

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT

PRODUTO EDUCACIONAL

História da Matemática: possibilidades para o ensino de equações de primeiro e segundo grau.

CRISTIANE SCHLAGENHAUFER

JOINVILLE, SC

2023

Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
Programa: ENSINO DE CIÊNCIAS, MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS
Nível: MESTRADO PROFISSIONAL
Área de Concentração: Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias.
Linha de Pesquisa: Práticas Educativas e Processos de Aprendizagem no Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias.

Título: História da matemática: possibilidades para o ensino de equações de primeiro e segundo grau.

Autor: Cristiane Schlagenhauser.

Orientador: Regina Helena Munhoz

Data: 01/06/2023.

Produto Educacional: Caderno didático.

Nível de ensino: Ensino Fundamental anos finais.

Área de Conhecimento: Matemática

Tema: História da Matemática e equações de primeiro e segundo grau.

Descrição do Produto Educacional:

Caderno didático destinado a professores de matemática do Ensino Fundamental anos finais que buscam apresentar a história da matemática em sala de aula. Nesse caderno apresentamos uma seleção de diferentes métodos históricos que permitem o encontro de soluções a equações de primeiro e segundo grau. Além dos métodos apresentamos uma coletânea de atividades que envolvem equações de primeiro e segundo grau, problemas históricos e métodos históricos que podem solucionar estas equações. O caderno encontra-se organizado em quatro capítulos, nos quais abordamos a importância da História da Matemática no ensino, os diferentes métodos históricos que solucionam equações de primeiro e segundo grau, problemas e curiosidades históricas e ainda uma coletânea de atividades aplicáveis em turmas do Ensino Fundamental anos finais.

Biblioteca Universitária UDESC: <http://www.udesc.br/bibliotecauniversitaria>

Publicação Associada: O ensino de equações de primeiro e segundo grau utilizando problemas hindus, egípcios, gregos e árabes.

URL: <http://www.udesc.br/cct/ppgecmt>

Arquivo	*Descrição	Formato
1.882 KB	Texto completo	Adobe PDF

Este item está licenciado sob uma [Licença Creative Commons](#)

Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual CC BY-NC-SA

**HISTÓRIA DA MATEMÁTICA:
POSSIBILIDADES PARA O
ENSINO DE EQUAÇÕES DE
PRIMEIRO E SEGUNDO GRAU**
(Cristiane Schlagenhauser)

Sumário

Apresentação.....	5
Capítulo 1: História da Matemática no Ensino	8
Capítulo 2: Métodos históricos.....	15
Capítulo 3: Obras e problemas antigos solucionáveis com métodos históricos.....	42
Capítulo 4: Coletânea de atividades	62
Referências Bibliográficas.....	99

Apresentação

Esse caderno didático consiste no produto educacional desenvolvido durante a realização da pesquisa intitulada “O ensino de equações de primeiro e segundo grau utilizando problemas hindus, egípcios e gregos” realizada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias - PPGCMT, da Universidade do Estado de Santa Catarina, sob orientação da professora Dra. Regina Helena Munhoz.

Durante a elaboração deste caderno didático intitulado “História da Matemática: possibilidades para o ensino de equações de primeiro e segundo grau” buscamos desenvolver um material que aproximasse o ensino de equações de primeiro e segundo grau com a História da Matemática, para tanto organizamos o caderno em quatro capítulos.

No primeiro capítulo apresentamos ao leitor o papel que a história da matemática no ensino básico, sob a concepção de autores como Ubiratan D’Ambrosio e Iran Mendes de Abreu, buscando assim situar o leitor com a temática apresentada ao longo de todo o livro.

No segundo capítulo, após realizada pesquisas bibliográficas em diferentes obras, selecionamos métodos históricos, que possibilitam o encontro de soluções para equações de primeiro e segundo grau, métodos estes desenvolvidos por egípcios, gregos e hindus. Os métodos apresentados neste capítulo são: método da falsa posição, método da inversão, método da eliminação do termo médio, método de Al-Khwarizmi e método das proporções. Construímos este capítulo buscando aproximar o professor de matemática destes métodos históricos, para que assim possa apresentar estes métodos a seus alunos, principalmente com o objetivo de auxiliar alunos que apresentam dificuldades em solucionar equações por meio de métodos tradicionais apresentados comumente.

Já no terceiro capítulo buscamos apresentar obras e problemas históricos solucionados por meio dos métodos históricos apresentados no capítulo anterior. Esse capítulo conta com informações relacionadas a fatos curiosos, o que pode auxiliar o professor a levar para dentro da sala de aula esses fatos, com o objetivo de despertar o interesse do aluno pelo aprendizado de matemática.

Por fim, no quarto capítulo, apresentamos uma coletânea composta de atividades que podem ser desenvolvidas com turmas de 8º e 9º ano do Ensino Fundamental. Além das atividades destacamos os conteúdos matemáticos abordados em cada uma das atividades, as habilidades e o tempo destinado a aplicação das mesmas.

Desejamos que este caderno didático possa trazer contribuições para o professor de matemática que busca levar a história da matemática para sala de aula e que entende que a sua inserção pode contribuir para o ensino de matemática.

Conforme já comentado, o caderno foi elaborado pensando em um material aplicável e destinado ao ensino de equações de primeiro e segundo grau em turmas do ensino fundamental 8º e 9º ano, mas nada impossibilita o professor de utilizar este material com outros níveis de ensino inclusive com o Ensino Médio em momentos de revisão, por exemplo.

Atenciosamente professoras:

Cristiane Schlagenhauser

Regina Helena Munhoz

Capítulo 1: História da Matemática no Ensino

Conhecida como uma Tendência em Educação Matemática a História da Matemática vem nas últimas décadas destacando-se como uma metodologia motivadora, com potencial de contribuir com os processos de Ensino e aprendizagem de matemática nos mais variados níveis de ensino, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior.

De acordo com diferentes educadores e pesquisadores matemáticos, trabalhar com a disciplina de matemática nos dias atuais, principalmente com alunos da Educação Básica, pode ser uma tarefa desafiadora, pois para muitos destes alunos a matemática pode parecer inútil e obsoleta diante de tantas tecnologias e modernidades que esses alunos têm contato cotidianamente.

Ubiratam D'Ambrosio nos levar a refletir sobre a forma como estamos apresentando a matemática em sala de aula, a qual muitas vezes é apresentada de forma descontextualizada e obsoleta, o que leva muitos alunos a se sentirem pouco motivados ao estudo desta ciência. Segundo esse autor (2009) a dificuldade em motivar alunos para a aprendizagem da ciência matemática levou a história da matemática a ser vista como uma tendência que apresenta possibilidades de motivar os alunos, a qual vem se apresentando como um elemento motivador de grande importância no ensino.

A história da matemática quando utilizada como instrumento pedagógico pode ser vista de três maneiras distintas. A primeira delas de acordo com Fossa (2008) está relacionada ao papel motivador que essa tendência pode apresentar, na sequência, e com um papel mais eficaz surgem outras duas possibilidades, as quais seriam o uso da

história da matemática como formação cultural e o uso da história da matemática como um agente de formação cognitiva na sala de aula. Fossa (2008), assim como D'Ambrosio, afirmam que o uso da história da matemática pode ser motivador para parte dos alunos, mas nem sempre motivará a toda uma classe, desta forma “Não podemos esperar que a história resolverá todos as nossas enfermidades pedagógicas, mas podemos esperar que nos ajudará a superar algumas delas.” (FOSSA, 2008, p.4).

A segunda maneira de apresentar a história da matemática em sala de aula é apresentar essa tendência como formação cultural. Ao apresentar a história da matemática como uma formação cultural deve-se buscar mostrar a matemática como sendo uma parte integral da cultura humana, desenvolvida por diferentes povos, em diferentes épocas, dando assim significância a determinados conhecimentos matemáticos. Segundo Fossa (2008) não basta apenas mostrar a matemática com um instrumento utilizado pelas ciências, pelo próprio homem, mas é necessário mostrar e compreender que a matemática consiste em uma teorização que reflete sobre a condição humana.

São em momentos de pesquisas, descobertas e buscas por soluções de problemas matemáticos que o aluno pode estar muito próximo das atividades de pesquisas desenvolvidas por matemáticos do passado. Segundo Fossa (2008) são nesses momentos que podemos desenvolver atividades estruturadas colocando o aluno na posição de pesquisador, onde o aluno se deparara com problemas reais similares aos problemas encontrados por matemáticos do passado. Assim

O resultado de trabalhar com atividades construídas à luz da história, portanto, seria o de proporcionar ao aluno a experiência de participar na pesquisa sobre a matemática real e não somente a matemática das escolas. (FOSSA, 2008, p.10)

Ao apresentar a história da matemática em sala de aula devemos ter em mente que o uso da história da matemática não compreende apenas a apresentação de biografias de diferentes matemáticos, curiosidades, lendas, mitologias, mas compreende entender e apresentar o desenvolvimento histórico e as origens de conceitos matemáticos.

A apresentação de biografias, curiosidades, lendas, mitologias podem contribuir ilustrativamente na apresentação de um determinado conceito, desta forma ao apresentar uma biografia, por exemplo, é necessário que o professor seja capaz de avançar e ir além da apresentação de uma simples biografia, fazendo conexões com aspectos e conceitos matemáticos desenvolvidos pelos matemáticos dos quais estão sendo apresentadas as biografias.

De acordo com Mendes e Chaquiam (2016) caso o professor busque apenas apresentar a biografia de um matemático sem fazer conexões com aspectos matemáticos a apresentação destas biografias não passa de histórias pitorescas e anedotários sobre personagens matemáticos.

Outro cuidado que o professor deve tomar ao apresentar a história da matemática é com relação ao uso de mitologias e lendas relacionadas a tópicos históricos da matemática, ao utilizar esse tipo de material o professor deve ficar atento com relação a origem destas fontes. De acordo com Mendes e Chaquiam (2016) lendas e mitologias histórico matemáticas encontradas em diferentes materiais, como livros de literatura e até mesmo livros paradidáticos podem provir de fontes inseguras, pouco confiáveis e que acabam muitas vezes apostando no imaginário.

A sugestão dada por estes autores é que caso o professor opte por usar materiais como estes, o mesmo deve ser capaz de

explorar o potencial imaginativo do material e estimular o exercício de problematização nos alunos, bem como a sua capacidade criativa para criar algumas matemáticas e conectá-las ao conteúdo programático previsto no planejamento do professor. (MENDES e CHAQUIAM, 2016, p. 20).

Dessa forma acreditamos que a história da matemática ao ser apresentada em sala de aula deve ser apresentada de forma construtivista, onde as origens e as diferentes formas de resolução desenvolvida ao longo dos tempos são apresentadas, permitindo assim que o aluno seja capaz de analisar e construir seu próprio conhecimento, tendo como apoio os diferentes problemas e as diferentes formas de resolução desenvolvidas ao longo da história. A história da matemática adequada para ser implantada no ensino é a história que está relacionada

aos aspectos matemáticos em seu processo de criação, reinvenção e organização lógica, estabelecido no tempo e no espaço com a finalidade de sistematizar soluções de problemas de ordem sociocultural, científica e tecnológica, em todos os tempos e lugares (MENDES & CHAQUIAM, 2016, p.19)

Diante do exposto acima verificamos que a história da matemática pode e deve ser usada em sala de aula, porém devemos apresentá-la de forma a motivar nossos alunos, apresentando a matemática como uma manifestação cultural, desenvolvida por diferentes povos em diferentes épocas. “A história da matemática é um elemento fundamental para se perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas em um contexto específico da época.” (D’AMBROSIO, 2009, p. 30).

Ainda de acordo com D'Ambrosio (1996), citado por Gasperi e Pacheco, a história da matemática deve ser vista como um instrumento de motivação ao estudo da matemática, tendo em vista as diversas curiosidades e questões interessantes que essa tendência pode trazer, despertando assim, o gosto pela aprendizagem matemática. Não devemos nos enganar que o uso da história da matemática pode despertar o interesse de alguns alunos, mas nem sempre de todos pois “alunos têm interesses diferentes, com Matemática não é exceção” (GASPERI e PACHECO, 2011, p.6).

Além do uso da história da matemática em sala de aula apresentar um papel motivador quando apresentada a alunos da educação básica não devemos deixar de lado as importantes contribuições que essa tendência pode trazer inclusive para o professor, pois conhecendo a história da matemática, suas origens, seus percursos, o professor tem a chance de melhorar sua prática docente, tendo em vista que o conhecimento de determinados percursos históricos matemáticos podem auxiliar o próprio professor a entender dificuldades matemáticas pelas quais seus alunos estão passando e com isso utilizar os próprios percursos históricos pelos quais a matemática passou, facilitando assim a aprendizagem de um determinado conteúdo matemático.

Berlinghoff (2010) nos relembra as dificuldades encontradas pelos primeiros matemáticos ao se trabalhar com números negativos, onde esses encontravam dificuldades não apenas nas regras formais, mas também encontravam grandes dificuldades em entender e interpretar o conceito de número negativo. Segundo esse mesmo autor o fato de um professor da Educação Básica ter conhecimento dessas dificuldades pode trazer contribuições importantes a aprendizagem pois o conhecimento de dificuldades passadas

nos ajuda a compreender (e a simpatizar com) as dificuldades que os estudantes possam ter. Saber como foram superadas essas dificuldades historicamente também pode indicar um modo de ajudar os estudantes a superarem tais obstáculos. (BERLINGHOFF, 2010, p.18)

A história da matemática pode não só auxiliar o professor a entender e solucionar dificuldades de compreensão que seus alunos estão apresentando, como também pode ajudar o professor a tornar suas aulas de matemática mais contextualizadas, com problemas e métodos diversificados. A utilização desta tendência em sala de aula possibilita ao professor:

...um maior repertório de problemas motivadores para o ensino, como também uma coleção de variados métodos de solução desde os mais simples da antiguidade até os mais modernos. Entendendo a evolução do conhecimento matemático através dos séculos, o futuro professor poderá analisar de forma crítica e reflexiva o aprendizado de seus alunos. (D'AMBROSIO, 2009, p.7)

Verificamos que o uso da história da matemática (HM) pode trazer contribuições relevantes ao ensino de matemática, pois essa tendência quando utilizada de maneira correta pode despertar a motivação nos alunos pela aprendizagem da matemática, podendo ainda apresentar a matemática como uma ciência a qual é fruto de construções, criações humanas, oriundas das necessidades de determinados povos ao longo da história. Além disso, o uso dessa tendência na educação básica pode tornar a aprendizagem mais construtiva, tornando os alunos mais autônomos na busca pelo conhecimento.

