Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

WILLIAM BARROSO MELO

O ENSINO DE POLIEDROS A PARTIR DE ELEMENTOS DO COTIDIANO DO ALUNO

BELÉM/PA
2023

William Barroso Melo

O ensino de poliedros a partir de elementos do cotidiano do aluno

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.
Orientador: Prof Dr Fábio José da Costa Alves.
Coorientadora: Profa. Dra. Eliza Souza da Silva

BELÉM/PA
2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Melo, William Barroso
O ensino de poliedros a partir de elementos do cotidiano do aluno / William Barroso Melo; Fábio José da Costa Alves, orientador; Eliza Souza da Silva, coorientadora, 2023.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2023.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria (Matemática). 3. Ensino médio. I. Alves, Fábio José da Costa (orient.). II. Silva, Eliza Souza da (coorientadora). III. Título.

CDD. 23º ed. 510.7

Elaborada por Regina Coeli A. Ribeiro – CRB-2/739

RESUMO

MELO, William Barroso. **O ensino de poliedros a partir de elementos do cotidiano do aluno**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2023.

Esta pesquisa-ação de caráter qualitativa buscou desenvolver, testar e verificar a potencialidade de uma sequência didática na aprendizagem de poliedros. A questão norteadora é: Uma sequência didática envolvendo objetos do cotidiano potencializa a aprendizagem de poliedros? Por isso, o objetivo geral é verificar a potencialidade de aprendizagem de uma sequência didática no ensino de poliedros, com o intuito de respondermos essa questão, elaboramos uma Sequência didática para o ensino de poliedros, a partir do uso do aplicativo GeoGebra e de elementos dos cotidianos dos alunos. A sequência didática foi aplicada em um grupo de 5 alunos de uma turma do segundo ano do ensino médio de uma escola da rede pública de ensino na periferia do município de Belém. A análise dos dados se deu através de registro escritos em fichas de atividades distribuídas aos alunos e da transcrição de dados de voz captados dos alunos durante a aplicação das atividades. A organização das informações obtidas está estruturada em Introdução, Levantamento Bibliográfico, em que consiste na busca de trabalhos que possuem semelhança com a nossa pesquisa, Base Teórica que são os aportes teóricos utilizados, a saber a Teoria Instrumental de Rabardel, Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e a Análise Microgenética, a Metodologia em que falamos sobre Poliedros e o software GeoGebra, a Análise dos Resultados o qual fazemos análises sobre os registros escritos e de voz dos sujeitos e professores consultados contribuem para a formulação da sequência didática. A pesquisa possui resultados positivos quanto a aplicação dessa sequência didática junto ao uso do aplicativo GeoGebra, ela permite discussões acerca da sua forma de aplicação, abre possibilidades de mudanças para próximos professores que a utilizarem e afasta o ensinar matemática do método tradicional. Essa dissertação gerou um produto educacional, que está em anexo e foi disponibilizado na Plataforma Educapes.

Palavras-chave: Ensino. Ensino de Matemática por Atividades Experimentais. Ensino de Poliedros por Atividades Experimentais.

ABSTRACT

MELO, William Barroso. **The teaching of polyhedra from elements of the student's daily life**. Dissertation (Master in Mathematics Teaching) – Pará State University, Belém, 2023.

This qualitative action-research sought to develop, test and verify the potential of a didactic sequence in learning polyhedrons. The guiding question is: Does a didactic sequence involving everyday objects enhance the learning of polyhedra? Therefore, the general objective is to verify the learning potential of a didactic sequence in the teaching of polyhedra. students' daily lives. The didactic sequence was applied to a group of 5 students from a second-year high school class at a public school on the outskirts of the city of Belém. Data analysis took place through written records on activity sheets distributed to students and transcription of voice data captured from students during the application of activities. The organization of the information obtained is structured in Introduction, Bibliographic Survey, which consists of the search for works that are similar to our research, Theoretical Base that are the theoretical contributions used, namely Rabardel's Instrumental Theory, Theory of Representation Registers Duval's Semiotics and Microgenetic Analysis, the Methodology in which we talk about Polyhedrons and the GeoGebra software, the Analysis of Results in which we analyze the written and voice records of the consulted subjects and teachers, contribute to the formulation of the didactic sequence. The research has positive results regarding the application of this didactic sequence along with the use of the GeoGebra application, it allows discussions about its application form, opens up possibilities for changes for the next teachers who use it and distances teaching mathematics from the traditional method. This dissertation generated an educational product, which is attached and was made available on the Educapes Platform.

Keywords: Teaching. Teaching Mathematics by Experimental Activities. Teaching Polyhedra by Experimental Activities.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A minha fascinação por matemática remonta desde os tempos da educação básica, os mais simples cálculos de expressões numéricas, aos quais utilizamos as operações matemáticas, passando pela descoberta da álgebra, que mostra que é possível fazer cálculos utilizando variáveis.

A matemática cotidiana de usar as operações com números decimais para descobrir quanto será meu troco ou as operações com porcentagens para saber quanto será um determinado desconto. Todas essas experiências não parecem relevantes para quem se destina a buscar aprender sobre matemática, mas são coisas que significam a matemática no nosso dia-a-dia. (SILVA, E. 2018)

Vivenciei na educação básica muitos colegas me pedindo ajuda sobre determinados conteúdos que não conseguiam aprender. Na graduação vivi isso também, mas em muitas ocasiões quem foi ajudado fui eu.

É comum ouvirmos dos alunos questionamentos acerca de onde devemos aplicar aquele objeto matemático nas nossas vidas. Talvez, muitos de nós já nos questionamos quanto a isso, para quem sabe responder aos alunos que indagam. Essa pesquisa não busca responder essa pergunta, mas a temos como motivação.

Os sólidos geométricos são objetos de muitos estudos na antiguidade, desde o surgimento da necessidade de medir áreas de superfícies retangulares ou triangulares, utilizando as unidades de medida que tinham como referência os corpos humanos (pés, passo, palmo etc).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs):

> O pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades. (PCN: Matemática 1997, p. 127).

A geometria é uma parte da matemática que pode muitas vezes ser um obstáculo de aprendizado, talvez pela maneira em que insistimos em aprender: usando ambientes 2D, como quadro por exemplo, para enxergarmos muitos dos sólidos que estão no espaço. (BOAS, 2014)

O meu primeiro contato com ambientes dinâmicos para o ensino de matemática aconteceu em 2014 na disciplina de Informática e Matemática ainda na época de minha graduação e me fez refletir sobre quantos alunos poderiam visualizar melhor os sólidos geométricos com a ótica de um *software* 3D. (MILOVANOVIC, OBRADOVIC, MILAJIC, 2013)

A partir de então percebi que muitos alunos têm dificuldades no ensino de geometria espacial, sobretudo, quando se estuda poliedros para visualizar que as faces desses sólidos são formadas por polígonos, por exemplo – uma característica que os define. Uma possibilidade que poderia minimizar esses problemas seria o uso de programas computacionais de geometria dinâmica.

Dessa forma, temos a seguinte questão de pesquisa para respondermos: Uma sequência didática envolvendo objetos do cotidiano potencializa a aprendizagem de poliedros? Para tanto, temos como nosso objetivo geral desenvolver e testar uma sequência didática que utiliza objetos do cotidiano do aluno na aprendizagem de poliedros.

Os objetivos específicos são identificar quais as principais formas poliédricas do cotidiano do aluno que podem ser utilizadas no processo de ensino e aprendizagem, verificar se os alunos correlacionam as formas geométricas do seu cotidiano com a matemática escolar, construir uma sequência didática que ensine poliedro a partir de problemas reais do dia-a-dia do aluno e avaliar os efeitos de uma sequência didática para a aprendizagem de poliedros.

No primeiro capítulo faremos um levantamento bibliográfico, com o objetivo de observar como os autores propuseram o ensino de poliedros. No capítulo 2, fizemos um aporte teórico que embasa os objetivos da pesquisa. No terceiro capítulo, a nossa metodologia explicitada sobre o aplicativo que será utilizado e o objeto matemático. No capítulo 4, apresentamos e validamos a sequência didática. Por fim, no quinto capítulo, fizemos as análises da sequência didática aplicada.

1. LEVATAMENTO BIBLIOGRÁGICO

Esta seção do trabalho é a parte que trata sobre o estado da arte, cujo objetivo é de definir o que já se tem pesquisado sobre o estudo dos poliedros, buscando justificar a pesquisa cientificamente. Para alcançarmos este objetivo, procuramos por trabalhos que envolvessem o ensino de poliedros, sobretudo, àqueles correlacionados aos vários objetos do cotidiano dos alunos.

A pesquisa dos materiais foi feita, na prática, seguindo um procedimento protocolar de pesquisa para obtermos trabalhos relevantes do ponto de vista da pesquisa. O procedimento serviu para definir as palavras-chaves, os bancos de dados buscados, inclusive fontes e estratégias de busca, e métodos a serem utilizados na pesquisa.

Foram selecionados trabalhos através dos buscadores *Google, Google Acadêmico* e *ERIC* utilizando as palavras-chaves “Ensino de poliedros”, “Estudo de poliedros” (para a plataforma ERIC usamos a *“polyhedra teaching”*), além disso, consideramos o período dos trabalhos de 2011 a 2021 como filtro, entretanto foram encontrados trabalhos dos anos de 2013 a 2021 sendo o ano de 2018 o que mais houve pesquisa relevante para o nosso trabalho.

Para que alguma obra fosse considerada, ela deveria atender a algum dos critérios definidos abaixo:

a) Ser dissertação, tese ou artigos publicado em periódico qualificado no período de 2013 a 2021;

b) Ter tema diretamente relacionado com o ensino e aprendizagem de poliedros;

Dentre os trabalhos que haviam sido captados nessa busca, encontramos um total de 16 trabalhos, entre dissertações e artigos publicados, porém ao serem analisados, definimos que 9 dessas pesquisas se enquadravam nos critérios elencados anteriormente. O quadro 1 a seguir mostra todos os trabalhos que foram selecionados após o trabalho de captação e do processo de escolha deles

Quadro 1 - Trabalhos Selecionados

Id	Autor (Ano)	Nome do trabalho	Critérios de inclusão	Resumo do trabalho
1	Morcanas (2019)	O processo de ensino-aprendizagem dos poliedros	(a) (b)	Utilizou recursos tecnológicos através de aplicativos e Realidade Aumentada. Aplicou atividades experimentais
2	Silva, W. (2018)	A visualização dos sólidos de Platão com o uso materiais concretos: uma proposta para o ensino dos Poliedros	(a) (b)	Propôs uma abordagem diferenciada para construir os poliedros de Platão. Houve experimentação em sala de aula.
3	Silva, E. (2018)	Poliedros de Arquimedes, Catalan, Kepler-Poinsot, Platão e o Sólido de Escher: contribuições para o ensino e aprendizagem de poliedros	(a) (b) (c)	Exemplificou a existência dos poliedros na natureza e determinou uma fórmula para o volume do sólido de Escher. Aplicou o estudo em oficinas.
4	Santiago (2018)	O ensino dos sólidos geométricos: um estudo utilizando a modelagem matemática	(a) (b) (c)	Usa uma abordagem mais atraente para aplicar uma sequência didática. O estudo foi experimentado.
5	Boas (2014)	Área de poliedros no cotidiano	(a) (b)	Utiliza uma abordagem próxima da utilizada em livros didáticos. Houve experimentação em sala de aula.
6	Bicalho (2013)	Um estudo sobre poliedros e atividades para o ensino de matemática: geometria da bola de futebol e pipa tetraédrica	(a) (b) (c)	Apresenta abordagem tecnológica com uso de softwares. A proposta não foi aplicada.
7	Pereira, Aguiar, Selau, Catarina (2017)	A modelagem matemática para o ensino da geometria – relação de Euler	(a) (b)	A Relação de Euler é proposta por modelagem matemática. A proposta foi aplicada.
8	Pitzer, Melchioretto (2016)	Construção de uma bola de futebol: aplicação na Confeitaria e contextualização para o ensino	(a) (b) (c)	Discute um problema seguindo uma proposta de solução por poliedros. Não houve aplicação da atividade.
9	Milovanovic, Obradovic, Milajic (2013)	Application of interactive multimedia tools in teaching Mathematics – examples of lessons from geometry	(a) (b)	Enfatiza a utilização de recursos tecnológicos em aulas de matemática sobre poliedros. O estudo teve aplicação.

Fonte: Autor (2021).

Dentre os trabalhos escolhidos, pudemos fazer sínteses acerca dos mesmos e refletir sobre alguns pontos, dentre os quais nos fizeram dividi-los em dois grupos: um de Investigação científica propositiva e o outro de investigação científica experimental.

Com relação aos trabalhos que se encaixam no grupo de Investigação científica propositiva, podemos selecionar os trabalhos que possuíam como parte dos seus objetivos a discussão do processo de ensino de poliedros através de outras metodologias de ensino de matemática, porém sem apresentar resultados. Destacamos as pesquisas de Bicalho (2013) e Pitzer, Melchioretto (2016).

O trabalho de Bicalho (2013) teve como objetivo apresentar duas atividades sobre poliedros, uma delas utilizando softwares computacionais e a outra sobre a construção da pipa tetraédrica por meio de materiais manipuláveis. Em suas propostas de atividades o software comercial CABRI 3D e o software gratuito "Pletora de poliedros" com a finalidade de estudar sobre as propriedades dos poliedros platônicos e arquimedianos e também para verificar a validade da Relação de Euler.

Para tanto, se utilizou softwares de geometria dinâmica para desenvolver e mostrar a concepção matemática por trás da fabricação dos modelos de bolas de futebol a partir da copa de 1970. Ademais, o autor propõe uma outra atividade, sobre sólidos semelhantes. Essa atividade é uma proposta de uso de material concreto e manipulável.

O autor abre uma discussão em torno do formato da bola de futebol, que é redonda, para um poliedro que possui bicos. Essa discussão começa desde qual poliedro representaria melhor tal formato até como "cortar" os bicos do sólido para arredondar, observe

> O dodecaedro regular é um poliedro bastante "arredondado". Entretanto, o icosaedro é mais arredondado. Assim, se tivéssemos uma bola icosaedral ela seria "bem arredondada", mas não daria para jogar futebol com essa bola, devido aos seus bicos. A ideia de cortar os "bicos" do icosaedro regular é interessante. (Bicalho, 2013, p. 27).

O trabalho faz uma apresentação das definições presentes no estudo dos poliedros, demonstrando alguns resultados importantes, apresenta cada atividade da proposta, problematizando e elencando questões para o professor, mostrando como construir em cada software.

Bicalho (2013, p. 59) conclui que as propostas de jogar bola e empinar pipa remetem a atividades prazerosas que podem motivar os alunos, além disso de servir como uma forma de demonstrar a aplicabilidade dessa ciência no cotidiano.

As atividades propostas pelo autor auxiliam a diferenciar os poliedros dos corpos redondos, sobretudo, a atividade “Geometria da Bola de Futebol”. Pois, ao se depararem com os formatos dos gomos, os alunos podem indicar polígonos mas a junção desses polígonos formam um sólido com contornos arredondados.

Pitzer, Melchioretto (2016) tem por objetivo solucionar um problema do cotidiano utilizando o conhecimento matemático para isso. O problema em questão surge da necessidade de uma professora de um curso de confeitaria e tem a matemática como ferramenta de solução do mesmo.

A professora de confeitaria tinha como problema real preencher um bolo no formato de uma bola com pentágonos e hexágonos. A proposta dos autores é apresentar como solução o sólido arquimediano icosaedro truncado para a confecção desse bolo. Para a construção dos polígonos da face desse poliedro são utilizadas técnicas de construção geométrica com régua e compasso.

Pitzer, Melchioretto (2013) apresentam o trabalho relatando de maneira breve os sólidos de Arquimedes e suas propriedades, desenvolvimento da problemática apresentada, metodologia aplicada na proposta de solução do problema e apresentação detalhada da construção geométrica do pentágono e hexágono.

Os autores consideraram ao final que a solução do problema se deu maneira equacional e, também, por visualização geométrica. Além disso, enfatizaram que sempre que possível, é importante contextualizar o ensino para que se torne prazeroso e atrativo. Ainda, alerta para necessidade de os livros trabalharem os estudos dos poliedros arquimedianos.

A nossa próxima análise será sobre os trabalhos que denominamos de investigação científica experimental, cujos se preocupam em elaborar propostas e, além disso, executá-las no processo de ensino e aprendizagem. Destacamos os trabalhos de Morcanas (2019), Silva (2018), Silva (2018), Santiago (2018), Boas (2014), Pereira, Aguiar, Selau, Catarina (2017) e Milovanovic, Obradovic, Milajic (2013).

O trabalho de Morcanas (2019, p. 6) afirma que a forma que os alunos aprendem sobre os elementos que compõem os poliedros dificulta seu aprendizado nos anos posteriores e que com este trabalho buscou-se proporcionar uma nova abordagem de construção dos poliedros, de maneira lúdica.

Morcanas (2019) apresentou aos alunos uma didática considerada inovadora, pois é utilizada Realidade Aumentada (RA) para o estudo dos poliedros, além disso, a autora considera que as aulas se tornam muito mais dinâmicas e interativas, sobretudo, a Relação de Euler através das fases de desenvolvimento da aprendizagem de Van Hiele.

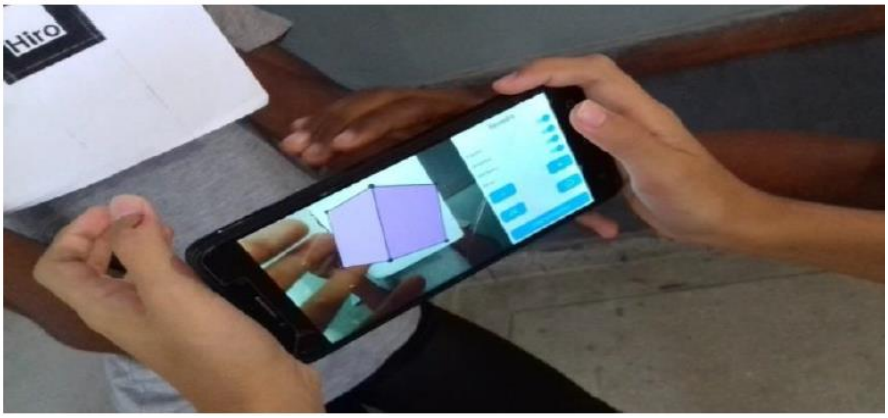
A pesquisa teve como público alvo 22 alunos do 6º ano do ensino fundamental de uma escola pública do Rio de Janeiro.

A autora propõe em sua pesquisa a aplicação de duas atividades, a primeira delas realizando a construção de poliedros com uso de materiais como palitos de dente, canudos, linha etc. A segunda usa softwares de RA para aprender sobre poliedros, Polyèdres Augmentès e Geometrix foram os aplicativos usados para esta atividade.

Como as atividades foram aplicadas em uma turma do ensino fundamental, observa-se que a autora buscou que os alunos pudessem explorar mais as características dos poliedros observados, com uso de realidade aumentada, os sujeitos puderam rotacionar, fazer observações, contagem das arestas, vértices e faces.

Observe a imagem a seguir de uma dessas atividades na qual um dos alunos apresentava um poliedro a outro aluno fazendo perguntas, como por exemplo, qual o polígono que forma as faces do poliedro?

Figura 1: Alunos manuseando aplicativo de RA.



Fonte: Morcanas (2019).

Morcanas (2019) inicia sua pesquisa mostrando sobre os poliedros, as definições, elementos, propriedades. Na sequência, o trabalho apresentou as fases e níveis de aprendizagem segundo Van Hiele, após isso, foram mostradas a metodologia de ensino que tornaram o ensino de poliedros mais atrativo, os softwares educativos para trabalhar RA e a aplicação das atividades em sala de aula.

O trabalho de Morcanas (2019, p. 74) concluiu que o uso de aplicativos facilita o processo ensino aprendizagem, porém alerta para a necessidade de implantação de internet nas escolas públicas para uso dos alunos para a garantir a participação efetiva nas aulas. Ainda, que os alunos apresentaram dificuldades para reconhecer determinados elementos, contudo, que podem ser superadas.

A autora alerta os professores para a necessidade de atualização sobre as ferramentas digitais e termina afirmando que o fato de os alunos manipularem os materiais para a construção de poliedros proporciona aos mesmos descobertas que não seriam possíveis em aulas tradicionais.

A pesquisa de Silva, W. (2018) propõe construir os poliedros de Platão com materiais manipuláveis, utilizando elementos de baixo custo, enfatizando a relação entre as propriedades desses sólidos com as competências e habilidades de visualização dos mesmos. Além de responder à questão: “como ensinar geometria espacial (tridimensional) fora dos limites bidimensionais de quadro e caderno?”.

Importante destacar que essa construção com uso de materiais de baixo custo é viável para alunos de escola pública com poucos recursos, porém a sua construção durante todo o processo pode se tornar cansativo para os alunos. Lançando mão desse tipo de construção, mas também, utilizando-se da praticidade da construção desses sólidos no aplicativo, acreditamos ter uma significativa melhora na administração de tempo e da visualização dos sólidos.

Os agentes de atuação dessa pesquisa foram alunos, professores e toda a comunidade interessada em desenvolver o ensino de poliedros com a metodologia proposta nesse estudo, além das que buscam novas alternativas para construção de poliedros com materiais manipuláveis de baixo custo, buscando contribuir com um ensino mais atrativo e interessante.

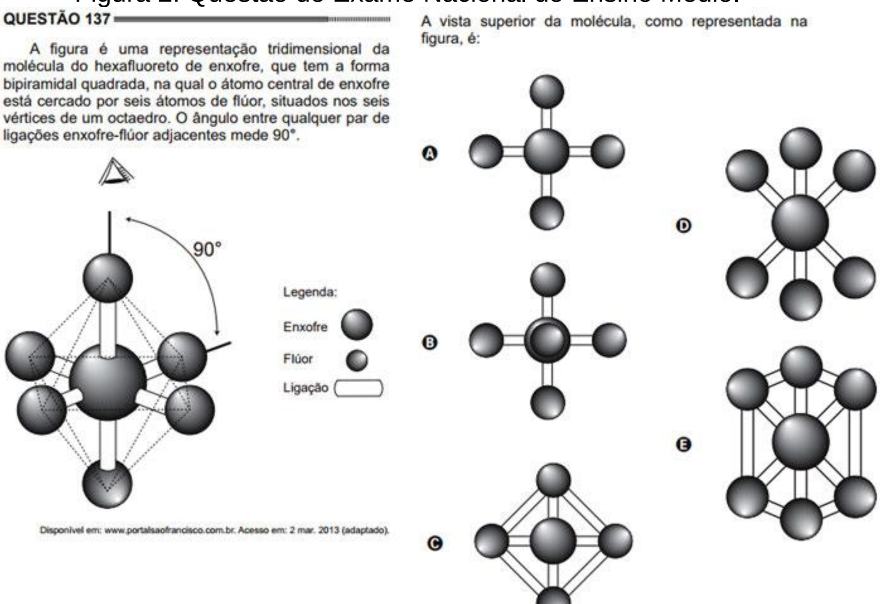
A pesquisa iniciou relatando sobre o processo histórico da geometria até o século XIX, sobre Platão e suas descobertas, a geometria no contexto nacional do Brasil e a formação do professor de matemática. Silva, W. (2018) aborda o uso de materiais manipuláveis no ensino de Geometria Espacial com a construção dos sólidos de Platão. Além disso, mostra que a jujuba, o palito de dente, o canudo e o origami podem ser usados como recursos pedagógicos e propõe algumas atividades.

O autor concluiu que o trabalho obteve um resultado satisfatório, pois os alunos conseguiram melhorar suas notas em um exame de avaliação local, além disso, ele alerta os professores para o cuidado ao aplicar a metodologia, para que os alunos não acabem fugindo dos objetivos propostos e tomem essas atividades como meras brincadeiras. Ele termina afirmando que o estudo foi divulgado com o intuito de servir a comunidade de professores para reflexões acerca das suas metodologias.

O trabalho feito por Silva, E. (2018) utiliza de obras artísticas de Maurits Cornelis Escher para o estudo dos poliedros. O autor busca fazer correlações entre esses sólidos e os elementos da natureza, as obras artísticas e elementos arquitetônicos.

A seguir uma figura de um recorte da questão 137 do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) do ano de 2014 para pessoas privadas de liberdade, que utilizou os poliedros presentes em moléculas

Figura 2: Questão do Exame Nacional do Ensino Médio.



Fonte: Silva, E. (2018).

Os sujeitos dessa pesquisa se dividiram em dois grupos, uma primeira atividade foi aplicada a um grupo de 3 alunas do primeiro ano de um curso técnico integrado do Instituto Federal do Paraná e a segunda atividade foi aplicada para alunos de uma escola pública do Paraná em uma oficina aberta a qualquer estudante dessa escola.

Silva, E. (2018, p. 6) buscou deduzir uma fórmula para calcular o volume do dodecaedro rômbico estrelado (Sólido de Escher) e comprovar com auxílio de softwares, como o GeoGebra, e de materiais manipuláveis.

O autor exemplificou a presença dos poliedros na natureza, na arquitetura, explorou a história dos poliedros, os estudos de Arquimedes, de Catalan, de Keppler, de Poinsot e de Platão. Além disso, o fascínio de Escher pelos poliedros. Ainda, deduziu a fórmula para calcular o volume do Sólido de Escher, descrevendo um passo-a-passo para mostrar com o GeoGebra e com material manipulável a validade da dedução.

Ao apresentar as obras de Escher, por exemplo, o autor mostra a presença marcante de formas poliédricas nas suas artes. Fazendo leituras sociais, o autor buscou utilizar as formas poliédricas para expressar suas visões na sua arte. O autor apresenta uma das obras, vista na imagem a seguir, na qual temos dois tetraedros se compondo.

Figura 3: Pintura de Escher.

Fonte: Silva, E. (2018).

Para o autor, apesar de ainda terem poucas referências em português de pesquisa para o ensino de poliedros, ele conclui que ainda é necessário o professor tentar buscar outras formas de enriquecer suas aulas com o uso de softwares, materiais manipuláveis, além disso, afirmou que as atividades tiveram êxito nas suas execuções.

Santiago (2018, p. 6) afirma que o uso de maquetes e modelagem nas aulas de matemática contribuem para o desenvolvimento da disciplina e estimulam os alunos. Foi isso que sua proposta de trabalho se debruçou, o autor faz uma discussão da geometria espacial de forma contextualizada. O objetivo de sua pesquisa foi aplicar uma sequência didática sobre os poliedros para alunos do ensino médio.

O público alvo de sua pesquisa foram com 400 alunos dos 2° ano do ensino médio de uma escola da rede particular de ensino do município de Remanso na Bahia.

Santiago (2018) propõe uma sequência didática, promovida em 12 encontros, em que são feitas construções em maquetes de sólidos geométricos pelos alunos. Os estudantes tiveram contato com essas construções, pois elas foram desenvolvidas em uma oficina trabalhada na escola. A pesquisa teve caráter qualitativo sendo aplicados questionários aos alunos e feitas observações acerca do desempenho deles.

O autor busca responder à questão: “De que maneira a modelagem matemática favorece o desenvolvimento de habilidades e a compreensão dos conteúdos dos sólidos geométricos?”. Sua pesquisa está dividida em três partes, numa delas, ele escreveu o referencial teórico de sua pesquisa, ao qual foi buscado na história da matemática, na segunda parte foi feito um levantamento bibliográfico, onde o autor sintetiza os principais trabalhos feitos sobre o tema. Na terceira parte, foram discutidas a metodologia empregada e discutido sobre os dados levantados na aplicação da sequência didática.

