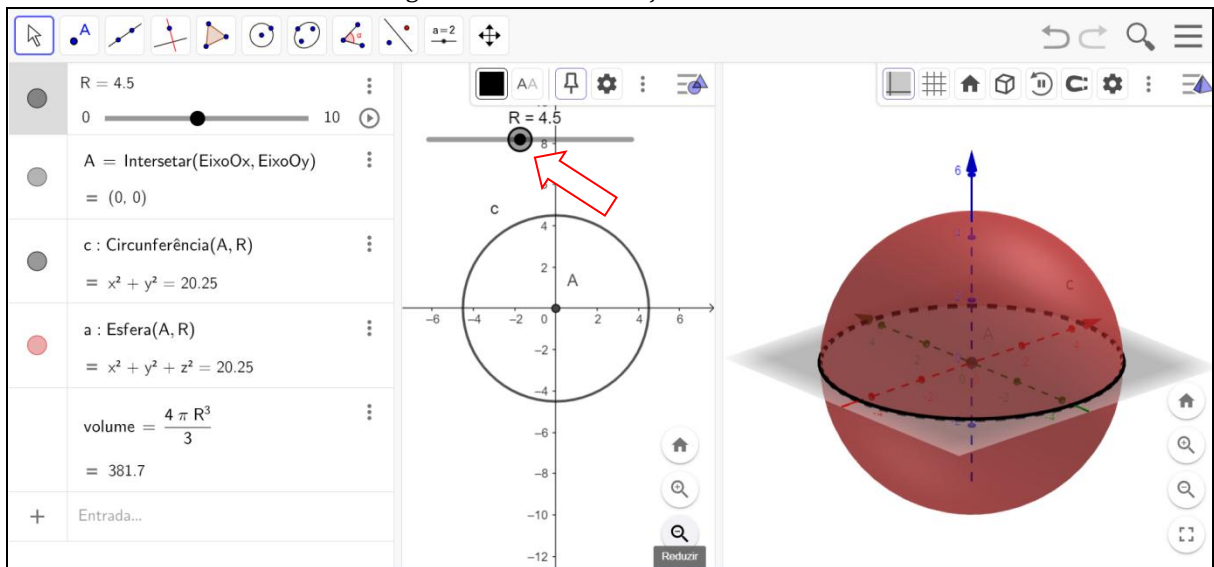


Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Observe o que ocorre diminuimos o raio para zero na barra do seletor, o volume será zero, não existirá a circunferência, e nem existirá a Esfera.

Agora vamos deslizar pela barra de seleção esse valor que corresponde ao raio, fazendo ele variar de 0 a 10 para que o aluno observe como se comportam os gráficos:

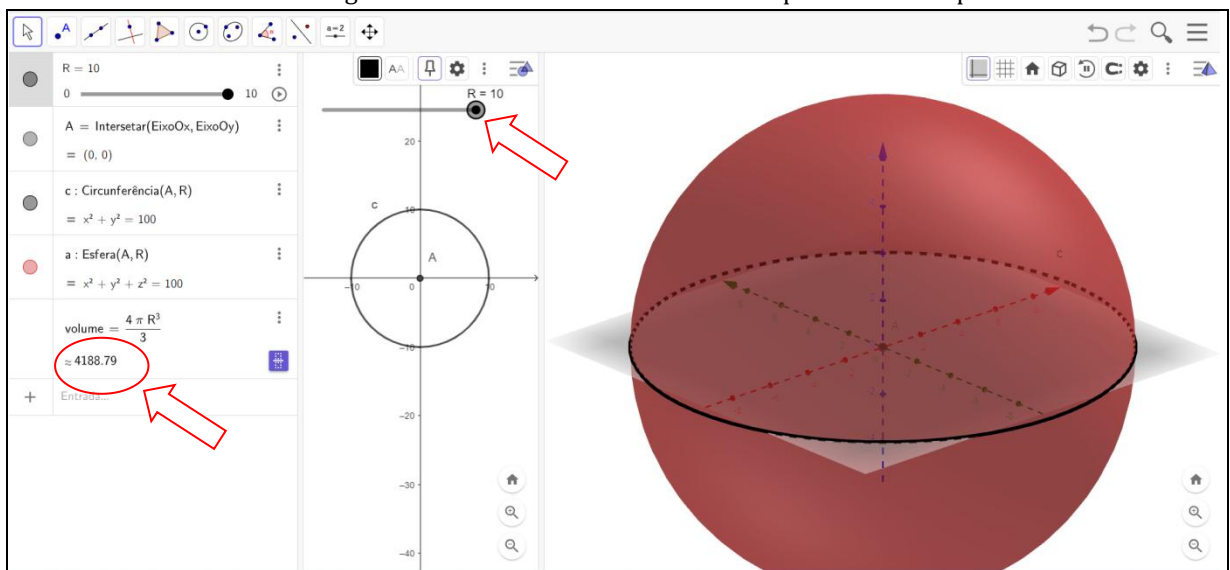
Figura 42 – Movimentação do Seletor Deslizante