Com relação ao uso da HM na formação de professores verifica-se um potencial relevante que esta pode propiciar ao professor e ao futuro

professor. Ao conhecer e utilizar a História da Matemática, os processos desenvolvidos, as diferentes formas de resolução para determinados problemas, o professor tem a capacidade de entender com maior facilidade algumas das dificuldades encontradas por seus alunos e usando diferentes métodos de resolução desenvolvidos ao longo da história auxiliar o aluno a compreender um determinado conceito ou problema matemático.

Capítulo 2: Métodos históricos

Ao longo da história e do desenvolvimento da matemática diferentes métodos foram estudados, pesquisados e analisados com o objetivo de solucionar diferentes equações que se fizeram presentes em diferentes situações cotidianas dos mais variados povos, dentre eles egípcios, hindus, gregos e árabes.

Neste capítulo apresentamos alguns métodos estudados por estes povos antigos permitindo a eles solucionar diferentes equações de primeiro e segundo grau.

Método da Falsa Posição

O método da Falsa Posição também conhecido como Regra da Falsa Posição, fez-se presente em diferentes regiões e em diferentes momentos históricos.

Povos egípcios e chineses ainda antes da era cristã já apresentavam conhecimentos sobre o referido método, registrando-o em diferentes documentos históricos como Papiro de Rhind, e a obra chinesa “Nove Capítulos sobre a Arte Matemática” cujas traduções destes documentos chegaram até os dias atuais podendo ainda serem consultadas.

Além dos egípcios e chineses outros povos como os hindus e gregos também usufruíram deste método, séculos mais tarde.

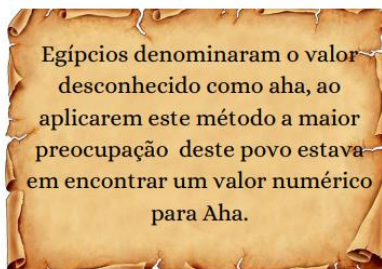
Fragmento do Papiro de Rhind encontrado no museu Britânico



Fonte: Ferreira, 2010.

Mas o que é este método?

O método da Falsa Posição é um método bastante simples que busca encontrar em uma equação o valor da incógnita, ou seja, o valor desconhecido.



De acordo com Eves (2004) ao aplicarmos o método da falsa posição em uma equação simples primeiramente atribuímos um valor conveniente a incógnita, em seguida aplicamos o valor na equação e então realizamos os ajustes necessários a fim de encontrar o valor procurado.

Ou seja, o método da Falsa Posição consiste em atribuímos um valor numérico aleatório e conveniente à incógnita, substituímos na equação original, com o valor encontrado após a substituição realizar ajustes por meio de proporções afim de encontrarmos o valor desejado.

Acompanhe os exemplos abaixo:

Exemplo 1: Resolver a equação $x + \frac{x}{3} = 44$ usando o método da Falsa Posição.

Resolução: primeiramente atribuímos um valor conveniente a x , o qual denominaremos x' .

Podemos assumir $x' = 3$, pois assumindo $x' = 3$ eliminamos a parte fracionária da equação, tendo então:

$$3 + \frac{3}{3} = 3 + 1 = 4$$

Após a substituição de $x' = 3$, encontramos como valor numérico à equação 4, valor este que não corresponde ao valor desejado na equação inicial.

Portanto será necessário realizarmos alguns ajustes, fazendo isto temos:

$$\frac{x}{44} = \frac{3}{4}$$

$$4x = 3 \cdot 44$$

Encontrando o valor de x temos:

$$x = \frac{132}{4} = 33 \rightarrow x = 33$$

Portanto a solução à esta equação deve ser $x = 33$.

Exemplo 2: Encontrar solução para a equação $x - \frac{x}{7} = 18$ usando o método da Falsa Posição.

Resolução: Assumindo $x' = 7$ e substituindo na equação inicial temos:

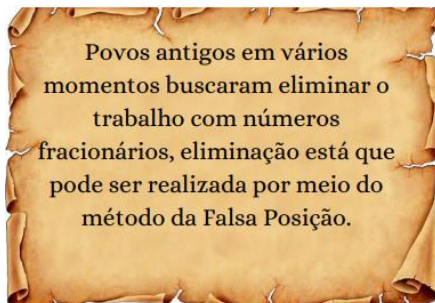
$$7 - \frac{7}{7} = 7 - 1 = 6$$

Como o valor encontrado após a substituição não corresponde ao valor desejado é necessário realizarmos os devidos ajustes, usando para tanto, relações de proporções.

Fazendo os ajustes necessários temos:

$$\frac{x}{7} = \frac{18}{6}$$

$$6 \cdot x = 18 \cdot 7$$



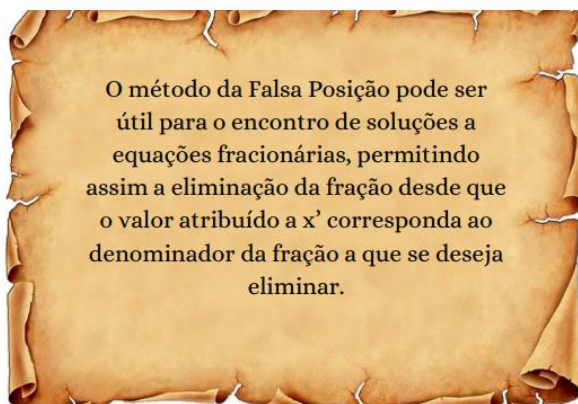
$$6x = 126$$

$$x = \frac{126}{6} = 21$$

$$x = 21$$

Portanto o valor desejado como solução a esta equação é $x = 21$.

Como acabamos de verificar o método da Falsa Posição é um método bastante simples que pode ser utilizado para o encontro a determinadas equações.



Passos para a resolução de uma equação do primeiro grau usando o método da falsa posição

Considerando uma equação do primeiro grau do tipo

$$+ \frac{x}{a} = b$$

Onde $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$.

Podemos seguir os seguintes passos para a resolução da mesma usando o método da Falsa Posição.

Passo 1: Atribuir um valor aleatório e conveniente para a incógnita x , a qual denominaremos x' .

Nesse caso, como a equação apresenta um número fracionário podemos atribuir a x' o valor correspondente ao valor presente no denominador da fração, ou seja, $x' = a$.

Passo 2: Substituir o valor atribuído a x' na equação original, encontrando um novo valor numérico, o qual denominaremos b' .

Passo 3: Analisar o valor encontrado a b' .

Caso $b' = b$ então x' é a solução da equação e, portanto, $x = x'$.

Caso $b' \neq b$ será necessário realizar ajustes a solução por meio de proporções.

Passo 4: Realizar os ajustes necessários, usando a seguinte proporção:

$$\frac{x'}{b'} = \frac{x}{b}$$

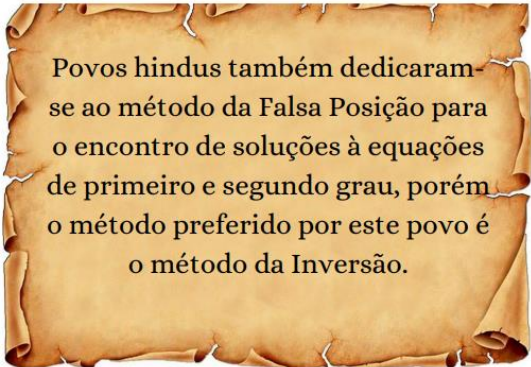
E, portanto, a solução pode ser dada por:

$$x = \frac{x' \cdot b}{b'}$$

Método da Inversão

O método da inversão consiste em um método histórico, capaz de solucionar diferentes equações de primeiro e segundo grau. Esse método foi o método preferido de povos hindus, sendo aplicado por volta do século V d.C, por matemáticos e astrônomos hindus que buscavam solucionar problemas cotidianos, problemas de investimento, problemas de juros simples e compostos, problemas

sobre regras da sociedade, problemas de misturas e cisternas, dentre outras aplicações.



Neste método parte-se do resultado de uma equação dada, desenvolvendo operações inversas a fim de chegar no resultado esperado para a incógnita.

Como funciona o método da Inversão?

O método da inversão consiste em um método onde se trabalha de trás para frente partindo do resultado dado, ou seja, tendo uma igualdade, partimos do resultado dado nesta igualdade e então desenvolvemos operações inversas a fim de chegar ao resultado desejado, sendo assim a “substituição de cada operação por sua inversa que responde pelo nome inversão” (EVES, 2004, p.255).

Operações matemáticas e suas inversas.

Operação	Operação inversa
Soma	Subtração
Multiplicação	Divisão

Potenciação	Radiciação
-------------	------------

Exemplo 1: Resolver a equação dada por $x + 3 = 10$ usando o método da Inversão.

Resolução: partindo do valor encontrado no segundo membro da equação, ou seja, partindo do valor 10, realizamos as operações inversas.

A operação inversa a ser desenvolvida é a subtração de três unidades, tendo então:

$$10 - 3 = 7$$

Como não há nenhuma outra operação que necessita da realização das operações inversas conclui-se que $x = 7$.

Portanto a solução a esta equação deve ser $x = 7$.

O método da inversão mesmo sendo um método simples pode ser organizado em dois passos.

Passos para a solução de equações de primeiro e segundo grau usando o método da inversão.

Passo 1: partir do resultado desejado na equação.

Passo 2: substituir cada operação pela sua operação inversa.

A seguir desenvolvemos a resolução de uma equação do primeiro grau usando o método da inversão.

Considerando a equação $2x + 8 = 16$.

Resolução: usando o método da inversão:

Passo 1: partindo do resultado 16.

Passo 2: ao resultado dado realizamos as operações inversas.

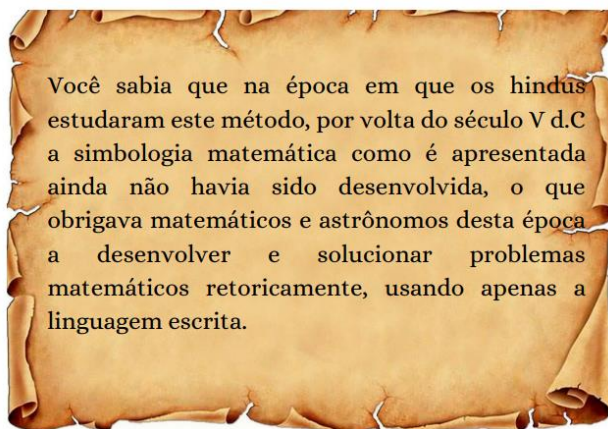
Primeira operação inversa a ser desenvolvida será a subtração de 8 unidades, o que corresponde ao inverso da adição, fazendo isso temos:

$$16 - 8 = 8$$

A esse valor encontrado, realizamos a operação inversa de $2 \cdot x$, ou seja, realizamos a divisão deste valor por 2, tendo então:

$$\frac{8}{2} = 4$$

E, portanto, o valor da incógnita procurado deve ser de 4 unidades, ou seja, $x = 4$.



Método da Eliminação do Termo Médio

Diferente dos métodos apresentados anteriormente o método da eliminação do termo médio é um método que busca solucionar equações quadráticas.

O método da eliminação do termo médio originou-se com matemáticos hindus, por volta do século XII d.C, com o matemático hindu Bhaskara, porém há indícios que outros matemáticos anteriores a ele como Brahmagupta matemático que viveu por volta 628 d.C também haviam desenvolvidos métodos muito semelhantes a este método, porém é por meio dos estudos desenvolvidos por Bhaskara que este método se tornou mais conhecido.

Bhaskara ao aplicar o método da Eliminação do Termo Médio buscava reduzir uma equação quadrática em uma equação linear, Bhaskara ao apresentar esse método exibiu-o de maneira retórica, recorrendo apenas ao uso da escrita, escrevendo os procedimentos necessários neste método por meio de versos.

Bhaskara apresenta o método no seguinte verso:

Seja uma igualdade contento a quantidade desconhecida, seu
quadrado etc. Se temos os quadrados da quantidade
desconhecida etc, em um dos membros, multiplicamos os dois
membros por um fator conveniente e somamos o que é
necessário para que o membro das quantidades desconhecidas
tenha uma raiz; igualando em seguida esta raiz à do membro
das quantidades conhecidas, obtemos o valor da quantidade
desconhecida (ROQUE & CARVALHO, 2012, p.195)

Buscando aplicar o método, o qual como podemos observar encontra-se escrito em versos, Bhaskara escreve novamente em versos

especificações que nos permitem aplicar o método da Eliminação do Termo Médio.

Verso deixado por Bhaskara:

É por unidades iguais a quatro vezes o número de quadrados que é preciso multiplicar os dois membros; e é a quantidade igual ao quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples que é preciso adicionar. (ROQUE & CARVALHO, 2012, p.195)

Esse verso permite solucionar equações quadráticas do tipo:

$$ax^2 + bx = c$$

Para reescrever matematicamente o verso com as especificações deixadas por Bhaskara dividimos o verso em duas partes:

Parte 1: É por unidades iguais a quatro vezes o número de quadrados que é preciso multiplicar os dois membros (ROQUE & CARVALHO, 2012, p.195)

Estamos solucionando uma equação do tipo:

$$ax^2 + bx = c$$

Portanto a primeira parte do verso com as especificações pode ser reescrita matematicamente da seguinte maneira:

$$4a \cdot (ax^2 + bx) = c \cdot 4a$$

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac$$

Usando agora o restante do verso, temos:

Parte 2: “...e é a quantidade igual ao quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples que é preciso adicionar.” (ROQUE & CARVALHO, 2012, p.195)

Parte esta que podemos reescrever usando a linguagem matemática simbólica da seguinte maneira:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4a^2c + b^2$$

Usando a propriedade do quadrado da soma, reescrevemos esta igualdade:

$$(2ax + b)^2 = 4a^2c + b^2$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados da igualdade:

$$2ax + b = \sqrt{4a^2c + b^2}$$

Agora portanto podemos determinar o valor da incógnita, onde temos:

$$2ax = \sqrt{4a^2c + b^2} - b$$
$$x = \frac{\sqrt{4a^2c + b^2} - b}{2a}$$

Foi isto que Bhaskara fez de maneira retórica, através do uso de palavras, sem recorrer ao uso da simbologia. Deste modo foi usando este método que ele resolveu inúmeros problemas, escritos por meio de versos, usando muitas vezes a linguagem poética.