Em relação a sua pesquisa, podemos observar que o autor se restringe observar as formas poliédricas do cotidiano dos alunos, apenas na arquitetura através das maquetes e da modelagem. O autor buscou as formas arquitetônicas presentes na escola, como por exemplo, a caixa d’água da escola.

Santiago (2018) conclui que o uso de modelagem matemática é uma maneira de unir teoria e prática e fugir do ensino tradicional. O autor afirma ainda que o uso de maquetes é uma oportunidade de conhecer novos objetos. Além disso, são elencadas algumas dificuldades que se teve durante a execução da sequência didática, como o fator tempo sendo um exemplo.

O estudo de Boas (2014, p. 6) concentra-se no conceito de poliedros e suas planificações, como o próprio autor escreve. Ele desenvolveu uma sequência didática sobre os aspectos e conceitos dos poliedros. O objetivo da pesquisa é propor uma sequência de atividades sobre o objeto matemático em questão.

O trabalho está estruturado da seguinte maneira: primeiramente, ele coloca a fundamentação teórica, explicando todos os conceitos sobre poliedros e suas planificações, além disso sobre a função área. Por fim, ele descreve toda a sequência didática, que é composta de 4 atividades que visam observação e aprofundamento das definições sobre poliedros e uma atividade que se trata de um problema do cotidiano para que os alunos possam solucionar usando os conhecimentos sobre tal.

Em seu trabalho, o autor propôs a sequência didática para que professores possam aplicá-las e verificar a sua validade, assim não obtendo muitos resultados, pois se trata apenas de uma proposta.

Pereira, Aguiar, Selau, Catarina (2017) apresentaram em seu trabalho uma proposta de ensino de geometria espacial debruçada sobre duas dissertações e sobre a modelagem matemática de Pereira, Aguiar, Selau, Catarina (2017) apud Almeida (2012). É uma experiência promovida pelos acadêmicos do Programa de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID/UNESC/CAPES). O objetivo foi contribuir para a formação docente dos Acadêmicos Bolsistas com essa proposta.

Na proposta, os autores tiveram como grupo-alvo alunos do 8º ano de uma escola de ensino básico da cidade de Criciúma-SC em 2015. Em nenhum momento fica claro que foi em uma escola da rede pública, porém os autores apontam que a proposta do programa ao qual eles fazem parte é levar novas experiências aos professores e, sobretudo, aos estudantes da escola pública

> E, por consequência, oportunizar também aos alunos bolsistas do PIBID/UNESC/CAPES e aos professores de Matemática da EB das escolas públicas o fortalecimento de uma reflexão crítica da prática docente como formação e aprendizagem, na perspectiva do docente pesquisador. (Pereira, Aguiar, Selau, Catarina, 2017, p. 2).

A atividade é desenvolvida sob a perspectiva da teoria descrita por Pereira, Aguiar, Selau, Catarina (2017 apud Almeida, 2012). Existem 4 etapas para alcançar o objetivo, sendo inteiração, matematização, resolução e interpretação e validação dos resultados. Essa perspectiva leva a um primeiro momento de reflexão sobre o problema, quais os caminhos se podem resolver o problema? Quais dificuldades posso encontrar ao resolver dessa maneira ou de outra?

Para fundamentar a proposta desenvolvida, Pereira, Aguiar, Selau, Catarina (2017) adaptam a perspectiva de modelagem matemática anterior aos conceitos, proposições, teoremas, dentre outros de um dos trabalhos dissertativos. Enquanto ao outro coube utilizarem as propostas de construção dos poliedros a partir de suas planificações e, também, usando jujubas e palitos.

A proposta era baseada na relação de Euler, para que os alunos conseguissem deduzir e validar o modelo. Foi apresentado aos alunos o problema, discutido, refletido os caminhos que poderiam fazê-los chegarem à dedução, além de conceituarem os poliedros, arestas, vértices, faces. Após isso, os alunos observavam os poliedros afim de extrair seus dados e colocar numa tabela. Os alunos puderam estabelecer a relação entre o número de vértices, faces e arestas ao observarem os dados da tabela além de outras reflexões.

Os autores terminam concluindo que o objetivo além de alcançado, fora superado pelo empenho e participação dos alunos na atividade elaborada. Que o programa os ajudou ao propor atividades e se manterem sempre atentos as referências. Que a melhoria na escola pública pode se dá através dessas propostas.

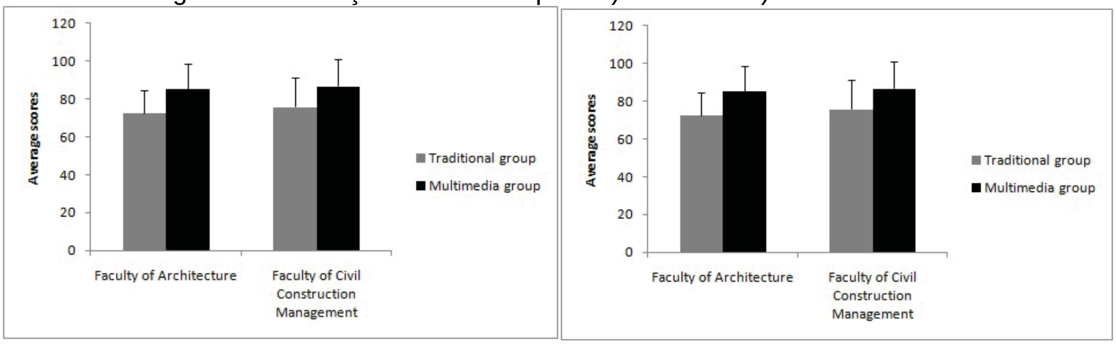
Milovanovic, Obradovic, Milajic (2013) apresentam em seu artigo a proposta que aplicaram em turmas do ensino superior. Utilizar recursos multimídia com uma parte da turma e com a outra não ministrando o mesmo conteúdo e fazer a comparação entre esses resultados. O objetivo da pesquisa foi reconhecer a importância dos recursos multimídia no processo de ensino aprendizagem e analisar a reação dos alunos no ensinar e no aprender.

A atividade foi para alunos dos cursos de graduação de arquitetura e Engenharia civil da Faculdade de Belgrado, na Sérvia. Em cada turma haviam 50 alunos, que foram subdivididos em outras duas turmas de 25 alunos cada. Uma parte tinha aulas que os autores chamam de tradicionais e a outra parte tinha aulas com vários recursos multimídias.

Os estudantes tiveram aulas sobre poliedros regulares com as mesmas definições, teoremas, proposições, exemplos, mas a turma com recursos multimídia teve possibilidade visualização enfatizada, animações e ilustrações para observarem os poliedros.

Os autores testaram os alunos de todas as turmas e confeccionaram uma tabela comparativa que mostra os resultados entre eles, mostrando que os alunos das turmas multimídia tiveram resultados satisfatórios em relação aos outros alunos. Além disso, os alunos demonstraram ter mais interesse por esta forma de aprender segundo levantamento feito ao final da pesquisa conforme está no gráfico abaixo

Figura 4: Pontuação média total para a) Teste 1 e b) Teste 2.



Fonte: Milovanovic, Obradovic, Milajic (2013)

Os autores concluem a pesquisa deixando alguns pontos que surgiram para reflexão durante o processo de construção da proposta, como em qual área a proposta multimídia tem resultados mais satisfatórios? Além disso, foram aplicados 3 testes e em todos, os alunos das turmas multimídia tiveram resultados melhores, nos testes que exigiam mais capacidade visual, os resultados foram ainda melhores, segundo a pesquisa.

A análise das pesquisas anteriores nos fazem perceber que elas se concentram, basicamente, em dois objetivos: reconhecer a importância das tecnologias para o ensino e para a aprendizagem de poliedros, buscando melhorar a visualização dos sólidos e propondo atividades que explorem essa metodologia, o outro foi utilizar materiais manipuláveis para construção e identificação de suas partes e propriedades, propondo sequências didáticas e atividades que estimulem a aprendizagem significativa. Em todos os trabalhos, os autores preocupam-se em adaptar as técnicas do ensino tradicional.

Muitos dos trabalhos mencionam sobre a importância de se correlacionar os poliedros com objetos do cotidiano dos alunos, apontam, inclusive, a Base Nacional

Comum Curricular (BNCC) mas poucos são os trabalhos que mostram como fazer isso.

Além disso, alguns trabalhos demonstram a importância de outras ferramentas para visualização de formas que fujam de quadro ou papel. Que proporcionem a rotação, a manipulação dos sólidos e das suas dimensões.

Embora se tenha trabalhos que fujam da proposta tradicional de ensino, pouco se tem de concreto sobre como significar esses sólidos nos objetos presentes no cotidiano dos alunos, como em caixas, em recipientes, em embalagens, na arquitetura, na natureza etc.

2. BASE TEÓRICA

2.1 Teoria da instrumentação de Rabardel

A Teoria da Instrumentação (Rabardel, 1995) fornece muitos aportes teóricos para trabalhos que se destinam a utilizar ferramentas tecnológicas voltadas para a aprendizagem. Rabardel estuda os sujeitos em suas ações mediadas por instrumentos, a princípio, pesquisas que se apoiam na ergonomia cognitiva.

A Teoria Ergonômica busca tornar o ambiente psicossocial do ser humano mais favorável para as realizações de suas tarefas no ambiente de trabalho. Entretanto, a teoria tem sido utilizada para propostas metodológicas em que temos relações entre os alunos e objetos, aos quais se enquadram na categoria de tecnologias digitais. Rabardel assim a propõe

> A ergonomia [...] visa, em particular, melhorar as condições de trabalho que vão além dos problemas de risco e segurança, preocupando-se também com os efeitos positivos do trabalho nas pessoas, por exemplo no que diz respeito ao desenvolvimento de competências. Finalmente, a ergonomia está preocupada em melhorar a eficiência do trabalho. (RABARDEL, 1999b, p. 4)

A discussão agora está no campo educacional e com ferramentas digitais, propondo a melhoria da educação, a exploração do campo educacional através dessas tecnologias, e a Teoria da Instrumentação adequa essa relação entre o aluno e o objeto do conhecimento – conteúdo matemático.

Em sua teoria, Rabardel (1995) faz uma diferenciação nos conceitos de artefato e instrumento. Artefato são os objetos aos quais os humanos agregaram uma finalidade de uso, entretanto os sujeitos ainda não conceberam esquemas de uso. Além disso, ele afirma que o artefato pode ser material (um computador, um *smartphone* etc) ou simbólico (uma figura, um gráfico).

Assim, o artefato é uma ferramenta “pura” que possui um potencial para sua utilização, sendo assim Rabardel (1995) define instrumento como sendo uma construção feita pelo sujeito no qual um artefato progressivamente passou a condição de instrumento. Podemos exemplificar a calculadora, um objeto material que se torna um instrumento à medida que o sujeito entende as utilidades e é capaz de utilizá-las.

Esse processo de transformação de um artefato para um instrumento no progresso que o sujeito faz ao descobrir as finalidades que são úteis as suas necessidades Rabardel chama de gênese instrumental, que por sua vez possui dois processos associados, instrumentalização e instrumentação.

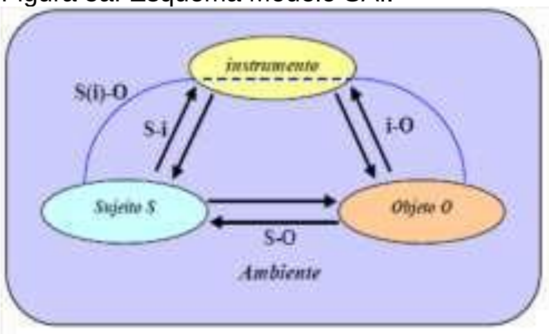
Rabardel (1999a) assim os define

> A instrumentalização concerne à emergência e a evolução do componente artefato do instrumento: seleção, reagrupamento, produção e instituição de funções, transformações do artefato [...] que prolongam a concepção inicial dos artefatos. A instrumentação é relativa à emergência e a evolução dos esquemas de utilização: sua constituição, seu funcionamento, sua evolução assim como a assimilação de artefatos novos aos esquemas já constituídos (RABARDEL, 1999a, p. 210).

Isto é, na instrumentalização o enfoque está voltado para o artefato (esquemas de uso) e na instrumentação o enfoque se dá no sujeito (esquemas de ação instrumentada), nas suas necessidades de acomodar, assimilar os esquemas de utilização do instrumento. Esses são processos que possuem certa complexidade, mas são propriedades que colaboram, apesar de suas distinções, para a construção do mesmo processo de aprendizagem.

Para as situações que envolvam a relação entre o sujeito e o objeto mediada por um instrumento, Rabardel propõe o Modelo de SAI – Situações de Atividades Instrumentais (Rabardel, 1995, p. 53-54). Nessa proposta, o autor busca ressaltar todas as relações que os componentes da Teoria Instrumental possuem. Além da relação Sujeito-Objeto [S-O], existem as relações entre o sujeito e o instrumento [S-I], instrumento e objeto [I-O] e o sujeito e o objeto intermediado pelo instrumento [S(i)-O]. A figura a seguir esquematiza essas relações

Figura 5a: Esquema Modelo SAI.



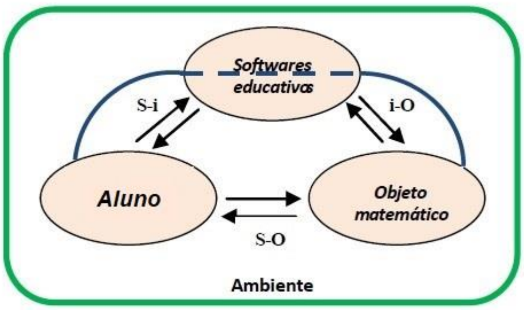


Figura 5b: Esquema Modelo SAI (adaptado)

Fonte: Oliveira (2015, apud Henriques, 2006)

Na figura 5a temos o modelo SAI proposto por Rabardel e suas relações entre os componentes e na figura 5b temos o mesmo modelo adaptado a nossa pesquisa, em que o *software* é o GeoGebra e o objeto matemático são os poliedros. É importante salientar que o professor precisa saber utilizar o instrumento, mas também deve saber como propor atividades que possam conduzir os alunos ao domínio do objeto matemático – suas propriedades, definições, características etc.

Voltando ao foco da pesquisa com relação ao processo de gênese instrumental do ensino de Poliedros, ao utilizar a teoria de instrumentação como aporte teórico, buscando analisar como ocorre o processo de gênese instrumental, por parte dos discentes, ao manipularem uma sequência didática.

Aos alunos, cabe manipular artefatos (potenciais instrumentos), podemos nos referir aos aplicativos que possibilitem a visualização dos poliedros, suas planificações, possíveis manipulações, alterações de polígonos das faces, dentre outras coisas.

2.2 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Os poliedros são sólidos geométricos espaciais, portanto, possuem três dimensões, mas, antes disso, vale lembrar que suas faces são polígonos, ou seja, da geometria euclidiana plana. Dessa maneira, perceba que podemos visualizar os poliedros, basicamente, sob duas óticas: a sua representação espacial e a sua planificação.

Duval (2010) expõe a importância da semiótica no âmbito da aprendizagem, sobretudo, a aprendizagem matemática. Ele afirma que, em termos gerais, existem dois tipos de acessos aos objetos do conhecimento, a saber, o acesso sensorial e o acesso semiótico.

Entretanto, ele afirma que a matemática possui o acesso semiótico somente, pois segundo Duval

> Na matemática, ao contrário, não há acesso sensorial aos objetos do conhecimento. O acesso passa por representações semióticas. Por exemplo, o acesso aos números passa por representações semióticas que podem ser muito rudimentares ou, ao contrário, complexas. (DUVAL, 2010, p. 129).

Além disso, Duval (2010, p. 129) ressalta a diferença entre o objeto e sua representação. Alertando para esta confusão, indaga “Como não confundir um objeto e sua representação se não tivermos acesso a este objeto fora da representação pelo qual este objeto é apresentado?”

Sendo assim, vale destacar a diferenciação entre representar de maneira verbal, como por exemplo, o uso de letras para representar pontos para os vértices dos poliedros, conjuntos numéricos etc e representar entre os registros semióticos. A distinção entre o objeto matemático e a sua representação é o ponto chave do sucesso na compreensão matemática (DUVAL, 2010).

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) foi desenvolvida por Raymond Duval e o autor aponta que a principal dificuldade da aprendizagem de matemática está no fato de que os objetos do conhecimento da disciplina não são físicos, sendo o contato com eles possível apenas por um sistema semiótico.

Sistema semiótico por sua vez é todo o conjunto de signos aos quais possuem regras e convenções próprias e estabelecem relação com os objetos que representam, com a finalidade de transmitir informações (DUVAL, 2010).

Entretanto, Duval (2010) ressalva que não podemos restringir os objetos do conhecimento apenas aos signos que os representam, dessa forma, ele afirma

> Seria um erro limitar o papel das representações semióticas à única função de evocar objetos que não são imediatamente acessíveis, os signos apenas tomando o lugar de objetos ausentes no ensino de matemática. Há, por exemplo, essa ideia assustadora que encontramos em todas as pedagogias que enfatizam a ação (concreta): não haveria necessidade de linguagem quando temos os objetos à nossa frente, à mão. É não entender que as palavras são então tão necessárias quanto na ausência de objetos, mesmo que apenas para se distanciar do contexto imediato e adquirir liberdade e domínio do pensamento. (DUVAL, 2010, p. 132)

Duval (2010) afirma ainda que existem outras funções, que não a de informar, de determinados sistemas semióticos como a linguagem, que permite cumprir a finalidade de objetivação. Além disso, aponta que a matemática possui uma função de transformação de uma representação semiótica para outra do mesmo sistema ou não. A esse processo com essa função, o autor chama de registro.

Ainda, Duval (2011) categoriza quatro tipos de registro de representação: a língua natural, os sistemas de escrita (numérico, algébrico e simbólico), os gráficos cartesianos e as figuras geométricas. É importante que se promova a variação dos registros para se ter várias atividades cognitivas, converter o registro algébrico em geométrico, por exemplo, e vice-versa.

No ensino de matemática, destacam-se dois tipos de transformações semióticas: o tratamento e a conversão. Em síntese, tratamento é uma transformação interna a um registro e a conversão se dá de maneira externa entre dois registros, isto é, quando uma representação em um registro é transformada em uma representação em outro registro.

Almouloud (2007) analisando a teoria proposta por Duval define essas duas transformações assim

> Um tratamento é a transformação de uma representação em uma outra do mesmo registro, isto é, uma transformação estritamente interna a um registro. Existem tratamento que são específicos a cada registro e que não precisam de nenhuma contribuição externa para serem feitos ou justificados. Uma conversão é a transformação de uma representação de um registro D em uma representação de um registro A, conservando pelo menos, a referência ao mesmo objeto ou à mesma situação representada, mas mudando, de fato, o conteúdo da representação (ALMOULOUD, 2007, p. 72 apud DUVAL, 1999, p. 30).

Dessa forma, para exemplificarmos essas transformações, vamos analisar a Fórmula de Euler. Quando utilizamos essa fórmula para descobrirmos a terceira variável envolvida, temos um processo de tratamento, assim

$$V + F = A - 2$$

$$8 + 6 = A - 2$$

$$14 = A - 2$$

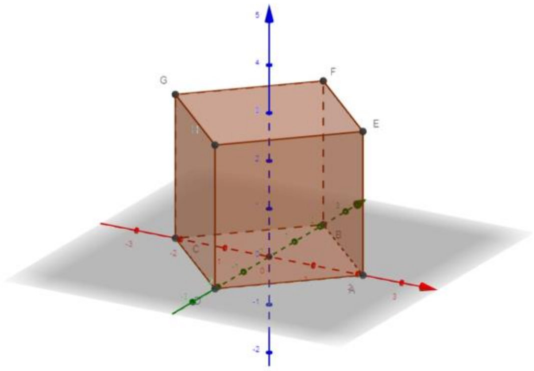
$$14 + 2 = A - 2 + 2$$

$$12 = A$$

Para o tratamento, Almouloud (2007) afirma que existem dois tipos: os que podem se tornar algoritmos e aqueles que não podem. O exemplo acima é um que pode se tornar um algoritmo, pois se utiliza das regras equacionarias e as operações matemáticas para alcançar o resultado. Mas existem outros tipos que não podem ser algoritmos, puramente figurais ou visuais, pois tendem a ser visualizados apenas e, segundo o autor, são considerados de segunda importância.

Para o exemplo anterior fizemos uma transformação interna, manipulando os termos da equação apenas, de maneira que não saímos do registro. Por outro lado, se quisermos alterar o registro dessa representação podemos lançar mão da conversão, assim ao sabermos a quantidade de vértices, faces e arestas, podemos determinar a representação gráfica do poliedro, sendo

Figura 6: Representação gráfica de um cubo no Geogebra 3D.



Fonte: Autores (2022).

Para a conversão, Almouloud (2007) também divide em duas categorias: a que utiliza a língua natural e a que não a utiliza. Para as que a utilizam, podemos citar a conversão que fizemos anteriormente, pois utilizamos uma equação e um gráfico, aos quais não são a língua natural. Qualquer outra conversão, que utilize a língua natural, seja por textos ou enunciados, estaríamos utilizando a outra categoria.

Dessa forma, enquanto a teoria de Rabardel busca uma abordagem mais individualista da relação entre o aluno e os poliedros através dos processos de instrumentalização e instrumentação, a teoria de Duval explora o papel do professor na intermediação com os alunos propondo as transformações semióticas do estudo dos poliedros.

2.3 Análise Microgenética

As perspectivas teóricas mencionadas anteriormente, que orientam a psicologia educativa para a qual queremos adotar, são pressupostos que necessitam de respostas para observarmos indícios de que o nosso público alvo possui um determinado grau de aprendizagem.

Essas observações serão conduzidas com auxílio da Análise Microgenética, que é uma forma de obtermos dados com base na atenção e sensibilidade aos detalhes das interações entre os sujeitos na construção das soluções dos problemas. Essa análise é de cunho qualitativa, isto é, preocupando-se com o processo de construção do conhecimento e não apenas com os resultados obtidos.

Para Cabral (2004), essa análise demanda atenção, planejamento, tempo, disposição e uma metodologia adequada as observações dialéticas entre os sujeitos. Dessa forma, as ações e as falas são gravadas, seja por técnicas de filmagens ou uso de vídeo gravação, ou por transcrição de falas interativas.

Góes (2000, apud Cabral, 2004 p. 103) afirma que a análise microgenética é um caminho de uma investigação ou associação de procedimentos na composição de um estudo de caso ou pesquisa participante. Além disso, a autora ressalva para as características peculiares dessa análise e sua ligação a matriz histórico-cultural. Ainda, a autora busca dissociar de outras análises de micro eventos.

> Segundo Góes (2000), uma questão relevante a ser esclarecida neste contexto é o delineamento das características peculiares à análise microgenética em sua vinculação com a matriz histórico-cultural. Além disso, a autora procura distingui-la de outras análises de micro eventos em correntes teóricas diferentes, bem como ressaltar o caráter profícuo desse caminho metodológico que envolve estudos sobre a subjetivação e sua necessária relação com o funcionamento intersubjetivo. (CABRAL, 2004, p. 103)

Para Góes (2000, apud Cabral 2004, p. 103) o que diferencia a análise microgenética em relação a outras análises de micro eventos é que essas não assumem o vínculo das perspectivas cultural, histórica e semiótica do desenvolvimento humano, que a análise microgenética exerce, apesar de haver outras abordagens analíticas que enfatizam o detalhamento de registros.

Vale ressaltar que, muito embora, a análise microgenética se refira a análise de curta duração de eventos, não é por essa ocasião que é chamada de micro, mas sim por ser um relato minucioso dos eventos através de videogravação ou de transcrição verbal. Em razão disso, precisa de recortes temporais restritos. (CABRAL, 2004)

Conforme Góes (2000, apud Cabral 2004, p. 104), a percepção do ponto de vista da microgenética advém dos pressupostos Vygotskyanos sobre o desenvolvimento humano. Vygotsky explorou a análise minuciosa de gênese social e de mudanças no curso de eventos. Para reforçar a sua tese, segundo a qual os processos humanos são produtos da gênese humana e das interações com o outro e com o meio, Vygotsky aponta que são essas relações os objetos de investigação.

Dessa forma, a análise do chamado indício de aprendizagem se dá através de observações feitas acerca dos registros de transcrição, ou seja, talvez um questionamento, uma ótica diferente que é externalizada por algum dos sujeitos, é internalizada por outro e isso pode proporcionar a gênese da aprendizagem.

Além disso, vale lembrar que tanto as interações observadas entre os que aprendem, quanto entre os que aprendem e os que ensinam são importantes.

> É uma análise identificadora de transições genéticas, ou seja, de transformações das ações dos sujeitos e, consequentemente, a passagem do funcionamento intersubjetivo para o intrassubjetivo. Portanto, deste ponto de vista, acrescenta Góes (2000), é um instrumento indicador de pistas de aprendizagem dentro do exame dos processos interativos ou enunciativo-discursivo. (CABRAL, 2004, p. 104)

Portanto, a análise microgenética se mostra uma ferramenta de auxílio muito importante para o desenvolvimento de nossa pesquisa. A sala de aula é um espaço de interação entre os sujeitos, além de muitas interações dialógicas e fomenta investigações pedagógicas aos professores.

3. METODOLOGIA

A metodologia da pesquisa segue a abordagem qualitativa, isto é, buscar entender a particularidade dos sujeitos envolvidos nas atividades, observando suas realidades sociais, culturais, econômicas, dentre outras. Não há a busca de uma generalização dos resultados obtidos, mas sim uma análise singular a esse grupo.

O objetivo geral da pesquisa é desenvolver e testar uma sequência didática que utiliza objetos do cotidiano do aluno na aprendizagem de poliedros. Nesse objetivo, o entendimento é que os objetos ilustrados nas atividades da sequência didática proposta sejam do cotidiano dos alunos. Os objetivos específicos são:

- Identificar quais as principais formas poliédricas do cotidiano do aluno que podem ser utilizadas no processo de ensino e aprendizagem;
- Verificar se os alunos correlacionam as formas geométricas do seu cotidiano com a matemática escolar;
- As principais dificuldades que os alunos apresentam na aprendizagem de poliedros;
- Construir uma sequência didática que ensine poliedro a partir de problemas reais do dia-a-dia do aluno;
- Avaliar os efeitos de uma sequência didática para a aprendizagem de poliedros.

Os procedimentos adotados foram de realizar um levantamento bibliográfico, identificando os trabalhos, dentre teses, dissertações e artigos, sobre poliedros, com os critérios de ser publicado em periódico entre 2013 e 2021, além de ter tema relacionado com o ensino e aprendizagem de poliedros.

Utilizando-se das palavras-chaves “ensino de poliedros”, “estudo de poliedros” para o buscador Google e Google Acadêmico e “polyhedra teaching” para o buscador ERIC observando até a página 20 de cada buscador adotado. A pesquisa adotou o Google, pois é possível utilizar o atalho dissertação entre aspas na barra de pesquisa do mesmo e limitar a pesquisa apenas para trabalhos dissertativos.