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

A cada raio de tamanho diferente, temos o valor do volume na área da álgebra e a respectiva Esfera, da qual se está extraindo o volume.

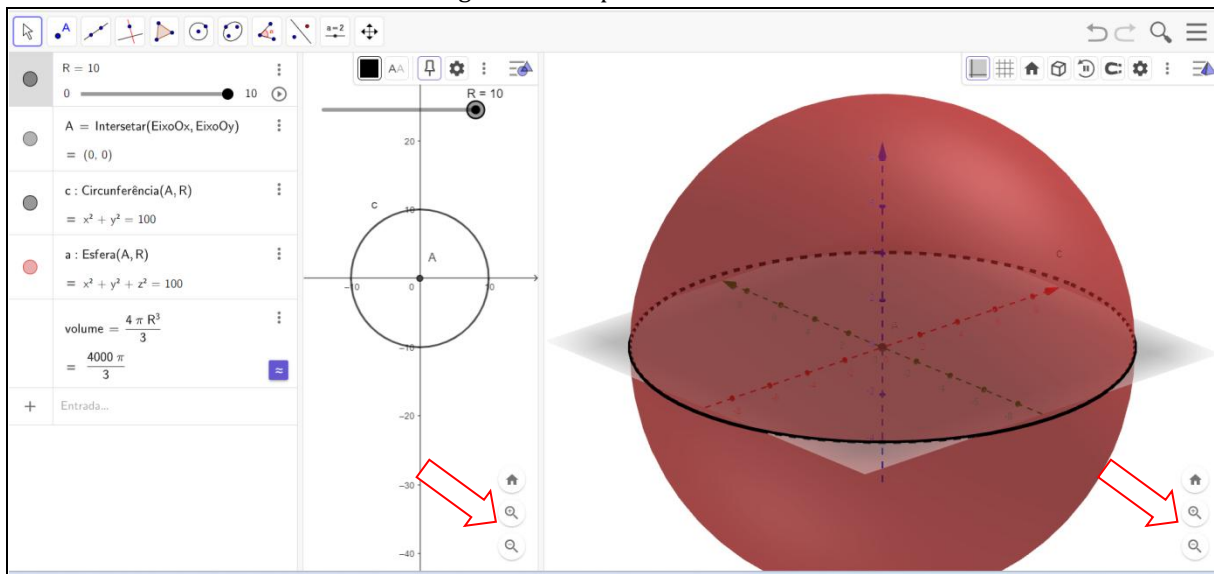
Figura 43 – Tamanho Máximo escolhido para este Exemplo



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Agora, nesta figura o raio está no tamanho máximo para esse seletor criado, e o valor correspondente ao cálculo aproximado do volume dessa esfera está representado logo abaixo da fórmula. Uma observação importante surge quando um problema envolve o volume de uma esfera com raio maior que 10, mas esse fato será verificado mais adiante com a construção da caixa “campo de entrada”.