Todo este método denominado por Bhaskara como Método da Eliminação do Termo Médio pode ser dividido em três etapas.

Etapas do Método de Eliminação do Termo Médio

- 1. Completar o quadrado no primeiro membro para transformar o termo que contém a quantidade desconhecida e seu quadrado em um quadrado perfeito.*
- 2. Diminuir o grau da equação extraído a raiz quadrada dois membros;*
- 3. Resolver a equação de primeiro grau que daí resulta. (ROQUE & CARVALHO, 2012, p.196)*

Exemplo 1: Usando o Método da Eliminação do Termo Médio encontrar solução para a equação $x^2 + 4x = 5$.

Resolução: seguindo as etapas apresentadas acima, temos:

1. Completar o quadrado do 1º membro:

$$x^2 + 4x = 5$$

$$(x + 2)^2 = 5 + 4$$

$$(x + 2)^2 = 9$$

2. Extrair a raiz quadrada no primeiro e no segundo membro:

$$\sqrt{(x + 2)^2} = \sqrt{9}$$

$$x + 2 = \pm 3$$

3. Resolver a equação resultada após a extração da raiz quadrada:

$$x + 2 = \pm 3$$

$$x_1 = 3 - 2 = 1 \text{ ou } x_2 = 3 + 2 = 5$$

Portanto as soluções para a equação devem ser $x_1 = 1$ ou $x_2 = 5$.

Exemplo 2: Usando o Método da Eliminação do Termo Médio encontrar solução para a equação $x^2 + 8x = 20$.

Resolução: seguindo as etapas apresentadas acima, temos:

1. Completar o quadrado do 1º membro:

$$x^2 + 8x = 20$$

$$(x + 4)^2 = 20 + 16$$

$$(x + 4)^2 = 36$$

2. Extrair a raiz quadrada no primeiro e no segundo membro:

$$\sqrt{(x + 4)^2} = \sqrt{36}$$

$$x + 4 = \pm 6$$

3. Resolver a equação resultada após a extração da raiz quadrada:

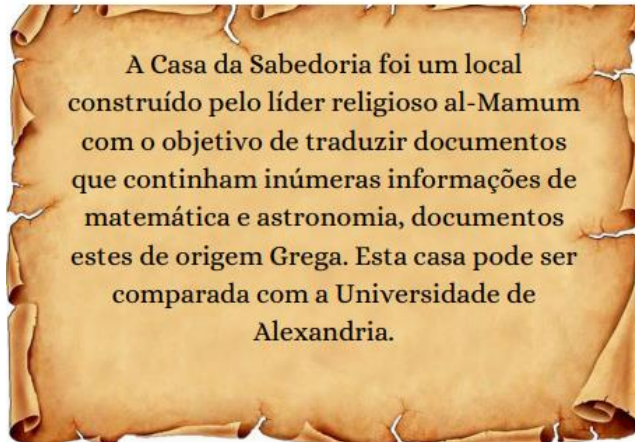
$$x + 4 = \pm 6$$

$$x_1 = 6 - 4 = 2 \text{ ou } x_2 = -6 - 4 = -10$$

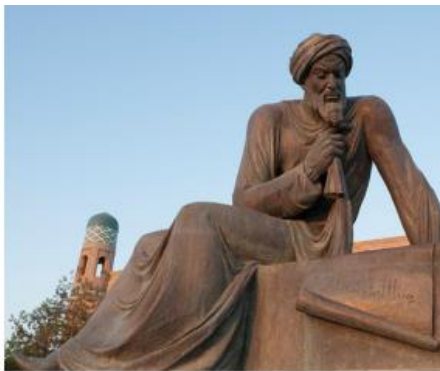
Portanto as soluções para a equação devem ser $x_1 = 2$ ou $x_2 = -10$.

Método de Al-Khwarizmi

Outro método histórico que também possibilita o encontro de soluções a equações quadráticas é o método árabe conhecido como método de Al-Khwarizmi, método este que recebe este nome em homenagem ao matemático árabe Mohammed ibn Musa alKhwarizmi. (780-850 d.C.), o qual foi um dos mais importantes e influentes matemáticos árabes que se dedicou a construção de novos conhecimentos matemáticos para o mundo árabe, fazendo parte inclusive da Casa da Sabedoria.



Monumento construídos em homenagem a Al-Khawarizmi:



Fonte: Marco C. Pereira & Sara Wong, 20??

Selo produzido em homenagem a al-Khwarizmi

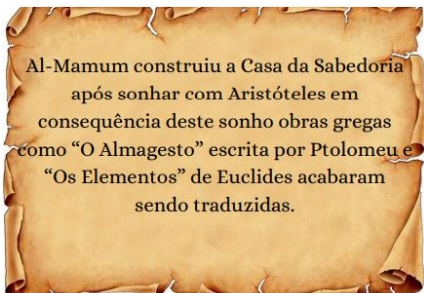


Fonte: Jeff Miller (2019) citado por Araújo (2019)

Segundo Araújo (2019) em 6 de setembro de 1983 a União Soviética elaborou um selo em homenagem ao 1200º aniversário de al-

Khwarizmi, a homenagem foi uma forma de agradecer as contribuições deixadas por al-Khwarizmi para o florescimento das ciências.

Na imagem acima encontramos este selo, produzido em 1983.



Mas o que foi o método de Al- Khwarizmi?

O método de Al- Khwarizmi é um método que permite solucionar equações quadráticas, diferente de outros matemáticos ele apresenta o método algebricamente como também o apresenta geometricamente.

Al- Khwarizmi apresentou seis problemas cujas soluções poderiam ser encontradas usando o referido método.

Tabela com problemas de Al- Khwarizmi

Problema apresentado por al-Khwarizmi	Representação matemática
Quadrados iguais a raízes	$ax^2 = bx$
Quadrados iguais a um número	$ax^2 = c$
Raízes iguais a um número	$bx = c$

Passo 1: tome metade do coeficiente b , tendo então $\frac{b}{2}$.

Passo 2: eleve o termo encontrado ao quadrado, tendo então $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Passo 3: some ao último termo encontrado o coeficiente c , tendo então $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$.

Passo 4: extraia a raiz quadrada, ou seja, $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$

Passo 5: subtraia do resultado encontrado após a extração da raiz quadrada metade do coeficiente b , ou seja, subtraia $\frac{b}{2}$.

E a solução é encontrada por meio da expressão $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$, portanto temos que

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}.$$

Exemplo 1: encontrar soluções para a equação $x^2 + 4x = 21$ por meio do método de Al- Khwarizmi.

Resolução:

Passo 1: Tomar metade do coeficiente b , tendo então:

$$\frac{b}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Passo 2: Elevar ao quadrado o valor encontrado:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 2^2 = 4$$

Passo 3: somar o resultado de $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ao coeficiente c :

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 4 + 21 = 25$$

Passo 4: extrair a raiz quadrada do último valor encontrado, ou seja

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}:$$

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} = \sqrt{25} = \pm 5$$

Passo 5: subtrair do resultado encontrado metade do coeficiente b , ou seja extrair $\frac{b}{2}$ unidades:

$$x = \pm 5 - \frac{4}{2} = \pm 5 - 2$$

$$x_1 = 5 - 2 = 3 \text{ ou } x_2 = -5 - 2 = -7$$

Portanto as soluções para esta equação deve ser $x_1 = 3$ ou $x_2 = -7$.

Exemplo 2: Encontrar a solução da equação dada $x^2 + x = 2$ usando o método algébrico de Al- Khwarizmi.

Resolução: Podemos aplicar a expressão encontrada no último passo proposto nos versos deixados por Al- Khwarizmi, ou seja, usamos a seguinte expressão:

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

Analisando a equação concluímos que $b=1$ e $c=2$, portanto aplicando estes valores na expressão temos:

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2} - \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{4} + 2} - \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{9}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ ou } x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

Portanto as soluções para esta equação devem ser $x_1 = 1$ ou $x_2 = -2$.

Quando o coeficiente de a for um número real diferente de 1 para que possamos aplicar o método de Al- Khwarizmi é necessário dividirmos toda a equação por este coeficiente, este lembrete al-Khwarizmi já havia deixado registrado no capítulo VI de sua obra denominada Al-kitab al-jabr wa'l muqabalah cujo título deu origem ao termo álgebra.

Exemplo 3: Aplicar o método de al- Khwarizmi para solucionar a equação dada por $2x^2 + 4x - 6 = 0$.

Resolução: Como nesta equação o coeficiente a apresenta valor diferente de 1 é necessário dividirmos toda a equação pelo valor numérico do coeficiente a , ou seja, 2.

Dividindo a equação por 2, temos:

$$2x^2 + 4x = 6 \rightarrow x^2 + 2x = 3$$

Agora podemos aplicar o método de al-Khwarizmi.

Aplicando o método de al-Khwarizmi na equação $x^2 + 2x = 3$

1º passo: Tomando metade do coeficiente b :

$$\frac{b}{2} \rightarrow \frac{2}{2} = 1$$

2º passo: elevando este valor ao quadrado:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 \rightarrow 1^2 = 1$$

3º passo: adicionar o valor do coeficiente c :

$$1 + 3 = 4$$

4º passo: extrair a raiz quadrada do último valor encontrado:

$$\sqrt{4} = \pm 2$$

5º passo: ao valor encontrado no 4º passo subtrair $\frac{b}{2}$ unidades:

$$\pm 2 - 1$$

Temos como solução a esta equação:

$$x_1 = 2 - 1 = 1 \text{ ou } x_2 = -2 - 1 = -3$$

Portanto as soluções para esta equação devem ser $x_1 = 1$ e $x_2 = -3$.

Justificativa geométrica para Método de Al- Khwarizmi que permite solucionar equações quadráticas do tipo $ax^2 + bx = c$

Al-Khwarizmi além de apresentar um método algébrico que permitisse solucionar equações do tipo $ax^2 + bx = c$ ele também justificou seu método geometricamente.

Termos usados por Al-Khwarizmi:

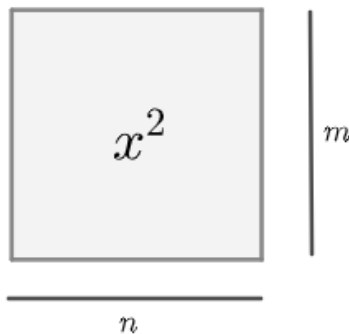
Palavra	Significado	Sentido nos problemas	Notação moderna
Adad		Quantidade conhecida (número dado)	c
Jidhr	raiz	Quantidade desconhecida	x
Mal	“possessão” “tesouro”	Quadrado da quantidade desconhecida	x^2

Fonte: ROQUE & CARVALHO, 2012, p.199.

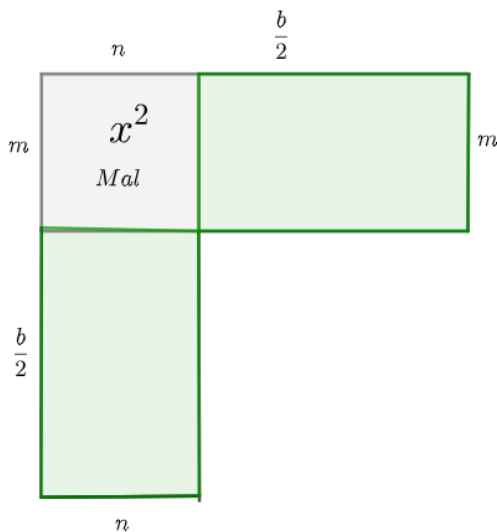
Vamos a justificativa geométrica!

Buscando apresentar está justificativa solucionaremos a equação quadrática já proposta por al-Khwarizmi dada por $x^2 + 10x = 39$.

Al-Khwarizmi traça um quadrado com lados $m. n$ para representar x^2 , tendo então:

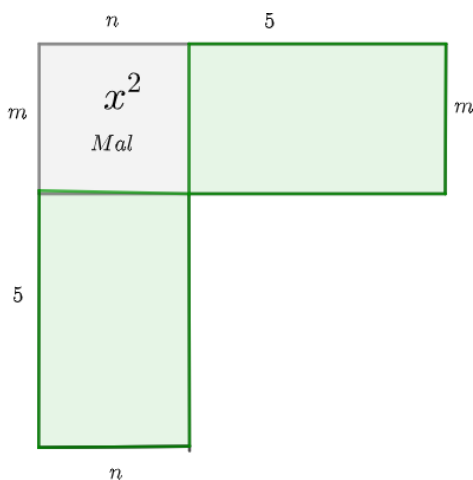


Em seguida sobre esse mesmo quadrado traça-se dois retângulos, com as seguintes dimensões: $m \times \frac{b}{2}$ e $n \times \frac{b}{2}$.



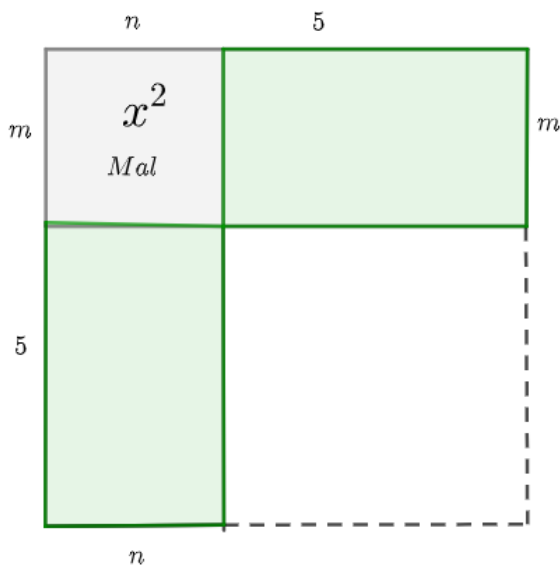
Esta figura era chamada por Al-Khwarizmi de Gnomon.