Para apresentar os aportes teóricos utilizados como base para a pesquisa, foi feita uma síntese de suas teorias com as partes que seriam mais importantes a pesquisa. Dessa forma, a Teoria da Instrumentação de Rabardel foi escolhida no sentido de observarmos que o aplicativo que foi utilizado teria, basicamente, dois processos: de instrumentação e de instrumentalização, conforme o modelo SAP.

Além disso, Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, pois uma das hipóteses dessa pesquisa é que os alunos têm dificuldades de observar as partes de um poliedro se analisam por um objeto plano como quadro e livro. Dessa forma, ao observarem em um ambiente dinâmico e espacial, podem rotacionar, planificar, dentre outras coisas para explorar as figuras.

Para a criação da sequência didática, foram feitas consultas ao livro didático *Fundamentos de matemática elementar – Geometria Espacial, volume 10* que serviu como base para as atividades, além disso, as imagens de embalagens foram retiradas da internet supondo que fazem parte do cotidiano dos alunos.

Para a escolha dos sujeitos, houve uma mudança de proposta. A princípio, a aplicação da sequência seria com toda a turma de segundo ano do ensino médio, entretanto, com a antecipação do calendário de provas da quarta avaliação por parte da secretaria de educação a qual a escola está vinculada, houve a orientação dessa aplicação ser feita com uma amostra de 5 alunos dessa turma realizada em contraturno. Dessa forma, foram utilizadas duas semanas de segunda-feira a sexta-feira no período de 12 a 23 de dezembro de 2022.

A aplicação foi analisada através das fichas de atividades que foram impressas aos alunos e dos áudios que foram captados durante a aplicação e depois transcritos. Para as atividades, as análises observaram os registros feitos pelos alunos. Quais tratamentos e conversões foram feitos, as dificuldades, a escrita correta etc. Para os áudios, foram analisados resquícios de aprendizagem através de falas entre os alunos e o professor ou entre os próprios alunos.

A sequência didática trabalhou os poliedros junto com o aplicativo que foi usado para ajudar a visualização das construções. Dessa forma, precisamos conhecer o objeto matemático que os alunos estudaram e o aplicativo que foi usado nas atividades.

3.1 Os Poliedros

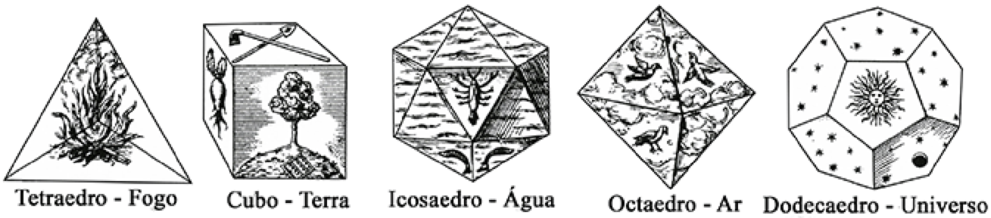
A palavra poliedro deriva da junção entre duas palavras gregas, *poly*, que significa muitos, vários e *hedra*, que significa faces, isto é, várias faces ou muitas faces. Os poliedros foram objetos de estudo de muitos filósofos matemáticos da antiguidade, sendo relacionados até aos elementos do universo.

Apesar de não ser objetivo desse trabalho fazer um estudo histórico sobre poliedros, vamos fazer uma contextualização histórica sobre o surgimento na história da matemática do objeto de estudo.

Um dos primeiros poliedros em que se tem estudos observados é a pirâmide, os egípcios possuíam conhecimentos sobre poliedros, além desses, chineses e babilônicos também tinham resolução de problemas sobre poliedros. Um documento muito conhecido é o Papiro de Rhind. Nesse papiro, há alguns problemas de geometria, dentre eles sobre pirâmides. O nome do papiro se deu através da compra dele por um antiquário escocês chamado Henry Rhind (BOYER, 1974, p.13-14).

Platão idealiza num registro do diálogo chamado de *Timaeus* entre ele e seu interlocutor, que possui o mesmo nome e não sabemos se de fato existiu, que os poliedros regulares, que mais tarde se tornariam conhecidos como poliedros de platão, são “corpos cósmicos” ou “sólidos platônicos”, pois Platão os aplica, no *Timaeus*, aos fenômenos científicos. Ao cubo foi associado a Terra, ao tetraedro o Fogo, ao octaedro o Ar, ao icosaedro a Água e ao dodecaedro o Universo (BOYER, 1974, p.63).

Figura 7: Poliedros de Platão e os elementos.



Fonte: http://convergencias.esart.ipcb.pt/artigo/131

Euclides de Alexandria escreve em Os elementos de Euclides, coleção de 13 livros sobre tratados de geometria, sobre os poliedros regulares. Dentre eles, os 3 últimos são dedicados aos estudos de geometria espacial, em particular, o último trata somente dos poliedros regulares. Objetivando compreender cada um dos sólidos circunscritos numa esfera, buscou-se encontrar uma razão entre uma aresta do sólido e o raio da esfera (BOYER, 1974, p. 77-87).

Segundo Boyer (1974), Teaetetus (amigo de Platão) foi o responsável por encontrar o octaedro e o icosaedro, antes desconhecidos poliedros regulares. Provavelmente, a ele se deve o teorema sobre a existência de somente cinco poliedros regulares. Isso se encontra em um escólio sobre o livro 13 de Euclides.

Após essa contextualização histórica sobre poliedros, vamos agora definir o objeto de estudo e suas características e classificações. Segundo Dolce e Pompeo (2013) define poliedro como sendo uma superfície poliédrica limitada por um número finito de polígonos planos ou regiões poligonais tais que: a) dois polígonos não estão num mesmo plano; b) cada lado de polígono não está em mais que dois polígonos; c) havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devem formar uma única poligonal fechada, plana ou não, chamada contorno; d) o plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semiespaço (condição de convexidade) (DOLCE e POMPEO, 2013, p. 120).

Os elementos de uma superfície poliédrica são: faces (são os polígonos); arestas (são os lados dos polígonos) e vértices (são os vértices dos polígonos). Os poliedros convexos são definidos dessa maneira:

Consideremos um número finito n (n > 4) de polígonos planos convexos (ou regiões poligonais convexas) tais que: a) dois polígonos não estão num mesmo plano; b) cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos; c) o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semiespaço (DOLCE e POMPEO, 2013, p. 120).

Assim, para todo poliedro convexo vale a chamada Relação de Euler:

$$V + F = A + 2$$

Em que V é o número de vértices, F é o número de Faces e A o número de arestas. Os poliedros em que a relação acima é válida, são chamados de Eulerianos. Todo poliedro convexo é Euleriano, mas nem todo poliedro Euleriano é convexo (DOLCE e POMPEO, 2013, p. 122).

Os poliedros de Platão assim são definidos: Um poliedro é chamado poliedro de Platão se, e somente se, satisfaz as três seguintes condições:

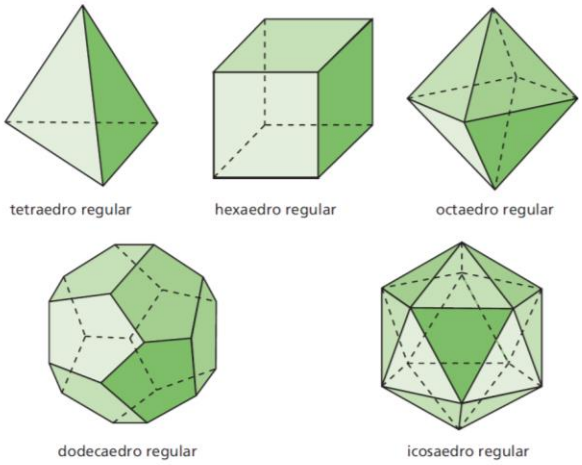
a) todas as faces têm o mesmo número (n) de arestas;

b) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número (m) de arestas;

c) vale a relação de Euler (V - A + F = 2).

Quanto a regularidade dos poliedros, um poliedro convexo é regular quando suas faces são polígonos regulares e congruentes e seus ângulos poliédricos são congruentes. Dessa forma, suas faces são polígonos regulares e congruentes, então todas têm o mesmo número de arestas e seus ângulos poliédricos são congruentes, então todos têm o mesmo número de arestas, concluímos que todos os poliedros regulares são poliedros de Platão.

Figura 8: Poliedros de Platão.



Fonte: Dolce e Pompeo, 2013, p. 130.

Além disso, há uma observação que todo poliedro regular é poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é poliedro regular (DOLCE e POMPEO, 2013, p. 130).

Agora vamos explorar os poliedros que serão utilizados na sequência didática: prisma, pirâmide e tronco de pirâmide.

O prisma é definido como prisma convexo limitado ou prisma convexo definido ou prisma convexo é a reunião da parte do prisma convexo ilimitado, compreendida entre os planos de duas seções paralelas e distintas, com essas seções (DOLCE e POMPEO, 2013, p. 136).

O prisma possui 2 bases congruentes, n faces laterais (paralelogramos) e (n + 2) faces ao todo, sendo a altura do prisma a distância h compreendida entre as duas bases. O prisma possui a superfície lateral, que são as faces laterais, e a superfície total, que é as faces laterais e as faces que formam as bases.

Eles são classificados entre prisma reto é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Num prisma reto as faces laterais são retangulares, prisma oblíquo é aquele cujas arestas são oblíquas aos planos das bases e prisma regular é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares (DOLCE e POMPEO, 2013, p. 137).

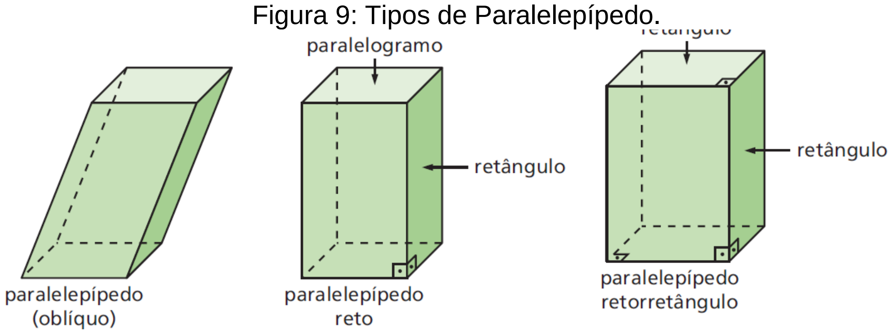
Um prisma será triangular, quadrangular, pentagonal conforme a natureza das bases sejam triângulos, quadrados, pentágonos, respectivamente (DOLCE e POMPEO, 2013, p. 137).

Entre os prismas, existem os chamados paralelepípedos e os romboedros, que são paralelepípedo é um prisma cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo é a reunião de seis paralelogramos.

Paralelepípedo reto é um prisma reto cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo reto é a reunião de quatro retângulos (faces laterais) com dois paralelogramos (bases).

Paralelepípedo retorretângulo ou paralelepípedo retângulo ou ortoedro é um prisma reto cujas bases são retângulos. A superfície total de um paralelepípedo retângulo é a reunião de seis retângulos.

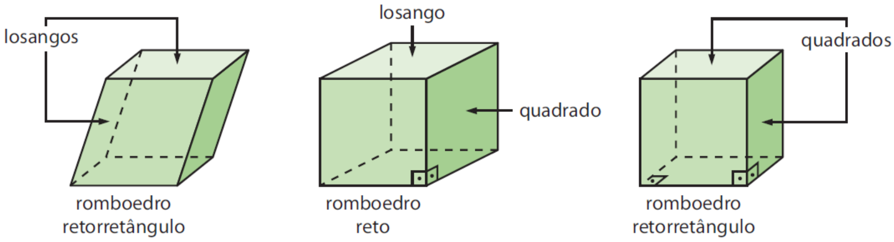
Figura 9: Tipos de Paralelepípedo.



Fonte: Dolce e Pompeo, 2013, p. 139.

Cubo é um paralelepípedo retângulo cujas arestas são congruentes. Romboedro é um paralelepípedo que possui as doze arestas congruentes entre si. A superfície total de um romboedro é a reunião de seis losangos. Romboedro reto é um paralelepípedo reto que possui as doze arestas congruentes entre si. A superfície total de um romboedro reto é a reunião de quatro quadrados (faces laterais) com dois losangos (bases). Romboedro retorretângulo ou cubo é um romboedro reto cujas bases são quadradas. A superfície de um romboedro reto é a reunião de seis quadrados.

Figura 10: Tipos de cubo.



Fonte: Dolce e Pompeo, 2013, p. 140.

Sendo a área calculada como produto entre a base b e a altura h do polígono que forma a face do poliedro A = b.h e o volume como o produto entre as 3 arestas que partem do mesmo vértice V = b.h.c (DOLCE e POMPEO, 2013, p. 141-150).

A pirâmide convexa limitada ou pirâmide convexa definida ou pirâmide convexa é a parte da pirâmide ilimitada que contém o vértice quando se divide essa pirâmide pelo plano de uma seção, reunida com essa seção.

Uma pirâmide possui 1 base (a seção citada), n faces laterais (triângulos), n + 1 faces, a altura de uma pirâmide é a distância h entre o vértice e o plano da base. Superfície lateral é a reunião das faces laterais da pirâmide. A área dessa superfície é chamada área lateral e indicada por Al e a superfície total é a reunião da superfície lateral com a superfície da base da pirâmide. A área dessa superfície é chamada área total e indicada por At. Uma pirâmide será triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme a base for um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc (DOLCE e POMPEO, 2013, p. 179).

O volume de uma pirâmide é um terço do produto da área da base pela medida da altura.

$$V = \frac{1}{3}.B.h$$

A área lateral de uma pirâmide é a soma das áreas das faces laterais e a área total de uma pirâmide é a soma das áreas das faces laterais com a área da base.

$$At = Al + B$$

Onde B é a área da base.

Para o tronco de pirâmide, devemos observar que o mesmo é formado por uma seção transversal de um plano paralelo a base da pirâmide e que a interseção entre o plano e a pirâmide formam uma base que é semelhante a base da pirâmide.

A área lateral do tronco pirâmide será a soma das áreas de todos os trapézios que formam a lateral do tronco. A área total será a soma das áreas laterais e das duas bases formadas.

Para o volume, podemos obter através da seguinte fórmula

$$V = \frac{h}{3}\left[B + \sqrt{B.b} + b\right]$$

Onde B é a área da base maior, b é a área da base menor e h é a altura do tronco de pirâmide.

3.2 O software GeoGebra

O aplicativo que será usado em nossa pesquisa será o GeoGebra, um software de código aberto e disponível gratuitamente para uso não comercial. Além disso, é um software de geometria dinâmica e com diversas interfaces para trabalhar os conteúdos. (GEOGEBRA, 2022)

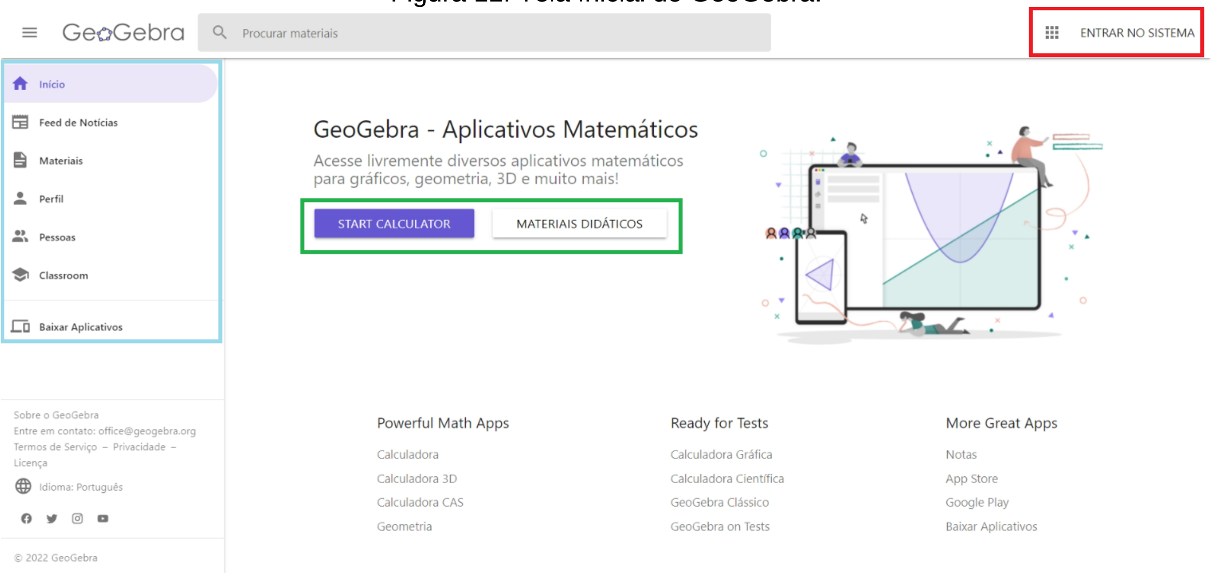
Apesar do programa ter o seu início como um software que necessitava ser instalado no computador, hoje, além disso, pode ser usado de maneira online no site do programa. O usuário pode se cadastrar criando uma conta para então utilizar os recursos disponíveis.

O aplicativo foi criado em 2001 na tese de doutorado do seu autor Markus Hohenwarter na Universidade de Salzburgo. O objetivo de Markus era criar uma ferramenta de auxílio para o ensino de matemática que fosse completa do ponto de vista matemático. (HOHENWARTER e HOHENWARTER, 2009)

Além disso, o GeoGebra se tornou um ambiente virtual de aprendizagem, pois conta com a criação de atividades, acompanhamento em tempo real, criação de materiais na plataforma e ainda a possibilidade de salvamento em nuvem de toda a sua criação no ambiente. (GEOGEBRA, 2022)

Para ilustrar, vamos usar a versão online do GeoGebra. A tela inicial do GeoGebra está a seguir, no retângulo azul temos as opções dentro da comunidade formada pelos usuários, no retângulo verde temos as opções de fazer materiais ou de iniciar a janela gráfica do GeoGebra e no retângulo vermelho, temos a opção de iniciar sessão na plataforma.

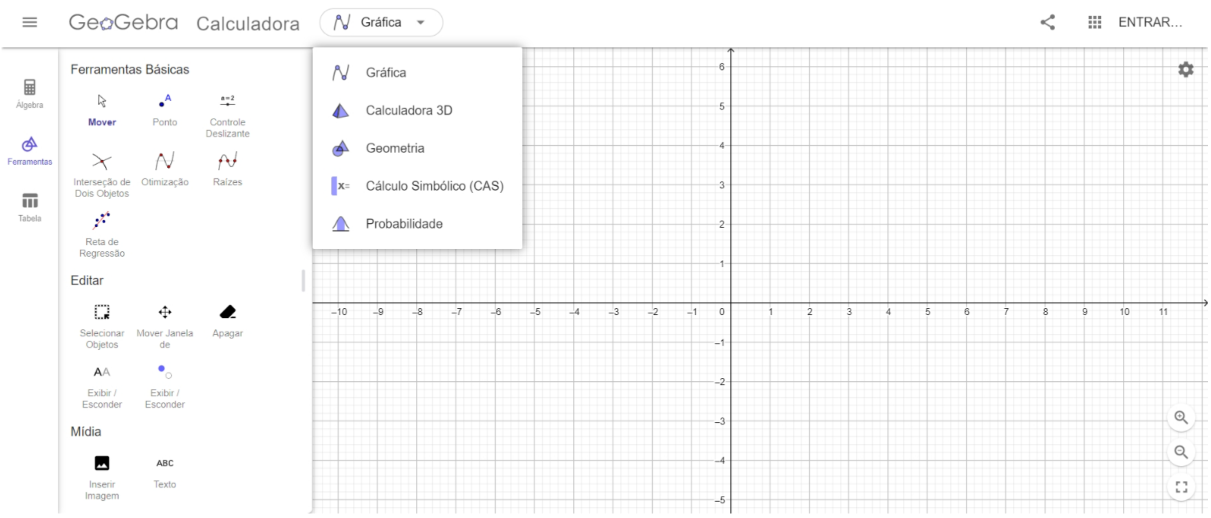
Figura 11: Tela Inicial do GeoGebra.



Fonte: Autores (2022).

Ao apertamos na opção “start calculator”, vamos abrir a janela gráfica do GeoGebra, essa janela é onde podemos criar sólidos, observarmos os gráficos de curvas, por exemplo.

Figura 12: Janela gráfica do GeoGebra.



Fonte: Autores (2022).

Se o usuário clicar na opção “gráfica”, ele pode mudar a janela de visualização e ao clicar na opção “ferramentas”, são mostradas todas opções de criação e visualização, como ponto de interseção ou até importar imagens, por exemplo.

O ambiente ainda possui os *applets,* que são as criações dos usuários que são compartilhadas de maneira pública entre a comunidade. São encontrados vários tipos de criações, principalmente, as que utilizam animações.

O GeoGebra irá contribuir para a nossa pesquisa no âmbito da geometria dinâmica, para que os alunos possam ter contato com este aplicativo e possam desenvolver a visualização dos poliedros por um ambiente que proporcione a manipulação e a criação na geometria espacial.

4. A EXPERIMENTAÇÃO DIDÁTICA

A experimentação didática será através de uma sequência didática em que serão trabalhados o estudo dos poliedros por meio do software GeoGebra. Os alunos devem aprender a manusear as ferramentas da aplicação e utilizá-las para aprender as características dos poliedros, áreas, volume, dentre outras.

A sequência didática será aplicada numa escola pública da rede estadual de ensino do Pará, na cidade de Belém. Ela possui cerca de 1200 alunos nos 3 turnos que exerce suas atividades. A turma do segundo ano do ensino médio é do turno da tarde nessa referida escola. Essa turma possui 30 alunos.

Dessa turma, uma amostra de 5 alunos foi convidada para participar do experimento da sequência didática.

A escola realiza suas atividades em um prédio alugado pela Secretaria Estadual de Educação do Pará e possui 12 salas de aula e a biblioteca. É uma escola numa região muito carente na periferia de Belém, com acesso limitado, pois as ruas no entorno não são asfaltadas e por terem alagamentos em dias de chuvas fortes.

A escola possui mais de 100 professores nos seus 3 turnos e 20 funcionários dentre coordenação, secretaria e terceirizados operacionais, de apoio e de portaria.

A escolha dessa escola se deu, primeiramente, pelo contexto social dos alunos. Uma atividade diferenciada como essa pode se tornar uma grande porta de mudanças na metodologia não somente do pesquisador, mas dos outros professores também.

Além disso, o ambiente afetivo entre o pesquisador e os outros profissionais, tanto educacionais quanto operacionais, proporciona uma facilidade de exercer as atividades nessa escola.

Coletaremos dados de voz e escrito dos alunos, através de gravações e resoluções das fichas de atividades realizadas pelos alunos no período de aplicação dessa sequência para posterior análise tanto dos registros de voz para buscar indícios de aprendizagem quanto análise das fichas preenchidas pelos alunos.

A sequência didática segue a proposta da Teoria da Gênese Instrumental de Rabardel (1995) em que temos os sujeitos sendo os alunos que participaram das atividades, o aplicativo GeoGebra sendo o instrumento e o ensino de poliedros é o objeto matemático. Dessa forma, apresentamos o modelo SAI adaptado a nossa sequência.

Além disso, buscamos as conversões e tratamentos entre as representações de registros semióticos proposta por Duval (2010). O aplicativo GeoGebra, os materiais manipulados e os registros algébricos e aritméticos serviram para que os alunos pudessem ter acesso as representações semióticas que a matemática proporciona.

4.1 A sequência didática

Nesta seção, vamos mostrar como iremos abordar o conteúdo de poliedros com os alunos do segundo ano do ensino médio. Inicialmente solicitando que os alunos façam a instalação do aplicativo GeoGebra em seus celulares e utilizem para construção dos sólidos, suas planificações e façam as conversões dos dados necessários para responderem as questões.

Nossa sequência didática é composta por 10 atividades que abordam de maneira geral definição de poliedro, Relação de Euler, convexidade e estudo de área e de volume de poliedros.

ATIVIDADE 1	Estudando os poliedros
ATIVIDADE 2	Estudando as características dos poliedros
ATIVIDADE 3	Estudando a convexidade dos poliedros
ATIVIDADE 4	Estudando a Relação de Euler
ATIVIDADE 5	Estudando o prisma
ATIVIDADE 6	Estudando o prisma de base não quadrangular
ATIVIDADE 7	Estudando a pirâmide
ATIVIDADE 8	Estudando o tronco de pirâmide
ATIVIDADE 9	Montando o icosaedro
ATIVIDADE 10	Montando embalagens

As atividades de 1 a 9 começam pela construção dos sólidos das atividades no aplicativo e, posteriormente, apreciação para as resoluções das atividades no verso. Na última questão, fizemos o contrário, os alunos montaram através de materiais manipulados as formas geométricas e utilizaram régua para encontrar os valores necessários para as suas resoluções.

Para a atividade 1, esperávamos que os alunos formalizassem a distinção entre poliedros e corpos redondos observando, obviamente, a existência de formas arredondadas na figura 2 dessa atividade e que inexistem na figura 1 da mesma.

Além disso, na atividade 2, temos a expectativa que os alunos façam as diferenciações corretas de vértices, arestas e faces de um poliedro e que percebam que todos os poliedros são formados polígonos, tais como triângulos, retângulos, quadrados, trapézios etc.

Na atividade 3, buscamos encontrar nos alunos a observação atenta sobre a convexidade dos poliedros da atividade. Além disso, já introduzirmos a relação de Euler de maneira que os alunos possam desvendar as características dos sólidos e já se familiarizando com a relação.

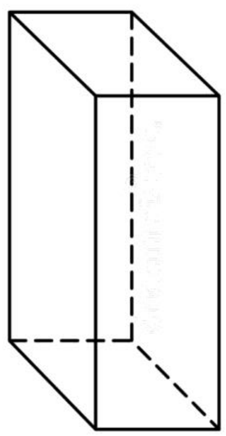
Para a atividade 4, temos que os alunos possam observar a Relação de Euler nos poliedros da atividade e observar que é válido para todos os poliedros em questão que a soma dos vértices com as faces é igual ao da aresta mais duas unidades.

As atividades 6, 7, 8, 9 e 10 fazem o estudo da área da base e lateral e do volume dos sólidos geométricos, entre eles o prisma, a pirâmide, o tronco de pirâmide e o icosaedro. Para essas atividades, esperamos que os alunos possam compreender e formalizar essas técnicas de cálculo.

Atividade 1: Estudando os poliedros

Objetivo: Possibilitar o estudo dos poliedros, minimizando os obstáculos cognitivo a partir da animação gráfica da decomposição da figura geométrica e comparando aos corpos redondos.

Atividade: Desvende as características geométricas das embalagens a partir da modelagem geométrica da figura.



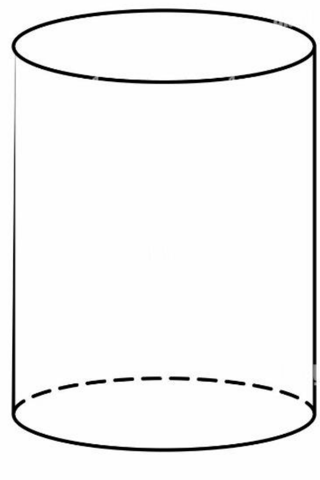


Figura 1 Figura 2

Construa um modelo geométrico para cada figura de embalagens no GeoGebra e faça sua planificação.

QUESTÕES

* Quais as características observadas na planificação das duas figuras?

Figura 1:

Figura 2:

* Quais delas você vê semelhança entre as duas figuras?

Figura 1:

Figura 2:

* Quais características você identifica diferenças entre as figuras?