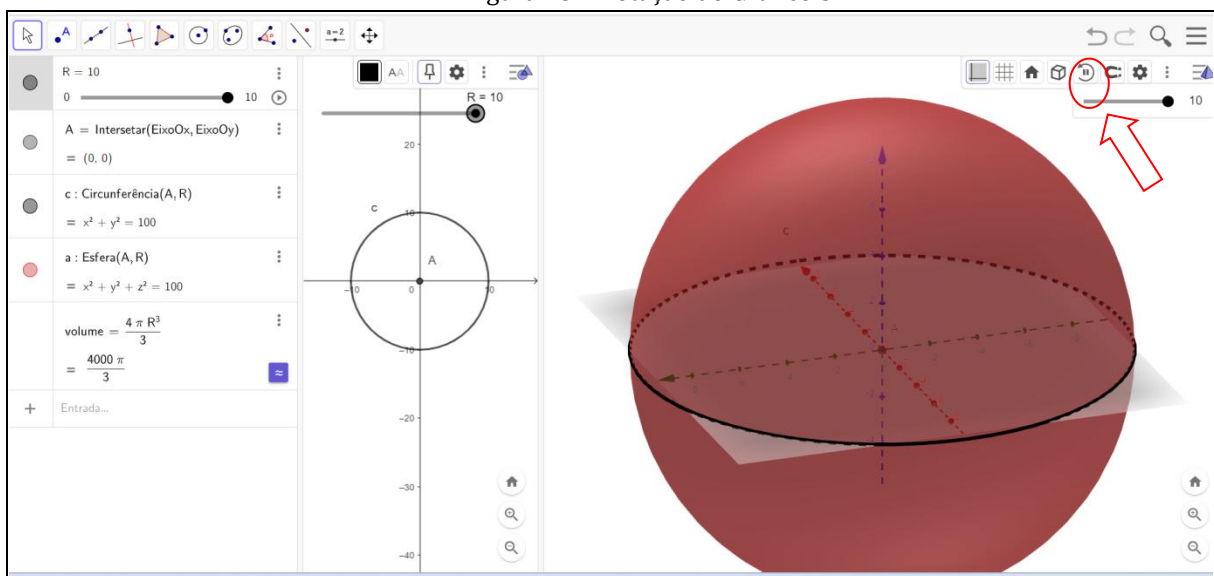
Figura 44 – Lupas dos Gráficos



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

É possível utilizar essas ferramentas para controlar o tamanho dos desenhos para que você consiga enxergar se ele estiver muito pequeno ou muito grande na tela, nos casos em que seja muito grande a escolha do raio.

Figura 45 – Rotação do Gráfico 3D

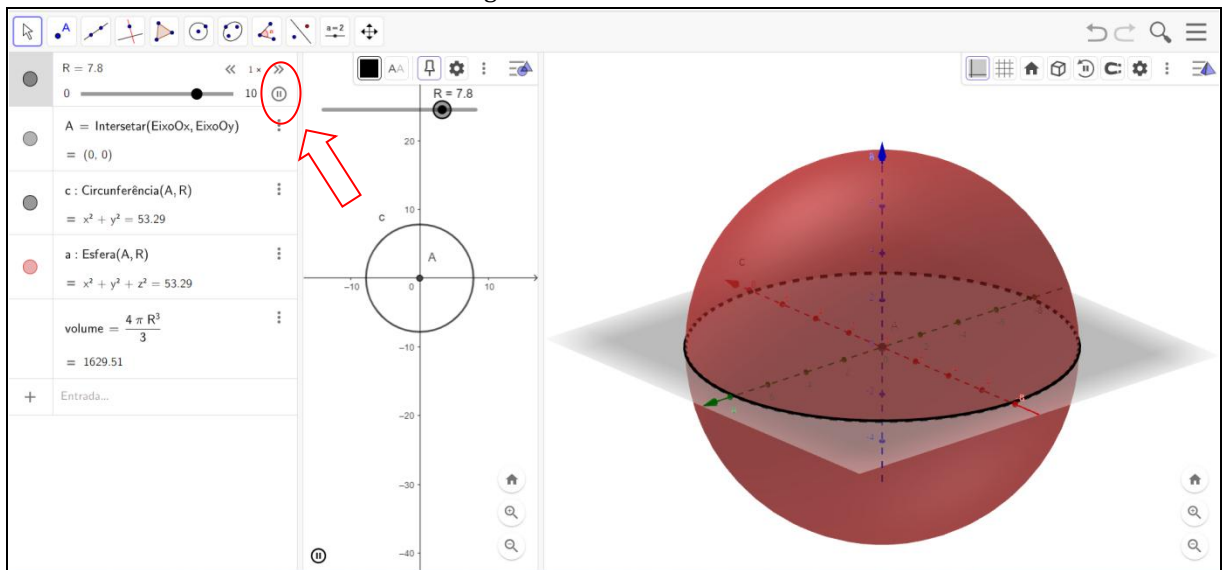


Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Com isso, temos formada a Calculadora para o Volume de uma esfera com o raio no intervalo que criamos, de  $[0, 10]$  com incremento de 0,1 na variação do comprimento desse raio.