Substituindo o valor de b encontrado na equação, temos o Gnomon com as seguintes dimensões:



Essa figura deve apresentar uma área de 39 unidades de área.

Agora completamos o Gnomom com um quadrado com lado medindo 5 unidades de comprimento, ou seja, um quadrado com 25 unidades de área e temos então a seguinte figura:



A área de toda a figura deve ser de 64 unidades de área, como a região é uma região quadrada, podemos concluir que a medida do lado deste quadrado deve ser 8 unidades de comprimento.

Portanto a raiz procurada deve ser dada por:

$$raiz = lado do quadrado maior - \frac{b}{2}$$

Ou seja,

$$x = 8 - 5 = 3$$

$$x = 3$$

Portanto o valor procurado para a raiz deve ser $x = 3$.

Método das Proporções

O método das proporções é um método geométrico que permite solucionar equações de primeiro e segundo grau, método este utilizado pelos gregos ainda antes da era cristã, por volta de 500 à 200 a.C.

Segundo Eves (2004) este foi o método preferido e talvez o principal método utilizado pelos gregos durante o desenvolvimento da álgebra geométrica.

Mas como funciona o método das proporções?

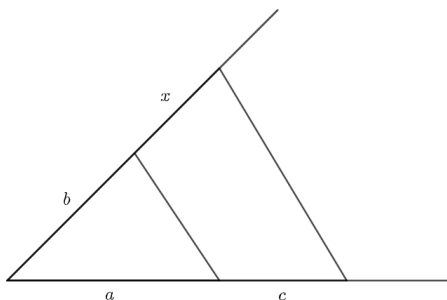
O método das proporções pode ser útil para solucionar equações do tipo $ax = bc$ e $x^2 = ab$. As soluções encontradas por meio deste método são encontradas através da construção de segmentos de reta, os quais são construídos por meio de relações de proporções entre segmentos de retas com valores numéricos já conhecidos.

As proporções que permitem o encontro de solução as equações do tipo $ax = bc$ e $x^2 = ab$ são as seguintes:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \text{ ou } \frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

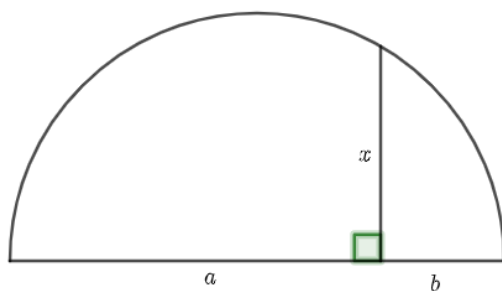
Abaixo encontramos a representação geométrica deste método.

Representação geométrica para solucionar equações do tipo $ax = bc$.



Fonte: adaptada de Eves (2004, p.110)

Representação geométrica para solucionar equações do tipo $x^2 = ab$:



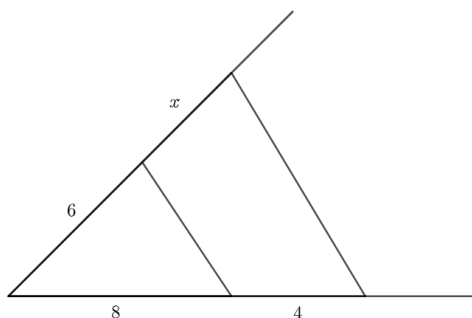
Fonte: adaptada de Eves (2004, p.110)

Exemplo: por meio do método das proporções vamos solucionar a seguinte equação do primeiro grau $8 \cdot x = 6 \cdot 4$.

Resolução: primeiramente identificamos os valores de a, b e c , onde temos:

$$a = 8, b = 6 \text{ e } c = 4.$$

Representando geometricamente:



Aplicando o método das proporções, temos a seguinte relação:

$$\frac{8}{6} = \frac{4}{x}$$

$$8x = 6 \cdot 4$$

$$8x = 24$$

$$x = 3$$

Portanto a solução à esta equação deve ser $x = 3$.

Capítulo 3: Obras e problemas antigos solucionáveis com métodos históricos.

Diferentes métodos foram estudados e aplicados por diferentes povos antigos em diferentes momentos históricos, buscando solucionar na grande maioria das vezes problemas e situações cotidianas da época.

No capítulo anterior apresentamos os seguintes métodos: Método da Falsa Posição, Método da Inversão, Método da Eliminação do Termo Médio, Método de al- Khwarizmi, Método das proporções e Método da Aplicação de Áreas, métodos estes desenvolvidos por povos hindus, egípcios, gregos e árabes.

Todos estes métodos só puderam chegar até os dias atuais graças aos registros, as obras e as traduções destas obras que ainda se encontram preservadas em museus e arquivos históricos.

Estas obras algumas foram escritas em papiros, outras escritas em linguagem poética, em versos. Neste capítulo destacamos obras em que se encontram os registros e aplicações destes métodos antigos, como também registros de problemas cujas as soluções encontraram-se por meio deste métodos.

Papiro de Moscou

Um dos documentos matemáticos egípcios mais antigo e que se tem conhecimento atualmente é o Papiro de Moscou também conhecido como Papiro de Golenishev. Escrito por volta de 1850 a.C. apresenta aproximadamente 25 problemas antigos elaborados pelo povo egípcio, problemas matemáticos associados a situações cotidianas e a vida prática deste povo, são problemas sobre construção de pirâmides,

dimensões de triângulos e outras, assemelhando-se muito aos problemas encontrados em outro papiro escrito anos mais tarde, o Papiro de Rhind.

Papiro de Moscou



Fonte: Disponível em: <https://www.matematicaefacil.com.br/2015/11/papiros-da-matematica-egipcia-papiro-moscov.html> . Acesso em: 19. abr.2023.

Conforme Eves (2004) para muitos dos problemas encontrados neste papiro a solução não requeria mais do que uma equação linear simples, a qual foi solucionada com o método conhecido séculos mais tarde na Europa como Método da Falsa Posição.

Este documento matemático encontra-se organizado em um texto matemático, manuscrito produzido por meio da escrita hieroglífica, neste tipo de escrita símbolos representam letras e até mesmo palavras inteiras, mesmo tipo de linguagem escrita utilizada no papiro de Rhind.

Apesar de possuir uma organização textual matemática e problemas muito semelhantes ao papiro de Rhind, produzido anos mais tarde, segundo Barasuol (2006) verifica-se que durante a escrita do papiro de Moscou tomou-se menos cuidado, escrita esta produzida por um escriba desconhecido.

Tornou-se conhecido como papiro de Moscou devido a aquisição feita pelo colecionador russo Golenischev, o qual conforme Boyer (2016) comprou esse documento matemático no Egito por volta de 1893.

Atualmente o Papiro de Moscou encontra-se preservado no Museu de Belas Artes em Moscou, tendo segundo Eves (2004) uma dimensão de dezoito pés de comprimento por três polegadas de altura.

Fachada do Museu de Belas Artes em Moscou



Fonte: disponível em: <https://mus3ums.com/pt/russia/moscow/pushkin-museum-moscowrussia/> . Acesso em: 19.abr.2023.

Problemas presentes no Papiro de Moscou

Os problemas presentes no papiro de Moscou podem ser classificados em problemas aritméticos e também em problemas geométricos, os quais são a grande maioria.

Problemas aritméticos, cuja soluções podem ser determinadas pelo método da Falsa Posição.

Problema 19: Tomando 1 de uma quantidade e somando 4 obtém-se 10. Qual a quantidade? (SANTOS, 2021, p. 13).

Problema 25: Duas vezes uma quantidade adicionada a ela mesma é 9. Qual a quantidade? (SANTOS, 2021, p. 13).

Problema 25: Duas vezes uma quantidade adicionada a ela mesma é 9. Qual a quantidade? (SANTOS, 2021, p. 13)

Problemas geométricos

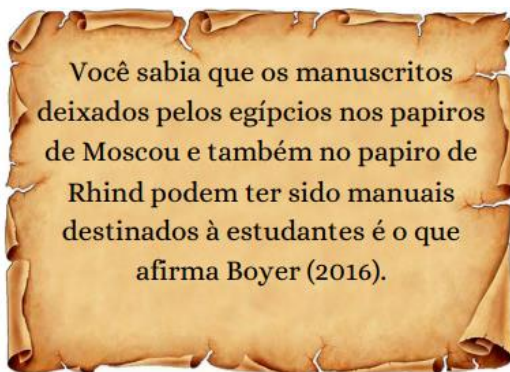
Problema do Papiro de Moscou. A área de um retângulo é 12 e a altura é $\frac{3}{4}$ da base. Quais as dimensões? (EVES, 2004, p.85).

Problema do Papiro de Moscou. Um dos catetos de um triângulo retângulo é $2\frac{1}{2}$ vezes o outro e a área é 20. Quais são as dimensões? (EVES, 2004, p.86).

Problema 4. Descubra a área de um triângulo de altura 10 e base 4

Problema 10. É te dito, um cesto com uma abertura de $4 + \frac{1}{2}$ [de diâmetro]. Diz-me a sua superfície. (SANTOS, 201?, online)

Problema 14: Método de calcular um tronco de pirâmide. Se te é dito, um tronco de pirâmide tem 6 cúbitos de altura, 4 cúbitos de base, por 2 cúbitos no topo. (SANTOS, 201?, online)



Papiro de Rhind

O Papiro de Ahmes (ou Rhind) é um dos primeiros documentos históricos matemáticos produzidos no Egito, neste documento encontramos 85 problemas práticos cujas as soluções são encontradas por meio de conhecimentos aritméticos ou geométricos.

Segundo autores como Eves (2004) e Boyer (2016) o papiro de Rhind é uma das principais fontes primárias de informação da matemática do Egito Antigo, nele encontramos informações e descrições dos métodos de multiplicação, divisão, uso de frações desenvolvidos pelos egípcios, como também encontramos o emprego do Método da Falsa Posição para o encontro de soluções à problemas que recaiam em equações de primeiro grau.

Diferente da linguagem e da simbologia matemática que temos acesso atualmente a matemática encontrada e registrada neste documento era toda descrita por meio de palavras, organizada em um texto

matemático produzido em forma de um manual prático onde apresentava-se problemas práticos e suas resoluções.

Parte do Papiro de Rhind

A linguagem empregada neste papiro foi a escrita hierática a qual foi produzida pelo escriba Ahmes. A escrita hierática era a escrita do dia a dia dos egípcios, a qual era produzida por meio de desenhos, representações, um tipo de escrita muito utilizado por sacerdotes da época.



Com relação a linguagem matemática verifica-se que os egípcios antigos já possuíam símbolos para as operações aritméticas de soma e subtração. “A subtração era representada por duas perninhas caminhando na direção da escrita e a subtração por duas pedrinhas no sentido oposto” (GARBI, 2007, p.14).

A seguir apresentamos os símbolos encontrados para a soma e subtração no papiro de Rhind.

Fonte: Disponível em:
<https://www.matematicaefacil.com.br/2015/11/papiros-matematica-egipcia-papiro-rhind-ahmes.html>
Acesso em: 221. Abr.2023.

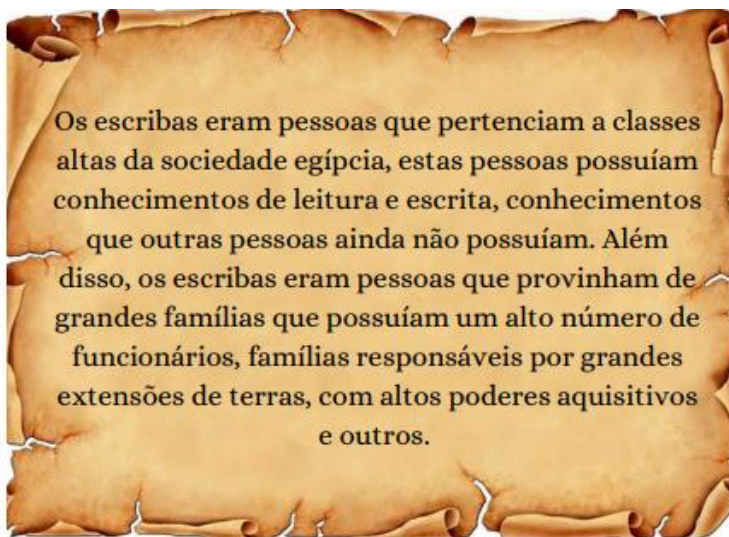
Símbolos para soma e subtração encontrados no papiro de Ahnes



Fonte: GARBI, 2010, p.14

O Papiro de Ahmes é também conhecido como Papiro de Rhind, o fato de um mesmo documento possuir dois nomes deve-se ao fato deste documento matemático ter sido produzido pelo escriba egípcio Ahmes, isto por volta de 1650 a.C, porém séculos mais tarde, por volta de 1858 o estudante de egiptologia escocês A. Henry Rhind acabou o adquirindo no Egito, o que fez com que este documento fosse então também denominado como Papiro de Rhind.

Atualmente o Papiro de Ahmes ou Papiro de Rhind encontra-se preservado no Museu Britânico em Londres tendo formato retangular com as dimensões de 5 metros de comprimento e 0,30 metros de altura.



Atualmente o Papiro de Ahmes ou Papiro de Rhind encontra-se preservado no Museu Britânico em Londres tendo formato retangular com as dimensões de 5 metros de comprimento e 0,30 metros de altura.

Problemas presentes no Papiro de Rhind

Alguns problemas que encontramos no Papiro de Rhind e podemos solucioná-los por meio do método da Falsa Posição.

Problema 24: Uma quantidade e seu 17 somados fazem 19. Qual a quantidade? (ROQUE, 2012, p.67).

Problema 25: Uma quantidade e sua metade somadas fazem 16. Qual a quantidade? (ROQUE, 2012, p.66).

Problema 26: Uma quantidade e seu $\frac{1}{4}$ é igual a 15. Qual é essa quantidade? (ROQUE & CARVALHO, 2012, p.44)

Problema 27: Uma quantidade e seu quinto se tornam 21. Qual é a quantidade? (ROQUE & CARVALHO, 2012, p.44)

Problema 28: Uma quantidade é somada com seus $\frac{2}{3}$, é subtraído $\frac{1}{3}$ do resultado e resulta em 10. Qual é a quantidade? (ROQUE & CARVALHO, 2012, p.44).

Problema 30: Qual é a quantidade de que $\frac{2}{3} + \frac{1}{10}$ são iguais a 10? (ROQUE & CARVALHO, 2012, p.44).

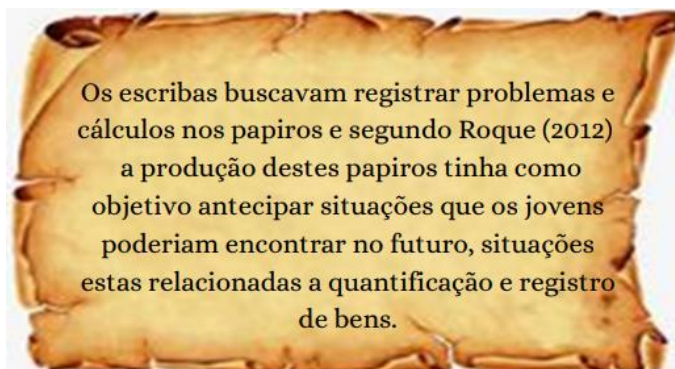
Outros problemas presentes no Papiro de Rhind

Problema 40. Divida 100 pães entre 5 homens, de maneira que as porções estejam em progressão aritmética e que $\frac{1}{7}$ das três maiores porções seja igual à soma das duas menores porções. Qual a diferença entre as porções? (ROQUE & CARVALHO, 2012, p.44)

Problema 63. Repartir 700 pães entre quatro pessoas, sendo que as quantidades que devem receber estão na proporção prolongada $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. (BOYER, 2016, p.32).

Problema 72. Qual o número de pães de “força” 45 que são equivalentes a 100 pães de “força” 10? (BOYER, 2016, p.32).

Problema 79 “Há 7 casas, em cada casa temos 7 gatos, cada gato mata 7 ratos, cada rato comeu 7 grãos de cevada, cada grão teria produzido 7 hectares de cevada. Qual a soma das coisas enumeradas?” (GALVÃO, 2008, pg. 86) citado por REIS, 2018, p.50.



Nove capítulos sobre a arte matemática Kiu-chang Suan-shu

Uma das mais importantes obras sobre a matemática chinesa que ainda se conservou até os dias atuais, tendo sua primeira versão publicada por volta de 213 a.C. é a obra denominada Kiu-chang Suan-shu, que traduzindo para o português significa Nove Capítulos sobre a Arte Matemática, também popularmente conhecida por alguns autores como “Nove Capítulos”.

Nesta obra encontramos conhecimentos matemáticos sobre geometria, trigonometria e aritmética. Organizada em 9 capítulos e 246 problemas encontramos problemas associados a cálculo de impostos, engenharia, agrimensura, mensuração de terras, propriedades de triângulos e soluções para equações determinadas e indeterminadas.

Os nove capítulos encontram-se organizados por temas matemáticos, conforme Eves (2004) encontramos a seguinte organização:

Capítulo 1- Questões associadas a agrimensura, regras para o cálculo de áreas de figuras geométricas como triângulo, trapézio e círculo.

Capítulo 2- Porcentagem e proporção.

Capítulo 3- Regra de três.

Capítulo 4- Determinação de medidas de lados de figuras, extração de raízes quadradas e cúbicas.

Capítulo 5-Volume.

Capítulo 6- Problemas de movimentos e ligas.

Capítulo 7- Regra da Falsa Posição.

Capítulo 8- Sistemas de equações lineares e procedimentos matriciais.

Capítulo 9- Triângulos retângulos pitagóricos.

De acordo com Garbi (2008) a obra Kiu-Chang é uma das obras matemáticas chinesas mais antigas, nem mesmo o autor desta obra é conhecido, porém há indícios de que esta obra que tem-se conhecimento hoje salvou-se devido a reconstruções feitas pelo sábio chinês Chang Tsang, por volta de 200 a.C. Chang Tsang produziu uma versão revista da obra Kiuchang Suan-shu, pois a mesma necessitou de reconstruções, já que por volta de 213 a.C o imperador Shi Huang-ti buscando construir uma nova cultura ordena a queima de todos os livros até então escritos, preservando apenas os livros que tratavam de temas relacionados a medicina, agricultura e adivinhação.



A figura a seguir representa uma pintura desenvolvida já no século XVIII com autoria desconhecida, porém a obra busca retratar uma queima de livros, onde encontramos uma pessoa ao centro, a qual o autor buscou representar um imperador, que ordena que os livros sejam queimados.

Retrato da queima de livros



Fonte: Disponível em: <https://amavelleitor.blogspot.com/2018/09/a-purificacao-pelo-fogo-ou-tresou.html>. Acesso em 21. abr.2023

Nesta mesma época quando o imperador Shi-Huandi reinava sobre a China o pior delito que um cidadão chinês poderia cometer era esconder um livro que apresentava assuntos contrários as ideias defendidas pelo governo. A punição por esconder um livro era o envio do infrator para realizar trabalhos na Grande Muralha.

Problemas presentes na obra Nove Capítulos sobre a Arte Matemática

Problema 11. Capítulo IV: é dado um campo de largura $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11},$ e $\frac{1}{12}$ pu. Sabe-se que a área do campo é 1 mu. Qual é o comprimento do campo? (um pu é o dobro de um passo; 1 mu=240 pu quadrados; a largura do campo é $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{12}$ pu.). (EVES, 2004, p.267).

Problema 14. Capítulo IV: é dado um campo quadrado de 71 824 pu quadrados. Qual é o lado do quadrado? (EVES, 2004, p.267).

Problema ??: Uma cidade quadrada tem uma entrada em cada ponto médio dos lados. Vinte passos em direção da entrada norte há uma árvore visível de um ponto alcançável andando da entrada sul 14 passos em direção sul e seguir 1775 passos em direção oeste. Ache o perímetro da cidade. (CAJORI, 2007, p.116).

Esses três problemas apresentados acima e encontrados na obra chinesa podem ser solucionados por meio de equações quadráticas.

Problema 1. Capítulo VIII. Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma de qualidade regular e um feixe de uma de má qualidade são vendidos por 39 dou. Dois feixes de boa, três de regular e um de má qualidade são vendidos por 34 dou. Um feixe de boa, dois de regular e três de má são vendidos por 26 dou. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades? (EVES, 2004, p.267).

Como podemos observar, o problema 1 do capítulo VIII não pode ser solucionado com apenas uma equação de primeiro grau, é necessário solucionarmos um sistema linear com três equações de primeiro grau e três incógnitas.

O Lilavati

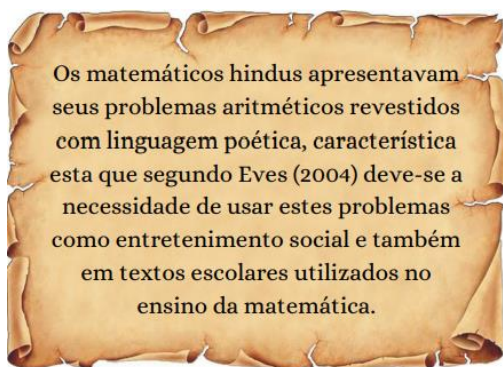
Escrito já no final da idade média, por volta de 1150, Lilavati é um dos quatro textos matemáticos presente na grande obra deixada pelo matemático hindu Bhaskara (1114- 1185), obra esta denominada Siddhanta Siromani, a qual conforme Roque e Carvalho (2012) encontra-se dividida em quatro partes denominadas Lilavati, Bijaganita, Grahaganita e Goladhyaya cada qual dedicada a um ramo matemático distinto. Todo o texto denominado Lilavati é dedicado a aritmética, os demais textos são dedicados a álgebra, astronomia e a trigonometria esférica, sendo este um dos textos que mais trouxe

contribuições para o conhecimento da aritmética desenvolvida pelos hindus ainda no período da idade média.

Como na época em que Bhaskara escreveu seu texto denominado Lilavati a simbologia matemática tal como encontramos hoje ainda não havia sido desenvolvida Bhaskara escreve toda a sua obra usando a linguagem por meio de palavras e além disso, utilizando uma linguagem poética, organizada em versos, convidando muitas vezes o leitor a solucionar o problema.

Conforme Pedroso (2010) no texto Lilavati deixado por Bhaskara encontramos 278 versos. Ao longo destes versos encontramos ainda diferentes problemas matemáticos sobre tópicos que segundo Boyer (2016) eram os tópicos favoritos dos hindus durante a idade média, são eles: equações lineares, equações quadráticas, equações determinadas e indeterminadas, simples mensuração, progressões aritméticas e geométricas, radicais, ternas pitagóricas dentre outros.

Dentre um dos problemas que encontramos ao longo deste texto matemático há um dos problemas em que Bhaskara dedica a uma pessoa que ele chama de linda donzela, ao longo do problema escrito em verso e utilizando uma linguagem poética, Bhaskara convida a linda donzela a encontrar a solução do problema usando para tanto o método da inversão.



Sobre o título do livro Lilavati conta se uma história romântica, pois segundo Eves (2004) e Boyer (2016) há relatos de que a filha única de Bhaskara Lilavati deveria casar-se em horário e data propícios para o casamento, aproximando-se o dia de seu casamento a

jovem moça debruçou-se sobre um relógio aguardando pela chegada do momento do seu casamento, porém uma pérola cai de seu cabelo, sem que a jovem perceba, obstruindo assim o fluxo do água, quando a jovem percebeu, o momento certo de seu casamento já havia passado, e portanto a jovem moça não poderia casar-se. Buscando consolar sua filha, Bhaskara então nomeia seu livro de aritmética com o nome de sua própria filha.

Problemas presentes no livro Lilavati.

Diferentes problemas são encontrados no livro Lilavati, todos os problemas que encontramos apresentam uma linguagem poética, onde o próprio problema busca contar uma pequena história, problemas estes cujas as soluções podem ser determinadas por meio do método da inversão ou até mesmo pelo método geométrico proposto por Bhaskara, o método da eliminação do termo médio.

Alguns problemas encontrados na obra Lilavati.

De um bando de gansos, quando apareceu uma nuvem, dez vezes a raiz quadrada [do total] foram para o lago de Manasa, um oitavo foi para a floresta coberta de hibiscos, e três pares foram vistos brincando na água. Diz-me donzela, o número de gansos no bando. (ROQUE & CARVALHO, 2012, p.197).

Enraivecido numa batalha, Arjuna disparou uma quantidade de setas para matar Karna. Com metade das setas desviou as setas do seu adversário; com quatro vezes a raiz quadrada do total, matou o seu cavalo; com seis setas, matou o seu cocheiro Salya; depois com três setas destruiu a proteção, o estandarte e o arco do seu inimigo; e com uma seta cortou a sua cabeça. Quantas setas Arjuna disparou? (ROQUE & CARVALHO, 2012, p.197).

Um bando barulhento de macacos se divertia. Um oitavo ao quadrado brincava no bosque. Doze, os que sobraram, gritavam ao mesmo

tempo, no alta da colina verdejante. Quantos eram os macacos no total? (ROQUE & CARVALHO, 2012, p.197).

Linda donzela de olhos resplandecentes, uma vez que entendeis o método da inversão correto, digei-me qual é o número que multiplicado por 3, depois acrescido de $\frac{3}{4}$ do produto, depois dividido por 7, diminuído de $\frac{1}{3}$ do quociente, multiplicado por si mesmo, diminuído de 52, pela extração da raiz quadrada, adição de 8 e divisão por 10 resulta no número 2? (EVES, 2004, p.255)

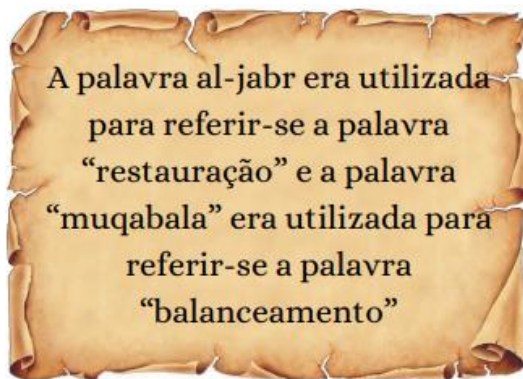
A raiz quadrada da metade do número de abelhas de um enxame voou sobre um jasmeiro e $\frac{8}{9}$ do enxame permaneceu atrás; uma abelha fêmea voa em torno de um macho que se encontra preso dentro de uma flor de lótus para a qual foi atraído à noite por seu odor doce. Digame, você que é a mais encantadora das damas o número de abelhas. (EVES, 2004, p.271).

Além destes problemas que podem ser solucionados aritmeticamente, por meio de equações, Bhaskara também escreveu e solucionou outros problemas envolvendo temas como permutações, progressões aritméticas e trigonometria, problemas estes que não apresentamos neste caderno pedagógico que busca destacar as equações de primeiro e segundo grau.

Tratado sobre o cálculo de al jabr e al muqabala

A obra intitulada “Tratado sobre o cálculo de al jabr e al muqabala” também conhecida como Al jabr foi uma das obras matemáticas mais importantes elaboradas pelo matemático árabe al-Khwarizmi (790-850) ainda no primeiro século da era cristã. É por meio desta obra que a álgebra começa a desenvolver-se, segundo Boyer (2016) esta obra é considerada como sendo a primeira obra matemática a apresentar tópicos sobre álgebra.

Em seu título encontramos presente os termos “restauração” e “balanceamento” que nos lembram a resolução de equações, conforme Cajori (2007) a tradução livre de “Al-kitab aljabr wa’l muqabalah” significa “O livro da restauração e do balanceamento”.



Restauração pode ser visto como o processo em que mantemos em um dos lados da igualdade apenas as incógnitas e no outro lado da igualdade apenas os valores numéricos.

E o balanceamento pode ser entendido como o processo de unir os termos

semelhantes, acompanhe os procedimentos desenvolvidos abaixo.

Sendo a equação dada por:

$$3x + 7 = 21 + x$$

Aplicando a restauração:

$$3x - x = 21 - 7$$

Aplicando o balanceamento:

$$2x = 14$$

Nesta obra al-Khwarizmi não apresenta apenas tópicos relacionados a álgebra, mas também apresenta tópicos relacionados a geometria, não encontramos apenas métodos de resolução de equações encontramos

também regras para operações binomiais, demonstrações geométricas para solução de equações, breves explanações introdutórias sobre os números posicionais.

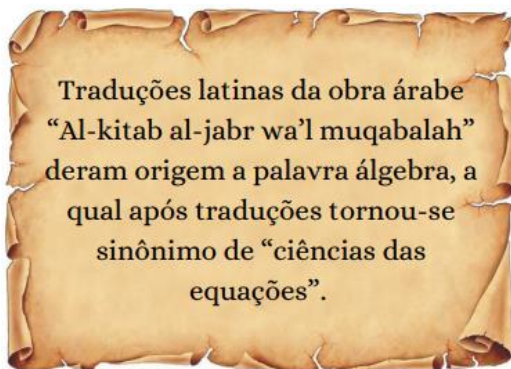
Sobre a resolução de equações quadráticas al-Khwarzmi dedica seis capítulos, para cada um dos seis capítulos ele apresenta um método para solucionar um tipo de equação quadrática.

Conforme Boyer (2016) no capítulo I encontramos métodos para solucionar equações do tipo $x^2 = bx$, no capítulo II encontramos métodos para equações do tipo quadrados iguais a números, já no capítulo III al-Khwarzmi soluciona casos de equações quadráticas onde as raízes são iguais aos números, por fim nos capítulos IV, V e VI encontramos casos que envolvem todos os tipos de equações, ou seja, quadrados e raízes iguais a números, quadrados e números iguais a raízes, raízes e números iguais a quadrados.

Apesar da álgebra de al-Khwarizmi apresentar grande prestígio e admiração entre os árabes a mesma apresenta pouca originalidade, na obra Tratado sobre o cálculo de al jabr e al muqabala, encontramos indícios que nos levam a crer que o seu desenvolvimento teve contribuições de conhecimentos matemáticos já desenvolvidos pelos hindus e também pelos gregos, ou seja, a álgebra de al-Khwarizmi não foi totalmente árabe, mas também não foi totalmente grega e hindu, pois a mesma teve contribuições das três culturas (árabe, hindu e grega).

Mesmo não sendo a obra totalmente oriunda da cultura árabe a mesma teve forte influência no mundo ocidental, o Tratado sobre o cálculo de al jabr e al muqabala, tornou-se um clássico da História da Matemática e influenciou matemáticos do mundo ocidental até o início do Renascimento, podemos assim observar a grande importância desta

obra para o desenvolvimento da matemática e consequentemente da álgebra.



Problemas propostos por al-Khwarizmi livro Lilavati

Problema encontrado na obra “Tratado sobre o cálculo de al jabr e al muqabala” sobre heranças: Um homem morre deixando dois filhos e legando um terço de seu capital a um estranho. Deixa dez dirhems de propriedades e uma dívida de dez dirhems de um dos filhos. (BOYER, 2016, p.168).

Problema encontrado na obra “Tratado sobre o cálculo de al jabr e al muqabala”. Dividir dez em duas partes de modo que a soma dos produtos obtidos multiplicando cada parte por si mesma seja igual a cinquenta e oito. ((BOYER, 2016, p.168).

Problema proposto por al-Khwarizmi “Divida dez em duas partes, e divida a primeira pela segunda e a segunda pela primeira. Se a soma dos quocientes é 2, ache as partes. (ROQUE & CARVALHO, 2012, p.205).

Equações presentes na obra ”Tratado sobre o cálculo de al jabr e al muqabala”

$$x^2 + 10x = 39 \text{ (CAJORI, 2007, p.159).}$$

$$x^2 + 21 = 10x \text{ (CAJORI, 2007, p.159).}$$

$$3x = 4 + x^2 \text{ (CAJORI, 2007, p.159).}$$

$$2x^2 + 10x = 48 \text{ (BOYER, 2016, p.166).}$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28 \text{ (BOYER, 2016, p.166).}$$

$$\frac{1}{3}x^2 = 4x \text{ (BOYER, 2016, p.166).}$$

Capítulo 4: Coletânea de atividades

Neste capítulo apresentamos atividades que podem ser aplicadas em turmas de 8º e 9º ano do Ensino fundamental, durante as aulas sobre equações de primeiro e segundo grau.

Estas atividades buscam apresentar métodos históricos distintos para solucionar diferentes equações de primeiro e segundo grau, métodos estes pouco apresentados em livros didáticos de matemática.

Cada uma das atividades apresenta métodos e habilidades distintas a serem desenvolvidas em sala de aula. Desta forma, buscando auxiliar o professor, enumeramos as atividades, apresentamos o método e as habilidades a serem desenvolvidas e na sequência apresentamos então a sugestão de atividade que pode ser aplicada em sala de aula.

Sugestão 1: Introdução a equações de primeiro grau.

Habilidades a serem desenvolvidas:

Identificar uma equação do primeiro grau.

Resolver equações do primeiro grau, usando o princípio do equilíbrio.

Representar algebricamente sentenças matemáticas.

Conteúdo matemático: Equações do primeiro grau.

Tempo para aplicação: 1 hora aula.

Aluno: _____

Data: ____/____/____

Atividade introdutória sobre equações

1-Represente as sentenças abaixo por meio de uma equação de primeiro grau.

Um número adicionado de 15 é igual a 27.

Um número adicionado de 34 é igual a 50.

O triplo de um número subtraído de 12 é igual a 33.

Um quarto de um número mais 10 é igual a 12.

2- Encontre uma representação matemática para cada uma das situações apresentadas abaixo.

a) As dimensões de uma mesa retangular que apresenta 480 cm de perímetro onde a medida do comprimento desta mesa corresponde ao dobro da medida da largura desta mesa.

b) A idade de Maria adicionada de 32 anos corresponde a idade de sua mãe que é igual a 45 anos.

c) Roberto poupou no último mês $\frac{1}{9}$ de seu salário e ainda recebeu um prêmio por seu desempenho profissional que corresponde ao valor de R\$ 450,00 depositados em conta poupança. Ao final do mês a quantia poupada mais o prêmio recebido correspondeu ao valor de 750,00. Escreva uma expressão matemática que represente essa situação.

Sugestão 2: Aplicando equações de primeiro grau em problemas presentes no Papiro de Moscou.

Método histórico: método da falsa posição.

Habilidades a serem desenvolvidas: Conhecer e aplicar o método da falsa posição.

Refletir sobre a importância de registros como os encontrados no o papiro de Moscou;

Refletir sobre o museu de Belas artes de Moscou.

Resolver problemas matemáticos por meio de equações de primeiro grau.

Relembrar o cálculo da área de figuras plana como triângulo e retângulo.

Relembrar e desenvolver operações com números fracionários, número misto e número fracionário puro.

Conteúdo matemático: Equação de primeiro grau.

Dimensões dos lados de um triângulo retângulo.

Área do triângulo retângulo.

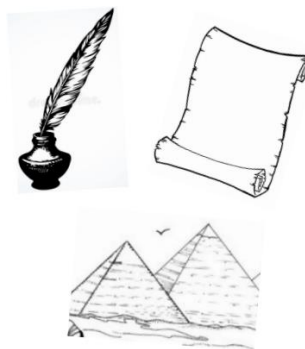
Área do retângulo.

Tempo para aplicação: 2 horas aula.

Aluno: _____

Data: ____/____/____

Aplicando equações de primeiro grau em problemas presentes no papiro de Moscou



Leia o texto abaixo que nos apresenta informações sobre o Papiro de Moscou.

Papiro de Moscou

Outro importante documento matemático que nos possibilita conhecer a matemática desenvolvida por povos antigos, como os egípcios, é o papiro de Moscou. Esse papiro também é conhecido como Papiro de Golenishchev.

Esse documento foi escrito segundo Eves (2004) por volta de 1850 a.C, no Egito Antigo. Por volta de 1893 um colecionador russo chamado Golenishchev comprou esse papiro, o qual encontra-se hoje no museu de Belas-Artes Pushkin em Moscou.

De acordo com Boyer (2011) esse papiro apresenta 5 metros de comprimento e um quarto da largura do papiro de Rhind, o que equivale a aproximadamente 30 centímetros. Além disso verifica-se

que esse papiro apresentou uma escrita menos cuidadosa do que o papiro de Rhind, escrito pelo escriba Ahnes.

A imagem abaixo nos mostra parte deste papiro.



Bom, mas quais seriam os assuntos apresentados nesse papiro?

Nesse papiro encontramos 25 problemas matemáticos, alguns deles relacionados a vida prática, mas também encontramos problemas de natureza teórica, porém de acordo com Boyer esses problemas não se diferem muito dos problemas apresentados por Ahnes no papiro de Rhind.

Destes 25 problemas incluídos nesse papiro a maior parte dos problemas são numéricos e segundo Eves (2004) são problemas simples, de fácil resolução, alguns não exigem mais do que uma equação simples de primeiro grau. Além destes problemas simples, algébricos também encontramos em menor quantidade problemas geométricos, os quais possivelmente foram desenvolvidos devido a necessidade da construção de pirâmides.

Que tal resolvermos alguns problemas presentes neste papiro?

Relembrando equações de primeiro grau.

Os problemas abaixo foram extraídos do Papiro de Moscou, leia-os atentamente, em seguida: Encontre uma equação que represente

matematicamente esses dois problemas. Após encontrada a equação resolva-a pelo método que achar mais conveniente.

Problema 19: Tomando 1 de uma quantidade e somando 4 obtém-se 10. Qual a quantidade? (SANTOS, 2021, p. 13).

Representação matemática:

Solução para o problema:

Problema 25: Duas vezes uma quantidade adicionada a ela mesma é 9. Qual a quantidade? (SANTOS, 2021, p. 13).

Representação matemática:

Solução para o problema:

Resolvendo um problema geométrico presente no Papiro de Moscou

Acompanhe os problemas abaixo:

A área de um retângulo é 12 e a altura é $\frac{3}{4}$ da base. Quais as dimensões? (EVES, 2004, p.85).

Represente esse problema matematicamente por meio de uma equação:

Determine usando o método da falsa posição as dimensões deste retângulo.

Solução:_____

Lembrete: Área do retângulo

$$A_R = b \times h$$

$b = \textit{medida de base}$

$h = \textit{medida da altura}$

Lembrete: Área do triângulo

$$A_T = \frac{b \times h}{2}$$

$b = \textit{medida de base}$

$h = \textit{medida da altura}$

Problema: Um dos catetos de um triângulo retângulo é $2\frac{1}{2}$ vezes o outro e a área é 20. Quais são as dimensões? (EVES, 2004, p.86)

Encontre a dimensão dos dois catetos presentes neste triângulo retângulo.

Sugestão 3: Roteiro de atividades copa do mundo e o método da inversão.

Método histórico: método da inversão.

Habilidades a serem desenvolvidas: aplicar equações de primeiro grau em situações cotidianas como quantidade de figurinhas em álbum da copa do mundo.

Analisar os custos com a aquisição de figurinhas para completar o álbum.

Aprofundar conhecimentos sobre a copa do mundo e sua história.

Solucionar equações do primeiro grau.

Aplicar o método da inversão.

Conteúdo matemático: equações de primeiro grau.

Operações matemáticas básicas (adição, multiplicação e potenciação).

Tempo de aplicação: 2 horas aula.

Aluno: _____

Data: ____/____/____

Roteiro de atividades: Copa do Mundo



Leia a notícia intitulada “álbum de figurinhas da copa do catar 2022: saiba tudo sobre a publicação da Panini”. Disponível em: <https://www.terra.com.br/esportes/futebol/copa-2022/album-de-figurinhasda-copa-do-catar-2022-saiba-tudo-sobre-a-publicacao-dapanini,407e5b10deea07e518740c2e9fd6377e5gesj87b.html>. Após realizada a leitura responda os itens a seguir.

1-Vamos refletir sobre a copa do mundo, sua história e sua organização.

a) De quantos em quantos anos acontece a copa do mundo? _____

b) Quando aconteceu a primeira copa do Mundo? Em qual país?

c) Qual a modalidade é competida na Copa do Mundo?

2-Agora vamos analisar o álbum da copa do Mundo 2022.

a) O álbum da copa do mundo encontra-se organizado em 80 páginas, as quais podem ser preenchidas com 670 figurinhas distintas, destas 670 figurinhas distintas encontramos 50 figurinhas especiais e 80 figurinhas extra. Encontre uma expressão matemática que nos permita determinar a quantidade de figurinhas tradicionais necessárias para o preenchimento de todo o álbum.

b) De acordo com a notícia intitulada “Álbum de figurinhas da Copa do Catar 2022: saiba tudo sobre a publicação da Panini” os envelopes contendo as figurinhas possui cinco figurinhas cada. Considerando que um colecionador tenha a sorte de encontrar em cada envelope figurinhas distintas e não repetidas, qual será o número mínimo de envelopes que esse colecionador deverá adquirir para preencher todo o álbum?

c) A notícia que acabamos de realizar a leitura apresenta valores a serem gastos com aquisição do álbum e dos envelopes de figurinha. Com base nestes valores e considerando o caso em que não há repetição de figurinhas nos envelopes determine:

c. 1. O valor mínimo a ser investido para a comprar o álbum e todas as figurinhas que completam o álbum.

c.2. Usando o valor encontrado no item anterior escreva uma equação que descreva o valor mínimo a ser investido na compra do álbum e das figurinhas.

MÉTODO DA INVERSÃO

O método da inversão foi um dos métodos mais utilizados por povos hindus, ainda no primeiro século da era cristã e consiste em um método onde trabalhasse de trás para frente partindo do resultado dado, ou seja, tendo uma igualdade, partimos do resultado dado nesta igualdade e então desenvolvemos operações inversas a fim de chegar no resultado desejado.

Operações e suas inversas	
Soma	Subtração
Multiplicação	Divisão
Potenciação	Radiciação

Usando o método da inversão encontre a solução das seguintes equações:

a) $x + 8 = 14$

d) $3x - 18 = 6$

b) $x - 7 = 21$

e) $\frac{x}{5} + 2 = 9$

c) $x - 3 + 9 = 6$

Resolva o seguinte problema:

O álbum da copa do mundo 2022 pode ser preenchido com 670 figurinhas, das quais 50 figurinhas devem ser figurinhas do tipo especial, 80 são figurinhas do tipo extra e o restante corresponde as figurinhas tradicionais. Usando o método da inversão diga qual a quantidade de figurinhas tradicionais presentes no álbum da copa 2022.

Sugestão 4: O preço de uma viagem.

Métodos históricos: método da falsa posição e método da inversão.

Habilidades a serem desenvolvidas: Aprofundar conhecimentos sobre o equilíbrio de gastos mensais

Conhecer e aplicar o método da inversão.

Conhecer e aplicar o método da falsa posição.

Solucionar equações de primeiro grau.

Solucionar sistemas lineares 2×2 .

Verificar aplicações de equações de primeiro grau presentes em pacotes de viagem anunciados em diferentes locais (agências, panfletos promocionais de venda, revistas, agências online e outros).

Conteúdo matemático: equação de primeiro grau.

Porcentagem.

Tempo de aplicação: 4 horas aula.

Aluno: _____

Data: ____/____/____

Refletindo sobre o preço de uma viagem

Você já parou para pensar como a matemática pode estar presente até mesmo em situações de lazer e divertimento? Como por exemplo em uma viagem, realizada sozinho ou até mesmo com amigos e familiares.



Nesta atividade vamos aplicar equações de primeiro grau ao pesquisar o preço de um pacote de viagem.

Acompanhe a situação abaixo e desenvolva as atividades solicitadas.

O preço de uma viagem.

Uma pessoa que mora no estado de São Paulo deseja conhecer alguns pontos turísticos do estado de Rio de Janeiro, como o Pão de Açúcar e o Cristo Redentor. Para tanto, buscou por promoções em agências de viagem, onde encontrou a seguinte proposta:

Voo ida e volta de São Paulo a Rio de Janeiro + hospedagem = R\$ 1.726,00

Inclusa taxa de R\$ 197,00 Pacote promocional para duas pessoas.



Com base nestas condições determine:

a) uma expressão numérica que represente essa situação.

b) O valor a ser pago apenas pelo voo e a hospedagem para duas pessoas.

c) O valor a ser pago incluindo voo, hospedagem e taxas para uma única pessoa.

Agora vamos refletir e analisar os gastos com diferentes atividades para se ter equilíbrio em nossas finanças. De acordo com economistas é necessário mantermos o equilíbrio de gastos mensais para que não venhamos a entrar em dívidas. Segundo diferentes economistas há um valor percentual do salário mensal que deve ser gasto com moradia, alimentação, transporte, saúde, educação, lazer e investimentos futuros, para que assim sejamos capazes de manter o equilíbrio econômico.

A tabela abaixo apresenta os percentuais:

Tipo de gasto	Percentual
Essencial (moradia, alimentação, transporte e outros).	55%
Aposentadoria	10%
Educação (compra de livros, cursos extracurriculares de curta duração)	5%
Objetivos (sonhos, viagens)	20%
Gastos extra	10%

Com base nos valores apresentados na tabela de gastos responda os itens abaixo:

a) Considerando o fato de que uma pessoa deseje conhecer Rio de Janeiro aproveitando este pacote promocional e dividindo com algum colega, qual deve ser o seu salário para que esta pessoa obedecendo a tabela de gastos consiga pagar esse pacote de viagens a vista em um único mês?

b) Supondo que duas pessoas que moram em São Paulo, desejam aproveitar esse pacote de viagem, mas apresentam um salário mensal de R\$ 2500,00. Seguindo a tabela de gastos, quanto tempo essa pessoa precisa economizar para que ao final consiga pagar a viagem à vista?

As questões resolvidas até o presente momento tratam de problemas envolvendo situações financeiras, como: valor do salário, valor das parcelas, e outras.

Você sabia que problemas envolvendo situações financeiras são desenvolvidos há muito tempo, povos como os hindus já resolviam problemas envolvendo situações financeiras como juros simples, juro composto, como também elaboravam problemas aritméticos sobre preços de produtos variados.

Para solucionar a esses problemas, povos hindus que viveram por volta de 500 d.C. aplicavam um método conhecido como Método da Inversão.

Por meio do método da inversão encontre soluções para ? as seguintes equações:

a) $x + 5 = 12$

d) $7x - 21 = 56$

b) $x - 14 = 21$

e) $\frac{x}{6} + 36 = 48$

c) $3x + 12 = 39$

f) $\frac{x-8}{9} = 4$

Agora que já aplicamos o método da inversão, usado pelos hindus, que tal conhecermos um dos problemas deixados por este povo?

Problema de Mahavira

O preço conjunto de 9 cidras e 7 maçãs aromáticas é 107; e o preço conjunto de 7 cidras e 9 maçãs aromáticas é 101. Ó você aritmético, diga-me rapidamente o preço de uma cidra e o de uma maçã aromática, tendo separado bem distintamente esses preços.

Encontre a expressão matemática que representa esse problema.

DESAFIO

Usando qualquer método que você conheça encontre o preço de uma cidra e uma maçã aromática.

Continuando com as situações financeiras e o equilíbrio de gastos.

No início desta atividade apresentamos a tabela do percentual de gastos, com base nesta tabela responda os seguintes questionamentos:

a) Supondo que uma pessoa siga todos os percentuais apresentados na tabela, e que a mesma apresente um gasto de R\$ 525,00 com

aposentadoria e educação. Represente esta situação por meio de uma equação.

b) Supondo que uma pessoa gaste mensalmente R\$ 2.925,00 com gastos essenciais e sonhos. Represente por meio de uma equação o salário desta pessoa.

Usando as equações representadas nos itens acima é possível encontramos o valor total do salário tanto da pessoa apresentada no item “a” como da pessoa apresentada no item “b”, equação esta que pode ser resolvida usando diferentes métodos, dentre um dos métodos que podemos usar para solucionar estas equações tem-se o método da Falsa Posição.

Por meio do método da falsa posição encontre a solução das seguintes equações:

Voltando a questão econômica...

Aplicando o método da Falsa Posição e usando as equações encontradas nos itens anteriores, determine o valor dos salários para a situação apresentada no item “a” como também para a situação apresentada no item “b”.



Sugestão 5: Sacando e depositando valores em espécie no caixa eletrônico

Método histórico: método das proporções.

Habilidades a serem desenvolvidas: Refletir sobre a história e o funcionamento de caixas eletrônicos no Brasil.

Aplicar o método das proporções.

Encontrar soluções para equações de primeiro grau.

Identificar equações do primeiro grau em situações cotidianas.

Conteúdo matemático: equação do primeiro grau.

Tempo de aplicação: 2 horas aula.

Aluno: _____

Data: ____/____/____

Sacando e depositando valores em espécie no caixa eletrônico

Atualmente encontramos caixas eletrônicos nos mais variados locais em supermercados, shopping, posto de combustível entre outros locais.

Você já se perguntou sobre o quanto de matemática pode estar envolvido neste tipo de equipamento que hoje se faz presente em diferentes locais?

Você já refletiu sobre a presença destes equipamentos ao longo do tempo?

Nesta atividade vamos refletir sobre estas informações.

Para tanto, acompanhe o trecho de uma notícia encontrada no acervo do jornal Estadão.

**HOJE INAUGURAMOS
O PRIMEIRO
CAIXA AUTOMÁTICO DO RIO
A MAIS RECENTE INOVAÇÃO
EM SERVIÇO BANCÁRIO**

24 HORAS POR DIA, NOS 7 DIAS DA SEMANA, SEMPRE À SUA MÃO;

O Caixa Automático é o mais avançado processo para você usar o seu banco, o BANCO COMERCIAL DO ESTADO DE SÃO PAULO S/A. No Caixa Automático você retira dinheiro a qualquer hora do dia ou da noite, no fim de semana e no feriado. Vá conhecer e utilizar-se já do CAIXA AUTOMÁTICO no Shopping Center Iguatemi. E agora você poderá sacar também no Rio, no Aeroporto Santos Dumont, ao lado do balcão da Ponte Aérea. Dia 25 será a vez de Copacabana com o seu Caixa Automático à Av. Copacabana, 1039-A.




BANCO COMERCIAL DO ESTADO DE SÃO PAULO S/A
MEIO SEGURO DE TRADIÇÃO

Fonte: Acervo/Estadão. Disponível em:
<http://m.acervo.estadao.com.br/noticias/acervo,iniciados-caixas-eletronicos-no-brasil-causou-espantos-e-perrengues,70004048702,0.htm>. Acesso em: 22. abr.2023.

Com base no trecho desta notícia determine:

a) uma equação matemática que nos permite determinar há quanto tempo os caixas eletrônicos já se fazem presentes no Brasil.

b) Usando a equação encontrada encontre o tempo, em anos, que os caixas eletrônicos se fazem presentes em nosso país.

Para refletir:

Existe alguma diferença na denominação dada aos primeiros caixas eletrônicos que surgiram no Brasil?

Qual era essa denominação?

Por que recebia esse nome?

Quais as primeiras regiões contempladas com caixas eletrônicos?

Por que você acredita que estas foram as primeiras regiões a possuírem estes equipamentos?



Voltando as questões dos caixas eletrônicos..

Sua mãe pede a você que se dirija ao caixa eletrônico e saque a quantia de R\$ 250,00. Ao inserir o cartão e realizar todos os comandos pedidos pelo caixa eletrônico recebe a informação de que este caixa apresenta apenas cédulas de R\$ 50,00. Diante desta situação determine:

a) A equação matemática que representa esta situação.

b) Quantas cédulas o caixa eletrônico vai lhe entregar?

Método das proporções

O método das proporções é um método geométrico desenvolvido por matemáticos gregos ainda antes da era cristã, por volta de 500 a 200 a.C. este método é bastante útil para solucionar equações do tipo $ax = b$.

Usando o método das proporções encontre a solução das seguintes equações:

a) $3x = 15$

c) $12x = 60$

b) $7x = 21$

d) $16x = 48$

Agora que você já conhece o método das proporções encontre a solução para a equação que representa a situação descrita no problema anterior. A solução que você encontrou pelo método das proporções é a mesma que você encontrou ao determinar o número de cédulas que o caixa eletrônico vai lhe entregar?

Em certo banco brasileiro nos envelopes para depósito de quantias em dinheiro aparece as seguintes mensagens no verso do envelope:

Depósito em dinheiro quantia máxima de cédulas, 40 cédulas por envelope.

Valor máximo para depósito em dinheiro R\$5.000,00

Com base nestas mensagens apresentadas no envelope, determine:

a) Qual será o número máximo de cédulas de R\$ 100,00 que podemos colocar no envelope para realizar um depósito no valor máximo permitido pelo banco, ou seja, R\$ 5.000,00.

Dica: você pode encontrar a solução aplicando o método das proporções

b) Suponha que você deseje realizar um depósito em dinheiro no valor de R\$870,00 o qual será realizado usando apenas cédulas de R\$ 10,00 e R\$ 20,00, sendo que você possui um total de 15 cédulas de R\$ 10,00.

Qual será a quantidade de cédulas de R\$ 20,00 que você deve possuir para realizar esse depósito? Represente esta situação por meio de uma equação matemática.

c) Suponha que você deseje realizar um depósito em dinheiro no valor de R\$3.200,00 o qual será realizado usando apenas cédulas de R\$ 50,00, R\$ 20,00 e R\$ 10,00, sendo que você possui um total de 21 cédulas de R\$ 20,00, 3 cédulas de R\$10,00. Qual será a quantidade de cédulas de R\$ 50,00 que você deve possuir? Represente esta situação por meio de uma equação matemática.

Sugestão 6: Equações quadráticas no zoológico.

Método histórico: método da Eliminação do termo médio.

Habilidades a serem desenvolvidas: dialogar sobre o bem-estar de animais.

Argumentar sobre os impactos causados pelo aumento da temperatura climática em determinadas espécies de animais.

Representar a área de uma piscina retangular por meio de uma equação quadrática.

Aplicar o método da Eliminação do Termo Médio para solucionar equações quadráticas.

Interpretar e solucionar problemas históricos encontrados na obra Lilavati.

Conteúdo matemático: equações do segundo grau.

Área de figuras retangulares.

Tempo de aplicação: 2 horas aula.

Aluno: _____

Data: ____/____/____

Aplicando equações quadráticas no zoológico



Leia a notícia “Onças e ursos ganham piscina e se divertem em piscina para tentar espantar o calor” publicada em 9 de setembro de 2019 e disponibilizada em:

<https://g1.globo.com/go/goias/noticia/2019/09/09/oncas-eurso-do-zoologico-se-divertem-em-piscina-para-tentarespantar-o-calor-video.ghml> .

É HORA DE PESQUISAR!

Após realizada a leitura pesquise em diferentes meios de comunicação sobre a importância de zoológicos possuírem piscinas para que animais como ursos, onças pintadas e outros possam se refrescar. Pesquise também sobre os fatores que contribuem para o aumento da temperatura climática, quais as consequências do excesso de calor na saúde dos animais. Após realizada a pesquisa discuta com seus colegas as informações que encontrou.

VAMOS AGORA A RESOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS.

Resolva o seguinte problema sobre as dimensões de uma piscina.

Um zoológico possui uma piscina onde espécies de ursos banham-se em dias de muito calor, esta piscina apresenta 3 metros de largura por

4 metros de comprimento. Buscando melhorar a qualidade de vida destes ursos, o proprietário do zoológico definiu a área de ocupação desta piscina, passando de 12 metros quadrados para 30 metros, de tal forma que a medida ampliada na largura também seja ampliada no comprimento. Com base nestas informações:

- a) Encontre uma equação que representa a nova área após a ampliação.
- b) Determine quantos metros devem ser ampliados na largura e no comprimento desta sala para que a mesma apresente a nova área de 30 metros quadrado.

DICA: você pode aplicar o método de eliminação do termo médio para encontrar o valor desejado.

Método da eliminação do termo médio

O método da eliminação do termo médio é um método antigo, o qual foi bastante usado pelo povo hindu para o encontro de soluções a equações do segundo grau. O matemático que mais dedicou-se ao estudo deste método foi matemático Bhaskara por volta do século XII d.C.

Mas como funciona este método?

Etapas do Método de Eliminação do Termo Médio

1. Completar o quadrado no primeiro membro para transformar o termo que contém a quantidade desconhecida e seu quadrado em um quadrado perfeito.
2. Diminuir o grau da equação extraído a raiz quadrada dos membros;
3. Resolver a equação de primeiro grau que daí resulta. (ROQUE & CARVALHO, 2012, p.196)

Aplicando o método da eliminação do termo médio encontre as soluções das seguintes equações:

a) $x^2 + 2x = 15$

c) $x^2 - 2x = 80$

b) $x^2 + 4x = 21$

d) $2x^2 + 4x = 6$

Acabamos de conhecer e aplicar o método de Eliminação do termo médio, o qual foi estudado por Bhaskara, para solucionar diferentes problemas que ele mesmo criou e registrou em sua obra Lilavati. Que tal conhecermos dois destes problemas nos quais Bhaskara buscou determinar quantidades de macacos e gansos?

Problemas encontrados na obra Lilavati.

Um bando barulhento de macacos se divertia. Um oitavo ao quadrado brincava no bosque. Doze, os que sobraram, gritavam ao mesmo tempo, no alta da colina verdejante. Quantos eram os macacos no total? (ROQUE & CARVALHO, 2012, p.197).

De um bando de gansos, quando apareceu uma nuvem, dez vezes a raiz quadrada [do total] foram para o lago de Manasa, um oitavo foi para a floresta coberta de hibiscos, e três pares foram vistos brincando na água. Diz-me donzela, o número de gansos no bando. (ROQUE & CARVALHO, 2012, p.197).

Escolha um dos problemas que você achou mais interessante e após realizada a escolha determine:

a) Uma expressão matemática que representa o problema.

b) Encontre a solução para o problema escolhido.

Sugestão 7: Roteiro de atividades censo da democracia e equações do primeiro grau.

Método histórico: método da Falsa Posição.

Habilidades a serem desenvolvidas: Resolver equações de primeiro grau.

Relembrar o cálculo do perímetro de figuras retangulares.

Conhecer e aplicar o método da falsa posição.

Interpretar e analisar dados estáticos do censo demográfico brasileiros.

Conteúdo matemático: Equação do primeiro grau.

Porcentagem.

Perímetro de figuras retangulares.

Tempo de aplicação: 4 horas aula.

Aluno: _____

Data: ____/____/____

Roteiro de atividades: Censo da democracia e equações de primeiro grau



Leia a notícia intitulada "Censo da democracia: Brasil tem 149,7 milhões de eleitores aptos a votar nas eleições 2020". Disponível em: <https://www.tse.jus.br/imprensa/noticias-tse/2020/Agosto/brasil-tem147-9-milhoes-de-eleitores-aptos-a-votar-nas-eleicoes-2020>.

Após realizada a leitura e usando os dados disponibilizados na notícia apresente soluções aos itens abaixo:

Logo no início da notícia é apresentada a informação de que o número de eleitorado na eleição de 2020 aumentou 2,66% se comparado com as últimas eleições municipais ocorridas em 2016. Utilizando a linguagem e os seus conhecimentos matemáticos expresse por meio de uma equação de primeiro grau a quantidade de eleitores aptos a votar em 2016.

Por meio de equações de primeiro grau determine o aumento de 2016 para 2020 da quantidade de pessoas que declararam possuir algum tipo de deficiência.

Sobre a biometria segundo o ministro de 2016 para 2018 houve um aumento no número de eleitores identificados por meio da biometria (impressão digital), assim como também houve um aumento de 2018 para 2020. Analisando os dados contidos na notícia, determine a

quantidade de pessoas que passaram a ser identificadas pela biometria de 2016 para 2018, e a quantidade de pessoas que passaram a usar a biometria de 2018 para 2020. Não esqueça de representar esses dados por meio de equações de primeiro grau.

Observe que as três questões que acabamos de desenvolver foram solucionadas por meio de equações. Você sabia que equações como essas são chamadas de equações de primeiro grau, e são equações que apresentam o seguinte formato:

$$ax + b = 0$$

Onde a , b são valores reais, $a \neq 0$ e x é um valor desconhecido.

Equações como essas são utilizadas a muito tempo. Desde muito tempo antes da era cristã o homem já utiliza equações como essas para resolver determinados problemas e situações que apareciam em seu dia-a-dia.

MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

E quais seriam os métodos usados para resolver esse tipo de equação?

Os egípcios por exemplo, já utilizavam esse tipo de equações por volta de 2000 a.C a 1800 a.C. As equações e os problemas solucionados com essas equações podem ser encontrados em papiros, como o papiro de Rhind e o Papiro de Moscou. Buscando encontrar soluções a essas equações esse povo desenvolveu um método conhecido como método da falsa posição.

A imagem a seguir ilustra parte de umas das páginas do Papiro de Rhind.

Problema 26 do Papiro de Rhind



Fonte: Lyra, 2019.

Nessa página é possível encontrarmos um problema egípcio, cuja solução pode ser determinada por meio do “método da falsa posição”.

Como podemos observar a escrita utilizada pelos egípcios na época difere-se bastante do nosso atual sistema de escrita.

De acordo com Lyra (2019) esse problema pode ser interpretado da seguinte maneira: A quantidade e seu $\frac{1}{4}$ adicionadas dão 15. Qual é essa quantidade? Para solucionar esse problema e outros similares os egípcios recorreram ao método da falsa posição.

Mas como funciona o método da falsa posição?

O método da falsa posição consiste em assumirmos um valor que imaginamos ser conveniente para a nossa incógnita, substituímos esse valor na equação de desejamos solucionar e após realizar ajuste de acordo com o valor da igualdade inicial.

Use o método da falsa posição e resolva as seguintes equações:

a) $\frac{x}{2} + x = 6$

b) $\frac{x}{5} + x = 12$

$$c) 2x + \frac{x}{3} = 21$$

$$d) x - \frac{x}{8} = 63$$

Agora que conhecemos e já praticamos o método da falsa posição, que tal resolvermos alguns problemas, encontrados no papiro de Rhind os quais foram solucionado por meio deste método?

Problema 24. *Uma quantidade e seu 1/7 somados fazem 19. Qual é essa quantidade?* (LYRA, 2019)

Problema 27. *Uma quantidade e seu 1/5 somados fazem 21. Qual é essa quantidade?* (LYRA, 2019)

Como acabamos de verificar todos os problemas, as resoluções e métodos desenvolvidos pelos egípcios encontram-se em papiros. Você já parou para pensar o que é um papiro?

HORA DE PESQUISAR!

Pesquise em livros, sites o que é um papiro. Busque diferentes informações sobre os papiros (suas dimensões, material usado na época para sua construção e outras).

Após realizada a pesquisa anote as informações que achou mais importante e interessante, pois construiremos um papiro também.

HORA DA CONSTRUÇÃO DO PAPIRO

Agora que você já possui informações sobre o que é um papiro, que tal construirmos um papiro e nele deixarmos registrado alguns problemas matemáticos e suas resoluções?

Primeiramente vamos construir o papiro e após resolvermos e registraremos a resolução de problemas matemáticos envolvendo alguns dados de nossa escola nesse ano.

Construindo o papiro

Você vai precisar de:

1/4 de cartolina;

1 folha de papel sulfite;

1 folha de papel carbono;

1 caneta;

Um pouco de café (pode ser café solúvel ou café coado);

1 pincel;

Como fazer:

Usando o pincel passe o café já frio sobre um dos lados da cartolina, a cartolina ficara como uma consistência que não permitira a locomoção da mesma. Deixe-a no local onde você passou o café até a cartolina secar. Após estar seco o primeiro lado onde foi passado o café vire a cartolina e repita o mesmo processo no outro lado da folha, novamente deixe a cartolina secar no local em que passou o café sem movê-la.

Tendo os dois lados da cartolina secos o seu papiro já estará pronto para receber os problemas matemáticos e as resoluções que deixaremos arquivadas.

Para registrar os problemas e as resoluções você vai utilizar o papel sulfite, o papel carbono e a caneta. Coloque o papel carbono com a folha sulfite sobre o papiro, com a caneta escreva sobre o papel sulfite o problema e a resolução do problema que você deseja arquivar.

Para deixar o seu papiro mais completo você pode ainda colocar pequenas ilustrações, informações relacionadas ao tema apresentado no problema.

Problemas a serem solucionados e inseridos no papiro:



Sugestão 1: Quantidade de alunos na sala. Por meio de uma equação de primeiro grau determine a quantidade total de alunos que frequentam essa turma, nesse ano.

Sugestão 2: Determinar a idade do aluno utilizando a idade de fundação da escola. Pesquise com seus pais, pessoas da comunidade ou até mesmo com os diretores da escola o ano em que a sua escola foi fundada. Tendo a informação do ano de fundação da sua escola encontre a idade de fundação da mesma. Utilizando a idade da escola escreva uma equação de primeiro grau capaz de fornecer a sua idade.

Sugestão 3: Medidas de espaços retangulares. Escolha um ambiente retangular de sua preferência, pode ser um cômodo da sua casa, ou até mesmo um espaço da escola (sala de aula, refeitório, biblioteca e outros), meça o perímetro deste ambiente e em seguida escreva uma equação capaz de representar esse valor.

Agora que já solucionamos um dos problemas e anotamos a resolução em nosso papiro ele já está pronto.

VOLTANDO A QUESTÃO DO CENSO DEMOGRÁFICO

Para finalizar nosso roteiro de atividades que tal voltarmos a uma das questões sobre o censo demográfico?

Acompanhe e apresente uma resolução para o problema abaixo.

De acordo com o tribunal superior da justiça (TSJ) em 2018 o total de eleitores do gênero feminino foi 77.337.918 eleitoras, representando 52,5% de todo o eleitorado brasileiro, enquanto o total de eleitores que se consideram do gênero masculino foi de 69.901.035, representado 47,5% do eleitorado. Usando aproximações e considerando que a população do gênero feminino foi de 50%, agora que já conhecemos o método usado pelos egípcios e conhecido como método da falsa

posição encontre por meio deste método uma aproximação para a total de eleitores brasileiros no ano de 2018.

Você conseguiu perceber que equações de primeiro grau acompanham a humanidade a muitos e muitos anos atrás? E essas equações continuam presentes em nossas vidas em questões que muitas vezes me imaginamos que elas estão presente, como no censo da democracia.

Referências Bibliográficas

BARASUOL, Fabiana Fagundes. **A Matemática da Pré-História ao Antigo Egito**. Ensaio (Rio de Janeiro. Online), p. 01 - 06, 01 abr. 2006.

BERLINGHOFF, William, P; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. Disponível em: Minha Biblioteca, Editora Blucher, 2010.

BOYER, Carl. **História da matemática**. São Paulo: Editora Blucher, 2012. E-book. Disponível em: <https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521216117/>. Acesso em: 21 nov. 2021.

CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna. 1ª ed.2007.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática, da Teoria à Prática**. Ed. Papirus. 17º edição. 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FOSSA, Jonh Andrew. Matemática, História e Compreensão. In: **Revista Cocar**, v. 02, n. 04, 2008. Disponível em: <https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/77>. Acesso em:20.mar.2023.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 5ª edição 2010.

GASPERI, Wlasta N. H. De; PACHECO, Edilson Roberto. **A história da matemática como instrumento para a interdisciplinaridade na educação básica**. Disponível em

<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/701-4.pdf> Acesso em: 01.nov.2021.

LYRA, Victor Hugo Correia. **Um estudo sobre a história e aplicações do método da falsa posição**. 2019. 35 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática)–Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2019. Disponível em: <https://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/5950/1/Um%20estudo%20sobre%20a%20hist%C3%B3ria%20e%20aplica%C3%A7%C3%B5es%20do%20m%C3%A9todo%20da%20falsa%20Posi%C3%A7%C3%A3o.pdf> Acesso em: 23. Abr.2023

MARTINS, Juliana. **O Livro que divulgou o papiro Rhind no Brasil: algumas considerações**. Disponível em: < https://www.ufjf.br/ebiapem2015/files/2015/10/GD5_Juliana_martins.pdf >. Acesso em: 22. Abr.2023.

MENDES, Iran Abreu; CHAQUIAM, Miguel. **História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores**. Belém: SBHMat, 2016

PEDROSO, Hermes Antônio. Uma breve história da equação do 2º grau. **Revista eletrônica de matemática**, online, v. 2, p. 1-13, 2010. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/122614/ISSN2177-5095-2010-02-01-13.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 19. jan. 2023.

PEREIRA, Willian. A purificação pelo fogo – ou três ou quatro coisas sobre Fahrenheit 451. **Amável leitor: Arte e Cultura**, [s.l.], 27, setembro, 2018. Disponível em: <https://amavelleitor.blogspot.com/2018/09/a-purificacao-pelo-fogo-ou-tres-ou.html> Acesso em: 22. Abr.2023.

POZZER, Katia Maria Paim. Escritas e escribas: o cuneiforme no antigo Oriente Próximo. **Clássica**, São Paulo, v. 11/12, n. 11/12, p. 61-

80. Disponível em:
<https://revista.classica.org.br/classica/article/view/449/389>. Acesso em: 22. Abr. 2023.

REIS, Alex Marques. **A Matemática Egípcia – Solução de alguns problemas algébricos do papiro de Rhind**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (licenciatura em Matemática). Instituto Federal de São Paulo, São Paulo, 2018. Disponível em: https://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/275765/mod_data/content/3606/Alex%20Marques%20dos%20Reis.pdf Acesso em: 10. Mar. 2022.

ROQUE, Tatiana.; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de História da Matemática**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SANTOS, Andressa Gomes dos. FREIRE, Dianara Figueirêdo. PEREIRA, Ana Carolina Costa. Explorando as operações aritméticas no antigo Egito por meio da história da Matemática. **Research, Society and Development**, v. 10, n. 3, e4310312944, 2021 (CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: <http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v10i3.12944>

SANTOS, Jefferson. Os Papiros da Matemática Egípcia – O Papiro de Moscou. **Matemática é fácil**, São Paulo, 201?. Disponível em: < <https://www.matematicaefacil.com.br/2015/11/papiros-da-matematica-egipcia-papiro-moscou.html>>. Acesso em: 22. Abr. 2023.