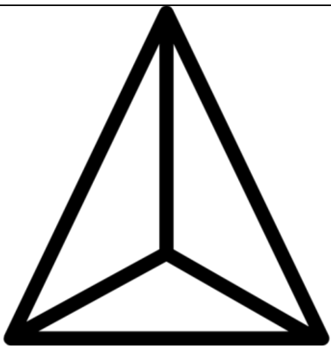
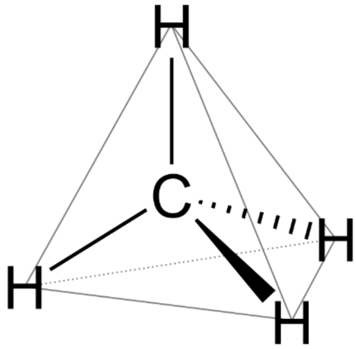
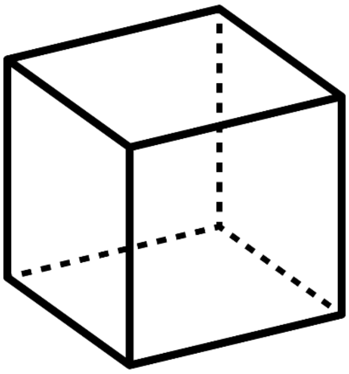
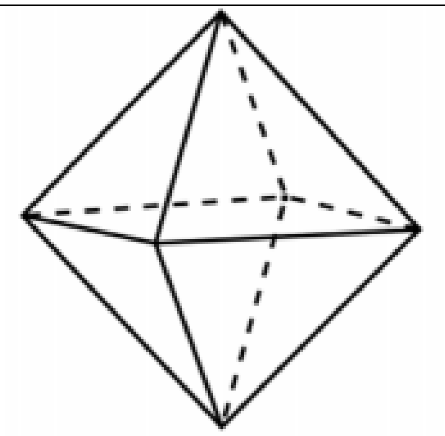
Figura 1:

Figura 2:

Atividade 2: Estudando as características dos poliedros

Objetivo: Possibilitar o estudo das características dos poliedros, tais quais arestas, faces e vértices, minimizando os obstáculos cognitivos a partir da animação gráfica da decomposição da figura geométrica.

Atividade: Desvende as características geométricas das embalagens a partir da modelagem geométrica da figura.

Construa um modelo geométrico para cada figura de embalagens no GeoGebra e faça sua planificação.

QUESTÕES

* Qual o número de vértices, arestas e faces das figuras?

Figura 1:

Figura 2:

Figura 3:

* Quais e quantos polígonos formam as faces dos poliedros?

Figura 1:

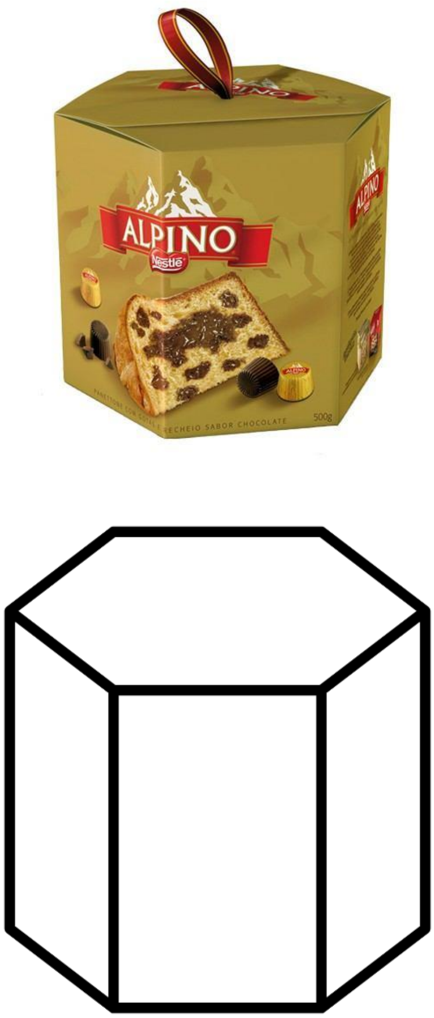
Figura 2:

Figura 3:

Atividade 3: Estudando a convexidade dos poliedros

Objetivo: Possibilitar o estudo da convexidade dos poliedros, minimizando os obstáculos cognitivo a partir da animação gráfica da decomposição da figura geométrica e verificando a convexidade de cada uma.

Atividade: Desvende as características geométricas das embalagens a partir da modelagem geométrica da figura.



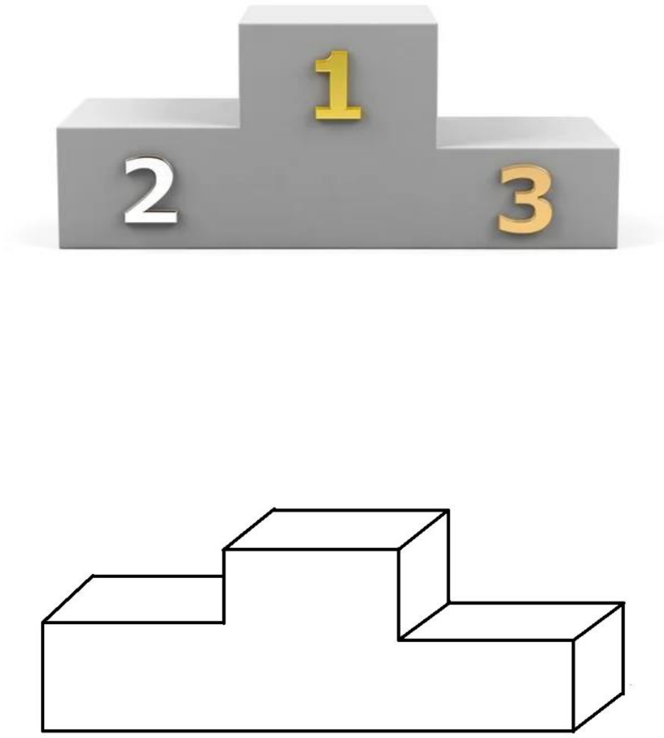


Figura 1 Figura 2

Construa um modelo geométrico para cada figura dos objetos no GeoGebra e construa planos a partir de suas faces.

QUESTÕES

* Observando a construção no aplicativo, os dois sólidos são poliedros? Explique.

* Ao traçar todos os planos que contêm as faces dos poliedros, algum (ns) desse (s) plano (s) corta (m) alguma parte do poliedro?

Figura 1:

Figura 2:

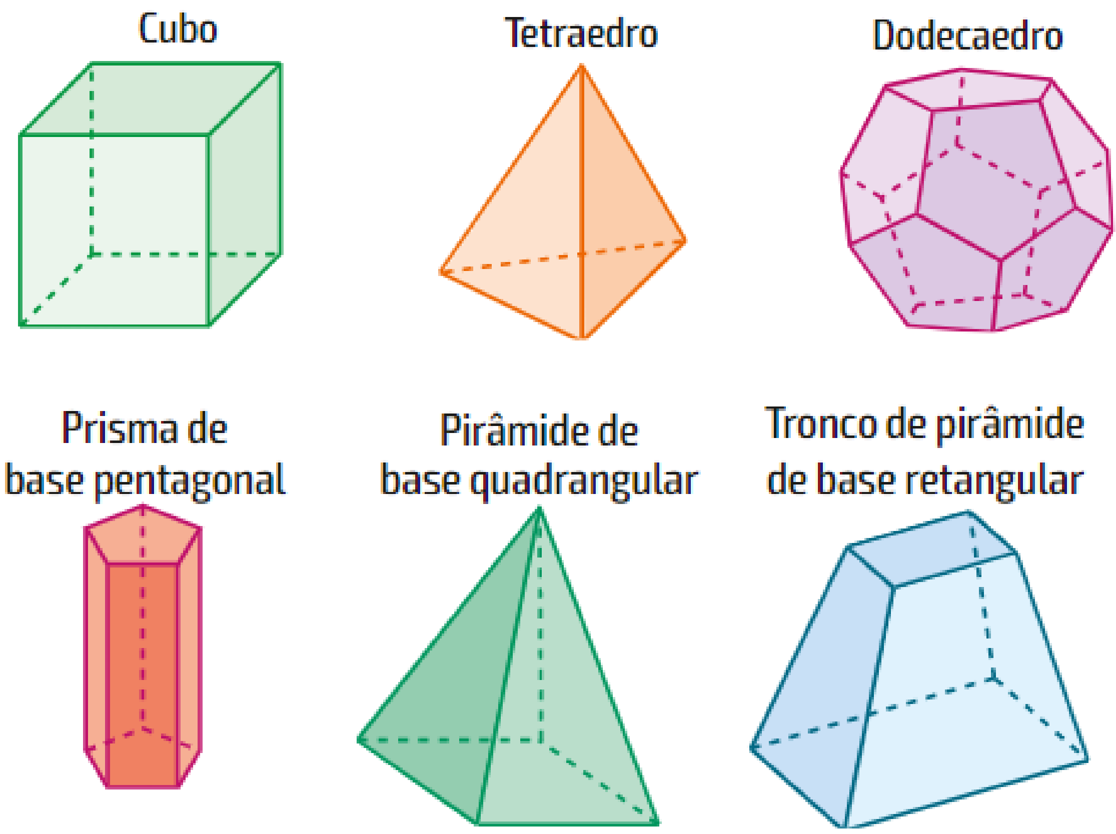
* Complete a tabela abaixo com a quantidade correspondente, observando as características dos poliedros construídos.

Poliedro	F	V	A	V+F	A+2
Figura 1:					
Figura 2:					

Atividade 4: Estudando a Relação de Euler

Objetivo: Possibilitar o estudo da Relação de Euler, minimizando os obstáculos cognitivo a partir da animação gráfica da decomposição da figura geométrica.

Atividade: Desvende as características geométricas das embalagens a partir da modelagem geométrica da figura.



Construa um modelo geométrico para cada figura dos objetos no GeoGebra e construa planos a partir de suas faces.

QUESTÕES

* Complete a tabela abaixo com a quantidade correspondente, observando as características dos poliedros construídos.

Poliedro	F	V	A	V+F	A+2
Cubo					
Tetraedro					
Dodecaedro					
Prisma de base pentagonal					
Pirâmide de base quadrangular					
Tronco de Pirâmide de base retangular					

* Observe a sua rotina e complete a tabela abaixo elencando um objeto do cotidiano que possui o mesmo formato do poliedro

Poliedro	Objeto do cotidiano
Cubo	
Tetraedro	
Dodecaedro	
Prisma de base pentagonal	
Pirâmide de base quadrangular	
Tronco de Pirâmide de base retangular	

Atividade 5: Estudando o prisma

Objetivo: Possibilitar o estudo de área lateral, da base e área total e do volume do prisma, minimizando os obstáculos cognitivo a partir da animação gráfica da decomposição da figura geométrica.

Atividade: Desvende as características geométricas das embalagens a partir da modelagem geométrica da figura.

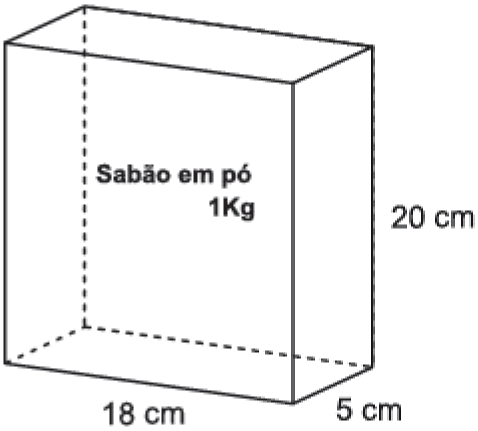


Figura 1

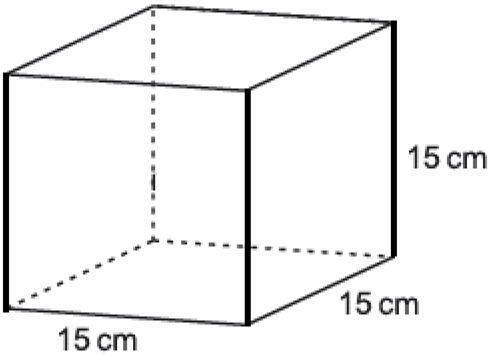


Figura 2

Construa um modelo geométrico para cada figura de embalagens no Geogebra e faça sua planificação.

QUESTÕES

* Quanto é a área da base de cada figura e como calcular?

Figura 1:

Figura 2:

* Quanto é a área lateral de cada figura e como calcular?

Figura 1:

Figura 2:

* Quanto é o volume de cada figura e como calcular?

Figura 1:

Figura 2:

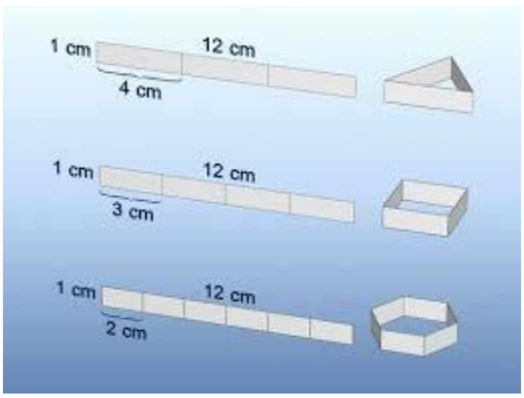
Atividade 6: Estudando o prisma de base não quadrangular

Objetivo: Possibilitar o estudo de área lateral, da base e área total e do volume do prisma, minimizando os obstáculos cognitivo a partir da animação gráfica da decomposição da figura geométrica.

Atividade: Desvende as características geométricas das embalagens a partir da modelagem geométrica da figura.

Figura 1

Figura 2



Construa um modelo geométrico para cada figura de embalagens no Geogebra e faça sua planificação.

QUESTÕES

* Quanto é a área da base de cada figura e como calcular?

Figura 1:

Figura 2:

* Quanto é a área lateral de cada figura e como calcular?

Figura 1:

Figura 2:

* Quanto é o volume de cada figura e como calcular?

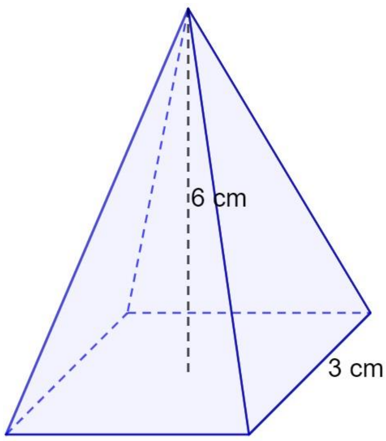
Figura 1:

Figura 2:

Atividade 7: Estudando a pirâmide

Objetivo: Possibilitar o estudo de área lateral, da base, área total e do volume da pirâmide, minimizando os obstáculos cognitivo a partir da animação gráfica da decomposição da figura geométrica.

Atividade: Desvende as características geométricas das embalagens a partir da modelagem geométrica da figura.



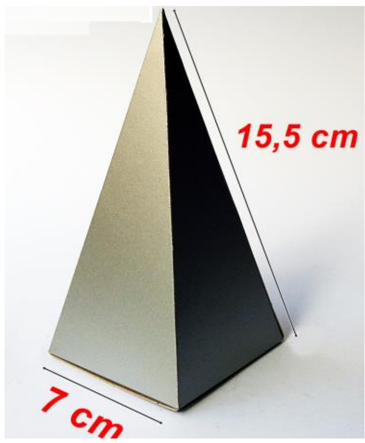


Figura 1

Figura 2

Construa um modelo geométrico para cada figura de embalagens no Geogebra e faça sua planificação.

QUESTÕES

* Quanto é a área da base de cada figura e como calcular?

Figura 1:

Figura 2:

* Quanto é a área lateral de cada figura e como calcular?

Figura 1:

Figura 2:

* Quanto é o volume de cada figura e como calcular?

Figura 1:

Figura 2:

Atividade 8: Estudando o tronco de pirâmide

Objetivo: Possibilitar o estudo de área lateral, da base, área total e do volume da pirâmide, minimizando os obstáculos cognitivo a partir da animação gráfica da decomposição da figura geométrica.

Atividade: Desvende as características geométricas das embalagens a partir da modelagem geométrica da figura.

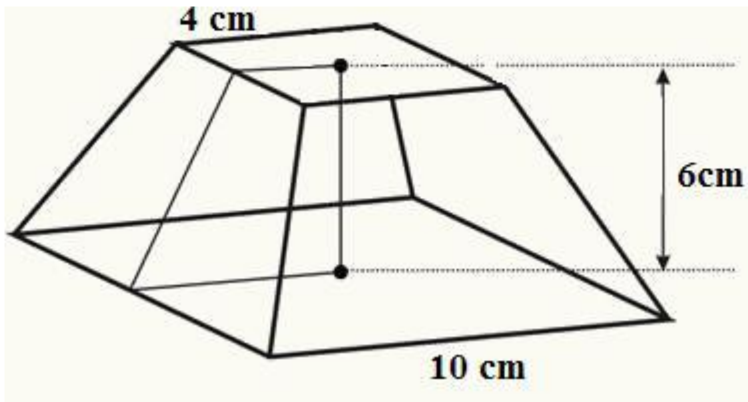


Figura 1

Construa um modelo geométrico para cada figura de embalagens no Geogebra e faça sua planificação.

QUESTÕES

* Quanto é a área da base de cada figura e como calcular?

Figura 1:

* Quanto é a área lateral de cada figura e como calcular?

Figura 1:

* Quanto é o volume de cada figura e como calcular?

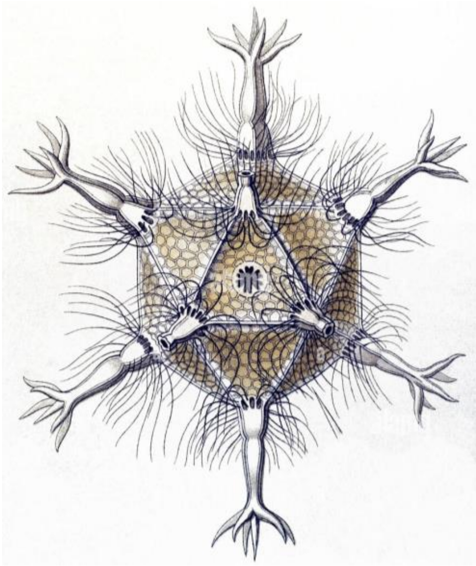
Figura 1:

Atividade 9: Montando o icosaedro

Objetivo: Possibilitar o estudo de área lateral, da base, área total e do volume do icosaedro, minimizando os obstáculos cognitivo a partir da animação gráfica da decomposição da figura geométrica.

Atividade: Desvende o volume das embalagens a partir da modelagem delas.

Construa as embalagens e estude as características dessa embalagem mostrando a forma de cálculo de cada elemento, analisando a relação de capacidade e volume das embalagens.



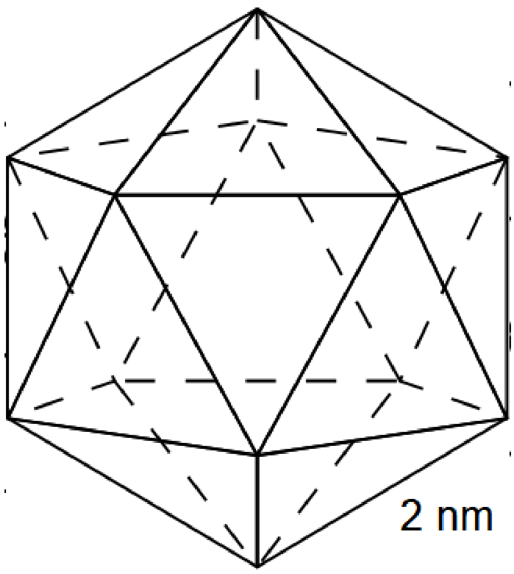


Figura 1

Construa um modelo geométrico para cada figura de embalagens no Geogebra e faça sua planificação.

QUESTÕES

* Quanto é a área da base de cada figura e como calcular?

Figura 1:

* Quanto é a área lateral de cada figura e como calcular?

Figura 1:

* Quanto é o volume de cada figura e como calcular?

Figura 1:

Atividade 10: Montando embalagens

Objetivo: Possibilitar o estudo de área lateral, da base, área total e do volume da pirâmide, minimizando os obstáculos cognitivo a partir da montagem de embalagens.

Atividade: Desvende o volume das embalagens a partir da modelagem delas.

Construa as embalagens e estude as características dessa embalagem mostrando a forma de cálculo de cada elemento, analisando a relação de capacidade e volume das embalagens.

Atividade 10-A

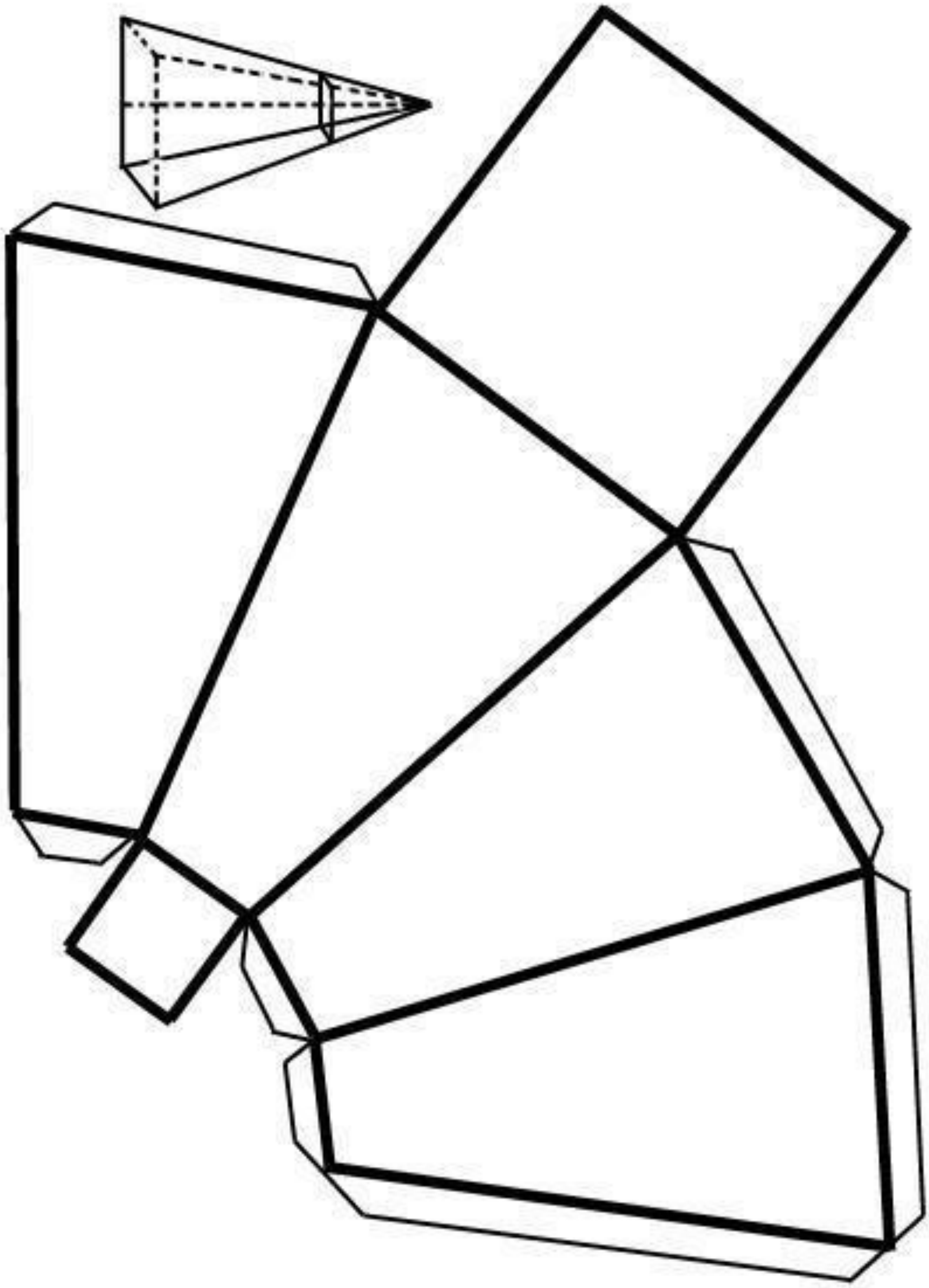


Figura 1

Construa um modelo geométrico, façás as medidas com a régua e respondas as questões a seguir.

QUESTÕES

Medidas:

* Quanto é a área da base de cada figura e como calcular?

* Quanto é a área lateral de cada figura e como calcular?

* Quanto é o volume de cada figura e como calcular?

Atividade 10-B

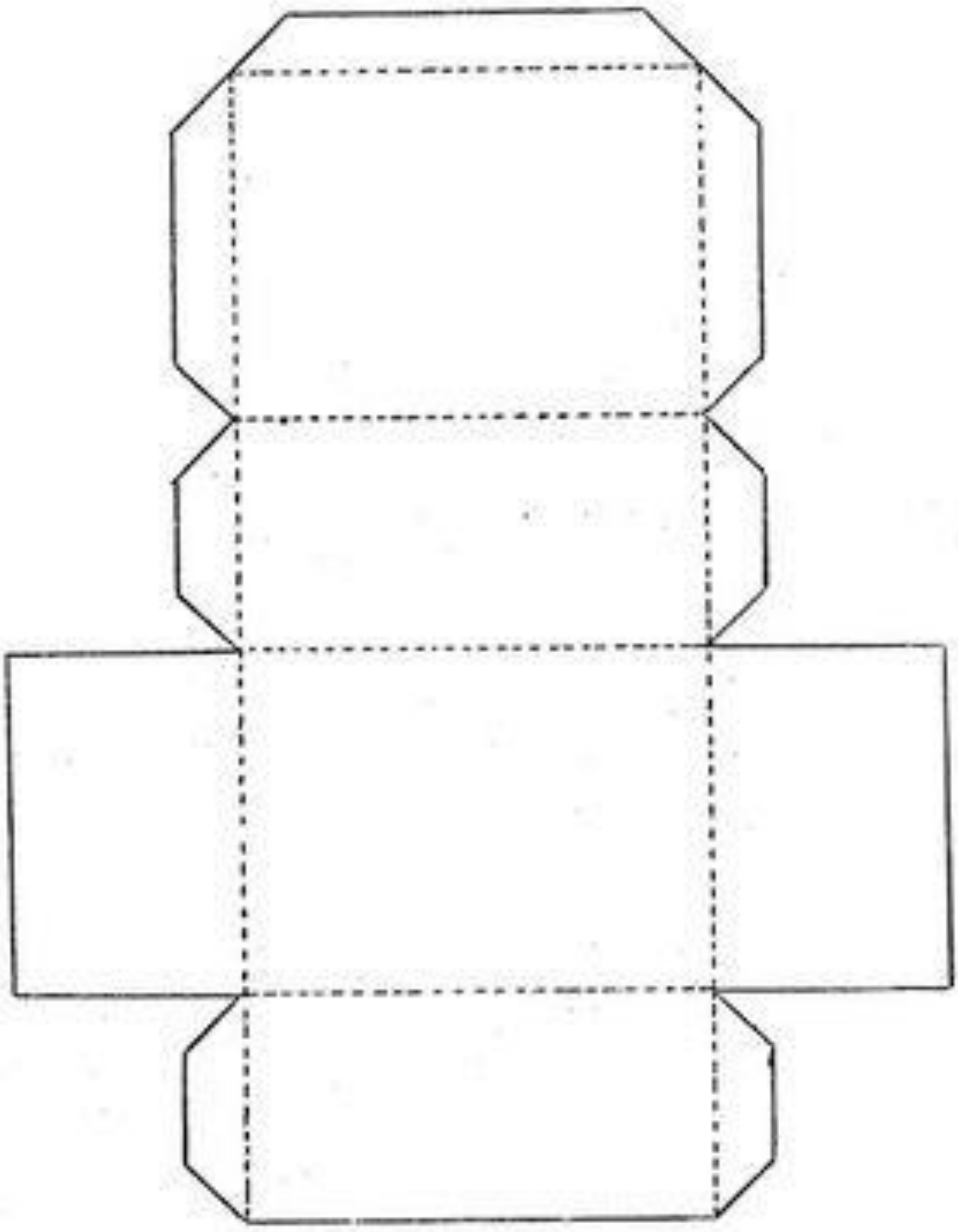


Figura 1

Construa um modelo geométrico, faças as medidas com a régua e respondas as questões a seguir.