Agora, faremos novamente a rotação da Esfera construída. Deixe girando e observe o próximo passo:

Figura 46 – Deslizante Automático

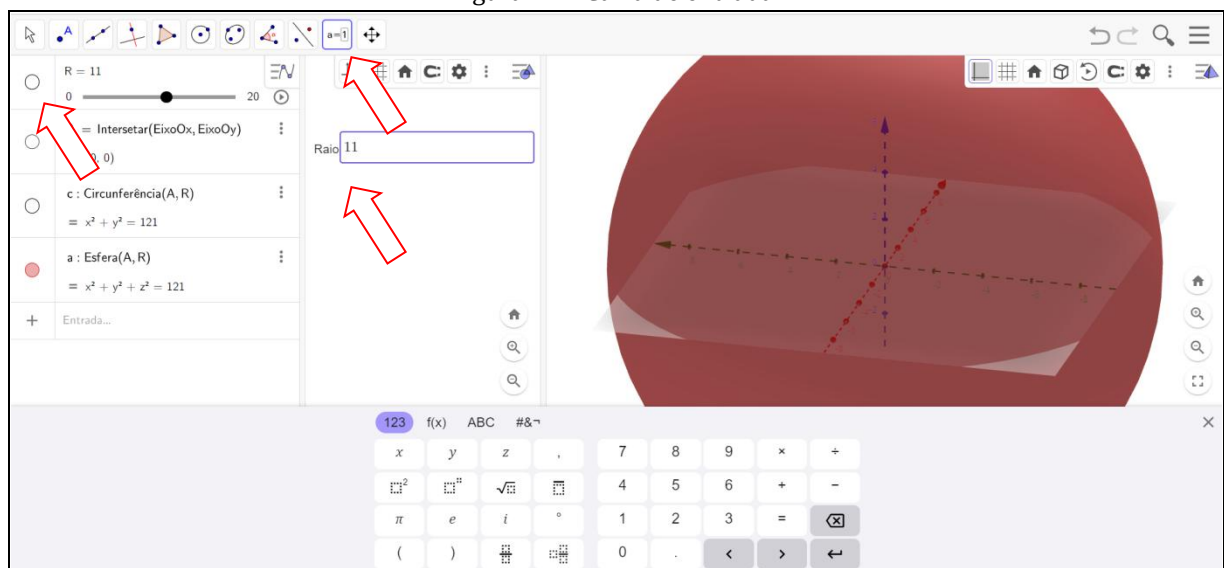


Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Nesse botão, você mostra aos alunos um novo movimento, fazendo variar automaticamente entre os valores previamente escolhidos para o raio. A barra de seleção do valor do raio passa a se mover sozinha. Esse procedimento faz com que a Esfera cresça e diminua ao mesmo tempo que rotaciona, fornecendo o valor do raio e o respectivo volume de cada tamanho de Esfera exibido na tela.

Agora para finalizar a calculadora será feita a inclusão da caixa de entrada para os valores do raio da esfera.

Figura 47 – Caixa de entrada



Fonte: Silva, Alves, Pereira (2023)

Após ocultar todas as figuras da área intermediária desmarcando os círculos na área da álgebra, o professor deve orientar o aluno a teclar na barra de ferramentas em “campo de entrada” e ao clicar na área em branco surge uma aba solicitando uma legenda e uma vinculação. Dessa forma, para qualquer valor de raio sugerido na caixa de

entrada, o geogebra cria um novo seletor de intervalo para o raio e apresenta a respectiva esfera tridimensional e nos proporciona o cálculo do volume dessa esfera.

Portanto, os alunos ao concluírem esse trabalho, ficarão impressionados e satisfeitos com suas criações e aprenderão a sentir prazer em estudar matemática. Em fim, diversos conceitos matemáticos são apresentados aos alunos para construção dessa calculadora e em alguns momentos de reflexão, recebem orientações relevantes, como por exemplo, o uso da esfera no cotidiano.

### 3 PROBLEMA ENVOLVENDO O CÁLCULO DE UMA ESFERA

**Exemplo:**

- 1) **(Adaptado de blogspot)** Qual o Volume de uma bola de Vôlei? Considerando que seu diâmetro é igual a 26cm.