QUESTÕES

Medidas:

* Quanto é a área da base de cada figura e como calcular?

* Quanto é a área lateral de cada figura e como calcular?

* Quanto é o volume de cada figura e como calcular?

Atividade 10-C

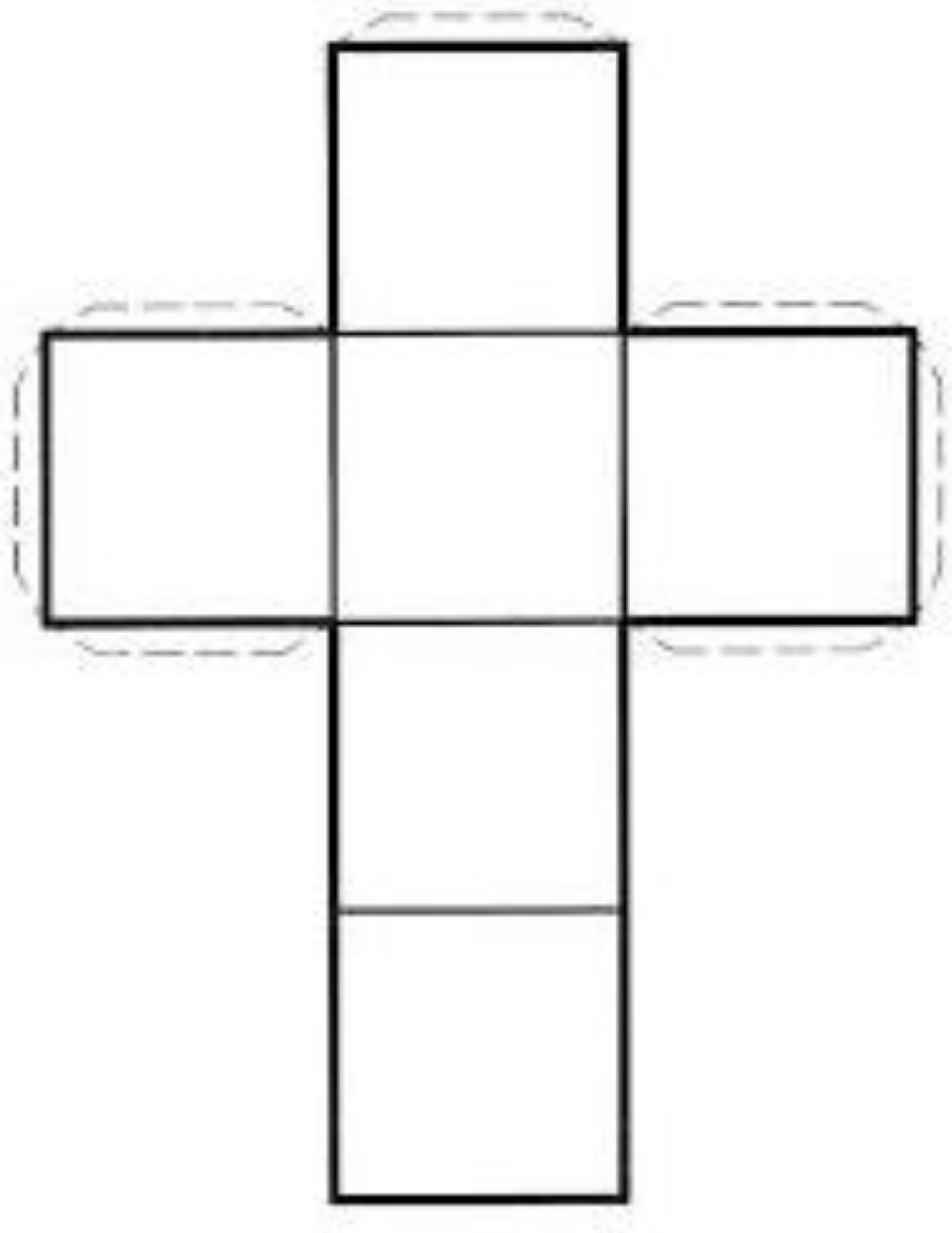


Figura 1

Construa um modelo geométrico, façās as medidas com a régua e respondas as questões a seguir.

QUESTÕES

Medidas:

* Quanto é a área da base de cada figura e como calcular?

* Quanto é a área lateral de cada figura e como calcular?

* Quanto é o volume de cada figura e como calcular?

Atividade 10-D

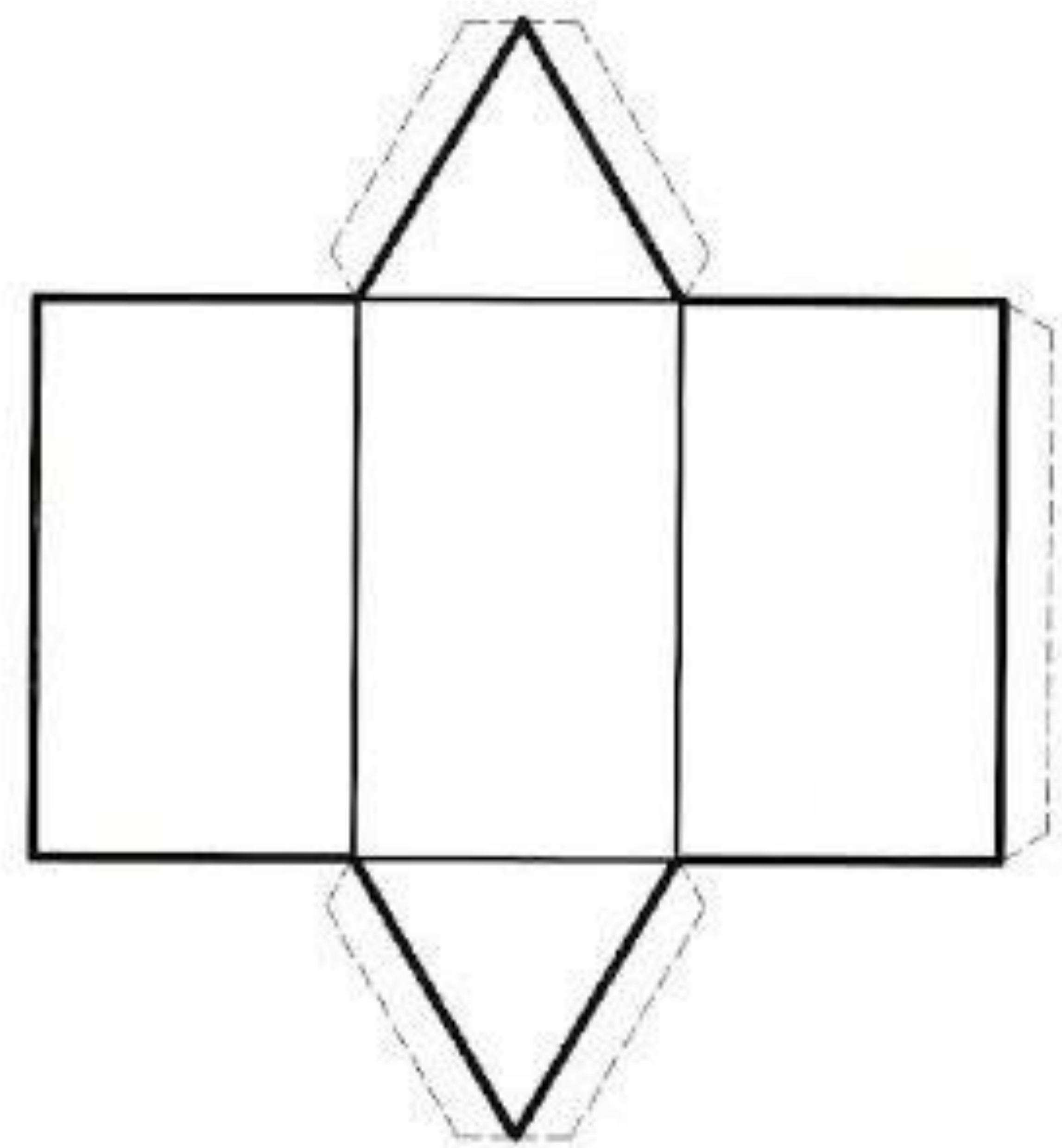


Figura 1

Construa um modelo geométrico, faças as medidas com a régua e respondas as questões a seguir.

QUESTÕES

Medidas:

* Quanto é a área da base de cada figura e como calcular?

* Quanto é a área lateral de cada figura e como calcular?

* Quanto é o volume de cada figura e como calcular?

Atividade 10-E

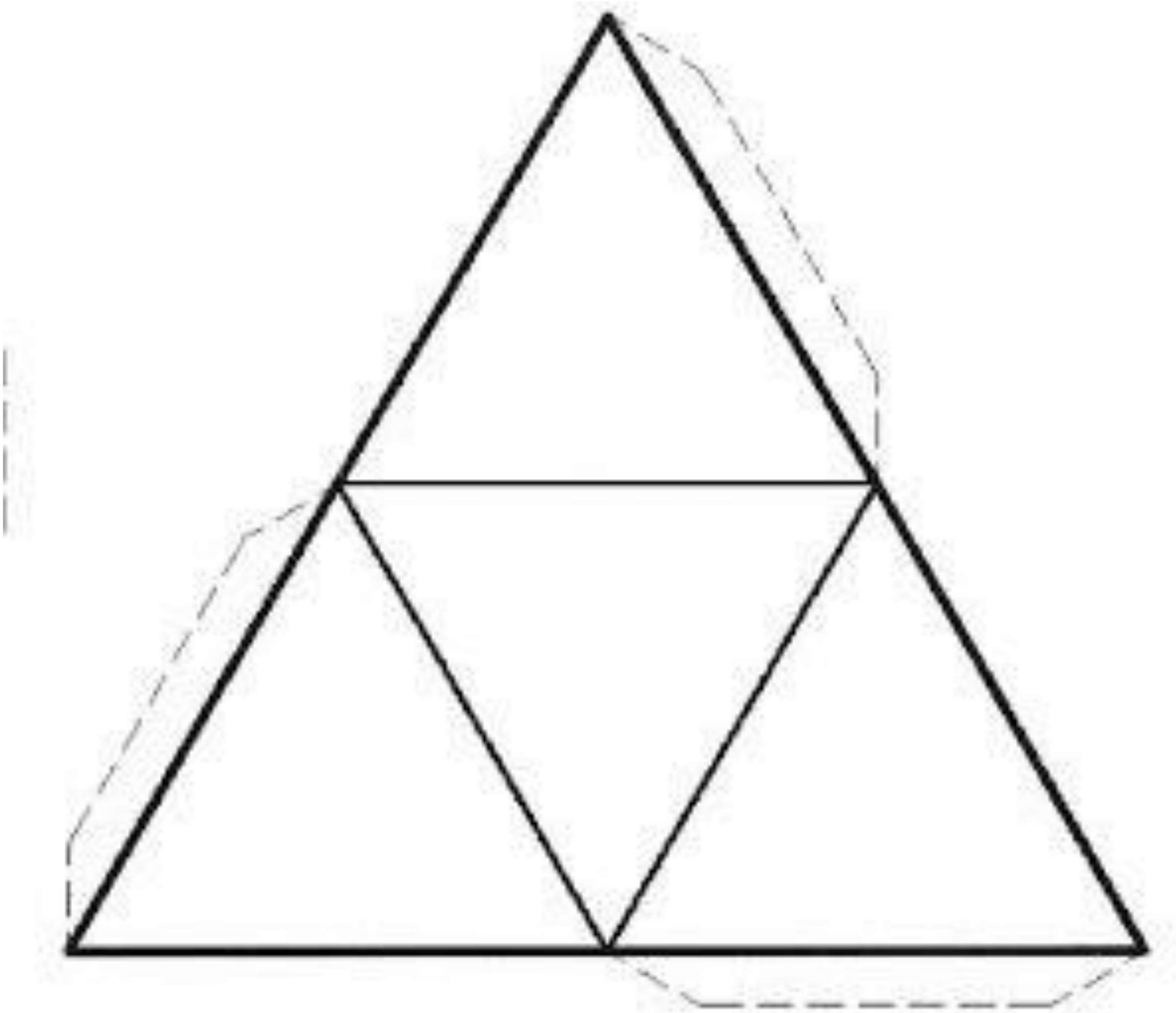


Figura 1

Construa um modelo geométrico, faç

QUESTÕES

Medidas:

* Quanto é a área da base de cada figura e como calcular?

* Quanto é a área lateral de cada figura e como calcular?

* Quanto é o volume de cada figura e como calcular?

4.2 A validação da sequência didática

Para validar a sequência didática foi feita a sua aplicação, inicialmente, com 5 professores da rede pública de ensino para que pudessem colocar suas percepções acerca da construção da sequência.

Os professores consultados são unânimes ao alertarem para um problema que se pode encontrar quanto ao fato do domínio do aplicativo por parte dos alunos. Vale ressaltar que, mesmo com a expansão das mídias sociais e do uso mais frequente de dispositivos eletrônicos, ainda esbarramos na realidade social do público alvo da ação.

Os alunos de escola pública enfrentam a dificuldade de ter um aparelho celular e, também, acesso a esse tipo de tecnologia. Muito embora haja uma evolução e popularidade desses dispositivos, mesmo assim, é observado o acesso escasso a esses meios.

Além desse problema, o fator tempo foi apontado pelos professores como uma possível dificuldade para aplicação da mesma. Apesar dos pontos apresentados até então pelos profissionais, é possível, com certo esforço, aplicar a sequência.

Na primeira atividade da sequência os professores consultados consideraram pertinente a comparação dos dois sólidos, um poliedro e um corpo redondo. Porém, sugeriram que seria melhor utilizar embalagens na sala de aula e fazer experimentos sobre o comportamento das embalagens ao serem lançadas numa superfície plana.

Essa ideia foge da proposta da atividade, pois a intenção é usar o aplicativo para observar a dificuldade de se planificar o cilindro e de perceber que o cilindro não possui vértices e arestas.

Para a atividade 2, a proposta dos colegas foi tornar os comandos das questões mais claros para os alunos. Dessa forma, a atividade fica mais objetiva e direciona o público alvo para o caminho que estamos buscando.

A atividade 3 foi bem discutida entre os colegas professores, um deles propôs unir a atividade 2 e outro reiterou a provável dificuldade de se construir a figura 2. Apesar de haver uma possibilidade mudança sobre essas atividades, não é interessante unir com outra atividade, pois tornaria uma atividade muito cansativa, dessa forma, os colegas optaram por não a modificar.

Uma questão levantada pelos professores foi o fato de se usar muitas formas na atividade 4, entretanto, apesar da quantidade de figuras, todas são poliedros e são construídos com poucos passos. Sendo assim, não vemos a necessidade de modificação da tarefa.

Para as atividades 5, 6 e 7, os professores apontaram para uma possibilidade muito forte dos alunos não dominarem todas as fórmulas de cálculo de área e de volume que estão nos comandos, em virtude de serem muitas figuras e algumas delas com certa dificuldade de aprendizagem. Para essa dificuldade, os professores apontaram como solução intervenções orais.

A atividade 8 foi uma das mais discutidas, em virtude de os professores apontarem como muito difícil de se construir. Nesse momento, observamos que os professores não possuem domínio dessas ferramentas e buscam atividades mais práticas aos seus conhecimentos.

Apesar do tronco de pirâmide não ser uma ferramenta pronta da aplicação, é possível construir com certa facilidade, colocando um plano paralelo a base e não removendo o topo da pirâmide, afim apenas de observar o sólido.

Os professores consultados propuseram a remoção da atividade 9, haja vista que a área da superfície da figura seriam 20 triângulos equiláteros. Além disso, a utilização do uso de uma medida não usual, pois se trata de um organismo, poderia dificultar o processo de aprendizagem.

Para a atividade 10, os professores teceram bons comentários acerca dos poliedros que devem ser montados. A ressalva que fizeram se trata na mudança de montagem das figuras, pois o aconselhável seria iniciar por figuras mais simples, como o cubo e depois construir figuras mais complexas.

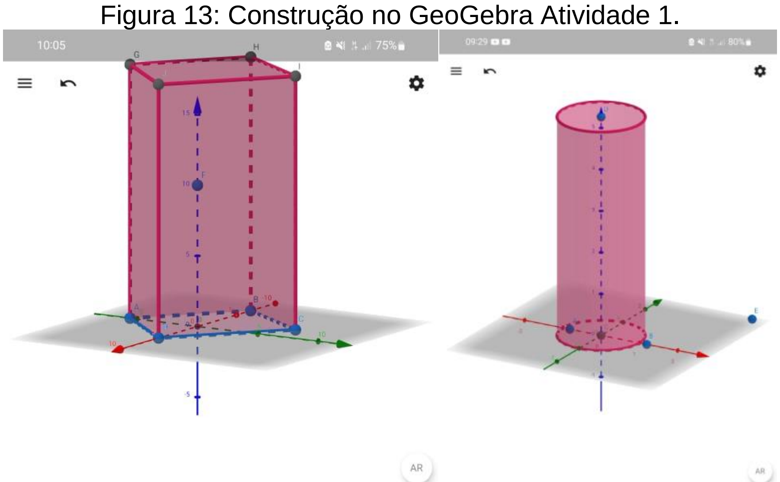
4.3 O experimento em sala de aula

A atividade foi desenvolvida em um grupo de 5 alunos do segundo ano do ensino médio de uma escola da rede pública estadual e foi solicitado aos alunos que trouxessem seus aparelhos celulares e que fizessem o download do aplicativo. Os alunos foram nomeados como A1, A2, A3, A4 e A5 afim de não serem identificados.

A atividade inicial (Atividade 1) tem por objetivo possibilitar estudar os poliedros em suas características. Nessa atividade, os alunos foram orientados a construir as figuras na aplicação e depois responder ao que se pedia. A figura 2 possui uma característica que impossibilita de ser um poliedro.

A atividade 1 foi desenvolvida pelos alunos com certa dificuldade, pois era o primeiro contato deles com a ferramenta de geometria dinâmica, isto é, no processo de instrumentação da ferramenta computacional. Apesar da dificuldade ainda em construir utilizando a aplicação, os alunos puderam construir e desenvolver suas percepções acerca do poliedro e do corpo redondo.

Figura 13: Construção no GeoGebra Atividade 1.



Fonte: Autores (2022).

Percebe-se ainda algumas disformidades entre as figuras construídas no aplicativo e as embalagens propostas na atividade em virtude da falta de perícia com o GeoGebra. Entretanto, ao responderem as questões da atividade, os alunos demonstraram que conseguem identificar semelhanças e diferenças entre as figuras.

Figura 14: Resposta Atividade 1 A2.

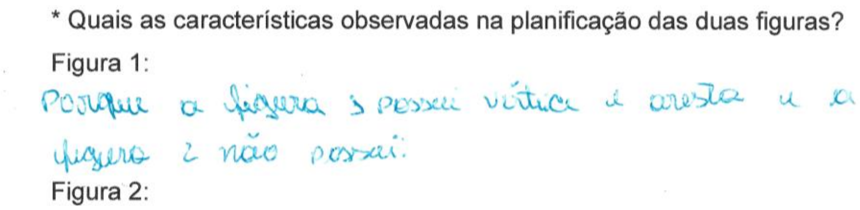

* Quais as características observadas na planificação das duas figuras?

Figura 1:

Porque a figura 1 possui vértice e aresta e a figura 2 não possui.

Figura 2:

Fonte: Autores (2022).

Ao responder dessa maneira, o aluno demonstra que conseguiu observar, fazendo um tratamento, uma característica que as difere e, não somente isso, mas que define o paralelepípedo um poliedro e o cilindro não. Além disso, os alunos observaram a existência de superfícies arredondadas na figura que não possuía vértices e arestas.

Figura 15: Resposta Atividade 1 A3.

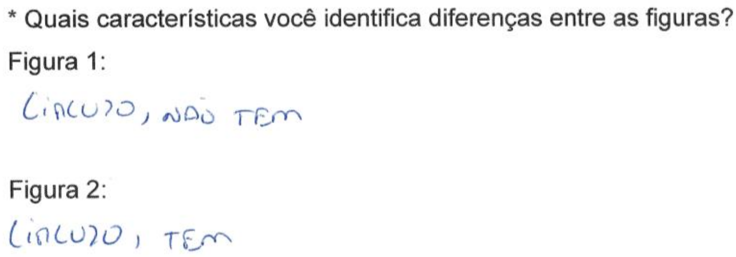

* Quais características você identifica diferenças entre as figuras?

Figura 1:

Cilindro, não tem

Figura 2:

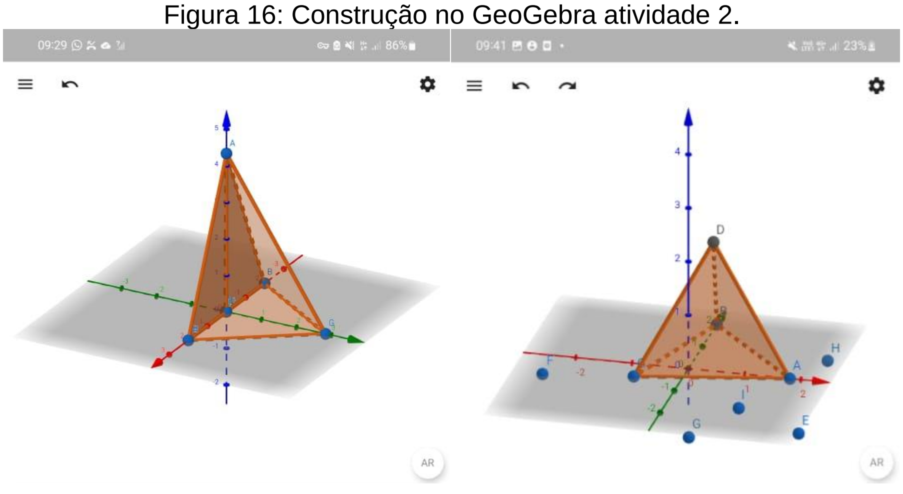
Cilindro, tem

Fonte: Autores (2022).

O objetivo da atividade anterior, ao ser alcançado, possibilita um panorama favorável para a atividade 2, pois nessa atividade os alunos devem observar exatamente as quantidades de vértices, arestas e faces de poliedros simples de se construir na aplicação.

Apesar de terem certo conhecimento com o aplicativo adquirido da atividade 1, os alunos ainda demonstram não ter domínio das ferramentas. Alguns construíram o tetraedro como uma pirâmide de base triangular ou utilizando a ferramenta de tetraedro construindo antes o triângulo equilátero de base, realizando o processo de instrumentalização da aplicação.

Figura 16: Construção no GeoGebra atividade 2.



Fonte: Autores (2022).

Os alunos foram orientados a construir sólido por sólido e responderem sobre as suas características sobre vértices, faces e arestas. Foi notória a confusão de significados que muitos alunos fazem sobre o que é um vértice e o que é uma aresta. Por exemplo, em muitas ocasiões indagavam entre si se o vértice é a “linha” ou o “cantinho” ou o “bico”.

Dessa forma, os alunos mostram lacunas de significados geométricas carregados desde a geometria plana estudada. Pois, ao estudarem polígonos, os alunos têm muitas vezes as arestas dos polígonos chamadas de lados, causando confusão ao chegarem na geometria espacial.

Figura 17: Resposta Atividade 2 A4.

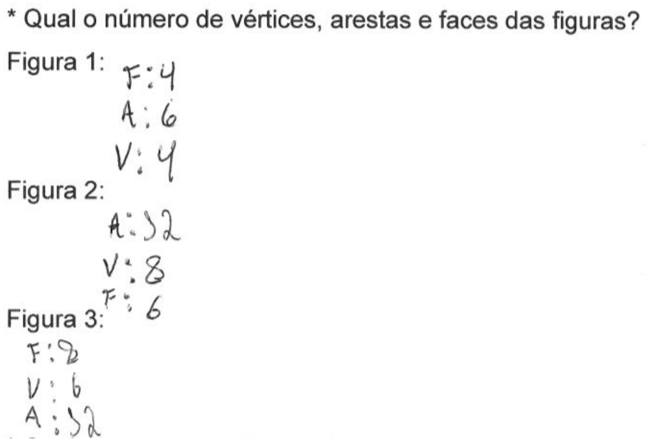

* Qual o número de vértices, arestas e faces das figuras?

Figura 1:
F:4
A:6
V:4

Figura 2:
A:12
V:8
F:6

Figura 3:
F:8
V:6
A:12

Fonte: Autores (2022).

Nessa atividade, os alunos socializaram as discussões sobre o que era vértice, aresta e face e, assim, conseguiram processar a conversão e contar através dos sólidos construídos no aplicativo os dados que precisavam. Vale ressaltar, que alguns quiseram fazer a contagem dos vértices pelas figuras planificadas, mas ao serem alertados pelos outros alunos que poderiam contar de maneira errônea, eles descartaram essa forma.

Figura 18: Resposta Atividade 2 A5.

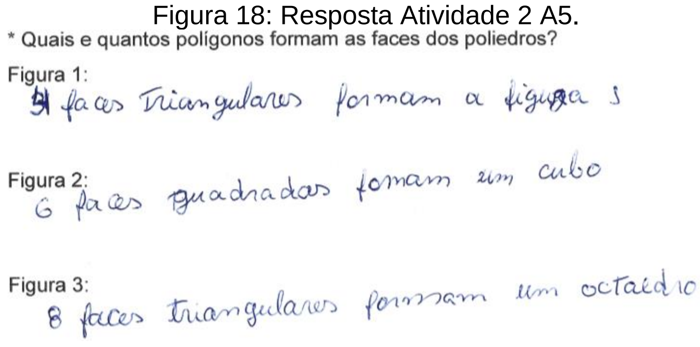

* Quais e quantos polígonos formam as faces dos poliedros?

Figura 1:
4 faces Triangulares formam a figura 1

Figura 2:
6 faces quadradas formam um cubo

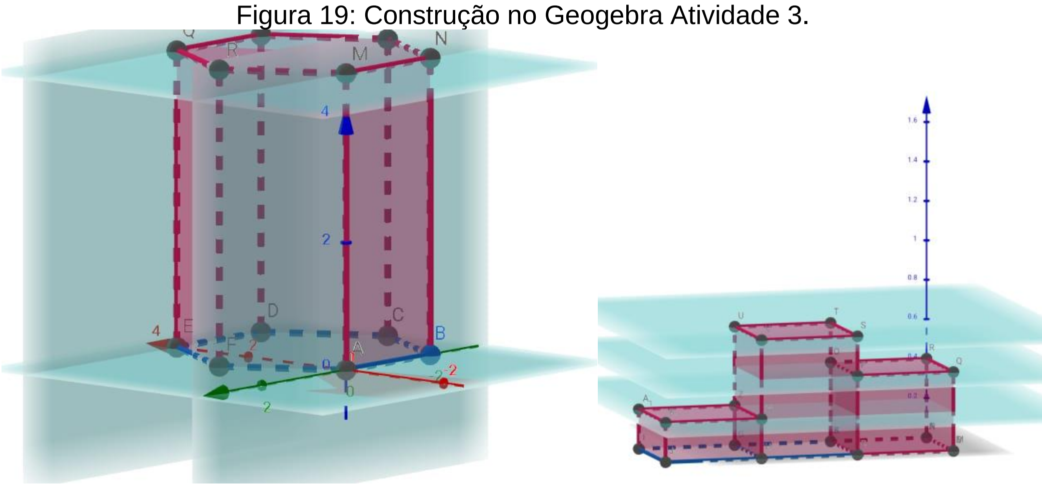
Figura 3:
8 faces triangulares formam um octaedro

Fonte: Autores (2022).

Na questão sobre a quantidade e quais polígonos, um dos alunos rasurou sua resposta, pois para ele a base do poliedro não contava. Ao ser indagado por outro colega, chegaram à conclusão que a base também é uma face. Tanto que na reposta da questão anterior, ele havia colocado que a quantidade de faces da figura 1 era 4.

A atividade 3 da sequência didática tem por objetivo estudar a convexidade de poliedros. E, também, iniciar as observações acerca das quantidades de faces, arestas e vértices, vértices mais arestas e arestas mais duas unidades. Dessa forma usamos a construção de 2 poliedros, um considerado mais simples e outro considerado mais complexo.

Figura 19: Construção no Geogebra Atividade 3.



Fonte: Autores (2022).

Nessa atividade, esperávamos dos alunos que eles identificassem que os poliedros construídos possuíam uma convexidade diferente, entretanto, isso não faria com que eles não fossem poliedros. Dessa forma, alguns alunos chegaram a iniciar suas respostas dizendo que a figura 2 não se tratava de um poliedro.

Nesse momento, o pesquisador abre uma discussão entre os alunos para que eles socializassem o porquê de determinarem que a figura 2 não se tratava de um poliedro. Ao serem questionados sobre o que torna um sólido um poliedro, alguns alunos respondem que é a existência de vértices e arestas.

Para os alunos, o que define um poliedro não é a complexidade de ser formado por faces poligonais planas e que cada aresta é somente comum a duas das faces do sólido, para eles, o que define um sólido ser poliedro é ele ter vértice e aresta. Isso demonstra algum tipo maturação sobre essa definição.

Figura 20: Resposta Atividade 3 A1.

* Observando a construção no aplicativo, os dois sólidos são poliedros? Explique.

~~Só um~~ ~~deles~~ é ~~poliedro~~ ~~e o~~ outra
não poliedros porque eles tem Vertices e faces laterais

Fonte: Autores (2022).

O aluno que respondeu conforme a imagem acima foi um dos que observou a diferenciação das construções e depois, ao discutirem, reformulou sua resposta. Observe a rasura iniciando que somente um deles se tratava ser um poliedro.

A diferenciação que os alunos observaram seria o fato de que na figura 1, em nenhum dos planos das faces, o poliedro era "cortado" e no poliedro da figura 2, em alguns deles sim. Todos os alunos perceberam isso, alguns mais rapidamente e outros com mais tempo de observação.

Figura 21: Resposta Atividade 3 A5.

* Ao traçar todos os planos que contêm as faces dos poliedros, algum (ns) desse (s) plano (s) corta (m) alguma parte do poliedro?

Figura 1:
não

Figura 2:
sim

Fonte: Autores (2022).

A última questão foi uma observação em que os alunos fariam a contagem dos vértices, arestas e faces de cada figura. Interessante destacar que os alunos discutiram muito entre eles sobre essas quantidades. A figura 2 causou mais discussões em virtude da sua complexidade. Apesar disso, eles conseguiram colocar todos os dados observados nas construções.

Figura 22: Resposta Atividade 3 A4.

* Complete a tabela abaixo com a quantidade correspondente, observando as características dos poliedros construídos.

Poliedro	F	V	A	V+F	A+2
Figura 1:	8	12	18	20	20
Figura 2:	10	16	24	26	26

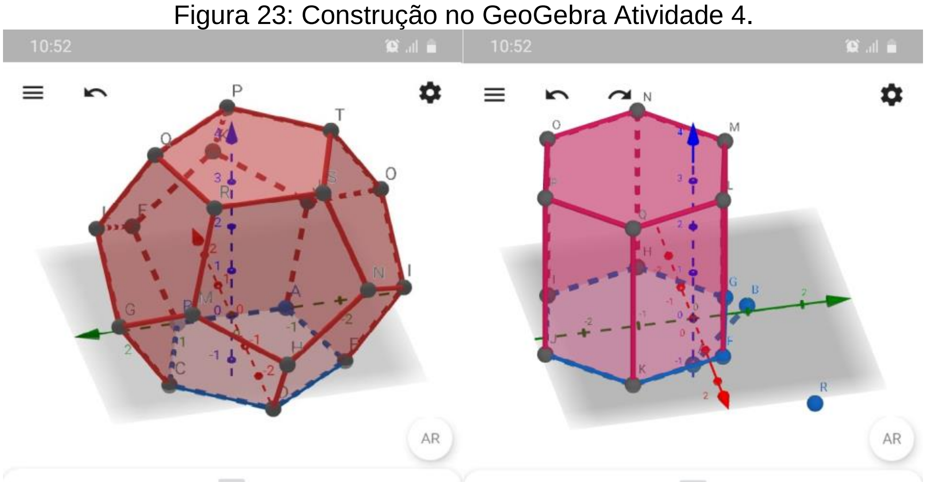
Fonte: Autores (2022).

Vale ressaltar que, apesar de serem apenas dois poliedros, os alunos já estranharam o fato dos valores da soma dos vértices e faces de cada figura serem iguais ao da soma das arestas mais duas unidades.

Essa última questão da atividade 3 era uma introdução para o que vinha na atividade 4, porém com uma quantidade maior de poliedros pois, a intenção era que os alunos observassem a Relação de Euler em uma quantidade considerável de sólidos poliédricos.

Como eram muitos sólidos a serem construídos no aplicativo e muitos dados a serem observados pelos alunos, eles foram construindo de um por um e depois preenchendo com as informações convertidas do registro gráfico.

Figura 23: Construção no GeoGebra Atividade 4.



Fonte: Autores (2022).

Nas figuras acima, temos algumas construções feitas pelos alunos no aplicativo para os sólidos da atividade. Algumas figuras, como o cubo, os alunos obtiveram muita facilidade de construção, em outros sólidos, houve intervenção do pesquisador na construção, pois os alunos já buscavam ideias de como montar, sem saber que o aplicativo possuía a ferramenta mesmo não aparente.

Após a construção desses poliedros, os alunos fizeram a conversão dos dados observados nas construções gráficas. Após o preenchimento de metade da tabela, os alunos começaram a observar que as colunas que continham as somas dos vértices com as faces eram iguais a soma das arestas mais duas unidades.

Figura 24: Resposta Atividade 4 A5.

* Complete a tabela abaixo com a quantidade correspondente, observando as características dos poliedros construídos.

Poliedro	F	V	A	V+F	A+2
Cubo	6	8	12	14	14
Tetraedro	4	4	6	8	8
Dodecaedro	12	20	30	32	32
Prisma de base pentagonal	7	10	15	17	17
Pirâmide de base quadrangular	5	5	8	10	10
Tronco de Pirâmide de base retangular	6	8	12	14	14

Fonte: Autores (2022).

Para o preenchimento da metade final dos dados, alguns alunos começaram a contagem pela soma da quantidade de arestas mais duas unidades e da quantidade de faces, deixando para contar os vértices como sendo a diferença desses valores e verificando na figura que o tratamento que haviam feito estava correto e, dessa maneira, alcançamos um dos objetivos dessa atividade.

Nas atividades anteriormente realizadas, os alunos tinham as figuras dos poliedros e imagens de objetos semelhantes aos poliedros e que poderiam pertencer ao cotidiano dos alunos. Nessa atividade, fizemos o inverso, ilustramos apenas os poliedros e solicitamos dos alunos que observassem as figuras e anotassem quais objetos seriam semelhantes a essas figuras e eram presentes em seus cotidianos.

Figura 25: Resposta Atividade 4 A4.

* Observe a sua rotina e complete a tabela abaixo elencando um objeto do cotidiano que possui o mesmo formato do poliedro

Poliedro	Objeto do cotidiano
Cubo	Dado
Tetraedro	cabana
Dodecaedro	BoLA
Prisma de base pentagonal	caneta ou Lapes
Pirâmide de base quadrangular	PiRâmide do Egito
Tronco de Pirâmide de base retangular	Balança

Fonte: Autores (2022).

Para essa atividade, um dos alunos mencionou que ajudava o pai feirante aos finais de semana e que um dos poliedros se assemelhava a uma parte da balança em que usavam para pesar os produtos que vendiam. Dessa forma, a BNCC nos diz que

> [...] no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, conforme anteriormente anunciado. Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. (BRASIL, 2018, p. 518).

Uma outra observação a ser feita é o objeto do cotidiano que se assemelha a um dodecaedro. O aluno ao observar o sólido, começou a perceber que se parecia com uma bola de futebol, induzido pelo formato das faces e não pelo formato como um todo, já que o sólido possui faces planas e não arredondadas.

A atividade 5 iniciou os estudos de área e volume sobre poliedros. O objetivo dessa atividade era que os alunos apropriassem os cálculos de área e volume das de prismas de base quadrangulares e retangulares.

Os alunos tiveram êxito ao produzirem as figuras no aplicativo, entretanto muitas dúvidas despertaram nos alunos. Entre elas, sobre o que era considerado base, a superfície inferior ou a superior também?

Para essa questão, o pesquisador solicitou aos alunos que discutissem entre si sobre o que era considerado base. Sendo assim, alguns alunos afirmaram que base era só a inferior, no que o pesquisador indagou se a face superior poderia ser considerada área lateral, obtendo como resposta que não.

A primeira dúvida fora sanada, mas agora como calcular a área dessa figura? O pesquisador perguntou aos alunos qual polígono formava a base da figura 1, com certa dificuldade, alguns alunos responderam retângulo e o pesquisador indaga novamente: como calcular área de um retângulo?

Pensando rapidamente, alguns responderam que não sabiam e um dos alunos disse que era base vezes a altura. Ao serem questionados sobre qual era a área da outra base, o mesmo aluno falou que era só multiplicar por 2, pois era a mesma. E assim todos os alunos seguiram seu raciocínio.

Figura 26: Resposta Atividade 5 A3.

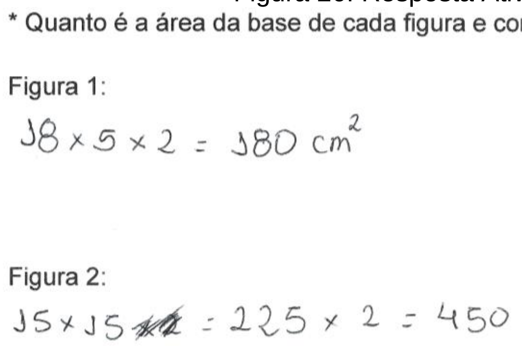

* Quanto é a área da base de cada figura e como calcular?

Figura 1:

$18 \times 5 \times 2 = 180\ cm^2$

Figura 2:

$15 \times 15 \cancel{\times 2} = 225 \times 2 = 450$

Fonte: Autores (2022).

Os alunos fizeram a mesma ideia para a figura 2, obtendo a área da base dessa figura também. Para a próxima questão, os alunos abriram novamente discussão, para alguns, levaram de maneira rigorosa a palavra lateral e entenderam que para a figura 1, por exemplo, as laterais são apenas os lados com dimensões 5 cm x 20 cm.

Ao serem questionados sobre o fato de se rotacionar as figuras, se ainda as outras duas faces não eram laterais e os alunos responderam que sim. Dessa forma, os alunos conseguiram entender que as 4 faces laterais contavam para o cálculo.

Figura 27: Resposta Atividade 5 A3.

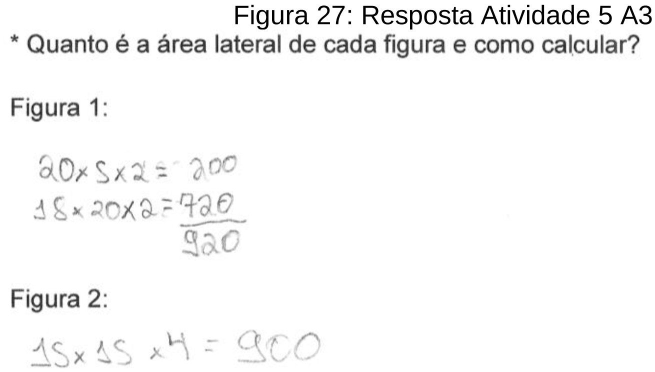

* Quanto é a área lateral de cada figura e como calcular?

Figura 1:

$20 \times 5 \times 2 = 200$

$18 \times 20 \times 2 = 720$

920

Figura 2:

$15 \times 15 \times 4 = 900$

Fonte: Autores (2022).

Os alunos conseguiram observar que as áreas deveriam ser calculadas duas a duas na figura e apenas uma vez uma figura 2, por ser um cubo. Com a mesma dificuldade, os alunos não lembravam como calcular volume de prisma com bases quadradas ou retangulares.

Um dos alunos lembrou como calcular, mas o restante da turma teve muitas dificuldades. Houve muita intervenção do pesquisador, pois os alunos não sabiam e tinham muita dificuldade para entender o processo desse cálculo.

Figura 28: Resposta Atividade 5 A3.

* Quanto é o volume de cada figura e como calcular?

Figura 1:

$18 \times 5 \times 20 = 1.800$

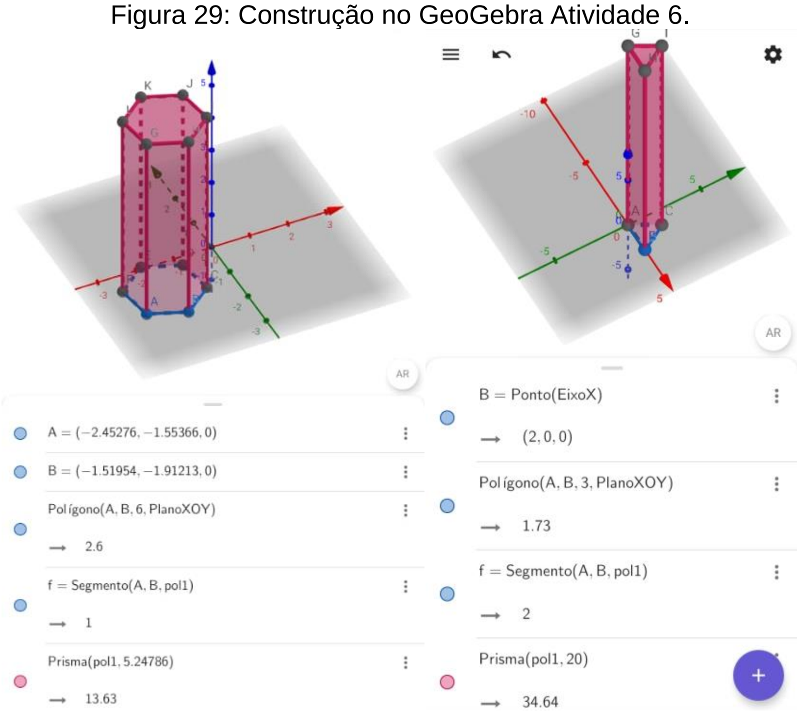
Figura 2:

$15 \times 15 \times 15 = 3.375$

Fonte: Autores (2022).

Para a atividade 6, foi solicitado para os alunos que construíssem modelos de prismas de bases triangular e hexagonal, parecidos com os das embalagens, mas com dimensões que eles escolhessem. Dessa maneira, os alunos fariam os cálculos conforme suas construções e confirmariam os valores no aplicativo.

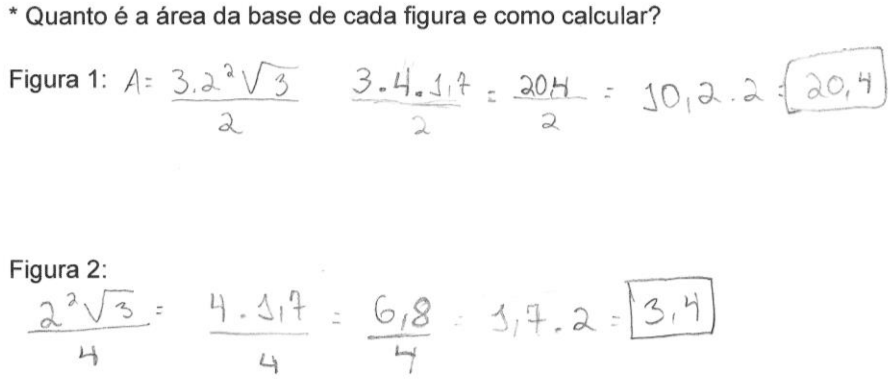
Figura 29: Construção no GeoGebra Atividade 6.



Fonte: Autores (2022).

A noção de área e de volume estava bem desenvolvida entre os alunos, em relação aos cálculos os alunos não tiveram dificuldades. O que eles não sabiam eram cálculo de área de hexágono e triângulo equilátero sabendo somente o comprimento do lado. Essas informações foram repassadas através de intervenção do professor.

Figura 30: Resposta Atividade 6 A2.



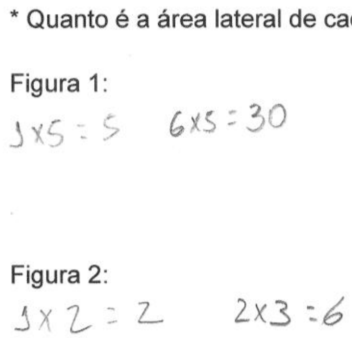
Fonte: Autores (2022).

Uma convenção foi adotada entre os alunos para que o valor de $\sqrt{3} = 1{,}7$, os alunos calcularam na calculadora do celular e verificaram que esse valor era uma aproximação conveniente. O aluno da resposta acima utilizou como dimensão da aresta da face o valor 2 e obteve para a área das bases o valor 3,4, dessa forma, cada base tem área de, aproximadamente, 1,7.

No aplicativo os alunos observaram que o valor era 1,73 e entenderam que estavam errados, o pesquisador interveio e explicou que estavam corretos e a diferença era proveniente da aproximação que haviam feito da $\sqrt{3}$.

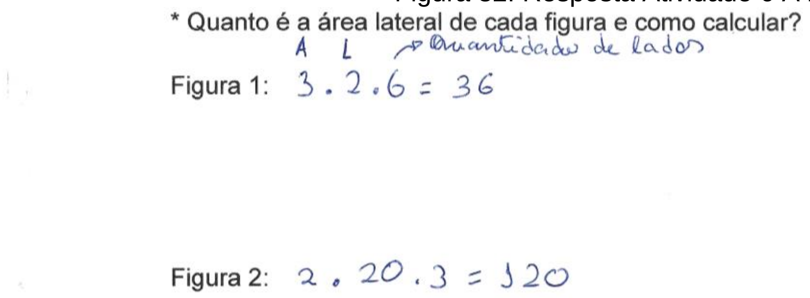
A altura dos prismas construídos pelos alunos também era uma construção pessoal. Dessa forma, foram várias respostas para a questão 2 da atividade. Abaixo, seguem duas respostas

Figura 31: Resposta Atividade 6 A4.



Fonte: Autores (2022).

Figura 32: Resposta Atividade 6 A4.


* Quanto é a área lateral de cada figura e como calcular?

A L → Quantidade de lados

Figura 1: 3 . 2 . 6 = 36

Figura 2: 2 . 20 . 3 = 120

Fonte: Autores (2022).

Podemos observar valores bem distintos entre as respostas, em virtude da particularidade de suas construções. Além disso, podemos observar as conversões entre ida e volta de papel e aplicativo e os tratamentos ao utilizarem os cálculos de área.

Não diferentemente na última questão da atividade, observamos que os alunos conseguiram entender a relação de volume para prisma como sendo o produto da área da base pela altura.

Figura 33: Resposta Atividade 6 A5.

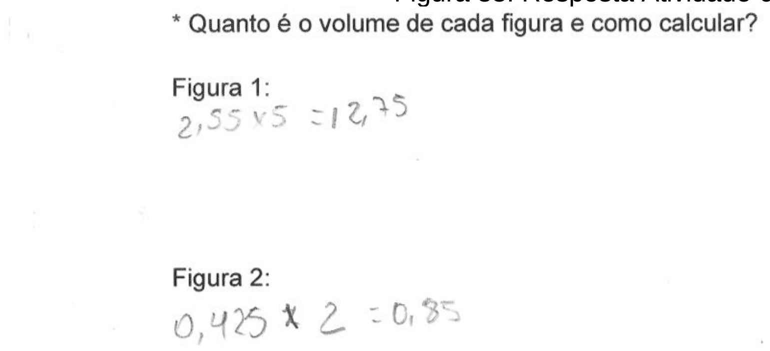

* Quanto é o volume de cada figura e como calcular?

Figura 1:

2,55 x 5 = 12,75

Figura 2:

0,425 x 2 = 0,85

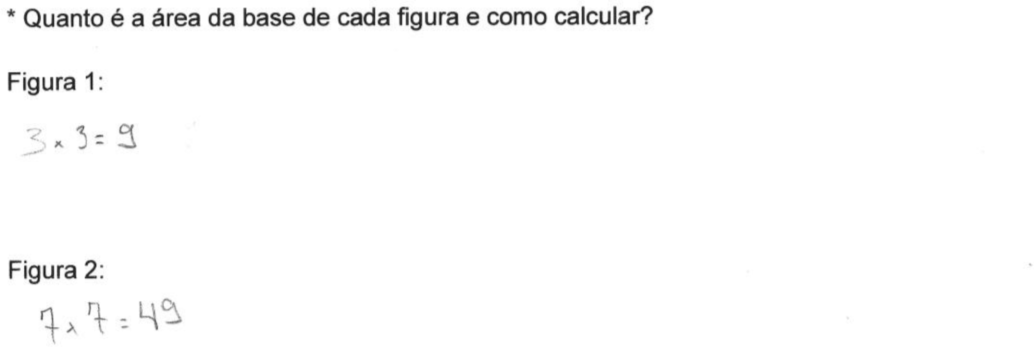
Fonte: Autores (2022).

A atividade 7 tem os mesmos objetivos da atividade anterior, mas para estudar as características das pirâmides. Essa atividade é bem complexa do ponto de vista das faces laterais, pois dependendo dos dados que sejam fornecidos, será necessário da aplicação do conhecido teorema de Pitágoras.

As questões são as mesmas, primeiramente queremos a área da base, nesse ponto não houve discussão, como anteriormente, pois a pirâmide possui apenas uma base. Em segundo lugar, queríamos a área lateral e, por último, queríamos o volume.

Obtivemos o cálculo da área das bases das duas figuras com certa tranquilidade pelo fato dos alunos já se apropriarem desse cálculo. Os alunos demonstraram familiaridade com a técnica e conseguiram rapidamente encontrar esses valores.

Figura 34: Resposta Atividade 7 A3.



* Quanto é a área da base de cada figura e como calcular?

Figura 1:

$3 \times 3 = 9$

Figura 2:

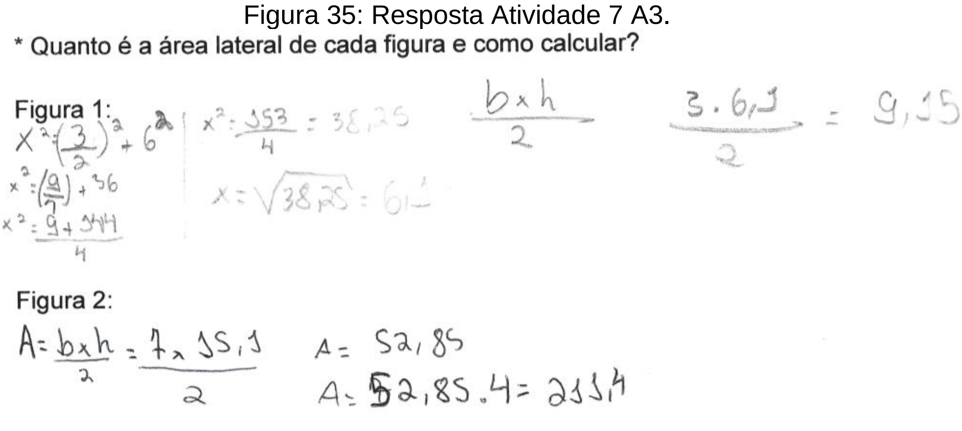
$7 \times 7 = 49$

Fonte: Autores (2022).

A próxima questão fez com que os alunos tivessem muitas dificuldades, pois, apesar de observarem as construções no aplicativo, mesmo assim não tinham percepções de como encontrar os dados que precisam para calcular a área das faces laterais.

Dessa forma, houve muitas intervenções do professor para que alunos obtivessem a visualização e os dados de que precisavam. Os alunos não lembravam a equação do teorema de Pitágoras, não sabiam como utilizar cada termo e quais medidas da figura poderiam servir para o cálculo do apótema.

Figura 35: Resposta Atividade 7 A3.



* Quanto é a área lateral de cada figura e como calcular?

Figura 1:

$x^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6^2$

$x^2 = \left(\frac{9}{4}\right) + 36$

$x^2 = \frac{9 + 144}{4}$

$x^2 = \frac{153}{4} = 38,25$

$x = \sqrt{38,25} = 6,1$

$\frac{b \times h}{2}$

$\frac{3 \cdot 6,1}{2} = 9,15$

Figura 2:

$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{7 \times 15,1}{2}$

$A = 52,85$

$A = 52,85 \cdot 4 = 211,4$

Fonte: Autores (2022).

Após as intervenções, os alunos demonstraram dificuldades nos tratamentos desses cálculos, em virtude de desconhecimento ou não lembrarem das propriedades de potenciação, radiciação e operações com frações.

A última questão da atividade também proporcionou algumas dificuldades nos alunos. A figura 1 já informava sobre a altura relativa à pirâmide, entretanto a figura 2 informava o comprimento da aresta da face lateral, mas muitos alunos utilizaram esse comprimento como comprimento da altura por terem usado assim na figura 1.

Figura 36: Resposta Atividade 7 A1.

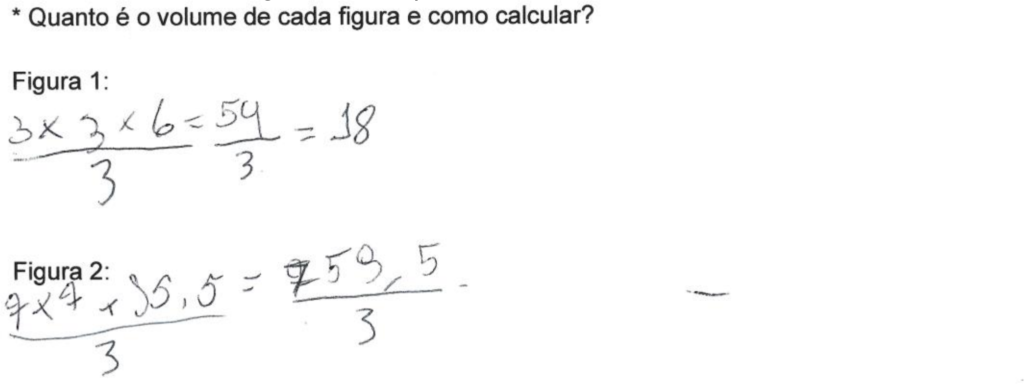

* Quanto é o volume de cada figura e como calcular?