**Resolução manual:**

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4\pi r^3}{3} \rightarrow V_{\text{Esfera}} = \frac{4\pi 13^3}{3}$$

$$\rightarrow V_{\text{Esfera}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 2197}{3} \rightarrow$$

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{8788 \pi}{3} \text{ cm}^3$$

**ou**

$$V_{\text{Esfera}} \cong 9.202,77207 \text{ cm}^3$$

**Obs.:** Compare o resultado do cálculo manual com o resultado da calculadora. Observe que os resultados são os mesmos, para qualquer raio de qualquer esfera solicitada.



### 3. 1 EXERCÍCIOS PARA O ALUNO RESOLVER UTILIZANDO A CALCULADORA

- 1) Qual a densidade de uma esfera, de raio 2cm e massa 201g ?

Res.:  $\cong 6\text{g/cm}^3$

$$\rho_{\text{esfera}} = \frac{m}{v} \quad (\rho = \text{representa a densidade da esfera})$$

- 2) Qual o Volume de uma esfera de raio 6cm? Res.:  $\cong 904,78 \text{ cm}^3$

- 3) (**images.search.yahoo**) Considerando uma cuia de tacacá com as formas ideais de uma semiesfera de raio medindo 10cm. Qual a capacidade aproximada dessa cuia em  $\text{cm}^3$ ? Res.:  $\cong 2.094,40 \text{ cm}^3$



### REFERÊNCIAS

Apps Matemáticas-**Matemática com GeoGebra**. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/?lang=pt>. Acessado às: 19:00 do dia 27 de agosto de 2023.

BRASIL, **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Ministério da Educação. 2018.  
 Disponível em:<<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>> Acesso em: 28 agosto 2023.

CORDEIRO JUNIOR, Fernando Augusto Cunha; CONCEIÇÃO, Werbeth Sousa da; ALVES, Fábio José Costa da; PEREIRA, Cinthia Cunha Maradei. **Desenvolvimento de aplicativo no App Inventor 2: Programando Calculadora no Estudo de Corpos Redondos**. Produto Educacional – PPGEM/UEPA – 2022.

LOUSADA, Eliane Gouvêa. **Das prescrições oficiais ao livro didático: uma reflexão sobre o processo de elaboração de material didático de português**. In: BUNZEN, Clecio (Org.). Livro didático de Português: políticas, produção e ensino. São Carlos: SP. Pedro & João (2015).



**Vitor Vasconcelos Silva** Possui Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Pará. Foi Professor monitor na Escola municipal Almerindo Trindade, pelo Programa Mais Educação; Foi Mentor no programa Decola da Secretaria de Ciência, Tecnologia e Educação Superior, Profissional e Tecnológica do Estado do Pará (Sectet) na Universidade do Estado do Pará (UEPa); Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (UEPa); Servidor Público da Universidade Estadual do Pará (UEPa), lotado no Curso de Graduação em Educação Física/Campus III.



**Fábio José da Costa Alves** Possui Licenciatura em Matemática pela União das Escolas Superiores do Pará - UNESPa, Licenciatura em Ciências de 1º Grau pela União das Escolas Superiores do Pará - UNESPa, graduação em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Pará, Mestrado em Geofísica pela Universidade Federal do Pará, Doutorado em Geofísica pela Universidade Federal do Pará e Pós-Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Coordenou o Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática/UEPA de 2019 à 2023. Atualmente é Professor Adjunto IV da Universidade do Estado do Pará, Docente do Mestrado em Educação/UEPA e Docente do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática/UEPA. Líder do Grupo de Pesquisa em Ensino de Matemática e Tecnologias e Vice líder do Grupo de Pesquisa em Cognição e Educação Matemática da UEPa. Está atuando no desenvolvimento de software educativo para o ensino de matemática. Têm experiência em Educação Matemática e matemática aplicada. Tem experiência na área do ensino a distância. Tem experiência em Geociências, com ênfase em Geofísica Aplicada, nos temas: deconvolução, filtragem com Wiener, atenuação e supressão de múltiplas.



**Cinthia Cunha Maradei Pereira** Possui Licenciatura em Matemática, Graduada em Tecnologia em Processamento de Dados, especialização em Informática Médica, mestrado em Ciências da Computação e Doutorado em Genética e Biologia Molecular (Bioinformática). Participa do desenvolvimento de tecnologias aplicadas ao ensino de Matemática