Figura 1:

$\frac{3\times 3\times 6}{3} = \frac{54}{3} = 18$

Figura 2:

$\frac{7\times 4\times 35,5}{3} = \frac{\cancel{7}59,5}{3}$

Fonte: Autores (2022).

O aluno teve uma conclusão equivocada baseada na figura 1, entretanto, importante salientar para o questionamento que se pode fazer para o aluno sobre os dados convertidos das figuras para posteriormente tratá-los afim de se obter o volume da figura. Dessa forma, podemos provocar reflexões positivas nos alunos sobre seus erros.

Para a atividade 8, trabalhamos também com pirâmide, uma parte muito importante para o ensino de poliedros. Mas dessa vez, utilizamos o tronco de pirâmide para fazermos os estudos de área da base, área das faces laterais e volume.

Por se tratar de um tronco de pirâmide de base quadrada, os alunos obtiveram novamente as respostas para essa questão com facilidade, apresentando boa observação do polígono que forma a base.

Figura 37: Resposta Atividade 8 A1.

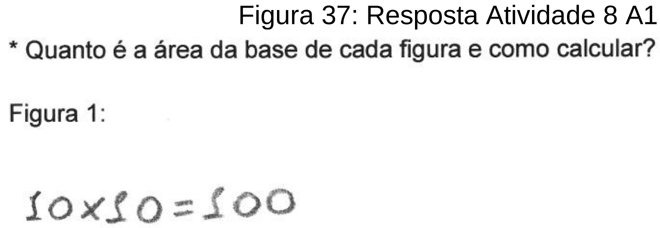

* Quanto é a área da base de cada figura e como calcular?

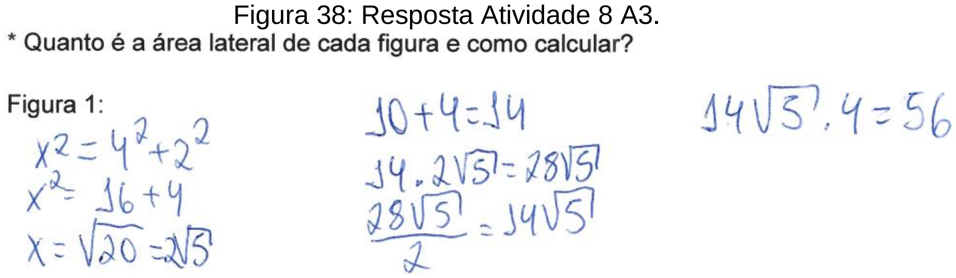
Figura 1:

$10\times 10 = 100$

Fonte: Autores (2022).

A próxima questão da atividade gerou muita dificuldade em virtude dos alunos tendenciarem a usar a altura relativa à pirâmide para calcular a área das faces laterais. Assim, alguns alunos obtiveram respostas equivocadas. E, após intervenções, os alunos conseguiram usar o teorema de Pitágoras para calcular a altura relativa ao trapézio.

Figura 38: Resposta Atividade 8 A3.



* Quanto é a área lateral de cada figura e como calcular?

Figura 1:

$x^2 = 4^2 + 2^2$
$x^2 = 16 + 4$
$x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$10 + 4 = 14$
$14 \cdot 2\sqrt{5} = 28\sqrt{5}$
$\frac{28\sqrt{5}}{2} = 14\sqrt{5}$

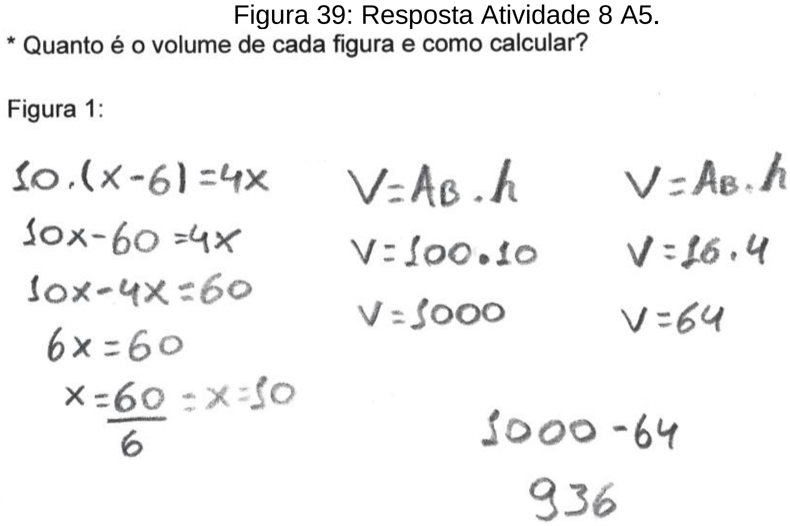
$14\sqrt{5} \cdot 4 = 56$

Fonte: Autores (2022).

A última questão dessa atividade também teve muita dificuldade encontrada pelos alunos. Uma forma para calcular o volume da figura seria utilizar proporcionalidade para encontrar a pirâmide que forma o tronco e dessa forma, calcular o volume como sendo a diferença de dois volumes.

Depois dessa intervenção, os alunos entenderam a proposta, mas ainda assim, tiveram muita dificuldade entre o que é proposto e a execução. Intervendo novamente, os alunos conseguiram realizar a tarefa. Outra conclusão precipitada dos alunos está em relação ao cálculo de volume de pirâmide, alguns alunos insistiram em não fazer a divisão por 3 do produto da área da base pela altura.

Figura 39: Resposta Atividade 8 A5.



* Quanto é o volume de cada figura e como calcular?

Figura 1:

$10 \cdot (x - 6) = 4x$
$10x - 60 = 4x$
$10x - 4x = 60$
$6x = 60$
$x = \frac{60}{6} \therefore x = 10$

$V = A_B \cdot h$
$V = 100 \cdot 10$
$V = 1000$

$V = A_B \cdot h$
$V = 16 \cdot 4$
$V = 64$

$1000 - 64$
936

Fonte: Autores (2022).

Após intervenção do professor sobre isso, os alunos observaram a existência dessa parte do cálculo de volume. E assim fizeram, obtendo a resposta correta.

A atividade 9 gerou muitas dúvidas em relação ao referencial de faces do poliedro para o cálculo de área lateral e para o cálculo de volume, pois existe uma fórmula para o cálculo direto desse valor.

Figura 40: Resposta Atividade 9 A2.

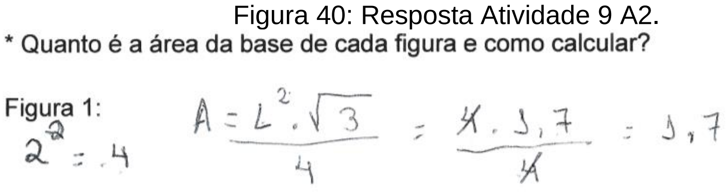

* Quanto é a área da base de cada figura e como calcular?

Figura 1:

$2^2 = 4$

$A = \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\cancel{4} \cdot 1,7}{\cancel{4}} = 1,7$

Fonte: Autores (2022).

Usando a fórmula para o cálculo de área de triângulo equilátero, um dos alunos questionou como era a fórmula, pois ele lembrava que havia uma atividade (se referindo a atividade 6) que nós usamos, mas não lembrava como era.

Como já mencionado, os alunos tiveram dificuldade na questão sobre a área da superfície, chamada na questão de área lateral. Alguns repetiram os cálculos do produto da face pela quantidade de lados, pois havia a dúvida qual quantidade usar.

Figura 41: Resposta Atividade 9 A3.

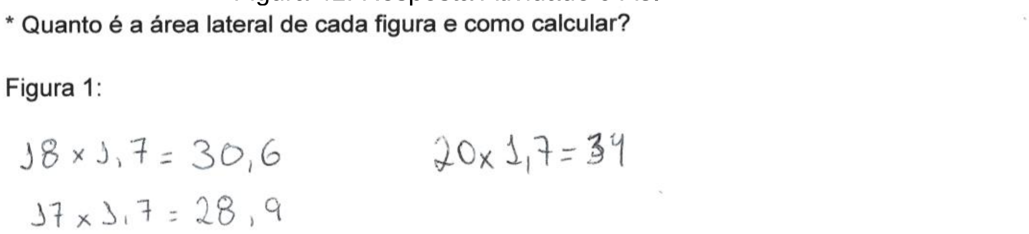

* Quanto é a área lateral de cada figura e como calcular?

Figura 1:

$18 \times 1,7 = 30,6$ $\quad$ $20 \times 1,7 = 34$

$17 \times 1,7 = 28,9$

Fonte: Autores (2022).

Para o cálculo do volume, há uma intervenção para a fórmula de cálculo de volume do icosaedro. Dessa forma, ao tomarem conhecimento da fórmula, os alunos obtiveram o valor do volume.

Figura 42: Resposta Atividade 9 A4.

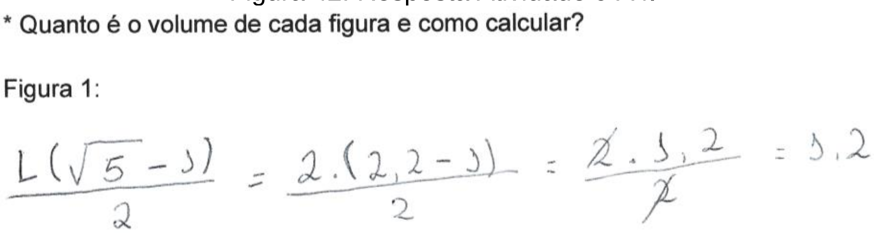

* Quanto é o volume de cada figura e como calcular?

Figura 1:

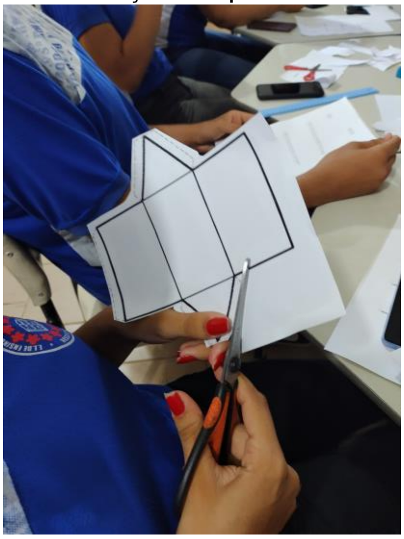
$\frac{L(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{2 \cdot (2,2-1)}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot 1,2}{\cancel{2}} = 1,2$

Fonte: Autores (2022).

Para a última atividade, o objetivo era o inverso, partirmos de materiais manipulados e depois construí-los no aplicativo e aplicarmos os conhecimentos construídos nas atividades anteriores.

Os alunos puderam ter contato com a formação dos poliedros, manipular os objetos em suas mãos e também observá-los do ponto de vista físico e gráfico. Assim, os alunos tiveram contato com os objetos em registros diferentes, além dos quais havíamos trabalhados nas atividades anteriores.

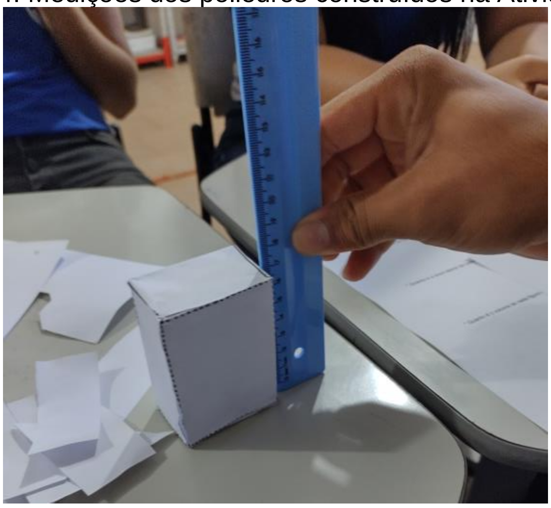
Figura 43: Construção dos poliedros Atividade 10.



Fonte: Autores (2022).

O processo de conversão dos dados se deu através do uso de réguas para medir os comprimentos desejados dos sólidos e tratamento dos dados para cálculo de área e volume.

Figura 44: Medições dos poliedros construídos na Atividade 10.



Fonte: Autores (2022).

Os alunos demonstraram, em alguns momentos com certa dificuldade, ter domínio das técnicas de construção no aplicativo, demonstrando a instrumentalização sobre o aplicativo e, também, das fórmulas para cálculo de área e volume dos poliedros.

A seguir a resposta das atividades de dois alunos, para exemplificar. Um dos alunos com uma figura do cubo e o outro aluno com a figura do tronco de pirâmide. Os alunos foram orientados a usarem aproximações inteiras dos valores encontrados para os comprimentos.

Figura 45: Resposta Atividade 10 A2.

QUESTÕES

Medidas:

4.5cm

* Quanto é a área da base de cada figura e como calcular?

$4,5 \times 4,5 \times 2 = 40,5^2$

* Quanto é a área lateral de cada figura e como calcular?

$4,5 \times 4,5 \times 4 = 81^2$

* Quanto é o volume de cada figura e como calcular?

$4,5 \times 4,5 \times 4,5 = 91,125^3$

Fonte: Autores (2022).

Figura 46: Resposta Atividade 10 A4.

QUESTÕES

Medidas:

Base $\rightarrow$ inferior = 6 cm

Altura = 9 cm

Base superior = 2 cm

*** Quanto é a área da base de cada figura e como calcular?**

$$6^2 + 2^2 = \underbrace{36 + 4}_{40} = \cancel{144}$$

*** Quanto é a área lateral de cada figura e como calcular?**

$\rightarrow$ Quantidade de lados

$$A = \frac{(2+6)\cdot 9}{2} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cdot 9}{\cancel{2}} = 4 \cdot 9 = 36 \cdot 4 = 144$$

*** Quanto é o volume de cada figura e como calcular?**

$$V = \frac{1}{3} \cdot 9\,(6 + \sqrt{3,5} + 2)$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 11,5$$

$$V = 3 \cdot 11,5$$

$$V = 34,5$$

Fonte: Autores (2022).

Observamos que a metodologia em que o conteúdo trabalhado trouxe para os alunos uma nova percepção da escola e do ensino. Em alguns momentos, alguns alunos chegaram a comentar sobre todas as disciplinas não terem aulas dessa forma.

Vemos que muito mais do que a forma em que o objeto de estudo é apresentado, se trata da maneira como os alunos recebem a proposta metodológica. O professor pode garantir uma excelente explanação expositiva de um conteúdo, um bom desenho dos sólidos no quadro, mas acreditamos que essa possibilidade de visualização dos poliedros, que traz a possibilidade de manipular, converter e tratar os dados, possibilita um estudo muito mais significativo. Pois,

> Nesse sentido, na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade. Por esse motivo, espera-se que os estudantes conheçam diversos registros de representação e possam mobilizá-los para modelar situações diversas por meio da linguagem específica da matemática – verificando que os recursos dessa linguagem são mais apropriados e seguros na busca de soluções e respostas – e, ao mesmo tempo, promover o desenvolvimento de seu próprio raciocínio. (BRASIL, 2018, p. 529).

As atividades propostas pela sequência buscam tornar o conhecimento de poliedros efetivo, mas trazendo objetos facilitadores desse contexto. A aplicação, embora desconhecida inicialmente, proporcionou a visualização inequívoca dos sólidos. Além disso, alguns padrões repetidos fazem com que haja um ambiente habitual para manipulação dos registros.

5. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para as atividades propostas, foram coletados dados dos sujeitos para que pudéssemos fazer análise do desenvolvimento da sequência didática. A coleta foi feita por meio de dados impressos e por registros de gravação de voz transcritos.

Os alunos receberam fichas das atividades que posteriormente foram recolhidas para análises. As fichas foram analisadas conforme a análise da semiótica de Duval. Já os registros de voz foram transcritos e analisados conforme a análise microgenética.

Essa análise, como mencionado anteriormente, busca indícios de aprendizagem através da descrição minuciosa dos dados de voz que foram coletados. Buscando não só a interação entre os alunos e o professor, mas também, entre eles mesmos. Pois, um papel muito importante é a familiaridade entre eles que facilitou o processo de aprendizagem.

A atividade número 1 buscava que os alunos pudessem diferenciar a o poliedro de um corpo redondo. Que os alunos conseguissem perceber características que não são comuns a ambos os sólidos apresentados na atividade.

Muito embora os alunos conseguiram construir os sólidos utilizando o GeoGebra, eles tiveram certas dificuldades em se familiarizar com a aplicação e suas possibilidades de construção. Os alunos foram chamados de Aluno 1, Aluno 2, Aluno 3, Aluno 4 e Aluno 5. O pesquisador que aplicou a sequência didática foi chamado de Professor.

Quadro 1: Diálogo 1

Aluno 1: Ei professor, aqui não tem o paralelepípedo aqui *Aluno 5: Tem que pegar o quadrado e diminuir.* *Aluno 2: Dá pra fazer pelo cubo também?* *Professor: É quadrado mesmo?* *Aluno 5: Por causa que tipo num tem esse daqui, entendeu?* *Professor: Não, sim, claro.* *Aluno 3: Não é quadrado* *Aluno 5: Pois é, como não tem um paralelepípedo, é tipo, a gente poderia pegar o quadrado, tipo, fazer igual como a gente fez aqui, afinar ele e.* *Aluno 3: Não, tu vai fazer, tipo, pegar aqui um retângulo, aí tu vai tu fazer isso, entendeu? Porque não tem como você fazer quadrado. Aqui, ó* *Professor: Não, mas aí.* *Aluno 3: Não, não é quadrado.* *Aluno 5: É o cubo rapaz.*

Observem que no diálogo anterior, os alunos demonstram desconhecer a aplicação que estão utilizando e, principalmente, algumas definições como retângulo, quadrado que dificulta o uso do GeoGebra, pois ao buscar construir um quadrado querendo obter um retângulo podem ter confusões ou frustrações no seu uso.

Esse processo de instrumentalização reforça a capacidade de criação de esquemas capazes de manusear o aplicativo com o objetivo aos quais as atividades se propuseram. Nesse contexto, é claro que o objetivo é o seu uso para o aprendizado sobre poliedros e não sobre as ferramentas do software (RABARDEL, 1995).

Assim, após serem feitas muitas intervenções para o uso do aplicativo, os alunos conseguiram fazer suas construções e buscamos resolver as atividades, pois o foco da utilização da ferramenta digital não era ter o seu domínio, mas sim utilizá-la para obter o conhecimento sobre poliedros.

Quadro 2: Diálogo 2

Aluno 5: Mas agora que eu entendi comé que usa isso. *Professor: Ah tá entendendo como usar a ferramenta?* *Aluno 5: Sim, isso, isso.*

Dessa forma, ao respondermos as questões dessa atividade, tivemos muitos diálogos. Primeiramente, entre o Professor e os alunos, pois eles não sabiam quais características deveriam observar das figuras que eles construíram e planificaram.

Quadro 3: Diálogo 3

Aluno 1: Quando ele abre né? tem que dizer a base, essas coisas? *Professor: Não, não necessariamente não a ideia não é essa, é vocês analisarem as características, por exemplo, o que é que caracteriza uma... um sólido geométrico, né? Quantidade de faces, quais são os tipos de faces que formam esse... esse... essas faces, entendeu?*

Essas instigações feitas aos alunos provocaram suas análises e trouxeram resultados importantes, pois os alunos conseguiram perceber através das suas próprias observações e com direcionamento do professor as características importantes que diferenciavam as figuras.

Quadro 4: Diálogo 4

Aluno 5: A figura dois tem vértice... *Professor: Tem?* *Aluno 5: Não, não tem. Hum...*

Professor: Pois é *Aluno 5: No caso aqui a figura um tem aresta, não sei falar o nome, tem vértice, e a figura dois não tem* *Professor: Viu? Égua. Isso daí é uma característica de. Isso é uma característica de semelhança ou de diferença?* *Aluno 5: A figura um tem aresta e vértice.* *Professor: Isso.* *Aluno 5: E a figura dois não tem.*

Em segundo lugar, diálogos entre os próprios sujeitos, pois essas observações faziam com que fossem geradas muitas discussões entre eles. Esse tipo de discussão é favorável ao aprendizado, pois possibilita engajamento na solução das atividades, nas respostas propostas. Os alunos se sentiram desafiados de maneira que pudessem vencer esses desafios.

Quadro 5: Diálogo 5

Aluno 5: É, porque tem os pontos de encontro. Eu pensei que isso, esse vértice, aresta. Eu pensei que isso daqui era o mesmo nome, pensei que ia valer por causa da mesma linha. *Aluno 3: Mas não tem, né?* *Aluno 5: Sim, não tem aresta.* *Aluno 3: Tem aresta.* *Aluno 5: Não tem aresta.* *Aluno 3: Não. O que é isso aqui ó.* *Aluno 2: Não, é.* *Aluno 5: A aresta é a linha, né?* *Aluno 3: É a linha.* *Aluno 5: Pois é, mas eu pensei. Pois é, mas não tem um ponto de encontro, se não tem o ponto de encontro, não tem aresta, né isso professor?*

Os alunos conseguiram observar diferenciações nas construções dos sólidos, entretanto, ainda há confusões entre as formalizações de arestas e vértices, pois ao mencionar que não tem ponto de encontro, o aluno se refere ao vértice, porém o chama de aresta.

A atividade dois da sequência teve aprimoramento do uso do aplicativo pelos alunos, o que possibilitou rapidez nas construções, se comparado ao da atividade anterior. Os alunos demonstraram, também, gostar muito da forma como o objeto do conhecimento estava sendo estudado.

Quadro 6: Diálogo 6

Aluno 3: Porque matemática não é só isso? ia ser tão fácil.

Apesar dessas condições favoráveis, alguns alunos demostraram desconhecimento das definições de arestas e vértices, pois eram formalizações cruciais para o êxito da realização da atividade.

Quadro 7: Diálogo 7

Aluno 3: E o ponto é aonde? Esqueci. *Professor: Não, o ponto é o vértice e essas linhas...* *Aluno 4: É a aresta.* *Professor: É aresta. Tá?* *...* *Aluno 2: Aresta é a linha?* *Professor: Isso.* *Aluno 2: vértice é?* *Professor: Vértice é o que, pessoal?* *Turma: Ponto.*

A socialização dos alunos foi muito importante para que os alunos pudessem fazer suas resoluções das atividades. As falas entre eles mostram que não há barreiras entre os alunos que sabem mais e os que sabem menos, todos estavam em cooperação, discutindo e aprendendo.

Quadro 8: Diálogo 8

Aluno 2: Na planificação não dá pra contar. *Aluno 4: Face dá, mas não dá vértice e a...* *Aluno 5: Eu tava tentando mas não dá não.*

A próxima atividade buscava distinguir a convexidade entre os poliedros, entretanto ao iniciar as questões, os alunos compreenderam que a não convexidade do poliedro da figura dois, não faria dele um poliedro. Eles conseguiram observar que na figura dois da atividade haviam alguns planos que cortava o sólido deixando parte do mesmo em um semiespaço e outra parte em outro semiespaço.

Quadro 9: Diálogo 9

Professor: O que tá acontecendo com esse plano? *Aluno 3: Passando por dentro do pódio.* *...* *Aluno 4: ultrapassando a figura.*

Professor: Está ultrapassando é? É e está cortando a figura né? Isso. Aí quando a gente traçou os planos nessa primeira figura aqui teve algum plano que cortou a figura? Que atravessou? *Turma: Não!*

Nesse próximo diálogo, os alunos são questionados sobre o poliedro não convexo ser, de fato, um poliedro, em virtude de o professor visualizar as respostas de alguns alunos.

Quadro 10: Diálogo 10

Professor: Aí tipo assim, isso faz com que esse aqui não seja um poliedro faz? Vocês acham que faz? *Aluno 3: Acho que faz.*

Esse trecho iniciou um diálogo sobre o que faz a figura dois ser ou não um poliedro na visão dos sujeitos. Dessa forma, socializamos as discussões entre eles buscando diferenciar os poliedros de corpos redondos. Tomamos como exemplo uma das atividades anteriores, através do processo de imaginar o lançamento dessas figuras ao chão e refletir, qual delas rolava ou não.

Quadro 11: Diálogo 11

Professor: o que é o poliedro? Vamos tentar entender aqui o que é um poliedro. Lembra ontem que que eu dei um exemplo, né? Se eu pegasse, por exemplo, aí olha só, lembra que eu dei uma ideia pra vocês? Se eu pegasse uma lata, né? Lembra aquela lata da batata? Se eu pegasse e jogasse ela no chão. Ela rolava, não rolava? *Turma: Sim!* *Professor: Agora se eu fizesse isso com a caixa de sabão aconteceria, ela ia sair rolando?* *Aluno 2: Não.* *Professor: Aí por que que isso tá acontecendo? Qual a diferença delas dois? Que que a gente pode concluir nessa diferença? Por que que uma tá rolando e a outra não?* *Aluno 5: Tem um círculo, né?* *Professor: O círculo ele faz com que uma seja um formato arredondado, né? E a outra não. Aí eu pergunto pra vocês, aquela caixa de sabão ela tinha vértices e arestas e faces?* *Turma: Tinha.* *Professor: e a caixa do da batata, a embalagem da batata ela tinha vértices, arestas e faces?* *Turma: Não.* *Professor: Aí eu pergunto pra vocês, agora bora olhar essa outra figura aqui ó, essa figura aqui que representa a caixa do panetone, ela tem vértices, arestas e faces?* *Aluno 4: Tem.*

Aluno 3: Tem. *Professor: Tem, tem. Essa outra aqui que representa o pódio, ela tem vértices, arestas e faces?* *Aluno 2: Tem.* *Aluno 5: Não tem.* *Professor: Tem também, né? Aí olha só, deixa eu falar uma coisa pra vocês, aquela embalagem da batata ela é poliedro?* *Aluno 3: Não* *Professor: Porque?* *Aluno 5: Porque ela não tem vértices e nem arestas.* *Professor: Essas daqui da atividade, elas são?* *Aluno 4: São.* *Aluno 5: São, professor!*

Outro ponto importante nas análises de micro gênese, são as formalizações de determinados conceitos que os alunos criam com base, por exemplo, nas características que eles observam das figuras e das construções. Nesses diálogos, os alunos tomaram como definição de poliedro o fato de o sólido possuir vértices, arestas e faces.

Vale a pena destacar, além disso, que os alunos já observam na última questão dessa atividade a correspondência da Relação de Euler, apesar de serem apenas com dois sólidos, houve alguns comentários acerca dessa observação entre a igualdade das somas dos vértices com as faces e da quantidade de arestas mais dois.

Quadro 12: Diálogo 12

Professor: E as arestas são o quê? *Aluno 1: São as linhas.* *Professor: São as linhas, tá? Aí vocês vão contar quantas faces tem na figura um, quantas arestas, quantos vértices? Aí bem aqui tá escrito vértices mais faces. Aí vocês vão olhar aqui. Espera aí. Vértices está aqui, faces está aqui. Aí que soma. Vértices mais faces da conta. Coloca um número. Aí a aresta está bem aqui. Aí soma dois, duas unidades. Então por exemplo, ah! Tem quatro arestas mais dois?* *Aluno 1: Seis.* *Professor: Seis. Aí tu coloca bem aqui. Verifica aí pra cada figura, tá?* *Aluno 2: dezoito?* *Aluno 1: Em cima são poliedros.* *Aluno 4: ah tem que dar o mesmo resultado eu já vi isso aqui. Aí tem até uma igualdade aqui, né?* *Professor: Isso.* *Aluno 4: E tem que dá o mesmo resultado que o outro.*

A próxima atividade foi trabalhosa em seu processo de construção no GeoGebra para algumas formas geométricas. Inicialmente, os primeiros sólidos foram construções fáceis, mas os últimos sólidos tiveram algumas dificuldades encontradas pelos alunos que foram ajudadas pelo professor.

A atividade não foi difícil para os sujeitos, eles conseguiram fazer a contagem dos dados solicitados, em alguns casos com certa facilidade e outros nem tanto, e correlacionar com objetos do seu cotidiano.

Quadro 13: Diálogo 13

Aluno 1: Agora pro cara achar alguma coisa que é igual isso aqui mano. Entendeu? *Aluno 4: Igual bola de futebol.* *Aluno 2: Mas a bola é arredondada, né?* *Aluno 4: É, mas se assemelha?* *Aluno 3: Se assemelha?* *Aluno 4: É, se assemelha.*

O ponto importante dessa observação é quando os alunos demonstram formalizar a relação entre as somas que existem na Relação de Euler. Os alunos se admiram e passam a confirmar os dados convertidos nas suas construções com os resultados tratados na tabela da atividade.

Quadro 14: Diálogo 14

Aluno 2: Oxe. Aí aquela pegadinha. Hein? *Professor: Isso é mágica, é diferente. (risadas)* *Aluno 2: Pra ver se dá o mesmo resultado aqui aí pra ver se tá certo. Tá doido...*

A próxima atividade que foi aplicada aos alunos expande essa ideia com uso de seis poliedros com a mesma característica afim de aprimorar as contagens de arestas, vértices e faces, e formalizar a Relação de Euler introduzida na atividade anterior.

Quadro 15: Diálogo 15

Aluno 5: Esse valor seria o mesmo desse? A soma desse valor o mesmo dessa soma aqui? *Aluno 4: É!* *Aluno 5: Mas aqui não dá. Quatro com quatro dá oito, não é a mesma soma desse né?* *Aluno 4: Não, acho que não.* *Aluno 5: Pois é, eu pensei assim também. Mas tipo, olha, se tu for fazer nessa aqui, ó, quatro com quatro dá oito.* *Aluno 4: Acho que tá errado aí.* *Aluno 1: Trinta bem aqui, ó! depois trinta e dois.* *Aluno 2: Com esse aqui dá trinta, né?* *Aluno 1: Te falei? Vai ser sempre essa aqui com a diferença de dois.*

A afinidade dos alunos permite que eles socializem e discutam as respostas e as suas observações sem inibições, pois o diálogo anterior ocorre somente entre os alunos e sem intervenção do professor. Ademais, a segunda questão da atividade era pessoal, dessa forma, uma resposta nos chamou a atenção pelo fato do aluno observar o sólido geométrico no seu dia-a-dia.

Quadro 16: Diálogo 16

Aluno 2: Posso colocar a balança? Pode ser a balança aqui?
Professor: Ahm? Sim.
Aluno 2: A balança, a parte que tem abaixo dos pratos.
Professor: Sim!
Aluno 2: Eu trabalho com o meu pai na feira e a parte debaixo da balança tem esse formato.

O aluno se referia ao tronco de pirâmide e colocou uma parte de um objeto que faz parte da sua realidade. A matemática se apresenta nas formas, na arquitetura, dentre outras áreas e muitas vezes pode passar despercebida pelos olhos de quem não associa a sua existência a realidade.

O acesso semiótico e a associação entre o objeto e sua representação podem gerar esse comportamento em que os alunos só conseguem analisar e enxergar a matemática dentro do ambiente escolar, como se os seus objetos de estudo não possuíssem conexões com o mundo externo a sala de aula (DUVAL, 2010).

As próximas atividades abordam sobre área e volume de poliedros. Para iniciarmos sobre esse estudo, colocamos para os alunos dois tipos de prismas, um com base retangular e um cubo. Buscamos relembrar o cálculo de área de figuras planas e de volume com figuras mais fáceis.

Inicialmente, fizemos uma convenção para o cálculo da área da base, quando se pergunta a área da base, os alunos devem contar a área de todas as bases que os poliedros tiverem.

Quadro 17: Diálogo 17

Professor: porque tem figuras, né? Que possuem duas bases e tem figura que possui só uma base. Por exemplo, a pirâmide ela possui quantas bases?
Aluno 5: Uma!
Professor: Uma só, né? Porque depois vai afunilando, vira só um vértice, né? Mas por exemplo, essa figura aqui ela se assemelha a um paralelepípedo, né? Também chamado, prisma, de base retangular, entendeu? Mas ela vai afunilando?
Aluno 1: Não!

Professor: Então, ela possui quantas bases?
Aluno 2: Duas.
Professor: Então, quando ele fala de cálculo de base, que que a gente tem que calcular. É? Ahm? É a área da base, né? Mas aí eu vou calcular só de uma?
Aluno 2: Das duas.

Ainda tivemos um diálogo em que os próprios alunos conduziram as indagações de um dos colegas. O aluno queria que indicassem para ele qual a base que estávamos nos referindo, pois ele ainda não havia compreendido. Questionamos sobre as faces laterais serem chamadas de base, obtendo como resposta não.

Quadro 18: Diálogo 18

Aluno 3: Professor, esse lado aqui é base?
Professor: Não, olha só pessoal.
Aluno 2: É o de baixo.
Aluno 3: Só tem esse? só essa?
Aluno 4: Não. São duas bases.
Professor: É, são duas bases, né pessoal? E aí vai ser essa daqui de baixo aqui, né? E a outra vai ser qual?
Aluno 4: Tipo a tampa.
Professor: Essa daqui, né? Essa daqui é base?
Aluno 4: Não!

Para a primeira questão, em que solicitamos os cálculos dos alunos das áreas das bases, obtivemos algumas dificuldades, pois a maioria não lembrava como se calculava área de figuras planas com aqueles formatos retangulares e quadrangulares.

Quadro 19: Diálogo 19

Professor: a gente vai ter que calcular a área da base da figura, tá? Então a gente, qual essa figura que formou aqui?
Aluno 3: Não sei, professor!
Aluno 4: Não é triângulo, é aquele outro...
Aluno 1: Retângulo?
Professor: Isso. Como calcula a área de retângulo?
Aluno 2: base vezes a altura?

Também questionamos aos alunos se o cálculo da outra base seria diferente, um dos alunos respondeu que não e explicou à sua maneira de encontrar esse valor, ao que todos os alunos também observaram dessa mesma maneira.

Quadro 20: Diálogo 20

Aluno 2: A base vezes a altura e eu multipliquei por 2.

Após essas dúvidas e equívocos serem corrigidos, os alunos obtiveram tratamentos corretos dessa questão. Além dessa, a próxima questão também teve alguns pontos que precisaram de intervenção do professor mas que foram acertadas pelos alunos.

Quadro 21: Diálogo 21

Professor: que é a lateral ela é formada por quantos polígonos entendeu? Tem que observar aqui ó que ele que é da lateral entendeu? Aí tu tem que observar quantos que formam a lateral pra escolher calcular *Aluno 2: Dois.* *Professor: É, mas aí ele quer a lateral como um todo, entendeu? Então, tipo assim, também tem a parte da frente e a parte de trás, né? Porque assim, se eu pegar essa caixa e virar assim, esse daqui, o de trás, passam a ser laterais, entendeu? Então, tipo assim, a lateral é o todo em volta, entendeu? Então, por exemplo, tu tem dois aqui, tu tem os dois.*

O cálculo de volume pedido na última questão gerou nos alunos muitas dúvidas, em relação ao desconhecimento do cálculo, depois como tratar esse cálculo etc. Um dos alunos teve muitas dificuldades, sendo necessária muitas intervenções para que ele conseguisse o êxito da questão.

Quadro 22: Diálogo 22

Aluno 5: me explica o que é volume. *Professor: Volume é quando você preenche um determinado espaço. Aí por exemplo, tu tens um espaço aqui de base dezoito por cinco, aí tu vai preencher ele com vinte centímetros de altura. Certo. Então calcular o volume dessa figura seria fazer uma operação entre esses três valores.* *Aluno 3: Então multiplica dezoito vezes vinte.* *Professor: Não, não é só dezoito vezes vinte. Tem dois valores só, porque olha, se tu pegar dezoito vezes vinte, tu tá calculando uma área, tá calculando uma área de dezoito por vinte, só que eu não quero a área, eu tô querendo o volume. Então, por exemplo, eu primeiro preciso calcular quanto que ela ocupa de espaço de área e depois de altura* *Aluno 5: De área ela ocupa dezoito centímetros.* *Professor: Não, ela é ocupa de comprimento.* *Aluno 3: Tá aqui a resposta.* *Professor: Isso.* *Aluno 5: No caso de área, ela ocupa cento e oitenta centímetros. De área é só a de baixo* *Professor: A área lembra? A gente calculou a área na primeira questão* *Aluno 5: professor como a gente calcula área dessas duas bases daqui ó foi dezoito... cadê?*

Aluno 3: Só de uma só de área de baixo deu noventa porque a gente calculou com a de cima. *Aluno 5: Foi as duas aí.* *Professor: Pois é, quando tu calcular a área de baixo, tu tá calculando apenas a área que elas ocuparam. Sim. Agora eu preciso calcular o volume, entendeu? Pois é. O volume. Seria um se eu pegasse essa figura* *Professor: e subisse ela. Lembra quando eu peguei no aplicativo? Agora agora eu estou eh é como se eu empilhasse várias dessa aqui oh aqui em cima. Aí ele vai vai subindo, vai subindo, vai subindo até a altura vinte centímetros.* *Aluno 5: Uhum.* *Professor: e aí comé que eu calculo o volume disso? Eu vou pegar a área foi o valor que eu encontrei de área pra essa* *Aluno 5: Que é a área foi cento e oitenta.* *Professor: só essa base inferior e vou precisar fazer uma operação com a altura, por quê? Ela subiu vinte centímetros* *Aluno 5: No caso vai ser assim: cento e oitenta com a altura?* *Professor: É, aí o que que eu faço com a altura?* *Aluno 5: Multiplico.* *Professor: Exatamente.* *Aluno 5: Caraca, tava tão na cara.*

Observe que apesar do aluno demonstrar saber que precisa multiplicar os valores área da base e altura, nesse momento o cálculo de área das duas bases gerou uma confusão não percebida pelo professor no momento do diálogo. O aluno se refere a área da base como 180 cm², entretanto, esse é o valor das duas bases, portanto, a área da base dessa figura seria 90 cm².

Quadro 23: Diálogo 23

Aluno 2: Então noventa vezes vinte *Aluno 5: Isso que dá o que vai dar o resultado final. Isso, aí é o valor daqui, aí já põe aqui e é o meu aqui.* *Aluno 5: aí a gente já deixa já, já escreve aqui, aí já fica já o tipo a explicação, né?* *Professor: Isso.* *Aluno 5: Por causa desses detalhes* *Aluno 3: Mil e novecentos.* *Aluno 2: Mil e oitocentos.* *Aluno 5: Novecentos.* *Aluno 3: Oitocentos.* *Aluno 5: Novecentos.* *Aluno 3: Oitocentos.* *Aluno 5: Isso. Quanto é duas vezes noventa, professor?* *Professor: Hum?* *Aluno 3: Noventa vezes vinte.* *Aluno 5: Mil e oitocentos.*

É observado que os alunos possuem dificuldades em alguns tratamentos mais elaborados, como algumas fórmulas que parecem ser desconhecidas por eles, a exemplo da área de triângulo equilátero. Entretanto, a dificuldade acima se deu pela conversão feita dos dados observados nas figuras e aqueles cujos seriam utilizados para encontrar o valor procurado. Dessa forma,

> É por meio do estudo sistemático da passagem de um registro para outro que se apresenta a possibilidade de perceber a importância da forma das representações e da identificação daquelas que são pertinentes. É na descoberta de um campo de variações cognitivas que se compreende o funcionamento representacional de um registro, e não na aplicação correta das regras de formação de representação dentro de um registro. (Almoloud, 2007, p. 76)

O aluno 2 corrigiu de maneira natural o valor da área da base que deveria ser utilizada e os alunos conseguiram obter os valores corretos do volume das figuras, demonstrando indícios de aprendizagem sobre volume de prismas com esses diálogos.

As próximas atividades possuem muitas intervenções do professor, por lacunas educacionais que os alunos trazem de suas formações. A atividade a seguir temos o cálculo de área das bases, lateral e volume de prismas de base não quadrangular. Vimos que os alunos tem dificuldade ao relembrar dos cálculos de área de triângulo equilátero e hexágono ou não estudaram tais objetos de estudo.

Quadro 24: Diálogo 24

Aluno 1: Professor, eu não sei usar a conta aqui pra saber a área. *Professor: olha lá olha aí pessoal pra pra calcular a área da da base de uma hexágono, a gente tem que utilizar essa fórmula aqui, tá? Aí essa fórmula ela só vai depender de um valor, qual é o valor? O comprimento do lado, tá? Eu chamei de L bem aqui.*

Essa intervenção aconteceu de maneira semelhante ao cálculo de área da base para o prisma de base triangular, pois ao tentarem calcular esse valor, os alunos perceberam que não tinham a altura da base, dessa maneira, eles buscaram ajuda do professor.

Quadro 25: Diálogo 25

Aluno 1: Não é um prisma isso aqui? *Professor: É um prisma. Só que a gente vai fazer de base.* *Aluno 1: Triangular.* *Professor: Triangular.* *Aluno 1: Égua.*

Professor: Isso. Como calcula a área? *Aluno: Não sei, tá faltando a altura.* *Professor: Sabe calcular área de triângulo equilátero?* *Aluno 1: Não!* *Professor: Alguém sabe?* *...* *Professor: Então vou mostrar pra vocês, é essa fórmula aqui, tá?*

Para a área lateral e para o volume, os alunos demonstraram segurança sobre esses tratamentos, pois as áreas laterais dessas figuras eram formadas por retângulos e o volume era o produto da área da base pela altura.

Quadro 26: Diálogo 26

Aluno 1: A área lateral vai com essa fórmula também? *Professor: Depende. A lateral é formada por hexágonos? É formado pra qual figura?* *Aluno 1: Por retângulo.* *Professor: E como é que a gente vai calcular a área de retângulo?* *Aluno 4: Base vezes altura?* *Professor: Entendeu? É formada por quantos retângulos?* *Aluno 1: Seis*

Quadro 27: Diálogo 27

Professor: Aí comé que calcula o volume? *Aluno 1: A base vezes a...* *Professor: Eh tu vai pegar a área da base. Pela?* *Aluno 1: pelas laterais* *Professor: Como assim as laterais?* *Aluno 1: Essas aqui, eu coloquei três.* *Professor: Esse é o valor que multiplica pela área da base pra descobrir o volume?* *Aluno 1: Esse vinte vírgula quatro?* *Professor: Isso é o que?* *Aluno 1: Ah, é a área da base. Tem que multiplicar por três.* *Professor: Esse vinte vírgula quatro vem do fato de multiplicar por dois, né? As duas bases, só tem que pegar quantas?* *Aluno 1: Uma. E multiplica pela altura? dez vírgula dois vezes três.* *Professor: Isso.*

Interessante destacar as falas em que os alunos demonstram conhecer e aprender o conteúdo, mas vale destacar falas em que os alunos demonstram afeição pela metodologia empregada nessa sequência didática.

Quadro 28: Diálogo 28

*Aluno 3: Tá vendo, ***** (nome de aluno)? É fácil quando a gente entende.*

As atividades 7, 8 e 9 trouxeram muitas dificuldades pelos alunos. Primeiramente, eram figuras incomuns a eles e em, segundo lugar, algumas delas exigiam conhecimentos mais profundos da própria geometria e de outros conteúdos matemáticos.

O aluno deveria usar conhecimentos de proporção para encontrar o valor da altura da pirâmide que estava só o seu tronco na atividade 8 e calcular o volume da pirâmide menos o valor da pirâmide que completava o tronco. Mas o aluno não sabia como encontrar esse valor.

Quadro 29: Diálogo 29

Aluno 5: Professor, como é que eu faço pra saber o restante da altura? *Professor: olha só, vocês já ouviram falar em proporcionalidade?* *Aluno 5: Não!*

Outro momento em que observamos alguma lacuna pedagógica foi quando os alunos estavam fazendo a atividade 7 e precisavam da altura das faces triangulares, pois a questão 2 pedia o valor da área lateral. Dessa maneira, percebemos novamente o desconhecimento do uso do Teorema de Pitágoras.

Quadro 30: Diálogo 30

Professor: Porque olha aí. Tu lembra do Teorema de Pitágoras? *Aluno 3: Só fórmula.* *Aluno 2: Ele vai ser complicado.* *Aluno 3: Vai ser.* *Aluno 2: Olha aí, vai dar a fórmula.*

A atividade final foi iniciada com um clima de descontração entre os alunos. Esse tipo de metodologia usando materiais manipulados não são usuais entre os alunos. Eles mostram muita surpresa ao utilizarem essas metodologias de aprendizagem.

Quadro 31: Diálogo 31

Aluno 1: Agora a gente está fazendo o trabalho de ribeirinho que não tem internet. Tudo na mão.

Ao iniciarem a responderem as questões, os alunos demonstraram, em sua maioria, domínio das técnicas de área e volume, entretanto, algumas figuras ainda estavam com algumas dúvidas em relação a forma de calcularem área de face e/ou volume.

Quadro 32: Diálogo 32

Aluno 2: só a base não não é que você falou é calcular a área dessa desse triângulo aí era base vezes a altura né? *Professor: Não, tá faltando. Depois de fazer base vezes a altura, eu tenho que fazer o que?* *Aluno 5: Ah, divide por 2, né?* *Professor: Isso.* *Aluno 3: Já terminei o meu. Professor, eu já terminei.* *Aluno 5: Assim professor, no caso eu calcular, é a daqui mesmo, né?* *Professor: Sim! Essa. Ela mede quanto por quanto aqui?* *Aluno 4: A parte de baixo. Se eu não me engano é quatro ou cinco.* *Professor: Pois é, porque primeiro tu tem que eh calcular área de retângulo, tem que calcular como?* *Aluno 4: base vezes altura.*

Portanto, ao observarmos os diálogos, percebemos que, apesar de certa insegurança por parte dos alunos em muitos momentos, eles demonstram ter construído muitos conceitos e técnicas da geometria relacionados ao cálculo de área e volume, também, de conceituar características dos poliedros.

Além disso, a sequência didática incentivou os alunos, mostrou a eles uma nova perspectiva de visualização dos objetos, propôs uma novidade do ensino de matemática a eles e desafiou de maneira em que eles puderam se sentir entusiasmado a resolver esses desafios sem que desistissem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa foi elaborada sob uma perspectiva que buscasse um caminho alternativo ao chamado ensino tradicional, ou seja, uma nova de se ensinar o objeto matempatico e o ensino de poliedros na educação básica não é tão simples. Embora haja entusiasmo e muita disposição em buscar melhorar a qualidade da educação através de metodologias diferenciadas, ainda há muita incerteza sobre o método eficaz dessas novas metodologias aplicadas as mais variadas culturas educacionais existentes.

Nesse contexto, a pesquisa em muitos momentos passou por incertezas e reflexões acerca do ensino e aprendizagem de poliedros. Esses momentos serviram de inspiração para buscar contribuir com uma proposta relevante e desafiadora, não só para o pesquisador, mas também para os alunos. Desafio esse que não seja maior que a vontade de construir conhecimento.

O ensino de matemática proposto através do uso de tecnologias se mostrou uma excelente opção, entretanto, ainda existe uma realidade atrasada tecnologicamente no interior das escolas públicas. Esse atraso implica não somente em déficit de educação, de maneira direta, mas, sobretudo, em escassez de formação qualificada dos nossos alunos nas mais variadas áreas do conhecimento.

As produções e as propostas de sequência didáticas de outros pesquisadores ampliam as imaginações e provocam um desejo de fazer inovações no ensino de matemática da educação básica. Adaptar o ensino de poliedros ao uso de uma ferramenta de geometria dinâmica não foi fácil. Mesmo assim, o que observamos foram resultados satisfatórios, inclusive com falas trazendo essa necessidade de mudança por parte dos alunos.

Não obstante a essa realidade, a nossa pergunta de pesquisa foi: uma sequência didática envolvendo objetos do cotidiano potencializa a aprendizagem de poliedros? Dessa forma, essa questão de pesquisa nos estimulou para o objetivo geral de desenvolver e testar uma sequência didática que utiliza objetos do cotidiano do aluno na aprendizagem de poliedros. Com o intuito de alcançá-lo, traçamos os seguintes objetivos específicos:

- Identificar quais as principais formas poliédricas do cotidiano do aluno que podem ser utilizadas no processo de ensino e aprendizagem;
- Verificar se os alunos correlacionam as formas geométricas do seu cotidiano com a matemática escolar;
- As principais dificuldades que os alunos apresentam na aprendizagem de poliedros;
- Construir uma sequência didática que ensine poliedro a partir de problemas reais do dia-a-dia do aluno;
- Avaliar os efeitos de uma sequência didática para a aprendizagem de poliedros.

Para a pesquisa, tivemos como aportes teóricos a Teoria da instrumentação de Rabardel que proporcionou a adaptação de maneira orgânica do ensino de poliedros com o uso do GeoGebra, já para as análises das fichas respondidas pelos alunos lançamos mão da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e para análises minuciosas de registros transcritos de voz, nos apropriamos da Análise Microgenética.

Observando a quantidade de teorias agindo de maneira simultânea nessa sequência, buscamos melhorá-la fazendo uma consulta com professores de escolas públicas que pudessem enriquecer as atividades com suas experiências que são similares as do pesquisador.

Desde o início da apresentação dessa sequência, pudemos observar os alunos com entusiasmo e empenhados a construir, usar as ferramentas e algumas falas sobre o uso do aplicativo em casa com o intuito de instrumentalizar. Entusiasmo que não é o mesmo se comparado as aulas ministradas com os mesmos alunos, mas em que se utiliza o método tradicional em que temos quadro branco e pincel.

Essa admiração e surpresa presentes em seus olhares foram observadas do início ao fim da aplicação, cujos sujeitos trazem uma realidade não tão diferentes de outras escolas públicas. Acreditamos que muitos alunos, sequer imaginavam essa possibilidade de construção na palma da mão.

Após as primeiras atividades, percebemos uma autonomia nas construções e no manuseio do artefato. Além disso, uma melhoria gradativa de resolução das questões. Também, destacamos a segurança ao verbalizar oralmente as respostas, os questionamentos, as discussões entre os colegas. Isso traz o protagonismo exercido pelos alunos que buscam aprender.

Esse tipo de comportamento se tornou uma realidade nesse grupo e isso contribuiu para resoluções mais precisas. Potencializou a aprendizagem em decorrência de apropriação dos objetos do conhecimento por parte dos alunos. Ademais, tudo isso proporcionado por um ambiente participativo e colaborativo formado pelos alunos.

Dentre os resultados que obtivemos na experimentação da sequência didática, observamos semelhanças com os trabalhos de Morcanas (2019), Silva, W. (2018), Santiago (2018) e Boas (2014) em relação a dissertações, mas em relação a relatos tivemos com Pereira et al (2017). Assim sendo, a proposta teve o objetivo alcançado e teve como propósito a aprendizagem significativa.

Portanto, o que esperamos é que nossa pesquisa possa contribuir de maneira qualitativa e quantitativa para o fazer docente em sala de aula. Que essas atividades possam servir de inspiração e que haja estudos futuros que busquem a melhoria da mesma, isto é, mesmo que os pesquisadores a utilizem e façam suas modificações, ainda esteja presente o mesmo entusiasmo e empolgação visto na experimentação dessa e, sobretudo, que haja uma aprendizagem significativa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba. PR: Editora UFPR, 2007.

BICALHO, J. **Conceito e propriedades elementares de poliedros e seu ensino.** Dissertação. Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT. 78p. Viçosa, 2013.

BOAS, F. **Área de poliedros no cotidiano.** Dissertação. Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional – PROFMAT. São José do Rio Preto. 55p. 2014.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. SP. Editora Edgar Blucher Ltda. Tradução de Elza F. Gomide. 1974. 488 p.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

_______. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CABRAL, N. F. **O papel das interações professor-aluno na construção da solução lógico-aritmética otimizada de um jogo com regras.** Dissertação. Núcleo de Apoio ao Desenvolvimento Científico da Universidade Federal do Pará. Belém. 150p. 2004.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N., **Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Espacial, Volume 10** - 7ª Ed., São Paulo: Editora Atual, 2013.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**. Berne: Peter Lang, 1995 in: **AMAZÔNIA - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas** V.6 - n. 11 - Jul. 2009/dez. 2009, V. 6 - n. 12 – Jan. 2010/Jun. 2010, p. 126-143.

______, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

HOHENWARTER, M., HOHENWARTER, J. **Ajuda GeoGebra manual oficial da versão 3.2**, 2009.

MILOVANOVIC, M., OBRADOVIC, J., MILAJIC, A. Aplicação de ferramentas multimídia interativas no ensino matemática - exemplos de lições de geometria. TOJET: The Turkish Online Journal of Educational Technology. Janeiro de 2013, volume 12, edição 1.

MORCANAS, M. **O processo de ensino-aprendizagem dos poliedros.** Dissertação. Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT. 82p. São Gonçalo, 2019.

OLIVEIRA, P. B. **Tecnologias no Ensino da Matemática: mapeamento de laboratórios de informática nas escolas públicas no sul da Bahia e usos efetivos.** XVIII EBRAPEM – Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Recife, 2014.

PEREIRA, L., AGUIAR, L., SELAU, J., CATARINA, A. A modelagem matemática para o ensino da geometria – relação de Euler. Criar Educação, Criciúma, v. 6, nº1, janeiro/junho 2017 – PPGE – UNESC.

PITZER, L., MELCHIORETTO, A. CONSTRUÇÃO DE UMA BOLA DE FUTEBOL: aplicação na confeitaria e contextualização para o ensino. **Revista Maiêutica**, Indaial, v. 4, n. 1, p. 33-47, 2016.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains.** Paris: Armand Colin, 1995.

______. Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In: BAILLEUL, M. (Ed.). **Actes de la Xème Ecole d'Été en Didactiques desMathématiques. Houlgate**: IUFM de Caen, 1999. p. 95; 202-213.

______. La composante ergonomique des formations professionnelles et techniques, Technologies et formations, N° 82, 1999, pp 4-7.

SANTIAGO, T. **O ENSINO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: um estudo utilizando a modelagem matemática.** Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Juazeiro. 70p. 2018.

SILVA, E. **Poliedros de Arquimedes, Catalan, Kepler-Poinsot, Platão e o sólido de Escher: contribuições para o ensino e aprendizagem de poliedros.** Dissertação. Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT. 117p. Curitiba, 2018.

SILVA, W. **A visualização dos sólidos de Platão com o uso materiais concretos: uma proposta para o ensino dos poliedros.** Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. 72p. Teófilo Otoni, 2018.

ANEXO A

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem