Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós - Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

MARCOS ROBERTO BERREDO DA SILVA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Belém - PA
2023

MARCOS ROBERTO BERREDO DA SILVA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Dissertação aprovada pela banca de defesa para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para o Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam.

Belém - PA
2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Silva, Marcos Roberto Berredo da

Uma sequência didática para o ensino de progressão geométrica / Marcos Roberto Berredo da Silva; Miguel Chaquiam, orientador, 2023.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Belém, 2023.

1. Matemática-Estudo e ensino. 2. Progressão geométrica.3.Prática de ensino. I. Chaquiam, Miguel (orient.). II. Título.

CDD. 23° ed. 510.7

Elaborada por Regina Coeli A. Ribeiro – CRB-2/739

MARCOS ROBERTO BERREDO DA SILVA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Dissertação aprovada pela banca de defesa para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para o Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam.

Data de aprovação: 10/03/2023

Banca examinadora

______________________________. Orientador
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN
Universidade do Estado do Pará

______________________________. Examinador Interno
Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Doutor em Ciências Humanas – Pontifícia Universidade Católica / PUC-RJ
Universidade do Estado do Pará

______________________________. Examinador Externo
Prof. Dr. Alailson Silva de Lira
Doutor em Educação, Ciências e Matemáticas – Universidade Federal do Pará / UFPA
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologua do Pará / IFPA

Belém – PA
2023

Dedicatória

À Deus, por proporcionar a oportunidade de realizar esse estudo, e a minha família que tanto me incentivou e apoiou.

Agradecimento

Em primeiro lugar, à Deus e a Nsa Senhora de Nazaré pela dádiva da Vida, por me guiarem e fortalecer nos momentos mais difíceis do desenvolvimento deste projeto por me permitirem a conclusão de mais essa etapa acadêmica, diante de tantos desafios e dificuldades impostos pela vida, dentre os quais, destaco a pandemia da COVID-19 que vitimou tantas famílias.

À minha querida mãe Fátima do Socorro Castro Berredo, pelos ensinamentos da vida e, sobretudo, pelo seu "amor" concedido a mim, que foram fundamentais para minha formação e educação.

À minha família, por acreditar e incentivar no prosseguimento da minha formação profissional, ações importantíssimas para a concretização deste trabalho, e ao meu filho Nicolas Neves Berredo da Silva, pelo carinho e amor confortante que me motiva a continuar me dedicando para o proporcionar uma condição de vida com melhores oportunidades.

À Universidade do Estado do Pará, pela oportunidade, desde a graduação no curso de licenciatura plena em Matemática, até a finalização do curso de mestrado profissional em ensino de Matemática.

Destaco também a importância do orientador e amigo Prof. Dr. Miguel na elaboração de cada etapa desta pesquisa, por todo incentivo, conversas que confortantes que me tranquilizaram para o sucesso desta etapa acadêmica. Professor Miguel Chaquiam, muito obrigado por todos os seus ensinamentos ao longo da graduação, no mestrado, bem como, nos direcionamentos pessoais.

Sou grato aos docentes e discentes do programa de pós-graduação em ensino de matemática da Universidade do Estado do Pará, em especial os colegas de turma e de profissão, pela troca de experiências vivenciadas em sala de aula com os estudantes e pelas contribuições importantes para elaboração da Sequência Didática, e avanço de meu conhecimento e comportamento pessoal e profissional.

Prof. Marcos Berredo.

RESUMO

SILVA, Marcos Roberto Berredo da. **Uma Sequência Didática para o Ensino de progressão geométrica.** 257 f. Dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2023.

Atualmente o método de ensino tradicional (exposição, exemplos e exercícios) não é atrativo para os alunos do ensino médio, no qual estimula as dificuldades apresentadas em objetos matemáticos, desta maneira, esta pesquisa apresenta uma proposta de ensino de progressão geométrica, desenvolvida durante o Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, com o intuito de responder a seguinte questão de pesquisa: Que potencialidades apresenta uma sequência didática para o ensino de progressão geométrica estruturada sob as unidades articuladas de reconstrução conceitual para os alunos do primeiro ano do Ensino Médio? A partir do questionamento, tomei como objetivo geral analisar os indícios da aplicação de uma sequência didática elaborada para o ensino e aprendizagem de progressão geométrica de acordo com as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual, a partir da avaliação de um grupo de professores. Adotei como pressuposto teórico a Teoria das Situações Didáticas descrita por Brousseau (1996), que me permitiu nortear o desenvolvimento de uma sequência didática idealizada por Zabala (1998) e estruturada segundo as unidades articuladas de reconstrução conceitual, de Cabral (2017), na perspectiva de elavancar a aprendizagem, tomei como base o estudo de Ponte *et al.* (1998) sobre Investigação Matemática e o estudo de Fedalto (2006) sobre o uso de calculadora em sala de aula. Com o intuito identificar as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de progressão geométrica, foi efetuado levantamento bibliográfico de pesquisas relacionadas ao ensino do referido tema, análise de livros didáticos, além da percepção de professores da Educação Básica e de alunos egressos do primeiro ano do Ensino Médio, assim como, elaboramos um texto matemático sólido para subsidiar uma formação continuada dos professores e a construção da Sequência Didática que foi estruturada em cinco atividades. A validação da sequência didática ocorreu através da avaliação de 20 professores de matemática município de Belém-PA, para aplicação em turmas do primeiro ano do Ensino Médio. Com a sequência didática, finalizada, pretendíamos realizar sua aplicação para realizar Análise Microgenética e Análise do Discurso. Entretanto, devido as circunstâncias ocasionadas pela pandemia da COVID-19, houve a necessidade de um redirecionamento do processo para um grupo de professores, a fim de que eles realizassem a avaliação da proposta por meio de um questionário. Desta maneira, como resultado, a sequência didática desenvolvida apresenta potencialidades ao ensino de progressão geométrica, uma vez que a taxa percentual média de aplicação da sequência didática, conforme a avaliação dos professores, está entre 60% e 100%, em que é verificada que a sequência didática pode ser aplicada com possíveis adaptações. A partir das contribuições dos professores, desenvolvi adaptações para a realização das atividades através de materiais manipuláveis e através dos softwares educacionais Scrach e GeoGebra, no qual contribuem para a melhoria das atividades. Assim, conclui que neste constructo didático, destaca-se o campo motivacional, campo das interações e o campo conceitual, bem como, as influências em relação ao papel de mediador para o professor, de um ser mais ativo para o aluno e a re(construção) do saber de forma gradual.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; progressão geométrica; Sequência Didática.

ABSTRACT

SILVA, Marcos Roberto Berredo da. **A Didactic Sequence for The Teaching of Geometric Progression.** 257 f. Dissertation of the Professional Master's Program in Mathematics Teaching - State University of Pará, Belém, 2023.

Currently, the traditional teaching method (exposure, examples and exercises) is not attractive for high school students, in which it stimulates the difficulties presented in mathematical objects, in this way, this research presents a proposal for teaching geometric progression, developed during the Professional Master's Course in Teaching Mathematics at the University of the State of Pará, with the aim of answering the following research question: What potentialities does a didactic sequence present for teaching structured geometric progression under the articulated units of conceptual reconstruction for students of the first year of high school? From the questioning, I took as a general objective to analyze the indications of the application of a didactic sequence elaborated for the teaching and learning of geometric progression according to the Articulated Units of Conceptual Reconstruction, from the evaluation of a group of teachers. I adopted as a theoretical assumption the Theory of Didactic Situations described by Brousseau (1996), which allowed me to guide the development of a didactic sequence idealized by Zabala (1998) and structured according to the articulated units of conceptual reconstruction, by Cabral (2017), in the perspective to enhance learning, I took as a basis the study by Ponte et al. (1998) on Mathematical Investigation and Fedalto's (2006) study on the use of calculators in the classroom. In order to identify the difficulties in the teaching and learning process of geometric progression, a bibliographical survey of researches related to the teaching of the mentioned theme was carried out, analysis of textbooks, in addition to the perception of Basic Education teachers and students who graduated from the first year of the Secondary Education, as well as, we elaborated a solid mathematical text to subsidize the continued formation of the teachers and the construction of the Didactic Sequence that was structured in five activities. The validation of the didactic sequence occurred through the evaluation of 20 mathematics teachers in the city of Belém-PA, for application in classes of the first year of High School. With the didactic sequence completed, we intended to carry out its application to perform Microgenetic Analysis and Discourse Analysis. However, due to the circumstances caused by the COVID-19 pandemic, there was a need to redirect the process to a group of teachers, so that they could carry out the evaluation of the proposal through a questionnaire. In this way, as a result, the didactic sequence developed presents potential for teaching geometric progression, since the average percentage rate of application of the didactic sequence, according to the teachers' evaluation, is between 60% and 100%, in which it is verified that the didactic sequence can be applied with possible adaptations. From the contributions of the teachers, I developed adaptations for carrying out the activities through manipulable materials and through the educational software Scrach and GeoGebra, in which they contribute to the improvement of the activities. Thus, it concludes that in this didactic construct, the motivational field, the field of interactions and the conceptual field stand out, as well as the influences in relation to the role of mediator for the teacher, of being more active for the student and the re(construction) of knowledge gradually.

Keywords: Mathematics Teaching; geometric progression; Didactic sequence.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Assim como o ensino de todas as ciências que compõem o currículo da Educação Básica possuem suas importâncias, o ensino de matemática possui características peculiares que são tão importantes quanto as das outras ciências, pois todas as outras ciências possuem uma parcela de contribuição da matemática que são essenciais para seus desenvolvimentos e compreensões.

> Não restam dúvidas quanto à importância da Matemática para melhor nos ajudar a compreender os variados fenômenos que ocorrem, em diferentes contextos, na atual sociedade em que vivemos e, a partir dessa compreensão, buscar transformar pessoas por meio da apropriação do conhecimento matemático, fato que pode ajudar na ampliação da capacidade crítica das mesmas e, consequentemente, no desenvolvimento de uma sociedade mais igualitária. (GONÇALVES, 2019, p. 15).

Desde que o ser humano começou a utilizar a matemática para a explicação da existência humana, entendimento do mundo em que vivemos e para a evolução da ciência, a matemática vem se mantendo bastante forte para tal compreensão, e durante séculos está sendo considerada como a ciência que melhor descreve o mundo, porém temos que deixar claro que isso só é possível quando integrada a outras ciências que possuem conceitos importantes para a aplicação da matemática, tais como: a Física, Química, Biologia, e até mesmo áreas das ciências humanas.

> A Matemática é uma ciência, uma linguagem, um conjunto de conhecimentos construídos graças ao esforço coletivo que o homem vem construindo ao longo de sua história. Desde a antiguidade, o ser humano utilizou sua capacidade de análise e criatividade para modificar o meio no qual vivia e inventar as ferramentas que possibilitaram satisfazer suas necessidades. Permitiu também raciocinar sobre os fenômenos naturais, sociais e do pensamento, que junto com a prática cotidiana, o impulsionaram a estruturar diversas ciências. (OLIVEIRA, 2018, p. 15).

Assim como as ciências exatas necessitam compreender uma parte da matemática, as ciências humanas também precisam ser entendidas para que o conhecimento matemático seja transmitido, pois ao se falar em matemática, faz-se necessário entender o sujeito que está se apropriando do conhecimento matemático e suas relações sociais, culturais, intelectuais, assim como suas limitações físicas e cognitivas perante o padrão social imposto a esse sujeito.

Desta forma, as ciências exatas não são totalmente isoladas para serem compreendidas, mas necessitam da compreensão das ciências humanas e o comportamento social, além de estar inteiramente atualizado das transformações sociais que ocorrem ao longo do tempo.

Atualmente, nas pesquisas no campo das ciências exatas, especificamente em matemática, há uma preocupação cada vez mais com as relações sociais, e essas pesquisas intensificam-se em relação à educação matemática e o processo de ensino e de aprendizagem matemática.

Percebe-se que as pesquisas realizadas no meio acadêmico, que fazem abordagem sobre novos recursos metodológicos, métodos avaliativos, entre outros, poucas vezes o professor utiliza tais métodos abordados na pesquisa acadêmica com alunos do Ensino Médio, e existem vários fatores que levam a tais dificuldades no ensino e na aprendizagem, sejam elas por falta de recursos tecnológicos, a não formação adequada do professor, falta de interesse dos alunos, ou até mesmo a exigência escolar por seguir um conteúdo programático que não possibilita o professor fazer algo diferenciado.

O pensar matemático não deve ser apresentado apenas de forma técnica, porém apresentando algo inovador para chamar atenção do aluno, seja ela apresentando aplicações do conteúdo, fazendo relação com outras disciplinas, utilizando outros conteúdos da matemática, fazendo uso da história da matemática, tecnologia, prática, usando novas teorias, ou descobertas recentes para apresentar tal conteúdo, entre outros.

> A sociedade em que vivemos está passando por muitas transformações, a globalização e as tecnologias têm mudado o nosso cotidiano. Estas evoluções têm provocado algumas mudanças também na educação. Atualmente, muito se tem discutido sobre a abordagem dos conteúdos em sala de aula. (BEMFICA e ALVES, 2010, p. 9).

Fazer algo diferente em sala de aula, não apenas seguindo o livro didático, além de tornar a aula criativa, desperta o interesse e a curiosidade do aluno. A Matemática, segundo Oliveira (2018, p. 15), “possui um papel fundamental no desenvolvimento de tecnologias criadas pelo homem, e este desenvolvimento tecnológico, assim como outras atribuições teve, tem importantes manifestações no campo educacional”.

Tomando como direcionamento, as experiências como ex-aluno da Educação Básica, estagiário de matemática no período do curso de Licenciatura em Matemática, e atualmente como professor de matemática, ficam claras as dificuldades dos alunos na aprendizagem matemática.

Durante o período do curso de graduação, o conteúdo de Progressão Geométrica não foi apresentado dentro de nenhuma disciplina, no qual adquiri afinidade com o objeto matemático em questão através de palestras e minicursos, porém ainda de forma expositiva e tradicional, assim como foi apresentado na Educação Básica.

Desta forma, o conteúdo de Progressão Geométrica possui grande importância, uma vez que, além de recuperar conhecimentos básicos, também possui diversas aplicações do cotidiano, e não é dada a devida atenção no processo de ensino do objeto matemático em estudo.

Segundo Melo e Bisognin (2016, p. 1), “o fato de os alunos apresentarem dificuldades em progressão geométrica, se dá porque, os conteúdos são desenvolvidos numa visão técnica sem a preocupação com o pensar matemático e a falta de contextualização”.

Isso significa que o pensar matemático não deve ser apresentado apenas de forma técnica, porém, apresentar-se algo inovador para chamar atenção do aluno, seja ela através de aplicações do conteúdo, relação com outras disciplinas, relação com outros objetos matemáticos, através do uso da história da matemática, tecnologia, prática, novas teorias, ou descobertas recentes para apresentar tal conteúdo, entre outros.

Melo e Bisognin (2016, p. 1), afirmam que “o conceito de progressão geométrica é transmitido pelos professores na forma de definições, exemplos e exercícios, em que o aluno memoriza fórmulas da mesma maneira que é vista nos livros didáticos”.

Pelo motivo das dificuldades de aprendizagem de progressão geométrica e as práticas educacionais desenvolvidas nas escolas, além dos resultados apresentados pelos documentos oficiais sobre os currículos e avaliações no processo de ensino e de aprendizagem de matemática, especificamente no ensino de Sequências Numéricas (Progressões Geométricas), optamos a escolha do da progressão geométrica como objeto matemático para investigação desta pesquisa e apresentação de soluções viáveis para sanar as dificuldades apresentadas pelos alunos no tema em questão.

As pesquisas na área da Educação Matemática e Ensino de Matemática apresentam diversas metodologias que podem ser postas em prática pelos professores de matemática para apresentar determinados objetos matemáticos, não apenas dependendo do ensino tradicional (definições, exemplos e exercícios), no qual utilizam apenas a aula expositiva com o uso do livro didático, quadro branco, pincel magnético e avaliações tradicionais.

Atualmente existem várias tendências em educação matemática que auxiliam de maneira metodológica o professor que pretendem dar certo significado ao estudo da matemática. Dentre as tendências da educação matemática podemos citar: *As Tecnologias da informação e comunicação (TIC); Etnomatemática; Modelagem Matemática; Resolução de Problemas; Jogos para o ensino de matemática; História da Matemática; e Sequência Didática (SD).*

Dentre as tendências da educação matemática destacadas, optamos por fazer o uso da *Sequência didática (SD).* Baseado nos resultados que as avaliações externas que ocorrem no Brasil, onde nos mostram que as maiorias dos alunos estão abaixo da média de aprendizagem, e quando visualizamos as avaliações internas realizadas nas escolas, percebe-se que condiz com os resultados das avaliações externas, porém não é apenas visualizando os resultados das avaliações que conseguimos perceber as dificuldades enfrentadas no ensino de matemática, mas também percebemos que vão além das metodologias utilizadas em sala de aula, ou seja, existem diversas situações que influenciam na aprendizagem dos alunos, e nosso foco é analisar as situações didáticas de ensino, no qual faremos o ensino por investigação.

A sequência didática de acordo com Perreti e Costa (2013, *apud* Oliveira, 2018, p. 21), “também permite a interdisciplinaridade, pois ao tratar de um tema na disciplina elencada poderá recorrer a especificidades de outras permitindo explorar o conhecimento globalmente, diminuindo a fragmentação”.

Assim, a sequência didática permite que o professor realize o ensino de matemática e simultaneamente investigue esse processo de ensino, pois ao longo das atividades realizadas pelos alunos, no qual deixam registros que possibilitam perceber as dificuldades apresentadas por eles.

Portanto, a escolha do uso da *Sequência Didática (SD)* para propor uma aprendizagem significativa, trabalhando uma proposta de ensino distinta do ensino tradicional (Definição, Exemplos e Exercícios), no qual o professor se comporte como mediador e não como expositor do conhecimento, e os alunos sejam ativos em suas ações, ou seja, o aluno construirá o seu próprio conhecimento através de questionamentos realizados pelo professor e descritos na sequência didática.

Porém, para que seja aplicada uma sequência didática, anteriormente será necessário entender as situações didáticas de ensino, os processos de investigação no ensino de matemática, e o modelo de estruturação de uma sequência didática.

Para analisar as situações didáticas de ensino, destacamos a *Teoria das Situações Didática (TSD)* na concepção de Brousseau (1996).

> Brousseau desenvolveu a teoria das situações didáticas, na qual compreende que para a realização de uma atividade entre dois ou mais alunos, faz-se necessário que os alunos mobilizem os conhecimentos já existentes, assim, o uso adequado de estratégias por parte um aluno durante a realização de um jogo, por exemplo, facilita a aprendizagem em sala de aula. (PEREIRA, 2017, p. 31).

Esta teoria desenvolvida por Brousseau (1996) abriu caminho para novos estudos na área da didática da matemática, uma dessas arguições que surgiu através da TSD, é conhecida como “realizações didáticas”, que são caracterizadas por sequências de atividades, no qual permite que o professor adquira informações da aprendizagem dos alunos.

Segundo Oliveira (2018), as “realizações didáticas” caracterizam-se, por um esquema experimental para sala de aula, isto é, na construção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Tais atividades quando elaboradas de formas articuladas em diversas sessões, Zabala (1998) definiu essas sequências de atividades como *Sequências Didáticas (SD’s)*.

> As sequências didáticas são planejadas para ensinar um determinado conteúdo por etapas organizadas de modo a envolver atividades de aprendizagem e avaliação de acordo com os objetivos a serem alcançados pelo professor, permitindo, assim, que o professor possa torná-la mais facilitadora no processo da aprendizagem através de intervenções nas atividades elaboradas e introduzindo mudanças nas mesmas ou até mesmo propor novas atividades. (PEREIRA, 2017, p. 19).

As *Sequências Didáticas (SD’s)* permitem que o professor investigue o processo de ensino de um determinado objeto matemático, além de avaliar as potencialidades das sequências didáticas, ou seja, simultaneamente ao processo de ensino apresentado pelo professor, também será um processo investigativo desse ensino.

Para a elaboração de nossa sequência didática, pensamos em uma estrutura que focasse no processo de regularidades, no qual o aluno identificasse padrões permitindo que ao final de cada sessão da sequência didática, além de ser formalizado um conceito ou proposições do objeto matemático proposto, fizesse com que os alunos formassem tais conceitos sobre o objeto matemático diferente das apresentadas nos livros didáticos, para isso iremos estruturar nossa sequência didática através das *Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC)*, proposta por Cabral (2017).

> As atividades baseadas nas Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) possibilitam aos alunos explorar regularidades e perceber, mesmo que intuitivamente, a importância e utilidade de se estabelecer generalizações, além de uma participação mais ativa no processo de ensino. (CABRAL, 2017, *apud* OLIVEIRA, 2018, p. 21).

Considerando que, as *Unidades de Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC)*, mesmo sendo uma proposta nova para a elaboração de uma sequência didática, vários trabalhos já foram desenvolvidos conforme essa concepção, pois podem servir como produtos didáticos para o ensino de determinados objetos matemáticos e apresentando resultados positivos.

Ao considerar as pesquisas já realizadas, os professores e alunos egressos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública a respeito de progressão geométrica, surgem problemas relacionados ao processo de ensino e de aprendizagem sobre o objeto matemático e, também se observa a falta de propostas que contribuam para minimizar tais problemas.

Diante dos problemas encontrados no processo de ensino e aprendizagem em matemática, especificamente sobre progressão geométrica, emergiu o seguinte questionamento a ser respondido: *Que potencialidades apresenta uma sequência didática para o ensino de progressão geométrica estruturada sob a elaboração das unidades articuladas de reconstrução conceitual?*

A partir do questionamento proposto, tomamos como objetivo geral *analisar os indícios da aplicação de uma sequência didática elaborada para o ensino e aprendizagem de progressão geométrica de acordo com as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual, a partir da avaliação de um grupo de professores.*

Para complementar o desenvolvimento desta pesquisa, foram estabelecidos especificamente os seguintes objetivos:

• Identificar as dificuldades do processo de ensino e de aprendizagem de conteúdos relacionados à progressão geométrica de acordo com alunos egressos e professores de matemática e, também apontados na revisão de estudos;

• Investigar o ensino do conceito de progressão geométrica na perspectiva de alunos e professores;

• Analisar as orientações constantes nos documentos oficiais sobre o tema;

• Analisar a abordagem do tema nos livros didáticos para identificar as metodologias utilizadas;

• Elaborar uma sequência didática sobre o objeto matemático progressão geométrica de acordo com as UARC;

• Avaliar as potencialidades dessa sequência didática na aprendizagem e aplicação dos conteúdos relacionados à progressão geométrica;

• Consolidar a aplicação dos conceitos matemáticos na resolução de problemas que envolvem progressão geométrica;

• Produzir um módulo de ensino de progressão geométrica baseado em sequências didáticas para uso em sala de aula do 1º ano do Ensino Médio.

• Validar as atividades propostas na sequência didática a partir das potencialidades identificadas a partir de uma avaliação de um grupo de professores.

Considerando os objetivos desta pesquisa, realizou-se um levantamento bibliográfico de algumas pesquisas realizadas sobre o ensino de progressão geométrica, onde foram contempladas dissertações, teses e livros didáticos. Para a realização desse levantamento bibliográfico, optamos por analisar as pesquisas que mais se identificam com o propósito do nosso trabalho, no qual consideramos os seguintes autores:

Como pressupostos teóricos para elaborar nossa proposta metodológica, consideramos a Teoria das Situações Didáticas (TSD) descrita por Brousseau (1996), que nos permitiu entender as relações entre os alunos, professores e o conhecimento em sala de aula no processo de aprendizagem; A utilização da Sequência Didática (SD) idealizada por Zabala (1998), que nos inspirou para a realização de atividades investigativas; e por fim, para a elaboração e estruturação da sequência didática utilizada nesta pesquisa, consideramos a proposta metodológica conhecida como Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) inspirada nos estudos de Cabral (2017).

E para análise do ensino de progressão geométrica, escolhido como objeto matemático desta pesquisa, levamos em consideração os documentos oficiais, tais como, os Parâmetros Curriculares Nacional do Ensino Médio – PCNEM (1999) e a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2018); Os índices de avaliações externas, que são, o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e o Sistema Paraense de Avaliação Educacional (SISPAE); E como avaliações externas, levamos em consideração o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e a Prova Brasil.

Desta forma, a estrutura da pesquisa foi disposta da seguinte maneira:

No capítulo 1, foram esboçados os pressupostos teóricos e metodológicos que subsidiaram a pesquisa. Os quais fundamentaram desde as relações estabelecidas pelo processo de ensino e aprendizagem com a Teoria das Situações Didáticas até as teorias de base para identificar os indícios de aprendizagem dos alunos frente a aplicação da Sequência, das quais ressaltamos a Análise Microgenética e a Análise do Discurso.

No capítulo 2, o objeto matemático foi destacado com base na revisão de estudos, a qual foi construída com a categorização em estudos teóricos, empíricos e diagnósticos. Além da pesquisa de campo para compreender os olhares dos alunos, assim como, dos professores frente ao conteúdo. Por fim, constam as disposições do conteúdo nos livros didáticos.

No capítulo 3, foi desenvolvido de um texto matemático sobre progressão geométrica e suas considerações. Com o intuito de solidificar a construção da sequência e servir de base para estudos de outros professores.

No capítulo 4, consta a estruturação dos textos da sequência didática estruturada pela UARC, com base nos seguintes casos: Sequências em progressão geométricas, características de uma progressão geométrica, termo geral, soma dos termos de uma progressão geométrica finita e soma dos termos de uma progressão geométrica infinita. A qual, possui o intuito minimizar as dificuldades de aprendizagem dos alunos frente a temática em questão.

No capítulo 5, serão apresentados os resultados das análises geradas a partir da avaliação da sequência didática realizadas por professores de matemática para a validação da

SD. Uma vez que não foi possível realizar a aplicação com alunos do 1º ano do Ensino Médio, por conta a crise sanitária mundial da covid-19, em que dificultou a realização da análise Microgenética e do Discurso.

Por fim, no capítulo 6, são evidenciadas as considerações gerais e conclusões decorrentes do desenvolvimento da pesquisa.

1 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo iremos fazer um estudo teórico sobre os aportes teóricos que utilizamos como base metodológica desta pesquisa, no qual descrevemos algumas teorias importantes para o método de pesquisa, primeiramente falaremos da *Teoria das Situações Didáticas (TSD)* descrita pelo pesquisador Brousseau (1996), e por fim apresentaremos uma proposta pedagógica para o ensino por investigação conhecida como Sequência Didática definida por Zabala (1998), e dentro da proposta da *Sequência Didática (SD)*, destacamos uma abordagem sobre uma proposta metodológica para a estrutura e elaboração de uma Sequência Didática que teve como principal idealizador Cabral (2017) e que ele nomeia como *Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC)*.

1.1 – TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A *Teoria Das Situações Didáticas (TSD)* surgiu na conhecida "Escola Francesa da Educação Matemática" que segundo Reis (2012, p. 41), "nascida dentro do movimento da matemática moderna no final da década de 60, através de um grupo de pesquisadores, entre eles Guy Brousseau[1] com a Teoria Das Situações Didáticas".

O objetivo deste grupo de pesquisadores era estudar a aprendizagem e o ensino do conhecimento matemático e daí surgiram outras teorias, tais como: Antropologia da Matemática, Dialética ferramenta-objeto, Registros de representações semióticas e a Teoria dos campos conceituais.

> Em 1970, licenciado em matemática e com o cargo de assistente de matemática na Universidade de Bordeaux, Brousseau apresenta numa conferência do Congresso da Associação dos Professores de Matemática do Ensino Público, os primeiros elementos da *teoria das situações*, os quais, ao longo de 20 anos, seriam aperfeiçoados dando origem à Teoria das Situações Didáticas, trazendo grandes contribuições para o desenvolvimento da Didática da Matemática enquanto campo científico, "cujo objeto é a comunicação dos conhecimentos matemáticos e suas transformações". (BROUSSEAU, 2008, *apud* MOÇAMBITE, 2016, p. 42).

Para que haja a comunicação dos conhecimentos matemáticos, deverá haver também uma relação entre o professor, o aluno e um determinado conhecimento a ser ensinado, e para

---

[1] *Guy Brousseau* (1933) é um educador matemático francês. Em 2003 recebeu a medalha Felix Klein pelo desenvolvimento da Teoria das situações didáticas. É um dos pioneiros da didática da matemática, ele desenvolveu uma teoria para compreender as relações que se operam na sala de aula. Os educadores e os educandos são atores da relação ensino-aprendizagem. <https://pt.wikipedia.org/wiki/Guy_Brousseau>. Acesso em: 01/05/2020.

que essa relação exista cada um destes elementos possui um papel importante, para que a comunicação seja concretizada, ou seja, o professor prepara suas aulas e organiza o conteúdo, baseado na forma em que convém a ele a melhor forma de ensinar. E o aluno se prepara para receber as informações que o professor transmite e adquirir o conhecimento que é importante para ele no momento. Segundo Brousseau (2008), *apud* Moçambite (2016, p. 42), “dessa forma, interpreta-se a relação didática como uma comunicação de informações”.

Neste contexto, o conteúdo matemático serve como um processo de ligação para a comunicação entre a transmissão do professor do conhecimento matemático e a compreensão do aluno deste conhecimento. Neste processo de ligação, entra em questão a didática em que o professor utiliza para transmitir o conhecimento matemático ao aluno, e Brousseau buscou conhecer esse processo didático, tanto através das dificuldades do processo de ensino e aprendizagem da matemática, quanto nas técnicas para facilitar o ensino. É de prática o professor apresentar os conteúdos matemáticos como modelos axiomáticos, pelo fato de ser uma forma que facilita a organização e a apresentação de tal conteúdo. Porém, para Brousseau (1996), *apud* Ferreira (2016, p. 57), afirma que, “saber matemática, não é apenas aprender definições e teoremas, para reconhecer o momento de utilizá-las, considerando assim uma omissão de onde o conhecimento se estabeleceu, tais como conjecturas, erros e discussões históricas do mesmo”.

Partindo dessa ideia, o ensino de matemática para que seja eficaz, o processo precisa ir além das apresentações axiomáticas e expositivas do conteúdo matemático, no qual a inovação, busca por ensinar algo que seja significativo para o aluno pode trazer grandes benefícios para o mesmo e concretizar a aprendizagem.

Segundo Oliveira (2015, p. 35), na TSD, “a aprendizagem matemática acontece, de fato, sempre que o conhecimento que foi ensinado para o estudante tem sentido e significado, e aquele conhecimento aprendido pode ser aplicado em outros contextos”.

Por esse motivo que Brousseau (1996) idealizou a TSD, no qual para sanar as dificuldades da aprendizagem matemática, faz-se necessário fazer o uso da aprendizagem significativa. Para isso, o professor passa de expositor do conhecimento para mediador do conhecimento e o aluno projeta o próprio conhecimento sendo-o um aluno ativo, ou seja, o professor irá propor uma série de problemas que fazem com que o aluno pense sobre tais problemas tomando como base conhecimentos prévios.

> Em uma situação de ensino, existem algumas regras (contrato didático), acordado entre o professor e o aluno que funcionam como se fosse cláusulas de um contrato. O aluno desenvolve atividades em que realiza ações de formular, testar e construir modelos de linguagem, conceitos e teorias e estabelecer intercâmbios com outros, reconhecendo a oportunidade de aplicá-los. O professor incorpora o trabalho de investigador, onde o mesmo produz método (re) personalizado do conhecimento, pois este passará a ser conhecimento do aluno devendo ser gerado uma adaptação a uma situação específica. (REIS, 2012, p. 42-43).

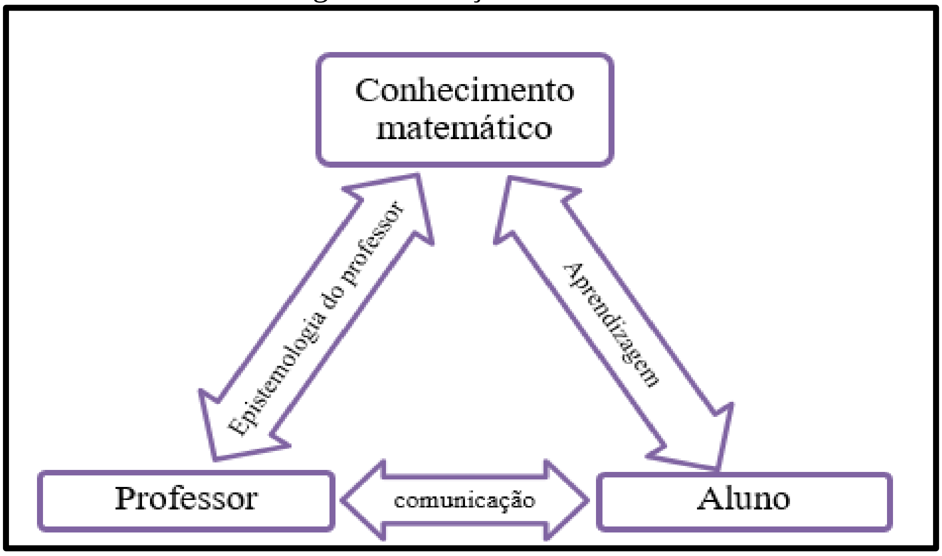
Desta forma o professor começa a adaptar métodos de ensino e através do contrato didático com o aluno, faz este aluno elaborar métodos intuitivos que o possibilita encontrar a melhor forma de solucionar determinado problema, no qual o mesmo utiliza modelos, conceitos e teorias que o professor formalizou ou poderá formalizar de conhecimentos anteriores para solucionar tal problema que será novo para ele. Para Teixeira e Passos (2013) *apud* Silva Junior (2016, p. 55) a TSD "integra dimensões epistemológicas, cognitivas e sociais no campo da Educação Matemática, o que permite a interação entre a escola, o professor e o aluno e gera o aprendizado".

Essas relações entre o sistema educacional, o professor e o aluno ficaram conhecidas como Situações Didáticas, idealizada por Brousseau (1996), destaca todo o meio que cerca o aluno, seja ela gerada pelo professor ou pela instituição escolar.

> Uma Situação Didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber construído ou em vias de constituição (...) o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes. (BROUSSEAU, 1986; CAVALCANTE, 2011, *apud* SILVA JUNIOR, 2016, p. 55).

Isto significa dizer que as estruturas das situações didáticas formam o ambiente escolar, no qual dependem das diversas relações pedagógicas e o desenvolvimento de atividades motivam os estudantes a produzirem conhecimento. Observe a Figura 1 que aborda tais relações didáticas para adquirir o conhecimento matemático.

Figura 1: Relações didáticas.



Fonte: Brousseau (1998), Reis; Allevato (2015), *apud* Silva Junior (2016).

Na Figura 1, o professor dispõe de uma relação didática, que através da comunicação, pretende alcançar o aluno e em conjunto com sua epistemologia dispões o conhecimento matemático para esse aluno, e através deste se obtém uma relação entre o aluno e o conhecimento matemático, que gera a aprendizagem, e dentro destas relações existem diversos obstáculos que o professor e o aluno precisam superar para que haja a aprendizagem do conhecimento.

Segundo Reis e Allevato (2015) *apud* Junior (2015, p. 56), "o conjunto dos três elementos, conhecimento, professor e aluno, constituem uma relação dinâmica conhecida como Relações Didáticas".

Além da relação dinâmica que ocorre entre o conhecimento, professor e aluno (Relações didáticas) que se preocupam em superar obstáculos para que haja aprendizagem, também ocorrem interações simultâneas entre o sistema educacional, o aluno e o conhecimento, onde não se preocupam com o processo didático que o professor utiliza, apenas esperam a comunicação professor – aluno, ou seja, ocorre uma interação entre o aluno e o professor, sem se preocupar com a epistemologia do professor, no qual o mediador é o sistema educacional, no qual esse processo é conhecido como Situações de Ensino.

Suleiman (2015, p. 203) afirma que, "na situação de ensino em que há somente interação professor-aluno ocorre redução da ação do professor e na situação didática o professor cria outro *meio* em que o aluno pode atuar de forma autônoma".

Na situação de ensino, quando o professor começa a fazer alterações no processo interativo, ou seja, se preocupa no meio que irá utilizar como didática para apresentar o conhecimento ao aluno, esse professor cria uma situação didática, e este meio que ele utiliza é conhecido como meio didático.

Ainda em Suleiman (2015, p. 203), "o *meio didático* pode ocorrer de duas maneiras: *meio material* (quando o professor prepara a sua aula, organiza um meio) e *meio objetivo* (é o aluno que atua num meio efetivo, de ação)".

Assim, o meio didático é formalizado através do contrato didático, e que por diversas formas de ser visualizada, permite a existência das situações didáticas.

Segundo Oliveira (2015, p. 34), a TSD "tem como objetivo caracterizar uma situação em um processo de aprendizagem que ocorre em sala de aula envolvendo o aluno, o professor e o conhecimento".

A TSD procura estudar o processo investigativo científico que o aluno possui para obter determinado conhecimento, assim modelando o ambiente escolar e tornando a aprendizagem significativa.

Brousseau (2008) *apud* Moçambite (2016, p. 42) afirmam que a TSD "traz grandes contribuições para a Didática da Matemática enquanto campo científico, cujo objeto é a comunicação dos conhecimentos matemáticos e suas transformações".

Os conhecimentos matemáticos transformam-se conforme a sociedade também passa por transformações, ou seja, a sociedade se transforma, a cada geração, a cada ano, ou a cada dia, portanto ao ensinar matemática, em sala de aula há diversos alunos com culturas diferentes, conhecimentos diferentes e dificuldades diferentes, assim é de suma importância que o ensino de matemática também passe por transformações, para que o professor tenha a possibilidade de transmitir o conhecimento para cada aluno.

Reis (2012, p. 50) define a Situação Didática como "o ambiente de modelagem que existe através da educação sempre que podemos caracterizar uma situação de ensino".

Brousseau (1996) subdividiu a Situação Didática em quatro outras situações que são: Situação de Ação, Situação de Formulação, Situação, Situação de Validação e Situação de institucionalização.

> *Situação de Ação* - caracterizadas pelo aspecto experimental do conhecimento, pelas tentativas e, frequentemente, pela ausência de argumentação. Quando o aluno tem em mente uma estratégia para resolver uma situação, mas não é capaz de verbalizá-la, a situação vivenciada é de ação. Na situação de ação prevalece a intuição, o raciocínio implícito. (MOÇAMBITE, 2016, p. 44).

Na situação de ação, o aluno verifica que determinado problema é familiar para ele, ele sabe resolver o problema, mas não consegue explicar os procedimentos utilizados para resolver o problema. Como exemplo podemos citar um jogador de futebol que ao chutar uma bola e fazer o gol, ele treinou para aplicar aquele procedimento, porém não sabe explicar os conhecimentos científicos que ocorrem na ação de chutar a bola para que seja possível a bola ir certa no gol.

Moçambite (2016, p. 44) afirma que, "na *situação de formulação, o aluno* já faz afirmações sobre a sua resolução, mas sem questionar ou justificar a sua validade".

Na situação de formulação, o aluno sabe os procedimentos que deve usar para resolver determinado problema, porém o mesmo não consegue perceber se a resolução de fato está correta, ou justificar o porquê de utilizar tal procedimento.

> *Situação de validação* – já aparecem mecanismos de prova, a necessidade de validar aquilo que se afirma, mas sem o rigor matemático. Nessa etapa, procura - se convencer o outro sobre a validade de uma regra ou estratégia e os próprios critérios de validação, por vezes, são questionados. (MOÇAMBITE, 2016, p. 44).

O que ocorre na situação de validação é que, o aluno consegue explicar os procedimentos que deve utilizar usando a argumentação para o convencimento, porém não consegue aplicar a argumentação com rigor matemático.

> *Situação de institucionalização* – nesta etapa o conhecimento se torna objetivo e universal. Enquanto as três primeiras etapas podem caracterizar situações adidáticas, esta quarta etapa é de natureza didática, pois cabe ao professor reforçar e generalizar o conhecimento adquirido. (MOÇAMBITE, 2016, p. 44).

Na situação de institucionalização já ocorre a explicação do procedimento utilizado, com o rigor matemático, ou seja, esse aluno tem clareza do conteúdo ensinado.

Assim como a situação didática, no qual a teoria é estudada para melhorar e sanar algumas dificuldades no ensino de matemática, Brousseau (1996) também definiu outras duas situação para complementar na melhora do ensino de matemática, tais situações são: a *Situação Adidática* e a *Situação Fundamental*.

Segundo Suleiman (2015, p. 202), "na *Situação Adidática*, o professor deve proceder de forma a não dar a resposta ao aluno, que aprende adaptando-se a um meio, no qual o professor provoque as adaptações desejadas".

Nessa situação, o professor é o mediador do conhecimento, ele não mostra para o aluno o que é preciso fazer para realizar a ação, ele apenas vai adaptando os conhecimentos que o aluno já adquiriu através de questionamentos, para que o aluno chegue ao resultado que o professor espera, ou seja, o aluno constrói seu próprio conhecimento e o professor apenas vai modelando o caminho para que o aluno chegue ao aprendizado.

Suleiman (2015, p. 202) ainda afirma que, "*Situações fundamentais* permitem ao aluno armazenar fundamentos para cada novo conhecimento matemático".

Para que um novo conhecimento matemático seja adquirido, faz-se necessário que o aluno já possua conhecimentos prévios para que ele seja capaz de obter um aprendizado eficaz.

Desta forma, todas estas situações, adidáticas, fundamentais e as didáticas, e as composições das situações didáticas, formam as situações de ensino, ou seja, todas elas são mencionadas para entender a interação do sujeito (aluno) com um meio que o leva para a aprendizagem de um novo conhecimento. Segundo Suleiman (2015, p. 201), "a teoria das situações de ensino, de Brousseau, está ancorada na busca das condições necessárias à efetivação da aprendizagem". Assim, outros estudos realizados tomam como base a teoria de Brousseau, no qual buscam idealizar o ensino por investigação e por atividade, no qual a proposta para esta pesquisa são as Sequências Didáticas.

1.2 – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O ensino por investigação está sendo utilizado com bastante frequência em pesquisas e como proposta metodológica no ensino não tão somente na área da matemática, mas em outras disciplinas. O ensino por investigação caracteriza-se pela proposta de um problema que, segundo Carvalho (2013) *apud* Avelino (2017, p.17), "a resolução exige o diálogo, permita a liberdade intelectual dos estudantes e desenvolve interações e práticas discursivas importantes, tais como: descrições, argumentações, generalizações, entre outras".

Quando falamos em ensino por investigação, o termo mais utilizado para a prática e aplicação desta proposta metodológica eu teve como pioneiro Zabala[2] (1998) que nomeou de *Sequências Didáticas (SD's)*, que permite que haja a interação entre o conhecimento empírico do aluno e o conhecimento científico, e seu principal modelo se dá por meio de generalizações, principalmente no ensino de ciências (Química física e Biologia) e no ensino de Matemática.

> A expressão sequência didática apareceu no bojo de uma reforma educacional que ocorreu na França na segunda metade do ano de 1980 e designava um conjunto de atividades ou oficinas de aprendizagem aplicadas ao ensino de qualquer tipo de conteúdo. Anos mais tarde um grupo da Universidade de Genebra que trabalhava na área de linguística, psicologia e filosofia, sistematizou uma proposta teórico-metodológica para o ensino de determinados gêneros textuais, daí o fato da expressão sequência didática ser mais conhecida no campo da linguística, podendo, porém ser aplicada a qualquer outro campo de estudo. (PEREIRA, 2017, p. 19).

[2] *Antoni Zabala* (s/d), Catalão, formado em Filosofia e Ciências da Educação pela Universidade de Barcelona, na Espanha, Antoni Zabala preside atualmente o Instituto de Recursos e Investigação para a Formação e é diretor do Campus Virtual de Educação da Universidade de Barcelona. Responsável pela maior transformação do sistema de ensino espanhol, pós-ditadura de Franco, o educador tornou-se uma referência internacional na educação. < http://educpedcurriculo.blogspot.com/2015/10/biografia-de-antoni-zabala.html>. Acesso em: 01/05/2020.

As SD’s permitem ensinar um determinado conteúdo através de um conjunto de atividades que são interligadas entre si explorando o intelecto do aluno fazendo que os mesmos relacionem os conhecimentos adquiridos anteriormente, sejam elas empíricas ou não, com o novo conhecimento a ser aprendido. Esta proposta metodológica permite que o professor/pesquisador apresenta uma forma inovadora de ensinar, desviando da prática de ensino tradicional, isso não significa dizer que o ensino tradicional não seja eficaz, fazendo uso da aula expositiva (definições, exercícios de fixação, exercícios propostos e prova) e fazendo uso do livro didático, porém o ensino tradicional vem sendo questionado nas últimas décadas pelo fato das produções e resultados que os alunos apresentam não serem satisfatórios.

> A utilização da expressão “Sequência Didática” no contexto do planejamento de estratégias organizadoras para o desenvolvimento dos objetivos educacionais no contexto escolar da Educação Básica, vem ganhando notoriedade, nas diferentes áreas do conhecimento, no atual cenário educacional brasileiro. (GONÇALVES, 2019, p. 27).

Tanto no Brasil como em outros países, a prática metodológica da SD vem ganhando cada vez mais espaço dentro das escolas de Educação Básica, e cada vez mais vem sendo introduzido na prática docente de diversos professores/pesquisadores.

> As sequências didáticas estão ganhando cada vez mais espaços com a nova geração de materiais didáticos elaborados pelas editoras mais novas no Brasil, diferentemente das editoras tradicionais que, muitas vezes, apenas reformulam seu material editorial. (MOTA, 2019 p. 24).

Assim, espera-se que em breve as diversas editoras venham complementar seus materiais didáticos com essa proposta de ensino, permitindo que o professor venha ter outras opções de poder trabalhar novas propostas em sala de aula, mas para isso é necessário que haja cada vez mais pesquisas nessa área, principalmente entendendo a construção de sequências didáticas, para mostrar a eficácia e a validação dessa proposta.

Através da sequência didática o professor/pesquisador vai a campo aplicar suas atividades e precisa analisar os tipos de atividades que será aplicada, onde cada atividade realizada pelo aluno possui uma grande importância no desenvolvimento do conhecimento, assim quando é elaborado determinadas atividades que seguem uma sequência significativa, ou seja, são produzidas atividades com um determinado objetivo a ser alcançado, segundo Zabala (1998, p. 18) “é preciso ampliar esta unidade elementar e identificar, também, como nova unidade de análise, *as sequências de atividades* ou *sequências didáticas”*.

As *sequências de atividades* ou *sequências didáticas* permitem analisar a prática da pesquisa, além de verificar o planejamento, a aplicação e a avaliação. Para Zabala (1998, p.

18), define SD como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm início e fim conhecidos pelos professores e pelos alunos”.

A configuração da SD determina as características da prática educativa, mas para isso, deve ser elaborada de forma que sua aplicabilidade seja construtiva e gradual, buscando uma sequência ordenada de atividades. Quando comparamos as variáveis da proposta metodológica da SD com outras propostas metodológicas educacionais, verificamos que é simples de reconhecer a diferença da SD de outras propostas.

> Os tipos de atividades de uma SD, mas sobretudo sua maneira de se articular, são um dos traços diferenciais que determinam a especificidade de muitas propostas didáticas. Mas o primeiro elemento que identifica um método é o tipo de ordem em que se propõem as atividades. Deste modo, pode se realizar uma primeira classificação entre métodos expositivos ou manipulativos, por recepção ou por descoberta, indutivos ou dedutivos, etc. (ZABALA, 1998, p. 53).

A SD possui elementos únicos em suas configurações, no qual a caracteriza por possuir uma sequência ordenada de atividades articuladas, formando unidades temáticas.

> "Uma sequência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. Essas aulas são também denominadas de sessões, tendo em vista seu caráter específico para a pesquisa. Em outros termos, não são aulas comuns no sentido da rotina de sala de aula." (PAIS, 2011, *apud* MOTA, 2019, p. 21).

A SD é elaborada de acordo com que o professor/pesquisador objetiva na sua investigação, e a mesma é planejada com base em hipóteses, e as sessões da SD são conectadas entre si, fazendo com que o aluno percorra um caminho que o levam para a aprendizagem do conhecimento matemático que o professor/pesquisador propôs. Segundo Batista *et al.* (2013), *apud* Oliveira (2018, p. 38), o uso da SD “permite que o professor dê sentido aos conteúdos, sendo possível alcançar um ensino investigativo, com a problematização, a organização dos conteúdos e aplicação do conhecimento”.

Ao elaborar uma SD o professor/pesquisador pode ou não se dedicar em atividades apenas na perspectiva de algoritmos, mas pode também buscar outras formas de repassar o conhecimento através da SD, tais como, através da prática da leitura, atividades de pesquisas individuais ou coletivas, atividades orais ou escritas, entre outros. Vieira e Ohira (2013), *apud* Oliveira (2018, p. 39) afirmam que “é necessário um planejamento, atenção durante a aplicação e uma avaliação durante e após a aplicação da sequência. Isso significa dizer que uma SD ocorre em três etapas, que são*: planejamento*, *aplicação* e *avaliação”*.

> I. *Planejamento:* ao planejar uma sequência didática, o professor deve primeiramente selecionar o conteúdo ou tema a ser ensinado, considerando os significados que ele tem para o aluno, quais conhecimentos prévios ele poderá ter e como introduzi-los de forma a motivá-lo. Em relação às atividades da sequência, é importante considerar o tempo disponível e usar recursos didáticos e estratégias metodológicas que facilitem o aprendizado e a fixação dos conteúdos;
> II. *Aplicação:* Durante a aplicação da sequência didática, o professor deverá observar e intervir (se necessário) quando estes não são suficientes para a compreensão dos alunos, ou se ficou alguma lacuna na ligação entre elas, fazendo então o acréscimo de uma ou mais atividades;
> III. *Avaliação:* no decorrer da aplicação da sequência didática, o professor fará a avaliação do aluno em cada uma das atividades realizadas [...], e com esses recursos ele fará a análise da sequência, verificando se os conteúdos usados, as metodologias e instrumentos aplicados nas atividades foram suficientes para a aprendizagem do aluno.
> (VIEIRA; OCHIRA, 2013, *apud* OLIVEIRA, 2018, p. 39).

Assim, cada uma dessas etapas contribui para a organização do ambiente de aplicação, dos conteúdos propostos, do público, das atividades e das avaliações, além de direcionar o professor/pesquisador em não cometer interferências que impliquem no desenvolvimento do ensino e na concretização da aprendizagem.

Quadro 1: Visão geral sobre Sequência Didática - Zabala.

Para ensinar qual disciplina?	**Como é definida?**	**Prevê etapas?**
Qualquer disciplina, de acordo com a natureza do conteúdo da aula: factual; conceitual; procedimental e atitudinal.	Um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de objetivos educacionais.	Leva em conta a existência de variáveis que interferem em todas as aulas, tais como: - Relações interativas; - Organização social da classe; - Utilização dos espaços e do tempo; - Organização dos conteúdos; - Materiais curriculares e outros recursos; - Avaliação. De acordo com a natureza dos conteúdos da aula, há maior ênfase na exposição ou na prática.

Fonte: Barbosa (2017).

A Quadro 1 na perspectiva de Zabala, como a SD deve ser entendida como proposta metodológica e a abrangência da mesma na prática educacional. Segundo Zabala (1998), *apud*

Pereira (2017, p. 20), a SD “pode ser vista como um modo de orientar as atividades, e não como um tipo de tarefa e sim como um critério que permite ao professor identificar e caracterizar de forma preliminar o modo de ensinar”.

Para que uma SD tenha sucesso em sua aplicação, é de suma importância o seu planejamento, considerando fases iniciais, os critérios de cada etapas das atividades, o tempo de aplicação, organização e a avaliação do aprendizado da turma, é importante também considerarmos intervenções planejadas em cada etapa da aplicação da SD. Assim, para a aplicação de uma SD faz-se necessário pensarmos em algumas fases primordiais, tais fases, são concebidas no estudo de Cabral (2017).

> Em termos de modelo estrutural de acordo com a concepção da Escola de Genebra para (DOLZ; NOVERRAZ E SCHNEUWLY, 2004, P.98) esse procedimento metodológico de SD é concebido por quatro fases distintas, quais sejam: *apresentação da situação de ensino, a produção inicial, os módulos e a produção final.* (CABRAL, 2017, p.33).

Portanto, na concepção de Cabral (2017), podemos descrever e detalhar cada uma das 4 fases propostas pelo mesmo, vejamos:

A primeira fase é a fase da *Apresentação do Projeto*, que para Mota (2019, p. 24), “é o momento em que o professor apresenta aos alunos as atividades e os estudos que irão realizar”.

Nesta primeira fase, o professor/pesquisador irá fazer uma breve explicação para os alunos do que consistem nas atividades, sobre que conteúdo matemático irá estudar, os objetivos de cada atividade, a importância de cada atividade ser realizada com atenção, entre outros.

> Na segunda fase, a fase da *Produção Inicial*, os alunos, já informados sobre o projeto, irão expor o que sabem e pensam sobre o assunto, por meio de produção de texto, conversas, etc. A produção inicial trata-se de uma avaliação prévia e é através dela que o professor conhece as dificuldades dos alunos e obtém meios de estabelecer quais atividades deverão ser empregadas na sequência didática. (MOTA, 2019, p. 24).

Na fase da produção inicial, o professor/pesquisador irá fazer uma avaliação diagnóstica sobre o que os alunos já adquiriram de conhecimentos necessários em conteúdos anteriores e necessários já vistos em outras etapas das da vida escolar do mesmo, essa avaliação não necessariamente será uma prova escrita, não descartando essa possibilidade, mas também pode ser por meio de outros instrumentos educacionais. Caso algum aluno não tenha o conhecimento necessário para adquirir o novo conhecimento proposto pelo professor/pesquisador, o professor/pesquisador terá que adequar esse aluno, dando as ferramentas necessárias para tal aluno poder realizar as atividades.

> Já na terceira fase, a fase dos *Módulos*, as atividades (exercícios e pesquisas) planejadas metodicamente, com a finalidade de desenvolver as capacidades do aluno. Os módulos devem ser direcionados às dificuldades encontradas na produção inicial dos alunos e visando a superação dessas dificuldades, devem propor atividades diversificadas e adaptadas às particularidades da turma. (MOTA, 2019, p. 24).

Já na fase do desenvolvimento dos módulos, o objetivo é a aplicabilidade da SD, onde haverá realização de oficinas, no qual em cada etapa será aplicada uma atividade de nível de dificuldade crescente, e ao mesmo tempo, colocando os alunos em situação que venham suprir as dificuldades encontradas nas etapas anteriores, e tais atividades podem ser realizadas conforme o professor/pesquisador achar necessário para registrar de forma mais prática e efetiva o que ocorre nas ações dos alunos, e conforme os objetivos pretendidos em cada atividade.

Por fim, na quarta fase, a fase da *Produção Final*, segundo Mota (2019, p. 24), "é necessário que ocorra uma avaliação do que os alunos conseguiram aprender no decorrer da sequência didática. Comparação entre produção inicial e produção final".

Nesta última fase, o professor irá comparar o aprendizado do aluno com o seu desenvolvimento em cada uma das atividades iniciais, esta comparação será realizada através de uma avaliação em que os alunos colocarão em prática tudo que aprendeu nas atividades da terceira fase.

Zabala (1998) coloca que a partir do planejamento do professor, na elaboração de uma SD, um conjunto de relações interativas que favorecem o processo de ensino – aprendizagem, essas relações interativas podem ser descritas como:

> I. Flexibilidade na ação docente de modo a permitir adaptações às necessidades apresentadas pelos alunos durante o desenvolvimento da sequência;
> II. Levar em consideração o conhecimento e as considerações dos alunos do decorrer da sequência;
> III. Oferecer ajuda de modo adequado aos alunos no sentido de fazer com que eles conheçam o que têm que fazer, sintam-se seguros e confiantes com seus progressos e estimulados a enfrentar os obstáculos nos quais se depara, de maneira autônoma para alcançar as metas estabelecidas;
> IV. Suscitar meios para a comunicação que possam regular a negociação e a participação de modo a criar um ambiente de respeito mútuo e o sentimento de confiança;
> V. Avaliar os alunos de acordo com suas evoluções individuais, levando em conta seus esforços, o ponto pessoal de partida, incentivando a autoavaliação para a regulação da própria atividade.
>
> (PEREIRA, 2017, p. 21).

Além dessas relações interativas, Zabala (1998) ainda aponta três categorias sobre os conteúdos escolhidos para compor a aplicação da SD, que são: os *Conteúdos Conceituais, Conteúdos Procedimentais* e os *Conteúdos Atitudinais.*

> I. Os *conteúdos conceituais* são aqueles referentes ao desenvolvimento de capacidades cognitivas para operação de símbolos, imagens, ideias e representações que favorecem uma organização da realidade;
> II. Os *conteúdos procedimentais* são aqueles que dizem respeito ao conjunto de ações dirigidas de modo a alcançar uma meta. Compreendem os conteúdos procedimentais os atos de ler, escrever, traduzir, calcular, desenhar, observar, classificar, recortar, etc. Sempre com um objetivo a ser alcançado;
> III. Os conteúdos atitudinais são aqueles que se referem às atitudes e valores formados diante de uma informação recebida, fomentando no aluno uma visão de intervenção de sua realidade nas ações realizadas, refletindo sobre sua atividade e seu desenvolvimento em diferentes contextos.
> (PEREIRA, 2017, p. 21).

Percebe-se que Zabala (1998) aponta alguns aspectos que são importantes para o professor/pesquisador entender como deve proceder na escolha do conteúdo a ser aplicado, entender o ambiente e o público que estará trabalhando e sua relação com esse conjunto de ações.

Segundo Oliveira (2018, p. 39), “entendemos que utilizar sequências didáticas no ensino de matemática pode contribuir com a consolidação de conhecimentos que estão em fase de construção, possibilitando que novas aquisições sejam possíveis”.

Assim, o objetivo de uma SD é propor o ensino de algum conteúdo matemático, estimulando aprendizagem de tal conteúdo a partir da observação de regularidades e do estabelecimento de generalizações num ambiente dinâmico de interações empírico-intuitivas.

Posteriormente, iremos apresentar uma proposta metodológica para o ensino de matemática elaborada por Cabral (2017), onde apresenta um modelo estrutural para a elaboração de uma SD para o ensino de matemática, denominada de Unidade Articuladas de Reconstrução Conceitual.

1.3 – UNIDADE ARTICULÁVEL DE RECONSTRUÇÃO CONCEITUAL

A *Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC*) teve como idealizado Cabral[3] (2017), no qual através de suas experiências como professor da Educação Básica, percebeu algumas lacunas no processo de ensino – aprendizagem através do ensino tradicional (definição, exemplo e exercício) e isso o motivou como docente do curso de licenciatura em

[3] *Natanael Fritas Cabral (s/d),* Doutor em Educação pela PUC- Rio. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Matemática. Atualmente é professor no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA) e Ensino de Matemática I e II no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM/UEPA). Atualmente aposentado, foi coordenador do Laboratório de Educação Matemática (LABEM/UEPA) e é Líder do Grupo de Pesquisa em História, Educação e Matemática na Amazônia (GHEMAZ), vinculado à Universidade do Estado do Pará.

matemática a repassar para seus alunos uma forma de trabalhar conteúdos matemáticos na Educação Básica de forma diferente do qual os mesmos foram ensinados.

> O objetivo de Cabral (2017) é criar uma alternativa que simultaneamente afaste os alunos do modelo “tradicional” de aula (definição - exemplo - exercício) e os aproxime de uma prática discursiva dialógica, promotora de interações verbais reflexiva, que de algum modo, perceber mesmo que por intuição, a necessidade e utilidade de se estabelecer generalizações, seria de grande contribuição para o processo de ensino-aprendizagem. (OLIVEIRA, 2018, p. 40).

Assim, Cabral (2017) propõe a elaboração e a construção de uma SD tendo como modelo as UARC, no qual a construção da SD ocorre de forma gradual, onde tem como princípio a reconstrução conceitual de um objeto matemático.

> A concepção que proponho aqui se fundamenta numa analogia da reconstrução conceitual de um objeto matemático com o procedimento adotado para se determinar a medida da área de uma superfície a partir de uma unidade previamente definida. Imaginemos que o conceito objeto de reconstrução seja representado, por analogia, a uma superfície **S**. (CABRAL, 2017, p. 39).

Cabral (2017) coloca que para que haja a reconstrução conceitual de um objeto matemático, é necessário possuir um ponto inicial, no qual pode ser definida por uma variedade de conceitos dentro do que se deseja reconstruir. Como exemplo, Cabral (2017), utiliza a superfície **S** de uma região como o ponto de partida e tomando uma segunda superfície **“s”** como unidade de medida da superfície **S**, inicia-se o processo de reconstrução conceitual, onde ele denomina como *Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual de Primeira Geração (UARC -1)*.

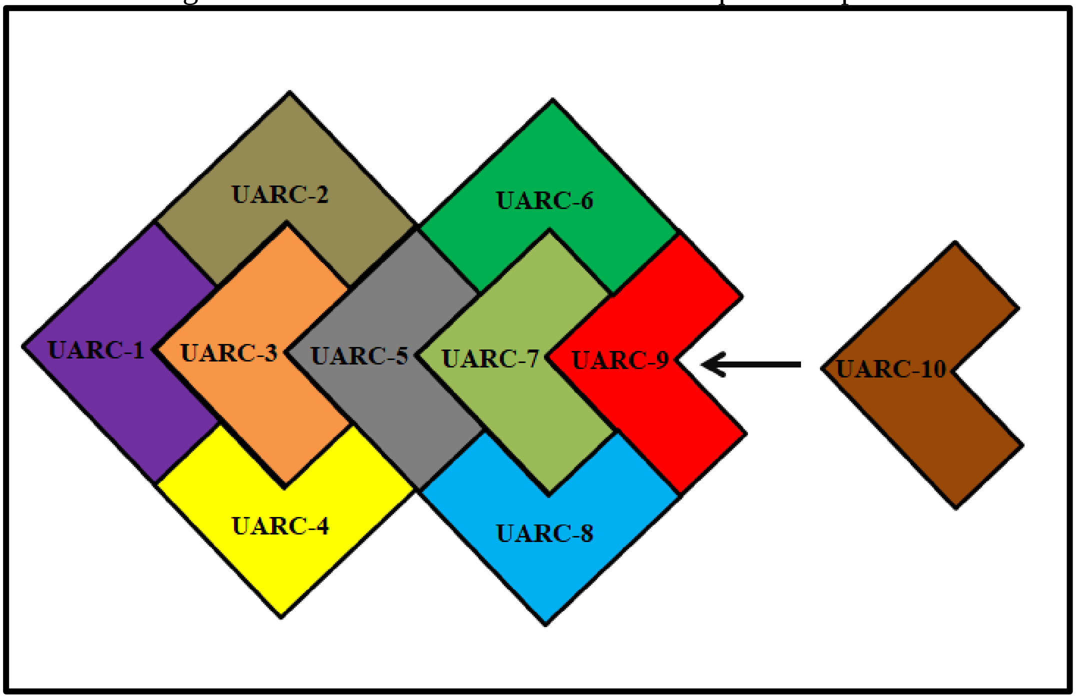
No exemplo acima, Cabral (2017, p. 39) afirma que, “é como se estivéssemos revestindo um piso com placas de área unitária. Podemos começar por uma variedade de posições dentro de **S**. Denomino de UARC-1 essa primeira escolha”.

A partir da UARC-1 o professor/pesquisador deverá escolher uma segunda ligada a UARC-1.

> O professor terá sua segunda escolha condicionada, não podendo este escolher uma unidade qualquer do objeto matemático, deverá então tomar uma peça unitária imediatamente ligada à primeira denominada de *Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual de Segunda Geração (UARC-2).* (PEREIRA, 2017, p. 23).

E a partir da UARC-2, haverá outra escolha que define a UARC-3, e assim sucessivamente se define as UARC superiores, sempre condicionadas a uma ligação com as UARC inferiores. Assim, tomando esses procedimentos, todas as UARC são definidas permitindo que na última UARC, que Cabral (2017) definiu como n-ésima UARC, a reconstrução conceitual do objeto matemático seja alcançada.

Figura 2: Estrutura de uma SD e as UARC que a compõem.



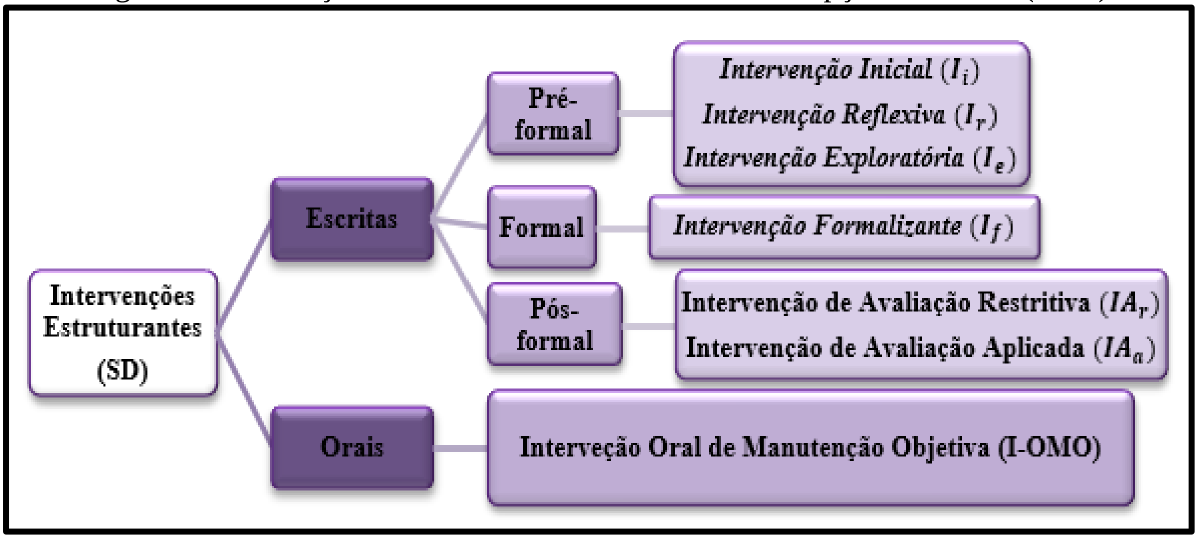
Fonte: Adaptado de Cabral (2017).

A Figura 2 nos mostra que em uma SD contém várias UARC e que todas estão interligadas entre si, desde a UARC-1 até a última UARC. Percebe-se que nem todas as UARC se conectam diretamente, mas isso ocorre indiretamente, pois, por exemplo, a UARC-1 não se conecta diretamente com a UARC-5, mas pelo fato de a UARC-1 se conectar com a UARC-2, UARC-3 e UARC-4, no qual todas estas citadas se conectam diretamente com a UARC-5, portanto, de forma indireta a UARC-1 se conecta com a UARC-5, já que uma depende da outra no processo de reconstrução conceitual. Porém, poderia ocorrer de forma contrária, onde a UARC-1 se conecta diretamente com a UARC-5, e se conecta indiretamente com as outras UARC, mas o é importante garantir que haja essa conexão.

> À medida que as demais UARC de ordem superior são definidas com os mesmos critérios das anteriores, o objeto matemático é reconstruído/revestido. Em tese, os conceitos reconstruídos pelo aluno em cada uma dessas UARC contribuem potencialmente para sua reconstrução do objeto matemático até que, nas interações promovidas numa n-ésima UARC, a reconstrução pretendida é atingida por ele.
> (PEREIRA, 2017, p. 24).

Para entendermos melhor essa interação entre as UARC, Cabral (2017) descreve alguns significados para o que ele chama de *Intervenções Estruturantes*, no qual são divididas em *Escritas* e *Orais*. As *Intervenções Estruturantes Escritas* são classificadas em *Pré-formais*, *Formais* e *Pós-formais*, já as *Intervenções Estruturantes Orais* também podemos chamar de *Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (I-OMO)*.

Figura 3: Intervenções Estruturantes de uma SD na concepção de Cabral (2017).



Fonte: Adaptado de Cabral (2017).

A Figura 3 nos mostra que são descritas seis Intervenções Estruturantes Escritas, proposta por Cabral (2017), que são: *Intervenção Inicial* (I_i), *Intervenção Reflexiva* (I_r), *Intervenção Exploratória* (I_e), *Intervenção Formalizante* (I_f),*Intervenção Avaliativa Restritiva* (IA_r), *e por fim, a Intervenção Avaliativa Aplicativa* (IA_a).

> *I.* *Intervenção Inicial* (I_i) é a primeira peça de jogo de ideias na esfera do discurso dialógico-didático que serve de aporte para que o professor estimule o aluno a perceber de maneira empírico-intuitiva as regularidades funcionais de um conceito;
> *II.* *Intervenção Reflexiva* (I_r) sempre se materializa por meio de um questionamento. Esse questionamento se refere a um ou mais aspectos relacionados ao conceito objeto de reconstrução. Ainda que, para o aluno, esse questionamento não tenha um sentido mais relacional e, portanto, capaz de suscitar vários desdobramentos, no entanto, as ideias envolvidas tangenciam fatos importantes que vão facilitar a reconstrução final do objeto em jogo;
> *III.* *Intervenção Exploratória* (I_e) tem com objetivo aprofundar olhar do aluno a respeito das respostas obtidas a partir da das *Intervenção Reflexiva* (I_r)**.**
> (CABRAL, 2017, p. 40-41).

A proposta de Cabral (2017) descreve três intervenções primárias que compõem as *Intervenções Escritas Pré-formais*, que permite que o professor/pesquisador venha intervir na aplicação de sua SD de forma consciente a adquirir informações úteis para sua pesquisa e ao mesmo tempo auxiliar o aluno a exigir de si mesmo a seguir um caminho que faça o mesmo a ter sucesso em adquirir conhecimento suficiente para passar por todas as UARC superando suas dificuldades e alcançando à aprendizagem do objeto matemático.

> *IV.* A partir das generalizações (empírica-intuititva por parte dos alunos) fomentadas pelas *Intervenções Estruturantes (Reflexivas e Exploratórias)* o professor, que orienta o pensamento mediado pela sequência didática, se apropria dessas verdades "empírico-intuitivas" (sugeridas pelos alunos) e, a partir delas, enuncia o que chamo de *Intervenção Formalizante* (I_f). (CABRAL, 2017, p. 42).

A *Intervenção Estruturante Formal*, também pode ser chamada de *Intervenção Formalizante* (I_f), cujo objetivo é tomar as informações adquiridas pelos alunos, a partir de regularidades que permitem que os alunos percebam que determinada proposição é verdadeira, assim formalizando essa proposição a partir do entendimento dos alunos. Finalmente, após a *Intervenção Formalizante* (I_f) o professor pode avaliar o conhecimento adquirido pelos alunos em sua SD de duas formas, através da *Intervenção Avaliativa Restritiva* (IA_r) e da *Intervenção Avaliativa Aplicativa* (IA_a).

> *V.* As *Intervenção Avaliativa Restritiva* (IA_r) buscam aferir as aprendizagens dos alunos em dois aspectos fundamentais do saber matemático, quais sejam: O que é o objeto matemático em estudo? (o significado, o sentido) e, além disso, como se justificam e operam os algoritmos decorrentes? (propriedades e operações);
> *VI.* As *Intervenção Avaliativa Aplicativa* (IA_a) cuja finalidade é a Resolução de Problemas de Aplicação. Aqui temos o nível mais elevado de avaliação do processo de apreensão conceitual. O aluno precisa ser capaz de mobilizar as noções conceituais associadas às propriedades operacionais decorrentes (algoritmos) em situações que envolvam resolução de problemas aplicados aos diversos contextos reais e/ou abstratos adequados ao seu nível de ensino.
> (CABRAL, 2017, p. 43).

A *Intervenção Avaliativa Restritiva* (IA_r) e *Intervenção Avaliativa Aplicativa* (IA_a), fazem parte das *Intervenções Estruturantes Escritas Pós-formais*, nas quais são intervenções que são elaboradas com a finalidade de serem utilizadas após a reconstrução conceitual de determinado objeto matemático a partir das UARC, onde possui o objetivo de verificar se o aluno foi capaz de adquirir a aprendizagem através da SD, e a primeira etapa para se avaliar a aprendizagem matemática é através do reconhecimento do objeto matemático e seus elementos e a manipulação operatória dos algoritmos e elementos do objeto matemático.

Posteriormente, será realizada a avaliação que é referente aplicabilidade do objeto matemático em meio a elementos do cotidiano ou elementos aplicados cientificamente em laboratórios, ou seja, nessa etapa o aluno irá encontrar solução para determinadas situações – problemas, colocando em prática todo o conhecimento adquirido desde o primeiro contato com a SD até o momento em questão, além de elaborar esquemas empírico-intuitivos que o auxiliarão para chegar à solução da situação a– problema.

Paralelamente às *Intervenções Estruturantes Escritas* ocorre também outro tipo de intervenção proposta por Cabral (2017), que pode ser chamada de *Intervenção Estruturante Oral/verbal*, no qual ele denomina de *Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (I-OMO).*

Para definirmos a I-OMO faz-se necessário voltar ao início das intervenções estruturantes escritas, no qual o primeiro passo são as *Intervenções Iniciais* (I_i), onde o professor/pesquisador faz uso do discurso dialógico-didático referente a o que está escrito na SD, explicando o funcionamento da SD, com a função de estimular o aluno a perceber as regularidades contidas em cada UARC, portanto, o professor/pesquisador necessita de um discurso oral/verbal para expressar tais estímulos aos alunos. Desta forma, Cabral (2017) coloca duas modalidades para as *Intervenções Iniciais* (I_i), que são: *Exploratória Potencial* *($I_i - EP$)* e *Conexão Pontual ($I_i - CP$).*

> Em ambas as modalidades a condução diretiva-dialógica do professor assume o papel de orientador do pensamento que tem como objetivo a (re)construção de um ou mais conceitos já sistematizados do saber disciplinar da Matemática sugerida no currículo escolar. (CABRAL, 2017, p. 45).

Entendo melhor cada uma dessas modalidades, a $I_i - EP$ é aquela onde o professor/pesquisador irá fazer uma série de questionamentos, que segundo Cabral (2017, p. 46), "permite ao professor desencadear uma série de procedimentos investigativos, simulações, conjecturas, hipóteses, analogias, empíricas, que são procedimentos típicos de construção do saber matemático".

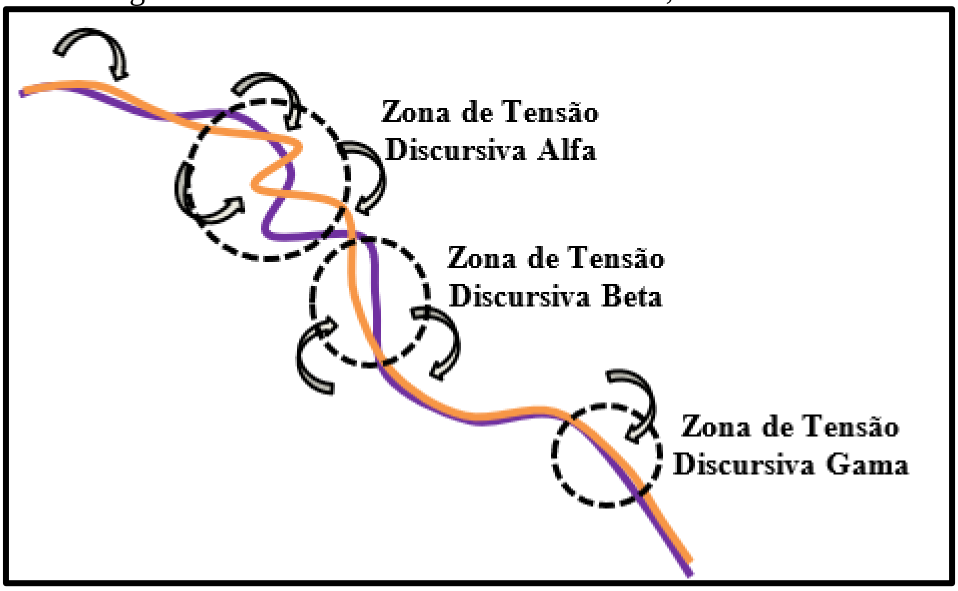
Já a $I_i - CP$ faz com que a $I_i - EP$ seja intencional para conectar cada questionamento realizado a um ponto em determinada UARC, suprindo determinadas dificuldades ou impasses para que os alunos prossigam nas atividades. Além das *Intervenções Escritas* que são de suma importância na SD, pois segundo Cabral (2017, p. 45), "ajudam o professor a modular as aproximações e distanciamentos dos alunos em relação aos objetivos de aprendizagem".

Todas as Intervenções Escritas compõe a estrutura textual da SD, porém com as modalidades da *Intervenção Inicial* (I_i), permitiu que Cabral (2017) elaborasse uma sétima categoria de intervenção já mencionada, chamada de *Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (I-OMO).* Cabral (2017, p. 47) afirma que, "a I-OMO tem a finalidade de manter a objetividade planejada, manter o foco da reconstrução pretendida pela sequência didática". Desta forma, a I-OMO possui um papel fundamental em uma SD, pois permite que o professor/pesquisador estimule o aluno a seguir os objetivos da SD.

> Cabral (2017) considera as IOMO fundamentais por dois motivos: "Por um lado, permitem as modulações do professor no sentido de estimular o aluno em direção aos objetivos estabelecidos pela sequência didática e, por outro lado, em possibilitar futuras reformulações no texto utilizado que media a aprendizagem". (OLIVEIRA, 2018, p. 45).

O aluno, quando realiza as atividades da SD, ele tende a desviar o direcionamento do conhecimento do objetivo da SD, e o professor tem o papel de fazer com que o aluno retorne para o objetivo da SD através das I-OMO's, a essa prática do professor, Cabral (2017) denominada de Zona de Tensão Discursivas, que são contornos que alinham os desvios dos alunos com as intenções do professor na SD, e que Cabral (2017) classifica essas I-OMO's em três categorias, que são chamadas de Alfa, Beta e Gama.

Figura 4: Zonas de Tensão Discursivas Alfa, Beta e Gama.



Fonte: Adaptado de Cabral (2017).

Antes de definirmos as Zonas de Tensão Discursiva Alfa, Beta, e Gama, iremos entender o funcionamento das linhas "Lilás" e "Laranja" na Figura 4, no qual as setas indicadas na Figura 9 significam as intervenções do professor/pesquisador para que o aluno siga na linha direcionada do objetivo da SD.

A linha "Lilás" representa as pretensões didáticas do professor/pesquisador, ou seja, o percurso previsto das aprendizagens desde a idealização da SD. Já a linha "Laranja" mostra as ações dos alunos a partir das provocações do texto escrito associadas às intervenções orais/verbais desenvolvidas pelo professor/pesquisador ao longo do processo. Representa o caminho percorrido pelo aluno diante do objeto de aprendizagem. Agora podemos definir as Zonas de Tensão Discursivas, descrita por Cabral (2017).

> A *Zona Alfa* é a zona inicial onde as primeiras articulações argumentativas são propostas em direção aos objetos de aprendizagem. Por se tratar de um processo de redescoberta conceitual esse momento é marcado, em geral, por pequenos avanços e frequentes intervenções do professor. (OLIVEIRA, 2018, p. 47).

A *Zona Alfa* funciona baseada no domínio dos alunos diante do objeto matemático, quanto maior for o domínio do aluno, menor será as intervenções do professor, o contrário também ocorre, quanto menor o domínio do aluno diante do objeto matemático, maior será as intervenções do professor.

> A *Zona Beta* é a zona intermediária marcada por uma tensão discursiva de baixa intensidade. Aqui o professor percebe que certas conquistas de aprendizagens fundamentais estão sendo consolidadas e os alunos aprendizes já sinalizam atitudes de autonomia em relação tanto às interpretações do protocolo escrito (isto é, a sequência didática) que lhes dirigem o pensamento quanto nas associações entre essas aquisições parciais e fundamentais e os desdobramentos desses conhecimentos na aquisição de novas percepções. (OLIVEIRA, 2018, p. 47).

Já na Zona *Beta*, o aluno já começa entender a funcionalidade do objeto matemático, logo o professor intervém com pouca frequência, permitindo com que o aluno seja mais autônomo que na Zona Alfa.

> Por fim, a *Zona Gama* enfatiza a avaliação do nível de segurança conceitual e algorítmica do aluno. É um momento em que o professor percebe que o domínio do objeto de conhecimento já se mostrou relativamente consolidado pela classe e, então, passa a propor situações problemáticas mais complexas, inclusive intervindo no discurso. (OLIVEIRA, 2018, p. 48).

A Zona Gama, é a zona onde o professor percebe que o aluno já se sente seguro em solucionar problemas um pouco mais complexos que anteriormente, pois já possui certo domínio do objeto matemático, e nesse momento o professor aproveita para avaliar o conhecimento adquirido pelo aluno, e por fim, o aluno alcançou o objetivo da SD.

> Durante o processo nas zonas Alfa e Beta, o professor busca levar o aluno a refletir no sentido de “mantê-lo sobre os trilhos” dos objetivos de aprendizagem organizados na sequência didática proposta. Na Zona Gama, o professor pode promover intervenções no sentido de “retirá-los dos trilhos” desses objetivos. (OLIVEIRA, 2018, p. 48).

Em uma Sequência Didática (SD), quando estruturada e elaborada conforme a Unidade de Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC), proposta por Cabral 2017, requer bastante atenção e dedicação. Pois, percebe-se que existem diversas definições, que quando visualizada de forma geral, é bastante complexa, e com isso, nos fornece resultados bem detalhados do objetivo da aplicação da SD, pois não se preocupa apenas em fornecer o resultado da aprendizagem, mas também informações importantes de todo o processo de ensino – aprendizagem até o objetivo final da SD.

1.4 - RECURSO DE APRENDIZAGEM

Neste tópico, apresentamos o recurso pedagógico utilizado para auxiliar os alunos no processo de resolução das questões propostas na SD. Desta forma, com o princípio de alcançar os objetivos de cada atividade da sequência didática, tomamos o uso da calculadora como objeto tecnológico no processo de ensino e aprendizagem de progressão geométrica.

Assim, consideramos os estudos de Fedalto (2006), em que apresenta na sua dissertação sobre “O imprevisto futuro das calculadoras nas aulas de matemática no ensino médio”.

Desde os primórdios das operações básicas da matemática, existiram diversos instrumentos para realização de cálculos, principalmente as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, além da expansiva evolução destes instrumentos.

Um dos instrumentos mais comum atualmente, é a chamada calculadora eletrônica, em que possui diversos modelos com diferentes funções adaptadas para cálculos matemáticos distintos. Segundo Fedalto (2006, p. 26), “a ideia de uso de uma calculadora seria explorar os conteúdos aproveitando suas capacidades operatórias e desenvolvendo atividades que exijam dos alunos a tomada de decisões, a elaboração de estratégias e a resolução de problemas.

Desta forma, o professor responsável por optar pelo uso da calculadora em suas aulas, além de possuir domínio da ferramenta eletrônica, exigiria um planejamento adequado para inserção do instrumento como recurso didático, estudo e preparação para realizar uma abordagem conectada com as atividades realizadas.

> A habilidade de cálculo, a memorização de fórmulas tem sua importância e não devem ser extintas das aulas de Matemática. O que estamos destacando aqui é que a Matemática pode ser estudada e ensinada com o apoio de instrumentos como a calculadora, o computador; e que nossa preocupação deve voltar-se a explorar conceitos, fórmulas e regras de forma que o aluno compreenda o que está fazendo e possa usar os seus conhecimentos em problemas que, na medida do possível, aproximem-se da realidade. (FEDALTO, 2006, p.27).

O uso de calculadoras em atividades do cotidiano é muito comum, principalmente no ramo comercial, em venda de produtos, contabilidade, entre outros, porém ainda é uma barreira seu uso nas aulas de matemática, no qual está diretamente ligada ao uso de cálculos para solucionar problemas. Conforme aponta Fedalto (2006), ironicamente, talvez o único lugar onde não se pode usar uma calculadora seja a sala de aula de matemática, a ideia de que um instrumento de cálculo não seja explorado justamente nas aulas de Matemática, é estranha.

No ambiente escolar brasileiro, infelizmente, os alunos não foram ensinados a utilizar a calculadora para aprimorar seus conhecimentos matemático, no qual, há a ambição por parte dos discente em utilizar o instrumento de cálculo para valorizar sua nota ao invés do aprendizado. Desta forma, fica como esforço do professor em inserir nas suas aulas o uso de calculadoras, como forma de desmitificar a cultura de que usar calculadora em sala de aula não é proveitoso para os alunos.

O uso da calculadora, de forma correta e consciente, é importante, uma vez que, a habilidade de cálculo, a memorização de fórmulas pode ser de fácil compreensão com o auxílio de ferramentas eletrônicas, no qual possibilita explorar padrões e regularidades, capaz de investigar situações matemáticas que geram equações e fórmulas.

1.**5** – ANÁLISE MICROGENÉTICA E ANÁLISE DO DISCURSO

Esta pesquisa possui o intuito de verificar as potencialidades de uma Sequência Didática, para que isso ocorra, é importante realizar uma análise minuciosa do processo de ensino e aprendizagem, isto é, o interesse não é apenas em saber se o aluno melhora sua compreensão do objeto matemático ao analisar as respostas em atividades propostas ao mesmo, porém, descobrir quais caminhos e processos foram considerados para essa evolução da aprendizagem.

> Ao falarmos de potencialidade não se refere ao desempenho do aluno em resolução de problemas e exercícios após aplicação da sequência, mas sim, ao processo, aos indícios de aprendizagem do aluno percebidas em sua escrita e oralidade durante a execução das atividades em níveis epistemológicos revelados em seu discurso.
> (SILVA, 2020, p. 21-22).

Para verificarmos as potencialidades da Sequência Didática proposta nesta pesquisa, apostamos na análise microgenética e análise do discurso como aporte investigativo dos indícios de aprendizagem do aluno mediante a aplicação da SD e das intervenções orais do professor.

Para realizarmos esta investigação, é importante verificar quais caminhos teóricos levaram aos aportes da análise microgenética e análise do discurso. Desta forma, como Proposto por Zabala (1998) através das Sequências Didáticas e Cabral (2017) com as UARC's, é imposto que no processo de aplicação da SD, o aluno passe por um processo de interação entre sujeitos e objeto e cognitivo, em que buscamos estudar a Teoria Histórico-Cultural de Lev Vygotsky, em que mostrou que a dimensão histórica, a cultura e a interação social são os principais elementos que influenciam no desenvolvimento mental.

> Lev Vygotsky nasceu na Bielorrússia, na cidade de Orsha, em 1986. Graduou-se em Direito e estudou Filosofia e História, porém dedicou boa parte de sua vida aos estudos de Psicologia, mesmo sem ter tido formação na área. Seus estudos foram voltados para o desenvolvimento psicológico do ser humano, dentro da perspectiva de uma psicologia materialista dialética, valorizando o fator sócio-histórico em suas construções teórico-metodológicas. (OLIVEIRA, 2018, p. 48-49).

O estudo Histórico-Cultural de Vygotsky é uma abordagem metodológica utilizado dentro do campo educacional e da psicologia para investigações das interações, em que, a cultura presente no indivíduo influencia suas ações cognitivas e linguística, segundo Oliveira (2018, p. 49), "a cultura se torna parte da natureza de cada pessoa, onde as funções psicológicas são um produto da atividade cerebral".

Assim, tais interações, são identificadas através das transformações genéticas, conforme afirma Gonçalves (2019, p. 35), "os "detalhes" que sinalizam os indícios de aprendizagem que acontecem nas interações entre professor-alunos e alunos-alunos".

Isso nos possibilita analisar o pensamento e o discurso entre os sujeitos para entendermos a relação entre as funções mentais, e a relação entre as formas da atividade da consciência. Na tentativa de conhecer as relações entre as funções mentais e de consciência, Vygotsky procurou analisar a decomposição da complexidade do todo mental em seus elementos.

> A psicologia que decompõe o pensamento verbal em seus elementos na tentativa de explicar sua as características buscarão sem eficácia a unidade que é característica do todo. Essas características são inerentes ao fenômeno apenas como um todo unificado. Quando o todo é analisado em seus elementos, essas características se desfazem. Em sua tentativa de reconstruir essas características, o investigador fica sem alternativa a não ser procurar por fontes externas, formas mecânicas de interação entre os elementos. (VYGOTSKY, 1934, p. 43, tradução nossa).

Desta forma, a análise da unidade do pensamento se torna uma ilusão, em que devem ser substituídas por relações mecânicas externas entre os processos de pensamento e discurso, para reconstruir as características do todo.

Assim, o sujeito ao expressar-se de forma oral, cada palavra se refere a um grupo de objeto que devem ser generalizadas. De uma perspectiva psicológica, segundo Vygotsky (1934, p. 45, tradução nossa), "o significado da palavra é, antes de mais nada, uma generalização. Não é difícil ser isso generalização é um ato verbal de pensamento; seu reflexo da realidade difere radicalmente daquele de sensação ou percepção imediata". Isto é, o ato de discursar é uma transição da sensação de pensar que implica na realidade do sujeito.

> Isso implica que a realidade se reflete na consciência de uma forma qualitativa das diferentes maneiras de pensar e na sensação imediata. Estas diferenças são principalmente uma função de uma reflexão generalizada da realidade. Portanto, a generalização no significado da palavra é um ato de pensar no verdadeiro sentido da palavra. Ao mesmo tempo, no entanto, o significado é uma parte inseparável da palavra; pertence não apenas ao domínio do pensamento, mas ao domínio de discurso. Uma palavra sem significado não é uma palavra, mas um som vazio. Uma palavra sem significado não pertence mais ao domínio da fala. Não se pode dizer que palavra significa o que dissemos anteriormente sobre os elementos da palavra considerados separadamente. A palavra significa discurso ou pensar? Os dois; é uma unidade de pensamento verbal. É óbvio, então, que nosso método deve ser o da análise semântica. Nosso método deve se basear na análise do aspecto significativo do discurso; deve ser um método para estudar o significado verbal. (VYGOTSKY, 1934, p. 45, tradução nossa).

Nesse sentido, a Teoria Histórico – Cultural de Vygotsky nos possibilita obter uma relação com a organização didática, uma vez que a relação entre a função do pensamento e do discurso, necessitam da interação social para que seja investigada.

> É necessário haver uma organização didática por parte do professor, a qual perpassa desde a sua intencionalidade com cada atividade elaborada, até a escolha de uma metodologia adequada que possibilite a interação dialógica entre os pares durante o processo de (re)construção do conhecimento matemático. (GONÇALVES, 2019, p. 35).

Vygotsky aponta que para que haja a reconstrução do conhecimento, faz-se necessário realizar uma análise genética da relação entre o pensamento e o discurso, nesse sentido, tal relação não é constante, isto é, ao longo da análise, é perceptível algumas divergências, mas que podem ser direcionadas novamente para que haja uma convergência.

> O significado quantitativo e qualitativo desta relação muda ao longo do desenvolvimento de pensamento e discurso. Essas funções não se desenvolvem em paralelo, nem o seu relacionamento é constante. As curvas que representam seu desenvolvimento convergem, divergem e se cruzam. Em um ponto do processo, essas curvas podem se mover suavemente ao longo de um curso paralelo, até mesmo fundindo-se um com o outro. Em outro, eles podem se ramificar um do outro novamente. Isso é verídico para o desenvolvimento de discurso e pensamento na filogênese e ontogênese. (VYGOTSKY, 1934, p. 95, tradução nossa).

A formação do conhecimento é construída a partir da interação entre sujeitos e objetos, e só é possível isso ocorrer, pois na evolução da espécie e no processo de formação metafísica do sujeito, já há o desenvolvimento de pensamento e discurso. Segundo Vygotsky (1934, p. 115, tradução nossa), “um grande impedimento para o estudo de conceitos tem sido a falta de métodos experimentais que permitiriam a investigação de sua formação e sua natureza psicológica”.

Assim, foi possível traçar para relacionar o desenvolvimento psicológico e a interação social, no qual Vygotsky criou a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). Conforme afirma

Moll (1996) *apud* Alves (2004 - 2005, p. 11), “a ZDP é um conceito conector e um dos mais influentes da Teoria Histórico - Cultural de Vygotsky”.

Conforme destaca Cabral (2004), Vygotsky considera dois níveis de análise do processo de desenvolvimento da aprendizagem, em que nomeia como Nível de Desenvolvimento Real (NDR) das funções mentais da criança e Nível de Desenvolvimento Potencial (NDP), uma vez que, conforme afirma Vygotsky (1994) *apud* Cabral (2004, p. 96), “um fato bem estabelecido e conhecido é que o aprendizado deve ser combinado com o nível de desenvolvimento da criança". Cabral (2004) define a NDR e a NDP como:

> A NDR é estabelecida como resultado de ciclos de desenvolvimentos já concluídos, em que, normalmente, é aceito como indicativo da capacidade daquilo que as crianças fazem por si mesmas. A NDP é estabelecida através da solução proposta pela criança sob orientação de um adulto, ou de contribuições de sujeitos mais capazes.
> (CABRAL, 2004, p. 96).

Desta forma, conforme afirma Alves (2004 - 2005) a ZDP é determinada pela distância entre a NDR e a NDP, e que pode ser definida de diversas formas, porém a mais citada, segundo Vygotsky (1984a) apud Alves (2004 – 2005, p. 12) é dada como “a distância entre a NDR, que se costuma determinar através da solução independente de um problema, e a NDP, determinada através de soluções sob orientações de outros sujeitos mais capazes”.

Logo, a partir da definição de ZDP é possível fazer relação com o processo de ensino e aprendizagem, mesmo que tais processos sejam independentes da Zona de Desenvolvimento Proximal, assim, Alves (2004 – 2005, p.14) aponta que, “o processo de ensino e aprendizagem se apoia em processos imaturos, em que objetiva avançar no desenvolvimento para gerar Zonas de Desenvolvimento Proximal”. Desta forma, Cabral (2004) apresenta os conceitos de Andaimes e Regras de Contingência, que contribuem para o estudo da ZDP.

O conceito de Andaimes pode ser compreendido, conforme afirma Damazio (1997) *apud* Cabral (2004, p. 101), “como um processo que ocorre por meio de pistas fornecidas pelo professor. Tais pistas podem inclusive ser perguntas que são realimentadas pelas respostas das crianças, bem como pelo feedback do professor”.

O conceito de Andaime sustenta o padrão da ZDP durante o processo e construção do conhecimento, isto é, a ajuda do professor para o aluno, podem variar de um estímulo mínimo para que o aluno se concentre na atividade, até uma ajuda à nível de desenvolver a resolução de um problema.

A Regra de Contingência, segundo Coll (1994) *apud* Cabral (2004, p. 102), “estabelece que a ajuda dada à criança deve ser inversamente proporcional à sua aptidão”. Desta forma, o conceito de Andaimes e a Regra de Contingência estão diretamente ligados ao conceito de

ZDP, assim como, só são possíveis através da interação social para a construção do conhecimento.

Os estudos de Vygotsky sobre a Teoria Histórico – Cultural, a partir das definições das funções do pensamento e discurso, a interação social, a ZDP, a partir da análise genética do sujeito, inspirou o desenvolvimento da abordagem metodológica da Análise Microgenética (AM), em que relaciona o campo educacional e psicológico para investigar os processos de ensino e aprendizagem. A partir da concepção de Góes (2000), a AM pode ser entendida como:

> Trata-se de uma forma de construção de dados que requer a atenção a detalhes e o recorte de episódios interativos, sendo o exame orientado para o funcionamento dos sujeitos focais, as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação, resultando num relato minucioso dos acontecimentos. (GÓES, 2000, p. 9).

A partir das relações e condições sociais, como estabelece Góes (2000), é possível identificar as transformações genéticas, ou seja, verificar os indícios de aprendizagem que ocorrem nas interações entre professor e alunos. Segundo Góes (2000, p. 9-10), "frequentemente, dadas as demandas de registro implicadas, essa análise é associada ao uso de videogravação, envolvendo o domínio de estratégias para a filmagem e a trabalhosa atividade de transcrição".

> A visão genética aí implicada vem das proposições de Vygotsky (1981, 1987a) sobre o funcionamento humano, e, dentre as diretrizes metodológicas que ele explorou, estava incluída a análise minuciosa de um processo, de modo a configurar sua gênese social e as transformações do curso de eventos. Essa forma de pensar a investigação foi denominada por seus seguidores como "análise microgenética". (GÓES, 2000, p. 11).

Desta forma, esta análise exige uma atenção detalhada e recortes dos episódios interativos, isto é, trata-se de um relato minucioso dos eventos ocorridos na sala de aula, e que posteriormente será transcrita.

Com base nos estudos de Vygotsky, conforme afirma Góes (2000, p. 14), "Wertsch (1985) define a análise microgenética como aquela que envolve o acompanhamento minucioso da formação de um processo, detalhando as ações dos sujeitos e as relações interpessoais, dentro de um curto espaço de tempo". Isto é, a análise dos eventos é dada por sessões de curtos períodos de tempo, uma vez que, o curto prazo permite identificar as transições das ações que envolvem o processo de ensino e aprendizagem.

> Essa análise não é micro porque se refere à curta duração dos eventos, mas sim por ser orientada para minúcias indiciais – daí resulta a necessidade de recortes num tempo que tende a ser restrito. É genética no sentido de ser histórica, por focalizar o movimento durante processos e relacionar condições passadas e presentes, tentando explorar aquilo que, no presente, está impregnado de projeção futura. É genética, como sociogenética, por buscar relacionar os eventos singulares com outros planos da cultura, das práticas sociais, dos discursos circulantes, das esferas institucionais.
> (GÓES, 2000, p. 15).

Desta forma, as ações verbais dos estudantes serão analisadas a fim de representar o nível de absorção do conhecimento, no caso desta pesquisa, a compreensão do objeto matemático ensinado, em que ao final da análise teremos os indícios de aprendizagem que possibilitará uma avaliação completa dos conceitos matemáticos envolvidos a partir da aplicação da SD e das intervenções do docente.

Assim, na proposta enunciativa-discursiva, a AM é articulada com as contribuições da Análise do Discurso (AD) conforme os estudos de Mortimer e Scott (2002), em que, para esta pesquisa, o foco da análise estão restritas às ações verbais e na linguagem em cada recorte a ser estudado.

As ações verbais e a linguagem possuem diversas maneiras de serem analisadas, isto é, a linguagem e o discurso podem ser analisados a partir de sistemas de signos ou sistema de regras formais, já na perspectiva linguística, podem ser analisadas de maneira gramatical ou normativa. Para Orlandi (2009) a origem da AD se deu a partir do interesse dos estudiosos em entender a linguagem de maneira particular, uma vez que há várias tendências do estudo da língua.

Conforme destaca Orlandi (2009), a Análise do Discurso não trata da língua, gramática, mas do discurso, isto é, o percurso da palavra, a prática da linguagem, em outra concepção, o estudo da fala dos sujeitos. Orlandi (2009, p. 15), ainda afirma que, “na Análise do Discurso, procura-se compreender a língua fazendo sentido, enquanto trabalho simbólico, parte do trabalho social geral, constitutivo do homem e da sua história”. Desta forma, a AD proporciona uma relação entre o sujeito e a sua realidade sócio-cultural e natural por meio da linguagem.

Para esta pesquisa, o propósito é realizar a AD para verificar os indícios de aprendizagem, apesar de considerarmos importante o papel da linguística, porém nosso foco é na perspectiva pedagógica para entender a construção do conhecimento através do processo interativo.

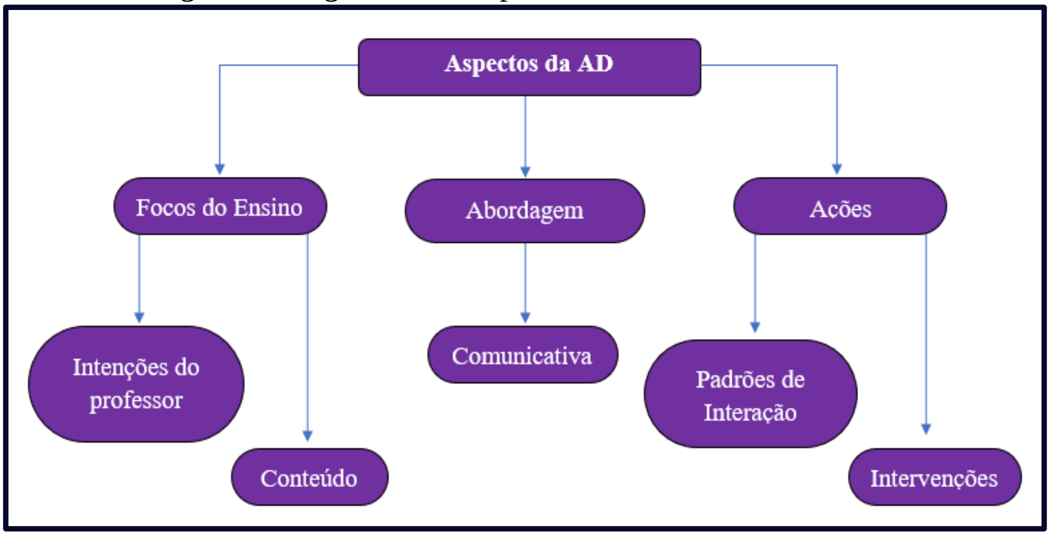
Segundo Mortimer e Scott (2002) *apud* Silva (2020, p. 22) “definem a análise do discurso como uma ferramenta para estudar a forma como os professores podem guiar as interações em sala de aula para que resultem na construção de significados”.

A partir disso, Mortimer e Scott (2002) desenvolvem uma estrutura analítica para analisar os processos interativos e a produção de significados que surgem do discurso de professores e alunos no ambiente escolar.

> Os significados são vistos como polissêmicos e polifônicos, criados na interação social e então internalizados pelos indivíduos. Além disso, o processo de aprendizagem não é visto como substituição das velhas concepções, que o indivíduo já possui antes do processo de ensino, pelos novos conceitos científicos, mas como a negociação de novos significados num espaço comunicativo no qual há o encontro entre diferentes perspectivas culturais, num processo de crescimento mútuo. As interações discursivas são consideradas como constituintes do processo de construção de significados. (MORTIMER e SCOTT, 2002, p. 284).

A estrutura analítica da AD proposta por Mortimer e Scott (2002) são baseadas em cinco aspectos inter-relacionados organizadas conforme o diagrama da Figura 5, em que descrevem o papel do professor, no qual possibilita uma maior intencionalidade nas intervenções do professor com a pretensão de objetivos de aprendizagem do aluno.

Figura 5: Diagrama dos Aspectos da Análise do Discurso.



Fonte: adaptado de Mortimer e Scott (2002).

Mortimer e Scott (2002), conforme os princípios da Teoria de Vygotsky, descreve de forma detalhada os aspectos da AD. Inicialmente, destacamos no Quadro 2 os *Focos de Ensino* e as *Intenções do professor*.

Quadro 2: Focos de Ensino – Intervenções do professor.

Intenções do professor	**Focos de Ensino**
Criando um problema	Engajar os estudantes, intelectual e emocionalmente, no desenvolvimento inicial da 'estória científica'.

Explorando a visão dos estudantes	Elicitar e explorar as visões e entendimentos dos estudantes sobre ideias e fenômenos específicos.
Introduzindo e desenvolvendo a 'estória científica'	Disponibilizar as ideias científicas (incluindo temas conceituais, epistemológicos, tecnológicos e ambientais) no plano social da sala de aula.
Guiando os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e dando suporte ao processo de internalização	Dar oportunidades aos estudantes de falar e pensar com as novas ideias científicas, em pequenos grupos e por meio de atividades com a toda a classe. Ao mesmo tempo, dar suporte aos estudantes para produzirem significados individuais, internalizando essas ideias.
Guiando os estudantes na aplicação das ideias científicas e na expansão de seu uso, transferindo progressivamente para eles o controle e responsabilidade por esse uso	Dar suporte aos estudantes para aplicar as ideias científicas ensinadas a uma variedade de contextos e transferir aos estudantes controle e responsabilidade (Wood et al., 1976) pelo uso dessas ideias.
Mantendo a narrativa: sustentando o desenvolvimento da 'estória científica'	Prover comentários sobre o desenrolar da 'estória científica', de modo a ajudar os estudantes a seguir seu desenvolvimento e a entender suas relações com o currículo de ciências como um todo.

Fonte: Mortimer e Scott (2002).

Já os *Focos de Ensino* na perspectiva de *Conteúdos*, podem ser caracterizadas, conforme Mortimer e Scott (2002), como descrição, explicação e generalização.

> ● Descrição: envolve enunciados que se referem a um sistema, objeto ou fenômeno, em termos de seus constituintes ou dos deslocamentos espaço-temporais desses constituintes;
> ● Explicação: envolve importar algum modelo teórico ou mecanismo para se referir a um fenômeno ou sistema específico;
> ● Generalização: envolve elaborar descrições ou explicações que são independentes de um contexto específico.
> (MORTIMER e SCOTT, 2002, p. 287).

A *Abordagem Comunicativa*, na descrição de Mortimer e Scott (2002), são classificadas em Interativo/Dialógico, Não-interativo/Dialógico, Interativo/de Autoridade e Não-interativo/de Autoridade.

> ● Interativo/dialógico: professor e estudantes exploram ideias, formularam perguntas autênticas e oferecem, consideram e trabalham diferentes pontos de vista;
> ● Não-interativo/dialógico: professor reconsidera, na sua fala, vários pontos de vista, destacando similaridades e diferenças;
> ● Interativo/de autoridade: professor geralmente conduz os estudantes por meio de uma sequência de perguntas e respostas, com o objetivo de chegar a um ponto de vista específico;
> ● Não-interativo/de autoridade: professor apresenta um ponto de vista específico.
> (MORTIMER e SCOTT, 2002, p. 288).

Mortimer e Scott (2002) também desenvolveram a Tríade I-R-A as ações do tipo *Padrões de Interação*, em que destaca a Iniciação do Professor (I), Resposta do Aluno (R) e a Avaliação do Professor (A).

> Em certas situações interativas o professor pode intervir com a intenção de sustentar a elaboração de um enunciado feita pelo aluno, geralmente são intervenções curtas nas quais o professor repete parte do que o aluno acabou de falar, ou então, fornece uma espécie de feedback para que o mesmo elabore melhor sua fala. (GONÇALVES, 2019, p. 40).

Em contrapartida Mortimer e Scott (2002) apontam que dessas interações surgem cadeias não triádicas, por exemplo, I-R-P-R-P.… ou I-R-F-R-F.… em que “P” significa uma ação discursiva em que possibilita o prosseguimento da fala do aluno e “F” representa o feedback para que o aluno desenvolva melhor sua resposta.

O Quadro 3 apresenta especificamente as *Intervenções do professor* e a relação entre o foco e as ações do professor que caracterizam cada uma.

Quadro 3: Intervenções do professor.

Intervenções do professor	**Foco**	**Ação – o professor**
Dando forma aos significados	- Explorar as ideias dos estudantes. - Trabalhar os significados no desenvolvimento da estória científica.	Introduz um termo novo; parafrasear uma resposta do estudante; mostra a diferença entre dois significados.
Selecionando significados		Considera a resposta do estudante na sua fala; ignora a resposta de um estudante.
Marcando significados chaves		Repete um enunciado; pede aos estudantes que repita um enunciado; estabelece uma sequência I-R-A com um estudante para confirmar uma

		ideia; usa um tom de voz particular para realçar certas partes do enunciado.
Compartilhando significados	Tornar os significados disponíveis para todos os estudantes da classe.	Repete a ideia de um estudante para toda a classe; pede a um estudante que repita um enunciado para a classe; compartilha resultados dos diferentes grupos com toda a classe; pede aos estudantes que organizem suas ideias ou dados de experimentos para relatarem para toda a classe.
Checando o entendimento dos estudantes	Verificar que significados os estudantes estão atribuindo em situações específicas.	Pede a um estudante que explique melhor sua ideia; solicita aos estudantes que escrevam suas explicações; verifica se há consenso da classe sobre determinados significados.
Revendo o progresso da estória científica	Recapitular e antecipar significados.	Sintetiza os resultados de um experimento particular; recapitula as atividades de uma aula anterior; revê o progresso no desenvolvimento da estória científica até então.

Fonte: Mortimer e Scott (2002).

A Estrutura Analítica e os Aspectos da Análise do Discurso apresentados são importantes para a construção da sequência didática e para a análise dos resultados desta pesquisa, pois os indícios de aprendizagem passarão por Análise Microgenética associadas ao discurso adotado nas intervenções e intenções do professor.

1.6 – INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Neste tópico, apresentamos os objetos teóricos e pedagógicos que tomamos como base para a elaboração das atividades em cada UARC de nossa SD. Desta forma, com o princípio de alcançar os objetivos de cada atividade da sequência didática, tomamos como tendência da educação matemática, o processo de Investigação Matemática (IM) em todas as URAC’s, e o uso da calculado como objeto tecnológico no processo.

Dentre as tendências da educação matemática, o que nos inspirou no uso da investigação matemática para a realização das atividades da sequência didática, foi a revisão da literatura sobre o ensino de progressão geométrica, realizada nesse texto, em que os autores apresentam propostas de ensino no qual os alunos se tornam ativos no processo de ensino a partir de investigações de objetos matemáticos.

Assim, consideramos como base teórica o estudo de Ponte *et al.* (1998), cujo título de seu livro é "Histórias de Investigações Matemáticas", no qual seu estudo surgiu a partir do Projeto Matemática Para Todos — Investigações na Sala de Aula, e teve por objetivo estudar os problemas e dilemas profissionais bem como o conhecimento profissional necessário ao professor que pretende envolver os seus alunos neste tipo de atividade matemática.

Ponte *et al.* (1998) descreve que "uma atividade matematicamente rica por parte dos alunos surge, em especial, quando o professor valoriza e fomenta nas aulas a realização, discussão e avaliação de atividades de investigação". Desta forma, podemos comparar a sequência didática para o ensino de matemática como uma fomentar a investigação matemática através de resolução de problemas.

> "Uma vez que existe uma profusão de formulações sobre o que se entende por "investigações matemáticas", é necessário explicitar o sentido que lhes atribuímos neste projecto. As investigações matemáticas são parte do que alguns autores designam por "actividade matemática", o que corresponde a identificar aprender Matemática com fazer Matemática". (PONTE *et al.* ,1998, p. 8).

Desta forma, a IM gera diversas possibilidades de ensino, no qual o aluno aprende através do fazer e do analisar a partir da colaboração entre os atores que promovem o ensino.

Segundo Santos (2018, p. 21), "com a inserção da investigação no ensino de matemática, o mesmo fica cheio de perguntas e inquietações que levam os alunos a perceberem o segredo que norteiam a construção do conhecimento matemático".

Desta forma, o professor passa a valorizar e incentivar a criatividade tendo uma participação ativa dos alunos, assim, a relação professor-aluno, torna-se fundamental do processo de ensino e aprendizagem, no qual o professor deixa de ser o centro do processo de ensino do objeto matemática, enquanto os alunos percebem o segredo que norteiam a construção do conhecimento matemático, isto é, o aluno se torna ativo no processo de ensino e aprendizagem.

Conforme afirma Varizo (2007) *apud* Santos (2018, p. 21-22), a investigação matemática "tem por objetivo oferecer oportunidade para os alunos vivenciarem uma experiência semelhante ao do investigador matemático e assim motivá-los a estudarem matemática".

Neste caso, as atividades investigativas proporcionam aos alunos, a possibilidade de, segundo Love (1988) *apud* Ponte *et al.* (1998, p. 9):

- identificar e iniciar os seus próprios problemas;
- expressar as suas próprias ideias e desenvolvê-las ao resolver problemas;
- testar as suas ideias e hipóteses de acordo com experiências relevantes;
- defender racionalmente as suas ideias e conclusões e submeter as ideias dos outros à crítica ponderada

A IM é uma importante ferramenta no processo educacional, uma vez que, segundo Brocardo e Oliveira (2016) apud Santos (2018):

> [...] ajuda a trazer para sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir, como um matemático, não só na formulação de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e professor. (BROCADO e OLIVEIRA, 2016, *apud* SANTOS, 2018, p. 22).

Brocardo e Oliveira (2016) apud Santos (2018), apontam que, é preciso cumprir quatro etapas para realizar investigação matemática, que são:

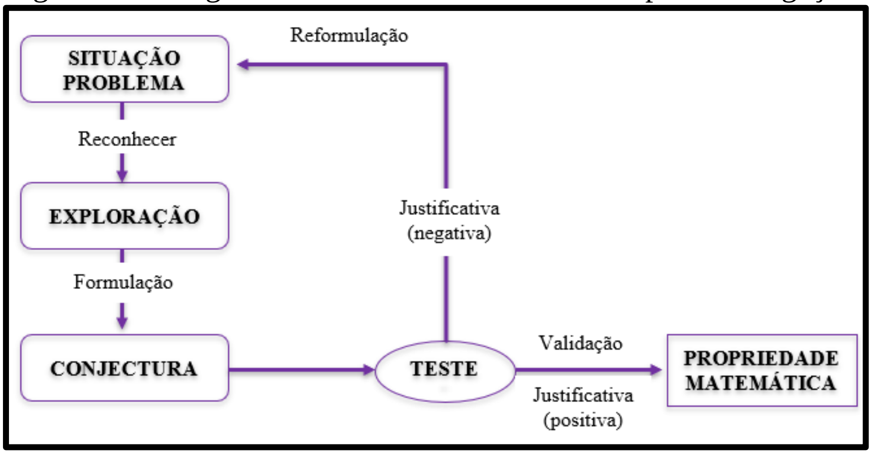
- *Exploração e formulação*, no qual o aluno deve reconhecer e explorar a situação problemática, e formular uma questão (levantar questionamentos);
- *Conjecturar*, em que deverá organizar dados e formular conjecturas;
- *Testes e reformulação*, o aluno será capaz de realizar testes com os dados obtidos e refinar a conjectura;
- *Justificativa e validação*, no qual o aluno justificará sua conjectura e avaliará os resultados do raciocínio.

Assim, percebe-se que a IM está diretamente relacionada com a resolução de problemas. Desta forma, Ponte *et al.* (1998) afirma que:

> “Um conceito muito próximo de investigação matemática é o de resolução de problemas. Os dois termos são usados muitas vezes de modo indistinto. Ambas as noções se referem a processos matemáticos complexos e ambas envolvem actividade fortemente problemática. A resolução de problemas envolve uma grande variedade de tarefas, tanto de cunho mais fechado como mais aberto, tanto relativas a situações puramente matemáticas como referentes a situações da vida real. “Actividades investigativas” ou “investigações matemáticas” designam, no contexto deste projecto, um tipo de actividade que dá ênfase a processos matemáticos tais como procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjecturas, reflectir e generalizar. São actividades de cunho muito aberto, referentes a contextos variados (embora com predominância para os exclusivamente matemáticos) que podem ter como ponto de partida uma questão ou uma situação proposta quer pelo professor, quer pelos alunos”. (PONTE *et al.*, 1998, p. 9).

O fluxograma da Figura 6 exemplifica os caminhos a percorrer, com base nas quatro etapas acima, para que haja investigação matemática.

Figura 6: Fluxograma da dinâmica das atividades por investigação.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

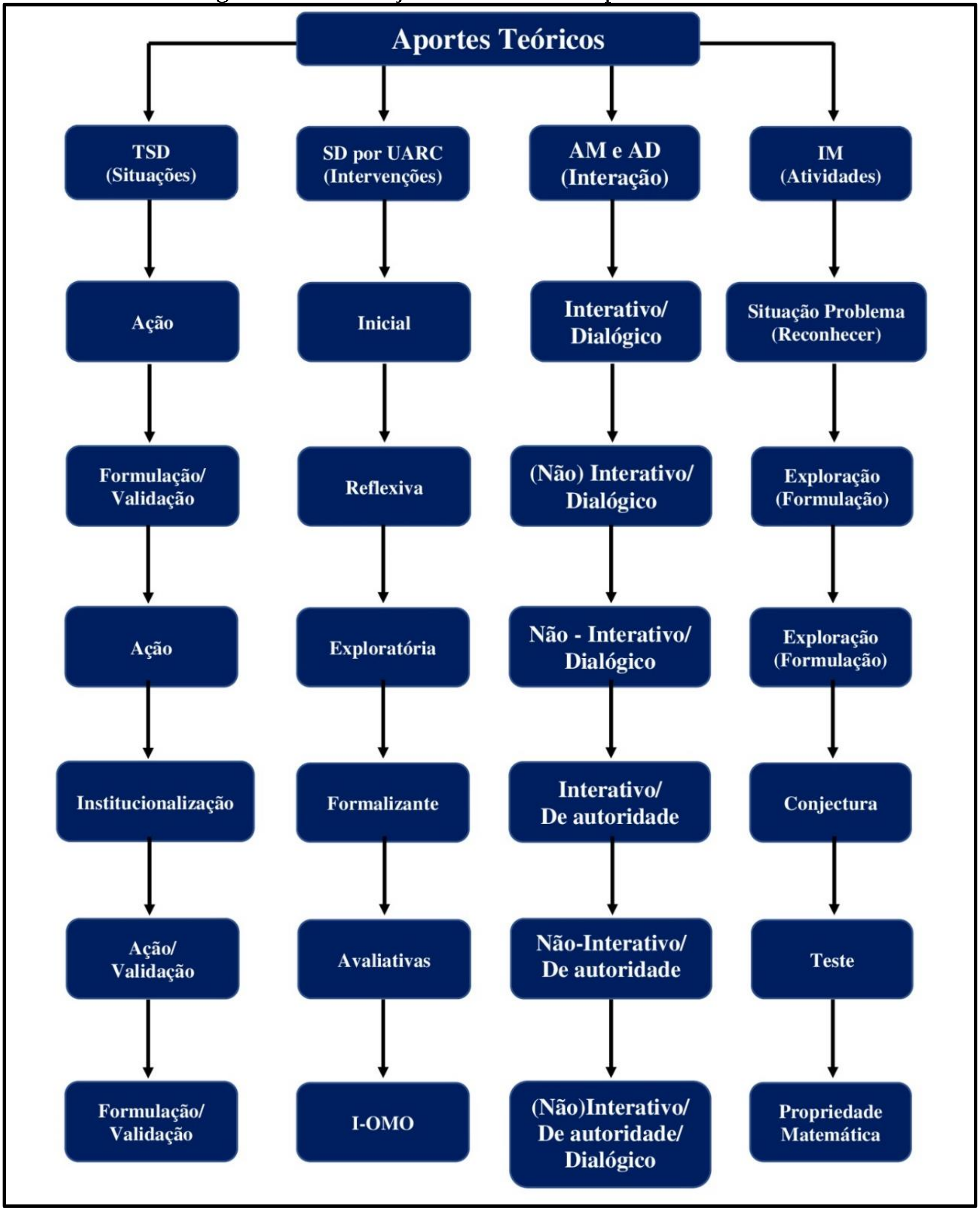
Observa-se no fluxograma que existe algumas fases de transição, tais como, reconhecer, formulação, validação, em que a justificativa é positiva, e reformulação, em que a justificativa é negativa, desta forma, desta forma, é de suma importância que o ato investigativo seja bem-sucedido nas tarefas propostas, e isso depende do modo como o professor orienta os alunos no processo de resolução das atividades, e como o aluno se comporta mediante os desafios enfrentados.

1.7 – ARTICULAÇÃO ENTRE OS APOSTES TEÓRICOS

Desta forma, os aportes teóricos que contribuem para este estudo, exercem diferentes papéis no decorrer da pesquisa, porém possuem o mesmo propósito que é a intenção do professor do processo didático. Assim, de forma estratégica, podemos associá-las para verificar os indícios de aprendizagem que são articuladas em através da intenção do professor sobre a aprendizagem do aluno para o conhecimento matemático pretendido.

No diagrama da Figura 7 destacamos a articulação entre os pressupostos teóricos desta pesquisa, isto é, a associação entre a Teoria das Situações Didáticas, a Sequência Didática por Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual, Análise Microgenética e Análise do Discurso e Investigação Matemática.

Figura 7: Articulação entre os Pressupostos Teóricos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Considerando os pressupostos teóricos desta pesquisa e suas articulações, observo a Sequência Didática para o ensino de progressão geométrica, estruturada de acordo com as UARC de Cabral (2017), como um instrumento dialógico que permite analisar as interações que surgem das abordagens comunicativas entre professor e alunos e entre alunos, a partir das Intervenções Estruturantes descritas no texto didático e dos diferentes padrões de interações. E ainda, identificar os padrões de interações advindos da AD para consolidar a AM, com o propósito de alcançar o objetivo e a questão central desta pesquisa.

1.8 – PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A partir das articulações teóricas destacadas, apresentamos aqui os percursos procedimentais utilizados para o desenvolvimento desta pesquisa de modo a alcançar seus objetivos. Através dos procedimentos metodológicos, pretendemos apresentar aos leitores, de maneira geral, as etapas de elaboração desta pesquisa, porém, é possível verificar com maior detalhe os tópicos apresentados em seus respectivos capítulos.

Desta forma, perpassamos por uma série de levantamentos no que diz respeito ao estudo das progressões geométricas, no qual, damos destaques a revisão de estudos sobre o objeto matemático em questão, a compreensão de sua abordagem nos livros didáticos, a percepção dos alunos egressos e professores de matemática, assim como, a elaboração de um texto, no qual consideramos os fatores históricos para a evolução do conteúdo matemático e o rigor matemático que contribuísse para a construção desse texto, além de servir como subsídio para a formação de professores.

Inicialmente, realizamos as considerações sobre o ensino de progressão geométrica, no qual verificamos como é apresentado a abordagem curricular nos documentos oficiais, em que buscamos analisar a transição dos PCNEM para a BNCC, e as matrizes de referência de matemática nas avaliações de larga escala sobre o objeto matemático, tais como, o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), o Sistema Paraense de Avaliação Educacional (SISPAE) e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Com a revisão de literatura, tivemos intuito de compreender de que forma o conteúdo de progressão geométrica vem sendo abordado em pesquisas científicas. Para isso, foram feitas investigações, no qual foram catalogadas 8 dissertações, com as considerações mais atuais encontradas sobre o objeto matemático, no período de 2011 a 2019, em que buscamos selecionar os que evidenciaram os seguintes critérios: autor (es), ano de publicação, objetivo/questão de pesquisa, metodologia, técnica de sistematização dos resultados, técnicas de análise dos resultados e considerações finais.

Paralelamente a isto, buscamos entender de que forma o conteúdo de progressão geométrica são abordados em livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio. Assim, como critério de análise dos livros didáticos, utilizamos a proposta metodológica apresentada por Masseti (2016), em que realiza a análise através do que nomeia como, situações, linguagem, conceito, proposições, procedimentos e argumentação. Para isso, optamos pelos livros que compõem a lista do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2018 a 2020.

Na etapa da compreensão da perspectiva de 48 professores da educação básica. A qual teve como pretensão, compreender suas perspectivas acerca de diversos aspectos que circundam o processo de ensino de Matemática, consequentemente o ensino de progressão geométrica no Ensino Médio.

Realizamos também, uma investigação para verificar a compreensão da perspectiva de 68 alunos, foram apresentadas discussões, a fim de contemplar requisitos sobre contextos, ações e experiências acerca da aprendizagem e das dificuldades encontradas por alunos do 2º ano do Ensino Médio em relação ao conteúdo de progressão geométrica em uma escola pública de Belém do Pará.

Os instrumentos utilizados para coleta de dados foram os questionários, tanto para a investigação dos alunos egressos, quanto dos professores de matemática, para que por meio deles houvesse a compreensão dos diversos aspectos que envolvem o processo de aprendizagem de progressão geométrica. Tal instrumento compôs-se com questões subjetivas a respeito das implicações dos alunos sobre currículo, metodologia e avaliação utilizadas pelos docentes, seguido de um quadro de dificuldades.

De posse dados obtidos, realizamos uma conversão individualmente das respostas dos alunos em dados tabulados. As análises foram desenvolvidas considerando a tríade (dados – teoria – análise).

Além de compreender as perspectivas dos alunos e professores, elaboramos um tratamento histórico e matemático sobre progressão geométrica. Com o intuito de apresentar o tema com maior aprofundamento para os professores afim de situá-lo e caracterizar as possibilidades de interligação a outros conteúdos ou mesmo evidenciá-lo de uma forma para além da apresentada pelos livros didáticos. Assim como, consolidar matematicamente esta pesquisa para a construção da sequência didática.

Assim, a estruturação da Sequência Didática foi feita com base nas discussões estabelecidas no texto supracitado. Com o qual, a TSD buscou fundamentar as relações estabelecidas no triangulo didático, a SD possibilitou compreender sua definição, a UARC possibilitou sua elaboração em conjunto de atividades.

O tratamento matemático feito sobre o conteúdo, foi um outro ponto que trouxe contribuição para esta etapa da pesquisa, visto que, transcendeu as abordagens apresentadas pelos livros didáticos utilizados na educação básica, como foram retratados na identificação dos livros do PNLD. Com isso, possibilitou uma base matemática sólida para a construção da SD.

Desta maneira, foi estabelecida para o estudo de progressão geométrica para os alunos do 1º ano do Ensino Médio, uma sequência didática com 5 atividades/UARC's, no qual foram utilizadas como objetos de aprendizagem.

As quais abordam os seguintes assuntos: Sequências em progressão geométricas, características de uma progressão geométrica, termo geral, soma dos termos de uma progressão geométrica finita e soma dos termos de uma progressão geométrica infinita.

Com a sequência didática pronta, pretende-se caminhar para a fase de planejamento e execução da experimentação. No qual é necessário eleger uma escola para aplicação do produto para que permita experimentá-la com seus estudantes, com a devida autorização dos responsáveis por meio de termo de consentimento livre e esclarecido (TECLE).

Nesta etapa, serão escolhidas duas turmas, uma de controle em que um professor colaborador ministrou o conteúdo de forma tradicional com apoio de livro didático. Outra, onde iremos realizar a aplicação da SD.

Anteriormente à aplicação da SD e o desenvolvimento do conteúdo de forma tradicional, deve haver a verificação dos conhecimentos básicos necessários para o ensino progressão geométrica em ambas as turmas, tendo em vista a realização da oficina, ou não, para proporcionar condições para o ensino deste objeto. Após este processo, na etapa final dos episódios didáticos de ambas as turmas será aplicado um teste de verificação de aprendizagem com a intenção de validar as formas de ensino adotas nas turmas.

Com a obtenção dos dados gerados pela experimentação da SD, chegamos à etapa de validação do produto. Na qual, idealiza-se transcrever a partir dos áudios coletados e realizar uma análise baseada nas teorias da análise microgenética e análise do discurso.

Na transcrição, conforme a análise microgenética, cada fala passa a ser chamada de turno, que foram seccionadas em segmentos e episódios. Após extraídos os indícios de aprendizagem, trechos em que se percebe que o estudante avança na formalização de conceitos pretendidos, realiza-se a análise do discurso, para verificar quais níveis epistemológicos de aprendizagem foram manifestados nos padrões de comunicação dos estudantes. Os resultados encontrados apontaram que a SD elaborada nesta pesquisa foi potencialmente válida para o ensino de produtos notáveis ou não.

Em decorrência das questões sanitárias e saúde pública nos anos de 2020 e 2021, estendido até o início de 2022 e ainda não vigente no momento atual, houve a necessidade de adequação do processo avaliativo da sequência didática, uma vez que não foi possível a aplicação de maneira adequada para nosso estudo nas turmas do ensino médio, assim, não sendo possível realizar a análise microgenética e do discurso, para tanto, optou-se pela manifestação de professores por meio da aplicação de um questionário.

Esse questionário e composto de três fases. A primeira fase requer a avaliação individual de cada UARC, seguida da avaliação categórica das UARC's e, por fim, uma avaliação complementar com o foco na avaliação aplicativa do processo, na promoção da interatividade entre os participantes, identificação das contribuições em relação aos elementos que compõem o triângulo didático professor-aluno-saber e a identificação das potencialidades da proposta para o ensino do objeto matemático estudado, no qual apresentamos a relação das potencialidades com o conjunto de relações didáticas, no qual destacamos o Campo Motivacional, o Campo das Interações e o Campo Conceitual.

2 – SOBRE O ENSINO DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Neste capítulo, apresentamos uma análise investigativa de algumas pesquisas acadêmicas sobre o ensino de progressão geométrica no Ensino Médio, faremos também a análise de livros didáticos sobre o conteúdo de progressão geométrica, além da concepção de alunos egressos do 1° ano do Ensino Médio e de professores sobre o conteúdo e ensino do referido objeto matemático. Para isto, tomamos como princípio a descrição dos documentos oficiais da educação básica brasileira, no qual fomentam o currículo matemático, para elencarmos o ensino de progressão geométrica.

2.1 – DOCUMENTOS OFICIAIS

No sistema educacional brasileiro, os principais documentos que são tomados como bases para a Educação Básica são:

- A *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB),* Lei n° 9394/1996, foi criada em 1934 e regulamentada em 1961, na constituição federal e foi planejada para definir e organizar a educação brasileira.
- O *Plano Nacional de Educação (PNE)* sancionada em 2014 pelo governo federal brasileira com o objetivo de direcionar investimentos para melhoria da qualidade da Educação Básica, no qual foi estabelecido 20 metas a serem alcançadas durante o período de uma década (dez anos).
- Já os *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)*, são métodos não obrigatórios elaborados pelo governo federal brasileiro que orientam as redes de ensino através de objetivos separados por disciplinas.
- Por fim, a *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)* teve seu parecer descrito pelo *Conselho Nacional de Educação (CNE)* e homologada pelo *Ministério da Educação (MEC)* no ano de 2018, no qual corresponde a um documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que devem ser desenvolvidas com base em conhecimentos, competências e habilidades.

Portanto, esses documentos nos referem como funciona a Educação Básica e de que forma deve-se trabalhar no ambiente escolar para que haja a melhoria do ensino no Brasil, referente ao nível médio da Educação Básica podemos destacar algumas considerações que estes documentos oficiais colocam.

> A LDB estabelece uma perspectiva para esse nível de ensino que integra, numa mesma e única modalidade, finalidades até então dissociadas, para oferecer, de forma articulada, uma educação equilibrada, com funções equivalentes para todos os educandos:
>
> • a formação da pessoa, de maneira a desenvolver valores e competências necessárias à integração de seu projeto individual ao projeto da sociedade em que se situa;
>
> • o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
>
> • a preparação e orientação básica para a sua integração ao mundo do trabalho, com as competências que garantam seu aprimoramento profissional e permitam acompanhar as mudanças que caracterizam a produção no nosso tempo;
>
> • o desenvolvimento das competências para continuar aprendendo, de forma autônoma e crítica, em níveis mais complexos de estudos.
>
> (BRASIL, 2000, p. 10).

Isto quer dizer que, a LDB se refere que o aluno ao findar o Ensino Médio deverá ter conhecimento suficiente para atuar no mercado de trabalho e para a prática social. Porém, estudos revelam que esse objetivo não está sendo alcançado, e que os estudantes, no cenário atual, não conseguem aplicar os conhecimentos adquiridos na Educação Básica em seu cotidiano.

Com isso, consta no PNE (2014) que um dos principais motivos de a população brasileira não aplicar conhecimentos básicos é que muitos alunos não chegam a finalizar o Ensino Médio, isso significa dizer que a evasão escolar, assim, o PNE coloca 20 metas para mudar essa situação, dais quais destacamos duas metas que são relevantes para o nível de ensino que abordamos nesta pesquisa.

> ● *Meta 10:* oferecer, no mínimo, 25% (vinte e cinco por cento) das matrículas de educação de jovens e adultos, nos ensinos fundamental e médio, na forma integrada à educação profissional;
>
> ● *Meta 11:* triplicar as matrículas da educação profissional técnica de nível médio, assegurando a qualidade da oferta e pelo menos 50% (cinquenta por cento) da expansão no segmento público.
>
> (BRASIL, 2014, p. 10).

Após analisar as citadas metas, observou-se que há uma indicação de aumento de público no Ensino Médio da educação profissional, para que mantenha um número elevado de estudantes que finalizam o Ensino Médio capaz de aplicar os conhecimentos adquiridos no mercado de trabalho, gerando assim pessoas qualificadas para determinadas áreas.

> Em passado não muito distante, a quase totalidade dos que frequentavam a escola regular de Ensino Médio estava ali de passagem para o ensino superior. Na atualidade, essa parcela corresponde a não mais de um quarto dos alunos – fração fácil de calcular, quando se comparam os quase 10 milhões de estudantes de Ensino Médio com os cerca de 2,5 milhões de matrículas no ensino superior no país.
> (BRASIL, 1999, p. 10).

Assim, fez-se necessário uma reformulação do Ensino Médio no qual, antes mesmo de elaborarem as metas do PNE, realizaram uma reformulação que abrangesse de forma geral o Ensino Médio e também fosse repensado o currículo de cada matéria escolar da Educação Básica, portanto a criação dos *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM)* traz orientações de organização educacional ao PCN, especificamente na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, apresenta um conjunto de competências gerais que organizam o aprendizado nas escolas de Educação Básica, onde esses conjuntos de competências gerais são: *representação e comunicação; investigação e compreensão;* e a *contextualização sócio-cultural*.

> Tais objetivos que convergem com a área de Linguagens e Códigos – sobretudo no que se refere ao desenvolvimento da representação, da informação e da comunicação de fenômenos e processos – e com a área de Ciências Humanas – especialmente ao apresentar as ciências e técnicas como construções históricas, com participação permanente no desenvolvimento social, econômico e cultural. (BRASIL, 1999, p. 23).

Os PCNEM colocam que esses conjuntos de competências da área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (Física, Química, Biologia e Matemática) possuem relações com a área da Linguagem e Códigos (Língua Portuguesa, Literatura, Inglês e Espanhol) e a área das Ciências Humanas (História, Geografia, Filosofia e Sociologia). Neste sentido, segundo Brasil (1999, p. 25) "vê-se de que forma as várias disciplinas da área igualmente se interligam por essas duas competências gerais e pela de *investigação e compreensão"***.**

Isso significa que, através da *investigação e compreensão* da área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias se interligam com a área da Linguagem e Códigos e a área das Ciências Humanas através da *representação e comunicação* e, *contextualização sócio-cultural*, respectivamente.

> Para se conduzir o ensino de forma compatível com uma promoção das competências gerais, além da consciência de que, em cada aula de cada ciência, se desenvolvem linguagens, se realizam investigações e se apresentam contextos, é preciso que o professor tenha a percepção de linguagens comuns entre a sua disciplina e as demais de sua área para auxiliar o aluno a estabelecer as sínteses necessárias a partir dos diferentes discursos e práticas de cada uma das disciplinas. (BRASIL, 1999, p. 26).

Cada ciência terá os conteúdos específicos da área de conhecimento, e que na apresentação de tais conteúdos o professor dispõe das outras áreas de conhecimentos que complementam os conteúdos específicos, tanto como um processo de investigação como um processo de compreensão das aplicações em diversos contextos.

Os PCNEM sintetizam as características de cada uma das competências gerais da área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, destacadas a seguir:

● *Representação e comunicação:* Símbolos, códigos e nomenclaturas; Articulação dos símbolos e códigos; Análise e interpretação de textos e outras comunicações; Elaboração de comunicações e; Discussão e argumentação de temas de interesse.

● *Investigação e compreensão:* Estratégias para enfrentamento de situações-problema; Interações, relações e funções; invariantes e transformações; Medidas, quantificações, grandezas e escalas; Modelos explicativos e representativos e; Relações entre conhecimentos disciplinares, interdisciplinares e interáreas.

● *Contextualização sócio-cultural:* Ciência e tecnologia na história; Ciência e tecnologia na cultura contemporânea; Ciência e tecnologia na atualidade e; Ciência e tecnologia, ética e cidadania.

Os PCNEM também destacam competências específicas de cada área de conhecimento, o nosso foco se destaca na área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (Física, Química, Biologia e Matemática), especificamente nas competências relacionadas à matemática.

Segundo Brasil (1999, p. 32), “a Matemática, linguagem onipresente, distribuirá transversalmente às demais ciências seus temas estruturadores, relacionados respectivamente aos números, às formas e à análise de dados”.

Isso intensifica o que já tínhamos mencionado anteriormente, no qual a matemática se relaciona com todas as outras disciplinas, onde a matemática dispõe de ferramentas essenciais para o desenvolvimento das outras ciências, daí damos destaques aos interesses do estudo na área da matemática.

Segundo Brasil (1999, p. 113), “a área da Matemática e suas Tecnologias elegeu três grandes competências como metas a serem perseguidas durante essa etapa da escolaridade básica e complementar do ensino fundamental para todos os brasileiros”.

Brasil (1999, p.113) destaca como “primeira competência a *representação e comunicação,* que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento”.

Esta primeira competência destaca-se através da capacidade de argumentar, analisar e interpretar textos, códigos e símbolos que podem ser expressos na área da matemática e tecnologia.

Como segunda competência Brasil (1999, p. 113), destaca a "*investigação e compreensão,* marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências".

Já a segunda competência destaca-se através da elaboração de estratégias com a utilização de algoritmos e modelos representativos de fenômenos que possam auxiliar na solução de uma situação problema.

Na terceira competência, Brasil (1999, p. 113) aponta "a *contextualização sócio-cultural,* na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico".

A terceira competência destaca-se pela compreensão de contextos históricos e atualidades referentes ao tema estudado, além de obter informações atuais sobre as tecnologias e sua influência na sociedade, e conceder uma avaliação de caráter ético.

Além das competências gerais, que descreve alguns objetivos referentes aos conteúdos matemáticos, os PCNEM também destacam competências direcionadas a cada objeto matemático que se encontram na grade curricular do Ensino Médio. Brasil (1999, p. 119) coloca um primeiro critério, básico e geral, é que "os conteúdos ou temas escolhidos devem permitir ao aluno desenvolver as competências descritas no item anterior, avançando a partir do ponto em que se encontra".

Os PCNEM destacam três temas gerais que são abordados no ensino de matemática no nível médio da Educação Básica, que são: álgebra: números e funções, geometria e medidas e, análise de dados.

> Ao selecionar um tema, a forma de trabalho deve ser pensada de modo integrado à sua escolha, evitando repetir o modelo curricular das listas de assuntos enfileirados. As escolhas que serão feitas devem ter no horizonte o aluno de cada escola, daí a necessidade de um olhar cuidadoso para esses jovens, indivíduos cognitivos, afetivos e sociais, que possuem projetos de vida, histórias pessoais e escolares. (BRASIL, 1999, p. 120).

Mas para que isso ocorra, faz-se necessário que o professor elabore um planejamento baseado em tais critérios, tendo consciência que na aplicação de seu planejamento, o mesmo sofra alterações repentinas pelo fato de que o público a ser apresentado o tema da aula possui diversificações em seus comportamentos e ações que podem influenciar no planejamento.

> Fazem parte desta elaboração diversos fatores mais diretamente ligados ao planejamento, entre eles a escolha de temas relativos ao conteúdo específico da disciplina, a análise dos recursos de ensino e dos métodos de abordagem desse conhecimento, o cuidado com os tempos de ensino e de aprendizagem e dos espaços para que isso ocorra. (BRASIL, 1999, p. 119).

Desta forma, o professor deve ser atencioso na elaboração de seu planejamento, desenvolver métodos e recursos que atende o público que irá apresentar o objeto matemático, pois assim como uma boa escolha em seus métodos e recursos podem facilitar o processo de ensino e de aprendizagem, também pode ocorrer de tais métodos e recursos não serem adequados para o público em questão ou ambiente, dificultando tal processo.

Para melhorar a compreensão do planejamento, o PCNEM também coloca competências que descrevem as unidades temáticas. As unidades temáticas da matemática são objetos matemáticos que estão inseridos e organizados dentro dos temas gerais, no qual facilita a compreensão e a elaboração do planejamento do professor, dando direcionamento para o objeto matemático que deseja ser utilizado.

> Ao se escolher a forma com a qual se vai trabalhar, deve-se reconhecer que os alunos precisam de tempo para desenvolver os conceitos relativos aos temas selecionados e, ainda, para desenvolver a capacidade de acompanhar encadeamentos lógicos de raciocínio e comunicar-se matematicamente; por isso é essencial o contato repetido com as diferentes ideias, em diferentes contextos, ao longo do ano e de ano para ano. Dessa forma a escolha dos conteúdos e atividades deve ser coerente com o tempo disponível de trabalho, evitando atropelos ou ociosidade na sala de aula. (Brasil, 1999, p. 130).

Porém, mesmo com toda a organização que os PCNEM apresentam para facilitar o processo de ensino e de aprendizagem e que são importantes, atualmente, percebe-se que não é suficiente para que o aluno consiga de fato obter aprendizado de determinado conhecimento matemático, pois existem diversos fatores que podem influenciar na aprendizagem, que apenas a reorganização curricular de matemática e uma melhoria no planejamento do professor não garante que o aluno finalize o Ensino Médio e seja capaz de aplicar o conhecimento adquirido de determinado objeto matemático.

O ensino de matemática se tornou um conhecimento indispensável para a formação da cidadania e espera-se que contribua para a formação de uma cultura científica que permita que o indivíduo interpreta e entenda os fenômenos da natureza e seu processo de transformação. Alguns professores da Educação Básica, ao ensinar matemática, utilizam apenas metodologias tradicionais, obtendo como recursos apenas quadro branco, pincel e livro didático. Esta metodologia de ensino acaba se concentrando muita das vezes na memorização de fórmulas, repetição de cálculos para solução de situações problemas, mas não se preocupa em aproximar os conceitos matemáticos da realidade do aluno ou trazer algo inovador para sala de aula.

Almeida e Valente (2011) *apud* Ledur (2014, p. 62) fazem a distinção entre a aprendizagem que ocorre quando o aluno "aplica conteúdos" e aquela em que se "ensina sobre conteúdos".

Isto é, "aplicar o conteúdo" refere-se a fazer-se e refazer-se pela educação baseada em projetos, experimentações e atividades que utilizam materiais potencialmente significativos. Já "ensina sobre conteúdos" refere-se apenas no que está baseado no livro didático, não mostrando a forma prática.

> Quando se trata do ensino da matemática, especialmente na Educação Básica, vários são os problemas recorrentes. Os baixos índices nos indicativos da Educação Básica e pública no Brasil, como IDEB e SAEB, os baixos desempenhos nas avaliações como PISA, Prova Brasil e ENEM, e um número elevado de reprovações na disciplina de Matemática é visto com insatisfação pela comunidade escolar, o que nos leva a refletir e investigar sobre como está sendo conduzido o ensino de matemática e o que fazer para reverter este quadro. (OLIVEIRA, 2018, p. 15 - 16).

Os índices de aprendizado dos alunos são adquiridos através de indicativos como *Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB)* e *Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB)*, que servem para adquirir os resultados mostrados em *avaliações externas*, que são o *Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA)*, o *Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)* e a *Prova Brasil*. O objetivo das avaliações externas é avaliar os alunos em larga escala quanto à aprendizagem deles, e tais resultados são apresentados em formas de índices de aproveitamentos e médias que designam se os alunos estão tendo aprendizagem ou não.

Temos também índices de avaliação que coletam dados por União Federativa (Estados), como exemplo podemos citar o *Sistema Paraense de Avaliação Educacional (SISPAE)*, cujo principal objetivo é aumentar o *Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB)* do Estado do Pará. Nas *avaliações externas*, são avaliações de longa escala, que apresentam de forma geral o aprendizado dos alunos através de resoluções de problemas. Porém, existem também as *avaliações internas*, que são avaliações mais restritas, aplicadas por bimestre em sala de aula nas escolas de Educação Básica.

Ambas as avaliações, mostram em seus dados e através das práticas educativas que poucos são os alunos que conseguem de fato adquirir aprendizado, e que os alunos apresentam grandes dificuldades em aprender matemática.

> No ensino de matemática propriamente dita ocorre muita deficiência e devido a essas deficiências se faz necessário um trabalho diferenciado com nossos educandos, tirando-os da sala de aula e levando-os para a rua, quadra de esportes e laboratório de informática e de matemática com atividades ligadas aos princípios da matemática.
> (MAGNONI, 2014, p.14).

Tais deficiências podem ser dadas por não dominar certos cálculos básicos da matemática, ou não conseguir visualizar os conceitos matemáticos na realidade, ou até mesmo por imaturidade.

Com isto podemos formalizar esta ideia, caracterizando que no ensino da matemática pode-se primeiramente fazer uma abordagem qualitativa, ou seja, abordar os conceitos matemáticos, a parte teórica, e aproximando da realidade do aluno através de experimentos, interação e investigação, para só depois fazer uma abordagem quantitativa, ou seja, elaborar ferramentas matemáticas para transformar a abordagem qualitativa em algo abstrato.

> É recomendável iniciar o estudo pelos aspectos qualitativos e só depois introduzir o tratamento quantitativo. Este deve ser feito de tal maneira que os alunos percebam as relações quantitativas sem a necessidade de utilização de algoritmos. Os alunos, a partir do entendimento do assunto, poderão construir seus próprios algoritmos. (MAGNONI, 2014, p.15).

Por estes motivos, faz-se necessário que para suprir tais dificuldades e alcançar os objetivos do ensino da matemática haja novas pesquisas em ensino de matemática, no qual abordam novas metodologias ou metodologias alternativas de ensino, além de trabalhar a maturidade do aluno em mostrar o quanto é importante obter tais conhecimentos, além de através de experimentos práticos, sejam eles através das tecnologias, contexto histórico, observação e investigação, façam com que o aluno se aproprie dos conceitos matemáticos e posteriormente desenvolvam seus próprios algoritmos para solucionar determinados problemas do cotidiano.

Dentre os temas gerais destacados no PCNEM, um tema que é bastante importante e que influencia em todos os outros temas gerais, é a parte da *Álgebra* que destaca o estudo dos *Números.* A matemática é compreendida pelo comportamento numérico e suas características que envolvem todos os outros temas gerais. Dentro deste tema geral, destacamos uma unidade temática que possui uma grande importância em seu estudo e que possui grandes aplicações no cotidiano, chamada de unidade temática *Sequências*, no qual apresentamos o estudo das *progressões*, mais especificamente *Progressões Geométricas*, onde os padrões e características numéricas são bastante utilizados nos meios científicos e na sociedade.

Brasil (2018, p. 517), coloca que “a BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas até o 9º ano do Ensino Fundamental”.

A BNCC, diferente do PCNEM, propõe ao Ensino Médio cinco unidades de conhecimento em matemática, que são: Aritmética, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística, Grandezas e Medidas.

> Em articulação com as competências gerais da Educação Básica e com as da área de Matemática do Ensino Fundamental, no Ensino Médio a área de Matemática e suas Tecnologias deve garantir aos estudantes o desenvolvimento de *competências* específicas. Relacionadas a cada uma delas, são indicadas, posteriormente, *habilidades* a ser alcançadas nessa etapa. (BRASIL, 2018, p. 522).

Assim, a BNCC baseou-se nos modelos de elaboração do PCN e do PCNEM, mantendo uma relação entre os conteúdos do Ensino Fundamental para estabelecer os Conteúdos o Ensino Médio e com isso, para cada unidade de conhecimento apresentada, o aluno deverá adquirir determinadas competências específicas e habilidades e ser capaz de reproduzir no seu dia a dia e em conjunto com a sociedade e suas relações profissionais.

A BNCC inclui o conteúdo de sequências numéricas dentro da seguinte competência específica:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 532).

As habilidades que correspondem a competência específica citada acima fazem referências aos seguintes conteúdos: Função Polinomial do 1º Grau; Função Polinomial do 2º Grau; Medidas de Volumes de Prismas, Pirâmides, Cilindros e Cones; Sequências Numéricas (Progressão Aritmética e progressão geométrica); Probabilidade; e Figuras Geométricas Planas.

Sobre os conteúdos, as habilidades foram elaboradas com vários elementos da matemática que as compõem, como interpretação gráfica, manipulação numérica e algébrica, resolução de problemas e dedução de fórmulas, análise de propriedades, entre outros. A habilidade que corresponde a progressão geométrica, segundo Brasil (2018, p. 533), é "identificar e associar sequências numéricas (progressão geométrica) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas".

A progressão geométrica, apesar de possuir conceitos e definições diferentes das Funções Exponenciais, possuem características semelhantes e possuem elementos que podem ser comparados, como a análise gráfica e modelos matemáticos que as representam. Além das funções exponenciais, também podemos associar a progressão geométrica à construções geométricas que possuem processos iterativos, e fazermos análises dessas construções e associar as sequências numéricas, assim como realizar uma relação entre o modelo para calcular o montante em juros compostos e a equação do termo geral de uma progressão geométrica.

Percebe-se que no processo de ensino de progressão geométrica, as definições e conceitos iniciais, a maioria dos alunos conseguem adquirir tais conhecimentos, porém quando fazemos as relações com outros objetos matemáticos, como por exemplo, Funções Exponenciais, Construções Geométricas, Juros Compostos, entre outros, estes alunos não conseguem abstrair tais relações.

Desta forma, vimos a necessidade de, além de conhecer o que diz a BNCC e os PCN sobre o ensino de progressão geométrica, também verificar o que é cobrado nos principais sistemas de avaliação de larga escala.

Quadro 4: Matriz de referência de matemática.

Matriz de referência	**Competências**	**Descritores/Habilidades**	**Tema**
SAEB	Não apresentado	D22 – Resolver problema envolvendo P.A./P.G. dada a fórmula do termo geral	Números e Operações/Álgebra e Funções
SISPAE	Não apresentado	MPA 03 - Resolver problemas que envolvam Progressões Geométricas.	Números, aritmética, álgebra e funções
ENEM	Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais	H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais. H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem. H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos. H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.	Conhecimentos numéricos

		H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.	

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Ao analisar o Quadro 4, verificamos que o descritor D22 do SAEB está diretamente relacionado a resolução de problemas de PA/PG, no qual está restrito a situações que envolve a fórmula do termo geral. Já na matriz de referência do SISPAE a habilidade MPA 03 também está diretamente relacionada ao conteúdo de PG. Embora, o conteúdo de progressão geométrica tenha sido sinalizado em ambas as matrizes de referência associado a resolução de problemas, pode ser explorado diversas outras habilidades, como investigação de modelos de sequências geométrica na natureza, aplicações em outras áreas de conhecimento, tais como, na medicina, geologia, na própria matemática, entre outras, no qual não há a devida atenção necessária pelos professores de Matemática nos ambientes de aprendizagem.

Por fim, na matriz de referência do ENEM, todas as habilidades estão associadas indiretamente como o conteúdo de PG, no qual a habilidade H2 é a que mais se aproxima do objeto matemático analisado, em que o ensino de progressão geométrica toma como base a percepção de padrões numéricos em diversos contextos.

Portanto, a nossa proposta de sequência didática tomara como base para a elaboração das questões e atividades as competências e habilidades/descritores nas matrizes de referência do SAEB, SISPAE e ENEM, porém, porém, estendendo as atividades para explorar o máximo de aptidão do aluno com o objeto matemático, em que poderá possibilitar, posteriormente, um aprofundamento das diversas aplicações de PG.

2.2- REVISÃO DE LITERATURA

Realizamos um levantamento bibliográfico de pesquisas acadêmicas sobre o ensino de progressão geométrica na Educação Básica, especificamente no Ensino Médio, verificamos que poucos são as pesquisas destinadas ao objeto de estudo em questão, porém as pesquisas encontradas e analisadas neste trabalho possuem grandes impactos no ensino de progressão geométrica, pois apresentam metodologias inovadoras para o ensino, priorizando a aprendizagem significativa.

As pesquisas identificadas no Quadro 5 foram coletadas em bibliotecas digitais e repositórios de pesquisas acadêmicas online em nível de pós-graduação de algumas instituições de ensino. Pelo fato de pouco serem as produções sobre o objeto de estudo em questão, em nível de pós-graduação, todos os trabalhos identificados são compostos por dissertações de mestrado, os quais se assemelham com a nossa proposta de pesquisa e que puderam contribuir de significativamente para o desenvolvimento desta pesquisa, no que se relacionam com as propostas referentes ao processo de ensino e de aprendizagem em torno do objeto de estudo.

Quadro 5: Pesquisas analisadas.

AUTOR	TÍTULO	CATEGORIA	IES	ANO
Pâmella de Alvarenga Souza	Uma proposta didática para o estudo de progressões por meio dos fractais: rotação por estações	Dissertação (mestrado)	UENF	2019
Fernando Henrique Lopes	O ensino de progressão geométrica de segunda ordem no Ensino Médio	Dissertação (mestrado)	UNESP	2017
Raquel Marchetto	O uso do software GeoGebra no estudo de progressões aritméticas e geométricas, e sua relação com funções afins e exponenciais	Dissertação (mestrado)	UFRGS	2017
Ivonzil José Soares Junior	Inter-relação entre progressão geométrica e função: aplicada ao Ensino Médio	Dissertação (mestrado)	UFPR	2015
Alexandre Goulart Arruda	Ensino de juros compostos, progressão geométrica e função exponencial	Dissertação (mestrado)	UFV	2013
Ana Cecília Sanches Cerqueira	Um estudo sobre sequências e séries	Dissertação (mestrado)	UNESP	2013
Daniele Cristina Chiconato	Despoluição de um lago – progressão geométrica	Dissertação (mestrado)	UFSCar	2013
Wilton Natal Milani	A resolução de problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no Ensino Médio.	Dissertação (mestrado)	UFOP	2011

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

No Quadro 5 apresentamos autores que produziram pesquisa cuja abordagem se relaciona com a nossa proposta de trabalho, as dissertações apresentadas são de diversas universidades de renomes do Brasil, no qual apresentam propostas inovadoras e que são consideradas atuais, pois as propostas foram estudadas e investigadas dentro de um período de dez anos, de 2009 a 2019, considerando que cada autor levou em média dois anos de investigação e elaboração de suas produções textuais, portanto o autor que teve seu trabalho finalizado em 2011, provavelmente iniciou a elaboração de sua proposta dois anos antes de sua finalização, ou seja, iniciou sua proposta em 2009 ou até mesmo antes. Assim, os estudos apresentados foram criteriosamente analisados, pois tais pesquisas foram longas e apresentaram várias etapas importantes que contribuíram para a evolução, não só deste trabalho, mas também para novas pesquisas na área.

2.2.1 – Sobre a Dissertação de Souza (2019)

Souza (2019), em sua dissertação de mestrado apresentada à Universidade Estadual do Norte Fluminense (UENF), realiza um trabalho cujo tema é “Uma proposta didática para o estudo de progressão geométrica por meio de fractais: Rotação por estações”, no qual objetiva *investigar, sob a percepção dos alunos da segunda série do Ensino Médio, como o estudo de Fractais pode influenciar no processo de ensino e aprendizagem de Progressões, por meio do Ensino Híbrido, por meio da sub-categoria Rotação por Estações*. Tal objetivo foi considerado para responder a seguinte questão de pesquisa utilizada pela autora: *Como o estudo de Fractais pode influenciar no processo de ensino e aprendizagem de Progressões na modalidade híbrida, em particular por meio da Rotação por Estações?*

Para responder tal questão de pesquisa e fazer a relação entre a progressão geométrica e os fractais, a autora faz uso do Ensino Híbrido e a investigação matemática, no qual investiga os fractais e os recursos que o mesmo possibilita a sua relação com a progressão geométrica e elabora e analisa uma proposta pedagógica que contém atividades investigativas e experimentadas através de Rotação por meio de Estações.

Primeiramente, Souza (2019), em sua produção define os fractais, fazendo a descrição do mesmo e realiza também uma abordagem história dos fractais, a autora realiza também uma análise dos livros didáticos do PNLD cujo interesse é investigar como os livros didáticos relacionam os fractais com o objeto matemático progressão geométrica. Além disso, define-se também o Ensino Híbrido com destaque as experimentações através de Rotação por meio de Estações.

> A ligação entre a Álgebra e a Geometria Fractal é realizada no processo de iteratividade, quando se cria um algoritmo ao ser executado, novamente surge uma estrutura similar. Embora essa ligação não seja muito usual em livros didáticos, ela pode ser explorada, desde que se evite o ensino tradicional, cuja abordagem recai somente sobre a Geometria Euclidiana formalizada e a resolução de exercícios por meio de aplicação de fórmulas. (SOUZA, 2019, p. 19).

A autora destaca que, a progressão geométrica que corresponde à unidade temática Álgebra, possui representações geométricas importantes que na maioria das vezes nem os professores e nem os livros didáticos abordam essa relação entre a Geometria e a Álgebra, portanto ela apresenta tal proposta para enfatizar essa relação entre a Geometria e a Álgebra, assim para que seja um ensino inovador a mesma destaca os fractais para ensinar progressão geométrica, dentre os fractais utilizada em sua proposta, têm-se: Árvore Pitagórica; Floco de Neve de Von Koch; Pirâmide de Sierpìnsk; Tapete de Sierpìnski; e o Quadrado Reduzido.

Posteriormente, Souza (2019), apresenta os conceitos e definições de progressão geométrica, e analisa outros trabalhos que fazem essa relação entre a Álgebra e a Geometria, além de tomar como base documentos oficiais do ministério da educação. Em seguida realiza análises de livros didáticos da PNLD, no qual busca por livros didáticos que apresentam os fractais como destaques em seções dentro do conteúdo de progressão geométrica, e por fim realiza um estudo sobre o Ensino Híbrido, em que se destaca suas características e as definições de elementos que constituem esse tipo de ensino.

Em seus aspectos metodológicos com caráter qualitativo, Souza (2019) destaca que a intervenção de sua proposta pedagógica foi realizada através de um teste exploratório com licenciados em matemática de instituições públicas do município de Campos dos Goytacazes no Estado do Rio de Janeiro, além disso, a autora também realizou uma intervenção com alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma instituição privada no município de Macaé no Estado do Rio de Janeiro no ano de 2018.

Para a intervenção com os alunos do 2º ano do Ensino Médio, utilizou-se como recursos metodológicos vídeos explicativos sobre os fractais, o aplicativo GeoGebra, impressora 3D, e construções geométricas fractais em folhas de papel.

Tais recursos metodológicos utilizados pela autora possibilitaram que os alunos trabalhassem tanto em grupos quanto individualmente, além de ficarem impressionados com as construções geométricas que eles conseguiam realizar, mas isso só foi possível com a interação entre eles através de discursos explicativos dos mesmos. Segundo Souza (2019, p.

103) “os alunos tiveram mais dificuldades nas primeiras estações, visto que não era costume trabalhar com questões investigativas”.

As dificuldades apresentadas pelos alunos são normais, por estarem trabalhando com metodologias novas, no qual não eram realizadas anteriormente em sala de aula com os professores de matemática, e para sanar tais dificuldades o autor realizou intervenções que permitiram os alunos perceberem as propostas das atividades e realizarem corretamente.

Assim, a cada atividade realizada os alunos recebiam uma série de questionamentos que possibilitaram os mesmo a perceberem regularidades entre as construções geométricas realizadas e sequências numéricas em progressão geométrica, e que ao final a autora formalizou as definições que os alunos iam encontrando em suas construções.

> Constatou-se dificuldades na escrita matemática e na generalização de padrões. Os alunos não têm o hábito de realizar questões que promovem desafios e que precisam descrever o raciocínio. Percebeu-se também a participação ativa de alunos que muitas vezes nem realizavam tarefas em sala. Apresentaram entusiasmo para cumprir o objetivo da estação. (SOUZA, 2019, p. 109).

Isso garante que todos os alunos se tornem ativos em sala de aula, mesmo com as dificuldades apresentadas, no decorrer das atividades realizadas essas dificuldades são sanadas.

> O Ensino Híbrido possibilitou que a sala de aula se tornasse mais atrativa e aconchegante, diferente do que os alunos estavam habituados. Além de promover nos alunos a autonomia, superar suas dificuldades, trabalhar em grupo, trocar ideias, explorar conceitos com diversos recursos e contemplar as diferenças. Promoveu também o contato mais próximo entre os alunos e a professora. Destaca-se o contato mais direto com os alunos que apresentaram dificuldades. (SOUZA, 2019, p. 109).

Portanto, a proposta apresentada por Souza (2019), mostrou resultados positivos no ensino de progressão geométrica via geometria fractal, pois além da inovação ao apresentar um conteúdo que os alunos são induzidos apenas em memorizar fórmulas, também fez com que os alunos interagem mais entre si, e tornasse o contato entre os alunos e o professor mais agradável, e desta forma, realizando o Ensino Híbrido, possibilitou que os alunos investigassem processos da utilização da geometria frente a soluções algébricas, no qual a maioria dos alunos sentem dificuldades quando estão lidando com problemas Álgebra-geométricos que envolve progressões geométricas.

Assim, a partir do trabalho de Souza (2019), desenvolvemos um texto matemático para a formação de professores, em que destacamos nas considerações histórica a evolução técnico-científica de progressão geométrica com contribuições da geometria fractal, assim como inserimos os fractais nas atividades que compõe a sequência didática proposta.

2.2.2 – Sobre a Dissertação de Lopes (2017)

A dissertação de mestrado de Lopes (2017), apresentada a Universidade Estadual Paulista (UNESP), cujo título é "O ensino de progressão geométrica de segunda ordem no Ensino Médio", objetivou *apresentar aos alunos de Ensino Médio uma extensão e, posteriormente, um aprofundamento sobre o conteúdo de sequências que é iniciado no 1º Ano do Ensino Médio*, onde é abordado o conteúdo progressões aritméticas e progressões geométricas. Segundo Lopes (2917, p. vii), "a ideia para abordar tal assunto foi obtida através dos questionamentos de alunos em atendimentos individuais feitos em colégios particulares em que trabalho."

Inicialmente Lopes (2017) destaca o contexto histórico das sequências numéricas, com foco em suas características e os vários tipos de sequências, em seguida apresenta uma revisão sobre funções polinomiais fazendo relação com a equação do termo geral de uma progressão geométrica.

Posteriormente, Lopes (2017) apresenta um estudo analítico sobre sequências e séries na perspectiva de temas que correspondem ao ensino superior, por conseguinte define progressão aritmética e progressão geométrica e suas propriedades, desenvolvendo-os até a definição de progressão geométrica de segunda ordem e suas propriedades.

Como procedimento metodológico, Lopes (2017) aplica sua proposta em um colégio particular no município de Maringá no Estado do Paraná no ano de 2016, no qual foi realizado um teste diagnóstico com 5 questões abordando progressão geométrica de 2ª ordem, onde tal teste foi realizado com 23 alunos do Ensino Médio, sendo 6 alunos do 1º ano, 10 alunos do 2º ano e 6 alunos do 3º ano, e posteriormente o mesmo teste foi aplicado com alunos do ensino superior do curso de Engenharia de Software.

Nas oficinas realizadas com as três turmas do Ensino Médio, o autor utilizou uma metodologia clássica, de forma tradicional apresentou definições, exemplos e exercícios, fazendo uso de quadro branco e pincel magnético, sem a presença de recursos metodológicos inovadores para apresentar tal conteúdo aos alunos, e como resultado o autor percebeu que os alunos de todas as turmas, inclusive do curso de ensino superior em Engenharia de Software, sentiram grandes dificuldades ao resolverem os problemas propostos sobre o tema apresentado.

> Ponto positivo na apresentação do conteúdo foi ver o interesse de alunos que inicialmente não fariam parte dos grupos formados para a atividade. Uma vez que o assunto que seria trabalhado, mesmo sendo desconhecido, é apresentado como um aprofundamento do que já foi visto em sala, chamou a atenção de vários alunos, até de turmas pré-vestibular, que vieram até mim e pediram para participar como ouvintes. (LOPES, 2017, p. 48).

Nessa proposta de Lopes (2017), mesmo os alunos possuindo muitas dificuldades, pelo fato de ser um conteúdo novo para eles, conseguiam fazer relações com conteúdos já vistos no Ensino Médio, como progressão geométrica de primeira ordem e função exponencial, e isso tornou o conteúdo novo bem interessante para nível de curiosidade deles.

A pesquisa de Lopes (2017), nos apresentou um panorama geral do conteúdo de progressão geométrica a partir de sua relação com outros objetos matemáticos, a partir desta compreensão, desenvolvemos neste texto a construção de progressão geométrica a partir de conhecimentos anteriores.

2.2.3 – Sobre a Dissertação de Marchetto (2017)

Marchetto (2017) possui como título de sua dissertação de mestrado “O uso do software GeoGebra no estudo de progressões aritméticas e geométricas, e sua relação com funções afins e exponenciais”, apresentada Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) objetivou *verificar como o aluno pode visualizar e compreender a relação entre progressões e funções, ilustrando-as através de gráficos, tendo como recurso pedagógico o software GeoGebra*.

Tal objetivo foi influenciado para responder a seguinte questão de pesquisa: *Quais relações os alunos conseguem evidenciar, através da comparação entre gráficos (obtidos com o GeoGebra) de funções afins e exponenciais, com progressões aritméticas e geométricas, respectivamente?*

Para responder tal questionamento Marchetto (2017) levou em consideração que era necessário investigar (diagnóstica) quais são os conhecimentos prévios dos alunos referentes ao conteúdo funções afins e exponenciais e verificar como um roteiro de atividades, envolvendo gráficos traçados com o auxílio do software GeoGebra, promove a manipulação e a compreensão dos conteúdos no contexto das práticas diárias de sala de aula.

O que motivou a autora foram as inquietações pessoais como professora de Matemática, por verificar que, ao trabalhar com as progressões aritméticas e geométricas, os alunos não demonstravam interesse em saber o que os valores da “sequência” significavam, só queriam aplicar a “fórmula” correspondente e calcular.

Inicialmente, em seu trabalho, Marchetto (2017) realiza uma revisão de estudos de pesquisas prévias que contribuíram para o desenvolvimento de sua pesquisa no qual destacou seis autores onde foram dois artigos e quatro dissertações de diversas universidades, onde todos os autores que tiveram as pesquisas analisadas apresentaram propostas semelhantes à proposta de Marchetto (2017).

Posteriormente destaca a escolha do uso do aplicativo GeoGebra e sua importância na aplicação de sua pesquisa, e também destaca os Registros da Representação Semiótica e sua utilização na matemática. Em seguida, inicia a abordagem de objetos matemáticos como, a função afim, função exponencial e o estudo das progressões, apresentando suas definições, conceitos e propriedades.

Como procedimentos metodológicos a autora apresenta uma *pesquisa qualitativa* através do preenchimento de um questionário, além da aplicação de uma atividade diagnóstica, bem como da execução de um roteiro de atividades utilizando o software GeoGebra, sobre função afim, progressão aritmética, função exponencial e progressão geométrica. Marchetto (2017) aponta que em seu estudo foram utilizadas atividades exploratórias selecionadas e adaptadas para a apresentação de ferramentas do GeoGebra, envolvendo a interrogação direta dos participantes.

As aplicações de suas atividades ocorreram com 38 alunos do 2º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Visconde de Bom Retiro, na cidade de Bento Gonçalves, no Estado do Rio Grande do Sul. As atividades realizadas foram compostas primeiramente por um questionário para os alunos para a sondagem de aspectos gerais, com o objetivo de traçar o seu perfil. Em seguida foram aplicadas as atividades diagnósticas sobre funções afins e exponenciais para verificar os conhecimentos prévios dos alunos.

Após as atividades diagnósticas, a autora desenvolveu quatro roteiros de atividades com o uso do software GeoGebra, onde o primeiro roteiro foi sobre função afim, o segundo roteiro foi correspondente ao conteúdo de progressão aritmética, já o terceiro roteiro foi sobre o conteúdo de função exponencial, e por fim, o quarto roteiro foi sobre progressão geométrica.

Em cada roteiro os alunos recebiam comandos para desenvolver atividades no GeoGebra e respondendo diversos questionamentos sobre tais construções, onde no segundo e quarto roteiro os alunos deveriam fazer relações com o primeiro roteiro e o terceiro roteiro, respectivamente. E a aplicação de Marchetto (2017) foi finalizada com uma atividade de verificação para investigar o que os alunos aprenderam nos quatro roteiros.

> Após a aplicação e análise da atividade de verificação, podemos constatar pelas respostas dadas às questões analisadas, que os alunos demonstraram conseguir estabelecer a relação entre uma progressão aritmética e a sequência formada pelas imagens dos elementos dessa progressão por uma função afim; e a relação entre uma progressão geométrica e a sequência formada pelas imagens dos elementos dessa progressão por uma função exponencial. (MARCHETO, 2017, p. 76).

Portanto, Marchetto (2017) alcançou o objetivo de sua pesquisa, validando sua proposta, trazendo assim pontos positivos para o ensino dos objetos matemáticos apresentados. Assim, o estudo de Marchetto (2017), nos incentivou a desenvolver a notação dos elementos contidos em progressão geométrica a partir da notação de funções, no qual caracterizou o domínio de conteúdos que são pré-requisitos para adquirir o novo conhecimento.

2.2.4 – Sobre a Dissertação de Junior (2015)

Junior (2015) defendeu sua dissertação de mestrado à Universidade Federal do Paraná (UFPR), no qual teve como título "Inter-relação entre progressão geométrica e função: aplicada ao Ensino Médio", *objetivando relacionar o conceito de funções ao de sequências.*

Em seu trabalho Junior (2015) realiza, inicialmente, uma abordagem de definições, teoremas, proposições dos conteúdos de sequências e séries, posteriormente caracteriza a função afim, função quadrática, função exponencial e inter-relaciona a progressão geométrica com as funções. Destaca-se as diversas formas de se abordar as progressões geométricas no processo de ensino e aprendizagem de matemática, no qual o autor faz uma abordagem sobre o jogo de xadrez, os fractais, a matemática financeira, e por fim, a música.

> Considerando que o ensino na disciplina de Matemática tem passado por grandes desafios ao longo dos tempos, com a era tecnológica, é papel do professor mostrar aos estudantes as diversas maneiras de incorporar a matemática a sua vida diária e propor diferentes tratamentos de determinados temas, observando também que as Progressões Geométricas são apenas funções e que podem e devem ser abordadas em conjunto. (JUNIOR, 2015, p. 91).

Assim, mesmo que o estudo de Junior (2015) não foi experimental, teve sua parcela de importância para o ensino de matemática, para mostrar ao professor que existem diversas formas de se apresentar o conteúdo de progressão geométrica para os alunos e além de fazer uma ligação com outros conteúdos da matemática, também possui diversas aplicações.

Assim como Marchetto (2017), o estudo de Junior (2015) nos possibilitou desenvolver o conteúdo de progressão geométrica a partir da sua relação com funções, no qual é apresentado no texto matemático para a formação de professores, assim como, introduzido nas atividades que compõe a sequência didática proposta.

2.2.5 – Sobre a Dissertação de Arruda (2013)

O "Ensino de juros compostos, progressão geométrica e função exponencial" corresponde ao título do trabalho de Arruda (2013), apresentada á Universidade Federal de Viçosa (UFV), onde o que o motivou a escolha do tema da pesquisa foi alguns anos de trabalho como professor de matemática do Ensino Médio, no qual percebeu que os alunos possuíam dificuldades no aprendizado de funções, em especial relacionar os conteúdos de juros compostos, progressão geométrica e função exponencial. O autor objetiva em sua pesquisa *apontar as semelhanças, diferenças, e relações existentes entre progressão geométrica, juros compostos e função exponencial no que se refere ao ensino desses conteúdos, através da resolução de problemas.*

Arruda (2013), em sua pesquisa, primeiramente realiza uma abordagem teórica sobre o contexto histórico sobre progressões, juros e o conceito de função e ainda faz uma abordagem baseada em consulta a documentos oficiais sobre a reformulação do Ensino Médio e o cenário do ensino de matemática.

Posteriormente, o autor realiza uma fundamentação teórica para definir progressão geométrica, juros e função exponencial, e continua com a análise de livros didáticos que trabalham tais conteúdos em suas edições, destacando a abordagem da introdução, aspectos positivos e aspectos negativos de cada um dos livros didáticos e para cada conteúdo. Em seguida o autor apresenta 11 situações-problemas sobre juros compostos, progressão geométrica e função exponencial, onde em cada situação-problema o autor coloca uma série de questionamentos sobre o problema, damos destaque aqui a situação-problema de número 7, no qual o autor apresenta um fractal conhecido como Curva de Koch com o objetivo de treinar a ideia de padrão e lei de formação de uma progressão geométrica.

Arruda (2013), finaliza seu trabalho fazendo uma discussão sobre a matriz de referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e apresenta a solução de 5 questões do ENEM sobre os conteúdos propostos, damos destaque a questão de número 3 do ENEM -2008, no qual a questão apresenta a construção do fractal conhecido como Triângulo de Sierpìnski para encontrar a figura no processo da 4ª iteração.

Segundo Arruda (2013) diante de uma busca histórica acerca destes assuntos e também nos documentos oficiais que regem o ensino desses temas percebemos a estreita relação entre eles.

Isso indica que o estudo do contexto histórico dos conteúdos facilita o entendimento e a interpretação do surgimento do conteúdo e de situações-problemas, além de facilitar a percepção da relação entre os conteúdos propostos.

O estudo de Arruda (2013), nos apresentou a importância do contexto histórico no entendimento do conteúdo matemático, no qual nos possibilitou em buscar recortes históricos para realizarmos considerações históricas sobre progressão geométrica, no qual facilita a compreensão sobre o surgimento do objeto matemático.

2.2.6 – Sobre a Dissertação de Cerqueira (2013)

Cerqueira (2013) apresenta sua dissertação de mestrado à Universidade Estadual Paulista (UNESP), onde sua pesquisa foi intitulada como “Um estudo sobre sequências e séries”, no qual implicitamente objetivou *apresentar propostas didáticas aos professores do Ensino Médio para o ensino de conteúdos matemáticos do Ensino Médio relacionados ao estudo de sequências e séries.*

Inicialmente a autora realiza um estudo sobre sequências e séries destacando as definições, teoremas e suas respectivas demonstrações e exemplos. Posteriormente apresenta propostas para a inserção de sequências e séries para o ensino de progressão aritmética, progressão geométrica e funções vistas como somas infinitas.

Sobre as propostas para o ensino de progressão geométrica, a primeira o autor utiliza o paradoxo de Aquiles e a tartaruga, cujo objetivo é desenvolver a noção de limite de uma sequência, destacando assim a soma de infinitos termos de uma progressão geométrica e a noção intuitiva de limite. Já a segunda proposta a autora apresenta a lenda da criação do jogo de xadrez, cujo objetivo é apresentar aos alunos o crescimento exponencial de uma progressão geométrica, destacando o ensino da soma finita dos termos de uma progressão geométrica.

Assim, Cerqueira (2013) em sua proposta elabora o ensino de progressões e funções utilizando outros temas da matemática, fazendo com que desperte o interesse dos alunos pelo fato de ser apresentada uma forma diferente para ensinar um conteúdo que está contido nos livros didáticos.

A pesquisa de Cerqueira (2013), nos incentivou na construção de um texto matemático de forma aprofundada considerando o rigor matemático exigido para o aprofundamento do objeto matemático de domínio do professor de matemática, assim contribuindo para sua formação e aprofundamento de seu conhecimento.

2.2.7 – Sobre a Dissertação de Chiconato (2013)

A dissertação de mestrado de Chiconato (2013), intitulada “Despoluição de um lago – progressão geométrica” foi apresentada à Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) com o objetivo de *auxiliar a aprendizagem do conteúdo de progressão geométrica, desenvolvendo um material didático, embasado na metodologia de pesquisa chamada engenharia didática.*

A autora começa seu trabalho considerando um breve relato histórico sobre progressão geométrica, posteriormente, define sequências como função e como um processor recursivo, e também define progressão geométrica prosseguindo como a inserção desse conteúdo no Ensino Médio conforme os documentos oficiais.

Chiconato (2013) também destaca a análise de alguns livros didáticos e de documentos oficiais sobre o processo de ensino de progressão geométrica. Posteriormente a autora realiza um levantamento bibliográfico sobre os pressupostos epistemológicos e pedagógicos, fazendo as considerações sobre a didática da matemática e a metodologia de pesquisa da engenharia didática.

Como proposta metodológica, Chiconato (2013) elabora e aplica uma sequência didática com 29 alunos de uma turma do 1º ano do Ensino Médio de uma escola estadual do município de Ibitinga, no Estado de São Paulo. A aplicação da sequência didática teve duração de cinco dias, onde ao todo a sequência didática continha 61 questões divididas em duas atividades com experimentos práticos no laboratório de ciências e no laboratório de informática.

A primeira atividade ocorreu no laboratório de ciências, onde foi proposto aos alunos fazer uma simulação do processo de despoluição de um lago, no qual simultaneamente a simulação os alunos responderam uma folha compostas por 26 questionamentos referentes à simulação, no qual tal simulação foi baseada em um texto apresentados aos alunos. Segundo Chiconato (2013, p. 59) a falta de boa leitura, interpretação e o emprego de raciocínio mecânico frente ao texto ocasionaram alguns erros na atividade e algumas dificuldades referentes aos conteúdos de frações e números decimais.

Já a segunda atividade foi realizada no laboratório de informática, através de 36 questionamentos, com o intuito de coletar os dados da simulação da primeira atividade através das respostas do questionário, e chegar a um modelo matemático, no caso a equação do termo geral de progressão geométrica que estabeleceu um padrão para a despoluição de um lago, onde os resultados de alguns questionamentos da segunda atividade foram dispostos ao programa Excel através de um material de apoio para chegar a tal modelo matemático. Chiconato (2013, p. 80) destaca que as dificuldades apresentadas pelos alunos na segunda atividade foram referentes a expressões matemáticas com a manipulação de variáveis, porém alguns questionamentos da mesma atividade foram minimizando tais dificuldades.

As atividades realizadas por Chiconoto (2013) foi bem proveitosa e positiva, pois trabalhou com uma aplicação do meio natural, no caso a despoluição de um lago, para ensinar progressão geométrica, onde além do aluno aprender o conteúdo matemático, também consegue visualizar como pode ser utilizada no cotidiano.

Com base na pesquisa de Chiconato (2013), elaboramos as atividades que compõe a sequência didática proposta a partir de processos investigativos, no qual viabiliza o entendimento dos alunos sobre os conceitos matemáticos, assim como, torna a atividade mais atrativa.

2.2.8 – Sobre a Dissertação de Milani (2011)

Milani (2011) tem como título de sua dissertação de mestrado “a resolução de problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no Ensino Médio”, onde teve como questão de pesquisa o seguinte questionamento: *Que contribuições, uma proposta de ensino baseada na resolução de problemas, podem trazer para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas?*

Em sua pesquisa, o autor objetivou *investigar as possíveis contribuições que uma proposta de ensino, baseada na resolução de problemas, pode trazer para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas.* O que inspirou o autor pela escolha do tema foi a sua atuação como professor de matemática em uma turma do 1º ano do Ensino Médio, onde o pesquisador percebeu nos alunos uma falta de interesse, comprovada pela pouca vontade deles em realizar as atividades propostas, e a escolha do objeto de estudo se deu através de experiências profissionais e consulta de outros professores de matemática e constatou que é tradicional o ensino das Progressões exclusivamente por meio de manipulação de fórmulas entregues aos alunos, muitas vezes sem as devidas demonstrações destas e também sua aplicabilidade, sendo assim empregados em exercícios tradicionais de sala de aula.

Inicialmente o autor realiza um levantamento bibliográfico sobre a história das progressões, documentos oficiais e as progressões no Ensino Médio, prosseguindo com a análise de outras pesquisas que contribuíram para a sua pesquisa e se relacionam com o tema proposto, e ainda realiza um levantamento sobre resolução de problemas, resolução de problemas nos documentos oficiais brasileiros e a resolução de problemas em outras pesquisas.

Como procedimento metodológico, Milani (2011) realizou sua pesquisa com 46 alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola particular da cidade de Ponta Nova, no Estado de Minas Gerais, no qual primeiro os alunos tiveram aulas sobre os conteúdos de progressão aritmética e progressão geométrica e posteriormente foram implementados 5 situações-problemas referentes aos conteúdos propostos.

> O envolvimento dos alunos na realização das atividades provocou uma melhora no rendimento escolar dos alunos. Outro fator importante a considerar foi o fato de cada problema ter provocado algum desenvolvimento, isto é, houve a identificação do problema e uso de estratégia de resolução. Os erros encontrados ocorreram por escolha de estratégia equivocada e/ou erros de cálculo. (MILANI, 2011, p. 110 - 111).

Portanto, a proposta apresentada por Milani (2011) apresentou pontos positivos para o ensino de progressão aritmética e progressão geométrica, pois fizeram com que os alunos fossem mais ativos nas atividades, no qual tinham a escolha de estratégias disponíveis para resolver cada problema, fazendo com que eles fossem mais produtivos em suas tarefas.

A partir da pesquisa de Milani (2011), elaboramos questões das atividades em que provocasse o desenvolvimento estratégico do aluno para solucionar os problemas propostos nas avaliações restritivas e aplicativas da sequência didática.

2.3 – ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Nesta seção farei a análise do tratamento conceitual do objeto matemático, quais conteúdos relacionados ao objeto matemático, abordagem metodológica na apresentação dos conteúdos, correlação entre os conteúdos apresentados e as atividades resolvidas e propostas e quadro síntese comparando os livros didáticos analisados. Desta forma, a minha análise será dada em cinco livros didáticos do Plano Nacional do Livro didático (PNLD) de 2015 a 2020.

Segundo o portal[4] do Ministério da Educação (MEC), o PNLD é destinado a avaliar e a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas de Educação Básica das redes federal, estaduais, municipais e distrital e também às instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público. Assim, conforme o Art. 2°, o PNLD possui por objetivo:

> I - aprimorar o processo de ensino e aprendizagem nas escolas de Educação Básica com a consequente melhoria da qualidade da educação; II - garantir o padrão de qualidade do material de apoio à prática educativa utilizado nas escolas públicas de Educação Básica; III - democratizar o acesso às fontes de informação e cultura; IV - fomentar a leitura e o estímulo à atitude investigativa dos estudantes; V - apoiar a atualização, a autonomia e o desenvolvimento profissional do professor; e VI - apoiar a implementação da Base Nacional Comum Curricular. (BRASIL, 2017, s/n).

A partir do Decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017, o PNLD possibilitou a inclusão de outros materiais de apoio à prática docente, além das obras didáticas e literárias: obras pedagógicas, softwares e jogos educacionais, materiais de formação, dentre os quais as sequências didáticas podem se incluir, entre outros.

Minha análise terá como base o estudo de Masseti (2016) uma proposta metodológica para verificar os procedimentos de construção, sistematização e consolidação de conhecimentos no PNLD, especificamente na área de Matemática e Suas Tecnologias.

Para analisar o livro didático, é importante defini-lo de forma a compreender a função do livro didático no âmbito educacional, assim, Richaudeaur (1979), *apud* Oliveira, Guimarães e Bomeny (1984, p. 11) definem o livro didático como "material impresso, estruturado, destinado ou adequado a ser utilizado num processo de aprendizagem ou ensino".

A minha análise de livros didáticos é dada a partir da proposta metodológica utilizada por Masseti (2016), no qual a realização da análise ocorre a partir das categorias apresentadas no diagrama metodológico, destacado na Figura 8.

---

[4] http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld

Figura 8: Diagrama metodológico utilizado por Masseti (2016) para a análise de livros didáticos.

Fonte: Adaptado de Masseti (2016).

Conforme a Figura 8, Masseti (2016) também apresenta subcategorias que detalham a análise de livros didáticos. No Quadro 6, apresentamos as subcategorias destacadas para cada uma das categorias apresentadas por Masseti (2016).

Quadro 6: Critérios de análise de livros didáticos.

Categorias	**Subcategorias**
Situações	- Introdução/Motivação - Exemplos: tarefas resolvidas - Tarefas propostas: 1- Conhecimentos prévios 2- Conhecimentos emergentes: Representar geometricamente/graficamente; Explorar; Manipular; Conjecturar; Provar; Modelar; e Resolução de problemas.
Linguagem	- Formal ou Informal
Conceitos	- Explícito ou Implícito
Proposições	- Apresentação/Recordação - Prova, demonstração ou justificativa - Utilização em exercícios ou exposição
Procedimentos	- Maneiras distintas de resolver exercícios - Justificativa ou não das resoluções - Utilização de recursos didáticos
Argumentação	- Prática discursiva, verbal ou gráfica para a validação de propriedades - Tipo de prova utilizada

Fonte: Adaptado de Masseti (2016).

Desta forma, apresentamos no Quadro 7 os livros didáticos analisados nesta pesquisa, assim, adequamos as categorias e subcategorias utilizadas por Masseti (2016) para o conteúdo de progressão geométrica, no qual destacamos os conceitos iniciais e a fórmula do termo geral de uma P.G.

Quadro 7: Livros didáticos analisados.

Autor (es)	**Título**	**Editora**	**Ano de publicação**	**Ano de PNLD/PNLEM**
Luiz Roberto Dante e Fernando Viana	Matemática em Contextos: Função exponencial, Função Logarítmica e Sequências	Ática	2020	2018-2020
José Roberto Bonjorno, José Rui Giovanni e Paulo Roberto Câmara de Sousa	Prisma Matemática: Funções e Progressões	FTD	2020	2018-2020
Luiz Roberto Dante	Matemática: Contexto e Aplicações	Ática	2016	2018-2020
Rodrigo Balestri	Matemática: Interação e Tecnologia – Volume 1	Leya	2016	2018-2020
Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz	Matemática para compreender o mundo – Volume 1	Saraiva	2016	2018-2020

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A seguir, a análise se dará conforme as categorias e subcategorias utilizadas por Masseti (2016).

2.3.1 – Matemática em Contextos: Função exponencial, Função Logarítmica e Sequências – DANTE e VIANA (2020)

O capítulo de Sequências de Dante e Viana (2020) inicia com uma exposição sobre os Fractais, no qual realiza uma associação entre as figuras geométricas e as sequências recursivas.

Figura 9: Introdução do capítulo de Sequências.

Fonte: Dante e Viana (2020).

Posteriormente, destaca os precedentes históricos, no qual realiza uma abordagem sobre o Papiro de Rhind, os Pitagóricos, e por fim Fibonacci, uma vez que, estes apresentam estruturas numéricas que constituem sequências distintas.

O autor inicia o conteúdo de progressão geométrica propondo duas situações problemas, a primeira situação destaca o crescimento populacional explorando um padrão de crescimento, já a segunda situação destaca a taxa de crescimento relativo explorando um padrão percentual que está associada a sequência em progressão geométrica.

Para formalizar o conceito de progressão geométrica, o autor retorna as situações problemas iniciais, para reportar a seguinte definição.

Figura 10: Definição de progressão geométrica

Progressão geométrica (PG) é toda sequência de números não nulos na qual o quociente entre cada termo, a partir do segundo, e o termo anterior é constante. Esse quociente constante é chamado **razão** da progressão e é representado pela letra *q*.

Fonte: Dante e Viana (2020).

Após o autor apresentar a definição de progressão geométrica, este apresenta a classificação de P.G. e propõe uma sequência de atividades que explora regularidades para formalizar a equação do termo geral de uma progressão geométrica.

Figura 11: Termo Geral de uma progressão geométrica.

Em uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão q, partindo do 1º termo, para avançar 1 termo, basta multiplicar o 1º termo pela razão q ($a_2 = a_1 \cdot q$); para avançar 2 termos, basta multiplicar o 1º termo pelo quadrado da razão q, ou seja, por q^2 ($a_3 = a_1 \cdot q^2$); para avançar 3 termos, basta multiplicar o 1º termo por q^3 ($a_4 = a_1 \cdot q^3$); e assim por diante. Desse modo, um termo qualquer de índice n da sequência, chamado de **termo geral da PG**, é dado por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ com } n \geqslant 1.$$

Fonte: Dante e Viana (2020).

Ao definir a fórmula do termo geral da P.G. o autor apresenta como exemplos alguns exercícios resolvidos que envolvem o cálculo para encontrar os termos de uma PG assim como a razão da sequência numérica.

Figura 12:Exercícios resolvidos sobre progressão geométrica.

Atividades resolvidas

5. Calcule o 1º termo de uma PG em que $a_4 = 375$ e $q = 5$.

Resolução

Como $a_4 = a_1 \cdot q^3$, obtemos:

$375 = a_1 \cdot 5^3 \Rightarrow 125a_1 = 375 \Rightarrow a_1 = 3$

Portanto, o 1º termo dessa PG é $a_1 = 3$.

6. Quantos elementos a PG $(8, 32, \ldots, 2^{31})$ tem?

Resolução

Sabemos que $a_1 = 8$, $q = \frac{32}{8} = 4$ e $a_n = 2^{31}$ e queremos saber o valor de n.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 2^{31} = 8 \cdot 4^{n-1} \Rightarrow 2^{31} = 2^3 \cdot 2^{2n-2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{31} = 2^{2n+1} \Rightarrow 2n + 1 = 31 \Rightarrow 2n = 30 \Rightarrow n = 15$

Logo, essa PG tem 15 elementos.

7. Qual é a razão da PG que se obtém inserindo 4 termos entre os números 5 e 5 120?

Resolução

Se vamos inserir 4 termos entre 5 e 5 120, teremos um total de 6 termos na PG, sendo $a_1 = 5$ e $a_6 = 5120$.

Como $a_6 = a_1 \cdot q^5$, obtemos:

$5\,120 = 5q^5 \Rightarrow q^5 = 1\,024 \Rightarrow q = 4$

Logo, a razão dessa PG é $q = 4$.

Fonte: Dante e Viana (2020).

Observa-se que nas atividades propostas pelo autor, as questões possuem resoluções semelhantes às apresentadas nas atividades resolvidas, porém com questões contextualizadas relacionando-as com aplicações em meios científicos e do cotidiano do aluno.

A seguir, o autor propõe uma atividade exploratória para que o aluno investigue a relação entre as sequências numéricas em progressão geométrica e as funções.

Desta forma, ao concluir a atividade exploratória o autor define a progressão geométrica como uma função exponencial, como mostra a Figura 13.

Figura 13: Progressão Geométrica como Função Exponencial.

De modo geral, se considerarmos uma PG $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão q, com $q > 0$ e $q \neq 1$, cujo termo geral é $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, com $n \geq 1$, a representação gráfica dessa PG é formada pelos pontos $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, ..., (n, a_n), ..., que pertencem ao gráfico da função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = a_1 \cdot q^{x-1}$.

Fonte: Dante e Viana (2020).

Após a discussão da relação entre a P.G. e a função exponencial, no qual o autor apresenta os gráficos e padrões contidos nestes, além de verificar a notação de função para descrever uma sequência numérica, é proposto uma atividade com três questões que envolvem essa relação de forma que, explora-se a manipulação de sequências através da notação de funções, assim como a investigação gráfica da função.

Na análise do livro didático de Dante e Viana (2020), verificamos que é muito utilizado o processo investigativo, através de regularidades para apresentar as definições necessárias, assim como propõe Cabral (2017), no qual o autor explora os conhecimentos prévios dos alunos, para concluir as atividades iniciais.

Porém, verificamos a necessidade de serem exploradas as formas geométricas para dar suporte na visualização das sequências numéricas, assim como, nas atividades propostas, uma vez que, com o auxílio geométrico, o aluno consegue abstrair de forma facilitada o rigor matemático.

No Quadro 8, apresentamos de que forma os autores desenvolvem o conteúdo de progressão geométrica em seu livro didático, na perspectiva da análise de livro didático de Masseti (2016).

Quadro 8: Análise do livro didático de Dante e Viana (2020).

<table>
<tr><th>Categorias</th><th colspan="2">Subcategorias</th><th>Análise do livro didático</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Situações</td><td colspan="2">- Introdução/Motivação</td><td>Apresenta situações do próprio campo matemático, da ciência no geral e do cotidiano do aluno.</td></tr>
<tr><td colspan="2">-Exemplos-tarefas resolvidas: 4 questões</td><td>Apresenta o conteúdo novo através de atividades exploratórias e exercícios resolvidos.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">- Tarefas propostas</td><td>Conhecimentos prévios:2 questões</td><td>Operações básicas, números inteiros e racionais, porcentagem, notação de funções e sinais de desigualdade.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Conhecimentos emergentes: 29 questões</td><td>Representar geometricamente/graficamente: 1 questão</td></tr>
<tr><td>Explorar: 6 questões</td></tr>
<tr><td>Manipular: 2 questões</td></tr>
</table>

			Conjecturar: **7 questões**
			Provar: **0 questões**
			Modelar**: 6 questões**
			Resolução de problemas**: 8 questões**
Linguagem	- Formal ou Informal		Linguagem formal, de forma algébrica, numérica, gráfica e tabular.
Conceitos	- Explícito ou Implícito		Explícito, de forma a apresentar perspectivas lógico-dedutivas com termos algébricos formais.
Proposições	- Apresentação/Recordação		De modo exploratório investigativo, através de questões ou resoluções de problemas a partir de conhecimentos prévios.
	- Prova, demonstração ou justificativa		Não prova de maneira formal, apenas propõe exercícios que possuem regularidades ou explicando passo a passo.
	- Utilização em exercícios ou exposição		Por meio de exemplos e exercícios.
Procedimentos	- Maneiras distintas de resolver exercícios		Abordagem numérica e algébrica.
	- Justificativa ou não das resoluções		Justifica.
	- Utilização de recursos didáticos		Ensino por atividade.
Argumentação	- Prática discursiva, verbal ou gráfica para a validação de propriedades		Para a validação faz uso de exercícios resolvidos e propostos com regularidades para a generalização das propriedades.
	- Tipo de prova utilizada		Exposição sintética, não prova de maneira formal.

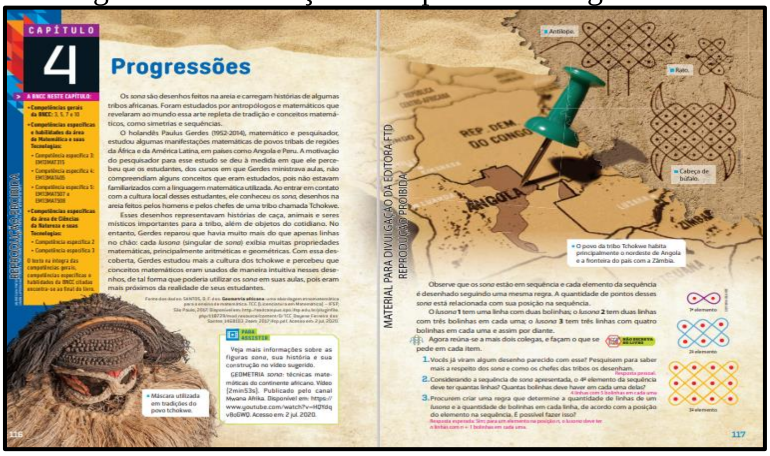
Fonte: Adaptado de Masseti (2016).

De forma geral, verificamos que pouco o autor faz uso de métodos gráficos e exploração da notação de função para a representação de progressão geométrica, assim como, não se explora sua relação com a geometria.

2.3.2 – Prisma Matemática: Funções e Progressões – BONJORNO, GIOVANNI e SOUSA (2020)

O capítulo de Progressões de Bonjorno, Giovanni e Souza (2020) inicia com uma exposição sobre a aplicação das Sequências Numéricas em desenhos elaborados por tribos de regiões da África e América Latina.

Figura 14: Introdução do capítulo de Progressões.



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Souza (2020).

Na Figura, os autores apresentam os Sona, que são desenhos feitos na areia e carregam histórias de algumas tribos africanas. Foram estudados por antropólogos e matemáticos que revelaram ao mundo essa arte repleta de tradição e conceitos matemáticos, como simetrias e sequências.

Para o início do conteúdo de Progressões Geométricas, Bonjorno, Giovanni e Souza (2020) destacam uma situação problema na organização de prateleiras em um mercado, no qual, deseja-se organizar um certo produto em formato de pirâmide, de forma que a quantidade de produtos fosse disposta em progressão geométrica.

Figura 15: Problema inicial de progressão geométrica.

Progressão geométrica

Um mercado resolveu organizar as caixas de um produto no formato de pirâmide com 6 patamares, obedecendo a determinado critério. O primeiro patamar (o mais alto) continha 4 caixas e os demais, o dobro de caixas do patamar anterior. Veja a quantidade de caixas nos patamares formados.

Patamar	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Caixas	4	8	16	32	64	128

- Os supermercados costumam arranjar os produtos em formatos diferentes para dar destaque e atrair a atenção do consumidor.

Podemos indicar a quantidade de caixas de um patamar de acordo com a ordem de cada um dos patamares. Assim, essa situação pode ser representada pela sequência numérica (4, 8, 16, 32, 64, 128). Note que, nessa sequência, cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por 2:

$8 = 4 \cdot 2$

$16 = 8 \cdot 2$

$32 = 16 \cdot 2$

$64 = 32 \cdot 2$

$128 = 64 \cdot 2$

Essa sequência é um exemplo de **progressão geométrica** (**PG**).

Fonte: Bonjorno, Giovanni e Souza (2020).

A seguir, os autores definem progressão geométrica como toda sequência de números não nulos em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior, multiplicado por uma constante chamada de razão (q) da progressão. Assim, realiza-se manipulações algébricas de forma que se percebe que a razão de uma progressão geométrica forma uma regularidade entre seus termos, a partir de sua definição.

Figura 16: Definição de uma progressão geométrica.

Representando uma PG pela sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ...)$ e aplicando a definição, temos:

SAIBA QUE...

Observe que a razão $q = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ também vale para uma PG genérica finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$.

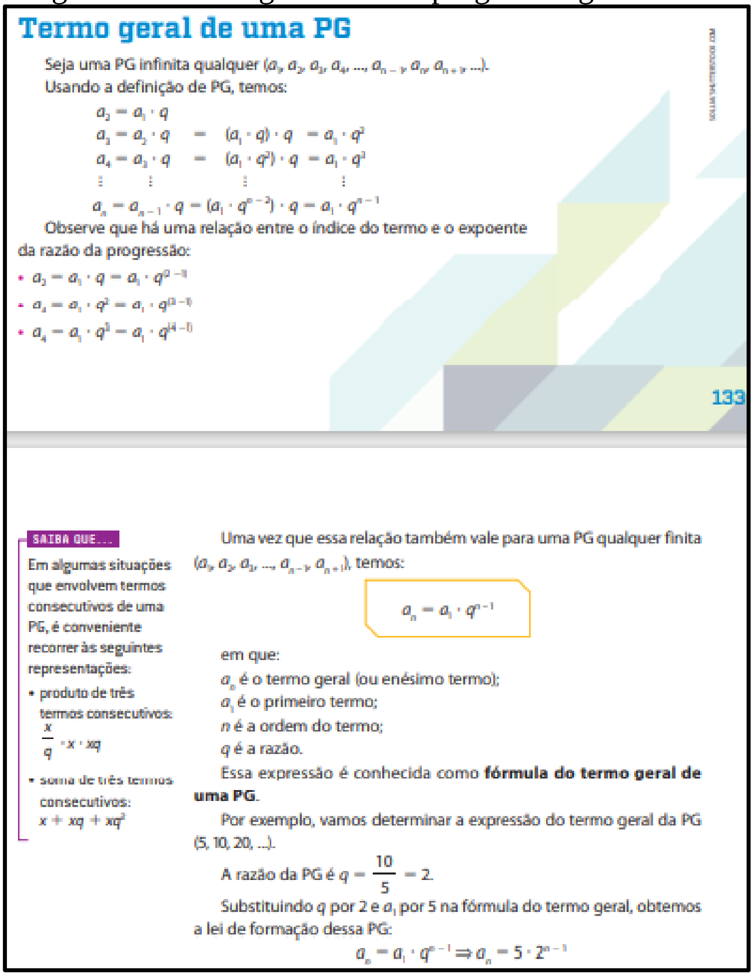
$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 \cdot q \Rightarrow \dfrac{a_2}{a_1} = q \\ a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow \dfrac{a_3}{a_2} = q \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Portanto, em uma PG qualquer, a razão q é igual ao quociente entre cada termo e o respectivo antecessor, a partir do segundo termo.

Fonte: Bonjorno, Giovanni e Souza (2020).

Após o autor apresentar a definição de progressão geométrica, este apresenta a classificação de P.G. e explora regularidades de forma algébrica com os termos da P.G. para formalizar a equação do termo geral de uma progressão geométrica.

Figura 17: Termo geral de uma progressão geométrica.



Termo geral de uma PG

Seja uma PG infinita qualquer $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$.
Usando a definição de PG, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q = (a_1 \cdot q^{n-2}) \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

Observe que há uma relação entre o índice do termo e o expoente da razão da progressão:

- $a_2 = a_1 \cdot q = a_1 \cdot q^{(2-1)}$
- $a_3 = a_1 \cdot q^2 = a_1 \cdot q^{(3-1)}$
- $a_4 = a_1 \cdot q^3 = a_1 \cdot q^{(4-1)}$

133

SAIBA QUE...

Em algumas situações que envolvem termos consecutivos de uma PG, é conveniente recorrer às seguintes representações:

- produto de três termos consecutivos: $\frac{x}{q} \cdot x \cdot xq$
- soma de três termos consecutivos: $x + xq + xq^2$

Uma vez que essa relação também vale para uma PG qualquer finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_{n+1})$, temos:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

em que:

a_n é o termo geral (ou enésimo termo);
a_1 é o primeiro termo;
n é a ordem do termo;
q é a razão.

Essa expressão é conhecida como **fórmula do termo geral de uma PG**.

Por exemplo, vamos determinar a expressão do termo geral da PG (5, 10, 20, ...).

A razão da PG é $q = \frac{10}{5} = 2$.

Substituindo q por 2 e a_1 por 5 na fórmula do termo geral, obtemos a lei de formação dessa PG:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$$

Fonte: Bonjorno, Giovanni e Souza (2020).

Após formalizar a equação do termo geral de uma P.G. o ator apresenta um exemplo para obter a lei de formação de uma sequência em progressão geométrica, posteriormente o autor dar segmento ao conteúdo, no qual propõem exercícios apenas ao finalizar toda a parte teórica das definições e conceitos.

Como última parte da apresentação teórica do conteúdo de P.G. os autores realizam uma relação entre a progressão geométrica e a Função Exponencial.

Figura 18: Progressão Geométrica como Função Exponencial.

Progressão geométrica e função exponencial

Veremos a seguir que a progressão geométrica, assim como a progressão aritmética, também se relaciona com um tipo de função. No caso da PG, com a função exponencial.

A função exponencial de base a é definida pela lei $y = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Considerando o domínio de uma função f os números naturais não nulos, a lei que relaciona qualquer $n \in D(f)$ a $f(n)$ é $f(n) = b^n$ e podemos escrever:

- para $n = 1 \Rightarrow f(1) = b^1 = b = a_1$
- para $n = 2 \Rightarrow f(2) = b^2 = b \cdot b = b \cdot a_1 = a_2$
- para $n = 3 \Rightarrow f(3) = b^3 = b \cdot b^2 = b \cdot a_2 = a_3$
- para $n = 4 \Rightarrow f(4) = b^4 = b \cdot b^3 = b \cdot a_3 = a_4$
- para $n = 5 \Rightarrow f(5) = b^5 = b \cdot b^4 = b \cdot a_4 = a_5$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

SAIBA QUE...

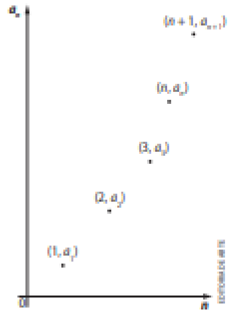
Para indicar a base da função f, usamos a letra b ao invés da usual a para não confundir com os termos da PG: $a_1, a_2, a_3...$

Assim, temos:

$f(n) = b^n$

$f(n + 1) = b^{n+1}$, ou seja, $f(1), f(2), ..., f(n), ...$ formam uma PG de razão b.

Veja como fica o gráfico de f quando $b > 0$ e $b > 1$.



PENSE E RESPONDA

- Podemos dizer que os pontos $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, $(3, a_3)$, ..., (n, a_n), $(n + 1, a_{n+1})$, ... estão alinhados? Justifique sua resposta.
- No gráfico que representa uma PG, podemos traçar uma curva contínua ligando os pontos?

Ver as Orientações para o professor.

Calculando o quociente entre $f(n + 1)$ e $f(n)$, temos:

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{b^{n+1}}{b^n} = b^{n+1-n} = b$$

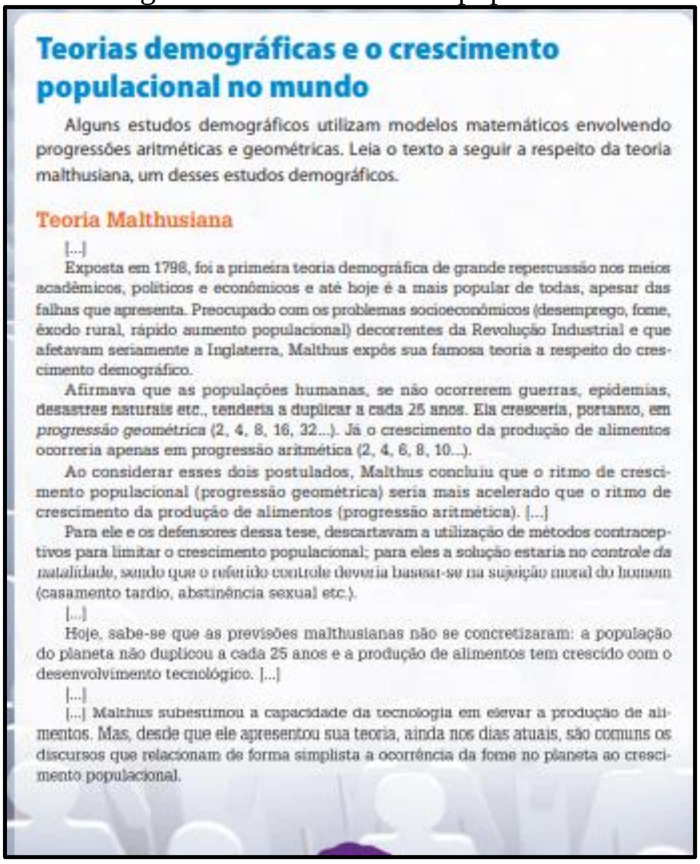
Então, considerando a sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...)$, o quociente entre cada termo e o anterior é constante e igual a b, ou seja, toda função exponencial $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(n) = b^n$, com $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ e $b \neq 1$, é uma PG de razão $q = b$.

Observe que se pode definir uma PG de razão negativa; porém, neste caso, não associamos essa PG a uma função exponencial, que só está definida para bases positivas.

Fonte: Bonjorno, Giovanni e Souza (2020).

Após a discussão da relação entre a P.G. e a função exponencial, no qual os autores apresenta os gráficos e padrões contidos nestes, além de verificar a notação de função para descrever uma sequência numérica, é apresentado 7 atividades resolvidas de forma geral do conteúdo, e posteriormente 31 atividades propostas, no qual finalizam o conteúdo através de uma aplicação da P.G., no qual é destacado o estudo de teorias demográfica e o crescimento populacional no mundo.

Figura 19: Exposição motivadora da aplicação de progressão geométrica nas teorias demográficas e o crescimento populacional.



Teorias demográficas e o crescimento populacional no mundo

Alguns estudos demográficos utilizam modelos matemáticos envolvendo progressões aritméticas e geométricas. Leia o texto a seguir a respeito da teoria malthusiana, um desses estudos demográficos.

Teoria Malthusiana

[...]

Exposta em 1798, foi a primeira teoria demográfica de grande repercussão nos meios acadêmicos, políticos e econômicos e até hoje é a mais popular de todas, apesar das falhas que apresenta. Preocupado com os problemas socioeconômicos (desemprego, fome, êxodo rural, rápido aumento populacional) decorrentes da Revolução Industrial e que afetavam seriamente a Inglaterra, Malthus expôs sua famosa teoria a respeito do crescimento demográfico.

Afirmava que as populações humanas, se não ocorrerem guerras, epidemias, desastres naturais etc., tenderia a duplicar a cada 25 anos. Ela cresceria, portanto, em *progressão geométrica* (2, 4, 8, 16, 32...). Já o crescimento da produção de alimentos ocorreria apenas em progressão aritmética (2, 4, 6, 8, 10...).

Ao considerar esses dois postulados, Malthus concluiu que o ritmo de crescimento populacional (progressão geométrica) seria mais acelerado que o ritmo de crescimento da produção de alimentos (progressão aritmética). [...]

Para ele e os defensores dessa tese, descartavam a utilização de métodos contraceptivos para limitar o crescimento populacional; para eles a solução estaria no *controle da natalidade*, sendo que o referido controle deveria basear-se na sujeição moral do homem (casamento tardio, abstinência sexual etc.).

[...]

Hoje, sabe-se que as previsões malthusianas não se concretizaram: a população do planeta não duplicou a cada 25 anos e a produção de alimentos tem crescido com o desenvolvimento tecnológico. [...]

[...]

[...] Malthus subestimou a capacidade da tecnologia em elevar a produção de alimentos. Mas, desde que ele apresentou sua teoria, ainda nos dias atuais, são comuns os discursos que relacionam de forma simplista a ocorrência da fome no planeta ao crescimento populacional.

Fonte: Bonjorno, Giovanni e Souza (2020).

Na análise do livro didático de Bonjorno, Giovanni e Souza (2020), verificamos que é pouco utilizado o processo investigativo, através de regularidades para apresentar as definições necessárias, assim como propõe Cabral (2017), isto é, o autor explora as manipulações algébricas, no qual não apresenta exemplos que podem auxiliar na compreensão do conteúdo.

Porém, verificamos a necessidade de serem exploradas as formas geométricas para dar suporte na visualização das sequências numéricas, assim como, nas atividades propostas, uma vez que, com o auxílio geométrico, o aluno consegue abstrair de forma facilitada o rigor matemático. Também, acreditamos que os autores poderiam explorar regularidades numéricas e apresentar exemplos que poderiam ser usufruídos pelos alunos para facilitar na resolução de novos problemas.

No Quadro 9, apresentamos de que forma os autores desenvolvem o conteúdo de progressão geométrica em seu livro didático, na perspectiva da análise de livro didático de Masseti (2016).

Quadro 9: Análise do livro didático de Bonjorno, Giovanni e Souza (2020).

<table>
<tr><th>Categorias</th><th colspan="2">Subcategorias</th><th>Análise do livro didático</th></tr>
<tr><td rowspan="10">Situações</td><td colspan="2">- Introdução/Motivação</td><td>Apresenta situações de aplicação geral e do cotidiano do aluno.</td></tr>
<tr><td colspan="2">-Exemplos-tarefas resolvidas: 7 questões</td><td>Apresenta o conteúdo novo através de manipulações algébricas e exercícios resolvidos.</td></tr>
<tr><td rowspan="8">- Tarefas propostas</td><td>Conhecimentos prévios:0 questões</td><td>Apenas exposição de exemplos resolvidos sobre operações básicas, números inteiros e racionais, porcentagem, notação de funções e sinais de desigualdade.</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Conhecimentos emergentes: 31 questões</td><td>Representar geometricamente/graficamente: 2 questões</td></tr>
<tr><td>Explorar: 14 questões</td></tr>
<tr><td>Manipular: 3 questões</td></tr>
<tr><td>Conjecturar: 5 questões</td></tr>
<tr><td>Provar: 0 questões</td></tr>
<tr><td>Modelar: 3 questões</td></tr>
<tr><td>Resolução de problemas: 6 questões</td></tr>
<tr><td>Linguagem</td><td colspan="2">- Formal ou Informal</td><td>Linguagem formal, de forma algébrica, numérica, gráfica e tabular.</td></tr>
<tr><td>Conceitos</td><td colspan="2">- Explícito ou Implícito</td><td>Explícito, de forma a apresentar perspectivas lógico-dedutivas com termos algébricos formais.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Proposições</td><td colspan="2">- Apresentação/Recordação</td><td>De modo expositivo, através de situações problemas e manipulação algébrica a partir de conhecimentos prévios.</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Prova, demonstração ou justificativa</td><td>Argumentação formal, expondo a regularidades algébricas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Utilização em exercícios ou exposição</td><td>Por meio de exemplos e exercícios.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Procedimentos</td><td colspan="2">- Maneiras distintas de resolver exercícios</td><td>Abordagem numérica e algébrica.</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Justificativa ou não das resoluções</td><td>Justifica.</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Utilização de recursos didáticos</td><td>Tradicional (Exposição, Exemplo e Exercícios)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Argumentação</td><td colspan="2">- Prática discursiva, verbal ou gráfica para a validação de propriedades</td><td>Para a validação faz uso de manipulação algébrica.</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Tipo de prova utilizada</td><td>Exposição algébrica</td></tr>
</table>

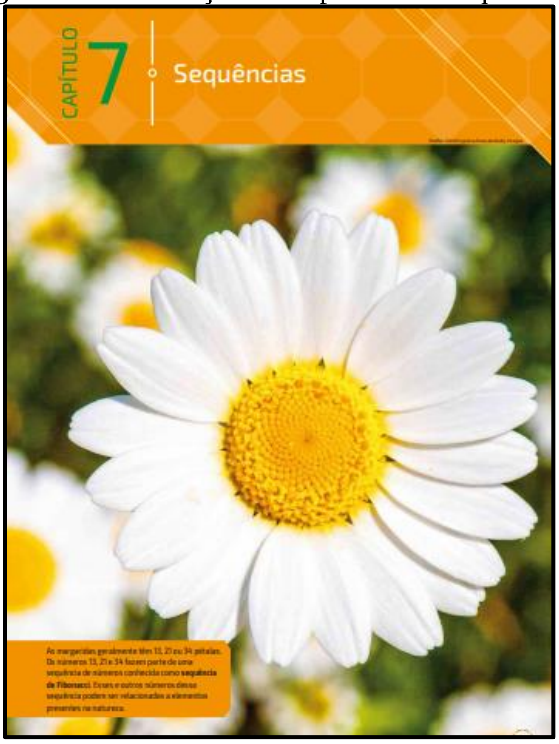
Fonte: Adaptado de Masseti (2016).

De forma geral, verificamos que pouco o autor faz uso de métodos gráficos e exploração da notação de função para a representação de progressão geométrica, assim como, não se explora sua relação com a geometria, e não apresenta atividades exploratórias com regularidades.

2.3.3 – Matemática: Contextos e Aplicações – DANTE (2016)

Dante (2016) inicia o capítulo de Sequências realizando uma relação entre a natureza e a sequência de Fibonacci, no qual destaca que as margaridas geralmente possuem 13, 21 ou 34 pétalas, e que estes números fazem parte da sequência de Fibonacci.

Figura 20: Introdução ao capítulo de Sequências.



Fonte: Dante (2016).

Posteriormente, o autor apresenta a introdução do conteúdo de progressão geométrica através de uma discussão inicial da taxa de crescimento relativo de uma grandeza, no qual é aplicada à produtividade de uma usina de açúcar, em que os valores da produtividade crescem exponencialmente com o passar dos anos, isto é, a produção de açúcar forma valores em progressão geométrica. Desta forma, o autor define progressão geométrica, conforme a figura 21.

Figura 21: Definição de progressão geométrica.

Definição

Progressão geométrica é toda sequência de números não nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado **razão (q)** da progressão. Ou seja, uma progressão geométrica é uma sequência na qual a taxa de crescimento relativo de cada termo para o seguinte é sempre a mesma.

Fonte: Dante (2016).

Em seguida, o autor apresenta alguns exemplos em que faz uso da definição de progressão geométrica relacionado à taxa de crescimento relativo (i), no qual destaca que, $i = \frac{b-a}{a}$, em que a e b, com $b > a$, são valores consecutivos de uma sequência numérica, daí, tem-se que a razão (q) de uma progressão geométrica é dada por $q = 1 + i$.

Assim, Dante (2016) apresenta a fórmula do termo geral de uma P.G. a partir dos exemplos realizados sobre a taxa de crescimento relativo, conforme a Figura 21.

Figura 22: Termo geral de uma progressão geométrica.

Fórmula do termo geral de uma PG

Em uma progressão geométrica ($a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$) de razão q, partindo do 1º termo, para avançar um termo, basta multiplicar o 1º termo pela razão q ($a_2 = a_1q$); para avançar dois termos, basta multiplicar o 1º termo pelo quadrado da razão q ($a_3 = a_1q^2$); para avançar três termos, basta multiplicar o 1º termo pelo cubo da razão q ($a_4 = a_1q^3$); e assim por diante. Desse modo encontramos o termo de ordem n, denominado **termo geral da PG**, que é dado por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

(ao passar de a_1 para a_n, avançamos ($n - 1$) termos)

Nessa fórmula:

- a_n = termo geral;
- a_1 = 1º termo;
- n = número de termos (até a_n);
- q = razão.

Observação: Algumas vezes é conveniente colocar o 1º termo como a_0 e não a_1, ficando o termo geral da PG dado por $a_n = a_0 \cdot q^n$. Por exemplo, se o número de sócios de um clube hoje é 2 000 e cresce 5% ao ano, quantos sócios esse clube terá em 3 anos?

Temos uma PG com $a_0 = 2\,000$ e razão $q = 1 + i = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$.

Após 3 anos, o clube terá aproximadamente 2 315 sócios ($a_3 = a_0 \cdot q^3 = 2000(1{,}05)^3 \simeq 2\,315$).

Fique atento!

- Note que $a_{10} = a_3 \cdot q^7$, pois ao passar de a_3 para a_{10} avançamos 7 termos; $a_5 = \frac{a_9}{q^4}$, pois ao passar de a_9 para a_5 retrocedemos 4 termos; e assim por diante.

  Dessa forma, podemos estender a definição do termo geral para: $a_n = a_k \cdot q^{n-k}$ (ao passar de a_k para a_n avançamos ($n - k$) termos).

- Qualquer PG ($a_1, a_2, ..., a_n, ...$) de razão q e primeiro termo a pode ser definida por recorrência por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = q \cdot a_n \end{cases}, \text{ para } n \geq 1.$$

Fonte: Dante (2016).

Posteriormente, o autor apresenta 9 exercícios resolvidos que relacionam as definições e conceitos já apresentados desde o início do conteúdo de P.G., e em seguida, apresenta 20 exercícios propostos.

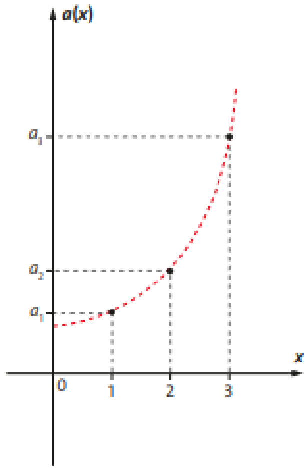
Como última parte da apresentação teórica do conteúdo de P.G. os autores realizam uma relação entre a progressão geométrica e a Função Exponencial, conforme a Figura 23.

Figura 23: Progressão Geométrica como Função Exponencial.

Conexão entre progressão geométrica e função exponencial

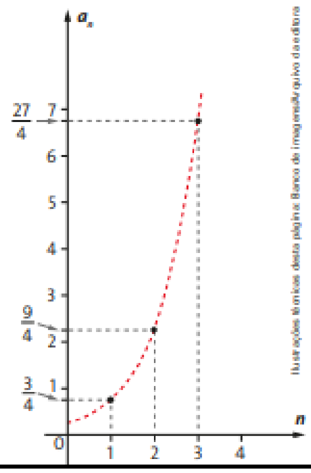
Já vimos que o termo geral de uma progressão geométrica é dado por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Nesse caso, podemos pensar em uma progressão geométrica como uma função que associa a cada número natural positivo n o valor dado por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Essa função é a restrição aos números naturais positivos da função do tipo exponencial $a(x) = aq^{x-1}$.

O gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial.



Fique atento!
Observe que não traçamos a curva contínua passando pelos pontos, pois o domínio é $\mathbb{N}^*$ e não $\mathbb{R}$.

Por exemplo, veja ao lado o gráfico de $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, com $a_1 = \frac{3}{4}$ e $q = 3$, ou seja, $a_n = \frac{3}{4} \cdot 3^{n-1}$. O gráfico é formado pelos pontos $\left(1, \frac{3}{4}\right), \left(2, \frac{9}{4}\right), \left(3, \frac{27}{4}\right)$, etc. e a PG é dada por $\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}, \frac{27}{4}, ...\right)$.



Fonte: Dante (2016).

Após a discussão da relação entre a P.G. e a função exponencial, no qual os autores apresenta os gráficos e padrões contidos nestes, além de verificar a notação de função para descrever uma sequência numérica, é apresentado atividades resolvidas e propostas relacionados à continuidade do conteúdo de P.G. que não é o foco desta pesquisa.

Na análise do livro didático de Dante (2016), verificamos que é pouco utilizado o processo investigativo, através de regularidades para apresentar as definições necessárias, assim como propõe Cabral (2017), isto é, o autor explora a discussão da aplicação da P.G. à taxa de crescimento relativo, e desenvolve todo o conteúdo a partir da aplicação inicial.

Assim como na análise dos livros didáticos já realizados neste texto, verificamos que o autor poderia explorar o ato investigativo e regularidades em sequências numéricas para justificar a relações entre o conteúdo e aplicações, bem como as definições e conceitos, além de apoiar-se dos princípios de construções geométricas, e incorporar a notação de função de maneira inicial ao objeto matemático.

No Quadro 10, apresentamos de que forma o autor desenvolve o conteúdo de progressão geométrica em seu livro didático, na perspectiva da análise de livro didático de Masseti (2016).

Quadro 10: Análise do livro didático de Dante (2016).

<table>
<tr><th>Categorias</th><th colspan="2">Subcategorias</th><th>Análise do livro didático</th></tr>
<tr><td rowspan="10">Situações</td><td colspan="2">- Introdução/Motivação</td><td>Apresenta situações de aplicação geral.</td></tr>
<tr><td colspan="2">-Exemplos-tarefas resolvidas: 9 questões</td><td>Apresenta o conteúdo novo através da análise de uma aplicação.</td></tr>
<tr><td rowspan="8">- Tarefas propostas</td><td>Conhecimentos prévios:0 questões</td><td>Apenas exposição de exemplos resolvidos sobre operações básicas, números inteiros e racionais, porcentagem, notação de funções.</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Conhecimentos emergentes: 20 questões</td><td>Representar geometricamente/graficamente: 0 questões</td></tr>
<tr><td>Explorar: 9 questões</td></tr>
<tr><td>Manipular: 3 questões</td></tr>
<tr><td>Conjecturar: 4 questões</td></tr>
<tr><td>Provar: 0 questões</td></tr>
<tr><td>Modelar: 4 questões</td></tr>
<tr><td>Resolução de problemas: 6 questões</td></tr>
<tr><td>Linguagem</td><td colspan="2">- Formal ou Informal</td><td>Linguagem formal, de forma algébrica, numérica, gráfica e tabular.</td></tr>
<tr><td>Conceitos</td><td colspan="2">- Explícito ou Implícito</td><td>Explícito, de forma a apresentar perspectivas lógico-dedutivas com termos algébricos e numéricos formais.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Proposições</td><td colspan="2">- Apresentação/Recordação</td><td>De modo expositivo, através de situações problemas e manipulação algébrica e numérica.</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Prova, demonstração ou justificativa</td><td>Argumentação intuitiva, expondo verificação numérica de aplicações.</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Utilização em exercícios ou exposição</td><td>Por meio de exemplos e exercícios.</td></tr>
<tr><td>Procedimentos</td><td colspan="2">- Maneiras distintas de resolver exercícios</td><td>Abordagem numérica e algébrica.</td></tr>
</table>

	- Justificativa ou não das resoluções	Justifica.
	- Utilização de recursos didáticos	Tradicional (Exposição, Exemplo e Exercícios)
Argumentação	- Prática discursiva, verbal ou gráfica para a validação de propriedades	Para a validação faz uso de manipulação numérica, através de exemplos.
	- Tipo de prova utilizada	Sem prova, apenas exposição intuitiva, através de exemplos.

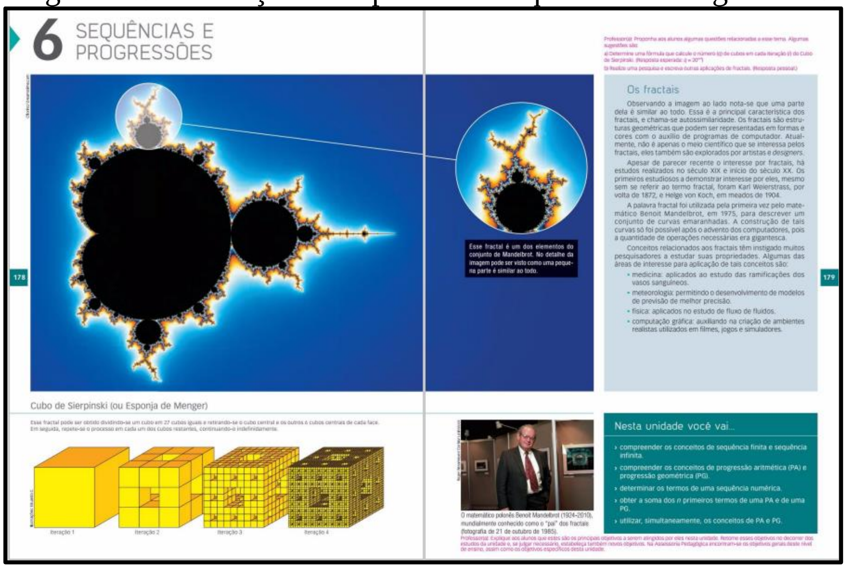
Fonte: Adaptado de Masseti (2016).

De forma geral, verificamos que o autor não explora métodos gráficos, notação de função, demonstração formal (de forma algébrica), além de não fazer uso de processos investigativos e regularidades numérica, no qual tem foco em discutir as aplicações.

2.3.4 – Matemática: Interação e Tecnologia – BALESTRI (2016)

Balestri (2016) inicia o capítulo de Sequências e Progressões a partir de uma discussão sobre os Fractais, no qual o autor destaca a aplicabilidade do conteúdo matemático destacado dentro do próprio campo matemático, porém de forma a propor que o aluno tenha interesse pelo estudo das Sequências e Progressões ao verificar algo curioso e interessante.

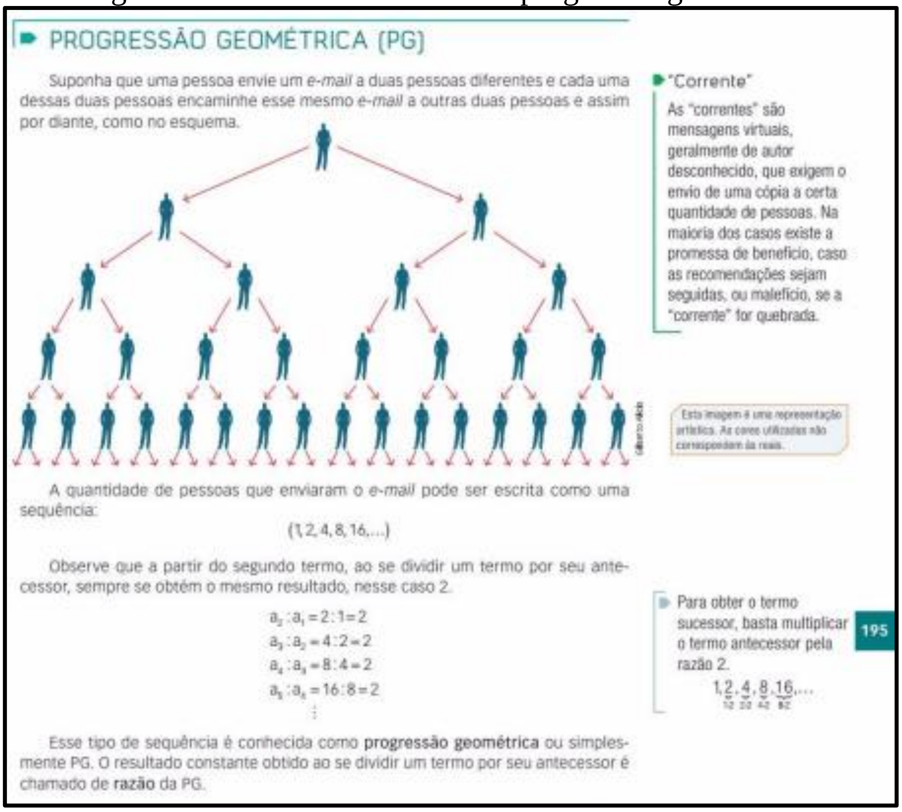
Figura 24: Introdução ao capítulo de Sequências e Progressões.



Fonte: Balestri (2016).

Como ponto de partida para iniciar o conteúdo de progressão geométrica, o autor apresenta uma situação-problema em que supõe que uma pessoa envie um e-mail a duas outras pessoas, e que cada uma dessas pessoas envie o mesmo e-mail para outras duas pessoas, e assim sucessivamente, no qual ao analisar a situação, finaliza que esse tipo de problema é gerado por sequências em progressão geométrica.

Figura 25: Problema inicial sobre progressão geométrica.



PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)

Suponha que uma pessoa envie um *e-mail* a duas pessoas diferentes e cada uma dessas duas pessoas encaminhe esse mesmo *e-mail* a outras duas pessoas e assim por diante, como no esquema.

"Corrente"

As "correntes" são mensagens virtuais, geralmente de autor desconhecido, que exigem o envio de uma cópia a certa quantidade de pessoas. Na maioria dos casos existe a promessa de benefício, caso as recomendações sejam seguidas, ou malefício, se a "corrente" for quebrada.

Esta imagem é uma representação artística. As cores utilizadas não correspondem às reais.

A quantidade de pessoas que enviaram o *e-mail* pode ser escrita como uma sequência:

$$(1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$$

Observe que a partir do segundo termo, ao se dividir um termo por seu antecessor, sempre se obtém o mesmo resultado, nesse caso 2.

$$a_2 : a_1 = 2 : 1 = 2$$
$$a_3 : a_2 = 4 : 2 = 2$$
$$a_4 : a_3 = 8 : 4 = 2$$
$$a_5 : a_4 = 16 : 8 = 2$$
$$\vdots$$

Para obter o termo sucessor, basta multiplicar o termo antecessor pela razão 2.

$$1, \underset{1\cdot 2}{2}, \underset{2\cdot 2}{4}, \underset{4\cdot 2}{8}, \underset{8\cdot 2}{16}, \ldots$$

Esse tipo de sequência é conhecida como **progressão geométrica** ou simplesmente PG. O resultado constante obtido ao se dividir um termo por seu antecessor é chamado de **razão** da PG.

195

Fonte: Balestri (2016).

Após verificar a situação-problema, no qual dá ênfase no estudo das Progressões Geométricas, e já apresentando o termo "razão da P.G." o autor define progressão geométrica, conforme a Figura 26.

Figura 26: Definição de progressão geométrica.

Progressão geométrica (PG) é toda sequência numérica de termos não nulos em que, a partir do segundo termo, o quociente entre um termo e seu antecessor resulta em uma constante, chamada de razão da PG, que indicamos por **q**, com $q \neq 0$.

- Se $q < 0$, a PG é alternante.
- Se $q = 1$, a PG é constante.
- Se $q > 1$ e $a_1 > 0$ ou $0 < q < 1$ e $a_1 < 0$, a PG é crescente.
- Se $q > 1$ e $a_1 < 0$ ou $0 < q < 1$ e $a_1 > 0$, a PG é decrescente.

Fonte: Balestri (2016).

Ao definir e classificar as sequências em progressão geométrica, o autor apresenta exemplos para destacar a classificação das sequências conforme a Figura acima, no qual realiza uma análise gráfica, no qual verifica o comportamento gráfico em cada exemplo. Em seguida, através de um processo recursivo, apresenta de forma algébrica como encontrar o termo central de uma P.G., conforme a Figura 27.

Figura 27: Termo central de uma progressão geométrica.

Em uma PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$, temos $a_2 : a_1 = a_3 : a_2 = a_4 : a_3 = \ldots = a_n : a_{n-1} = q$. Assim:

$$\begin{aligned} a_2 : a_1 = q &\Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 : a_2 = q &\Rightarrow a_3 = a_2 \cdot q \\ a_4 : a_3 = q &\Rightarrow a_4 = a_3 \cdot q \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_n : a_{n-1} = q &\Rightarrow a_n = a_{n-1} \cdot q \end{aligned}$$

O enésimo termo de uma PG que tem a_1 como primeiro termo e **q** como razão é dado pela fórmula de recorrência:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q, \text{ com } n \in \mathbb{N}^* \text{ e } n \geq 2$$

Sabendo que em uma PG $a_n : a_{n-1} = a_{n+1} : a_n$, segue que:

$$a_n : a_{n-1} = a_{n+1} : a_n \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow a_n^{\ 2} = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

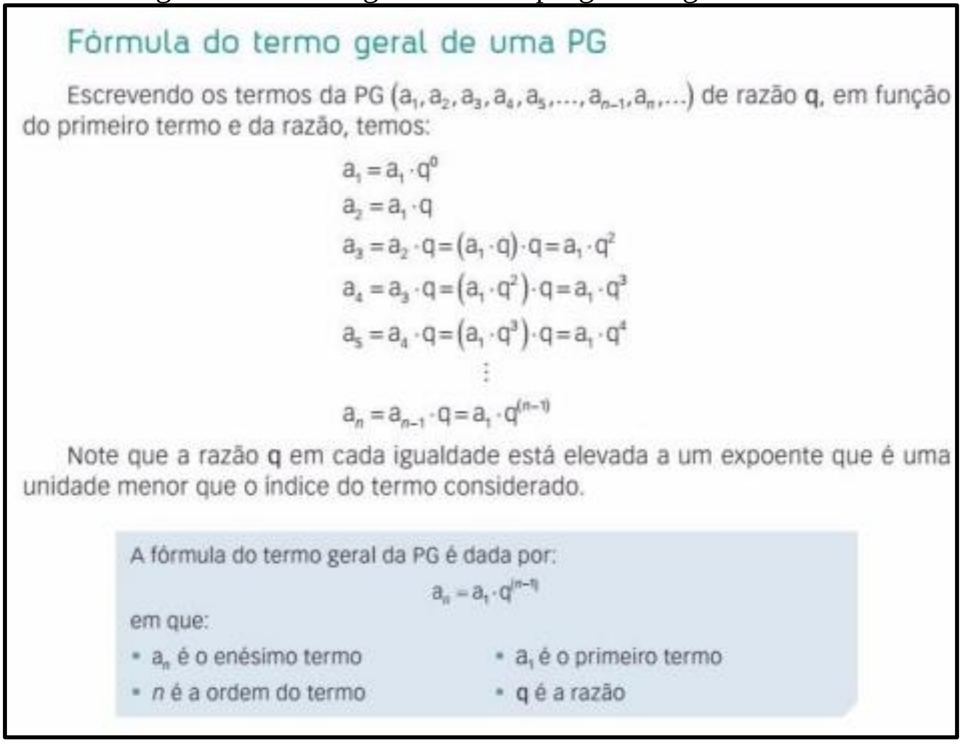
Considerando três termos consecutivos de uma PG $(\ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, o termo central é dado por:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Fonte: Balestri (2016).

Posteriormente, através de manipulação algébrica e generalização, o autor desenvolve a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica.

Figura 28: Termo geral de uma progressão geométrica.



Fórmula do termo geral de uma PG

Escrevendo os termos da PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$ de razão **q**, em função do primeiro termo e da razão, temos:

$$a_1 = a_1 \cdot q^0$$
$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3$$
$$a_5 = a_4 \cdot q = (a_1 \cdot q^3) \cdot q = a_1 \cdot q^4$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

Note que a razão **q** em cada igualdade está elevada a um expoente que é uma unidade menor que o índice do termo considerado.

A fórmula do termo geral da PG é dada por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

em que:

- a_n é o enésimo termo
- a_1 é o primeiro termo
- *n* é a ordem do termo
- **q** é a razão

Fonte: Balestri (2016).

Para exemplificar a fórmula do termo geral de uma P.G. o autor retoma à situação-problema inicial, para determinar quantas pessoas iriam receber o e-mail na décima etapa de envio, ao qual é realizado a modelagem da situação-problema e uma análise gráfica do comportamento numérico dos envios do e-mail. Assim, o autor possui uma oportunidade para inserir uma discussão do comportamento gráfico e numérico de uma sequência em progressão geométrica para associá-la a conteúdo matemático de Função Exponencial, no qual destaca como uma P.G. pode ser escrita na notação de função.

Figura 29: Progressão Geométrica como Função Exponencial.

PG e função exponencial

Estudamos no início desta unidade que as sequências numéricas são funções de domínio $\mathbb{N}^*$ e contradomínio não vazio e que PG é toda sequência numérica em que, a partir do segundo termo, o quociente entre um termo e seu antecessor resulta em uma constante, chamada de razão (**q**).

Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{8} \cdot 2^x$ e a PA $(0, 3, 6, 9, 12, \ldots)$ de razão 3. Calculando $f(0)$, $f(3)$, $f(6)$, $f(9)$, $f(12)$,... obtém-se outra sequência.

x	0	3	6	9	12	...
f(x)	$\frac{1}{8}$	1	8	64	512	...

Note que a sequência $\left(\frac{1}{8}, 1, 8, 64, 512, \ldots\right)$ é uma PG de razão 8 e essa razão é igual à base **a** da função $(a = 2)$ elevada à razão da PA $(r = 3)$, isto é, $8 = 2^3$.

Uma função do tipo exponencial é aquela cuja imagem de uma PA é uma PG. Se $f(x) = b \cdot a^x$, e a razão da PA é **r**, então a razão da PG (imagem da PA) é a^r.

Exemplo:

- Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e a PA $(4, 3, 2, 1, 0, \ldots)$ de razão -1. A sequência $(f(4), f(3), f(2), f(1), f(0)\ldots)$ correspondente a $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, \ldots\right)$ é uma PG de razão $3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.
- Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2^x$ e a PA $(-9, -5, -1, 3, 7, \ldots)$ de razão 4. A sequência $(f(-9), f(-5), f(-1), f(3), f(7), \ldots)$ correspondente a $\left(-\frac{1}{512}, -\frac{1}{32}, -\frac{1}{2}, -8, -128, \ldots\right)$ é uma PG de razão $16 = 2^4$.

Fonte: Balestri (2016).

Após a exposição do conteúdo matemático, Balestri (2016) apresenta 6 atividades resolvidas para exemplificar a resolução de questões dos conceitos e definições destacadas no Capítulo de Sequências e Progressões, e posteriormente propõe ao aluno 20 atividades para o aluno praticar o conhecimento novo proposto no estudo de progressão geométrica.

Ao analisar o livro didático de Balestri (2016) verificamos que o autor consegue alcançar vários campos da matemática, tais como: o Fractais, para chamar a atenção à algo curioso, e possibilitar o interesse do aluno ao estudo de progressão geométrica; aplicação no cotidiano do aluno, verificando que suas atitudes em envios de e-mail e mensagens também podem ser relacionadas à matemática; apresentação de figuras geométricas e gráficos em suas atividades, no qual facilita a visualização do comportamento numérico; e a aproximação da progressão geométrica à Função Exponencial, no qual destaca a análise gráfica e a notação de função para representar um modelo matemático que representa uma P.G.

Também verificamos que o autor poderia explorar o processo investigativo e regularidades em sequências numéricas para justificar a relações entre o conteúdo e aplicações, como destaca Cabral (2017), assim como apresentar a notação de função de maneira inicial ao objeto matemático.

No Quadro 11, apresentamos de que forma o autor desenvolve o conteúdo de progressão geométrica em seu livro didático, na perspectiva da análise de livro didático de Masseti (2016).

Quadro 11: Análise do livro didático de Balestri (2016).

<table>
<tr><th>Categorias</th><th colspan="2">Subcategorias</th><th>Análise do livro didático</th></tr>
<tr><td rowspan="10">Situações</td><td colspan="2">- Introdução/Motivação</td><td>Apresenta situações do próprio campo matemático, da ciência no geral e do cotidiano do aluno.</td></tr>
<tr><td colspan="2">-Exemplos-tarefas resolvidas: 8 questões</td><td>Apresenta o conteúdo novo através da análise de uma aplicação e conhecimentos prévios.</td></tr>
<tr><td rowspan="8">- Tarefas propostas</td><td>Conhecimentos prévios:8 questões</td><td>Exposição de exemplos resolvidos sobre P.G. que envolvem as operações básicas, números inteiros e racionais, notação de funções, gráficos e conceitos e definições matemáticas relacionadas à figuras geométricas.</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Conhecimentos emergentes: 20 questões</td><td>Representar geometricamente/graficamente: 5 questões</td></tr>
<tr><td>Explorar: 13 questões</td></tr>
<tr><td>Manipular: 9 questões</td></tr>
<tr><td>Conjecturar: 3 questões</td></tr>
<tr><td>Provar: 0 questões</td></tr>
<tr><td>Modelar: 7 questões</td></tr>
<tr><td>Resolução de problemas: 3 questões</td></tr>
<tr><td>Linguagem</td><td colspan="2">- Formal ou Informal</td><td>Linguagem formal, de forma algébrica, numérica, gráfica e geométrica.</td></tr>
<tr><td>Conceitos</td><td colspan="2">- Explícito ou Implícito</td><td>Explícito, de forma a apresentar perspectivas lógico-dedutivas com termos algébricos, numéricos formais e geométricos.</td></tr>
<tr><td>Proposições</td><td colspan="2">- Apresentação/Recordação</td><td>De modo expositivo, curiosidades do próprio campo matemático como incentivo.</td></tr>
</table>

	- Prova, demonstração ou justificativa	Argumentação intuitiva, expondo verificação numérica e algébrica.
	- Utilização em exercícios ou exposição	Por meio de exemplos e exercícios.
Procedimentos	- Maneiras distintas de resolver exercícios	Abordagem numérica e algébrica.
	- Justificativa ou não das resoluções	Justifica.
	- Utilização de recursos didáticos	Tradicional (Exposição, Exemplo e Exercícios)
Argumentação	- Prática discursiva, verbal ou gráfica para a validação de propriedades	Para a validação faz uso de manipulação numérica e algébrica, através de exemplos.
	- Tipo de prova utilizada	Sem prova, apenas exposição intuitiva, através de exemplos.

Fonte: Adaptado de Masseti (2016).

De forma geral, Balestri (2016) consegue desenvolver o conteúdo de progressão geométrica na perspectiva de buscar os conhecimentos prévios dos alunos para apresentar um novo conhecimento, isto é, o autor busca elementos da própria matemática para justificar novos elementos da matemática, porém, poderia fazer uso de diversos recursos didáticos, como explorar as tecnologias, processos investigativos, modelagem matemática, entre outros, para não permanecer em um modelo tradicional (exposição, exemplo e exercício), mas fazer com que o aluno seja autônomo no processo de construção do conhecimento.

2.3.5 – Matemática para compreender o mundo – SMOLE e DINIZ (2016)

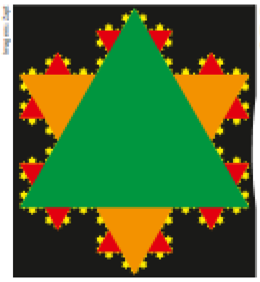
Smole e Diniz (2016) apresentam o capítulo de Sequências, Progressão Aritmética e progressão geométrica através de curiosidades matemáticas, no qual destacam a curva do floco de neve de Koch que é um dos Fractais Clássicos presente na matemática, em que destaca a construção geométrica iterativa de um triângulo equilátero de medida de lado unitário, assim, para cada nova iteração observa-se uma nova medida para os lados da figura, que através da recursividade, os valores das medidas formam uma sequência em progressão geométrica.

Figura 30: Introdução ao capítulo de Sequências, Progressão Aritmética e Progressão Geométrica.

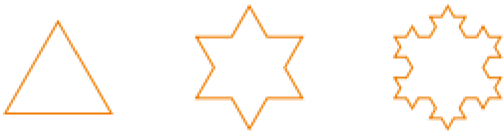
CAPÍTULO 6

Sequências, progressão aritmética e progressão geométrica

A figura abaixo é conhecida como **curva do floco de neve de Koch**, obtida a partir de uma sequência de construções nos lados de um triângulo equilátero.



O matemático Helge von Koch (1870-1924), em 1904, obteve essa figura a partir de um triângulo equilátero de lado de medida 1. Observe as três primeiras figuras dessa sequência.



Você consegue descobrir como a segunda e a terceira figuras foram obtidas a partir da primeira?

Consideremos um triângulo equilátero de lado de medida 1. Dividimos cada um de seus lados em três partes iguais.

No terço médio de cada lado, construímos novos triângulos equiláteros. O resultado é uma linha poligonal fechada de 12 lados.

No estágio seguinte, fazemos a divisão de cada um dos 12 lados da linha poligonal em três partes iguais e construímos novos triângulos equiláteros sobre os terços médios, e assim sucessivamente.

A medida do lado dos triângulos construídos em cada etapa forma uma sequência de números. Como podemos descrever essa sequência?

Fonte: Smole e Diniz (2016).

Para o início do conteúdo de progressão geométrica as autoras apresentam algumas sequências numéricas e desenvolvem uma discussão através de multiplicações constantes para a construção dos termos das sequências, no qual observa-se padrões e regularidades nos produtos. Após a apresentação inicial do conteúdo, Smole e Diniz (2016) definem progressão geométrica, conforme a Figura 31.

Figura 31: Definição de progressão geométrica.

Toda sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante é chamada **progressão geométrica (P.G.)**.
Essa constante, que indicaremos por **q**, é denominada **razão da progressão geométrica**.

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots) \text{ é uma P.G.} \Leftrightarrow a_n = a_{n-1} \cdot q,\ n \geqslant 2$$

Notemos que, em uma P.G. de termos não nulos:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Podemos, então, encontrar a razão de uma progressão geométrica dividindo qualquer termo pelo seu antecessor, a partir do segundo termo da sequência.

Fonte: Smole e Diniz (2016).

Após as autoras definirem P.G., apresentam alguns exemplos de como podemos determinar a razão de uma sequência numérica em progressão geométrica, conforme a definição. Posteriormente, expõe a classificação de Sequências em P.G. e apresenta a relação da definição de progressão geométrica com Média Geométrica, conforme a Figura abaixo, seguida de um exemplo que explora o cálculo da Média Geométrica dos termos de uma Sequência em Progressão geométrica.

Figura 32: Média Geométrica.

Média geométrica

A média geométrica simples **m** de dois números não negativos **a** e **b** é a raiz quadrada não negativa do produto deles.

Assim, $\mathbf{m} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}$, o que nos leva a $\mathbf{m^2} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Por exemplo, a média geométrica entre 9 e 4 é 6, porque $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{36} = 6$ ou $6^2 = 9 \cdot 4$.

Vejamos como a média geométrica está relacionada aos termos de uma P.G.

Em toda P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão **q**, temos $a_j = a_{j-1} \cdot q$ e $a_{j+1} = a_j \cdot q$.

Considerando, inicialmente, termos não nulos, temos:

$$\frac{a_j}{a_{j-1}} = \frac{a_{j+1}}{a_j} \Rightarrow \boxed{(a_j)^2 = a_{j-1} \cdot a_{j+1}}$$

Essa última igualdade é válida também para termos nulos e a partir dela temos:

$$|a_j| = \sqrt{a_{j-1} \cdot a_{j+1}}$$

Portanto, em toda P.G., o valor absoluto de cada termo, a partir do segundo, é a **média geométrica** do termo anterior e do posterior.

Exemplo:

Seja a P.G. (2, 6, 18, 54, 162).

$6 = \sqrt{2 \cdot 18}$ ou $6^2 = 2 \cdot 18$

$18 = \sqrt{6 \cdot 54}$ ou $18^2 = 6 \cdot 54$

$54 = \sqrt{18 \cdot 162}$ ou $54^2 = 18 \cdot 162$

Fonte: Smole e Diniz (2016).

Posteriormente, as autoras apresentam 3 exercícios resolvidos e 7 exercícios propostos para explorar a resolução com o uso dos conceitos e definições já apresentadas sobre progressão geométrica. Em seguida é apresentado a definição da fórmula do termo geral de uma P.G. a partir de manipulações algébricas e recursividade dos termos de uma sequência.

Figura 33: Termo geral de uma progressão geométrica.

Fórmula do termo geral de uma P.G.

Em toda P.G. (a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...) de razão **q**, aplicando a definição de progressão geométrica, podemos escrever:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\ a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \end{cases}$$

Portanto, a fórmula do termo geral de uma P.G. é: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, n \geqslant 2$

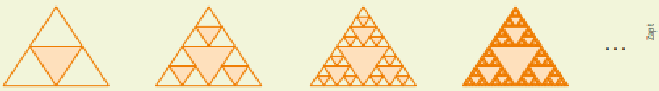
Fonte: Smole e Diniz (2016).

Após definirem a fórmula do termo geral de uma P.G., Smole e Diniz (2016) apresentam 5 exercícios resolvidos e 10 exercícios propostos para que os alunos pratiquem os conhecimentos adquiridos no estudo de progressão geométrica.

Para finalizar o capítulo de Sequências, Progressão Aritmética e progressão geométrica, as autoras destacam um pouco mais das curiosidades sobre os Fractais, no qual apresentam o Fractal de Sierpinski, em quem fazem uso de conhecimentos interessantes do campo da matemática para relacionarem com as Sequências em progressão geométrica, em que motivam os alunos a investigarem e explorarem o objeto matemático estudado.

Figura 34: Exposição motivadora da aplicação de progressão geométrica na Teoria dos Fractais.

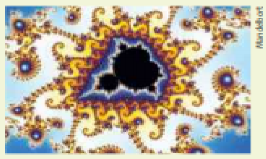
Sequências na era do computador



Fractal de Sierpinski

De sequências de imagens como essa, definidas por regras muito simples, quando desenhadas a mão conseguimos obter apenas meia dúzia de termos, mesmo recorrendo aos melhores instrumentos de desenho. Mas, com um computador, o processo pode continuar indefinidamente, obtendo-se figuras com pormenores invisíveis a olho nu. Ora, aí entra em cena a enorme capacidade de ampliação dos modernos computadores, que torna possível visualizar os termos avançados dessas sucessões, fornecendo imagens incrivelmente belas.

O limite de uma sequência de figuras como a anterior é um **fractal**.



Detalhe de um fractal de Mandelbrot.

A Geometria fractal é um novo ramo da Matemática, ou uma nova forma de encarar a Ciência, que está permitindo explicar certos fenômenos de turbulência para os quais a Geometria euclidiana e a Física de Newton se mostraram ineficazes.

Uma imagem obtida por técnicas fractais pode se parecer com coisas estranhas, por exemplo, um vírus ao microscópio ou paisagens de outro planeta.

As aplicações da noção de fractal revelaram-se vastíssimas em Meteorologia, Hidráulica, Física, Geologia, Geografia e até em História, Economia e Medicina.

Fonte: Smole e Diniz (2016).

Ao analisar o livro didático de Smole e Diniz (2016) verificamos que as autoras investem no incentivo do aluno de objetos de estudo do próprio campo da matemática, porém apenas de maneira expositiva, no qual não possibilita a exploração e investigação diante do que foi exposto. As autoras partem dos conhecimentos prévios para iniciar o conteúdo de progressão geométrica, porém apenas de forma expositiva, em que possibilita a passividade do aluno.

Verificamos que as autoras poderiam explorar o processo investigativo e regularidades dentro do objeto matemático que fizeram uso como incentivo para o aluno, isto é, poderiam utilizar as construções geométricas dos Fractais apresentados para introduzir o conteúdo de progressão geométrica, e propor atividades investigativas e exploratórias para que os alunos encontrassem regularidades e padrões em figuras geométricas para associá-las à sequências numéricas, isto poderia ser realizado através de uma Sequência Didática, como destaca Cabral (2017), assim poderiam implementar outros elementos da matemática e conhecimentos prévios, tais como: a notação de função e métodos gráficos.

No Quadro 12, apresentamos de que forma o autor desenvolve o conteúdo de progressão geométrica em seu livro didático, na perspectiva da análise de livro didático de Masseti (2016).

Quadro 12: Análise do livro didático de Smole e Diniz (2016).

<table>
<tr><th>Categorias</th><th colspan="2">Subcategorias</th><th>Análise do livro didático</th></tr>
<tr><td rowspan="10">Situações</td><td colspan="2">- Introdução/Motivação</td><td>Apresenta situações do próprio campo matemático.</td></tr>
<tr><td colspan="2">-Exemplos-tarefas resolvidas: 10 questões</td><td>Apresenta o conteúdo novo através da exposição e uso conhecimentos prévios.</td></tr>
<tr><td rowspan="8">- Tarefas propostas</td><td>Conhecimentos prévios: 2 questões</td><td>Exposição de exemplos resolvidos sobre P.G. que envolvem as operações básicas.</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Conhecimentos emergentes: 17 questões</td><td>Representar geometricamente/graficamente: 1 questões</td></tr>
<tr><td>Explorar: 11 questões</td></tr>
<tr><td>Manipular: 3 questões</td></tr>
<tr><td>Conjecturar: 4 questões</td></tr>
<tr><td>Provar: 0 questões</td></tr>
<tr><td>Modelar: 3 questões</td></tr>
<tr><td>Resolução de problemas: 3 questões</td></tr>
<tr><td>Linguagem</td><td colspan="2">- Formal ou Informal</td><td>Linguagem formal, de forma algébrica e numérica.</td></tr>
</table>

Conceitos	- Explícito ou Implícito	Explícito, de forma a apresentar perspectivas lógico-dedutivas com termos algébricos e numéricos formais.
Proposições	- Apresentação/Recordação	De modo expositivo, através de situações problemas e manipulação algébrica e numérica.
	- Prova, demonstração ou justificativa	Argumentação intuitiva, expondo verificação numérica de aplicações.
	- Utilização em exercícios ou exposição	Por meio de exemplos e exercícios.
Procedimentos	- Maneiras distintas de resolver exercícios	Abordagem numérica e algébrica.
	- Justificativa ou não das resoluções	Justifica.
	- Utilização de recursos didáticos	Tradicional (Exposição, Exemplo e Exercícios)
Argumentação	- Prática discursiva, verbal ou gráfica para a validação de propriedades	Para a validação faz uso de manipulação numérica, através de exemplos.
	- Tipo de prova utilizada	Sem prova, apenas exposição intuitiva, através de exemplos.

Fonte: Adaptado de Masseti (2016).

De forma geral, Smole e Diniz (2016) as autoras tiveram sucesso na apresentação do conteúdo de progressão geométrica, no qual a intenção de motivar o aluno através de curiosidades matemática faz com que possam procurar se apropriarem do conteúdo matemático, porém acreditamos que tal motivação poderia ser adaptada em atividades exploratórias e investigativas para que os alunos pudessem ser capazes de compreenderem o objeto matemático a partir da construção de seu próprio conhecimento, e não aguardando pela exposição do professor.

2.3.6 – Síntese das análises dos livros didáticos

Diante da análise dos livros didáticos e do estudo de Masseti (2016), verificamos que todos os autores alcançaram os objetivos do PNLD e da BNCC, e que é possível afirmar que há diversas formas possíveis de ensinar progressão geométrica, em especial os conceitos e definições iniciais, assim como, a fórmula do termo geral de uma P.G. Porém, com as reformulações e mudanças que ocorreram na transição do currículo do PNC para a BNCC, e no que tange às competências e habilidades da aprendizagem pelo currículo brasileiro de

Matemática, em que os livros didáticos não apresentam atividades ou propostas de ensino de matemática com recursos metodológicos adequados para atenderem objetos matemáticos específicos, no qual limita-se apenas na exposição de conceitos e definições, e mantém-se na utilização de métodos tradicionais de ensino, isto é, exposição, exemplos e exercícios. Assim, os livros didáticos analisados são dispostos conforme a síntese no Quadro 13.

Quadro 13: Síntese das análises dos livros didáticos.

AUTOR (ES)	TÍTULO/PNLD	OBSERVAÇÕES GERAIS
Luiz Roberto Dante e Fernando Viana	Matemática em Contextos: Função exponencial, Função Logarítmica e Sequências	Apresenta motivações do próprio campo da matemática, da ciência no geral e do cotidiano; Perspectiva lógico-dedutiva com termos algébricos formais, de modo exploratório investigativo através de problemas a partir de conhecimentos prévios.
José Roberto Bonjorno, José Rui Giovanni e Paulo Roberto Câmara de Sousa	Prisma Matemática: Funções e Progressões	Apresenta motivação através de aplicações do cotidiano; Exposição de regularidades algébricas; Situações problemas a partir de conhecimentos prévios.
Luiz Roberto Dante	Matemática: Contexto e Aplicações	Apresenta motivação através de aplicações em geral; Argumentação intuitiva; Abordagem e manipulação algébrica e numérica.
Rodrigo Balestri	Matemática: Interação e Tecnologia – Volume 1	Apresenta motivações do próprio campo da matemática, da ciência no geral e do cotidiano; Perspectiva lógico-dedutiva com termos algébricos formais, de modo exploratório investigativo com termos algébricos, numéricos formais e geométricos.
Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz	Matemática para compreender o mundo – Volume 1	Apresenta motivações do próprio campo da matemática; Argumentação intuitiva, expondo verificação numérica de aplicações; Abordagem numérica e algébrica.

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Dentre os cinco livros didáticos analisados, apenas o livro de Balestri (2016), apresenta de forma satisfatória a articulação do desenvolvimento do objeto matemático, no qual destaca as diversas formas de integrar e relacionar o conteúdo à outros objetos matemáticos e campos de conhecimento, em que o autor realiza representações e situações do campo conceitual de progressão geométrica com a adequação e crescente exploração de linguagens de função, métodos gráficos, figuras geométricas e curiosidades matemáticas que motivam a compreensão e estudo de P.G.

Os demais livros didáticos analisados, não menos importantes, pouco conseguiram articular o conteúdo de progressão geométrica com os diversos recursos didáticos, campos de conhecimento ou até mesmo objetos matemáticos que possam incentivar e permitir que os alunos sintam prazer em adquirir tal conhecimento, isto é, propor que os livros didáticos possam enriquecer os dados dispostos nos estudos de Masseti (2016), assim como fazer com que os estudantes possam ser autônomos na aquisição do conhecimento e o educador como incentivador e mediador, como apresenta Cabral (2017) em seus estudos.

2.4 – AS PERCEPÇÕES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Neste tópico buscamos compreender como está ocorrendo o ensino de progressão geométrica e seu processo de aprendizagem a partir da opinião de professores que atuam na disciplina de matemática no Ensino Médio.

Desta forma, apresentamos a análise de uma pesquisa realizada com 46 professores de matemática, em que, foram submetidos a um questionário (Anexo B) que envolve a experiência e formação desses profissionais, suas metodologias e prática de ensino e suas concepções a respeito das dificuldades de aprendizagem de seus alunos, no qual, possibilitou realizar um diagnóstico, segundo as percepções desses professores, em relação às dificuldades no processo de ensino e de aprendizagem de progressão geométrica.

Foram consultados quarenta e seis professores que atuam ou atuaram no Ensino Médio com a disciplina de matemática, no ano letivo de 2020 e primeiro semestre de 2022, em que 97,8% são licenciados em matemática e 2,2% licenciado em química, porém atua como professor (a) de matemática.

Desta forma, percebe-se que a maioria dos professores tiveram formação específica da área de conhecimento, porém, não menos importante que os demais que não possuem formação em matemática, uma vez que, a prática docente possibilita adquirir experiências na área e incentiva a procura de se obter uma formação continuada, tais como, programas de pós-graduação e cursos de aperfeiçoamento na área de interesse.

Assim, procuramos verificar a formação acadêmica de maior titulação dos professores entrevistados, em que apresentamos os resultados no Quadro 14.

Quadro 14: Formação acadêmica dos professores investigados.

Formação acadêmica	**% do total de 100%**
Graduação	34,7%
Especialização em andamento	8,7%
Especialização	8,7%
Mestrado em andamento	37%
Mestrado	8,7%
Doutorado em andamento	0%
Doutorado	0%
Pós-doutorado	2,2%

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Ao analisar o Quadro 14, verificamos que a maioria dos professores entrevistados possuem uma formação à nível de pós-graduação ou estão na expectativa de adquirir o título acadêmico.

No Quadro 15 abaixo, buscamos verificar o tempo de serviço dos entrevistados como professor de matemática, assim é possível perceber a experiência adquirida ao longo da prática docente.

Quadro 15: Tempo de prática docente dos professores investigados.

Tempo de prática docente	**% do total de 100%**
Até 5 anos	52,2%
De 6 a 10 anos	23,9%
De 11 a 15 anos	15,2%
De 16 a 20 anos	2,2%
Há mais de 20 anos	6,5%

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A partir da análise do Quadro 15, e considerando os resultados obtidos no Quadro 14 e na formação acadêmica dos entrevistados, podemos verificar que os professores participantes da pesquisa são profissionais experientes e qualificados para exercerem à docência em Matemática no Ensino Médio, em que informações podem contribuir para melhor entendimento da temática, assim como, compreender as dificuldades apresentadas no processo de ensino e de aprendizagem de progressão geométrica.

Sobre a prática docente dos professores investigados, inicialmente verificamos quais as principais formas de avaliação utilizadas em sala de aula, em que os resultados são apresentados no Quadro 16.

Quadro 16: Avaliações utilizadas nas aulas de matemática.

Avaliações	% do total de 100%
Prova oral	13%
Prova escrita	97,8%
Lista de exercícios	82,6%
Autoavaliação	19,6%
Produções no caderno	60,9%
Fichas de observação	13%

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

O Quadro 16 apresenta a quantidade de professores que escolheram determinadas formas de avaliar seus alunos, em que, teve professor que escolheu mais de uma maneira de avaliar. Houve também outras opiniões correspondentes à avaliação, tais como, 2,2% disseram que avaliam seus alunos através de trabalhos em equipes e participação nas aulas; resolução de atividades em grupo; Seminário e trabalho em equipe; apresentação de seminários sobre assuntos de matemática, oportunidade para os alunos manifestarem suas aprendizagens de forma que os deixam confiantes para expressar o que aprendeu, o que não aprendeu e o que acha que precisa melhorar, isto é, alunos que sintetizam, analisam e avaliam as aulas; e aplicativos que possuem quiz avaliativo ou plataformas digitais.

Também vimos a possibilidade de entender como foi a formação inicial dos professores entrevistados em relação ao conteúdo de progressão geométrica, com apresenta o Quadro 17, assim, podemos verificar como o professor foi preparado em sua graduação para ministrar tal conteúdo na Educação Básica.

Quadro 17: Conteúdo de progressão geométrica na formação inicial do professor entrevistado.

Método de ensino	**% do total de 100%**
Definição, seguido de exemplos e exercícios.	58,7%
Situação problema, definição, seguido de exemplos e exercícios.	17,4%
Modelagem Matemática de modo a obter definição, seguido de exemplos e exercícios.	6,5%
Por meio de materiais manipuláveis de modo a obter a definição, seguido de exemplos e exercícios.	0%
Por meio de jogos de modo a obter a definição, seguido de exemplos e exercícios.	0%
Uso da História da Matemática como recurso didático, seguido de definição, exemplos e exercícios.	0%
Uso das tecnologias de modo a obter a definição, seguido de exemplos e exercícios.	2,2%
Não vi esse conteúdo na graduação.	15,2%

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Observa-se no Quadro 17 que a maioria dos professores, em sua formação inicial, se depararam com o método de ensino tradicional, isto é, definição, seguido de exemplos e exercícios, e em sua minoria, participaram de atividades que levassem a tal método de ensino, como foi ocaso da Situação problema, Modelagem Matemática e uso das tecnologias, assim como, a outra parte dos professores não chegaram a ver o conteúdo de progressão geométrica, assim, percebe-se que ainda há uma vasta deficiência na aplicabilidade de dos métodos de ensino, ditos “não tradicionais”, seja elas pela não preparação do professor ministrante do conteúdo ou pela falta de logística para a exploração de diversas atividades.

Procuramos entender quantas aulas, em média o professor entrevistado utiliza para definir progressão geométrica e ensinar o Termo Geral de uma P.G., assim teríamos uma noção do tempo estimado que o docente leva para apresentar a parte inicial do conteúdo, no qual é essencial para entender por completo o objeto matemático estudado e suas particularidades.

Desta forma, ao verificar as respostas dos professores entrevistados, nos deparamos com 52% utilizam de duas a quatro aulas, 41,3% utilizam apenas uma aula e 6,5% fazem uso de cinco a oito aulas.

Também achamos necessário compreender como o professor de matemática planeja suas aulas e quais recursos didáticos faz uso, uma vez que são essenciais para uma prática docente adequada e organizada mediante aos desafios encontrados em sala de aula.

Desta forma, verificamos quais documentos oficiais os professores entrevistados utilizam em seus planejamentos. Assim, do total de 100% dos entrevistados, foram apresentadas as seguintes informações:

- 23,9% utilizam os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM;
- 58,7% utilizam a Base Nacional Comum Curricular – BNCC;
- 89,2% utilizam o Livro Didático; e
- 2.2% utilizam o GeoGebra, ou sites que apresentam materiais e técnicas mais atualizadas sobre a temática, ou Currículo Básico Comum - CBC, ou Habilidades e Competências do Exame Nacional do Ensino Médio.

Posteriormente, verificamos de que forma os professores entrevistados iniciam o conteúdo de progressão geométrica.

Quadro 18: Como os professores iniciam o conteúdo de progressão geométrica.

Introdução ao conteúdo matemático	**% do total de 100%**
Definição, seguido de exemplos e exercícios.	17,4%
Situação problema, definição, seguido de exemplos e exercícios.	69,5%
Modelagem Matemática de modo a obter a definição, seguido de exemplos e exercícios.	8,7%
Por meio de materiais manipuláveis de modo a obter a definição, seguido de exemplos e exercícios.	0,0%
Por meio de jogos de modo a obter a definição, seguido de exemplos e exercícios.	0,0%
Uso da História da Matemática como recurso didático, seguido de definição,	2,2%

exemplos e exercícios.	
Uso das tecnologias de modo a obter a definição, seguido de exemplos e exercícios.	0,0%

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Além das opções dadas no questionário, como observado no Quadro 18, 2,2% dos professores afirmaram que iniciam suas aulas sobre progressão geométrica através de uma sondagem do que os alunos já sabem sobre a temática, aliado a realidade a qual ele pertence, seguida da etnomatemática para depois desses dois passos seguir o fluxo normal da aula.

Seguida a forma que iniciam o objeto matemático proposto, verificamos se os professores fazem uso de modelos matemáticos para ensinar progressão geométrica, e quais os tipos de modelos, isto é, se os entrevistados utilizam representações matemática já vistas pelos alunos em outros momentos de suas carreiras estudantis para ensinar um novo conhecimento, além de compreender quais conteúdos são relacionados à temática a ser ensinada.

Quadro 19: Modelos matemáticos utilizados no ensino de progressão geométrica.

Modelo matemático	**% do total de 100%**
Modelo Funcional (fazer uso de função)	10,9%
Modelo Geométrico (fazer uso de construções geométricas)	6,5%
Modelo Numérico (fazer uso de sequências numéricas)	80,4%

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Ainda, sobre os modelos matemáticos utilizados no ensino de progressão geométrica, 2,2% dos entrevistados discordam da utilização de tais modelos, e afirmam possuir preferência em situações que prevaleça o conhecimento prévio, em que se inicia com um tema gerador para a partir daí gerar o elo de participação e interatividade com os demais alunos.

Quadro 20: Conteúdos matemáticos relacionados à progressão geométrica.

Conteúdos relacionados	**% do total de 100%**
Figuras Geométricas	34,8%
Função Exponencial	69,6%
Juros Compostos	71,7%

Situações reais que podem ser associadas a P.G.	69,6%

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

O Quadro 20 apresenta os conteúdos que os professores costumam relacionar com Progressões Geométricas, em que os entrevistados poderiam optar por relacionar mais de um conteúdo. Dentre os entrevistados, 2,2% apontaram que também utiliza o GeoGebra como ferramenta tecnológica para relacionar tais conteúdos com o objeto matemático proposto.

Quadro 21: O que os professores utilizam para fixar o conteúdo de progressão geométrica.

Fixação do conteúdo	**% do total de 100%**
Apresentação e correção de lista de exercícios com atividades selecionadas	84,8%
Apenas apresentação de lista de exercícios com atividades selecionadas	8,7%
Indica e corrige as atividades constantes no Livro Didático de Matemática	54,3%
Apenas indica as atividades constantes no Livro Didático de Matemática	6.5%
Propõe atividades para serem resolvidas com o uso das tecnologias	13%
Não propõe atividades de fixação	0%

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Dentre as respostas obtidas, 2,2% dos entrevistados utilizam para fixar o conteúdo de progressão geométrica, situações problemas construídas a partir do meio que o aluno está inserido, tendo foco nas experiências relatadas na aula introdutória, utilizando como teorias as de ausubel e a taxonomia de bloom.

Quadro 22: Assuntos que os professores costumam ensinar.

Assuntos	**% do total de 100%**
Construção e gráfico associado a uma P.G.	54,3%
Classificação de uma P.G.	82,6%
Representação genérica de uma P.G.	63%
Termo geral de uma P.G.	91,3%

Interpolação geométrica.	43,5%
Produto dos termos de uma P.G.	67,4%
Soma dos termos de uma P.G. finita	87%
Soma dos termos de uma P.G. infinita.	80,4%

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Além dos itens propostos no questionário, conforme o Quadro 22, 2,2% dos entrevistados costumam ensinar as aplicações sobre progressão geométrica e 2,2% ensinam conjecturas de situações aplicadas que podem ser resolvidas com o auxílio de Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC's).

Verificamos também, quais recursos didáticos os professores entrevistados utilizam na apresentação de progressão geométrica, conforme o Quadro 23.

Quadro 23: Recursos didáticos utilizados no ensino de progressão geométrica.

Recursos didáticos	**% do total de 100%**
Sequências Didáticas	17,4%
História da Matemática	0,0%
Resolução do Problemas	52,2%
Modelagem Matemática	6,5%
Livro Didático de Matemática	23,9%

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Posteriormente, foi necessário compreender o grau de dificuldade dos alunos em relação aos assuntos de progressão geométrica, a partir da opinião dos professores, conforme o Quadro 24.

Quadro 24: Grau de dificuldade dos alunos segundo a opinião dos professores entrevistados.

	Fácil e bem compreensível	**Fácil, mas apresentam poucas dificuldades**	**Médio e apresentam dificuldades de compreensão**	**Médio e apresentam muitas dificuldades de compreensão**	**Difícil e apresentam dificuldades de compreensão**
Construção e gráfico	6,5%	10,9%	43,5%	28,2%	10.9%

associado a uma P.G.					
Classificação de uma P.G.	19,6%	50%	23,9%	4,3%	2,2%
Representação genérica de uma P.G.	6,5%	32,6%	50%	8,7%	2,2%
Termo geral de uma P.G.	17,4%	32,6%	43,5%	6,5%	0,0%
Interpolação geométrica	4,3%	8,7%	37%	28,3%	21,7%
Produto dos termos de uma P.G.	2,2%	23,9%	37%	23,9%	13%
Soma dos termos de uma P.G. finita.	4,3%	26,1%	43,5%	15,2%	10,9%
Soma dos termos de uma P.G. infinita	2,2%	23,9%	41,3%	15,2%	17,4%

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Com base no Quadro 24, segundo os professores entrevistados, o maior percentual dos alunos possui dificuldades relacionadas aos assuntos de progressão geométrica, assim como, poucos alunos possuem facilidade para compreender o objeto matemático proposto, desta forma, estes dados incentivam na elaboração de uma proposta educacional que possa minimizar as dificuldades apresentadas pelos alunos.

Os professores também foram indagados sobre algumas definições importantes, que apresentam modelos matemáticos bastante presentes na resolução de problemas sobre progressão geométrica, tais questionamentos foram sobre as fórmulas do termo geral de uma P.G., soma de uma P.G. finita e soma de uma P.G. infinita.

Desta forma, apresentamos as respostas dos professores (APÊNDICE A, B e C) obtidas em cada uma das definições destacadas nas Figuras 35, 36 e 37, em que cada professor entrevistado será representado por P1, P2, P3, P4, …, P46, uma vez que, a pesquisa foi realizada com 46 professores.

No primeiro questionamento verificamos, segundo os professores de matemática, se os alunos conseguem compreender de forma clara a definição apresentada na Figura 35.

Figura 35: Termo geral de uma progressão geométrica.

Na progressão geométrica, em que o primeiro termo é $a_1 \neq 0$ e a razão é $q \neq 0$, o $n-ézimo$ termo é

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Com base nas respostas apresentadas pelos professores entrevistados (APÊNDICE A), os alunos, em sua maioria, possuem dificuldades na compreensão clara da fórmula do termo geral de uma progressão geométrica, assim como, a detalhes que levam esses alunos a apresentarem tais deficiência no processo de aprendizagem.

No segundo questionamento verificamos, segundo os professores de matemática, se os alunos conseguem compreender de forma clara a definição apresentada na Figura 36.

Figura 36: Soma de uma progressão geométrica finita.

Na progressão geométrica finita, em que o primeiro termo é a_1 e a razão é $q \neq 1$, a soma S_n dos n termos de uma P.G. finita é

$$S_n = \frac{a_n . q^n - a_1}{q - 1}$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Conforme as respostas dos professores (APÊNDICE B), a maioria dos alunos possuem dificuldades na compreensão clara da fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica finita, assim como, há diversos fatores distintos que levam esses alunos a apresentarem tais dificuldades no processo de aprendizagem de P.G.

Já no terceiro questionamento verificamos, segundo os professores de matemática, se os alunos conseguem compreender de forma clara a definição apresentada na Figura 37.

Figura 37: Soma de uma progressão geométrica infinita.

Na progressão geométrica infinita, em que o primeiro termo é a_1 e a razão é $q \neq 1$, a soma S_n dos infinitos termos de uma P.G. é

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A partir das respostas apresentadas pelos professores entrevistados, os alunos, em sua maioria, possuem dificuldades na compreensão clara da fórmula que descreve a soma dos termos de uma progressão geométrica finita, assim como, a detalhes que levam esses alunos a apresentarem tais dificuldades no processo de aprendizagem.

Conforme as respostas apresentadas pelos professores entrevistados (APÊNDICE C), a maior parte dos alunos possuem dificuldades na compreensão clara da fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, assim como, a detalhes que levam esses alunos a apresentarem tais dificuldades no processo de aprendizagem de P.G.

Desta forma, as contribuições dos professores entrevistados nesta pesquisa possibilitaram possuirmos uma visão no aspecto da experiência profissional dos docentes, em que justificam as dificuldades apresentadas pelos alunos no conteúdo de progressão geométrica e os desafios enfrentados no processo de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, as concepções dos professores colaboram com os objetivos de aprendizagem da proposta de sequência didática a ser elaborada.

2.5- AS PERCEPÇÕES DE ALUNOS EGRESSOS

Com o objetivo de investigar os aspectos socioeducativa dos alunos, fatores didático - pedagógicos dos professores e principalmente as dificuldades em aprender conceitos de Progressão Geométrica, realizou-se uma consulta por intermédio de um questionário (ANEXO B), com a finalidade de verificar o perfil dos alunos quanto ao contexto educacional, quanto ao processo de ensino, aprendizagem e avaliação, assim como analisar os assuntos relacionados à Progressão Geométrica em que possuem mais dificuldades de aprender.

A investigação foi realizada com 68 alunos de uma escola pública do município de Belém, Estado do Pará e os sujeitos da pesquisa foram alunos do 2° Ano do Ensino Médio, pois por serem egressos do 1° Ano do Ensino Médio, e já estudaram, ou já deveriam ter estudado, o conteúdo matemático abordado nesta pesquisa. É importante destacar que os estudantes foram escolhidos de forma aleatória para participar da pesquisa e que todos concordaram com a pesquisa, assinando um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (ANEXO C).

Inicialmente, ao serem questionados sobre se estão ou já estiveram em dependência em Matemática, três alunos afirmaram que estão (atualmente) em dependência em Matemática, enquanto quinze alunos já esteve e cinquenta nunca estiveram de dependência em Matemática. Desta forma, observa-se que maior parte dos alunos possuem desempenho adequado nas aulas de matemática para que possam adquirir novos conhecimentos de séries anteriores.

2.4.1 – Sobre as aulas de matemática

Inicialmente, investigamos as percepções dos alunos egressos sobre as aulas de matemática, no qual verificamos se os alunos gostam de matemática, se consegue compreender o conteúdo ministrado pelo professor de matemática e os tipos de avaliações desenvolvidas nas aulas de matemática.

Quadro 25: Apreciação pela matemática.

Você gosta de matemática?	
Não gosto.	10 alunos
Um Pouco.	31 alunos
Sim. Gosto.	22 alunos
Sim. Gosto bastante.	5 alunos

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

O Quadro 25 apresenta os dados obtidos quanto a apreciação pela matemática, assim, observa-se que há uma quantidade muito pequena em relação ao total de alunos entrevistados que gostam de matemática, enquanto a maior quantidade de alunos gosta apenas um pouco da disciplina escolas.

Assim existem diversos fatores que podem influenciar nestes resultados, tais como, o ambiente escolar, os recursos e planejamento utilizado pelo professor de matemática, falta de interesse dos alunos, entre outros, assim, isto trás influências que geram dificuldades pela maior parte do público entrevistado em conteúdos matemáticos, e como consequência existe baixa frequência na quantidade de alunos que gostam de matemática.

Quadro 26: Compreensão das explicações nas aulas de matemática.

Você consegue compreender as explicações dadas nas aulas de Matemática?	
Sempre	12 alunos
Quase sempre	40 alunos
Poucas vezes	16 alunos
Nunca compreendo	0 alunos

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

No Quadro 26, obtemos um resultado favorável, em que a maioria dos alunos entrevistados quase sempre conseguem compreender as explicações nas aulas de matemática, assim como, não possui alunos em nossa amostra que nunca consegue compreender as explicações

Quadro 27: Avaliação do professor de matemática.

Quais as principais formas de avaliação o professor de matemática costuma solicitar a você?	
Prova oral	4 alunos
Prova escrita/objetiva	53 alunos
Autoavaliação	93 alunos
Fichas de observação	4 alunos
Produções no caderno	31 alunos

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

No Quadro 27, os alunos entrevistados apresentaram as formas de avaliação que o professore de matemática utiliza, em que poderiam ser mais de um tipo de avaliação, assim, do total de alunos, os maiores resultados obtidos foram, prova escrita/objetiva, autoavaliação e produções no caderno, no qual, estes tipos de avaliações são os maios comum no ambiente escolar, que fazem parte da cultura de avaliação do sistema de ensino básico brasileiro.

2.4.2 – Sobre o conteúdo de Progressão Geométrica

Posteriormente, investigamos as percepções dos alunos egressos sobre como gostariam de aprender o conteúdo de progressão geométrica, e quais dificuldades apresentam nos assuntos abordados no objeto matemático estudado.

Quadro 28: Aprendizagem de progressão geométrica na concepção dos alunos.

Como você gostaria de aprender Progressão Geométrica?					
	Sempre	**Quase Sempre**	**Às Vezes**	**Raramente**	**Nunca**
Através de aulas expositivas e consulta ao livro didático.	22 alunos	24 alunos	22 alunos	0 alunos	0 alunos
Através de situação problema para introduzir o assunto.	22 alunos	28 alunos	18 alunos	0 alunos	0 alunos
Através de experimentações práticas do dia a dia.	31 alunos	9 alunos	15 alunos	9 alunos	2 alunos
Através de Jogos para depois sistematizar os conceitos.	44 alunos	9 alunos	2 alunos	0 alunos	13 alunos

Através de Recursos Tecnológicos	31 alunos	19 alunos	9 alunos	2 alunos	7 alunos

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

O Quadro 28 apresenta os dados obtidos para como os alunos gostariam que o conteúdo de progressão geométrica fosse ensinado, em que se destacam as experimentações práticas do dia a dia, jogos para depois sistematizar os conceitos e recursos tecnológicos, em que a maioria dos alunos possuem estas preferências, isto é, as aulas tradicionais não os incentivam a apreciar a matemática e, assim, dificulta a manter a atenção dos alunos nas aulas.

Quadro 29: Dificuldade em progressão geométrica na concepção dos alunos.

Sobre o conteúdo de Progressão Geométrica (P.G.), qual o grau de dificuldade dos alunos na aprendizagem dos assuntos listados abaixo?					
	Fácil e compreendo bem.	**Fácil, mas apresento poucas dificuldades.**	**Médio e apresento dificuldades de compreensão.**	**Médio e apresento muitas dificuldades de compreensão.**	**Difícil e apresento dificuldades de compreensão.**
Construção e gráfico associado a uma P.G.	6 alunos	19 alunos	25 alunos	9 alunos	9 alunos
Classificação de uma P.G.	25 alunos	12 alunos	22 alunos	2 alunos	7 alunos
Representação genérica de uma P.G.	15 alunos	22 alunos	19 alunos	6 alunos	6 alunos
Termo geral de uma P.G.	22 alunos	19 alunos	19 alunos	0 alunos	8 alunos
Interpolação geométrica.	9 alunos	12 alunos	28 alunos	2 alunos	17 alunos
Produto dos termos de uma P.G.	22 alunos	0 alunos	25 alunos	9 alunos	12 alunos
Soma dos termos de uma P.G. finita.	25 alunos	19 alunos	15 alunos	0 alunos	9 alunos
Soma dos termos de uma P.G. infinita	28 alunos	9 alunos	22 alunos	0 alunos	9 alunos

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Observa-se no Quadro 29 que, os conteúdos em que os alunos sentem maior facilidade em compreender são, classificação, termo geral, produto e soma finita e infinita de uma progressão geométricas, enquanto o conteúdo que os alunos possuem grandes dificuldade é interpolação geométrica, os demais conteúdos, os alunos possuem um grau de dificuldade intermediário.

Portanto, os dados obtidos sobre as aulas de matemática e sobre o conteúdo de progressão geométrica, nos incentivou a elaborar a sequência didática para minimizar as dificuldades apresentadas sobre o objeto matemático estudado e de forma a tornar o ensino e aprendizagem de matemática atraente para os alunos.

3 - CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS E EPISTEMOLÓGICAS SOBRE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Nesta seção apresento o conteúdo de progressão geométrica de forma mais detalhada, numa perspectiva científica, a partir de uma consideração do rigor matemático e aprofundamento, no qual destaco a evolução histórica e epistemológico do objeto matemático.

Embora esta pesquisa centralize-se na elaboração de uma Sequência Didática para o ensino de progressão geométrica para as turmas do 1° Ano do Ensino Médio, acredito ser importante realizar uma abordagem para contribuir na formação de professores.

3.1 – CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS

Atualmente, o conhecimento humano que foi produzido por estudiosos do passado, nos leva a ter impressão de que está finalizado, porém, com a evolução humana percebe-se que pelo processo de investigação, tais conhecimentos ainda podem evoluir para contribuir com novas aplicações que surgem através da necessidade do ser humano.

Desta forma, todo o processo histórico do conhecimento, nos faz refletir e compreender a origem dos fatos históricos e de como podem contribuir para o conhecimento atual. No ensino de Matemática, o estudo da origem dos objetos matemáticos já formalizados são fundamentadas e investigadas através das pesquisas realizadas na História da Matemática.

Outra proposta metodológica que está cada vez mais ganhando espaço no ensino de matemática é a *História da Matemática*, no qual é inserido no em sala de aula explorando acontecimentos históricos sempre relacionados com conteúdo matemáticos.

Assim, a história da matemática como recurso para ensino da matemática, pesquisas científicas, desenvolvimento e investigação matemática, deverá retratar uma abordagem histórica do conhecimento matemático, sua evolução, o contexto histórico, social e político no qual determinado conteúdo matemático emergiu, assim como as principais dificuldades enfrentadas para a formalização e aceitação, pelas sociedades, desse conhecimento ao longo do tempo.

Desta forma, apresentamos fatos históricos de progressão geométrica que contribuíram para formar as definições e conceitos que são apresentados atualmente, também é de suma importância para a formação de professores de matemática, uma vez que podem tomar como base para introduzir o conteúdo, além de levantar questionamentos de situações históricas que são relacionados com o objeto matemático a ser ensinado e motivar seus alunos.

Assim, a evolução histórica de progressão geométrica tem por base a História das Sequências, uma vez que o objeto matemático em pauta é uma particularidade das Sequências Numéricas.

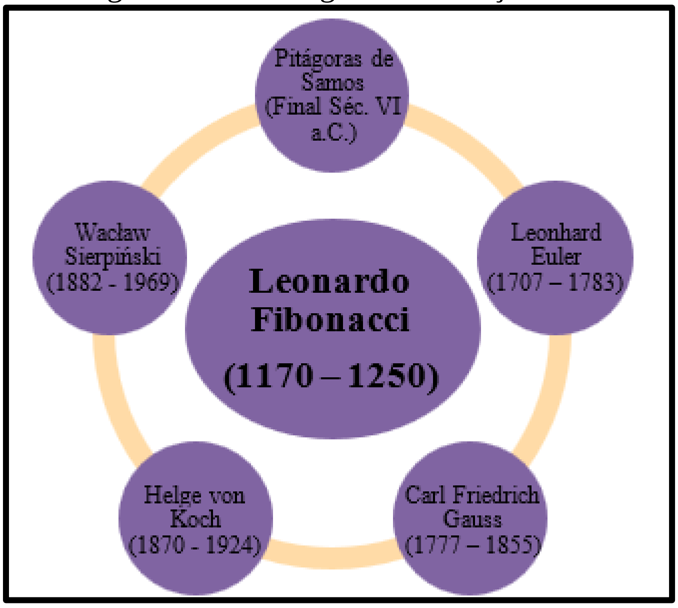
Segundo Chaquiam (2017, p. 175) “a história da matemática nos permite contextualizar o conhecimento, situado e relacionado com variados contextos sociais, também respondem as demandas historicamente situadas em um tempo e espaço”.

Assim, a história da matemática como recurso didático para ensino da matemática, pesquisas científicas, desenvolvimento e investigação matemática, deverá retratar uma abordagem histórica do conhecimento matemático, sua evolução, o contexto histórico, social e político no qual determinado conteúdo matemático emergiu, assim como as principais dificuldades enfrentadas para a formalização e aceitação, pelas sociedades, desse conhecimento ao longo do tempo.

Portanto, apresento inicialmente a utilização da História das Sequências com o modelo de diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2017) como princípio da evolução do conhecimento sobre progressão geométrica.

Para tanto, destaco o diagrama que terá foco nas principais contribuições de Leonardo Fibonacci (1170 – 1250) para a progressão geométrica, sendo o mesmo personagem principal do contexto histórico. Assim, o Figura 38 destaca os autores que contribuíram para o contexto técnico – científico da evolução do conteúdo de progressão geométrica.

Figura 38: Diagrama Metodológico da evolução histórica de P.G.



Fonte: Adaptado de Chaquiam (2017).

O objeto matemático progressão geométrica é um caso particular de Sequências Numéricas, desta forma, para ser apresentado a evolução histórica do conteúdo de P.G. busquei destacar inicialmente os indícios da noção de Sequências Numéricas conforme a perspectiva cronológica descrita na Figura 38.

Tanto as Progressões Geométricas, que é o foco deste estudo, quanto às progressões aritméticas já possuíam evidências no contexto histórico da matemática antes mesmo dos estudos dos autores apresentados no diagrama da Figura 38.

As sequências numéricas estão vinculadas aos métodos de contagem e ao desenvolvimento dos sistemas de numeração.

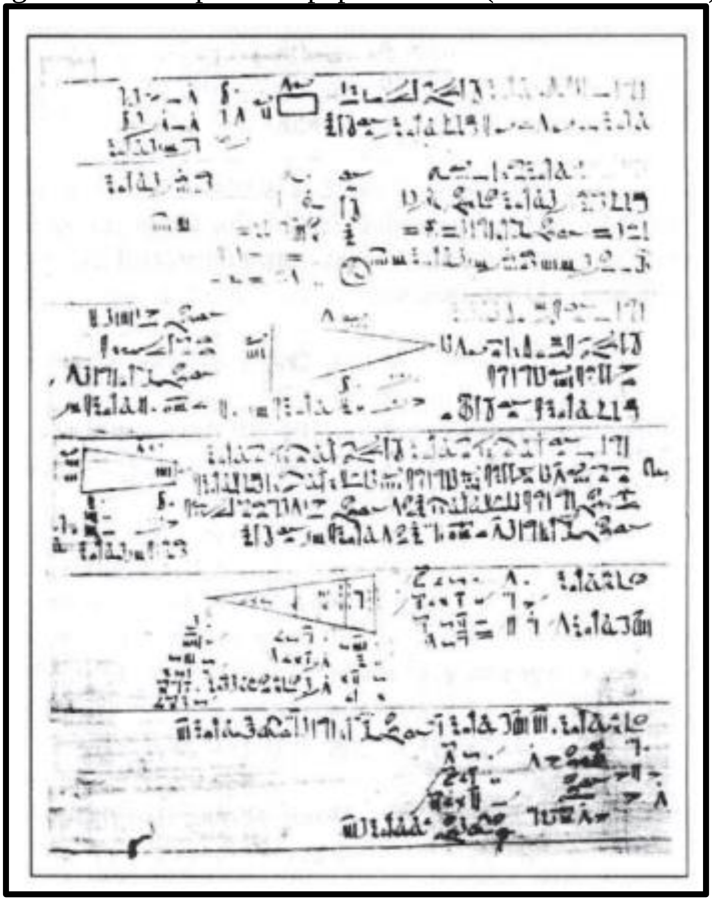
> É provável que a maneira mais antiga de contar se baseasse em algum método de registro simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca. Para uma contagem de carneiros, por exemplo, podia-se dobrar um dedo para cada animal. Podia-se também contar fazendo-se ranhuras no barro ou numa pedra, produzindo-se entalhes num pedaço de madeira ou fazendo-se nós numa corda. Então, talvez mais tarde, desenvolveu-se um arranjo de sons vocais para registrar verbalmente o número de objetos de um grupo pequeno. E mais tarde ainda, com o aprimoramento da escrita, foram surgindo arranjos de símbolos para representar esses números. Esse desenvolvimento hipotético encontra respaldo em relatórios de antropólogos que estudaram povos primitivos em nossa época. (EVES,2014, p. 26).

A partir da representatividade do número e métodos de contagem, de forma intuitiva se organizavam os elementos contados de forma a facilitar o entendimento da contagem numérica, surgindo os primeiros indícios de sequências numéricas. Segundo Chiconato (2013, p. 17) “as progressões são estudadas e aplicadas desde os povos babilônicos, uma de suas primeiras aplicações foi realizada pelos egípcios que precisaram encontrar um padrão para determinar as enchentes no Rio Nilo, e assim evitar perdas de alimentos”.

Com as evidências da aplicação das progressões no cotidiano, começaram a surgir problemas matemáticos relacionados aos padrões numéricos. Na Mesopotâmia surgiram as tabletas babilônicas, no qual se destaca a tableta Plimpton 322 (1900 a 1600 a.C.), que segundo Lopes (2017, p. 1), “numa dessas tabletas, a progressão geométrica $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9$ é somada de forma que a série de quadrados $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2$ é encontrada”.

No Egito, por volta de 1650 a.C. foi descoberto o papiro de Rhind, que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. Conforme afirma Eves (2014, p. 70), “o papiro Rhind descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso das frações unitárias, a solução para o problema da determinação da área de um círculo e muitas aplicações da matemática a problemas prático”.

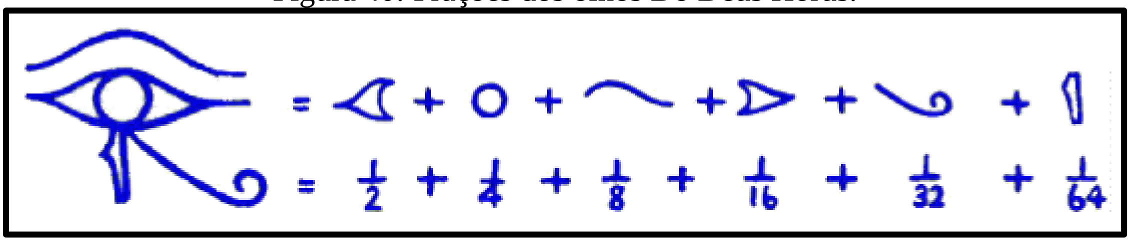
Figura 39: Uma parte do papiro Rhind (Museu Britânico).



Fonte: Eves (2014, p. 74).

Ainda no papiro de Rhind encontra-se o problema conhecido como frações dos olhos do Deus Horus, no qual descreve símbolos associados às frações que forma a progressão geométrica $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}$.

Figura 40: Frações dos olhos Do Deus Horus.



Fonte: Arruda (2013).

Conforme afirma Arruda (2013, p. 5), “os egípcios possuíam a habilidade para realizar a soma dos termos desta P.G. usando a técnica de um fator multiplicativo”.

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16}$$

$$64. S = 64. \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16}\right)$$

$$64.S = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

$$64.S = 63$$

$$S = \frac{63}{64}.$$

A partir dos diversos problemas matemáticos que surgiram, chamou a atenção de vários estudiosos que passaram a fazer uso das progressões e suas aplicações. Desta forma, compreendemos que os autores apresentados na Figura 38 tiveram grandes contribuições para a formalização dos conceitos e definições de progressões na atualidade. Assim, a seguir serão detalhados os trabalhos realizados por Pitágoras de Somos (VI a. C.), Leonardo Fibonacci (1170 - 1250), Leonard Euler (1707 - 1783), Carl Friedrich Gauss (1710 - 1855), Helge Von Koch (1870 - 1924) e Waclaw Sierpìnski (1882 – 1969).

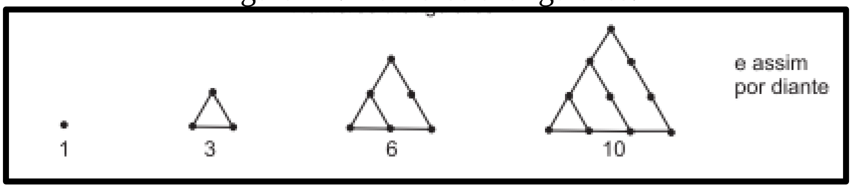
Pitágoras de Somos (VI a. C.) foi um filósofo e matemático grego creditado como fundador do movimento chamado Pitagorismo.

> "A filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros. Isso levava a uma exaltação e ao estudo das propriedades dos números e da aritmética (no sentido de teoria dos números), junto com a geometria, a música e a astronomia, que constituíam as artes liberais básicas do programa de estudos pitagórico". (EVES, 2014, p. 97).

Pitágoras e os pitagóricos com seus embasamentos numéricos desenvolveram, o que ficou conhecido como aritmética pitagórica, no qual apresentavam um elo entre a geometria e a aritmética, em que se verificou os números figurados, que expressam o número de pontos em certas configurações geométricas.

Na Figura 41 é apresentado os números figurados triangulares, no qual os números que representam a forma geométrica triangular formam uma sequência numérica em que o termo posterior é dado pela adição do termo anterior com o número 2.

Figura 41: Números triangulares.



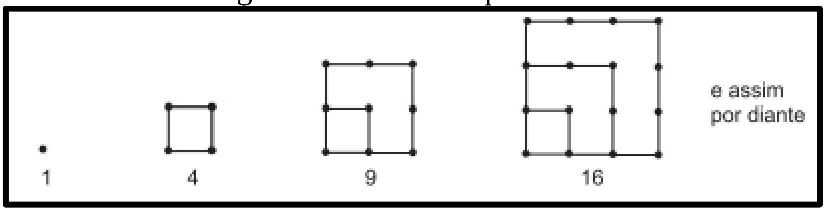
Fonte: Eves (2014).

Segundo Eves (2014), é possível obter-se a representação algébrica genérica do e – nésimo número triangular T_n, no qual é dado pela soma da progressão aritmética,

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n.(n+1)}{2}.$$

Na Figura 42 é apresentado os números figurados quadrados, no qual os números que representam a forma geométrica quadrada formam uma sequência numérica em que o termo posterior é dado pelo quadrado (potência de expoente 2) do número que representa a posição iterativa de cada quadrado formado.

Figura 42: Números quadrados.



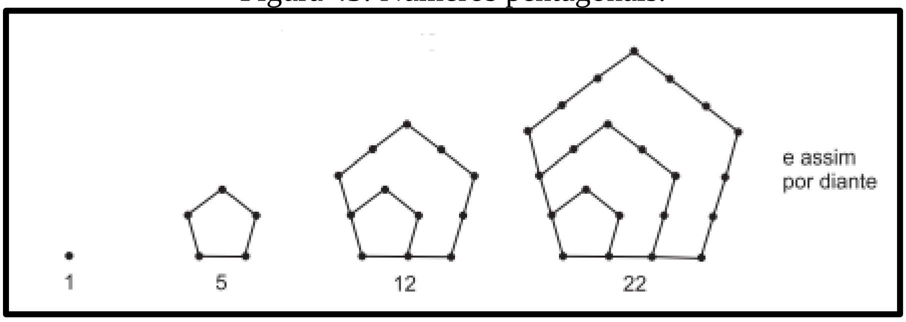
Fonte: Eves (2014).

Desta forma, segundo Eves (2014), é possível obter-se a representação algébrica genérica do n – ésimo número quadrado S_n em função do e – nésimo número triangular T_n da seguinte maneira:

$$S_n = n^2 = \frac{n.(n+1)}{2} = \frac{(n-1).n}{2} = T_n + T_{n-1}.$$

Na Figura 43 é apresentado os números figurados pentagonais, no qual os números que representam a forma geométrica pentagonal formam uma sequência numérica em que o termo posterior é dado pela diferença positiva dos dois termos anteriores adicionado do termo anterior mais 3.

Figura 43: Números pentagonais.



Fonte: Eves (2014).

Eves (2014) afirma que é possível obter a representação algébrica genérica do n – ésimo número pentagonal P_n em função do e – nésimo número triangular T_n da seguinte maneira:

$$P_n = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{n.(3n-1)}{2} = n + \frac{3n.(n-1)}{2} = n + 3.T_{n-1}.$$

Os números figurados são desenvolvimentos diretamente representados através das progressões, porém Pitágoras realizou diversos teoremas importantes para a evolução de conceitos matemáticos, tais como, o Teorema de Pitágoras, os Ternos Pitagóricos, a descoberta das Grandezas Irracionais, as Identidades Algébricas, entre outros.

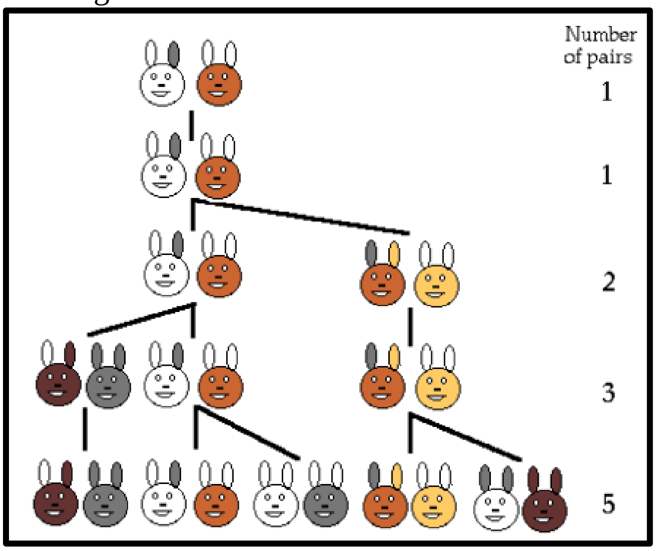
Leonardo Fibonacci (1170 - 1250), o autor principal para a contribuição da evolução das progressões, debruçou-se nos estudos dos problemas mais famosos sobre Sequências.

> “No limiar do século XIII despontou a figura de Leonardo Fibonacci (“Leonardo, filho de Bonaccio”, c. 1175-1250), o matemático mais talentoso da Idade Média. Também conhecido como Leonardo de Pisa (ou Leonardo Pisano), Leonardo nasceu em Pisa, centro comercial importante, onde seu pai era ligado aos negócios mercantis. Leonardo a recebeu parte de sua educação em Bejaia, norte da África, onde seu pai fora desempenhar uma função alfandegária. As atividades do pai logo despertaram no garoto um interesse pela aritmética que se canalizou, posteriormente, para extensas viagens ao Egito, à Sicília, à Grécia e Síria, onde pode entrar em contato direto com os procedimentos matemáticos orientais e árabes. Inteiramente convencido da superioridade prática dos métodos indo-arábicos de cálculo, Fibonacci, em 1202, logo depois de retornar a sua terra natal, publicou sua obra famosa intitulada Liberabaci”. (EVES, 2014 p. 292).

A obra Liberabaci, de Fibonacci, discute assuntos como aritmética e álgebra, no qual um dos problemas mais famosos sobre sequências, denominado “O problema dos pares de coelhos”, que ficou conhecida como Sequência de Fibonacci. Conforme afirma Arruda (2013), o problema diz que:

Para tal, um indivíduo coloca um par de coelhos jovens num certo local rodeado por todos os lados por uma parede. Queremos saber quantos pares de coelhos podem ser gerados, durante um ano, por esse par, assumindo que pela sua natureza, em cada mês dão origem a outro par de coelhos, e no segundo mês após o nascimento, cada novo par pode também gerar.

Figura 44: Número de Pares de Coelhos.



Fonte: Knott (1999) apud Celuque (2004).

Segundo Celuque (2004), o problema que dá origem à Sequência de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots, f(x_n), \dots$, onde $f(x_n) = f(x_{n-1}) + f(x_{n-2})$, para todo $n > 2 \in N$, isto é, após os dois primeiros, cada termo é a soma dos dois imediatamente precedentes.

Assim como a Sequência de Fibonacci, a Proporção e Número Áureo também fazem parte dos estudos de Fibonacci, e possuem diversas aplicações no contexto histórico da humanidade e da ciência, tais definições podem ser encontradas nas pesquisas de Celuque (2004).

Desta forma, os estudos de Fibonacci acrescentaram de maneira formal para a contribuição das definições das progressões, dando início às teorias de crescimento populacional.

Leonard Euler (1707 – 1783), suíço, nascido na Basileia em 1707, obteve diversas contribuições para o campo da matemática.

> "Euler foi um escritor prolífico, sem dúvida insuperável quanto a isso na história da matemática; não há ramo da matemática em que seu nome não figure. É interessante que sua produtividade surpreendente não foi absolutamente prejudicada quando, pouco depois de seu retorno a São Petersburgo, teve a infelicidade de ficar completamente cego. Aliás, ele já era cego do olho direito desde 1735, o que explica as poses com que aparece em seus retratos. A cegueira poderia parecer um obstáculo intransponível para um matemático, mas, assim como a surdez de Beethoven não o impediu de compor, Euler conseguiu manter extraordinária atividade produtiva depois de sofrer essa perda. Ajudado por uma memória fenomenal e por um poder de concentração incomum e imperturbável, Euler continuou seu trabalho criativo com a ajuda de um secretário que anotava suas ideias, expressas verbalmente ou escritas com giz numa lousa grande". (EVES, 2014, p. 472).

Conforme os estudos de Eves (2014), Euler contribuiu para a implantação das seguintes notações:

I. $f(x)$ para funções;

II. e para a para de logaritmos naturais;

III. a, b, c para os lados de um triângulo ABC;

IV. s para o semiperímetro do triângulo ABC;

V. r para o inraio do triângulo ABC;

VI. R para o circunraio do triângulo ABC;

VII. Σ para somatórios; e

VIII. i para a unidade imaginária, $\sqrt{1}$.

Euler ficou famoso pelo desenvolvimento da fórmula $e^{i.x} = cos\, cos\, (x) + i.sen(x)$, que para $x = \pi$, se transforma em $e^{i.\pi} + 1 = 0$.

> “Um fato importante que conseguiu estabelecer é que todo número real não nulo r tem uma infinidade de logaritmos (para uma dada base), todos imaginários se $r < 0$ e todos imaginários, exceto um, se $r > 0$. Na geometria plana aparece a reta de Euler; nos cursos de teoria das equações encontra-se às vezes o método de Euler de resolução das quárticas; e nos cursos de teoria dos números, mesmo os mais elementares, são presenças certas o teorema de Euler e a função de Euler. Atribuem-se a Euler as funções beta e gama do cálculo avançado, embora elas tenham sido prenunciadas por Wallis. Euler empregou a ideia de fator integrante na resolução de equações diferenciais, deu-nos o método sistemático usado hoje para resolver equações diferenciais lineares com coeficientes constantes e distinguiu entre equações diferenciais lineares homogêneas e não – homogêneas”. (EVES, 2014, p. 473).

Apesar de Euler não possuir uma relação direta com as progressões, suas contribuições para a matemática são bastante utilizadas nos estudos das sequências e progressões, e para revolucionar as notações e definições das sequências.

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), nascido em Brunswick, Alemanha, em 1777, foi considerado um dos maiores matemáticos do século XIX e, ao lado de Arquimedes e Isaac Newton.

> Carl foi uma das mais notáveis crianças-prodígio, dessas que aparecem de raro em raro. Diz-se que com a idade de três anos detectou um erro aritmético no borrador de seu pai. Há uma história segundo a qual o professor de Carl na escola pública, quando ele tinha dez anos de idade, teria passado à classe, para mantê-la ocupada, a tarefa de somar os números de 1 a 100. (EVES, 2014, p. 521).

A tarefa solucionada por Gauss, no qual encontrou a soma dos números de 1 até 100, deu início a origem da fórmula para encontrar a soma dos n primeiros termos de uma Progressão Aritmética, isto é, conforme afirma Eves (2014), Gauss calculou mentalmente a soma $1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$, em que observou que $100 + 1 = 101, 99 + 2 = 101, 98 + 3 = 101$ e assim sucessivamente com os 50 pares possíveis dessa maneira, logo a soma portanto $50 \, x \, 101 = 5050$.

Com base na resolução de Gauss, desenvolveu-se a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer, dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

As descobertas de Gauss foram evoluindo conforme foi amadurecendo seus estudos no campo da matemática. Segundo Eves (2014, p. 520), “Gauss deu a primeira demonstração plenamente satisfatória do teorema fundamental da álgebra. Newton, Euler, d’Alembert e Lagrange haviam feito tentativas frustradas de provar esse teorema”.

Os estudos de Gauss além de possuir grandes contribuições para as progressões e aplicações, também foram notáveis as colaborações à astronomia, à geodésia e à eletricidade.

Helge Von Koch (1870 - 1924) foi um matemático suíço que desenvolveu uma aplicação geométrica das progressões que ficou conhecida como um dos fractais clássicos, denominada como Curva de Koch.

Fractal, desde o momento que foi idealizada por Benoit Mandelbrot, passou por várias definições diferentes, mas todas elas possuem uma única noção, que serviu para idealizar todas as outras definições.

> [...] fractal, introduzida por Benoit Mandelbrot através do neologismo Fractal, que surgiu do latino fractus, que significa irregular ou quebrado, como ele próprio disse: Eu cunhei a palavra fractal do adjetivo em latim fractus. O verbo em latim correspondente frangere significa quebrar: criar fragmentos irregulares, é contudo sabido e como isto e apropriado para os nossos propósitos que, além de significar quebrado ou partido, fractus também significa irregular. Os dois significados estão preservados em fragmento. (TEODORO e AGUILIAR, 2015, p. 17).

Os fractais são formas geométricas abstratas, onde o estudo de suas formas são bastantes complexas, mas sua estrutura em si, possui uma beleza, formada por padrões bastante interessante e incríveis, podendo perceber que ao ser ampliada, os fragmentos do fractal, esses fragmentos são idênticos a figura inicial, o todo, do fractal.

Para a construção da curva de Koch, temos que considerar um segmento de reta que vai de A até B, onde é chamado de inicializador, após isto, o inicializador é quebrado em quatro partes iguais gerando uma curva que vai do ponto A ao ponto B, chamada de gerador, pois ela irá dar o processo de construção da figura que queremos chegar, formada por quatro segmentos de mesmo comprimento, igual a $\frac{1}{3}$ da distância de A até B.

Em cada um dos segmentos da curva anterior, foi reproduzida uma cópia da figura original, reduzida em $\frac{1}{3}$ de seu tamanho, de modo a formar uma nova curva de A até B, agora formada por dezesseis segmentos.

O fractal correspondente a essa construção é a curva limite, num certo sentido, desse processo. É possível imaginar que em um fractal há partes da figura que são cópia do todo, pois cada etapa da construção é uma união de 4 cópias reduzidas da etapa anterior. Obedecendo a propriedade chamada de auto-semelhança.

Para a construção da Curva de Koch, primeiramente consideremos que:

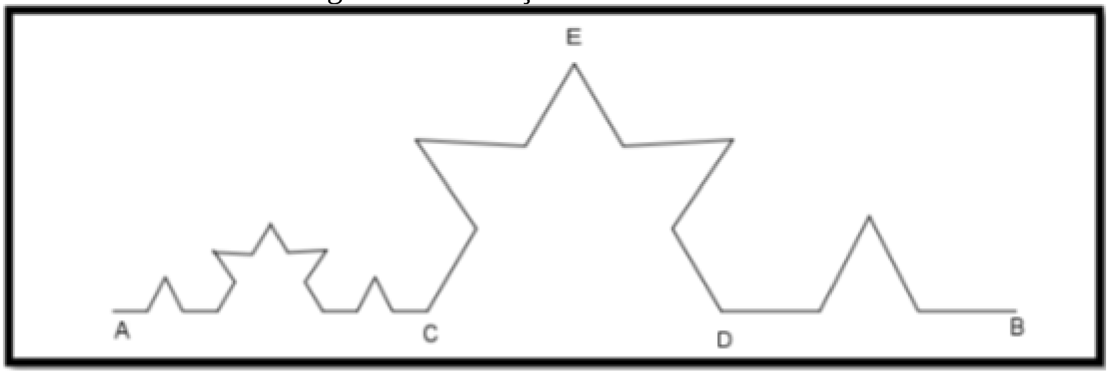
I) Considerar um segmento de reta AB de comprimento l.

II) Dividir o segmento em três segmentos iguais, e suprir o terço médio, colocando em seu lugar os segmentos CE e DE, cada um com um comprimento de $\frac{1}{3}$ do segmento removido. Ficando, assim, com a poligonal $ACEDB$, com comprimento $\frac{4}{3}$.

III) Repetir com cada um dos quatro segmentos da poligonal $ACEDB$ a mesma operação feita com o segmento original, e assim sucessivamente e iterativamente.

Portanto, segue abaixo na Figura 45, o modelo geométrico da Curva de Koch.

Figura 45: Obtenção da Curva de Koch.



Fonte: Gomes (2007).

Segundo Gomes (2007, p 14.), explorar a Geometria Euclidiana através da Geometria Fractal sugere a análise do número de segmentos, comprimento destes e o comprimento total da curva em cada nível da construção da curva de Koch".

No Quadro 30, em cada linha verifica-se o aumento do número de segmentos e a redução do comprimento deles, conforme o nível *n* em questão.

Quadro 30: Comprimento da Curva de Koch.

Figura	**Figura inicial**	**1º iteração**	**2º iteração**	**3º iteração**	**...**	**n iterações**
Número de segmentos	1	4	16	64	...	4^n
Comprimento de cada segmento	l	$\frac{l}{3}$	$\frac{l}{9}$	$\frac{l}{27}$	...	$\frac{l}{3^n}$
Comprimento total da curva	l	$4.\frac{l}{3}$	$4^2.\frac{l}{3^2}$	$4^3.\frac{l}{3^3}$	...	$\left(\frac{4}{3}\right)^n.l$

Fonte: Gomes (2007).

Considerando que o comprimento para um dado nível é $\frac{4}{3}$ do nível anterior; o comprimento da curva no nível é $\left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot l$, ou seja, de um nível para outro o comprimento é multiplicado pelo fator $\frac{4}{3} > 1$.

Como o comprimento aumenta de um nível para outro, logo o cresce indefinidamente tendendo a infinito quando o nível de construção tende a infinito.

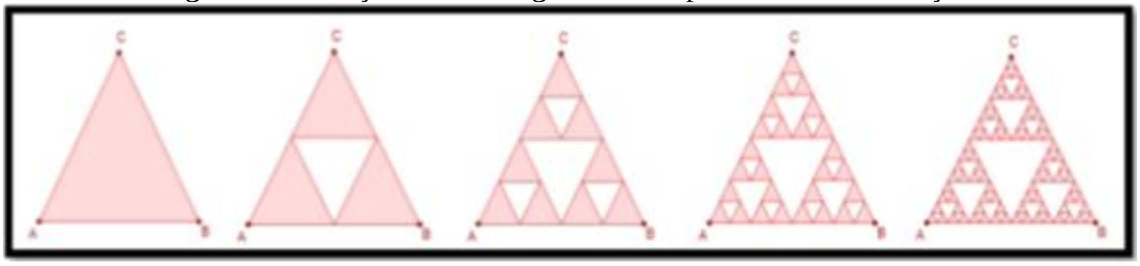
Waclaw Sierpìnski (1882 – 1969), assim como Helge Von Koch, desenvolveu um dos fractais clássicos que contribuíram para a evolução do estudo das progressões, através da aplicação na geometria, no qual iremos destacar duas aplicações importantes que são o Triângulo e Carpete de Sierpìnski.

Segundo Bemfica e Alves (2010, p. 11) “o Triângulo de Sierpinski foi descrito em 1915 pelo matemático Waclav Sierpinski (1882- 1969)”. É obtido através de um processo iterativo de divisão de um triângulo equilátero em quatro triângulos semelhantes.

Para a construção do Triângulo Sierpinski, consideramos inicialmente um triângulo equilátero como figura inicial, e a partir do mesmo começa o processo iteração.

Na 1ª iteração são determinados os pontos médios de cada um dos lados do triângulo equilátero, unimos esses pontos médios dois a dois por segmentos e consideramos os quatro segmentos resultantes, retirando o triângulo central. Obtivemos, portanto, a 2ª figura do processo de construção, obtendo assim dentro do triângulo maior, área de três triângulos menores iguais o triângulo inicial, com vértices no mesmo sentido, porém com lados de dimensões menores, sendo que o triângulo central, cujo desprezamos, além de possuir lados de dimensões menores, também possui seus vértices em sentidos opostos ao do triângulo inicial. Repetindo indefinidamente o processo, obtemos o Triângulo de Sierpinski no limite deste processo recursivo, como mostra a Figura 46.

Figura 46: Iterações no Triângulo de Sierpinski até a 4ª iteração.



Fonte: Côrtes (2014).

Ao analisar a Figura 46, percebe-se que a cada iteração, que a área do Triângulo de Sierpinski, é igual a área do triângulo anterior multiplicada pelo fator $\frac{3}{4}$ e que o seu perímetro é igual ao perímetro do triângulo anterior multiplicado pelo fator $\frac{3}{2} = 3.\frac{1}{2}$.

Ao analisar a área do Triângulo de Sierpinski, temos uma P.G. de razão $q = \frac{3}{4}$, onde $|q| < 1$ e o primeiro termo é positivo, a A é a área do triângulo inicial. Somente visualizando as iterações, percebemos que é uma progressão geométrica decrescente, a partir que o número de iterações aumenta, ou seja, tende ao infinito, a área diminui, tendendo a zero. Portanto quando $n \to +\infty, A_n \to 0$, ou seja,

$$A_n = 0$$

Analisando o perímetro do triângulo de Sierpinski temos uma PG de razão $q = \frac{3}{2} > 1$ e 1° termo exatamente o perímetro da figura inicial.

Isto é possível perceber na Quadro 31.

Quadro 31: Área e Perímetro do Triângulo de Sierpinski.

Figura	**Área (A)**	**Perímetro (P)**
Figura inicial	A	P
1° iteração	$A_1 = \frac{3}{4}.A$	$P_1 = \frac{3}{2}.P$
2° iteração	$A_2 = \frac{3}{4}.A_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2.A$	$P_2 = \frac{3}{2}.P_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2.P$
3° iteração	$A_3 = \frac{3}{4}.A_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3.A$	$P_3 = \frac{3}{2}.P_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^3.P$
⋮	⋮	⋮
n iterações	$A_n = \frac{3}{4}.A_{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^n.A$	$P_n = \frac{3}{2}.P_{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n.P$

Fonte: Gomes (2007).

Portanto, quando $n \to +\infty$, $P_n \to +\infty$. Isto significa que o perímetro do triângulo é infinito.

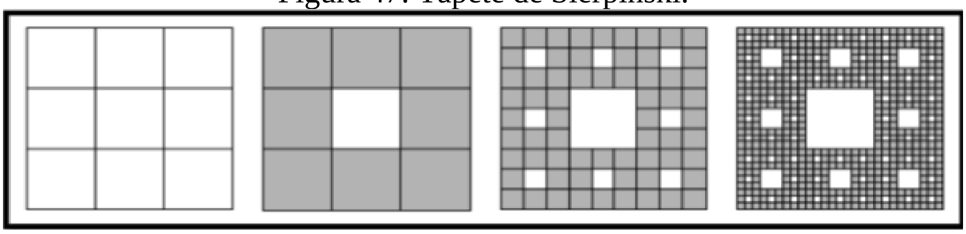
Segundo Gomes (2007, p. 26),“o Carpete de Sierpinski possibilita trabalhar o processo de remoção a partir de um quadrado, apesar do processo de remoção ser o mesmo do Triângulo de Sierpinski, e relacionar a diferença entre o cálculo da área do quadrado e do triângulo”.

Na perspectiva de Negri (2014), a construção do Tapete de Sierpinski é realizada da seguinte forma:

Na 1ª iteração divide-se o quadrado inicial em 9 subquadrados menores e congruentes, e retira-se o subquadrado central.

Aplicando o mesmo processo da 1ª iteração, na 2ª iteração, divide-se os 8 subquadrados restantes, em 9 quadrados menores mantendo a congruência e remove-se o quadrado central em cada um dos 8 subquadrados. Assim o processo se repete sucessivamente e iterativamente como mostra a Figura 47.

Figura 47: Tapete de Sierpinski.



Fonte: Gomes (2007).

Conforme diz Luz (2016, p.47), “para facilitar a compreensão do que ocorre com o número de quadrados e o comprimento do lado de cada um deles a cada iteração”.

Apresentaremos as informações obtidas na construção do tapete de Sierpinski no Quadro 32.

Quadro 32: Quantidade e comprimento dos lados dos quadrados em cada iteração do Tapete de Sierpinski.

Número de iterações (i)	**Número de quadrados (N)**	**Comprimento do lado do quadrado (δ)**
Figura inicial	1	l
1	8	$\frac{l}{3}$
2	64	$\frac{l}{9}$
3	512	$\frac{l}{27}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	8^i	$\frac{l}{3^i}$

Fonte: Adaptado de Luz (2016).

Analisando a Quadro 32, observa-se que a cada iteração o número de quadrados aumenta oito vezes o número do quadrado da iteração anterior, e o comprimento do lado do quadrado a cada iteração possui um fator de $\frac{1}{3}$. Segundo Gomes (2007, p. 47), “para o cálculo da área, definir A como a área inicial do quadrado, de lado l”, dada por:

$$A = l^2.$$

A Quadro 33 abaixo descreve a área A_i em cada iteração, assim generalizando.

Quadro 33: Área do Tapete de Sierpinski.

Iterações (i)	**Número de quadrados (N)**	**Comprimento do lado do quadrado (δ)**	**Área (A)**	**Área total (A)**
Figura inicial	1	l	A	A
1	8	$\frac{l}{3}$	$\frac{A}{9}$	$8.\frac{A}{9}$
2	8^2	$\frac{l}{3^2}$	$\frac{A}{9^2}$	$8^2.\frac{A}{9^2}$
3	8^3	$\frac{l}{3^3}$	$\frac{A}{9^3}$	$8^3.\frac{A}{9^3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	8^i	$\frac{l}{3^i}$	$\frac{A}{9^i}$	$\left(\frac{8}{9}\right)^i.A$

Fonte: Adaptado de Gomes (2007).

Conforme a Quadro 33, o processo de iteração segue infinitamente, com isso a área do Tapete de Sierpinski tende a zero conforme o número de iteração aumenta, então podemos expressar essa área por:

$$A_i = \left(\frac{8}{9}\right)^i = 0.$$

A seguir, apresentamos conceitos e definições matemática de forma aprofundada com base no rigor matemático, que possa ser útil para a formação de professores, assim como, incentivar os docentes da Educação Básica a possuir interesse em realizar formação continuada e se apropriar do objeto matemático e possuir pleno domínio do conteúdo.

3.2 – CONCEITO DE FUNÇÃO

Para definirmos uma Função, necessitamos inicialmente compreendermos os conceitos de Valor Constante e Valor Variável.

O Valor Constante é uma quantidade fixa, que sempre mantém o valor. O Valor Variável é uma quantidade indeterminada ou uma quantidade universal[5], que inclui todos os valores especificados.

Desta forma, uma Função de Valor Variável é uma expressão analítica, isto é, uma lei que define um gráfico, composta de qualquer maneira, com a mesma quantidade e número, ou Valores Constantes.

Assim, podemos definir função, analiticamente, a partir da condição:

Dado dois conjuntos não vazios A e B. Diz-se que f é uma Função quando todo elemento do conjunto A está em correspondência com um único elemento do conjunto B. Isto é,

$$f: \begin{array}{l} A \longrightarrow B \\ x \longmapsto f(x) = y \end{array}$$

Logo, seja qual for a nomenclatura utilizada para associar elementos de dois conjuntos não vazios (Regra, Aplicação, correspondência, transformação, relação, etc), a importância da definição de função está sujeita a apenas duas condições a saber, como apresenta Lima *et al* (1997):

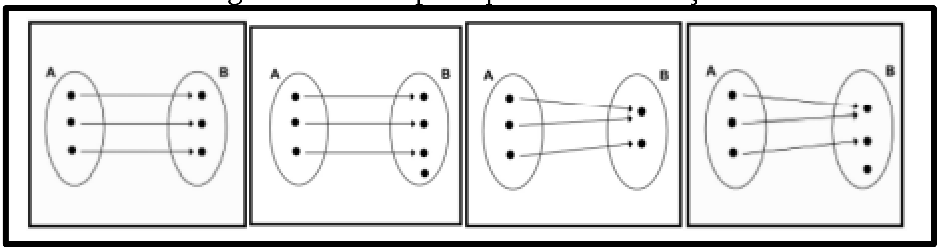
[5] Também chamado de ***quantificador universal*** é utilizado quando queremos nos referir a todos os elementos de um conjunto. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/quantificadores.htm>. Acesso em: 10/10/2021.

> I) Não deve haver exceções: afim de que a função f tenha o conjunto A como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$, seja qual for $x \in A$ dado.
> II) Não pode haver ambiguidades: a cada $x \in A$, a regra deve fazer corresponder um único $f(x)$ em B. (LIMA et al 1997, p. 41).

Verifica-se que são critérios necessários para definir uma função, para o conjunto de partida A as condições de não ambiguidade e não exceção, e para o conjunto de chegada B é possível que haja ambiguidades e exceções.

A Figura 48 ilustra situações que se enquadram na definição de função.

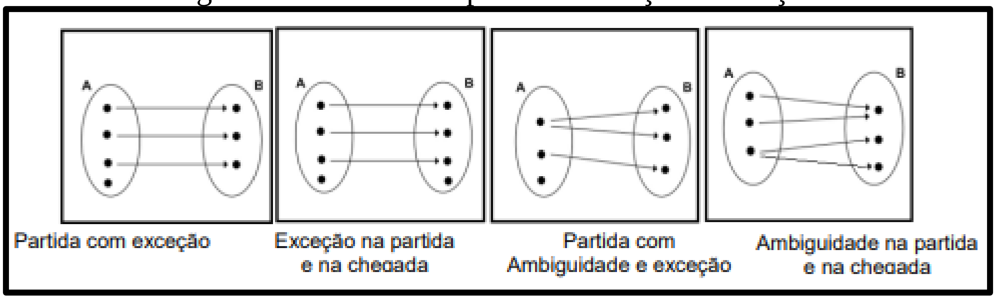
Figura 48: Exemplos que definem função.



Fonte: Silva (2019).

A Figura 49 ilustra situações que não se enquadram na definição de função.

Figura 49: Contraexemplos da definição de função.



Fonte: Silva (2019).

Nas Figuras 48 e 49 os exemplos e contraexemplos da definição de função percebe-se que o comportamento funcional é definido pela partida da correspondência, ou seja, o que chamamos de domínio da função, que deve estar bem definido para que ele ocorra. Assim, a chegada da correspondência, chamada de contradomínio da função.

> Deve-se ainda observar que uma função conta de três elementos essenciais: domínio, contradomínio e a lei de correspondência $x \longmapsto f(x) = y$. Mesmo quando dizemos simplesmente "a função f" ficam subentendidos seu domínio A e seu contradomínio B. Sem que eles sejam especificados, não existe a função. (LIMA et al, 1997, p. 39)

Desta forma, de onde partem as correspondências é denominado de domínio, onde ocorre a chegada da correspondência é denominado de contradomínio e os elementos que se associam à partir do domínio e contradomínio são denominados de imagem da função.

Assim, o conjunto A denomina-se domínio de f e pode ser indicado com a notação $D(f)$. Quando uma função tem domínio A, diz-se que ela é definida em A. O conjunto B denomina-se contradomínio de f e pode ser indicado com a notação $CD(f)$. Se x é um elemento qualquer de A, então o único y de B associado a x é denominado imagem de x pela função f ou valor da função f em x e será indicado com a notação $f(x)$. O conjunto de todos os elementos de B que são imagem de algum elemento de A se denomina conjunto-imagem de f, e pode ser indicado com a notação $I(f)$ ou $Im(f)$.

$$Im(f) = \{\exists x, x \in A \wedge y = f(x)\}$$

Seja a Função f, o Grafo de f é dado por:

$$G(f) = \{x \in D(f); y \in CD(f) e\ y = f(x) \in Im(f)\}.$$

Uma vez que, neste estudo estabelecemos que as funções são do tipo real de variável real, pois as Progressões Geométricas são estabelecidas a partir das sequências de números reais. Logo, destacamos que A e B são conjuntos não vazios formados por números reais, isto é, A, $B \subset \mathbb{R}$, assim, para que toda relação $f: A \longrightarrow B$ seja uma função, vale duas condições:

se $(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_1$

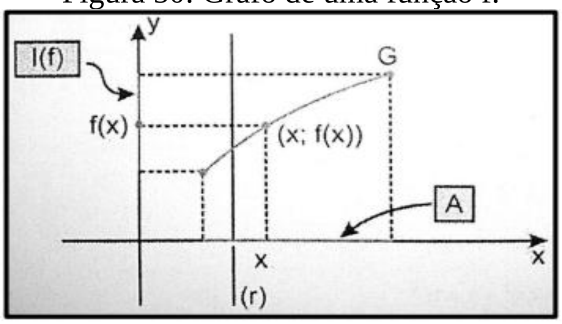
I) Então f existe, pois, $\forall x \in A, \exists\, y \in B/(x, y) \in f$, e

II) f é único, pois, $\forall x \in A, \exists |\, y \in B/(x, y) \in f$.

Portanto, pela definição de função, toda função é uma relação, porém ne toda relação é uma função.

De forma geral, graficamente $G(f)$ é dada por toda função real definida de A e B. Dado um sistema de coordenadas ortogonais x0y o conjunto G da totalidade dos pontos (x, $f(x)$), com x em A, é o grafo de f.

Figura 50: Grafo de uma função f.



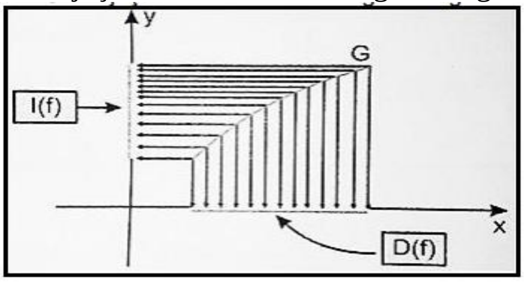
Fonte: Neto et. al. (2010) *apud* Oliveira (2018).

Assim, podemos verificar alguns critérios para construção gráfica e conhecimento do grafo de f, conforme apresenta Oliveira (2010):

> I) Toda reta (r), vertical, que passa por um ponto de $A = D(f)$, encontra o gráfico G em um único ponto, o que nos dá um critério para decidirmos se uma figura do plano cartesiano pode ser gráfico de uma função.
> II) Quando se conhece o gráfico G de uma função f, seu domínio pode ser obtido projetando-se G sobre Ox, na direção Oy; o conjunto imagem de f pode ser obtido projetando-se G sobre Oy.
> (OLIVEIRA, 2010, p. 97).

Assim, a projeção do gráfico de G, com relação a seu domínio e imagem é apresentada na Figura 51.

Figura 51: Projeção do domínio e imagem do gráfico de G.



Fonte: Neto et. al. (2010) *apud* Oliveira (2018).

Quanto à tipologia das funções, estas podem ser Sobrejetora, Injetora ou Bijetora. Seja f uma função de A em B, com domínio $D(f) \subseteq A$.

Diz-se que $f: A \longrightarrow B$ é Sobrejetora ou Sobrejetiva quando:

I) $Im(f) = CD(f) = y,$

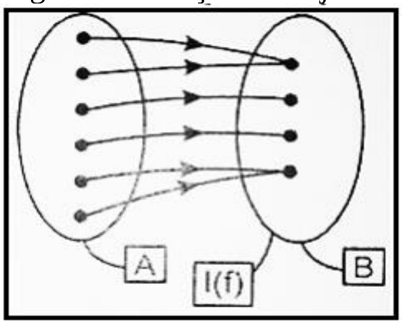
II) $\forall y \in CD(f); \exists x \in D(f) tal\ que\ f(x) = y, e$

III) $Im(f) = CD(f) = R_+.$

Simbolicamente, temos:

$$f \text{ é } sobrejetora \Rightarrow Im(f) = CD(f)$$

Figura 52: Função Sobrejetora.



Fonte: Neto et. al. (2010) *apud* Oliveira (2018).

Percebe-se que se f é sobrejetora, para todo elemento $y \in B$ existe pelo menos um elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$, ou seja, todo $y \in B$ é imagem de “pelo menos um” $x \in A$.

Quando a função $f: A \longrightarrow B$ é sobrejetora, a equação $f(x) = y$ admite para todo $y \in B$ pelo menos uma solução.

Diz-se que $f: A \longrightarrow B$ é Injetora ou Injetiva quando:

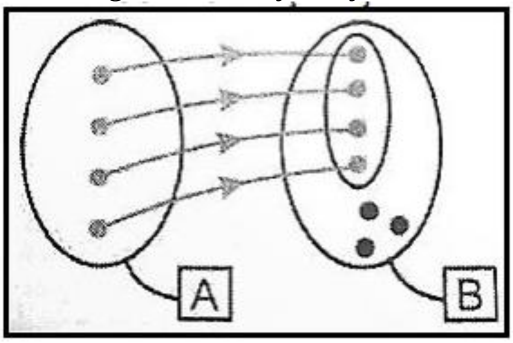
I) $\forall x_1, x_2 \in D(f), com\ x_1 \neq x_2, tem - se\ que\ f(x_1) \neq f(x_2)$, e

II) $\forall x_1, x_2 \in D(f), com\ f(x_1) = f(x_2), tem - se\ que\ x_1 = x_2$.

Simbolicamente, temos:

$$f \text{ é } injeiva \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A\colon x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2), ou\ se,) f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Figura 53: Função Injetora.



Fonte: Neto et. al. (2010) *apud* Oliveira (2018).

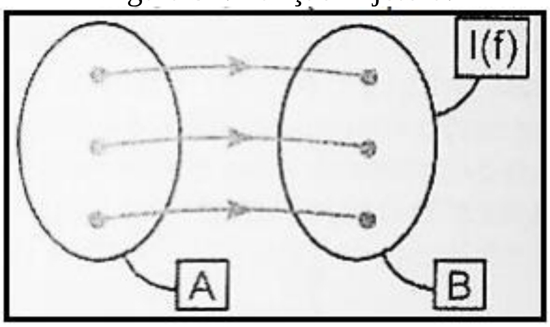
Nota-se que se f é injetora, um elemento $y \in B$ não é necessariamente imagem de algum elemento $x \in A$, mas se não for, é imagem de um único $x \in A$. Quando a função $f: A \longrightarrow B$ é injetora, a equação $y = f(x)$ admite no máximo uma solução para todo $y \in B$.

Diz-se que $f: A \longrightarrow B$ é Bijetora ou Bijetiva se, e somente se, f é injetora e sobrejetora simultaneamente.

Simbolicamente, temos:

$$f \text{ é } bijetiva \Leftrightarrow (f \text{ é } sobrejetora\ e\ f \text{ é } injetora)$$

Figura 54: Função Bijetora.



Fonte: Neto et. al. (2010) *apud* Oliveira (2018).

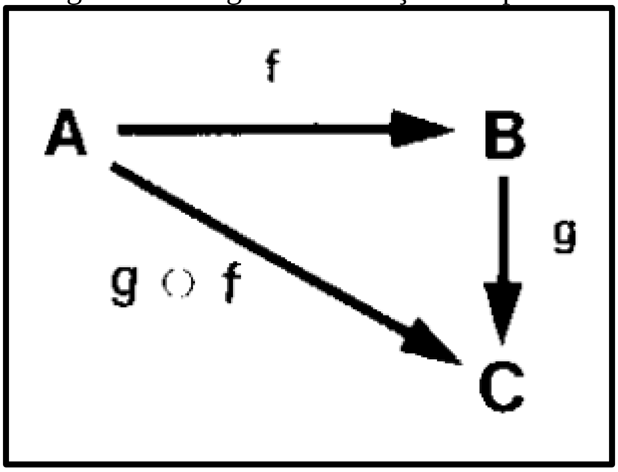
Observa-se que se f é bijetora, para todo elemento $y \in B$ existe um único elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$, isto é, todo $y \in B$ é imagem de um e um só $x \in A$. Quando a função $f: A \longrightarrow B$ é bijetora, a equação $f(x) = y$ admite para todo $y \in B$ uma solução única.

Quanto a composição de funções, temos que, seja a função $f: A \longrightarrow B$ e seja $g: B \longrightarrow C$, onde C é um conjunto não vazio, denomina-se a função composta de g e f a função $h: A \longrightarrow C$ definida por:

$$h(x) = f\big(g(x)\big) = (gof)(x).$$

Podemos representa a função composta $h(x) = (gof)(x)$ pelo diagrama destacado na Figura 55.

Figura 55: Diagrama da função composta.



Fonte: Iezzi et. al. (1977).

Quanto a inversão de funções, temos que, seja a função $f: A \longrightarrow B$, a relação $f^{-1} = \{(x, y) \in f\}$ é uma função inversa se, e somente se, f é bijetiva de A em B, isto é, para todo $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $(y, x) \in f^{-1}$, onde $D(f^{-1}) = B$ e $Im(f^{-1}) = A$.

Quanto a paridade das funções, seja $f: A \longrightarrow B$ uma função, então:

I) Diz-se que f é uma função Par quando $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D(f)$, e

II) Diz-se que f é uma função Ímpar quando $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D(f)$.

Em contrapartida, quando $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, dizemos que a função f não é Par nem Ímpar.

Uma função f diz-se *crescente* se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ tem-se que $f(x_1) \leq f(x_2)$. Porém, se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ tem-se que $f(x_1) < f(x_2)$, diz-se que a função f é *estritamente crescente.*

Uma função f diz-se *decrescente* se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ tem-se que $f(x_1) \geq f(x_2)$. Porém, se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ tem-se que $f(x_1) > f(x_2)$, diz-se que a função f é *estritamente decrescente.*

A função diz-se *monótona* se é crescente ou decrescente no seu domínio, mas, diz-se que a função f é *estritamente monótona* se f é estritamente crescente ou estritamente decrescente no seu domínio.

Uma função $f: R \rightarrow R$ é chamada de *Afim* quando existem as constantes $a, b \in R$ tais que $f(x) = a.x + b$ para todo $x \in R$.

O valor b, chamado de valor inicial, pois para $f(0)$ o valor de $f(0) = b$. O valor de a, pode ser determinado conhecido dois pares ordenados $(x, f(x_1))$ e $(x, f(x_2))$ da função f, assim temos:

$$f(x_1) = a.x_1 + b \; e \; f(x_2) = a.x_2 + b \, .$$

Assim, obtém-se:

$$f(x_2) - f(x_1) = (a.x_2 + b) - (a.x_1 + b)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = a.x_2 - a.x_1$$

$$f(x_2) - f(x_1) = a.(x_2 - x_1)$$

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Uma função $f: R \longrightarrow R^+$é chamada de *Exponencial* se existe um elemento $a \in R^+$, com $a \neq 1$, tal que função f é definida por $f(x) = a^x$, onde o elemento a é base da função exponencial.

Observa-se que as restrições $a > 0$ e $a \neq 1$ são necessárias, uma vez que:

I. Para $a = 0$ e x negativo, não teríamos uma função definida em R, mas sim uma indeterminação.

II. Para $a < 0$ e $x = \frac{1}{2}$, por exemplo, não teríamos uma função definida em R, mas sim em C.

III. Para $a = 1$ e x qualquer número real, teremos uma função constante.

(Teorema da Caracterização) A caracterização da função exponencial é feita por meio de uma proposição, isto é, seja $f: R \longrightarrow R^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

I) $f(nx) = f(x)^n para \; todo \; n \in Z \; e \; todo \; x \in R$.

II) $f(x) = a^x \; para \; todo \; x \in R, onde \; a = f(1)$.

III) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \; para \; quaisquer \; x, y \in R$.

Demonstração:

Para demonstrar essa proposição é necessário provar as implicações $I) \Longrightarrow II) \Longrightarrow III) \Longrightarrow I)$.

De $I) \Longrightarrow I)$, iniciemos provando que a hipótese $I)$ é válida para todo número racional $r = \frac{m}{n}$ (com $m \in Z$ e $n \in N$), onde $f(rx) = f(x)^r$. Com efeito, como $nr = m$, temos $f(r.x)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$.

Logo $f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$.

Se fixarmos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r \cdot 1) = f(x)^r = a^r$, para todo $r \in Q$.

Para completar a demonstração de que I) $\Longrightarrow$ II) suponhamos, a fim de fixar as ideias que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Admitamos, por absurdo, que exista um $x \in R$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, por exemplo, que seja $f(x) < a^x$ (o caso $f(x) > a^x$ pode ser tratado de modo análogo). Então, existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$ concluímos que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Esta contradição completa a prova de que $I) \Longrightarrow II)$. ■

Para seguir de $II) \Longrightarrow III)$, seja $f(x) = a^x$, com $x \in R$ e $a = f(1)$. Sendo $y \in R$, obtemos $f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$. ■

$De\ III) \Longrightarrow I)$, seja $f(x + y) = f(x) \cdot f(y),\ com\ x, y \in R$. Para $n \in N$, vale

$$f(nx) = f(x + x + x + \cdots + x) = f(x).f(x).f(x).\ldots.f(x) = f(x)^n$$

Por último, provemos o caso $f(nx) = f(x)^{-n}$. Para isto, analisemos o caso $f(-x)$. Então,

$$f(-x).f(x) = f(-x + x) = f(0) = 1 \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Logo,

$$f(-nx) = f(-x - x - \cdots - x) = f(-x).f(-x).\ldots.f(-x) =$$

$$= \frac{1}{f(x)}.\frac{1}{f(x)}.\ldots.\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x)^n} = f(x)^{-n} ■$$

A partir da definição, características, propriedades e particularidades do conceito de função, a seguir desenvolvemos o estudo de Sequências Numéricas.

3.3 – SEQUÊNCIAS

Nesta seção será discutido sobre o estudo de Sequências Numéricas, a partir das concepções de Lima (2006) e Chiconato (2013), desta forma, faz-se necessário compreender as definições de Números Naturais e Números Reais, a partir do rigor matemático aprofundado deste estudo.

Obtemos o Conjunto dos Números Naturais, denotado por N, se caracterizado pelas seguintes propriedades, chamadas de axiomas de Peano:

I. Existe uma função injetora $f: N \longrightarrow N$, a imagem $f(n)$ de cada número natural $n \in N$ chama-se sucessor de n. Ou seja, todo número natural possui um sucessor, que ainda é um número natural, e ainda, números naturais diferentes possuem sucessores naturais diferentes.

II. Existe um único número natural $1 \in N$ tal que $1 \neq f(n)$ para todo $n \in N$. Ou seja, existe um único número natural 1 que não é sucessor de nenhum outro.

III. Se um conjunto $A \subset N$ é tal que $1 \in A$ e $f(A) \subset A$, isto é, $n \in A \Longrightarrow f(n) \in A$, então, $A = N$. Ou seja, se um conjunto de números naturais contém o número 1 e contém também o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais, à essa propriedade chama-se de princípio da indução, uma vez que, todo número natural n pode ser obtido a partir de 1, tomando-se o seu sucessor $f(1)$, o sucessor deste, $f(f(1))$, e assim por diante.

As definições a seguir foram baseadas em Côrtes (2014).

Considere o subconjunto $I_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$, com $n \in N$. Um conjunto A diz-se infinito quando é vazio ou então existem $n \in N$ uma bijeção $f: I_n \to A$ para algum $n \in N$. Neste caso, denotaremos a cardinalidade de A por $\#A = n$.

Sejam A, B conjuntos, tal que $\#A = m$ e $\#B = n$ e seja $f: A \to B$ uma função. A condição em m e n para que f seja injetiva é $m \leq n \Longrightarrow \#A \leq \#B$. A condição em m e n para que f seja sobrejetiva é $m \geq n \Longrightarrow \#A \geq \#B$. A condição em m e n para que f seja bijetiva é $m \leq n$ e $m \geq n$ então $m = n \Longrightarrow \#A = \#B$.

Primeiramente diremos que A tem zero elementos. Segundamente diremos que $n \in N$ é o número de elementos de A, ou seja, A possui n elementos.

Estes fatos decorrem das definições abaixo.

a) Cada conjunto $\mathrm{I_n}$ é finito e possui n.

b) Se $\mathrm{f: A \to B}$ é uma bijeção, um desses conjuntos é finito se, e somente se, o outro também for finito.

Demonstração:

a) Intuitivamente, uma bijeção $f: I_n \to A$ significa uma contagem dos elementos de A, pondo $f(1) = x_1, f(2) = x_2, \cdots, f(n) = x_n$, temos $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Esta é a representação ordinária de um conjunto finito.■

b) Para que o número de elementos de um conjunto não seja uma noção ambígua, devemos provar que se existem duas bijeções $f: I_n \to A$ e $g: I_m \to A$, então $m = n$.

Considerando a função composta $h = g^{-1} \circ f: I_n \to I_m$, basta então provar que se existe uma bijeção $f: I_n \to I_m$, então tem-se $m = n$. Para fixar idéias, suponhamos $m \leq n$. Daí, $I_m \subset I_n$.■

Um conjunto A chama-se infinito quando não é vazio e, além disso, seja qual for $n \in N$, *não existe uma bijeção* $f: I_n \to A$.

Demonstração:

Um conjunto A qualquer é infinito, quando para qualquer $n \in N$ e $n > 1$, temos$f: I_n \to A$, seja um $p = f(1) + \cdots f(n)$. Então $p > f(x)$ para todo $x \in I_n$, donde $p \notin f(I_n)$. Logo, nenhuma função $f: I_n \to A$ é sobrejetiva, portanto X é um conjunto infinito. ■

Um conjunto A chama-se enumerável quando é *finito* ou quando existe uma bijeção $f: N \to A$. No segundo caso A é *infinito* enumerável e, pondo-se $x_1 = f(1), x_2 = f(2), \cdots, x_n = f(n), \cdots$, tem-se $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$.

Obtemos o Conjunto dos Números Reais R, quando R é um Corpo, Ordenado e Completo.

Dizer que R é um Corpo, significa que estão definidas as seguintes operações:

I. Adição: Sejam $x, y \in R$, sua soma $x + y \in R$.

II. Multiplicação: Sejam $x, y \in R$, seu produto $x.y \in R$.

Dizer que R é um Corpo Ordenado, significa que existe um subconjunto $R^* \subset R$, chamado de conjunto dos números reais positivos, que cumprem as seguintes propriedades:

I. A soma e o produto de números reais positivos são positivos, isto é, $x, y \in R^* \Longrightarrow x + y \in R^*$ e $x.y \in R^*$.

II. Dado $x \in R$, exatamente uma das três alternativas existem: $x = 0$, ou $x \in R^+$, ou $-x \in R^*$.

Considerando R^- o conjunto dos números $-x$ onde $x \in R^+$, a condição

III. diz que $R = R^+ \cup R^- \cup \{0\}$ e os conjuntos R^+, R^- e $\{0\}$ são disjuntos dois a dois. Os números $y \in R^-$ são chamados de negativos.

Dizer que R é um Corpo Ordenado Completo, significa todo subconjunto não vazio A de R limitado superiormente em R tem uma cota superior mínima (também chamada de supremo) em R.

Seja R um corpo ordenado e A um subconjunto de R. Dizemos que um elemento $x \in R$ é uma cota superior de A, se $x \geq y$ para todo $y \in A$. Neste caso dizemos que A é *limitado superiormente*.

Seja R um corpo ordenado e A um subconjunto de R. Dizemos que um elemento $x \in R$ é uma cota inferior de A, se $x \leq y$ para todo $y \in A$. Neste caso dizemos que A é *limitado inferiormente*.

Dizemos que um subconjunto de um corpo ordenado é *limitado* se ele for limitado superiormente e inferiormente.

Seja R um corpo ordenado e A um subconjunto de R limitado superiormente. O supremo de A, denotado por $sup\ A$, é a menor das cotas superiores de A. Em outras palavras, $x \in R$ é o supremo de A, se

I. x for uma cota superior de A

II. se z for uma cota superior de A, então, $x \leq z$.

Seja R um corpo ordenado e A um subconjunto de R limitado inferiormente. O ínfimo de A, denotado por $inf\ A$, é a maior das cotas inferiores de A. Em outras palavras, $x \in R$ é o ínfimo de A, se

I. x for uma cota inferior de A

II. se z for uma cota inferior de A, então, $x \geq z$.

Uma *sequência* de números reais é uma função $f: N \longrightarrow R$ que associa cada número natural n a um número real x_n, chamado de n-ésimo termo da sequência, indicada por $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, onde, x_1 representa o primeiro termo, x_2 representa o segundo termo, e assim sucessivamente, no qual os índices numéricos $n \in N$ apontam a posição do termo na sequência.

Uma sequência é dita *recursiva*, ou definida recursivamente, quando o termo x_n é obtido através de seus termos anteriores, isto é, os primeiros termos são estabelecidos, e a partir de uma regra ou lei de formação podemos definir os termos posteriores.

3.4 – SEQUÊNCIA ARITMÉTICA E SEQUÊNCIA GEOMÉTRICA

Para definirmos uma progressão geométrica, necessita-se fazer uso, inspirado nos estudos de Junior (2015) e Oliveira (2018), das definições de Função Afim, Progressão Aritmética e Função Exponencial, respectivamente.

Seja a função $f: R \to R$ da forma $f(x) = a.x + b$, para todo $x, a, b \in R$, dado uma sequência de números reais descrito pela função $f: N \longrightarrow R$ que associa cada número natural n a um número real x_n, chamado de n-ésimo termo da sequência, indicada por $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, existe uma constante $r \in R$, tal que, quando $x = x_1$, temos que:

$$x_2 = x_1 + r \longrightarrow f(x_2) = a.(x_1 + r) + b = (a.x_1 + b) + a.r$$

$$x_3 = x_1 + 2.r \longrightarrow f(x_3) = a.(x_1 + 2.r) + b = (a.x_1 + b) + 2.a.r$$

$$x_4 = x_1 + 3.r \longrightarrow f(x_4) = a.(x_1 + 3.r) + b = (a.x_1 + b) + 3.a.r$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_1 + (n-1).r \longrightarrow f(x_n) = a.[x_1 + (n-1).r] + b =$$

$$= (a.x_1 + b) + (n-1).a.r$$

Assim, quando $f(x_n) = f(x_1) + (n-1).a.r$, dizemos que $x_n = x_1 + (n-1).r$ é uma *Progressão Aritmética* de razão r.

Seja a função $f: R \longrightarrow R^+$ da forma $f(x) = a^x$, para todo $x \in R$, $a > 0$ e $a \neq 1$ dado uma sequência de números reais descrito pela função $f: N \longrightarrow R$ que associa cada número natural n a um número real x_n, chamado de n-ésimo termo da sequência, indicada por $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, existe uma constante $r \in R$, tal que, quando $x = x_1$, temos que:

$$x_2 = x_1 + r \longrightarrow f(x_2) = a^{x_1 + r} = a^{x_1}.a^r$$

$$x_3 = x_1 + 2.r \longrightarrow f(x_3) = a^{x_1 + 2.r} = a^{x_1}.(a^r)^2$$

$$x_4 = x_1 + 3.r \longrightarrow f(x_4) = a^{x_1 + 3.r} = a^{x_1}.(a^r)^3$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_1 + (n-1).r \longrightarrow f(x_n) = a^{x_1 + (n-1).r} = a^{x_1}.(a^r)^{n-1}$$

Assim, se $x_n = x_1 + (n-1).r$ é uma *Progressão Aritmética* de razão r, então a função $f(x_n) = f(x_1).(a^r)^{n-1}$ é uma *progressão geométrica* de razão $q = a^r$.

Desta forma, podemos demonstrar que *toda sequência aritmética é transformada numa sequência geométrica.*

Demonstração:

Considerando a função $f: R \longrightarrow R^+$ monótona injetiva que transforma toda progressão aritmética $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ numa progressão geométrica $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots) = f(x_n)$.

Se pusermos $b = f(0)$ e $a = f(1)/f(0)$ teremos $f(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in R$.

Considerando inicialmente $b = f(0)$. A função $g: R \longrightarrow R^+$, definida por $g(x) = f(x)/b$, é monótona injetiva, continua transformando progressões aritméticas em progressões geométricas e agora tem-se $g(0) = 1$.

Dado $x \in R$ qualquer, a sequência $x, 0, -x$ é uma progressão aritmética, assim, $g(x), 1, g(-x)$ é uma progressão geométrica de razão $g(-x)$. Segue-se $g(-x) = 1/g(x)$.

Sejam agora $n \in N$ e $x \in R$. A sequência $0, x, 2x, \dots, nx$ é uma progressão aritmética, logo $1, g(x), g(2x), \dots, g(nx)$ é uma progressão geométrica, cuja razão é $g(x)$. Então seu $(n + 1) - ésimo$ termo é $g(nx) = g(x)^n$. Se $-n$ é um inteiro negativo, então $g(-nx) = 1/g(nx) = 1/\, g(x)^n = g(x)^{-n}$.

Portanto, vale $g(nx) = g(x)^n$ para quaisquer $n \in Z$ e $x \in R$. Segue do Teorema da Caracterização acima que, pondo $a = g(1) = f(1)/f(0)$, tem-se $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = f(x) = b \cdot a^x$, para todo $x \in R$. ■

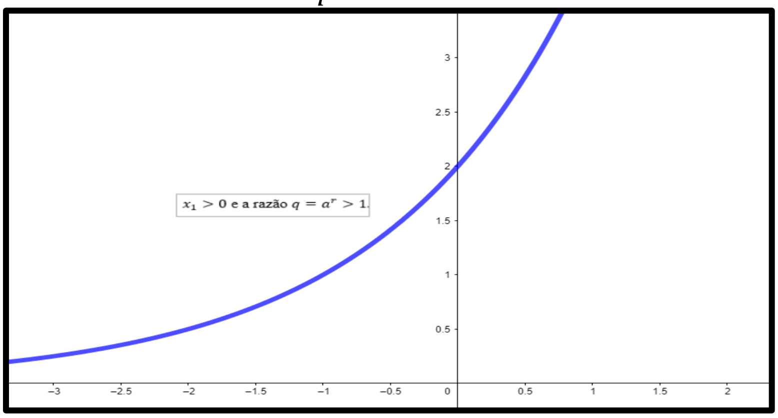
Seja a função, $f(x_n) = f(x_1).(a^r)^{n-1}$ geradora de uma Sequência $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, chama-se de progressão geométrica *crescente* quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o termo precedente, $x_n < x_{n+1}$. Existem duas condições para que essa situação ocorra:

I. $x_1 > 0$ e a razão $q = a^r > 1$.

II. $x_1 < 0$ e a razão $0 < q = a^r < 1$.

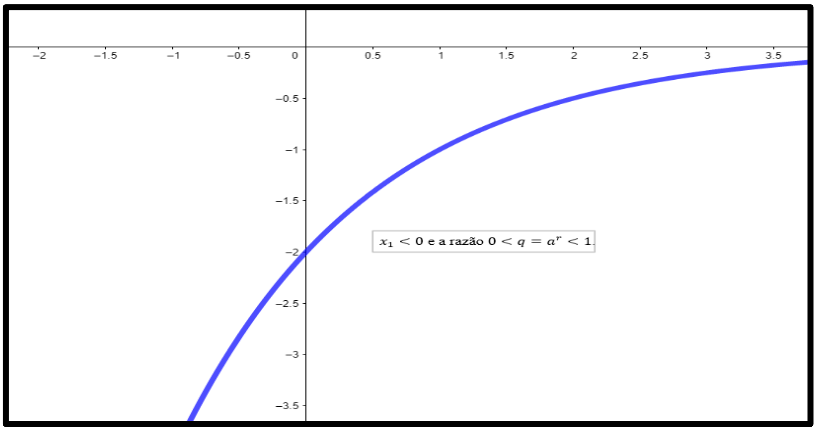
Graficamente a P.G. crescente é apresentada na Figuras 56 e 57.

Figura 56: Gráfico de uma progressão geométrica crescente quando $x_1 > 0$ e a razão $q = a^r > 1$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Figura 57: Gráfico de uma progressão geométrica crescente quando $x_1 < 0$ e a razão $0 < q = a^r < 1$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

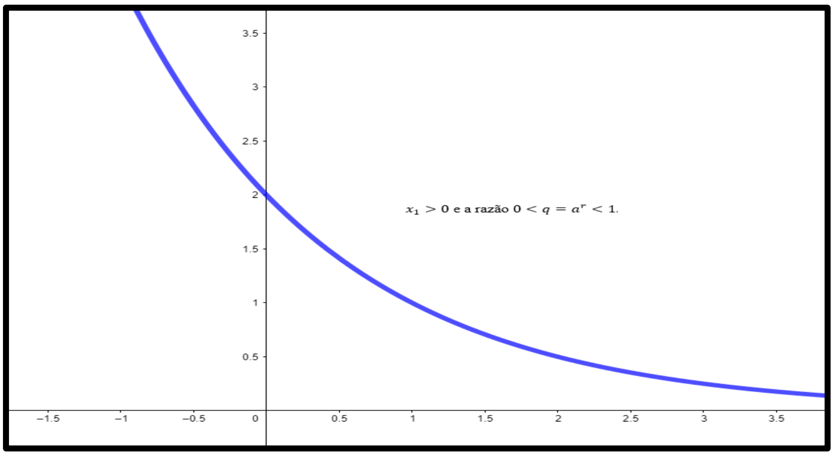
Seja a função, $f(x_n) = f(x_1).(a^r)^{n-1}$ geradora de uma Sequência $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, chama-se de progressão geométrica *decrescente* quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o termo precedente, $x_n > x_{n+1}$. Existem duas condições para que essa situação ocorra:

I. $x_1 > 0$ e a razão $0 < q = a^r < 1$.

II. $x_1 < 0$ e a razão $q = a^r > 1$.

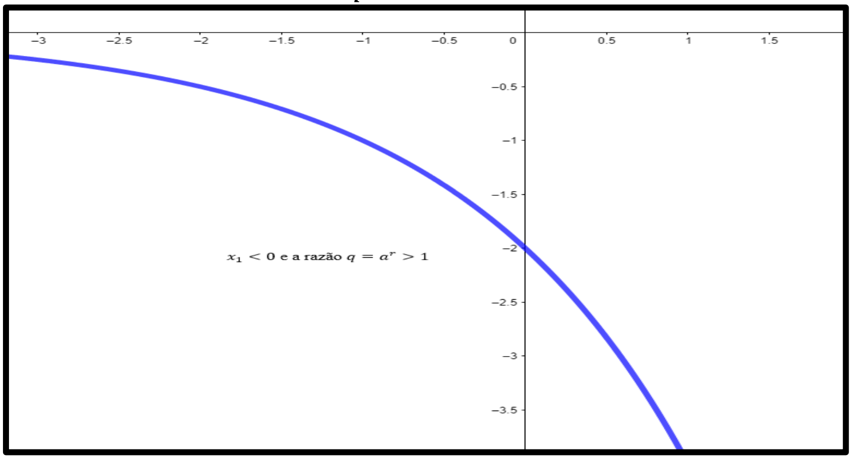
Graficamente a P.G. decrescente é apresentada na Figuras 58 e 59.

Figura 58: Gráfico de uma progressão geométrica decrescente quando $x_1 > 0$ e a razão $0 < q = a^r < 1$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

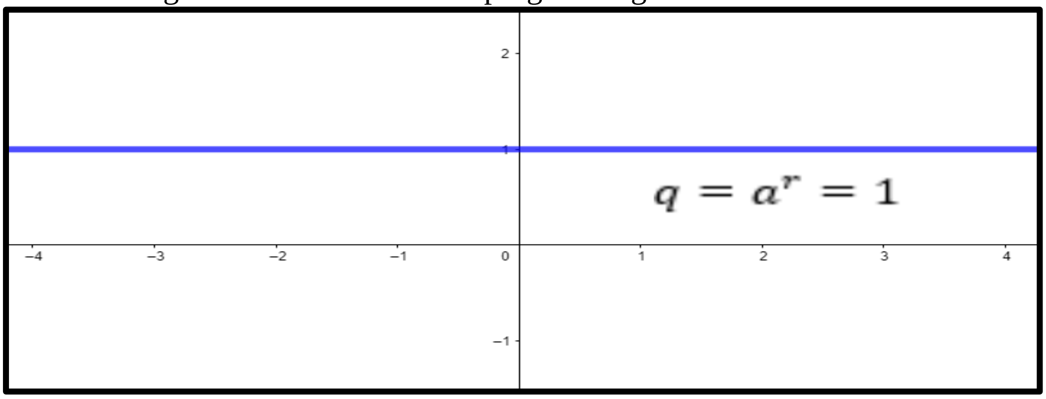
Figura 59: Gráfico de uma progressão geométrica decrescente quando $x_1 < 0$ e a razão $q = a^r > 1$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Uma progressão geométrica é *constante* quando todos os seus termos são iguais. Para que isso ocorra, basta que a razão da PG seja igual a 1, isto é, $q = a^r = 1$. Graficamente a P.G. constante é apresentada na Figura 60.

Figura 60: Gráfico de uma progressão geométrica constante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Uma progressão geométrica é *alternante* quando cada termo a partir do segundo, possui sinal oposto ao termo imediatamente anterior. Para que isso ocorra, basta que a razão da PG seja negativa, desta forma, como a definição de uma progressão geométrica advém de uma função exponencial, não é possível determinar o gráfico, uma vez que $q = a^r < 1$.

4 – A PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Na sequência didática aplicada foi desenvolvida cinco atividades proposta para ensino de Progressão Geométrica, em que foi elaborada e estruturada no modelo proposto por Cabral (2017), no qual cada atividade foi intitulada como Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC) e em cada uma dessas UARC's será definido o título, o objetivo e os procedimentos para sua devida realização, além da análise de cada UARC.

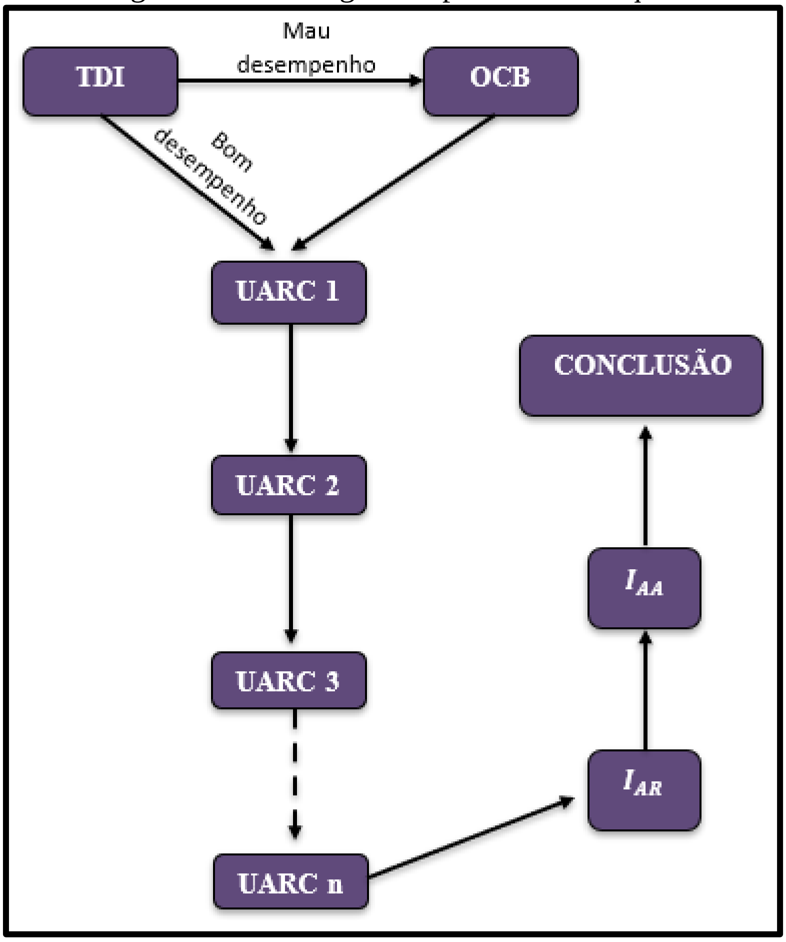
Antes da exposição da sequência didática propriamente dita, apresentamos as etapas necessárias que antecedem a SD, que são: o Teste de Diagnóstico Inicial (TDI) e uma Oficina de Conhecimentos Básicos (OCB). Tais etapas são importantes para uma melhor compreensão do objeto matemático a ser investigado, no qual são pré-requisitos para o desenvolvimento das UARC's.

Desta forma, após a aplicação do teste de diagnóstico inicial, caso a turma não obtenha um bom desempenho aplica-se a oficina de conhecimentos básicos, caso contrário, aplica-se diretamente a sequência didática.

A sequência didática é composta por cinco UARC's, em que em cada uma contém as categorias estruturantes que são: Intervenção Inicial (I_I), Intervenção Reflexiva (I_r), Intervenção Exploratória (I_e), Intervenção Formalizante (I_f). Após a aplicação da SD, é realizado a Intervenção Avaliativa Restritiva (I_{AR}) que aferem a aprendizagem do aluno nos aspectos básicos do saber matemático e a Intervenção Avaliativa Aplicativa (I_{AA}) que abordam problemas de aplicações em diversos contextos reais para finalmente concluir o processo.

O diagrama da Figura 61, mostra o percurso de nossa proposta de Sequência Didática.

Figura 61: Diagrama metodológico do percurso da sequência didática.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

O Teste de Diagnóstico Inicial (APÊNDICE D) contém sete questões discursivas distribuídos em quatro conteúdos matemáticos que são pré-requisitos para a resolução das questões da sequência didática, que são: Potenciação e suas propriedades, função exponencial, sequência numérica e números figurados.

Já a Oficina de Conhecimentos Básicos (APÊNDICE E) é realizado através de uma aula expositiva sobre os conteúdos contidos no TDI, no qual é explorado algumas questões de fixação sobre conteúdos que servem como auxílio para o desenvolvimento da sequência didática.

Cada professor é livre para aplicar o TDI ou até mesmo a OCB da maneira que lhe seja mais conveniente, com a adequação para seus alunos. Feito apresentação sobre os instrumentos de nivelamento, apresentamos a seguir a sequência didática para o ensino de Progressão Geométrica.

Apresentamos no Quadro 34 uma proposta de organização das atividades realizadas desde o primeiro contato com os alunos até o último contato para aplicar o TDI, OCB e a SD, a saber: ordenação das aulas, título da atividade e previsão do número de aulas para o desenvolvimento dela.

Quadro 34: Organização das atividades realizadas.

<table>
<tr><th>Sessões</th><th colspan="2">Atividades</th><th>Tempo estimado</th></tr>
<tr><td>01</td><td colspan="2">Teste de Diagnóstico Inicial</td><td>45 minutos</td></tr>
<tr><td>02</td><td rowspan="4">Oficina de Conhecimentos Básicos</td><td>Números Figurados</td><td>15 minutos</td></tr>
<tr><td>03</td><td>Potenciação</td><td>30 minutos</td></tr>
<tr><td>04</td><td>Função Exponencial</td><td>30 minutos</td></tr>
<tr><td>05</td><td>Sequência Numérica</td><td>15 minutos</td></tr>
<tr><td>06</td><td colspan="2">UARC 1</td><td>45 minutos</td></tr>
<tr><td>07</td><td colspan="2">UARC 2</td><td>45 minutos</td></tr>
<tr><td>08</td><td colspan="2">UARC 3</td><td>90 minutos</td></tr>
<tr><td>09</td><td colspan="2">UARC 4</td><td>45 minutos</td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="2">UARC 5</td><td>45 minutos</td></tr>
<tr><td>11</td><td colspan="2">Intervenção Avaliativa Restritiva (I_{AR})</td><td>45 minutos</td></tr>
<tr><td>12</td><td colspan="2">Intervenção Avaliativa Aplicativa (I_{AA})</td><td>45 minutos</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

O Quadro 34 pode sofrer alterações a partir das dificuldades apresentadas pela turma e os impasses na realização das atividades, no qual cabe ao professor aplicador adequar seu planejamento conforme as necessidades apresentadas na prática docente. Sugerimos também, que o docente verifique as notações utilizadas nas atividades conforme apresentadas ao longo desse texto.

4.1 – A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O texto elaborado e, materializado na sequência didática, tem o objetivo de estimular os estudantes, por meio das interações verbais dialógicas entre os pares, na (re)construção dos principais conceitos e definições referentes aos conteúdos matemáticos relativos à progressão geométrica. Desta forma, as questões descritas em cada UARC foram elaboradas conforme as orientações apresentadas nos documentos oficiais, explorando o máximo de habilidade possível, desde o Teste de Diagnóstico Inicial até a Intervenção Avaliativa Aplicativa, sobre o conteúdo de progressão geométrica.

4.1.1 – UARC-1

Título: Reconhecendo uma sequência em progressão geométrica

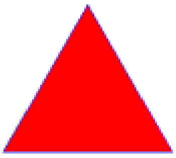
Objetivo: Verificar as sequências em progressão geométricas e a sua razão

Matérias: Cartolina, Lápis de cor, Régua, Tesoura, cola branca, fita durex e calculadora.

Procedimentos: Leia o texto abaixo com atenção e responda as perguntas seguintes com o auxílio de uma calculadora.

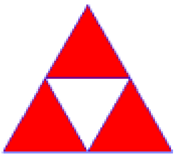
$[\boldsymbol{I_I}]$ O matemático polonês Waclav Sierpinski (1882-1969), construiu este triângulo em 1919, do seguinte modo:

Passo inicial (0): Construímos um triângulo equilátero de lado a:

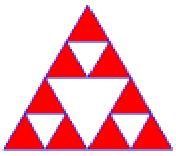


Passo 1: Junte os pontos médios dos lados e a figura a seguir resulta:

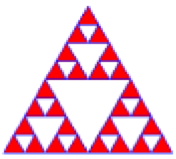
Três triângulos equiláteros sombreados e um buraco que é outro triângulo equilátero.



Passo 2: Repetimos o processo em cada um dos triângulos sombreados e obtenho o seguinte figura:



Passo 3: Repetimos o mesmo em cada um dos triângulos equiláteros sombreados obtendo a seguinte figura:



E assim sucessivamente.

Notamos que a cada passo o triângulo de Sierpinski é obtido com três
figuras da etapa anterior.

Vemos que a cada passo o triângulo de Sierpinski é composto de três cópias auto-semelhante da etapa anterior. Um objeto com essas características que é auto-similar em diferentes escalas é chamado de fractal, assim o triângulo de Sierpinski é um exemplo de um fractal.

Fonte: <http://alerce.pntic.mec.es/rgob0004/sierpinski/fichasierpinski.pdf>. Acesso em: 11/04/2022.

Um triângulo equilátero, é um triângulo que possui as medidas de seus lados todos iguais, desta forma, construa um triângulo $f(x_1)$ equilátero de medida de lado igual à 4 metros e pinte totalmente de verde.

Posteriormente, marque a metade de cada lado, isto é, o ponto médio dos lados de $f(x_1)$. A partir dos pontos médios do triângulo $f(x_1)$, construa um novo triângulo $f(x_2)$ equilátero e pinte $f(x_2)$ de branco.

Assim, como no processo inicial de $f(x_1)$, realize o mesmo processo para construir 3 triângulos $f(x_3)$ equiláteros, isto é, determine os pontos médios de $f(x_2)$, e a partir dele, construa novos triângulos equiláteros, pintando $f(x_3)$ de branco.

Repetindo o mesmo processo de construção, construa $f(x_4)$ e $f(x_5)$, gerando figuras semelhantes a apresentada abaixo.

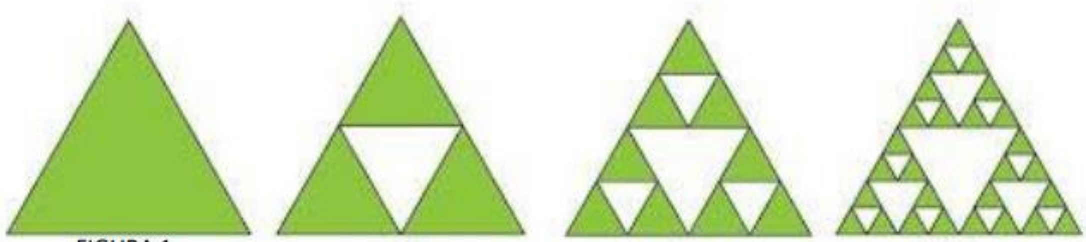


FIGURA 1 FIGURA 2 FIGURA 3 FIGURA 4

Onde $f(x_1)$ representa a figura 1, $f(x_2)$ representa a figura 2, $f(x_3)$ representa a figura 3, e assim sucessivamente. Desta forma, com o auxílio de uma calculadora, responda:

$[\boldsymbol{I_r - 01}]$ Quantos triângulos verdes possui a figura $f(x_1)$?

$[\boldsymbol{I_r - 02}]$ Quantos triângulos verdes possui a figura $f(x_2)$?

$[\boldsymbol{I_r - 03}]$ Quantos triângulos verdes possui a figura $f(x_3)$?

$[\boldsymbol{I_r - 04}]$ Quantos triângulos verdes possui a figura $f(x_4)$?

$[\boldsymbol{I_r - 05}]$ Quantos triângulos verdes possui a figura $f(x_5)$?

$[\boldsymbol{I_r - 06}]$ Se fosse construído uma figura $f(x_6)$, seguindo o mesmo padrão das anteriores, quantos triângulos verdes $f(x_6)$ iria possuir?

$[\boldsymbol{I_r - 07}]$ Explique como você chegou à resposta da questão $[I_r - 06]$?

$[\boldsymbol{I_e - 08}]$ Preencha o quadro abaixo com base nas suas respostas nas questões anteriores.

Figuras	Quantidade de triângulos verdes
$f(x_1)$	
$f(x_2)$	
$f(x_3)$	
$f(x_4)$	
$f(x_5)$	
$f(x_6)$	

$[\boldsymbol{I_r - 09}]$ Determine uma sequência numérica que representa a quantidade de triângulos verdes nas figuras $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, $f(x_4)$ e $f(x_5)$.

$[\boldsymbol{I_r - 10}]$ Existe alguma regularidade/padrão na sequência de números que descrevem a quantidade de triângulos em cada figura? Qual?

$[\boldsymbol{I_r - 11}]$ Sendo $f(x_1)$ a quantidade de triângulos verdes na figura 1 e $f(x_2)$ a quantidade de triângulos verdes na figura 2, qual o resultado da divisão $f(x_2): f(x_1)$?

$[\boldsymbol{I_r - 12}]$ Sendo $f(x_2)$ a quantidade de triângulos verdes na figura 2 e $f(x_3)$ a quantidade de triângulos verdes na figura 3, qual o resultado da divisão $f(x_3): f(x_2)$?

$[\boldsymbol{I_r - 13}]$ Sendo $f(x_3)$ a quantidade de triângulos verdes na figura 3 e $f(x_4)$ a quantidade de triângulos verdes na figura 4, qual o resultado da divisão $f(x_4): f(x_3)$?

$[\boldsymbol{I_r - 14}]$ Sendo $f(x_4)$ a quantidade de triângulos verdes na figura 4 e $f(x_5)$ a quantidade de triângulos verdes na figura 5, qual o resultado da divisão $f(x_5): f(x_4)$?

$[\boldsymbol{I_r - 15}]$ Sendo $f(x_5)$ a quantidade de triângulos verdes na figura 5 e $f(x_6)$ a quantidade de triângulos verdes na figura 6, qual o resultado da divisão $f(x_6): f(x_5)$?

$[\boldsymbol{I_e - 16}]$ Preencha o quadro abaixo com base nas suas respostas nas questões anteriores.

Divisão entre a quantidade de triângulos verdes	Resultado
$f(x_2): f(x_1)$	

$f(x_3):f(x_2)$	
$f(x_4):f(x_3)$	
$f(x_5):f(x_4)$	
$f(x_6):f(x_5)$	

$[\boldsymbol{I_e - 17}]$ Comparando a resposta da questão $[\boldsymbol{I_r - 10}]$ e as resposta obtidas no quadro da questão $[\boldsymbol{I_e - 16}]$, o que se pode perceber?

Intervenção Formalizante

$[\boldsymbol{I_f - 01}]$ A regularidade/padrão encontrado nos triângulos é chamado de razão (q) e pode ser obtido através da divisão de um valor numérico e o valor numérico anterior, isto é, a **razão de uma progressão geométrica** pode ser encontrada a partir da **divisão de um termo da sequência numérica pelo termo anterior.** Ao fazer isso, caso ela seja realmente uma progressão geométrica, essa divisão sempre será igual a q.

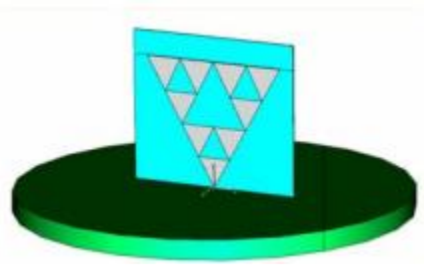
$[\boldsymbol{IA_r - 01}]$ Observe a sequência numérica abaixo.

(1, 3, 9, 27, 81, ...)

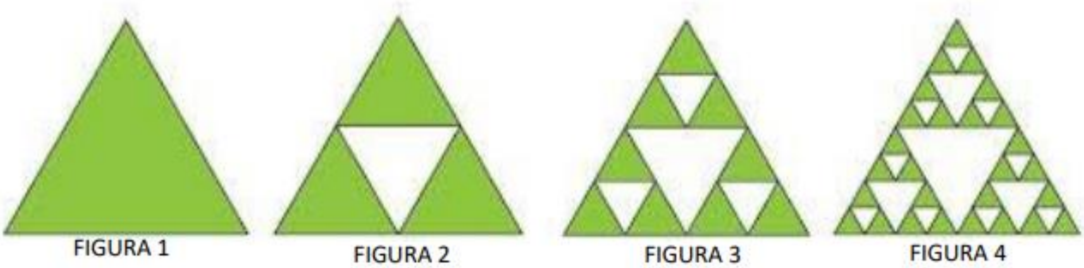
Qual a razão dessa sequência?

$[\boldsymbol{IA_a - 01}]$ O bloqueio de sinais de RF, em especial os de ligações por telefones móveis, é uma aplicação que ganhou destaque nos últimos anos no cenário brasileiro. Talvez o maior responsável por isto tenha sido o uso frequente de celulares em presídios por detentos, problema para o qual as autoridades de segurança pública ainda não conseguiram dar solução satisfatória definitiva.

Observe abaixo um dos simuladores utilizados para o bloqueio de sinais de celulares.



O simulador apresentado na figura acima representa uma forma geométrica, seguindo um padrão lógico baseado no fractal conhecido como Triângulo de Sierpinski, conforme a imagem abaixo.



Sabendo que a quantidade de triângulos pintados em cada figura (Figuras 1, 2, 3, e 4) forma uma sequência em progressão geométrica, qual a razão dessa sequência?

4.1.2 – UARC-2

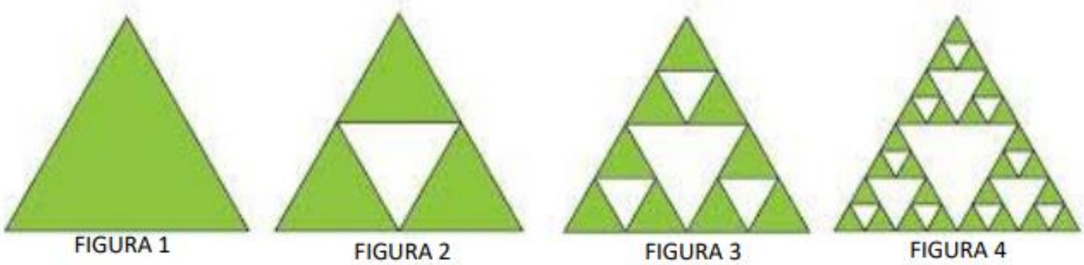
Título: Característica de uma PG

Objetivo: Verificar o crescimento e decrescimento de uma PG.

Matérias: Folha de papel A4, Lápis, Caneta e Borracha.

Procedimentos: Com o auxílio de uma calculadora, desenvolva os cálculos necessários a partir da regularidade observada em $[\boldsymbol{I_I}]$, e responda as perguntas seguintes.

$[\boldsymbol{I_I}]$ Observe o triângulo de Sierpinski abaixo e faça o que se pede.



Considerando que, $f(x_1)$ representa a figura 1, $f(x_2)$ representa a figura 2, $f(x_3)$ representa a figura 3, e assim sucessivamente.

Em uma folha de papel A4, construa o triangulo de Sierpinski representando as figuras pela notação $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), ..., f(x_n)$.

Preencha a tabela, sabendo que são dados o primeiro termo de uma Progressão Geométrica e suas devidas razões (q) e com o auxílio de uma calculadora, responda:

[$I_r - 01$] Considerando que primeiro termo $f(x_1) = 1$ triângulo verde e a razão q=3:

Termos da P.G.	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$
Quantidade de triângulos verdes					

Ao atribuir um valor positivo para a razão da PG, observa-se que a mesma será:

(   ) Sempre crescente , pois aumenta.

(   ) Constante, pois continua o mesmo valor.

(   ) Sempre Decrescente, pois diminui.

(   ) Alternante, pois os valores variam entre positivos e negativos.

[$I_r - 02$] Considerando que primeiro termo $f(x_5) = 81$ triângulo verde e a razão $q = \frac{1}{3}$:

Termos da P.G.	$f(x_5)$	$f(x_4)$	$f(x_3)$	$f(x_2)$	$f(x_1)$
Quantidade de triângulos verdes					

Ao atribuir um valor fracionário para a razão da PG, observa-se que a mesma será:

(   ) Sempre crescente , pois aumenta.

(   ) Constante, pois continua o mesmo valor.

(   ) Sempre Decrescente, pois diminui.

(   ) Alternante, pois os valores variam entre positivos e negativos.

[$I_r - 03$] Considerando que primeiro termo $f(x_1) = 1$ triângulo verde e a razão $q = 1$:

Termos da P.G.	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$
Quantidade de triângulos verdes					

Ao atribuir um valor unitário para a razão da PG, observa-se que a mesma será:

(   ) Sempre crescente , pois aumenta.

(   ) Constante, pois continua o mesmo valor.

(   ) Sempre Decrescente, pois diminui.

(   ) Alternante, pois os valores variam entre positivos e negativos.

[$I_r - 04$] Considerando que primeiro termo $f(x_1) = 1$ triângulo verde e a razão $q = -3$:

Termos da P.G.	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$
Quantidade de triângulos verdes					

Ao atribuir um valor negativo para a razão da PG, observa-se que a mesma será:

(   ) Sempre crescente , pois aumenta.

(   ) Constante, pois continua o mesmo valor.

(   ) Sempre Decrescente, pois diminui.

(   ) Alternante, pois os valores variam entre positivos e negativos.

[$I_r - 04$] Considerando os valores encontrados na tabela da questão **[$I_r - 01$]**, qual o valor numérico do primeiro termo $f(x_1)$?

[$I_r - 05$] Considerando os valores encontrados na tabela da questão **[$I_r - 01$],** qual o valor numérico do último termo $f(x_5)$?

[$I_r - 06$] Considerando os valores encontrados de $f(x_1)$ até $f(x_5)$ na tabela da questão **[$I_r - 07$],** a quantidade de termos encontrados é:

(   ) Finita, possui início e fim.

(   ) Infinita, não possui fim, isto é, continua indeterminadamente.

[$I_r - 08$] Se fosse possível continuar construindo triângulos sem que fosse determinado um último termo, podemos afirmar que a quantidade de triângulos seria:

(   ) Finita, possui início e fim.

(   ) Infinita, não possui fim, isto é, continua indeterminadamente.

[$I_e - 09$] Complete o quadro para cada PG apresentada.

	PG	**RAZÃO**	**Classifique se é crescente, decrescente, constante ou alternante**	**Classifique se é finita ou infinita**
PG1	(1, 3, 9, 27, 81)			
PG2	(1, 3, 9, 27, 81, 243, ...)			
PG3	(243, 81, 27, 9, 3, 1)			

PG4	(1, -3, 9, -27, 81, ...)			
PG5	(1, 1, 1, 1, 1)			

Intervenção Formalizante

$[I_f - 02]$ Classifica-se uma PG, pela sua Razão:

I. Se q > 1 para termos positivos ou 0 < q < 1 para termos negativos, a PG é Crescente.

II. Se q = 1, a PG é constante.

III. Se 0 < q < 1 para termos positivos ou q > 1 para termos negativos, a PG é decrescente.

IV. Se q<0, a PG é alternante.

Classifica-se uma PG, pelo comportamento de seus temos:

I. Finita, quando existir uma quantidade limitada de termos.

II. Infinita, quando existir uma quantidade ilimitada de termos.

$[IA_r - 02]$ Dada a sequência numérica em progressão geométrica abaixo, marque a alternativa correta.

(1, 3, 9, 27, 81, 243, ...)

a) A sequência é crescente e finita.

b) A sequência é decrescente e infinita.

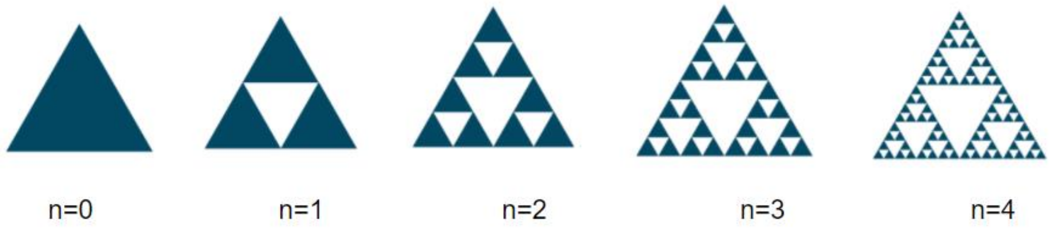
c) A sequência é crescente e infinita.

d) A sequência é decrescente e finita.

e) A sequência e constante e alternante.

$[IA_a - 02]$ O Triângulo de Sierpinski é um exemplo de fractal autossimilar. Ele recebe esse nome em homenagem ao matemático polonês Wacław Sierpiński, que foi o primeiro a descrever essa estrutura.

Como o Triângulo de Sierpinski é formado?



É possível construir o Triângulo de Sierpinski através de um processo iterativo que tem como ponto de partida um triângulo equilátero.

Na primeira iteração determina-se os pontos médios de cada lado dessa figura e une-se esses pontos. Depois, remove-se o triângulo do meio.

Na segunda iteração esses passos são repetidos para cada um dos triângulos restantes.

Esse processo pode ser repetido indefinidamente, dando origem ao famoso fractal conhecido como Triângulo de Sierpinski.

Conforme o texto acima, podemos afirmar que o triângulo de Sierpinski representa uma sequência:

a) Crescente e finita.

b) Decrescente e infinita.

c) Crescente e infinita.

d) Decrescente e finita.

e) Constante e alternante.

4.1.3 – UARC-3

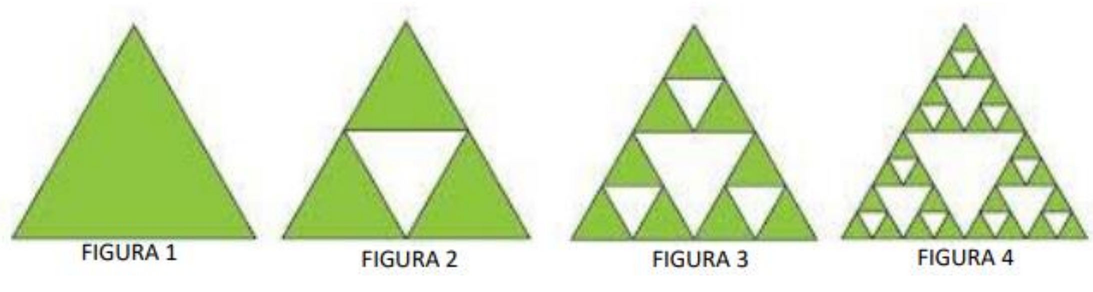
Título: Modelando a equação do termo geral de uma progressão geométrica.

Objetivo: Verificar regularidades para desenvolver a equação do termo geral de uma PG.

Matérias: Folha de papel A4, Lápis, Caneta, Borracha e régua.

Procedimentos: Com o auxílio de uma calculadora, desenvolva os cálculos necessários a partir da regularidade observada em $[\boldsymbol{I_I}]$, e responda as perguntas seguintes.

$[\boldsymbol{I_I}]$ Observe o triângulo de Sierpinski abaixo e faça o que se pede.



Considerando que, $f(x_1)$ representa a figura 1, $f(x_2)$ representa a figura 2, $f(x_3)$ representa a figura 3, e assim sucessivamente.

Em uma folha de papel A4, construa o triangulo de Sierpinski representando as figuras pela notação $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \ldots, f(x_n)$.

Construa em uma folha de papel A4 as figuras $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ e $f(x_4)$ e com o auxílio de uma calculadora responda as perguntas abaixo.

$\mathbf{[}\boldsymbol{I_r} - \mathbf{01]}$ Quantos triângulos tem na figura $f(x_1)$?

$\mathbf{[}\boldsymbol{I_r} - \mathbf{02]}$ Quantos triângulos tem na figura $f(x_2)$?

$\mathbf{[}\boldsymbol{I_r} - \mathbf{03]}$ Quantos triângulos tem na figura $f(x_3)$?

$\mathbf{[}\boldsymbol{I_r} - \mathbf{04]}$ Quantos triângulos tem na figura $f(x_4)$?

$\mathbf{[}\boldsymbol{I_r} - \mathbf{05]}$ Se construíssemos uma figura $f(x_5)$, quantos triângulos iria possuir essa figura?

$\mathbf{[}\boldsymbol{I_e} - \mathbf{06]}$ Com base nas suas respostas nas questões anteriores, complete o quadro abaixo.

Figuras	**Quantidade de triângulos**
$f(x_1)$	
$f(x_2)$	
$f(x_3)$	
$f(x_4)$	
$f(x_5)$	

$\mathbf{[}\boldsymbol{I_r} - \mathbf{07]}$ Calcule os valores das potências abaixo.

$\mathbf{[}\boldsymbol{I_r} - \mathbf{07A]}\ \mathbf{3^0} =$

$\mathbf{[}\boldsymbol{I_r} - \mathbf{07B]}\ \mathbf{3^1} =$

$\mathbf{[}\boldsymbol{I_r} - \mathbf{07C]}\ \mathbf{3^2} =$

$\mathbf{[}\boldsymbol{I_r} - \mathbf{07D]}\ \mathbf{3^3} =$

$\mathbf{[}\boldsymbol{I_r} - \mathbf{07E]}\ \mathbf{3^4} =$

$\mathbf{[}\boldsymbol{I_r} - \mathbf{08]}$ O valor da potência calculado em $\mathbf{[}\boldsymbol{I_r} - \mathbf{07A]}$ é igual ao valor da quantidade de triângulos $f(x_1)$ encontrado em $\mathbf{[}\boldsymbol{I_e} - \mathbf{06]}$**?**

$\mathbf{[}\boldsymbol{I_r} - \mathbf{09]}$ O valor da potência calculado em $\mathbf{[}\boldsymbol{I_r} - \mathbf{07}\boldsymbol{B}\mathbf{]}$ é igual ao valor da quantidade de triângulos $f(x_2)$ encontrado em $\mathbf{[}\boldsymbol{I_e} - \mathbf{06]}$**?**

$\mathbf{[}\boldsymbol{I_r} - \mathbf{10]}$ O valor da potência calculado em $\mathbf{[}\boldsymbol{I_r} - \mathbf{07}\boldsymbol{C}\mathbf{]}$ é igual ao valor da quantidade de triângulos $f(x_3)$ encontrado em $\mathbf{[}\boldsymbol{I_e} - \mathbf{06]}$**?**

$\mathbf{[}\boldsymbol{I_r} - \mathbf{11]}$ O valor da potência calculado em $\mathbf{[}\boldsymbol{I_r} - \mathbf{07}\boldsymbol{D}\mathbf{]}$ é igual ao valor da quantidade de triângulos $f(x_4)$ encontrado em $\mathbf{[}\boldsymbol{I_e} - \mathbf{06]}$**?**

$\mathbf{[}\boldsymbol{I_r} - \mathbf{12]}$ O valor da potência calculado em $\mathbf{[}\boldsymbol{I_r} - \mathbf{07}\boldsymbol{E}\mathbf{]}$ é igual ao valor da quantidade de triângulos $f(x_5)$ encontrado em $\mathbf{[}\boldsymbol{I_e} - \mathbf{06]}$**?**

$[I_e - 13]$ Sabendo que, na forma de potência, $f(x_1) = 3^0$, $f(x_2) = 3^1$, $f(x_3) = 3^3$, e assim sucessivamente, complete a tabela a seguir.

Figuras	**Potências**	**Quantidade de triângulos**
$f(x_1)$	3^0	
$f(x_2)$	3^1	
$f(x_3)$	3^3	
$f(x_4)$		
$f(x_5)$		

$[I_r - 13]$ Qual seria a quantidade de triângulos se construíssemos uma figura $f(x_6)$?

$[I_r - 14]$ Explique como você chegou ao resultado da questão **$[I_r - 13]$?**

$[I_r - 15]$ Qual o valor da potência 3^5?

$[I_r - 16]$ O valor de $f(x_6)$ encontrado na questão **$[I_r - 13]$** é igual ao valor encontrado na questão **$[I_r - 15]$?**

(   ) Sim.

(   ) Não.

$[I_r - 17]$ Qual o valor numérico de 3^{n-1}, quando o n=1?

$[I_r - 18]$ O resultado encontrado em **$[I_r - 17]$** é o mesmo valor da quantidade de triângulos em $f(x_1)$?

(   ) Sim.

(   ) Não.

$[I_r - 19]$ Qual o valor numérico de 3^{n-1}, quando o n=2?

$[I_r - 20]$ O resultado encontrado em **$[I_r - 19]$** é o mesmo valor da quantidade de triângulos em $f(x_2)$?

(   ) Sim.

(   ) Não.

$[I_r - 21]$ Qual o valor numérico de 3^{n-1}, quando o n=3?

$[I_r - 22]$ O resultado encontrado em **$[I_r - 21]$** é o mesmo valor da quantidade de triângulos em $f(x_3)$?

(   ) Sim.

(   ) Não.

$[I_r - 22]$ Qual o valor numérico de 3^{n-1}, quando o n=4?

$[I_r - 23]$ O resultado encontrado em **$[I_r - 22]$** é o mesmo valor da quantidade de triângulos em $f(x_4)$?

(   ) Sim.

(   ) Não.

$[\boldsymbol{I_e - 24}]$ Com base nas respostas das questões anteriores, complete o quadro a seguir.

Triângulo	**Ordem n de construção dos triângulos**	$\boldsymbol{3^{n-1}}$	**Quantidades de triângulos**
$f(x_1)$	n=1	3^{1-1}	1
$f(x_2)$	n=2	3^{2-1}	3
$f(x_3)$	n=3	3^{3-1}	9
$f(x_4)$			
$f(x_5)$			
$f(x_6)$			

$[\boldsymbol{I_r - 25}]$ Utilizando os valores obtidos no quadro $[\boldsymbol{I_e - 24}]$**,** responda:

$[\boldsymbol{I_r - 25A}]$ Qual o valor de $f(x_1).3^{n-1}, quando\ n = 1?$

$[\boldsymbol{I_r - 25B}]$ Qual o valor de $f(x_1).3^{n-1}, quando\ n = 2?$

$[\boldsymbol{I_r - 25C}]$ Qual o valor de $f(x_1).3^{n-1}, quando\ n = 3?$

$[\boldsymbol{I_r - 25D}]$ Qual o valor de $f(x_1).3^{n-1}, quando\ n = 4?$

$[\boldsymbol{I_e - 26}]$ Com base nas respostas na questão $[\boldsymbol{I_r - 25}]$ e no quadro da questão $[\boldsymbol{I_e - 24}]$ complete o quadro a seguir.

Triângulo	**Ordem n de construção dos triângulos**	$\boldsymbol{3^{n-1}}$	$\boldsymbol{f(x_1).3^{n-1}}$	**Quantidades de triângulos**
$f(x_1)$	n=1	3^{1-1}	1.3^{1-1}	1
$f(x_2)$	n=2	3^{2-1}	1.3^{2-1}	3
$f(x_3)$	n=3	3^{3-1}	1.3^{3-1}	9
$f(x_4)$				
$f(x_5)$				
$f(x_6)$				
$f(x_n)$	N			

$[\boldsymbol{I_r - 27}]$ Observando os resultados obtidos no quadro da questão $[\boldsymbol{I_e - 26}]$ e sabendo que a razão da quantidade de triângulos verdes nas figuras é q=3, é correto afirmar que uma expressão para determinar a quantidade de triângulos verdes em uma figura $f(x_n)$ qualquer é dado por $f(x_n) = f(x_1).q^{n-1}$?

(   ) Sim.

(   ) Não.

Intervenção Formalizante

$[I_f - \mathbf{03}]$ A equação geral para determinar um termo qualquer de uma PG é dada por:

$$f(x_n) = f(x_1).\, q^{n-1}$$

Onde,

$f(x_n)$ é o termo a ser encontrado.

$f(x_1)$ é o primeiro termo da PG.

q é a razão da PG, e

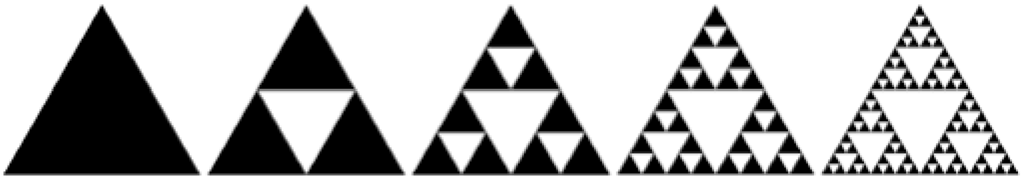
$n \geq 1$ é a ordem do termo que deve ser encontrado.

$[IA_r - \mathbf{03}]$ Observe a sequência numérica a seguir.

$$(1, 3, 9, 27, ..., f(x))$$

Sabendo que $f(x)$ representa o 10º termo dessa sequência, qual o valor numérico de $f(x)$?

$[IA_a - \mathbf{03}]$ A sequência de figuras abaixo representa os cinco primeiros passos da construção do conjunto de Sierpinski. Os vértices dos triângulos brancos construídos são os pontos médios dos lados dos triângulos escuros da figura anterior. Denominamos $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, $f(x_4)$ e $f(x_5)$, respectivamente, as áreas das regiões escuras da primeira, segunda, terceira, quarta e quinta figuras da sequência.



Desta forma, determine a figura da sequência que representa a área de região escura $f(x_8)$.

4.1.4 – UARC-4

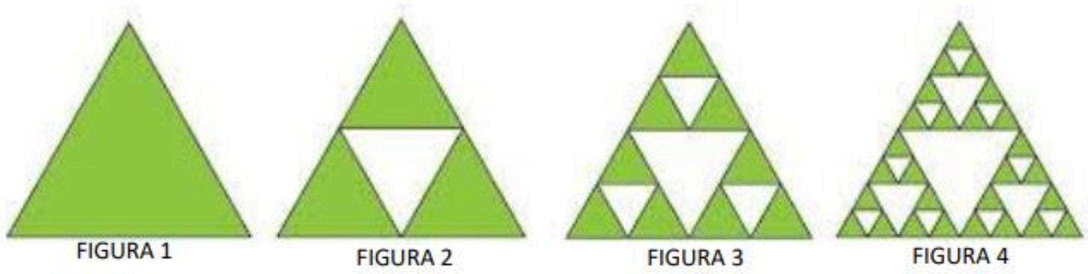
Título: Modelando a equação da soma dos termos de uma progressão geométrica finita.

Objetivo: Verificar regularidades para desenvolver a equação soma dos termos de uma progressão geométrica finita.

Matérias: Folha de papel, lápis, borracha, caneta e calculadora.

Procedimentos: Com o auxílio de uma calculadora, desenvolva os cálculos necessários a partir da regularidade observada em $[\boldsymbol{I_I}]$, e responda as perguntas seguintes.

$[\boldsymbol{I_I}]$ Observe a quantidade de triângulos verdes em cada figura.



Considerando que, $f(x_1) = 1$ representa a figura 1, $f(x_2) = 3$ representa a figura 2, $f(x_3) = 9$ representa a figura 3, e assim sucessivamente, e que a sequências das figuras formam uma progressão geométrica de razão q=3, e com o auxílio de uma calculadora, responda as questões abaixo.

$[\boldsymbol{I_r - 01}]$ Qual a soma $S_2 = f(x_1) + f(x_2)$?

$[\boldsymbol{I_r - 02}]$ Qual a soma $S_3 = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$?

$[\boldsymbol{I_r - 03}]$ Qual a soma $S_4 = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)$?

$[\boldsymbol{I_e - 04}]$ Com base nas respostas das questões anteriores, preencha o quadro a seguir.

Soma da quantidade de triângulos verdes	**Resultado da soma**
$S_2 = f(x_1) + f(x_2)$	
$S_3 = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$	
$S_4 = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)$	

$[\boldsymbol{I_r - 05}]$ Sabendo que a razão $q = 3$, qual o valor de q^2?

$[\boldsymbol{I_r - 06}]$ Sabendo que a razão $q = 3$, qual o valor de $q - 1$?

$[\boldsymbol{I_r - 07}]$ Sabendo que a razão $q = 3$, qual o valor de $q^2 - 1$?

$[\boldsymbol{I_r - 08}]$ Sabendo que a razão $q = 3$ e $f(x_1) = 1$, qual o valor de $f(x_1).(q^2 - 1)$?

$[\boldsymbol{I_r - 09}]$ Sabendo que a razão $q = 3$ e $f(x_1) = 1$, qual o valor de $\frac{f(x_1).(q^2-1)}{q-1}$?

$[\boldsymbol{I_e - 10}]$ Com base nas respostas das questões anteriores, preencha o quadro a seguir.

Sendo $\boldsymbol{q = 3}$ e $\boldsymbol{f(x_1) = 1}$	**Resultado**
q^2	
$q - 1$	
$q^2 - 1$	
$f(x_1).(q^2 - 1)$	

$\frac{f(x_1).(q^2-1)}{q-1}$	

$[\boldsymbol{I_r - 11}]$ Conforme o quadro $[\boldsymbol{I_e - 10}]$ e $[\boldsymbol{I_e - 04}]$**,** resultado de $\frac{f(x_1).(q^2-1)}{q-1}$ é o mesmo valor de $S_2 = f(x_1) + f(x_2)$?

( ) Sim.

( ) Não.

$[\boldsymbol{I_r - 12}]$ Sabendo que a razão $q = 3$, qual o valor de q^3?

$[\boldsymbol{I_r - 13}]$ Sabendo que a razão $q = 3$, qual o valor de $q - 1$?

$[\boldsymbol{I_r - 14}]$ Sabendo que a razão $q = 3$, qual o valor de $q^3 - 1$?

$[\boldsymbol{I_r - 15}]$ Sabendo que a razão $q = 3$ e $f(x_1) = 1$, qual o valor de $f(x_1).(q^3 - 1)$?

$[\boldsymbol{I_r - 16}]$ Sabendo que a razão $q = 3$ e $f(x_1) = 1$, qual o valor de $\frac{f(x_1).(q^3-1)}{q-1}$?

$[\boldsymbol{I_e - 17}]$ Com base nas respostas das questões anteriores, preencha o quadro a seguir.

Sendo $\boldsymbol{q = 3}$ e $\boldsymbol{f(x_1) = 1}$	**Resultado**
q^3	
$q-1$	
q^3-1	
$f(x_1).(q^3-1)$	
$\frac{f(x_1).(q^3-1)}{q-1}$	

$[\boldsymbol{I_r - 18}]$ Conforme o quadro $[\boldsymbol{I_e - 17}]$ e $[\boldsymbol{I_e - 04}]$**,** resultado de $\frac{f(x_1).(\boldsymbol{q^3-1})}{\boldsymbol{q-1}}$ é o mesmo valor de $S_3 = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$?

( ) Sim.

( ) Não.

$[\boldsymbol{I_r - 19}]$ Sabendo que a razão $q = 3$, qual o valor de q^4?

$[\boldsymbol{I_r - 20}]$ Sabendo que a razão $q = 3$, qual o valor de $q - 1$?

$[\boldsymbol{I_r - 21}]$ Sabendo que a razão $q = 3$, qual o valor de $q^4 - 1$?

$[\boldsymbol{I_r - 22}]$ Sabendo que a razão $q = 3$ e $f(x_1) = 1$, qual o valor de $f(x_1).(q^4 - 1)$?

$[\boldsymbol{I_r - 23}]$ Sabendo que a razão $q = 3$ e $f(x_1) = 1$, qual o valor de $\frac{f(x_1).(q^4-1)}{q-1}$?

$[\boldsymbol{I_e - 24}]$ Com base nas respostas das questões anteriores, preencha o quadro a seguir.

Sendo $q = 3$ e $f(x_1) = 1$	Resultado
q^4	
$q - 1$	
$q^4 - 1$	
$f(x_1).(q^4 - 1)$	
$\frac{f(x_1).(q^4 - 1)}{q - 1}$	

$[I_r - 25]$ Conforme o quadro **$[I_e - 24]$** e **$[I_e - 04]$,** resultado de $\frac{f(x_1).(q^4-1)}{q-1}$ é o mesmo valor de $S_4 = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)$?

( ) Sim.

( ) Não.

$[I_r - 26]$ É correto afirma que se a quantidade de triângulos de uma figura $f(x_5) = 81$, então $S_5 = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) = \frac{f(x_1).(q^5-1)}{q-1}$?

( ) Sim.

( ) Não.

$[I_r - 27]$ É correto afirma que a soma dos termos de uma sequência finita, então $S_n = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + \cdots + f(x_n)$, que representa a soma da quantidade de triângulos verdes, será igual à $\frac{f(x_1).(q^n-1)}{q-1}$?

( ) Sim.

( ) Não.

intervenção Formalizante

$[I_f - 04]$ A soma dos termos de uma progressão geométrica finita é dada pela expressão:

$$S_n = \frac{f(x_1).(q^n - 1)}{q - 1}$$

Onde,

S_n é a soma dos termos;

$f(x_1)$ é o primeiro termo da PG.

$q \neq 1$ é a razão da PG, e

$n \geq 1$ é a quantidade de termos.

$[IA_r - 04]$ Dada a sequência numérica abaixo, determine a soma de todos os termos dessa sequência.

(1, 3, 9, 27, 81, 243)

$[IA_a - 04]$ O professor de Matemática solicitou que alguns alunos da turma do 1º ano do Ensino Médio desenhassem triângulos equiláteros de forma que a quantidade de triângulos desenhados pelos alunos formasse uma sequência em progressão geométrica.

A tabela abaixo mostra a quantidade de triângulos desenhados por estes alunos.

Alunos	**Quantidade de triângulos**
Aluno A	1
Aluno B	3
Aluno C	9
Aluno D	27
Aluno E	81

Qual a soma da quantidade de triângulos desenhados por todos os alunos?

4.1.5 – UARC-5

Título: Modelando a equação da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita

Objetivo: Verificar regularidades para desenvolver a equação soma dos termos de uma progressão geométrica infinita.

Mateias: Folha de papel, lápis, borracha, caneta e calculadora.

Procedimentos: Com o auxílio de uma calculadora, desenvolva os cálculos necessários a partir do texto motivador apresentado em $[I_I]$, e responda as perguntas seguintes.

$[I_I]$ O Infinito

Infinito... Em que é que pensamos quando ouvimos esta palavra? Em números enormes, incalculáveis, números que nunca mais acabaríamos de contar...? Um céu imenso, sem nunca mais acabar...? Cada um de nós pensará certamente uma coisa diferente, precisamente porque o conceito do infinito não tem por base nenhuma experiência sensível.

Nenhum assunto provocou tanta polémica e tanta discussão entre matemáticos, filósofos e teólogos como a ideia de infinito. Grande parte da matemática fundamenta-se no conceito de infinito... muito embora nada seja mais difícil de definir e a controvérsia a seu respeito pareça interminável.

O conceito de infinito surge assim como um dos mais importantes de toda a matemática e também como um daqueles cujo significado tem sido mais discutido.

O infinito é uma espécie de enigma matemático, de truque de magia, porque o seu conteúdo é inesgotável. Se retirarmos um elemento a um conjunto infinito restarão, não um a menos, mas exactamente o mesmo número de elementos (e o processo pode ser repetido com qualquer número de elementos, tantas vezes quantas se queira). Foram paradoxos como este que forçaram os nossos antepassados a terem cuidado com argumentos envolvendo apelos ao infinito.

Mas de que é que falamos, quando falamos de infinito?

"O conceito de infinito surge, antes de mais, na filosofia com o significado de que não existem limites. É a especulação teológica que dá a este conceito um conteúdo positivo de perfeição (ou grandeza) que é impossível superar". (Micheli, in Romano, 1997, p. 133)

Fonte:https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/cantor/oquee.htm. Acesso em: 13/04/2022.

Considerando que a quantidade de triângulos verdes forma uma sequência numérica decrescentes, isto é, o primeiro termo $f(x_1) = 81$, o segundo termo $f(x_2) = 27$, o terceiro termo $f(x_3) = 9$, e assim sucessivamente, quando a razão $q = \frac{1}{3}$, e com o auxílio de uma calculadora, responda as questões a seguir.

$[\boldsymbol{I_r - 01}]$ Efetue as divisões abaixo.

$[\boldsymbol{I_r - 01A}]$ $\frac{1}{3} =$

$[\boldsymbol{I_r - 01B}]$ $\frac{1}{9} =$

$[\boldsymbol{I_r - 01C}]$ $\frac{1}{27} =$

$[\boldsymbol{I_r - 01D}]$ $\frac{1}{81} =$

$[\boldsymbol{I_r - 02}]$ Com base nas suas respostas na questão $[\boldsymbol{I_r - 01}]$, conforme aumenta os denominadores, o que ocorre com os resultados da divisão?

(   ) Aumenta, de forma que fique mais distante de zero.

(   ) Diminui, de forma que se aproxima de zero.

$[\boldsymbol{I_r - 03}]$ Considerando a razão $q = \frac{1}{3}$ e com o uso da calculadora, calcule:

$[\boldsymbol{I_r - 03A}]$ $q^2 =$

$[\boldsymbol{I_r - 03B}]$ $q^3 =$

$[\boldsymbol{I_r - 03C}]$ $q^3 =$

$[\boldsymbol{I_r - 03D}]$ $q^4 =$

$[\boldsymbol{I_r - 04}]$ Os resultados da questão $[\boldsymbol{I_r - 01}]$ foram os mesmos da questão $[\boldsymbol{I_r - 03}]$?

(   ) Sim.

(   ) Não.

$[\boldsymbol{I_e - 05}]$ Com base nas respostas anteriores, preencha o quadro a seguir.

Razão	**Resultado**
q^1	
q^2	
q^3	
q^4	

$[\boldsymbol{I_r - 06}]$ Se continuarmos aumentando os expoentes da potência de base q, o que acontece com o resultado?

(   ) Aumenta, de forma que fique mais distante de zero.

(   ) Diminui, de forma que fique muito próximo de zero.

$[\boldsymbol{I_r - 07}]$ Uma vez que o valor q^n se aproxima muito de zero quando o valor de n aumenta infinitamente, então consideramos que $q^n = 0$, assim, qual o valor de $q^n - 1$?

$[\boldsymbol{I_r - 08}]$ Qual fração representa o valor de $1 - q$, quando $q = \frac{1}{3}$?

$[\boldsymbol{I_r - 09}]$ Utilizando o resultado da questão $[\boldsymbol{I_r - 07}]$ e considerado a quantidade de triângulos $f(x_1) = 81$, qual o valor de $f(x_1).(1 - q^n)$?

$[\boldsymbol{I_r - 10}]$ Utilizando o resultado da questão $[\boldsymbol{I_r - 09}]$ e da questão $[\boldsymbol{I_r - 08}]$**,** qual o valor de $\frac{f(x_1).(1-q^n)}{1-q}$?

$[\boldsymbol{I_e - 11}]$ Complete o quadro a seguir com base nas respostas das questões anteriores, considerando $q^n = 0$.

Termos da PG	**Quantidade de triângulos verdes**	**n termos**	$\boldsymbol{1 - q^n}$	$\boldsymbol{\frac{f(x_1).(1 - q^n)}{1 - q}}$
$f(x_1)$				
$f(x_2)$				

$f(x_3)$				
$f(x_4)$				

$[\boldsymbol{I_r - 12}]$ Considerando as respostas obtidas na questão $[\boldsymbol{I_e - 11}]$**,** os valores de $\frac{f(x_1).(1-q^n)}{1-q}$ foram todos iguais?

( ) Sim.

( ) Não.

$[\boldsymbol{I_r - 13}]$ Sendo a razão $q = \frac{1}{3}$ e $f(x_1) = 81$, com o auxílio de uma calculadora determine o valor de $\frac{f(x_1)}{\boldsymbol{1-q}}$**?**

$[\boldsymbol{I_r - 14}]$ O resultado da questão $[\boldsymbol{I_r - 13}]$ foi igual ao resultado de $\frac{f(x_1).(1-q^n)}{1-q}$?

( ) Sim.

( ) Não.

Intervenção Formalizante

$[\boldsymbol{I_f - 05}]$ Desta forma, quando uma PG possui infinitos termos, dizemos que a soma $S_n = \frac{f(x_1)}{1-q}$, quando $0 < q < 1$.

Onde,

$f(x_1)$ é o primeiro termo de uma PG decrescente, e q é a razão da PG.

$[\boldsymbol{IA_r - 05}]$ Dada a sequência numérica infinita abaixo, determine a soma dos termos dessa sequência.

(243, 81, 27, ...)

$[\boldsymbol{IA_a - 05}]$ Considere o padrão de construção representado pelos triângulos equiláteros a seguir.

O perímetro do triângulo da etapa 1 é 3 e sua altura é h; a altura do triângulo da etapa 2 é metade da altura do triângulo da etapa 1; a altura do triângulo da etapa 3 é metade da altura do triângulo da etapa 2 e, assim, sucessivamente.

Assim, qual a soma dos perímetros da sequência infinita de triângulos?

5 – PROCEDIMENTOS E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Como o período em que foi realizada esta pesquisa ocorreu em um momento crítico no âmbito da saúde mundial, isto é, em plena pandemia da Covid - 19, no qual as aulas presenciais foram suspensas no território nacional brasileiro entre os anos de 2020 e 2022, assim, os conteúdos escolares, principalmente na matemática, não foram apresentados adequadamente para os alunos, de forma a conturbar e ficar desconexo os assuntos necessários para a aplicação da sequência didática.

Desta forma, com a crise mundial na saúde, afetou também a realização desta pesquisa, em que não foi possível aplicar a sequência didática proposta com os alunos do 1º ano do ensino médio, assim, como consequência não realizando a Análise do Discurso e a Análise Microgenética, uma vez que não houve ferramentas necessárias para a validação da SD, isto é, conteúdos matemáticos atrasados ou não visto no ano letivo correto, além dos conhecimentos prévios adequados para a realização e desenvolvimentos adequados, tanto na aplicação da SD quanto na oficina de conhecimentos básicos.

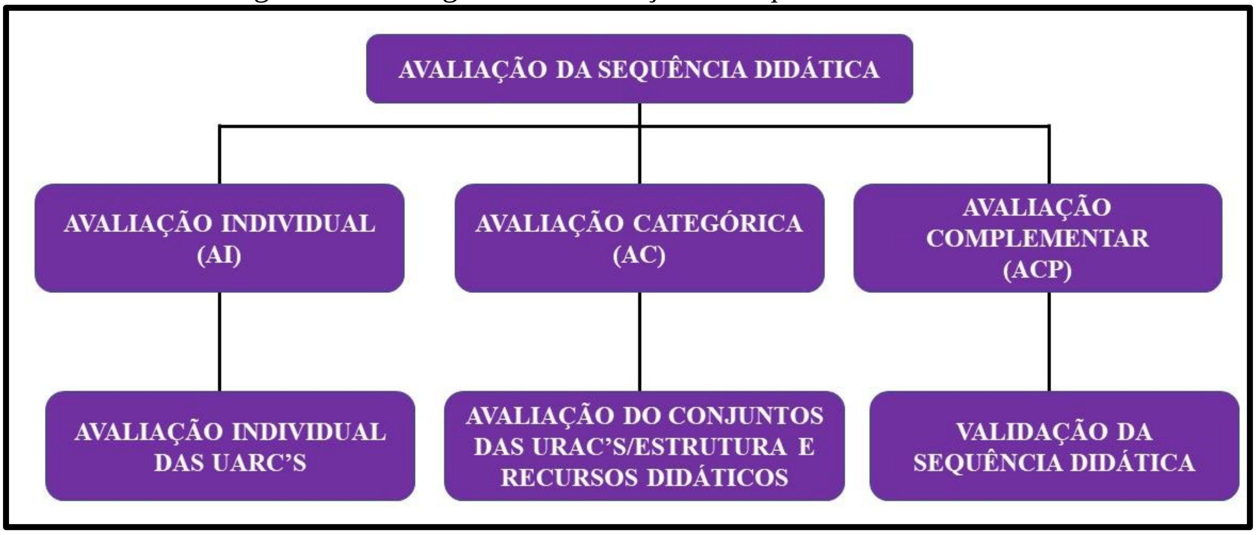
Assim, para concluirmos esta pesquisa e validar a sequência didática, realizamos uma atividade com professores de matemática para que estes avaliassem a SD e dessem o parecer para adequações e melhorias em sua estruturação que contribuíssem para um melhor resultado no processo de ensino e aprendizagem de Progressão Geométrica.

5.1 – PROCEDIMENTOS

Para a validação da sequência didática sobre o ensino de progressão geométrica, será realizada uma avaliação da SD por professores de matemática do Ensino Médio, no qual terão acesso a todas as UARC contidas no produto educacional.

A avaliação será realizada através de um questionário com perguntas objetivas relacionadas as atividades contidas na sequência didática, em que seguirá os seguintes métodos de avaliações: Avaliação Individual (AI) das UARC’s, Avaliação Categórica (AC) das UARC’s e Avaliação Complementar (ACP) da Sequência Didática.

Figura 62: Fluxograma da avaliação da sequência didática.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Assim, cada pergunta terá um grau de avaliação que varia de 0% a 100%, no qual segue como critério da seguinte maneira, (a) De nenhuma forma (0%), (b) Pontualmente (25%), (c) Em parte (50%), (d) Na maioria das vezes (75%) e (e) Integralmente (100%).

5.1.1 – Avaliação Individual das UARC's

Na avaliação Individual de cada UARC, o professor avaliador da sequência didática irá analisar de forma criteriosa cada uma das cinco UARC, e responderá quatro perguntas ao final da análise de cada uma das UARC's, em que as perguntas são:

$[\mathbf{AI_1}]$ A estrutura das Intervenções [Inicial (Ii) - Reflexiva (Ir) - Exploratória (Ie)] conduzem a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático?

(a) De nenhuma forma (0%)

(b) Pontualmente (25%)

(c) Em parte (50%)

(d) Na maioria das vezes (75%)

(e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

$[\mathbf{AI_2}]$ A formalização (F) está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?

(a) De nenhuma forma (0%)

(b) Pontualmente (25%)

(c) Em parte (50%)

(d) Na maioria das vezes (75%)

(e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa formalização?

$[\mathbf{AI_3}]$ A Avaliação Restritiva (Ar) está compatível com o desenvolvido nas Intervenções (Ii – Ir – Ie) e com a Formalização (F) do objeto matemático?

(a) De nenhuma forma (0%)

(b) Pontualmente (25%)

(c) Em parte (50%)

(d) Na maioria das vezes (75%)

(e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa avaliação?

$[\mathbf{AI_4}]$ A quantidade de atividades é exequível em relação ao tempo previsto?

(a) De nenhuma forma (0%)

(b) Pontualmente (25%)

(c) Em parte (50%)

(d) Na maioria das vezes (75%)

(e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar a exequibilidade?

As perguntas $[\mathbf{AI_1}], [\mathbf{AI_2}], [\mathbf{AI_3}]$ e $[\mathbf{AI_4}]$ abordam a relação entre as atividades realizadas em cada UARC com o objeto matemático a ser ensinado, em que será avaliado a sua estrutura conforme o modelo de Cabral (2017), formalização dos modelos matemáticos semelhantes aos do objeto matemático apresentados nos livros didáticos e o tempo proposto para a aplicação de cada uma das UARC's.

5.1.2 – Avaliação Categórica das UARC's

Na Avaliação Categórica das UARC's, o professor avaliador da sequência didática irá analisar de forma criteriosa a estrutura, os recursos didáticos, a linguagem, e o tempo utilizado na sequência didática de forma geral, em que responderá as cinco perguntas seguintes:

$[\mathbf{AC_1}]$ As atividades utilizadas na Sequência Didática são atrativas e apresentam uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos?

(a) De nenhuma forma (0%)

(b) Pontualmente (25%)

(c) Em parte (50%)

(d) Na maioria das vezes (75%)

(e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar esses aspectos?

$[\mathbf{AC_2}]$ Os recursos de apoio são atrativos e de fácil operacionalização pelo aluno e contribuem para a formalização intuitiva/empírica do conceito matemático?

(a) De nenhuma forma (0%)

(b) Pontualmente (25%)

(c) Em parte (50%)

(d) Na maioria das vezes (75%)

(e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para compatibiliza-la?

$[\mathbf{AC_3}]$ O número total de atividades da Sequência Didática é adequado para o ensino do objeto matemático?

(a) De nenhuma forma (0%)

(b) Pontualmente (25%)

(c) Em parte (50%)

(d) Na maioria das vezes (75%)

(e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhor adequação?

$[\mathbf{AC_4}]$ Na sua percepção, o conjunto de atividades que compõem a Sequência Didática está ordenado de modo a promover o ensino do objeto matemático?

(a) De nenhuma forma (0%)

(b) Pontualmente (25%)

(c) Em parte (50%)

(d) Na maioria das vezes (75%)

(e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhor ordená-la?

$[\mathbf{AC_5}]$ O tempo total previsto é compatível para aplicação da Sequência Didática?

(a) De nenhuma forma (0%)

(b) Pontualmente (25%)

(c) Em parte (50%)

(d) Na maioria das vezes (75%)

(e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para adequá-la ao tempo?

As perguntas $[\mathbf{AC_1}]$, $[\mathbf{AC_2}]$, $[\mathbf{AC_3}]$, $[\mathbf{AC_4}]$ e $[\mathbf{AC_5}]$ relacionam os métodos realizados para a transmissão do conhecimento matemático através de uma linguagem adequada ao nível cognitivo do aluno, se as atividades realizadas em cada UARC são adequadas para o ensino do objeto matemático e é atrativo para o aluno, no qual promove a relação entre professor–aluno–saber, e se o tempo proposto é adequado para o ensino do objeto matemático.

5.1.3 - Avaliação Complementar da Sequência Didática

Na Avaliação Complementar da Sequência Didática, o professor avaliador irá concluir sua avaliação de forma a contribuir efetivamente com a validação da sequência didática e se o conjunto de atividades propostas são eficazes para a resolução da avaliação aplicativa, para isto, será proposto as seguintes perguntas:

$[\mathbf{ACP_1}]$ A Avaliação Aplicativa (Aa) está compatível com a Sequência Didática proposta?

(a) De nenhuma forma (0%)

(b) Pontualmente (25%)

(c) Em parte (50%)

(d) Na maioria das vezes (75%)

(e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para compatibilizá-la?

$[\mathbf{ACP_2}]$ A Sequência Didática proposta promove a interação Professor-Aluno-Saber?

(a) De nenhuma forma (0%)

(b) Pontualmente (25%)

(c) Em parte (50%)

(d) Na maioria das vezes (75%)

(e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa interação?

$[\mathbf{ACP_3}]$ Na sua percepção, que contribuições essa Sequência Didática apresenta:

a) Em relação ao Professor (formação matemática e pedagógica)?

b) Em relação ao Aluno (participação ativa e apreensão do objeto matemático)?

c) Em relação ao Saber (constituição gradativa do conceito matemático e sua formalização)?

$[\mathbf{ACP_4}]$ Que potencialidades você identifica nessa Sequência Didática para o ensino do objeto matemático?

As perguntas $[\mathbf{ACP_1}], [\mathbf{ACP_2}], [\mathbf{ACP_3}]$ e $[\mathbf{ACP_4}]$ foram elaboradas para a validação da sequência didática para o ensino de progressão geométrica através do modelo proposto por Cabral (2017), de forma a contribuir com o ensino de matemática e as pesquisas no meio acadêmico, desta forma as respostas apresentadas pelos professores avaliadores serão analisadas para uma melhor adaptação das atividades propostas na SD para o público-alvo a ser beneficiado com as atividades.

5.2 – ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste tópico será analisado, de forma criteriosa, os dados dos questionários referentes aos indicativos apresentados pelos docentes de matemática entrevistados, no qual foram elaborados quadros com valores percentuais acerca das indicações realizadas por eles frente às questões objetivas e quadros gerais com relatos que agregam as intencionalidades da pesquisa em relação as respostas subjetivas, como exemplo, as contribuições da sequência didática para o professor, para o aluno e para o saber, bem como, as potencialidades apresentadas por ela.

Conforme solicitado no instrumento de coleta, os professores que assinalassem uma das quatro primeiras alternativas tiveram a oportunidade de sugerir melhoras nas intervenções. Assim, ao tomarmos por base os apontamentos indicados pelos participantes (sejam positivos ou colaborativos), realizamos as análises por meio de corroborações ou por indicativos de contrapontos.

A análise da Sequência Didática ocorreu a partir de três etapas. A primeira etapa corresponde a Avaliação Individual das UARC’s, em que os professores avaliadores analisaram cada uma das cinco UARC’s que compões a SD. Na segunda etapa os avaliadores realizaram a Avaliação Categórica das UARC’s, em que utilizaram de maneira geral o conjunto de atividades. E a terceira etapa, apresenta a Avaliação Complementar da Sequência Didática, no qual, os professores relataram os indícios de potencialidades, conforme as suas percepções na primeira e segunda etapa da avaliação, que caracterizam a proposta de ensino de Progressão Geométrica.

A partir da Avaliação Complementar da Sequência Didática descritas pelos professores avaliadores é possível classificar os indícios de aprendizagem em três campos que associamos ao conjunto de relações didáticas, que são: Campo Motivacional, Campo da Interações e Campo Conceitual. O Campo Motivacional, apresenta os relatos que descrevem os elementos que motivam os alunos no processo de ensino e aprendizagem; o Campo da Interações, apresenta as intervenções verbais/orais presentes na reconstrução dos conceitos matemáticos; e por fim, o Campo Conceitual, que apresentam as a produção colaborativa mediada pelas UARC's que potencializam a formalização dos conceitos.

Desta forma, esta pesquisa teve colaboração de 20 professores avaliadores, representados por AV1, AV2, AV3, ..., AV20 a ordem de avaliação da Sequência Didática realizada pelos professores, no qual a partir de suas indicações, sugestões e adaptações, podemos validar as potencialidades da Sequência Didática para o Ensino de Progressão Geométrica, conforme os relatos dos professores avaliadores.

5.2.1 – Análise das Avaliações Individuais das UARC's

Na avaliação individual, os professores avaliadores responderam quatro questões objetivas, indicadas por $[\mathbf{AI_1}], [\mathbf{AI_2}], [\mathbf{AI_3}]$ e $[\mathbf{AI_4}]$, após uma análise minuciosa, no qual, corresponde a estrutura das intervenções, a formalização, a avaliação restritiva, e o tempo de aplicação, de cada uma das cinco UARC's, em que tiveram a oportunidade de sugerir de forma discursivas adaptações que podem contribuir para uma melhoria das atividades que se adequam a diferentes público alvo, com divergências cognitiva.

Neste sentido, em relação a UARC-1, que tem por objetivo verificar as sequências em progressão geométricas e a sua razão, foi gerado o Quadro 35, com o interesse de caracterizar as indicações, sugestões e contribuições apontadas pelos professores avaliadores do processo em questão com relação as quatro perguntas destacadas.

Quadro 35: Dados da análise das questões objetivas da avaliação individual da UARC-1.

QUESTÕES/ALTERNATIVAS	**(a)**	**(b)**	**(c)**	**(d)**	**(e)**
$[\mathbf{AI_1}]$	0%	0%	5%	20%	75%
$[\mathbf{AI_2}]$	0%	0%	5%	10%	85%
$[\mathbf{AI_3}]$	0%	0%	5%	5%	90%
$[\mathbf{AI_4}]$	0%	0%	20%	35%	45%

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Ao verificarmos o Quadro 35, a maioria dos professores avaliadores indicaram, nas quatro questões, que a UARC-1 é integralmente válida para a aplicação com as características propostas, no qual destacamos a questão $[\mathrm{AI}_3]$ que obteve 90% de aprovação por parte dos professores, no qual afirmam que a Avaliação Restritiva (A_r) é compatível com o desenvolvimento das Intervenções $(\mathrm{I}_i - I_r - \mathrm{I}_e)$, assim como, com a Intervenção Formalizante (I_f). Também notamos que houve alguns posicionamentos em relação a marcação da alternativa (c) (Em parte – 50%) e (d) (Na maioria das vezes – 75%), no qual indicam sugestões e adaptações para UARC-1, destacadas no Quadro 36.

Quadro 36: Sugestões para UARC-1 relatadas pelos professores avaliadores.

QUESTÃOES	**AVALIADORES**	**SUGESTÕES**
$[\mathbf{AI_1}]$	**AV1**	Trabalhar outros exemplos.
	AV11	O aluno deverá ser estimulado com algumas práticas para que consigam chegar na formalização final.
	AV20	Poderia utilizar exemplos distintos e atividades práticas através de materiais manipuláveis ou experimentações, assim, tornaria a atividade mais atrativa e em consonância com o cotidiano do aluno.
$[\mathbf{AI_2}]$	**Sem Sugestões**	
$[\mathbf{AI_3}]$	**Sem Sugestões**	
$[\mathbf{AI_4}]$	**AV2**	Talvez aumentar alguns poucos minutos, uns 10-15 minutos.
	AV5/AV13	Acredito que essa atividade pode levar 90 minutos, ou seja, 2 horas/aulas
	AV7	Tempo vai depender muito da turma e da dinâmica da aula.
	AV8	Talvez alguns alunos demorem um pouco na leitura inicial. Portanto, é bastante importante que o professor aplicador leia junto com eles para agilizar o processo.
	AV9	As vezes nem todos os alunos conseguem aprender no tempo hora-aula, levando o professor a repetir o processo, mas só apenas tempo mesmo, porque a

		quantidade está de acordo. Mas precisamos atentar a todos os alunos, para tentar suprir o conhecimento.
	AV12/AV14	Aumentar o tempo.
	AV19	Com a retardação no processo de aprendizagem causado pela pandemia da Covid-19, seria necessário um tempo maior para que os alunos compreendessem esta atividade inicial e a forma que ela deve ser desenvolvida.
	AV20	Acredito que pelo fato de ser uma atividade diferente do que os alunos estão acostumados, causaria um impacto nos mesmos, sendo necessário um tempo maior para tirar dúvidas e deixar claro o objetivo da atividade.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

O Quadro 36 apresenta as sugestões de adaptações dos professores que não indicaram a alternativa (e) (Integralmente – 100%) em alguma das quatro questões, no qual, chamamos atenção para as questões $[\mathbf{AI_2}]$ e $[\mathbf{AI_3}]$, em que, alguns professores não conseguiram indicar sugestões para adaptações na UARC 1, no qual acreditam que a Intervenção Formalizante não é totalmente em consonância com o objeto matemático e a Avaliação Restritiva não é totalmente compatível com as $\mathrm{I}_i, I_{r,}$ I_e e I_f.

Por outro lado, é importante destacarmos alguns aspectos indicados pelos professores avaliadores no Quadro 36, como a adaptação do tempo necessário para realização das atividades, no qual teve maior quantidade de sugestões, porém, não menos importante, realizar adaptações das atividades contida na UARC-1, tais como, utilização de diversas aplicações e exemplos do cotidiano do aluno e atividades práticas que possa facilitar o desenvolvimento das atividades para chegar à formalização do objeto matemático, como apontam os professores AV1, AV11 e AV20 em seus relatos.

Vale destacar que, cada uma das adaptações depende da turma em que o professor aplicador da SD trabalhará, no qual, necessita-se adequar as atividades da melhor maneira possível, para que os alunos tenham um bom desempenho, em que está adequação ocorre em seu planejamento, após os resultados obtidos no Teste de Diagnóstico Inicial (TDI) e na Oficina de Conhecimentos Básicos (OCB).

A partir da análise das questões objetivas da UARC-2, que tem por objetivo verificar o crescimento e decrescimento de uma PG, foi construído o Quadro 37, com a finalidade de agrupar indicações apontadas pelos professores avaliadores em relação as quatro questões propostas.

Quadro 37: Dados da análise das questões objetivas da avaliação individual da UARC-2.

QUESTÕES/ALTERNATIVAS	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
$[\mathbf{AI_1}]$	0%	0%	0%	25%	75%
$[\mathbf{AI_2}]$	0%	0%	0%	5%	95%
$[\mathbf{AI_3}]$	0%	0%	0%	15%	85%
$[\mathbf{AI_4}]$	0%	0%	20%	20%	60%

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Conforme os dados apresentados no Quadro 37, destacamos que a questão $[\mathbf{AI_2}]$ obteve o maior percentual de aceitação por parte dos professores avaliadores, no qual, indicaram que a Intervenção Formalizante está em consonância com o objeto matemático, assim como a maioria dos professores participantes da avaliação mostraram-se satisfeito com as quatro questões propostas.

Percebe-se também, no Quadro 37, que a minoria dos professores avaliadores não estava totalmente de acordo com as características da UARC-2, em que propuseram algumas adequações, conforme dissertado no Quadro 38.

Quadro 38: Sugestões para UARC-2 relatadas pelos professores avaliadores.

QUESTÃOES	AVALIADORES	SUGESTÕES
$[\mathbf{AI_1}]$	**AV8**	Acredito que poderia ter pelo menos mais um exemplo de cada tipo proposto, para ajudar os alunos a perceberem sozinhos os padrões de cada PG.
	AV11	O aluno deverá ser estimulado com algumas práticas para que consigam chegar ao objetivo da atividade.
	AV20	Poderia utilizar exemplos distintos e atividades práticas através de materiais manipuláveis ou experimentações, assim, tornaria a atividade mais atrativa e em consonância com o cotidiano do aluno.

$[\mathbf{AI_2}]$	**Sem Sugestões**	
$[\mathbf{AI_3}]$	**Sem Sugestões**	
$[\mathbf{AI_4}]$	**AV5/AV12/AV14**	Aumentar o tempo.
	AV13	2 tempos de 45 minutos.
	AV19	Com o aumento do nível de dificuldade os alunos necessitariam de um tempo maior para discursões entre si e tirar dúvidas com o professor quanto aos resultados encontrados.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Ao analisar o Quadro 38, no qual indica algumas sugestões dos professores avaliadores que não optaram pela alternativa (e) (Integralmente – 100%) em alguma das quatro questões, destacamos que, assim como na análise da UARC 1, as questões $[\mathbf{AI_2}]$ e $[\mathbf{AI_3}]$ obtiveram um baixo percentual de não aceitação na UARC 2 por parte dos professores avaliadores que optaram pela alternativa (d) (Na maioria das vezes – 75%), que indicaram que na maioria das vezes a formalização está em consonância com o objeto matemático, assim como a avaliação restritiva está de acordo com as intervenções $\mathrm{I}_i, I_{r,}$ I_e e I_f, porém, tais avaliadores não foram capazes de apresentar sugestões de adequações da A_r e das intervenções propostas.

Dentre as sugestões indicadas nas questões $[\mathbf{AI_1}]$ e $[\mathbf{AI_4}]$, a maioria dos professores avaliadores relataram a adequação do tempo da realização das atividades, no qual dependendo da turma em que irá aplicar a UARC-2, pode ser necessário um tempo maior para tirar dúvidas e interação entre os envolvidos nas atividades. Destacamos também, as adequações propostas pelos professores AV8, AV11 e AV20, em que indicam uma proposta com exemplos distintos e atividades práticas, que possam possibilitar a percepção de maneira mais atrativa dos padrões e regularidades existentes nas sequências em PG propostas na UARC-2.

Com relação a UARC-3, cujo objetivo é verificar regularidades para desenvolver a equação do termo geral de uma PG, elaboramos o Quadro 39, com o interesse de caracterizar as indicações e adaptações sugeridas pelos professores avaliadores com relação as quatro questões destacadas.

Quadro 39: Dados da análise das questões objetivas da avaliação individual da UARC-3.

QUESTÕES/ALTERNATIVAS	**(a)**	**(b)**	**(c)**	**(d)**	**(e)**
$[\mathbf{AI_1}]$	0%	0%	0%	20%	80%
$[\mathbf{AI_2}]$	0%	0%	0%	10%	90%

$[\mathbf{AI_3}]$	0%	0%	0%	15%	85%
$[\mathbf{AI_4}]$	0%	5%	10%	20%	65%

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Com base nos dados obtidos na pesquisa e apresentados no Quadro 39, no qual elencamos o alto índice percentual que os professores indicaram nas quatro questões propostas, em que a UARC-3 possui integralmente aplicabilidade no processo de ensino de progressão geométrica. Desta maneira, destacamos que 90% dos avaliadores optaram pela alternativa (e) (integralmente – 100%) na questão $[\mathbf{AI_2}]$, no qual reafirmam, assim como na UARC-1 e UARC-2, a importância da formalização do conceito matemático está de acordo com o objeto matemático estudado.

Em contrapartida, conforme observado no Quadro 39, uma pequena porcentagem dos professores avaliadores indicou as alternativas (b) (Pontualmente – 25%) ou (c) (Em parte – 50%) ou (d) (Na maioria das vezes – 75%), nas quatro questões propostas na avaliação da UARC 3, no qual possibilitou algumas propostas de adaptação das atividades, destacadas no Quadro 40.

Quadro 40: Sugestões para UARC-3 relatadas pelos professores avaliadores.

QUESTÃOES	**AVALIADORES**	**SUGESTÕES**
$[\mathbf{AI_1}]$	**AV11**	Falta alguns modelos práticos.
	AV20	Poderia utilizar exemplos distintos e atividades práticas através de materiais manipuláveis ou experimentações, assim, tornaria a atividade mais atrativa e em consonância com o cotidiano do aluno.
$[\mathbf{AI_2}]$	**Sem Sugestões**	
$[\mathbf{AI_3}]$	**Sem Sugestões**	
$[\mathbf{AI_4}]$	**AV4**	Utilizaria 3 aulas de preferência com um intervalo após a primeira ou a segunda aula.
	AV5	Acredito que mesmo com o auxílio da calculadora, os alunos precisam de um tempo para assimilar e manipular os triângulos que estão sendo construídos e o conhecimento apresentado. Minha proposta é que seja de 2 horas/aula.
	AV9/AV13	Aumentar o tempo.

	AV14	Com o tempo de 135 minutos, talvez cumprisse com a proposta.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Assim como na análise das UARC's anteriores e conforme o Quadro 40, do total de professores avaliadores, apenas 10% e 15% indicaram a alternativa (d) (Na maioria das vezes – 75%) nas questões $[\mathbf{AI_2}]$ e $[\mathbf{AI_3}]$, respectivamente, porém, nenhum dos cinco avaliadores apresentaram sugestões para adaptação das atividades, que pudesse alterar esse quadro de insatisfação.

Em compensação, houve algumas sugestões indicadas nas questões $[\mathbf{AI_1}]$ e $[\mathbf{AI_2}]$, que não diferem das apresentadas na análise das UARC's anteriores, tais como, adaptar as atividades da UARC-3 com práticas que aproximam do cotidiano do aluno, tornando-a mais atrativa, conforme destacam os professores AV11 e AV20, além do aumento do tempo proposto para a realização das atividades, no qual já destacamos nesse texto, que o professor aplicador fica livre para adaptar o tempo da realização das atividades conforme o rendimento da turma e a necessidade de adaptações em seus planejamentos para a melhoria do ensino.

Com base na análise realizada pelos professores avaliadores da UARC-4, que possui por objetivo verificar regularidades para desenvolver a equação soma dos termos de uma progressão geométrica finita, foi gerado o Quando 41, como forma de esclarecer as devidas indicações nas respostas dos avaliadores.

Quadro 41: Dados da análise das questões objetivas da avaliação individual da UARC-4.

QUESTÕES/ALTERNATIVAS	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
$[\mathbf{AI_1}]$	0%	0%	10%	20%	70%
$[\mathbf{AI_2}]$	0%	0%	0%	15%	85%
$[\mathbf{AI_3}]$	0%	0%	0%	5%	95%
$[\mathbf{AI_4}]$	0%	0%	20%	25%	55%

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Ao verificarmos o Quadro 41, destacamos o alto índice percentual da questão $[\mathbf{AI_3}]$, no qual 95% dos professores avaliadores entenderam que a Avaliação Restritiva está compatível com as intervenções e com a formalização do conceito matemático apresentado na UARC-4.

Conforme esperado, alguns professores avaliadores indicaram as alternativas (c) (Em parte – 50%) ou (d) (Na maioria das vezes – 75%), desta forma, evidenciamos a questão $[\mathbf{AI_4}]$, que se refere ao tempo necessário para realização das atividades, no qual obteve um baixo índice percentual de aceitação, com apenas 55% dos avaliadores que indicaram a alternativa (e) (integralmente – 100%), assim, possibilitou que houvesse sugestões de adequações das atividades propostas, indicadas no Quadro 42.

Quadro 42: Sugestões para UARC-4 relatadas pelos professores avaliadores.

QUESTÃOES	AVALIADORES	SUGESTÕES
$[\mathbf{AI_1}]$	**AV4**	Não vejo de forma imediata a soma durante o processo das intervenções.
	AV8	Acredito que alguns alunos, mesmo que fazendo corretamente os cálculos, não irão compreender de imediato a relação desses resultados com a fórmula pretendida. O professor aplicador deverá ser muito atuante nessa etapa para que a aplicação ocorra sem grandes problemas.
	AV11	Muito teórico e poucos exemplos que possam chegar ao objetivo.
	AV19	Pelo fato de a que equação da soma dos termos de uma progressão geométrica finita seja algo um pouco difícil de adequar com a realidade dos alunos, não fica tão empírica uma vez que os alunos irão lidar apenas com a operacionalização numérica.
$[\mathbf{AI_2}]$	**Sem Sugestões**	
$[\mathbf{AI_3}]$	**Sem Sugestões**	
$[\mathbf{AI_4}]$	**AV4**	Acho que 45min não é suficiente. Eu colocaria 2 aulas para ter folga para fazer a formalização que é um ponto chave da TSD.
	AV8	Acredito que muitos alunos terão problema para fazer os cálculos e depois ainda entender as relações pretendidas. O ideal seria o uso de duas aulas de 45 minutos cada.
	AV11/AV12	Aumentar o tempo.
	AV13	Talvez 2 tempos de 45 minutos.

	AV19	Com a dificuldade de relacionar a equação da soma dos termos de uma progressão geométrica finita com o cotidiano, logo o aluno necessitaria de um tempo maior para verificar se os resultados encontrados a partir da operacionalização numérica está de acordo com a equação a desenvolver, refletindo sobre o sentido entre a equação matemática e seus resultados encontrados.
	AV20	Com o aumento do nível de dificuldade os alunos necessitariam de um tempo maior para tirar dúvidas com o professor quanto aos resultados encontrados.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Ao analisar o Quadro 42, destacamos o professor AV4, que ao verificar a questão $[\mathbf{AI_1}]$ destacou que não é possível verificar de forma imediata a soma finita dos termos da PG durante o processo das intervenções, de fato, pela complexidade do conceito abordado é necessário uma atenção maior do professor avaliador, uma vez que o processo de construção das atividades possuem finalidade de verificar a formalização do conceito, isto é, pode ocorrer que durante o processo de realização das atividades, não faça sentido para o aluno, porém, ao final de todas as intervenções, ele consiga entender os resultados encontrado.

Portanto, a crítica do professor AV4, não é uma desvantagem da UARC-4, uma vez que as não observar de forma imediata o objetivo da UARC quanto ao conceito abordado é uma das intencionalidades da estruturação da Sequência Didática conforme a proposta de Cabral (2017).

Observa-se também, ainda na questão $[\mathbf{AI_1}]$**,** que o professor AV8 aponta uma resposta semelhante ao do AV4, porém sugere que o aplicador da UARC-4 seja atencioso em suas intervenções, isto é, o professor atuante é mediador do processo, no qual terá que atuar de maneira rigorosa com as Intervenções Orais de Manutenção Objetiva (I-OMO).

Ao dar continuidade na análise da questão $[\mathbf{AI_1}]$, o professor AV11 sugere que sejam utilizados mais exemplos para minimizar as dificuldades e dar seguimento nas atividades propostas, e o professor AV19 destaca a dificuldade da abordagem do conceito matemático abordado, no qual sugere adequar a operacionalização numérica com a realidade dos alunos.

Na verificação do Quadro 42, destacamos que, assim como na análise da UARC's anteriores, as questões $[\mathbf{AI_2}]$ e $[\mathbf{AI_3}]$ obtiveram um baixo percentual de não aceitação na

UARC-4 por parte dos professores avaliadores que optaram pela alternativa (d) (Na maioria das vezes – 75%), que indicaram que na maioria das vezes a formalização está de acordo com o objeto matemático, assim como a avaliação restritiva está de acordo com as intervenções $\mathrm{I}_i, I_{r,}$ I_e e I_f, desta maneira, os avaliadores não foram capazes de apresentar sugestões de adequações da A_r e das intervenções propostas.

Com o aumento do nível de dificuldade do conceito matemático abordado na UARC-4, conforme apontam os professores AV19 e AV20 na questão $[\mathbf{AI_4}]$, logo a turma deve ter bastante atenção nos resultados encontrados através dos cálculos realizados na calculadora, assim como, o professor mediador deve conduzir com cuidado a realização das atividades para que o processo até a formalização do conceito matemático, desta forma, caso seja necessário, no qual depende do desempenho da turma, o tempo pode variar de acordo com a necessidade dos alunos.

O Quadro 43 apresenta os índices percentuais da última atividade que compõe a SD (UARC5), cujo objetivo é verificar regularidades para desenvolver a equação soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, a fim de caracterizarmos as indicações realizadas pelos professores avaliadores na análise das quatro questões objetivas da avaliação individual da UARC-5.

Quadro 43: Dados da análise das questões objetivas da avaliação individual da UARC-5.

QUESTÕES/ALTERNATIVAS	**(a)**	**(b)**	**(c)**	**(d)**	**(e)**
$[\mathbf{AI_1}]$	0%	0%	0%	20%	80%
$[\mathbf{AI_2}]$	0%	0%	0%	5%	95%
$[\mathbf{AI_3}]$	0%	0%	0%	10%	90%
$[\mathbf{AI_4}]$	0%	0%	15%	20%	65%

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Observa-se no Quadro 43, o alto índice percentual nas questões $[\mathbf{AI_1}]$, $[\mathbf{AI_2}]$ e $[\mathbf{AI_3}]$, isto é, a maioria dos professores avaliadores indicaram a alternativa (e) (Integralmente – 100%), em que damos destaque para a questão $[\mathbf{AI_2}]$, dado que, 95% dos avaliadores verificaram que a I_f está em consonância com o conhecimento do professor em relação ao objeto matemático.

Por outro lado, verificamos que a questão $[\mathbf{AI_4}]$, apesar de 65% dos avaliadores indicarem a alternativa (e) (Integralmente – 100%), uma considerável quantidade não teve uma boa aceitação quanto ao tempo destinado a realização das atividades propostas, no qual também ocorreu na UARC4, uma vez que os conceitos abordados nas atividades são semelhantes.

Desta forma, através das considerações a respeito dos dados obtidos no Quadro 43, elaboramos o Quadro 44, em que apresentamos as sugestões indicadas pelos professores avaliadores na UARC-5.

Quadro 44: Sugestões para UARC-5 relatadas pelos professores avaliadores.

QUESTÃOES	AVALIADORES	SUGESTÕES
$[\mathbf{AI_1}]$	**AV7**	Trabalhar com mídias que estejam próximas da realidade dos alunos. Seria interessante usar filmes, usar curiosidades, storytelling (como o do hotel de Hilbert).
	AV11	Modelos práticos.
	AV19	Pelo fato de a que equação da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita seja algo um pouco difícil de adequar com a realidade dos alunos, não fica tão empírica uma vez que os alunos irão lidar apenas com a operacionalização numérica.
$[\mathbf{AI_2}]$	**Sem Sugestões**	
$[\mathbf{AI_3}]$	**Sem Sugestões**	
$[\mathbf{AI_4}]$	**AV4**	Considerando o texto o tempo que cada aluno leva a discussão entre eles a formalização eu usaria 2 aulas.
	AV8	O professor aplicador deverá ler o texto inicial com os alunos para que os alunos ganhem tempo para resolver as demais questões.
	AV12	Necessário mais tempo.
	AV19	Com a dificuldade de relacionar a equação da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita com o cotidiano, logo o aluno necessitaria de um tempo maior para verificar se os resultados encontrados a partir da operacionalização numérica está de acordo com a equação a desenvolver,

		refletindo sobre o sentido entre a equação matemática e seus resultados encontrados.
	AV20	Com o aumento do nível de dificuldade os alunos necessitariam de um tempo maior para tirar dúvidas com o professor quanto aos resultados encontrados.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Assim como ocorreu na análise da UARC-4 realizada pelos professores avaliadores, o Quando 44 apresenta sugestões e adequações semelhantes para a UARC-5, no qual, destacamos a sugestão do professor AV7 na questão $[\mathrm{AI}_1]$, em que, de forma geral, acredita que a utilização de tecnologias digitais (mídias), podem facilitar no processo de aprendizagem do conceito matemático abordado na UARC-5, uma vez que, se aproxima da realidade do público em que será aplicado a SD, isto é, o uso de recursos midiáticos e tecnológicos, tornaria a UARC-5 mais atrativo para o aluno, assim, acreditamos que a colocação do professor AV7 seja válida e possibilita manter o rigor matemático apresentado nas atividades.

Assim como na descrito na análise da UARC's anteriores, as questões $[\mathbf{AI_2}]$ e $[\mathbf{AI_3}]$ obtiveram um baixo percentual de não aceitação na UARC-5 por parte dos professores avaliadores que optaram pela alternativa (d) (Na maioria das vezes – 75%), que indicaram que na maioria das vezes a formalização está de acordo com o objeto matemático, assim como a avaliação restritiva está de acordo com as intervenções $\mathrm{I}_i, I_{r,}\ \mathrm{I}_e$ e I_f, desta maneira, os avaliadores não foram capazes de apresentar sugestões de adequações da A_r e das intervenções propostas.

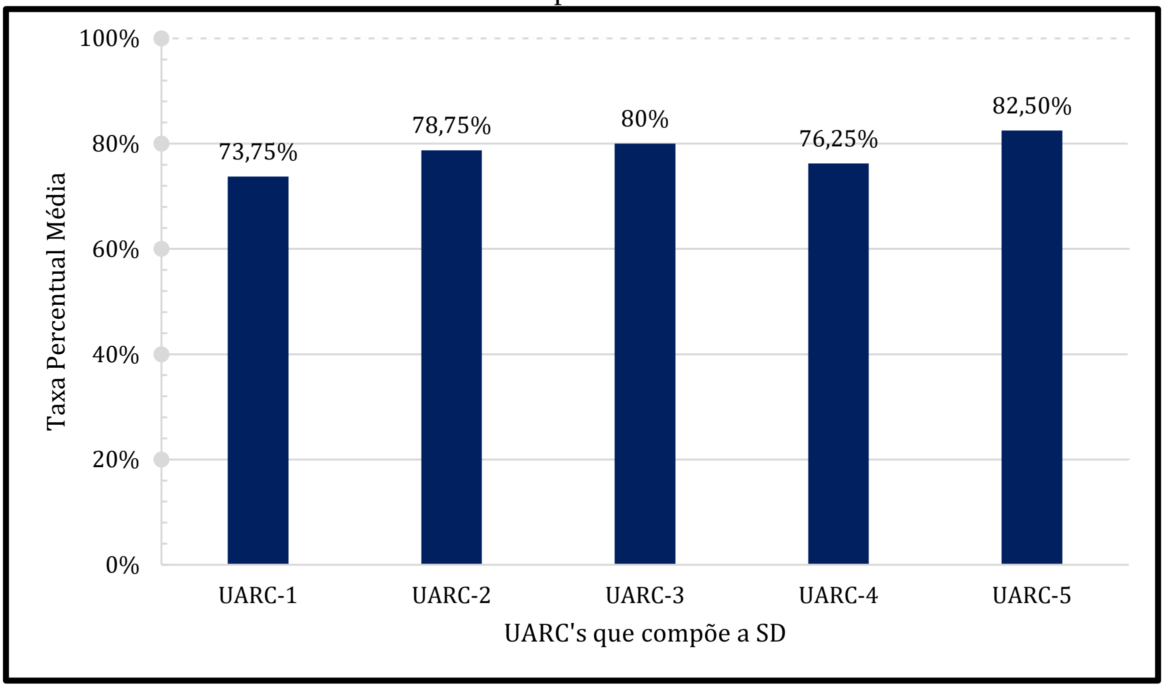
Já na análise da questão $[\mathbf{AI_4}]$, no que diz respeito se a quantidade de atividades é compatível com o tempo proposto, e em comparação com a avaliação da UARC-4, os dados obtidos são semelhantes, com percentuais próximos, porém, damos destaque a sugestão do professor AV8, em que destaca que o professor aplicador deverá ler o texto inicial com os alunos para que os alunos ganhem tempo para resolver as demais questões, isto é, o professor aplicador da SD, deve fazer uso recorrente da I-OMO, principalmente no texto da Intervenção Inicial (I_i), no qual, segundo AV8, facilitaria no entendimento das atividades propostas na UARC-5 e consequentemente na compatibilidade com o tempo proposto para realização das atividades.

Para uma melhor compreensão dos resultados obtidos na avaliação individual das cinco UARC's propostas na SD, realizamos uma síntese destes resultados com base no Gráfico 1, em que apresentamos, no qual nomeamos de Índice de Aplicabilidade das UARC's (IAU), dados percentuais que corresponde o quanto cada UARC é aplicável no processo de ensino do objeto matemático, em que é calculado a Taxa Percentual Média (TPM) dos professores avaliadores que indicaram a alternativa (e) (Integralmente – 100%) nas quatro questões ($[\mathbf{AI_1}]$, $[\mathbf{AI_2}]$, $[\mathbf{AI_3}]$ e $[\mathbf{AI_4}]$) propostas na avaliação individual das UARC's.

O Gráfico 1 apresenta a taxa percentual média, no qual indica o Índice de Aplicabilidade das UARC's, uma maneira que encontramos para concretizar se cada uma das UARC's avaliadas pelos professores pode ser aplicada em sala de aula para o ensino do objeto matemático.

Desta forma, utilizamos como parâmetro que a UARC que obtiver IAU com $60\% \leq \text{TPM} < 100\%$, pode ser aplicada nas turmas sem as adaptações sugeridas pelos professores avaliadores e com as adaptações, caso haja necessidade, conforme o planejamento do professor aplicador da SD e o desempenho da turma. Caso a IAU tenha $\text{TPM} < 60\%$, é obrigatório as adaptações sugeridas pelos avaliadores das UARC's, para que seja alcançado os resultados esperados e, por fim, se a IAU obtiver $\text{TPM} = 100\%$, não há necessidade de adequar as UARC's para realizar a aplicação.

Gráfico 1: Índice de Aplicabilidade das UARC's.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Conforme o Gráfico 1, o IAU de todas as UARC's obteve $60\% \leq \text{TPM} < 100\%$, isto significa que cada uma das cinco UARC's podem ser aplicadas para o ensino de progressão geométrica com ou sem as adaptações sugeridas pelos professores avaliadores.

A partir disto, destacamos a TPM da UARC-5, no qual possui o IAU mais adequado da SD, em que, apesar das dificuldades no desenvolvimento do conceito matemático, que foi a soma dos temos de uma PG infinita, porém, acreditamos que pelo fato dos alunos já possuírem certa experiência com as atividades contidas nas UARC's anteriores, gerou uma contribuição para entender o propósito da realização da UARC-5, em que facilitou o desenvolvimento da atividade, desta forma, os professores avaliadores também perceberam que isso poderia ocorrer.

Por outro lado, chamamos a atenção da UARC-1, que obteve a menor TPM e tornou a IAU menos adequada da SD, porém aplicável nas turmas em que o professor irá ensinar progressão geométrica, acreditamos que, por ser uma proposta diferente para os alunos, a atividade inicial se torna impactante por eles, assim como, há uma rejeição no primeiro contato com as atividades, em que através da I-OMO o professor precisa fazer com que os alunos aceitem a proposta como parte do processo de ensino, uma vez que a turma já espera e estão preparados para uma aula expositiva, dita tradicional (Quadro, Pincel e Livro didático).

Desta forma, conforme a necessidade, principalmente na UARC-1, as adaptações sugeridas pelos professores avaliadores podem se tornar bem proveitosas para o processo inicial, no qual gera algo mais atrativo e chame a atenção dos alunos quanto a credibilidade e aceitação das atividades.

5.2.2 – Análise das Avaliações Categóricas das UARC's

Na avaliação categórica, os professores avaliadores responderam cinco questões objetivas, indicadas por $[\mathbf{AC_1}], [\mathbf{AC_2}], [\mathbf{AC_3}], [\mathbf{AC_4}]$ e $[\mathbf{AC_5}]$, no qual, analisaram se as atividades e os recursos utilizados para a realização das UARC's são atrativos, possuem linguagem adequada para o nível de ensino, se estão adequadas para o nível cognitivo dos alunos, assim como, se o número total de atividades está adequado para o ensino do objeto matemático, se o conjunto de atividades está ordenado e compatível com o tempo total proposto da Sequência Didática para promover o ensino de progressão geométrica.

Desta forma, foi gerado o Quadro 45, com o interesse de caracterizar as indicações, sugestões e contribuições apontadas pelos professores avaliadores do processo em questão com relação as cinco perguntas destacadas.

Quadro 45:Dados da análise das questões objetivas da avaliação categórica das UARC's.

QUESTÕES/ALTERNATIVAS	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
$[\mathbf{AC_1}]$	0%	5%	10%	30%	55%
$[\mathbf{AC_2}]$	0%	0%	15%	25%	60%
$[\mathbf{AC_3}]$	0%	0%	0%	15%	85%
$[\mathbf{AC_4}]$	0%	5%	0%	10%	85%
$[\mathbf{AC_5}]$	0%	0%	25%	35%	40%

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

No Quadro 45 apresentamos a análise realizada pelos professores avaliadores no conjunto de UARC's como estrutura da sequência didática para o ensino de progressão geométrica, desta forma, observamos que a quantidade de avaliadores que optaram pela alternativa (e) (Integralmente – 100%) é menor que a verificada na avaliação individual das UARC's, uma vez que, os aspectos analisados de maneira geral, compreende a aplicabilidade da SD, e não apenas da unidade articulável, assim, percebemos que a TPM obtida no conjunto das UARC's foi de 65%, parâmetro da IAU adequado para a aplicação da SD proposta, porém considerando as possível adequações sugeridas pelos professores avaliadores, caso necessário.

Desta maneira, destacamos as questões $[\mathbf{AC_3}]$ e $[\mathbf{AC_4}]$ que obtiveram a maior quantidade de professores que avaliaram positivamente quanto a quantidade de atividades que compõe a SD e a ordenação destas atividades, no qual seguem uma estruturação intencional no processo de ensino. Por outro lado, chamamos atenção para a questão $[\mathbf{AC_5}]$ no qual apenas 40% dos professores avaliadores avaliaram positivamente o tempo total para a realização das atividades composta na SD. Portanto, os dados obtidos no Quadro 45 possibilitaram que os avaliadores sugerissem adaptações gerais para a SD, apresentadas no Quadro 46.

Quadro 46: Sugestões para o conjunto das UARC's relatadas pelos professores avaliadores.

QUESTÕES	AVALIADORES	SUGESTÕES
$[\mathbf{AC_1}]$	**AV4**	Não tenho como medir o cognitivo de alunos sem os conhecer. Entretanto, na escola pública onde trabalho, no 1 ano do médio de escola periférica, esses alunos encontrariam uma certa dificuldade. Hoje levo em consideração que os alunos foram promovidos pelo menos dois anos e por mais simples que a linguagem seja ainda estão apresentando dificuldades de

		interpretação textual. Contudo eu vejo que as sequências estão atrativas.
	AV7	Trabalhar com mídias disponíveis. Geralmente a linguagem do jovem na primeira série do médio está atrelada a conteúdos disponíveis na Internet.
	AV11	Existe modelos com mais proximidade com os alunos.
	AV19	Acredito que com exemplos relacionado ao cotidiano do aluno e com atividades prática, seria possível tornar a sequência didática mais atrativa e com linguagem acessível.
	AV20	As atividades poderiam abordar exemplos distintos, aumentando o grau cognitivo do aluno através de diversas situações em que são aplicações de Progressão Geométrica, assim como, fazer uso de práticas através de materiais manipuláveis ou experimentações, assim, tornaria a atividade mais atrativa e em consonância com o cotidiano do aluno.
$[\mathbf{AC_2}]$	**AV20**	Acredito que poderia ser utilizados outros recursos, como: Materiais manipuláveis, experimentos práticos do cotidiano do aluno e experimentos físicos. Desta forma, tornando a formalização empírica para os alunos.
	AV11	Modelos do cotidiano dos alunos.
$[\mathbf{AC_3}]$	**Sem Sugestões**	
$[\mathbf{AC_4}]$	**Sem Sugestões**	
$[\mathbf{AC_5}]$	**AV4**	Considerando todos os componentes da TSD até a formalização eu acrescentaria um tempo a mais para fazer tudo com folga.
	AV5/AV8	Cada atividade será mais bem trabalhada se forem contempladas com 2horas aulas.
	AV14	Adequação do tempo em relação a quantidade de atividades propostas, em escolas da rede pública as

		turmas têm em média 35 alunos para um professor aplicar sozinho leva tempo devido as várias dúvidas dos alunos, sendo em equipe, ainda tem a dispersão deles.
	AV13	As atividades são muito boas, no entanto acrescentaria mais tempo na execução delas vista as intercorrências que podem ocorrer e pelo nível cognitivo dos estudantes, alguns levam mais tempo para compreensão que outros.
	AV19	Para a aplicação da Sequência Didática seria necessário um tempo maior, uma vez que, houve um retardo no processo de ensino e aprendizagem dos alunos causados pelas dificuldades e costumes adquiridos durante a pandemia da Covid-19.
	AV20	Em algumas atividades seriam necessários um tempo maior para tirar dúvidas uma vez que o grau de dificuldade aumenta conforme o andamento das atividades propostas.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Conforme o Quadro 46, na questão $[\mathbf{AC_1}]$, em que os professores avaliadores verificaram se atividades utilizadas na Sequência Didática são atrativas e apresentam uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos, de maneira geral, as adaptações para que a SD se torne mais atrativa são as atividades com exemplos distintos, experimentos práticos, recursos tecnológicos, aplicações do cotidiano dos alunos, no qual isso tornaria a linguagem mais acessível ao aluno.

Na questão $[\mathbf{AC_2}]$, os professores avaliaram se os recursos de apoio são atrativos e de fácil operacionalização pelo aluno e contribuem para a formalização intuitiva/empírica do conceito matemático, no qual apenas dois professores dos oito que indicaram a alternativa (c) (Em parte - 50%) ou (d) (Na maioria das vezes - 75%) deram suas sugestões, no qual, se baseiam em utilizar mais recursos que se aproxime do cotidiano do aluno, tais como, utilização de materiais manipuláveis, experimentos práticos do cotidiano do aluno e experimentos físicos, em que poderia inferir no empirismo dos alunos no processo de realização das atividades.

As questões $[\mathbf{AC_3}]$ e $[\mathbf{AC_4}]$ obtiveram um baixo percentual de discordância por parte dos professores avaliadores, no qual apenas três avaliadores optaram pela alternativa (b) (Pontualmente – 25%) ou (c) (Em parte - 50%) ou (d) (Na maioria das vezes - 75%), em que apontaram que número total de atividades da Sequência Didática não está adequado para o ensino do objeto matemático e o conjunto de atividades que compõem a Sequência Didática está ordenado de modo a promover o ensino do objeto matemático, desta maneira, os avaliadores não foram capazes de apresentar sugestões de adequações para a melhoria destes aspectos da SD.

Por fim, na questão $[\mathbf{AC_5}]$, cujo interesse era verificar se o tempo total previsto é compatível para aplicação da Sequência Didática, no qual, de forma geral, os professores sugeriram que o tempo total previsto para a aplicação da SD fosse ajustado conforme a necessidade.

Destacamos aqui os relatos e sugestões dos professores AV13 que afirma que “as atividades são muito boas, no entanto acrescentaria mais tempo na execução delas vista as intercorrências que podem ocorrer e pelo nível cognitivo dos estudantes, alguns levam mais tempo para compreensão que outros” e AV19 que diz, “para a aplicação da Sequência Didática seria necessário um tempo maior, uma vez que, houve um retardo no processo de ensino e aprendizagem dos alunos causados pelas dificuldades e costumes adquiridos durante a pandemia da Covid-19”.

Os relatos e sugestões dos professores AV13 e AV19 destacam aspectos importantes, que são os pedagógicos e o social, uma vez que, é possível o que as ocorrências que são geradas no ambiente social do aluno, neste caso a pandemia da Covid-19, pode interferir no desenvolvimento cognitivo.

5.2.3 – Análise das Avaliação Complementar da Sequência Didática

A avaliação complementar da sequência didática, constitui a terceira etapa dos resultados dessa pesquisa. Os professores avaliaram a avaliação aplicativa elaborada, a promoção da interatividade entre os participantes, a identificação das contribuições em relação aos elementos que compõem a tríade didática (professor-aluno-saber) e as potencialidades da proposta para o ensino do objeto matemático estudado.

Inicialmente os professores avaliadores responderam duas questões objetivas $[\mathbf{ACP_1}]$ e $[\mathbf{ACP_2}]$, no qual os dados obtidos e apresentados no Quadro 47 possui a finalidade de sintetizar as indicações apontadas pelos professores participantes do processo em questão com relação as duas perguntas mencionadas.

Quadro 47: Dados da análise das questões objetivas da avaliação complementar da Sequência Didática.

QUESTÕES/ALTERNATIVAS	**(a)**	**(b)**	**(c)**	**(d)**	**(e)**
$[\mathbf{ACP_1}]$	0%	0%	0%	10%	90%
$[\mathbf{ACP_2}]$	0%	0%	5%	15%	80%

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Ao analisarmos o Quadro 47, verificamos o alto índice de professores que estavam de acordo com os aspectos propostos pelas questões $[\mathbf{ACP_1}]$ e $[\mathbf{ACP_2}]$, porém, a minoria dos avaliadores indicou a alternativa (c) (Em parte -50%) ou (d) (Na maioria das vezes - 75%), no qual possibilita apresentar sugestões para a melhoria destes aspectos.

Na questão $[\mathbf{ACP_1}]$, apenas dois professores apontaram que na maioria das vezes a Avaliação Aplicativa (Aa) está compatível com a Sequência Didática proposta, porém, não apresentaram sugestões. Já na questão $[\mathbf{ACP_2}]$ três professores apontaram que na maioria das vezes e apenas um professor apontou em parte a Sequência Didática proposta promove a interação Professor-Aluno-Saber, porém, apenas o professor AV11 sugeriu que fosse utilizada atividades práticas.

Desta forma, a partir da resposta da maioria, compreendemos que o constructo elaborado para se trabalhar com o objeto matemático apontado promove a interligação entre os elementos compõem a tríade didático. Portanto, a compreensão desta relação entre Professor, Aluno e Saber, nos possibilitou a elaboração da terceira questão desta etapa, associada a percepção dos professores avaliadores sobre as contribuições da sequência didática, com descrições subjetivas em relação ao Professor, ao Aluno e ao Saber.

Quadro 48:Relatos das contribuições da Sequência Didática sobre a Formação Matemática e Pedagógica em relação ao Professor na concepção dos professores avaliadores.

Formação Matemática e Pedagógica em relação ao Professor	
AVALIADORES	**CONTRIBUIÇÕES**
AV1	O professor aborda de maneira adequada os conteúdos.
AV2	Ela proporciona uma prática diferente da usual e permite que o professor possa avaliar cada aluno individualmente.

AV3	A Sequência Didática pode proporcionar ao professor o desenvolvimento de sua capacidade crítica e reflexiva, possibilitando que o mesmo faça uma análise de forma clara sobre a realidade do ensino, proporcionando situações em que o aluno construa seu próprio saber.
AV4	**Sem contribuição**
AV5	A SD contribuirá muito para o dinamismo da aula, sem contar que deixará as aulas muito mais atrativas
AV6	Contribui para melhorar a metodologia e aplicação do conteúdo matemático em questão
AV7	Uma visão diferenciada para se trabalhar progressão trazendo aspectos interessantes no estudo da matemática.
AV8	Como o próprio nome propõe, é uma sequência de ensino que auxilia o professor a falar de todos os pontos importantes com relação a esse assunto, de maneira lógica e conectada.
AV9	Uma organização bem elaborada, adequada, lúdica, acessível aos professores de forma geral.
AV10	Melhor entendimento e melhores possibilidades de ensino.
AV11	**Sem contribuição**
AV12	Organização das tarefas.
AV13	A proposta auxilia o professor materializando um objeto que geralmente causa muita dificuldade de aprendizagem e ação construtivista e interacionista que enxerguei nas atividades ajuda nessa compreensão cognição pois vai modelando os conhecimentos ordenadamente.
AV14	Aprimoramento do conteúdo proposto, pois o professor precisa estudar bem o conteúdo para ter um bom domínio, além de fazer um bom planejamento da atividade.
AV15	Ela facilita a aula do professor, pois é um material muito organizado.
AV16	Domínio do assunto, não abordando bruscamente a PG.
AV17	Contribui para uma melhor ligação contínua do conhecimento a ser repassado, a fim que os resultados sejam alcançados.

AV18	Uma percepção de ensino distinta das apresentadas nos livros didáticos.
AV19	Apresenta uma nova visão em relação ao objeto matemático, assim como, uma melhoria no processo de ensino de Progressão Geométrica.
AV20	Maneira distinta do tradicional (aula expositiva - apoio apenas no livro didático), tornando o professor mediador do conhecimento, assim como explora o rigor matemático que exige o conteúdo de Progressão Geométrica.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

O Quadro 48 apresenta as descrições das contribuições da sequência didática segundo a percepção dos professores avaliadores. Concordamos com os apontamentos realizados para o Professor tanto em relação a formação matemática quanto na pedagógica.

Desta maneira, durante esse processo o professor já possui um planejamento organizado matematicamente e separados em construções para se chegar à objetivos pontuais, conforme afirmam os professores AV8 e AV12.

Com relação a formação pedagógica, conforme a contribuição do professor AV20, o professor aplicador passa por uma transição de professor expositor para professor mediador do conhecimento, isto é, ele passa a ter um papel de guia das atividades realizadas em sala de aula para o processo construtivo dos alunos em relação ao saber.

Quadro 49: Relatos das contribuições da Sequência Didática sobre a participação ativa e apreensão do objeto matemático em relação ao Aluno na concepção dos professores avaliadores.

Participação ativa e apreensão do objeto matemático em relação ao Aluno	
AVALIADORES	**CONTRIBUIÇÕES**
AV1	O aluno consegue associar diferentes conteúdos no aprendizado de progressão geométrica.
AV2	Proporciona que o aluno seja ativo durante a aula, que ele próprio construa o seu conhecimento. Que investigue e explore possibilidades.
AV3	Pode favorecer o aprendizado dos alunos devido ao seu caráter investigativo, que oportuniza a construção e a apropriação de saberes

	mediante uma experiência de aprendizagem ativa, em que o aprendiz passa a ser responsável por aquilo que se aprende.
AV4	**Sem contribuição**
AV5	Acredito que o aluno vai gostar de dialogar com seus pares.
AV6	Contribui para um maior envolvimento dos alunos na dinâmica da sequência didática.
AV7	A sequência está incrível e ainda se pode contribuir com recursos midiáticos. Uma sugestão: acho que ficaria muito interessante trabalhar de maneira interdisciplinar com a disciplina de artes por exemplo. Talvez até mesmo criar um kit maker para o desenvolver da sequência.
AV8	Trata-se de uma proposta que tem um potencial para que o aluno perceba características e padrões por conta própria, sem que este seja obrigado a decorar tais fórmulas sem entender muito bem como elas funcionam.
AV9	Proporciona aprendizagem, ajuda na interação com o professor e com os alunos, pois a forma como você elaborou, a meu ver, passa por esse caminho, levando a abstração correta.
AV10	Melhor percepção do conteúdo.
AV11	**Sem contribuição**
AV12	Construção do conhecimento matemático.
AV13	Acredito que as atividades poderão auxiliar na compreensão do objeto matemática de uma forma mais entusiástica e plausível.
AV14	Ter uma oportunidade de construir/descobrir o conceito por meio de uma atividade bem estruturada.
AV15	Ela ajuda o aluno a entender minuciosamente o objeto matemático.
AV16	Ele perceberá aos poucos a sequência formadas por potências que resultará em uma PG, que é o assunto pretendido.
AV17	Leva o aluno a entender melhor como funciona a progressão geométrica a partir do seu passo a passo mais detalhado utilizando diversas exemplificações.
AV18	O aluno concebe o objeto matemática de maneira ativa e atrativa.

AV19	É possível que o aluno compreenda o objeto matemático de maneira ativa.
AV20	O aluno se torna autônomo na construção do conhecimento, assim como, facilita na compreensão do objeto matemático, uma vez que, o processo de ensino e aprendizagem é gradativo.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

O Quadro 49, destaca as contribuições dos professores avaliadores em relação ao papel do aluno, também corroboramos com as indicações apresentadas. Desta maneira, destacamos as contribuições dos professores AV2, AV13 e AV20, em que relatam que a sequência didática favorece no entendimento do conteúdo e na participação dos alunos, no qual exige que o aluno seja ativo durante o processo de aprendizagem do novo conhecimento, explore e investigue novas possibilidades, consequentemente, facilita na compreensão do objeto matemático.

Portanto, durante o processo construtivo das UARC's o aluno passa a ser mais participativo ao realizar as intervenções apresentadas e reflexivo ao tomar como base em conhecimentos anteriores já estabelecidos para a reconstrução de um novo conhecimento.

Quadro 50: Relatos das contribuições da Sequência Didática sobre a constituição gradativa do conceito matemático e sua formalização em relação ao Saber na concepção dos professores avaliadores.

Constituição gradativa do conceito matemático e sua formalização em relação ao Saber	
AVALIADORES	**CONTRIBUIÇÕES**
AV1	A sequência está bem estruturada, com nível de dificuldade crescente das questões.
AV2	Funciona bem, aproxima o aluno do saber de modo não usual (definição, exemplo e exercício), aproxima o aluno do papel de pesquisador (no sentido de explorar e construir o saber).
AV3	A combinação entre os objetivos, os conteúdos, os métodos e as formas de organização da aula criam condições e os modos de garantir aos alunos uma aprendizagem significativa.
AV4	**Sem contribuição**
AV5	Acredito que o saber será contemplado no ponto de vista da introdução do conceito.

AV6	Em relação ao saber contribui para um aprendizado que pode ser baseado na semiótica de Duval.
AV7	A sequência promove o ensino de Matemática, a meu ver, de maneira adequada.
AV8	O aluno se torna um sujeito ativo em sua aprendizagem, e acaba por entender melhor o funcionamento do objeto de estudo.
AV9	Todo conhecimento parti de um conceito inicial, que começa, muitas vezes fora da escola, logo o conhecimento prévio é fundamental e a forma como seguiu suas UARC's proporciona uma compreensão que é essencial e importante sobre seu tema, sobre o objeto que vai ser ensinado.
AV10	**Sem contribuição**
AV11	**Sem contribuição**
AV12	Construção do saber.
AV13	Acredito que será um diferencial para as aulas pois parte de conceitos simples a mais complexos.
AV14	Foi bem trabalhada durante a execução das atividades.
AV15	Ela ensina gradativamente o que facilita o aprendizado.
AV16	É uma forma de construção de conhecimentos daquilo que o aluno já tem com o que ele terá em breve.
AV17	É um conteúdo que necessita dessa construção mais gradativa, a fim de que seja melhor entendido.
AV18	O conhecimento do conteúdo a ser aprendido (Progressão Geométrica) é construído de forma gradativa elevando o nível de dificuldade e de maneia autônoma.
AV19	As atividades proporcionam uma construção do conhecimento matemático de maneira gradativa, finalizando com a formalização adequada do conhecimento.
AV20	Os conceitos abordados nas atividades propostas ocorrem de maneira gradativa facilitando a compreensão da formalização.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

O Quadro 50 apresenta as contribuições dos professores avaliadores em relação ao saber, no qual, passa a ser tratado sob uma nova perspectiva, em que, o objeto matemático é construído de forma gradual, com o grau de dificuldade crescente a fim de concretizar a formalização dos conceitos, conforme apresentaram os professores AV17, AV18, AV19 e AV20, para que assim seja promovido o ensino de matemática de maneira significativa.

Portanto, conforme as considerações e contribuições realizadas pelos professores avaliadores, fica claro que ensino de progressão geométrica baseados na utilização da sequência didática apresenta um novo desafio para os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem (Tríade didática) a partir da realização das atividades no decorrer das UARC's, uma vez que, há uma abordagem mais atrativa e reflexiva.

Assim, apresentamos no Quadro 51, os apontamentos dos professores avaliadores referentes a última pergunta da avaliação da SD, no qual, se refere as potencializadas identificadas na sequência didática elaborada nesta pesquisa para o ensino de progressão geométrica.

Quadro 51: Potencialidades da Sequência Didática observadas pelos professores avaliadores.

AVALIADORES	POTENCIALIDADES	RELAÇÕES DIDÁTICAS
AV1	A sequência é bem articulada.	Campo Motivacional, das Interações e Conceitual
AV2	Foi possível apresentar e desenvolver diversos conceitos de progressão geométrica. Podemos ainda utilizar outras figuras como quadrados para instigar outras investigações (PG de razão 4). Ou então utilizar outros materiais para apresentar outros contextos sobre o mesmo tema.	Campo Conceitual
AV3	A utilização dessa Sequência Didática mostra-se como uma estratégia válida e promissora na tentativa de atender as diferenças individuais dos alunos no que	Campo Motivacional

	se refere à maneira como eles aprendem e se apropriam dos conteúdos abordados em sala de aula.	
AV4	É atrativa, é reflexiva, promove o ensino em níveis de aprendizagem.	Campo Motivacional e Conceitual
AV5	Assimilação de construir o próprio conceito, em poder constituir seu próprio conhecimento do objeto matemático e conseguir a cada atividade ter suas próprias conclusões. Gostei muito da construção da SD.	Campo Conceitual
AV6	Potencializa a aprendizagem significativa, ao ancorar conhecimentos prévios aos novos conhecimentos.	Campo Motivacional e Conceitual
AV7	Potencialidades para incrementar a sequência gerando produtos educacionais. Como já dito, seria muito interessante trabalhar a sequência, também, de maneira interdisciplinar.	Campo Motivacional, das Interações e Conceitual
AV8	Todas as vantagens citadas nas respostas anteriores desta seção.	Campo Motivacional e Conceitual
AV9	São atividades acessíveis e isto é muito importante, por conta das necessidades de certos locais (cultura), proporcionam uma melhor aprendizagem, por estar organizada de forma progressiva e dinâmica, bem estrutura. Os professores só tendem ganhar com está aplicação em sala de aula.	Campo Motivacional
AV10	Grande potencialidade.	Campo Motivacional e Conceitual
AV11	Teoria bem desenvolvida.	Campo Conceitual

AV12	Promove um cenário dinâmico com possibilidades de interações entre os pares envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem.	Campo das Interações
AV13	Acredito que motivará o aluno e irá inferir senso investigativo ao qual vai descobrindo e formalizando os conteúdos pertinentes do objeto PG.	Campo Motivacional e Conceitual
AV14	Gostei, principalmente da atividade que ensina a soma da PG, acredito que dá para o aluno entender melhor a aplicação da fórmula.	Campo Conceitual
AV15	Ela se difere bastante dos livros didáticos, mas poderia ser utilizada para aprofundamento do aprendizado.	Campo Conceitual
AV16	Potenciação, soma e a divisão que servirá de base para o alcance do assunto pretendido.	Campo Conceitual
AV17	Os exercícios bem detalhados.	Campo Conceitual
AV18	A Sequência Didática para o ensino de Progressão Geométrica permite que o aluno construa o conhecimento a partir de sua intuição e de conhecimentos prévios, de maneira autônoma, tornando a aprendizagem significativa.	Campo Motivacional e Conceitual
AV19	A Sequência Didática proporciona o ensino de Progressão Geométrica de maneira gradativa, tornando a participação do aluno de forma ativa, assim como a interação entre a turma e o professor, sem a exposição do conteúdo.	Campo Motivacional e das Interações
AV20	A Sequência Didática exige que o professor seja mediador do conhecimento	Campo Motivacional e das Interações

	e o aluno seja autônomo nesse processo, assim como, torna a aula mais atrativa, com forte interação entre os envolvidos no processo de ensino.	

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A cerca das potencialidades apresentadas, observamos que os professores avaliadores explanaram pontos importantes sobre a sequência didática. Tanto na perspectiva pedagógica, quanto matematicamente, bem como, sobre as participações dos atores da tríade didática, com ênfase no papel do professor como mediador do conhecimento, do aluno de forma mais ativa, assim como, do saber que passa a ser desenvolvido, de forma gradativa com base na utilização do processo investigativo e exploratório a partir de conhecimentos precedentes e como o uso da calculadora como recurso auxiliar no processo de formalização dos conceitos matemáticos.

Conforme a descrição dos professores avaliadores no Quadro 51, a sequência didática promove a atratividade do aluno a partir dos recursos utilizados para a realização das atividades, tais como, o método investigativo – Investigação Matemática e o uso da calculadora (Campo Motivacional); Assim como, promove a interação entre os pares, que são geradas a partir das provocações contidas nos textos das atividades propostas e mediadas pelo professor (Campo das Interações); e por fim, a estrutura da sequência didática, a partir das UARC's, através de atividades, que promove o ensino de matemática de forma gradual, no qual, potencializa a formalização do conhecimento matemática de maneira adequada e com o rigor matemático possível para as circunstâncias do ensino (Campo Conceitual).

Foi possível verificar que, durante as avaliações individuais das UARC's e a avaliação categórica das unidades conceituais, há indícios nos relatos descritos pelos professores avaliadores do conjunto de relações didáticas (tríade Professor-Aluno-Saber) que apresentam os campos motivacionais, das interações e conceituais, no qual, percebe-se a transversalidade da interação verbal/oral (Intervenção Oral de Manutenção Objetiva – I-OMO) durante as intervenções escritas (Intervenção Inicial, Reflexiva, Exploratória, Formalizante, Avaliativa Restritiva e Avaliação Aplicativa).

Desta forma, ao revermos as análises, sugestões e considerações apresentadas nas três etapas da avaliação da sequência didática (as avaliações individuais das UARC's, a avaliação categórica das unidades conceituais, e a avaliação complementar), consideramos que:

Sobre as *avaliações individuais das UARC's*, destacamos que foram apresentadas sugestões relevantes acerca das cinco atividades que compõem a sequência didática, e possui uma boa aceitação por parte dos professores avaliadores, no qual, consideramos a $60\% \leq TPM < 100\%$. A partir disto, apresentamos recursos auxiliares as essas atividades que podem ser utilizadas pelos professores como implementação da SD, assim como, atividade complementar como uso paralelo às UARC's, desta maneira, o professor aplicador da SD possui a liberdade de acrescentar os recursos auxiliares nas atividades, assim como, substitui-las conforme a necessidade dos alunos. Apontamos também, caso haja necessidade, a reordenação das atividades para que haja uma adequação temporal da realização das atividades, em que viabiliza a execução das atividades, no qual tornará a linguagem matemática mais objetiva e concreta para o aluno, assim, garante o processo de ensino e aprendizagem do objeto matemático de maneira distinta do método tradicional (quadro branco, pincel e livro didático).

Sobre a *avaliação categórica das unidades conceituais*, identificamos que houve uma boa aceitação pelos professores que realizaram as análises em relação as questões propostas sobre o conjunto de atividades da SD. Como exemplo, destacamos a atratividade aos alunos associada a utilização da calculadora e do processo investigativo. Desta forma, a partir das provocações escritas ao longo das atividades os conceitos são apresentados de forma gradativa, no qual o processo de construção do conhecimento é visto a longo prazo, em que cada atividade depende dos resultados obtidos nas atividades anteriores até a formalização, assim, ao longo das atividades, podem surgir dúvidas que afetara a realização das tarefas posteriores, portanto, ao propor cada tarefa, o professor de ver claro e objetivo na argumentação oral que irá guiar os alunos na realização das atividades, assim como, intervir caso o aluno apresente insegurança ou duvidas em seus resultados, contornando as possíveis dificuldades na compreensão do conceitos matemático.

Sobre a *avaliação complementar*, também destacamos uma boa aceitação dos professores avaliadores da sequência didática, no qual, em sua maioria, a destaque na compatibilidade da avaliação aplicativa com a SD proposta, assim como, na ascensão da interação entre o professor, o aluno e o saber. Por fim, em relação a sequência didática desenvolvida nesta pesquisa, destacamos as potencialidades ao ensino de progressão geométrica por diversas percepções apontados pelos professores avaliadores, conforme o Quadro 51. Dentre os quais, destacamos a atratividade a partir do uso da investigação matemática associada ao uso de calculadora, assim como, as influências em relação ao papel do professor como mediador do conhecimento, e do aluno em ser mais ativo e autor da própria aprendizagem e na re(construção) do saber de forma gradativa e intencional. Para a formalização dos conceitos matemáticos.

5.2.4 – Sugestões e Adaptações para a Sequência Didática

Ao considerar as sugestões e adaptações apresentadas pelos professores, desenvolvemos dois recursos auxiliares que podem contribuir para a realização das atividades nas cinco UARC's, tais recursos podem ser utilizados como atividades complementares ou serem integradas paralelamente no decorrer do desenvolvimento das atividades.

Os recursos auxiliares da SD foram desenvolvidos durante o curso de mestrado profissional em ensino de matemática da Universidade do Estado do Pará, no decorrer da disciplina de Tecnologias de Informática no Ensino de Matemática, no qual, foram desenvolvidos dois recursos tecnológicos a contribuir com o ensino de progressão geométrica através dos softwares educacionais GeoGebra[6] e Scrach[7], cuja linguagem de programação foi desenvolvida pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT).

Quadro 52: Recursos auxiliares para a sequência didática.

Softwares Educacionais	Título	Endereço eletrônico	UARC abordada
Scratch	Progressão Geométrica	https://scratch.mit.edu/projects/731186086/fullscreen/	UARC-1 UARC-3
GeoGebra	Estudando as Progressões Geométricas	https://www.geogebra.org/m/jh9fa7hm	Todas as UARC's

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

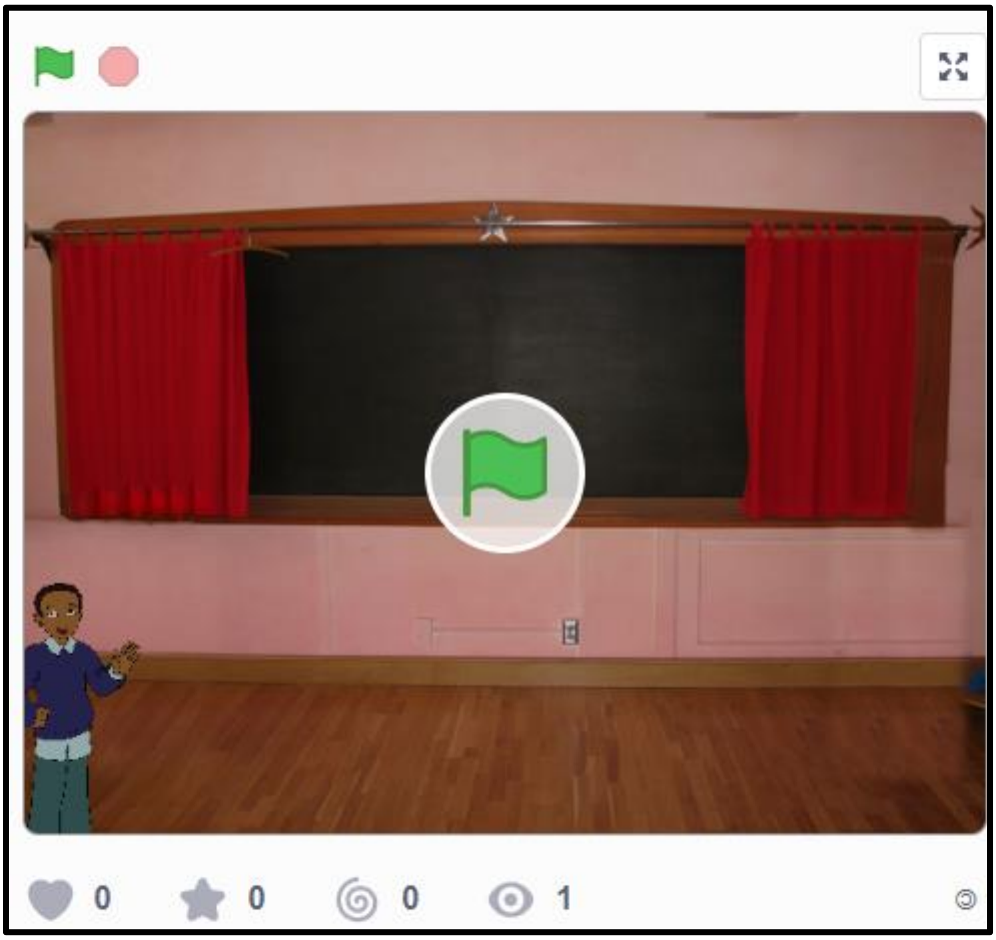
O Quadro 52 apresenta as informações necessárias para que o professor e os alunos possam acessar por meio de um smartphone ou computador com acesso à internet, no qual a interação com as plataformas digitais é totalmente por meio dos endereços eletrônicos indicados.

[6] **GeoGebra** é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única GUI. Sua distribuição é livre, nos termos da GNU General Public License, e é escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/GeoGebra >. Acesso em: 22/08/2020.

[7] **Scratch** é uma linguagem de programação criada em 2007 pelo Media Lab do MIT. Desde 2019 o Scratch 3 está disponível on-line e como uma aplicação para Windows, OS X, e Linux. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Scratch>. Acesso em: 13/09/2022.

O recurso auxiliar denominado de Progressão Geométrica, conforme o Quadro 52, que foi elaborado através do Scratch, compreende a UARC-1, em que apresenta a formalização do conceito de razão de uma PG, e a UARC-3, que apresenta a equação do termo geral de uma PG.

Figura 63: Tela inicial do recurso auxiliar no Scratch.

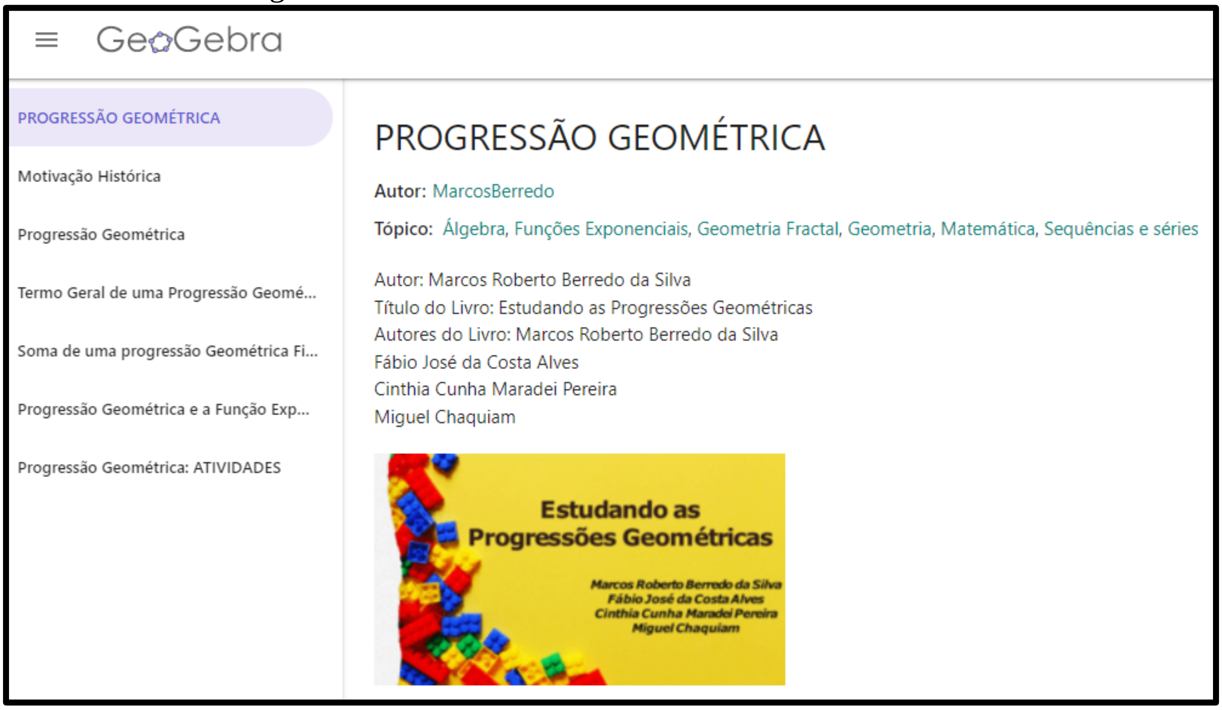


Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A Figura 63 apresenta a tela me que o usuário irá se deparar ao acessar o endereço eletrônico destacado no Quadro 52, em que irá possibilitar que o aluno interaja com a plataforma, no qual o recurso permite que o aluno passe pelo mesmo processo das UARC-1 e UARC-3 que compõe a SD de maneira digital e dinâmica, em que as atividades compostas no recurso auxiliar, apresentam vários questionamentos de maneira intencional para a formalização do conceito matemático, isto é, nas atividades elaboradas no Scratch, a plataforma foi programada para realizar o processo de intervenção ($I_i, I_r,$ I_e e I_f). Portanto, este recurso torna as atividades mais atrativas e dinâmicas e que permite a tríade professor-aluno-saber, além de reduzir o tempo de aplicação das UARC's, conforme apontado pelos professores avaliadores da SD.

Já o recurso auxiliar denominado de Estudando as Progressões Geométricas, conforme o Quadro 52, que foi elaborado através do software dinâmico GeoGebra, compreende todas as cinco UARC's da SD proposta, em que apresenta a exposição do conceito de razão de uma PG, equação do termo geral de uma PG, crescimento e decrescimento de sequências numéricas em progressão geométrica e soma dos termos de uma PG finita e infinita, além de realizar associação com temas distintos dentro da área da matemática e aplicações, tal exposição ocorre através de um livro digital elaborado a partir do GeoGebra.

Figura 64: Tela inicial do recurso auxiliar no GeoGebra.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A Figura 64 apresenta a tela inicial que o usuário irá interagir no livro digital elaborado no GeoGebra, no qual ao decorrer desta interação, o aluno terá a sua disposição vídeos motivadores e com o conteúdo de progressão geométrica, questões objetivas e discursivas, interação com a geometria dinâmica, linguagem álgebra-geométrico, entre outros, isto é, o professor pode utilizar este recurso como um instrumento complementar da sequência didática no decorrer da realização das atividades em cada uma das cinco UARC's, assim, trabalha-se diversos exemplos distintos, no qual possibilita percepções diferentes sobre o conteúdo de PG, conforme apresentam os professores avaliadores da SD.

Outra possibilidade de adaptação da sequência didática proposta, é que a partir das intervenções iniciais de cada UARC o professor pode fazer uso de materiais manipuláveis para que os alunos percebam os padrões e regularidades das sequências numéricas, uma vez que, as cinco UARC's são baseadas a partir de construções geométricas associadas a números figurados, assim possibilita que os alunos possam construir tais figura através dos seguinte materiais: Lápis, Papel, tesoura, régua, cartolina, cola, fita métrica e fita adesiva.

Visto que as atividades juntamente com o material manipulável direcionam sob orientação dos professores, os alunos para a construção do conhecimento matemático de forma interativa e atrativa, não apena visualizando o comportamento das figuras, porém, possibilita construir tal comportamento.

O principal questionamento é, por qual motivo não foi inserido essas adaptações na sequência didática proposta? como resposta, acreditamos que a SD elaborada inicialmente serve como modelo para ser utilizada em qualquer ambiente escolar e por grupos de alunos sem a preocupação se há recursos necessários para a aplicação da SD, uma vez que são necessários apenas as atividades impressas, caneta esferográfica, papel A4 e uma calculadora simples.

Por outro lado, com as adaptações proposta, deve-se haver uma preocupação se a escola possui recursos necessários para a aplicação da SD, que na maioria das vezes necessita-se de verificação se há os materiais necessários e adequados para a utilização dos alunos, tais como, computadores com acesso a internet e que possa ser utilizado por todos os alunos simultaneamente, materiais concretos de uso individual e coletivo, para que a aplicação da sequência didática seja composta por materiais manipuláveis.

Portanto, a sequência didática proposta pode ser aplicada em qualquer ambiente escolar, com adaptações, caso necessário, ou não, uma vez que, as UARC's que compõe a SD possuem potencialidades e é adequada para promover o ensino de matemática.

6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste texto, apresento os resultados de uma pesquisa desenvolvida durante o curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática sobre o ensino de Progressão Geométrica no qual respondemos a questão norteadora de pesquisa: *Que potencialidades apresenta uma sequência didática para o ensino de progressão geométrica estruturada sob a elaboração das unidades articuladas de reconstrução conceitual?*

Assim, adotei a Teoria das Situações Didática (TSD) de Brousseau (1996) como base para estruturar e nortear esta pesquisa, no qual auxiliou na compreensão de como ocorre as situações didáticas entre professor, aluno e saber em episódios de aprendizagem através de atividades elaboradas de forma planejada, estratégica, fundamentada e intencional pelo professor.

A Sequência Didática estruturada como Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual proposta por Cabral (2017), se fundamenta em estudo minucioso e profundo do objeto matemático e é constituído por intervenções que conduzem para os propósitos da TSD e permite ao estudante a construção autônoma e intuitiva de seu conhecimento em gradativos níveis de formalização, no qual a oportunidade de se fazer intervenções orais complementares.

De forma articulada aos aportes teóricos, de construção e aplicação da sequência didática com a intenção de validar através da Análise Microgenética e Análise do Discurso de acordo com Goés (2000) e Mortimer e Scott (2002), respectivamente. Tais aportes possibilitam a coleta, tratamento de dados e análise de resultados. Porém, com a crise sanitária da covid-19, a experimentação do produto não foi aplicada em uma turma do 1º ano do Ensino Médio, no qual será necessário ser avaliada por professores de matemática, para a validação da sequência didática.

Inicialmente realizei o estudo sobre o ensino de progressão geométrica em uma revisão bibliográfica e pesquisa diagnóstica sobre a opinião de professores de matemática e estudantes, além de fazer um estudo diagnóstico e experimental de dissertações e a análise de livros didáticos, com base na proposta de Masseti (2016), para investigar o que se ensina no ensino médio sobre o progressão geométrica, de modo que pude ter um panorama das principais dificuldades a serem minimizadas e possíveis metodologias pude adotar.

Na pesquisa com os professores, verifiquei o modo em que os professores se planejam para suas práticas docente, tais como, a metodológica e os recursos didáticos utilizados para o ensino de progressão geométrica, assim como, as dificuldades apresentas pelos alunos, segundo a opinião dos professores, nos assuntos relacionados a progressão geométrica. Já na pesquisa com estudantes investiguei a perspectiva desses sujeitos sobre a aprendizagem progressão geométrica, para se obter como resultado que obstáculos se dão em torno do processo de ensino e aprendizagem do objeto matemática.

Como auxílio teórico ao professor que for realizar a aplicação da SD sobre progressão geométrica elaborada nesse texto, realizei um estudo sobre o objeto matemático em questão, no qual apontei algumas considerações histórica e epistemológica. Na reconstrução histórica de progressão geométrica investiguei o campo conceitual do objeto e os obstáculos epistemológicos que causaram limitações ou avanços ao longo da história da matemática e no contexto vivenciado pelos personagens destacados.

No estudo epistemológico do objeto matemático apresentei, a partir do rigor matemático exigido para a formação de professores, reflexões sobre o conceito de função, uma vez que, foi desenvolvido, ao longo do texto, o estudo de Sequências e Progressões com evidencia da notação de funções e os elementos que constituem o comportamento funcional, as diferentes representações (língua materna, diagrama, gráfica, algébrica), no qual, dado o estudo das funções e definição de sequências, damos destaque as sequências aritméticas e sequências geométricas, sempre apontado características e as relações existentes com outros objetos matemáticos, tais como, função exponencial, função quadrática, função afim e as suas formas gráficas e geométricas, em que ressaltamos a importância da formalização, que nesta pesquisa, é indicada como sendo tarefa exclusiva do professor.

A sequência didática elaborada possui cinco unidades articuladas (atividades) que de forma simultânea e cooperativa possibilitam interações intencionais, através da investigação matemática e do uso de calculadora, entre aluno-aluno e aluno-professor, no qual estimula a qualidade dialógica do processo de ensino e aprendizagem e a construção do conhecimento individual e coletivo de maneira autônoma. Frisamos a importância da realização da oficina de conhecimentos básicos que antecede a aplicação da sequência didática, uma vez que, possibilita uma melhor preparação cognitiva dos alunos para adquirirem um novo conhecimento desenvolvido pela SD.

A elaboração da sequência didática foi um processo ímpar, principalmente para a minha formação profissional, no qual, a grande quantidade de elementos teóricos e práticos que me apropriei possibilitou uma nova perspectiva sobre o processo de ensino e aprendizagem de matemática, em que alterou o meu fazer pedagógico, com destaque a importância de se continuar a busca por metodologias de ensino que favoreçam os processos de ensino e de aprendizagem.

Na etapa de aplicação da sequência didática, inicialmente, havia a pretensão, conforme apresentado no texto, desenvolver esse processo em uma turma de alunos de 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública do estado. Porém, devido as circunstâncias ocasionadas pela pandemia da COVID-19, tivemos dificuldades de acesso às instituições, bem como, no encontro de uma turma com o que esteja com o conteúdo programático de acordo com o nível de ensino, no qual a pandemia causou todo esse transtorno no processo de ensino e aprendizagem, assim como, no retardo cognitivo do aluno. Neste sentido, redirecionamos a aplicação da sequência didática com um grupo de professores da educação básica, para que estes avaliassem a SD com base em questões de um questionário, composto por três etapas: a primeira, acerca de avaliações individuais das UARC's; a segunda, em relação a avaliação categórica das unidades conceituais; e a terceira, por uma avaliação complementar da SD.

Sobre as avaliações realizadas pelos professores em relação a sequência didática. Destacamos que na primeira etapa, foram feitos apontamentos importantes que foram consideradas na sequência didática do produto educacional, como o uso das figuras geométrica e notação de funções nas intervenções. Além disso, notamos que nas três etapas da avaliação houve uma boa aceitação das atividades pelos professores em relação a diversos aspectos que a compõem. Dentre os quais, destacamos a atratividade aos alunos associada a utilização do uso de calculadora e investigação matemática no processo, bem como, o número e ordenação das atividades.

Além disso, os professores aprovaram a compatibilidade da avaliação aplicativa com a sequência didática proposta, assim como, nas considerações positivas da tríade didática, no qual bordaram de forma subjetiva as contribuições da sequência didática para a interação entre o professor, o aluno e o saber. Assim, ao tomarmos por base o objetivo da pesquisa e as respostas dos professores avaliadores para a análise da última questão que compõe o questionário. Desta forma, a sequência didática desenvolvida apresenta potencialidades ao ensino de progressão geométrica, uma vez que, a taxa percentual média de aplicabilidade da SD está entre 60% e 100%, no qual destaque-se por diversos apontamentos dos professores que contribuem para a promoção do processo de ensino de matemática, no qual destacamos a transversalidade do campo das interações com o campo motivacional e o campo conceitual, as influências em relação ao papel do professor mediador do conhecimento, de um aluno mais ativo para o aluno e no re(construção) do saber de forma gradativa.

Portanto, embora, tenha existido um redirecionamento do processo de aplicação da sequência didática, entendemos que o objetivo elencado foi alcançado. De posse dos argumentos indicados, ressaltamos que esta pesquisa trouxe consigo além das contribuições acadêmicas supracitas para o ensino de progressão geométrica, diversas outras contribuições. Dentre elas, destacamos a mudança de perfil profissional em relação a forma de se trabalhar com a Matemática, com base em uma nova perspectiva sobre as diversas possibilidades que a Educação Matemática propícia para o ensino de matemática. Destacamos também, buscamos as sugestões e contribuições apontadas pelos professores avaliadores para apresentarmos possibilidades de adaptações que contribuem para o ensino de matemática, bem como, reorganiza as atividades conforme a necessidade prevista do ambiente escolar e do público-alvo.

Ao vivenciar o curso de mestrado, percebi a importância de sempre estarmos refletindo sobre nossa prática pedagógica, de se preocupar se de fato nossos alunos entendem o que é explicado em sala, assim como de se atualizar e trabalhar outras metodologias que venham facilitar a aprendizagem. Trabalhar com sequências didáticas no ensino trouxe grandes contribuições para a minha formação, pois mudou a minha postura como professor, não sendo mais aquele que só aborda os conceitos no quadro branco e explica, mas sim aquele que constrói os conceitos junto com os alunos, assumindo assim o papel de professor-mediador.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, José Moysés. **As formulações de Vygotsky sobre a Zona de Desenvolvimento Proximal.** Amazônia – Revista de Educação em Ciências e Matemática. v.1 – n. 2. Universidade Federal do Pará (UFPA). 2004 – 2005.

ARRUDA, Alexandre Goulart. **Ensino de juros compostos, progressão geométrica e função exponencial.** 125 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 2013.

AVELINO, Karla Cristina. **Sequência didática investigativa para o ensino de ondas sonoras.** 104f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, PB, 2017.

BALESTRI, Rodrigo. **Matemática:** interação e tecnologia. Volume 1, 1. ed. São Paulo: Leya, 2016. p. 178 – 202.

BEMFICA, Andrios e ALVEZ, Cassiana**. Fractais: Progressão e Série geométrica, uma metodologia de ensino.** Faculdade Cenecista de Osório-FACOS, 2010. <http://facos.edu.br/publicacoes/revistas/modelos/agosto_2011/pdf/fractais_progressao_e_serie_geometrica.pdf>. Acesso em: 21/10/2021.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Prisma matemática:** Funções e Progressões. Volume 1, 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020. p.116 – 144.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio.** Brasília: MEC/Semtec, 1999.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o Ensino Médio (PCNEM).** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC/SEF, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular**. Brasília, DF, 2018.

BRASIL. Ministérios da Educação. **Lei de diretrizes e Bases da Educação Brasileira**. Brasília: MEC/SEM, 1996.

BRASIL. Ministérios da Educação. **Plano Nacional de Educação**. Brasília: MEC, 2014.

BRASIL. Presidência da República. **Decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017**. Brasília, 2017.

BROUSSEAU, Guy. **Fundamentos e métodos da didáctica da Matemática.** In: BRUM, J. (Org.). Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996. p. 35-114.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas:** conteúdos e métodos. Ática. São Paulo, 2008.

CABRAL, Natanael Freitas. **O papel das interações professor-aluno na construção da solução lógico-aritmética otimizada de um jogo com regras.** 151 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – UFPA, 2004.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas:** estrutura e elaboração. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017. 104 p.

CARCANHOLO, Flávia Pimenta de Souza. **Os jogos como alternativa metodológica no ensino de matemática.** 2015. 129 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2015.

CELUQUE, Leonardo. **A Série de Fibonacci:** um estudo das relações entre as ciências da complexidade e as artes. 99p. Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências Universidade Federal da Bahia /UEFS, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre. Salvador – BA, 2004.

CERQUEIRA, Ana Cecília Sanches. **Um estudo sobre sequências e séries.** 63 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro: [s.n.], 2013.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaios temáticos:** história e matemática em sala de aula. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

CHICONATO, Daniele Cristina. **Despoluição de um lago** – progressão geométrica. Dissertação apresentada à Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). 149 f. São Carlos - SP: UFSCar, 2013.

CÔRTES, Ivana R. C. **Geometria Fractal no Ensino Médio: Teoria e Prática.** Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO), programa de pós-graduação em matemática-mestrado (PROFMAT). Rio de Janeiro-RJ, 2014.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** Contextos e aplicações. Volume 1, 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. p. 208 – 229.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em Contextos:** função exponencial, função logarítmica e sequências. Volume 1, 1. ed. São Paulo: Ática, 2020. p. 106 – 140.

EVES, Howard W. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campina: Editora da Unicamp, 1995.

FEDALTO, Dirceu Luiz. **O imprevisto futuro das calculadoras nas aulas de matemática no ensino médio.** 160 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2006.

FERREIRA, Maridete Brito Cunha. **Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas**. 2016. 342 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

GOMES, Andreia S. **Motivação do estudo de áreas e perímetro de figuras geométricas através dos fractais.** Universidade Federal do Paraná (UFPR). Monografia parcial à conclusão do curso de especialização para professores de matemática. Curitiba- PR, 2007.

GONÇALVES, Fábio Barros. **Uma Sequência Didática para o ensino de função quadrática.** 2019, 288 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

IEZZI, Gelson et al. **Fundamentos da Matemática Elementar:** Conjuntos e Funções. Vol 1. ed. 3. São Paulo: Atual, 1977. p. 181-A – 197-A.

JUNIOR, Ivonzil José Soares. **Inter-relação entre progressão geométrica e função:** aplicada ao Ensino Médio. 97 f. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas. Curitiba, PR, 2015.

LEDUR, José Ricardo. **Construindo o Conceito de Aceleração –** Uma Proposta Voltada para a Aprendizagem Significativa. SCIENTIA CUM INDUSTRIA (SCU REVISTAS) PP.61-64, 2014.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do ensino Médio.** Vol. 1. Coleção do professor de Matemática. SBM. Rio de janeiro, 1997.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real:** Funções de uma variável. volume 1. 10 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

LOPES, Fernando Henrique. **O Ensino de progressão geométrica de segunda ordem no Ensino Médio.** 67 f. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. São José do Rio Preto, 2017.

LUZ, Emanueli V. **A geometria fractal como fator minimizador das dificuldades referentes a conceitos geométricos.** Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Programa de mestrado profissional em matemática em rede nacional (PROFMAT). São José do Rio Preto, 2016.

MAGNONI, Roberto A. **A física no Ensino Médio:** possibilidades pedagógicas para o ensino da cinemática. Monografia de Especialização. Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Medianeira-PR, 2014.

MARCHETO, Raquel. **O uso do software geogebra no estudo de progressões aritméticas e geométricas, e sua relação com funções afins e exponenciais.** 148 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2017.

MASSETI, Cristina. **Análise de livros didáticos de Matemática:** função exponencial. 163 f. Dissertação (Mestrado em educação matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2016.

MELO, C. B. da Silva; BISOGNIN, Eleni. **Utilizando a metodologia de ensino através da resolução de problemas para a construção do conceito de progressão geométrica.** XII Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo – SP, 2016.

MILANI, Wilton Natal. **A resolução de problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no Ensino Médio.** 127 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto, Instituo de Ciências Exatas e Biológicas, Departamento de Matemática, Ouro Preto, MG, 2011.

MOÇAMBITE, Nixon da Silva. **Situações didáticas na aprendizagem matemática na perspectiva de construção do conhecimento**. 216 f. Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Amazonas (UFAM). Manaus – AM, 2016.

MOTA, N. O. **Aprendizagem de Progressões Aritméticas:** Suas aplicações por meio de Sequência Didática. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

NEGRI, Marília Gomes. **Introdução ao Estudo dos Fractais.** Universidade Federal de Goiás (UFG). Programa de mestrado profissional em matemática em rede nacional (PROFMAT). Goiânia-GO, 2014.

OLIVEIRA, João Batista Araújo; GUIMARÃES, Sonia Dantas Pinto; BOMÉNY, Helena Maria Bousquet; **A política do livro didático.** São Paulo: Summus; Campinas: Editora da Universidade Estadual de Campinas, 1984.

OLIVEIRA, Marconni Augusto Pock de. **Sequência Didática para o Ensino de Função Exponencial.** 2018. 279 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

ORLANDI, Eni Puccinelli. **Análise de Discurso:** princípios & procedimentos. 8. ed. Campinas: Pontes, 2009. 100p.

PEREIRA, Marcos. **Uma Sequência Didática para o ensino de semelhança de figuras planas.** 2017. 166 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2017.

PONTE, João Pedro da. *et al.* **Histórias de investigações matemáticas**. Editora: Instituto de Inovação Educacional (IEE), Lisboa – Portugal, 1998.

REIS, Helder Gustavo Pequeno dos. **Compreensão dos conceitos perímetro da circunferência e área do círculo com o auxílio do GeoGebra**. 2012. 176 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2012.

SANTOS, Osmair Carlos dos. **Do ensino tradicional à iniciação a atividades de investigação matemática:** desconstruindo velhos hábitos. 2018. 107 f. Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2018.

SILVA JUNIOR, L. M. da. **O desenvolvimento do pensamento algébrico e das relações funcionais com uso de padrões matemáticos:** Uma compreensão à luz da Teoria das Situações Didáticas. 2016. 173f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PPGECEM)- Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2016.

SILVA, Edna Machado. **O conceito de função e suas linguagens**. 2019, 179f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática para compreender o mundo.** Volume 1, 1.ed. São Paulo: Saraiva, 2016. p. 140 – 169.

SOUZA, Pâmella de Alvarenga. **Uma proposta didática para o estudo de progressões por meio dos fractais:** rotação por estações. 165 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, Campos dos Goytacazes, RJ, 2019.

SULEIMAN, A. R. INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS: Conteúdos e métodos de ensino. **Educação: Teoria e Prática**, v. 25, n. 48, 2015, p. 200-206.

TEODORO, Marcelo M. e AGUILAR, Juan C. Z. **Método de Newton e Fractais.** Universidade Federal de São João Del-Rei (UFSJ). Mestrado profissional em matemática (PROFMAT). São João Del-Rei-MG, 2015.

VYGOTSKY, L. S. **Thinking and Speech.** In: R. W. Rieber, e A. S. Carton (Eds), The Collected Works of L.S. Vygotysky (Vol. 1), Problems of General Psychology. Nova York: Plenum Press, 1934, p. 39-285.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa:** como ensinar. Tradução: Ernani F. da F. Rosa; revisão técnica: Nalú Farenzena. Porto Alegre: Penso, 1998.

ANEXOS

Anexo A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para Professores

Prezado(a) Professor (a),

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa a nível de Mestrado, sob a responsabilidade dos pesquisadores Prof. Marcos Roberto Berredo da Silva (mestrando) e Prof. Dr. Miguel Chaquiam (orientador), vinculados à Universidade do Estado do Pará (UEPA), Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE).

O objetivo desta pesquisa é propor alternativas metodológicas de ensino que venham minimizar as dificuldades de aprendizagem em Matemática. A sua colaboração será em participar das tarefas que iremos propor a vocês. Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa poderão ser publicados e ainda assim a sua identidade será preservada.

Você não terá nenhum gasto ou ganho financeiro por participar da pesquisa. Também não envolve nenhum risco de qualquer natureza. Os benefícios serão de cunho acadêmico objetivando melhorias no processo de ensino aprendizagem de matemática na Educação Básica. Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação. Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você, contendo a sua assinatura e de assinatura de seu responsável.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores: MARCOS ROBERTO BERREDO DA SILVA (prof.marcosberredo@yahoo.com) ou MIGUEL CHAQUIAM (miguelchaquiam@gmail.com). Você poderá também entrar em contato com a Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Bairro: Telégrafo sem Fio. Belém - Pará - CEP: 66113 - 010.

Belém, _______ de _______________ de 2022

____

Assinatura do pesquisador

Eu, professor (a) ____, aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

____

Assinatura do (a) professor (a) participante

Anexo B – Questionário para os professores de matemática

Prezados (as) professores (as),

Estamos desenvolvendo uma pesquisa, a fim de gerar dados acerca dos docentes de matemática, com a finalidade de futuramente elaborar produtos educacionais que possam contribuir para a melhoria no processo de ensino e aprendizagem de matemática, em especial sobre a Progressão Geométrica. Este instrumento tem como objetivo obter informações para um estudo que pretende contribuir para superação dos obstáculos de ensino e aprendizagem de matemática, encontrados por professores e alunos durante as atividades em sala de aula. Para tanto, necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1. Você possui graduação em: - Selecionando a opção "Outro", justifique.
(   ) Matemática
(   ) Outro:

2. Qual a sua formação acadêmica? (maior titulação) - Selecionando a opção "Outro", justifique.
(   ) Graduação
(   ) Especialização (em andamento)
(   ) Especialização
(   ) Mestrado (em andamento)
(   ) Mestrado
(   ) Doutorado (em andamento)
(   ) Doutorado
(   ) Pós-doutorado
(   ) Outro:

3. Qual o seu tempo de serviço como professor de Matemática?
(   ) até 5 anos
(   ) de 6 a 10 anos
(   ) de 11 a 15 anos
(   ) de 16 a 20 anos
(   ) Há mais de 20 anos

4. Quais as principais formas de avaliação que você costuma utilizar em sala de aula? (Se necessário, você pode selecionar mais de uma opção) - Selecionando a opção "Outro", justifique.
(   ) Prova oral
(   ) Prova escrita
(   ) Lista de Exercícios
(   ) Auto - avaliação
(   ) Produções no caderno
(   ) Fichas de observação
(   ) Outro:

5. Durante sua formação inicial (graduação) como foi introduzido este conteúdo de Progressão Geométrica? Selecionando a opção "Outro", justifique.
(   ) Definição, seguido de exemplos e exercícios.
(   ) Situação problema, definição, seguido de exemplos e exercícios.

( ) Modelagem Matemática de modo a obterá definição, seguido de exemplos e exercícios.
( ) Por meio de materiais manipuláveis de modo a obter a definição, seguido de exemplos e exercícios.
( ) Por meio de jogos de modo a obter a definição, seguido de exemplos e exercícios.
( ) Uso da História da Matemática como recurso didático, seguido de definição, exemplos e exercícios.
( ) Uso das tecnologias de modo a obter a definição, seguido de exemplos e exercícios.
( ) Não vi esse conteúdo na graduação.
( ) Outro:

6. Em média, quantas aulas você utiliza para trabalhar o assunto do Termo Geral de uma Progressão Geométrica?
( ) Uma aula.
( ) De duas a quatro aulas.
( ) De cinco a oito aulas.
( ) Mais de oito aulas.

7. Quando você ensina sobre a Progressão Geométrica em sala de aula, qual documento oficial você utiliza para elaborar suas aulas e atividades? (Caso necessário, marque mais de um item). - Selecionando a opção "Outro", justifique.
( ) Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM
( ) Base Nacional Comum Curricular – BNCC
( ) Livro Didático de Matemática
( ) Outro:

8. Quando você ensina progressão geométrica, a maioria das suas aulas iniciam: - Selecionando a opção "Outro", justifique.
( ) Definição, seguido de exemplos e exercícios.
( ) Situação problema, definição, seguido de exemplos e exercícios.
( ) Modelagem Matemática de modo a obterá definição, seguido de exemplos e exercícios.
( ) Por meio de materiais manipuláveis de modo a obter a definição, seguido de exemplos e exercícios.
( ) Por meio de jogos de modo a obter a definição, seguido de exemplos e exercícios.
( ) Uso da História da Matemática como recurso didático, seguido de definição, exemplos e exercícios.
( ) Uso das tecnologias de modo a obter a definição, seguido de exemplos e exercícios.
( ) Outro:

9. Quando você ensina progressão geométrica, a maioria das suas aulas iniciam a partir de: - Selecionando a opção "Outro", justifique.
( ) Modelo Funcional (fazer uso de função).
( ) Modelo Geométrico. (fazer uso de construções geométricas)
( ) Modelo Numérico. (fazer uso de sequências numéricas)
( ) Outro:

10. Para fixar o conteúdo estudado de Progressão Geométrica, você geralmente faz uso de: (Caso necessário, marque mais de um item). - Selecionando a opção "Outro", justifique.
( ) Apresentação e correção de lista de exercícios com atividades selecionadas.
( ) Apenas apresentação de lista de exercícios com atividades selecionadas.
( ) Indica e corrige as atividades constantes no Livro Didático de Matemática.
( ) Apenas indica as atividades constantes no Livro Didático de Matemática.
( ) Propõe atividades para serem resolvidas com o uso das tecnologias.
( ) Não propõe atividades de fixação.
( ) Outro:

11. Quando você ministra o conteúdo Progressão Geométrica (P.G.), quais assuntos você costuma ensinar? (Caso necessário, marque mais de um item). - Selecionando a opção "Outro", justifique.
( ) Construção e gráfico associado a uma P.G.
( ) Classificação de uma P.G.

(   ) Representação genérica de uma P.G.
(   ) Termo geral de uma P.G.
(   ) Interpolação geométrica.
(   ) Produto dos termos de uma P.G.
(   ) Soma dos termos de uma P.G. finita.
(   ) Soma dos termos de uma P.G. infinita.
(   ) Outro:

12. Quando você ministra o conteúdo Progressão Geométrica, quais conteúdos você considera importante ser relacionado? (Caso necessário, marque mais de um item) - Selecionando a opção "Outro", justifique.
(   ) Figuras Geométricas.
(   ) Função Exponencial.
(   ) Juros Compostos.
(   ) Situações reais que podem ser associadas a P.G.
(   ) Outro:

13. Quando você ministra o conteúdo progressão geométrica, você utiliza na apresentação desse conteúdo: - selecionando a opção "Outro", justifique.
(   ) Sequências Didáticas.
(   ) História da Matemática.
(   ) Resolução do Problemas.
(   ) Modelagem Matemática.
(   ) Livro Didático de Matemática.
(   ) Outro:

14. Com base na sua experiência como professor, sobre o conteúdo de Progressão Geométrica (P.G.), qual o grau de dificuldade dos alunos na aprendizagem dos assuntos listados abaixo?

14.1. Construção e gráfico associado a uma P.G.
(   ) Fácil e bem compreensível.
(   ) Fácil, mas apresentam poucas dificuldades.
(   ) Médio e apresentam dificuldades de compreensão.
(   ) Médio e apresentam muitas dificuldades de compreensão.
(   ) Difícil e apresentam dificuldades de compreensão.

14.2. Classificação de uma P.G.
(   ) Fácil e bem compreensível.
(   ) Fácil, mas apresentam poucas dificuldades.
(   ) Médio e apresentam dificuldades de compreensão.
(   ) Médio e apresentam muitas dificuldades de compreensão.
(   ) Difícil e apresentam dificuldades de compreensão.

14.3. Representação genérica de uma P.G.
(   ) Fácil e bem compreensível.
(   ) Fácil, mas apresentam poucas dificuldades.
(   ) Médio e apresentam dificuldades de compreensão.
(   ) Médio e apresentam muitas dificuldades de compreensão.
(   ) Difícil e apresentam dificuldades de compreensão.

14.4. Termo geral de uma P.G.
(   ) Fácil e bem compreensível.
(   ) Fácil, mas apresentam poucas dificuldades.
(   ) Médio e apresentam dificuldades de compreensão.
(   ) Médio e apresentam muitas dificuldades de compreensão.
(   ) Difícil e apresentam dificuldades de compreensão.

14.5. Interpolação geométrica.
(   ) Fácil e bem compreensível.
(   ) Fácil, mas apresentam poucas dificuldades.
(   ) Médio e apresentam dificuldades de compreensão.

( ) Médio e apresentam muitas dificuldades de compreensão.
( ) Difícil e apresentam dificuldades de compreensão.

14.6. Produto dos termos de uma P.G.
( ) Fácil e bem compreensível.
( ) Fácil, mas apresentam poucas dificuldades.
( ) Médio e apresentam dificuldades de compreensão.
( ) Médio e apresentam muitas dificuldades de compreensão.
( ) Difícil e apresentam dificuldades de compreensão.

14.7. Soma dos termos de uma P.G. finita.
( ) Fácil e bem compreensível.
( ) Fácil, mas apresentam poucas dificuldades.
( ) Médio e apresentam dificuldades de compreensão.
( ) Médio e apresentam muitas dificuldades de compreensão.
( ) Difícil e apresentam dificuldades de compreensão.

14.8. Soma dos termos de uma P.G. infinita
( ) Fácil e bem compreensível.
( ) Fácil, mas apresentam poucas dificuldades.
( ) Médio e apresentam dificuldades de compreensão.
( ) Médio e apresentam muitas dificuldades de compreensão.
( ) Difícil e apresentam dificuldades de compreensão.

15. Na sua opinião, os alunos conseguem entender de forma clara a definição da fórmula do termo geral de uma progressão geométrica descrito abaixo? Faça um comentário sobre este questionamento e a definição abaixo.

Na progressão geométrica, em que o primeiro termo é $a_1 \neq 0$ e a razão é $q \neq 0$, o $n - ézimo$ termo é

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

16. Na sua opinião, os alunos conseguem entender de forma clara a definição da fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica descrito abaixo? Faça um comentário sobre este questionamento e a definição abaixo.

Na progressão geométrica finita, em que o primeiro termo é a_1 e a razão é $q \neq 1$, a soma S_n dos n termos de uma P.G. finita é

$$S_n = \frac{a_n . q^n - a_1}{q - 1}$$

17. Na sua opinião, os alunos conseguem entender de forma clara a definição da fórmula da soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica descrito abaixo? Faça um comentário sobre este questionamento e a definição abaixo.

Na progressão geométrica infinita, em que o primeiro termo é a_1 e a razão é $-1 < q < 1$, a soma S_n dos infinitos termos de uma P.G. é

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Anexo C - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para Alunos

Prezado(a) Aluno(a),

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa a nível de Mestrado, sob a responsabilidade dos pesquisadores Prof. Marcos Roberto Berredo da Silva (mestrando) e Prof. Dr. Miguel Chaquiam (orientador), vinculados à Universidade do Estado do Pará (UEPA), Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE).

O objetivo desta pesquisa é propor alternativas metodológicas de ensino que venham minimizar as dificuldades de aprendizagem em Matemática. A sua colaboração será em participar das tarefas que iremos propor a vocês. Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa poderão ser publicados e ainda assim a sua identidade será preservada.

Você não terá nenhum gasto ou ganho financeiro por participar da pesquisa. Também não envolve nenhum risco de qualquer natureza. Os benefícios serão de cunho acadêmico objetivando melhorias no processo de ensino aprendizagem de matemática na Educação Básica. Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação. Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você, contendo a sua assinatura e de assinatura de seu responsável.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores: MARCOS ROBERTO BERREDO DA SILVA (prof.marcosberredo@yahoo.com) ou MIGUEL CHAQUIAM (miguelchaquiam@gmail.com). Você poderá também entrar em contato com a Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Bairro: Telégrafo sem Fio. Belém - Pará - CEP: 66113 - 010.

Belém, _______ de _______________ de 2022

____

Assinatura do pesquisador

Eu, aluno (a) ____, aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

____

Assinatura do (a) aluno (a) participante

Anexo D - Questionário para os alunos egressos

Prezado(a) aluno(a), Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino - aprendizagem da Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Ao responder este questionário, você está concordando em participar desta pesquisa de forma voluntária e anônima. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1. Você gosta de matemática?
( ) Não gosto.
( ) Um Pouco.
( ) Sim. Gosto.
( ) Sim. Gosto bastante.

2. Você consegue compreender as explicações dadas nas aulas de Matemática?
( ) Sempre
( ) Quase sempre
( ) Poucas vezes
( ) Nunca compreendo

3. Quais as principais formas de avaliação o professor de matemática costuma solicitar a você? (Marque mais de uma opção, se necessário)
( ) Prova oral
( ) Prova escrita
( ) Autoavaliação
( ) Fichas de observação
( ) Produções no caderno
( ) Outros. Qual:

4. Como você gostaria de aprender Progressão Geométrica?

4.1. Através de aulas expositivas e consulta ao livro didático.
( ) Sempre.
( ) Quase Sempre.
( ) As Vezes.
( ) Raramente.
( ) Nunca.

4.2. Através de situação problema para introduzir o assunto.
( ) Sempre.

(   ) Quase Sempre.
(   ) As Vezes.
(   ) Raramente.
(   ) Nunca.

4.3. Através de experimentações práticas do dia-a-dia.
(   ) Sempre.
(   ) Quase Sempre.
(   ) As Vezes.
(   ) Raramente.
(   ) Nunca.

4.4. Através de Jogos para depois sistematizar os conceitos.
(   ) Sempre.
(   ) Quase Sempre.
(   ) As Vezes.
(   ) Raramente.
(   ) Nunca.

4.5. Através de Recursos Tecnológicos.
(   ) Sempre.
(   ) Quase Sempre.
(   ) As Vezes.
(   ) Raramente.
(   ) Nunca.

5. sobre o conteúdo de Progressão Geométrica (P.G.), qual o grau de dificuldade dos alunos na aprendizagem dos assuntos listados abaixo?

5.1. Construção e gráfico associado a uma P.G.
(   ) Fácil e compreendo bem.
(   ) Fácil, mas apresento poucas dificuldades.
(   ) Médio e apresento dificuldades de compreensão.
(   ) Médio e apresento muitas dificuldades de compreensão.
(   ) Difícil e apresento dificuldades de compreensão.

5.2. Classificação de uma P.G.
(   ) Fácil e compreendo bem.
(   ) Fácil, mas apresento poucas dificuldades.
(   ) Médio e apresento dificuldades de compreensão.
(   ) Médio e apresento muitas dificuldades de compreensão.
(   ) Difícil e apresento dificuldades de compreensão.

5.3. Representação genérica de uma P.G.
(   ) Fácil e compreendo bem.
(   ) Fácil, mas apresento poucas dificuldades.

( ) Médio e apresento dificuldades de compreensão.
( ) Médio e apresento muitas dificuldades de compreensão.
( ) Difícil e apresento dificuldades de compreensão.

5.4. Termo geral de uma P.G.
( ) Fácil e compreendo bem.
( ) Fácil, mas apresento poucas dificuldades.
( ) Médio e apresento dificuldades de compreensão.
( ) Médio e apresento muitas dificuldades de compreensão.
( ) Difícil e apresento dificuldades de compreensão.

5.5. Interpolação geométrica.
( ) Fácil e compreendo bem.
( ) Fácil, mas apresento poucas dificuldades.
( ) Médio e apresento dificuldades de compreensão.
( ) Médio e apresento muitas dificuldades de compreensão.
( ) Difícil e apresento dificuldades de compreensão.

5.6. Produto dos termos de uma P.G.
( ) Fácil e compreendo bem.
( ) Fácil, mas apresento poucas dificuldades.
( ) Médio e apresento dificuldades de compreensão.
( ) Médio e apresento muitas dificuldades de compreensão.
( ) Difícil e apresento dificuldades de compreensão.

5.7. Soma dos termos de uma P.G. finita.
( ) Fácil e compreendo bem.
( ) Fácil, mas apresento poucas dificuldades.
( ) Médio e apresento dificuldades de compreensão.
( ) Médio e apresento muitas dificuldades de compreensão.
( ) Difícil e apresento dificuldades de compreensão.

5.8. Soma dos termos de uma P.G. infinita.
( ) Fácil e compreendo bem.
( ) Fácil, mas apresento poucas dificuldades.
( ) Médio e apresento dificuldades de compreensão.
( ) Médio e apresento muitas dificuldades de compreensão.
( ) Difícil e apresento dificuldades de compreensão.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Respostas dos professores sobre a definição do Termo Geral de uma P.G.

Respostas
P1: Sim P2: Conseguem entender de forma clara a definição e podem compreender ainda mais seguido de um exemplo. P3: Sim,após a explicação. P4: Acredito que sim, porém muitos alunos não entendem muito bem os passos usados em uma generalização. P5: De forma clara não! Percebo que a dificuldade que eles têm em função exponencial atrapalha a compreensão da fórmula do termo geral. P6: Sim, Termo geral da PG é uma fórmula que determina um termo qualquer de uma PG quando conhecemos o primeiro termo, a posição do termo a descobrir e a razão dessa progressão. P7: Não P8: Muitos alunos apresentam dificuldade na hora de identificar a posição do termo a ser calculado, frequentemente confundindo a posição do termo com um fator que multiplica a incógnita "a". P9: O aluno sozinho não conseguirá entender, mas depois da explanação da definição, sim! P10: Não, tão clara, mas, com a repetição de exercícios, conseguem entender e aprender, mesmo que seja para aquela avaliação. P11: Não, eles apresentam dificuldades em reconhecer cada elemento do modelo apresentado. P12: Na maioria das vezes a dificuldade do aluno está relacionada com a questão de atribuição dos termos aos respectivos valores que eles correspondem. E em menor grau, com a interpretação desses termos dentro do problema proposto. Isso, na maioria das vezes, deixa lacunas na aprendizagem do aluno. P13: Para a maioria dos alunos, não. Usar diretamente a forma matemática da definição da PG com toda a certeza os alunos sequer irão querer entender. P14: Média compreensão, visto que na PA muda algumas letras, leva a um pouco de confusão. P15: Não, devido a dificuldade de representar uma idéia numérica em forma algébrica P16: Conseguem entender após compreender o que cada termo significa. P17: Sim, pois é bem intuitiva P18: Geralmente a utilização de termos formais da matemática tornam a percepção mais difícil. P19: Melhor iniciar de forma numérica, e daí extrair a fórmula com uma forma de escrita mais simples. P20: Sim, após resolução de problemas relacionados. P21: Não, se não tiver construído o significado disso antes. P22: Não entendem com clareza devido a dificuldade deles em entender a simbologia P23: A definição não é fácil de entender, devido a linguagem ser técnica, com uma simbologia que os alunos não estão acostumados.

P24: Eles conseguem entender para aplicar, agora, sua utilização mesmo muito poucos conseguem. Necessita-se sempre de uma análise mais voltada para o dia a dia.
P25: Logo no início não mas depois com alguns exemplos o aluno já tem a concepção dessa modelagem.
P26: Se eles tiverem uma boa noção prévia de PA, eles conseguem entender sim de forma clara.
P27: Somente conseguem entender se iniciarmos a explicação com um exemplo prático para depois formalizar a definição.
P28: Sim.
P29: Não conseguem compreender facilmente ,precisa se explicar cada termo e sua função.
P30: Não, a menos que seja associado a um exemplo do cotidiano.
P31: Sim, porém eles ainda possuem dificuldades em relação aos cálculos envolvidos
P32: Não, geralmente precisam de uma explicação detalhada.
P33: Não. Geralmente os alunos compreendem quando trabalhamos com números, imagens, quando se trata só de análise algébrica sentem dificuldades.
P34: Não conseguem! As definições são mais bem assimiladas quando partem de uma situação-problema.
P35: Sim, ministro para alunos de bacharel em matemática e eles entendem sem problemas
P36: Para compreender o termo geral, precisamos primeiro entender a definição e os tipos de progressão geométrica que possam existir. Sendo assim, o termo geral está em função do primeiro termo e da sua razão fixa.
P37: Na maioria das vezes de primeira não. Para que o entendimento seja razoável ainda se faz necessário uma revisão de função exponencial e de potência.
P38: Não diretamente, quando formalizo essa definição explico cada parte detalhada, a partir daí eles compreendem melhor.
P39: Depende da forma que é explicada. Eu, particularmente, busco explicar cada elemento da expressão, então os alunos tendem a entender a fórmula com mais facilidade
P40: Não. O aluno da Edu básica têm dificuldade com definições pois a maioria tem uma fraca base algébrica
P41: Na minha experiência em sala de aula, observo que há muita dificuldade em compreender a fórmula, mas quando se aplica números na mesma, tem-se um pouco mais de dinâmica na tentativa de resolução de questões relacionadas à ela.
P42: Sim,quando explica se a função de cada termo
P43: Não. Em geral os alunos não conseguem ler frases puramente algébricas. Mas entendem de forma parcial após explicação e exemplos.
P44: Somente pela fórmula fica muito abstrato, fica mais fácil por causa da P.A., mas eles conseguem entender depois como eles vão manipular. A fórmula em si poucos entendem o porquê.
P45: Usando a base de exercícios a compreensão fica mais fácil, porém ainda aparecem dúvidas de compreensão ou aplicação.
P46: Eles conseguem compreender quando o professor apresenta exemplos.

APÊNDICE B - Respostas dos professores sobre a definição da soma dos termos de uma P.G. finita

Respostas
P.1: Conseguem entender de forma clara a definição e podem compreender ainda mais seguido de um exemplo. P2: Sim. P3: Não tão bem. P4: Acredito que sim, porém na maioria dos casos os alunos apenas sabem operar com a fórmula. P5: Sim. P6: De forma clara não! Percebo que a dificuldade que eles têm em função exponencial atrapalha a compreensão da fórmula da soma de uma P.G. finita. P7: Sim, pois eles podem encontrar a soma dos n termos de uma progressão geométrica a partir da fórmula geral. P8: Não. P9: Como dito, o maior problema não é definição em si da soma dos termos, mas deficiência da álgebra aplicada ali. Claro, um domínio de potenciação é de suma importância para o entendimento se fazer mais claro. Também já identifiquei algumas vezes a dificuldade em perceber que o resultado é a soma de todos os termos, do primeiro ao n-ezimo. P10: O Aluno, depois de repetidas exemplificações, conseguirá responder. P11: Com explicação e exemplos é possível essa compreensão de aplicar a fórmula da soma dos n termos de uma PG. P12: De certo modo sim, uma vez que este tópico é abordado após o termo geral. Todavia, ainda apresentam dificuldades. P13: Na maioria das vezes a dificuldade do aluno está relacionada com a questão de atribuição dos termos aos respectivos valores que eles correspondem. E em menor grau, com a interpretação desses termos dentro do problema proposto. Isso, na maioria das vezes, deixa lacunas na aprendizagem do aluno. P14: Diretamente não. Se realizar exemplos de como resolver uma questão envolvendo a Soma, eles terão mais facilidade de saber quem são os componentes da equação. P15: Uma compreensão média, visto que se confundem de fórmula. P16: Não, devido a dificuldade de representar uma idéia numérica em forma algébrica. P17: Entendem com um pouco de dificuldade. P18: Sim, tendo em vista que eu coloco a forma simplificada dessa fórmula, colocando o a1 em evidência. Dessa forma, a fórmula parece ser mais simples para eles. P19: A demonstração da fórmula geralmente melhora essa percepção é uma forma mais simples de escrever a fórmula também. P20: Não. P21: Conseguem entender se o significado foi discutido antes em por meio de situações ou problemas. P22: Muito pouco, devido a dificuldade em entender a simbologia. P23: Não, devido a linguagem ser técnica e dificulta o entendimento. P24: Não, conseguem apenas aplicar na questão para resolver. P25: Com os exemplos durante as aulas o aluno percebe que a soma tem haver com a definição.

P26: Se eles compreenderam bem as definições anteriores de PG, eles conseguem entender sim de forma clara esta também.
P27: Quando chegamos nessa definição o estudante já tem um certo entendimento dos termos de uma PG, portanto na minha opinião o entendimento dessa definição fica mais clara e fácil.
P28: Não.
P29: Não conseguem entender facilmente a fórmula.
P30: Não, normalmente assim como o anterior necessitam de um exemplo do cotidiano.
P31: Sim, porém eles ainda possuem dificuldades em relação aos cálculos envolvidos.
P32: Não, geralmente precisam de uma explicação detalhada.
P33: Não. Geralmente os alunos compreendem quando trabalhamos com números, imagens, quando se trata só de análise algébrica sentem dificuldades.
P34: Não, os alunos enfrentam muitas dificuldades para compreender ou interpretar proposições algébricas!
P35: Sim, com a demonstração fica mais claro.
P36: Somar os termos de uma PG seria uma tarefa bastante trabalhosa se a quantidade dos termos fosse muito grande. Para somas pequenas, a escrita desses termos é a realização da soma bastariam. Progressão geométrica finita é uma PG que tem um número determinado de elementos. Por exemplo, a sequência (3,6,12,24,48) é uma PG de razão igual a q = 2.
P37: Tendo por base as minhas últimas turmas referente aos últimos 4 anos, em torno de 70% dos alunos não conseguem ver sentido para essa fórmula, o que acaba fazendo com que eles não entendam a mesma de modo funcional e consequentemente, apresentam dificuldades de entendimento.
P38: A maioria dos alunos ainda possuem dificuldades com a leitura algébrica, auxílio eles falando e comentando cada variável de modo que eles compreendam do que estou falando.
P39: Depende da forma que é explicada. Eu, particularmente, busco explicar cada elemento da expressão, então os alunos tendem a entender a fórmula com mais facilidade. Porém necessito de mais tempo para justificar a necessidade da soma dos termos.
P40: Não. O aluno da Educação básica têm dificuldade com definições pois a maioria tem uma fraca base algébrica .
P41: Fórmulas gerais sem aplicação direta é um problema para o discente. Quanto maior, menos entendimento.
P42: Sim,quando se explica a função de cada termo.
P43: Não. Em geral os alunos não conseguem ler frases puramente algébricas. Mas entendem de forma parcial após explicação e exemplos.
P44: Não. Aprendem só a manipular
P45: Já nesse tópico a dúvida aumenta, não sou pela fórmula mas pela aplicação e compreensão da questão.
P46: Eles têm dificuldades em memorizar a fórmula e entender a demonstração, mas conseguem entender a finalidade dela.

APÊNDICE C - Respostas dos professores sobre a definição da soma dos termos de uma P.G. infinita

RESPOSTAS
P1: Sim. P2: Não. P3: Conseguem entender de forma clara a definição e podem compreender ainda mais seguido de um exemplo. P4: Não tão bem. P5: Acredito que sim, porém requer uma maior atenção e dedicação do professor quanto a explicação do professor sobre a fórmula e os conceitos de generalização envolvidos. P6: Sim! P7: Sim, pois é possível somar os termos de uma PG infinita dividindo o valor do primeiro termo dessa sequência por 1 – q (um menos a razão). P8: Ficam confusos quanto ao denominador, trocando "q-1" por "1-q". P9: Os alunos sentem muita dificuldade em resolver. P10: Entendo, como experiência própria, que quando define-se a fórmula e a função de cada dado, com exemplos eles conseguem entender e aplicar aos demais exercícios, selecionados, para solução. P11: Compreender não, apenas acabam por reproduzir a fórmula quando solicitado. IP12: De certo modo sim, uma vez que este tópico é abordado após o termo geral. Todavia, ainda apresentam dificuldades. P13: Com Exemplos e exercícios, sim. P14: Compreensão média P15: Não, devido a dificuldade de representar uma ideia numérica em forma algébrica Conseguem compreender. P16: Sim. P17: A priori não, pois a ideia de números infinitos soa para os alunos do Ensino Médio como algo estranho P18: Essa é a de mais difícil compreensão pois envolve a ideia de limite que não é explorada no ensino fundamental. P19: Não. P20: Se for apresentado o que seria uma soma infinita antes de apresentar a fórmula é possível entender. P21: Não, pois entendem pouco a simbologia. P22: Sim. P23: O aluno tem facilidade de decorar a fórmula, mais dificuldade de entender. P24: Não, apresentam dificuldades na sua aplicação. P25: Quando é colocado o primeiro termo e o aluno consegue entender a razão de uma pg fica tudo mais esclarecido ele trabalhar com o modelo. P26: Se eles compreenderam bem as definições anteriores de PG, eles conseguem entender sim de forma clara esta também. P27: Não. P28: Sim. Mesmo pensamento do item anterior. P29: Precisam de explicação ,sobre a função de cada cada termo. P30: Não, normalmente observo muitas dúvidas com relação ao infinito. P31: Não, geralmente precisam de uma explicação detalhada.

P32: Não. Geralmente os alunos compreendem quando trabalhamos com números, imagens, quando se trata só de análise algébrica sentem dificuldades.
P33: Não, a maioria não tem bem definida a idéia de infinito, assim como apresentam dificuldades em interpretar proposições algébricas.
P34: Essa fórmula só é válida se a progressão geométrica for decrescente. Em outras palavras, a razão da PG deve pertencer ao intervalo entre zero e 1, exceto por esses valores.
P35: Não.
P36: Não, geralmente precisam de uma explicação detalhada.
P37: Não. Geralmente os alunos compreendem quando trabalhamos com números, imagens, quando se trata só de análise algébrica sentem dificuldades.
P38: Depende da forma que é explicada. Eu, particularmente, busco explicar cada elemento da expressão, então os alunos tendem a entender a fórmula com mais facilidade. Porém necessito de mais tempo para justificar como é possível fazer uma soma de infinitos termos
P39: Não. O aluno da Edu básica têm dificuldade com definições pois a maioria tem uma fraca base algébrica
P40: A formalidade matemática das fórmulas prontas sempre acarretará incompreensão.
P41: O mais prático seria, ao máximo, tentar contextualizar as questões, para depois tentar resolvê-las sem auxílio destas tais fórmulas. Uma vez resolvendo a questão por outros artifícios, aí sim poderíamos oferecer a praticidade de aplicar a situação à tal fórmula.
P42: Sim,quando explica se a função de cada termo
P43: Não. Em geral os alunos não conseguem ler frases puramente algébricas. Mas entendem de forma parcial após explicação e exemplos.
P44: Não, sentem muita dificuldade.
P45: Como até então é uma fórmula mais simples entendem porém apresentam dificuldades de aplicar nas questões, devido problemas na interpretação
P46: Eles têm dificuldade em entender a fórmula, mas sabem para qual fim ela é utilizada. A demonstração é complicada de explicar, pois requer o uso de limite.

APÊNDICE D - Teste de Diagnóstico Inicial

I. POTENCIAÇÃO

Questão 01) Calcule as potências abaixo.

a) $2^0 =$

b) $2^1 =$

c) $2^2 =$

d) $2^3 =$

e) $2^4 =$

f) $2^5 =$

g) $3^0 =$

h) $3^1 =$

i) $3^2 =$

j) $3^3 =$

k) $3^4 =$

l) $3^5 =$

Questão 02) Escreva na forma de potência mais simplificada possível, com uma única base e expoente, as expressões abaixo.

a) $2 \,.2 =$

b) $2^3 .\, 2^2 =$

c) $\frac{2^3\,.2^2}{2^5} =$

d) $(2^3)^2 =$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} =$

f) $3.3 =$

g) $3^2 .\, 3^3 =$

h) $\frac{3^2.3^3}{3^5} =$

i) $(3^2)^3 =$

j) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} =$

II. FUNÇÃO EXPONENCIAL

Questão 01) Preencha os quadros abaixo determinando os valores para $f(x)$, dado os valores de x.

a) $f(x) = 2^x$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

b) $f(x) = -2^x$

x	$f(x)$
-2	

-1	
0	
1	
2	

c) $f(x) = (-2)^x$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

f) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

g) $f(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^x$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	

2	

h) $f(x) = 3.2^x$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

i) $f(x) = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

III. SEQUÊNCIA NUMÉRICAS.

Questão 01) Montar as seguintes sequências:

a) Sequência 1, somar com 3 (2, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___)

b) Sequência 2, subtrair de 3 (27, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___)

c) Sequência 3, multiplicar por 2 (3, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___)

d) Sequência 4, dividir por 2 (512, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___)

Questão 02) Observe as sequências e complete-as:

a) (1, 3, 5, 7, 9, ___)

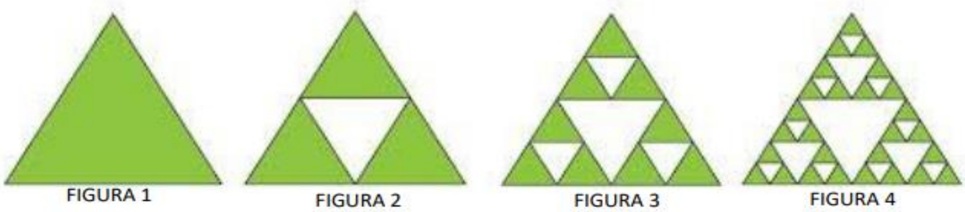
b) (18, 15, 12, 9, 6, 3, ___)

c) (1, 2 , 4, 8, 16, ___)

d) (32, 16, 8, ___)

IV. NÚMEROS FIGURADOS

Observe a figura a seguir e responda às questões 1 e 2.



Questão 01) Sabendo que a quantidade de Triângulos Verdes contidos em cada figura representa um número natural, por exemplo:

FIGURA 1: 1 Triângulo Verde

FIGURA 2: 3 Triângulos Verdes

FIGURA 3: 9 Triângulos Verdes

FIGURA 4: 27 Triângulos Verdes

Seguindo o mesmo padrão, se tivéssemos apresentado a FIGURA 5, qual seria o número natural que representaria a quantidade de Triângulos Verdes?

Questão 02) Observando a quantidade de Triângulos Verdes em cada figura e sabendo que são representadas por números naturais, qual padrão você observou para determinar a quantidade de Triângulos Verdes em cada figura posterior a FIGURA 1?

APÊNDICE E – Oficina de Conhecimentos Básicos

I. POTENCIAÇÃO

Antes de falar sobre potenciação e suas propriedades, é necessário que primeiro saibamos o que vem a ser uma potência. Observe o exemplo abaixo:

$$\mathbf{2 . 2 . 2 . 2 = 2^4}$$

Note que nesse exemplo o número 2 (chamado de fator) se repete 4 vezes em uma multiplicação que pode ser representada da forma como vem depois da igualdade, ou seja, apenas com o número 2 elevado a 4 onde esse número quatro indica a quantidade de fatores (quantas vezes o 2 se repete).

A essa representação damos o nome de potência. Com isso podemos concluir que, potência nada mais é do que a representação de uma multiplicação de um mesmo número em "n" vezes.

De forma geral, temos:

$$a^n = \underbrace{a \, . \, a \, . \, a \, . \; \ldots \, . \, a}_{\text{n - vezes}}$$

Vamos conhecer agora as principais partes de uma potência, com o seguinte exemplo abaixo:

expoente

$$5^3 = 5 \, . \, 5 \, . \, 5 = 125$$

base   potência

- Chamamos de base o termo que se repete na multiplicação, é o fator da multiplicação.

Nesse caso, a base é o número 5.

- Chamamos de expoente ao número que fica elevado, ele indica o número de fatores da multiplicação.

Nesse caso o número de fatores é "3" ou seja, "5 · 5 · 5" indica que são 3 fatores 5, que possui como resultado 125.

- A esse resultado damos o nome de potência, ou seja, é o valor final da multiplicação.

Propriedades Fundamentais

Potência elevada a expoente zero: Quando uma potência estiver elevada a expoente zero, o seu resultado será sempre igual a 1.

$$a^0 = 1$$

$$5^0 = 1 \quad ; \quad 13^0 = 1 \quad ; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

Potência elevada a expoente um: Quando uma potência estiver elevada a um expoente igual a 1, o seu resultado será sempre a própria base.

$$a^1 = a$$

$$4^1 = 4 \quad ; \quad \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{1}{5} \quad ; \quad 19^1 = 19$$

Potência elevada a expoente par: Quando uma potência estiver elevada a um expoente par, o seu resultado será sempre um número positivo.

$$\mathbf{3^4 = 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 81}$$

$$\mathbf{(-3)^4 = (-3) \,.\, (-3) \,.\, (-3) \,.\, (-3) = 81}$$

Potência elevada a expoente ímpar: Quando uma potência estiver elevada a um expoente ímpar, o seu resultado terá sempre o mesmo sinal da base.

$$\mathbf{4^3 = 4 \,.\, 4 \,.\, 4 = 64}$$

$$\mathbf{(-4)^3 = (-4) \,.\, (-4) \,.\, (-4) = -64}$$

Potência elevada a expoente negativo: Quando uma potência estiver elevada a um expoente negativo, devemos inverter a base da potência e trocar o sinal do expoente para positivo.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3\,.\,3\,.\,3\,.\,3}{2\,.\,2\,.\,2\,.\,2} = \frac{81}{16}$$

Observação: Inverter a base de uma potência significa trocar, ordenadamente, o numerador pelo denominador e vice-versa.

Assim, sendo a e b dois números reais, temos:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n} = \frac{1}{a^{n}} \longrightarrow 8^{-2} = \left(\frac{1}{8}\right)^{2} = \frac{1^{2}}{8^{2}} = \frac{1}{64}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = \left(\frac{a}{1}\right)^{n} = a^{n} \longrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{1}\right)^{4} = 5^{4} = 625$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n} = \frac{b^{n}}{a^{n}} \longrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{2} = \frac{4^{2}}{3^{2}} = \frac{16}{9}$$

Potência elevada a expoente fracionário: Quando uma potência estiver elevada a um expoente fracionário, devemos transformar a potência em um radical, onde o índice é o denominador do expoente e o radicando é a base elevada ao numerador do expoente.

$$6^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{6^{2}}$$

Assim: Sejam m e n números inteiros positivos, com $n \geq 2$. Se a é um número real para o qual existe $\sqrt[n]{a}$, então:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{m}}$$

Multiplicação de potências de mesma base: Para multiplicar potências de mesma base, conservamos a base e somamos os expoentes.

$$a^{m} \cdot a^{n} = a^{m+n}$$

$$7^{4} \cdot 7^{5} = 7^{4+5} = 7^{9}$$

$$13 \cdot 13^{3} = 13^{1+3} = 13^{4}$$

Divisão de potências de mesma base: Para dividir potências de mesma base, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

$$a^{m} : a^{n} = a^{m-n} \quad ou \quad \frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}$$

$$5^{8} : 5^{6} = 5^{8-6} = 5^{2} = 25$$

$$2^4 \ : \ 2^7 = 2^{4-7} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Potência de potência: Para resolver uma potência de potência, conservamos a base e multiplicamos os expoentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6$$

$$(10^4)^5 = 10^{4 \cdot 5} = 10^{20}$$

Potência de um produto: Para resolver, devemos elevar cada fator do produto (multiplicação) ao expoente indicado.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(6 \cdot 9)^4 = 6^4 \cdot 9^4$$

$$(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

Potência de um quociente: Para resolver, devemos elevar cada termo do quociente (divisão) ao expoente indicado.

$$(a : b)^n = a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(5 : 8)^2 = 5^2 : 8^2 = 25 : 64$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27}$$

II. FUNÇÃO EXPONENCIAL

Antes de definirmos função exponencial, é de suma importância que o aluno compreenda como calcular a raiz de uma equação exponencial.

Definição: Seja

$$a \in \mathbb{R}, a > 0 \ e \ a \neq 1$$

Chamamos de equação exponencial a equação real definida por:

$$\mathbf{a^x = b}$$

Observação: Na equação exponencial a variável aparece no expoente.

Exemplos:

$5^x = 125$; $16^{x+1} = 512$; $(3^x)^2 = 27$; $10^{x-4} = 0{,}001$

Para resolver uma equação exponencial, partimos do princípio da igualdade: Duas potências de mesma base tem o mesmo valor quando seus expoentes forem iguais.

$$\mathbf{a^x = a^y \longrightarrow x = y}$$

bases iguais, expoentes iguais.

$3^x = 3^4 \longrightarrow$ x = 4 (bases iguais, expoentes iguais).

$6^{2x} = 6^{x-3} \longrightarrow$ 2x = x – 3 (bases iguais, expoentes iguais).

$10^{3x-5} = 10^{x+2} \longrightarrow$ 3x – 5 = x + 2 (bases iguais, expoentes iguais).

Etapas para a resolução de uma equação exponencial:

a) Usar a decomposição (fatoração) para igualar as bases.

b) Aplicar as propriedades de potências, quando necessário.

c) Aplicar o princípio da igualdade.

d) Resolver a equação resultante. (1º ou 2º grau)

e) Analisar o resultado encontrado.

Definição: Seja

$$a \in \mathbb{R}, a > 0 \; e \; a \neq 1$$

Chamamos de Função Exponencial a função real definida por:

$$f : R \to R_+^*, tal\ que\ f(x) = a^x$$

Observação: A base a é sempre positiva e diferente de 1.

Condição de existência: Base positiva e diferente de 1.

$$0 < a < 1 \quad \text{e} \quad a \neq 1$$

a) $f(x) = 3^x$ (a base é 3 – maior que 1).

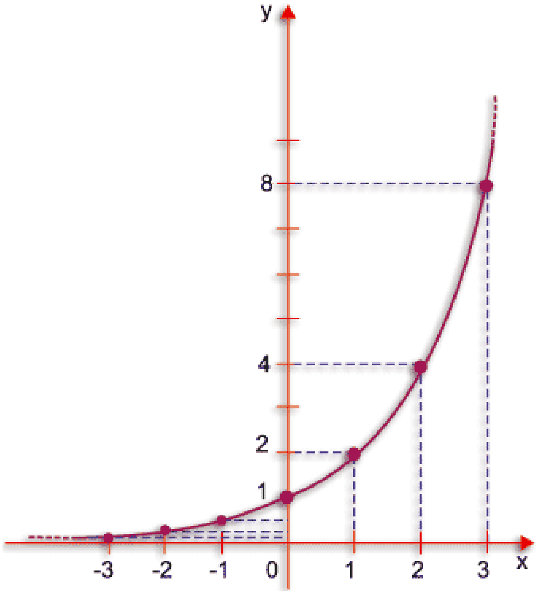
b) $f(x) = (1/5)^x$ (a base é 1/5 – menor que 1).

c) $f(x) = (4/3)^x$ (a base é 4/3 – maior que 1).

d) $f(x) = (0{,}01)^x$ (a base é 0,01 – menor que 1).

Observe a função $f(x) = x^2$:

x	$y = 2^x$	(x; y)
−3	$y = 2^{-3} = \frac{1}{8}$	$\left(-3; \frac{1}{8}\right)$
−2	$y = 2^{-2} = \frac{1}{4}$	$\left(-2; \frac{1}{4}\right)$
−1	$y = 2^{-1} = \frac{1}{2}$	$\left(-1; \frac{1}{2}\right)$
0	$y = 2^0 = 1$	(0; 1)
1	$y = 2^1 = 2$	(1; 2)
2	$y = 2^2 = 4$	(2; 4)
3	$y = 2^3 = 8$	(3; 8)

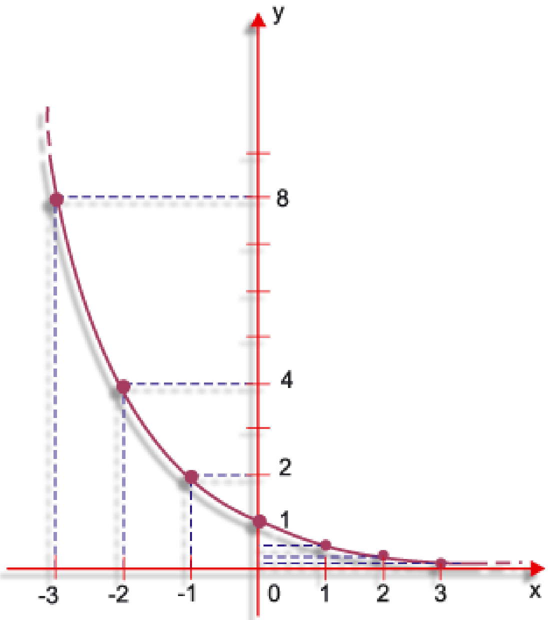


Observe que: Se $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) \; < \; f(x_1)$, ou seja, aumentando os valores de x, os valores de y também aumentam. Nesse caso, dizemos que a função é crescente.

Assim: Se $a \; > \; 1$, a função é crescente (base maior que 1).

Observe a função $f(x) \; = \left(\frac{1}{2}\right)^z$:

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	(x; y)
−3	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$	(−3; 8)
−2	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$	(−2; 4)
−1	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$	(−1; 2)
0	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$	(0; 1)
1	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$	$\left(1; \frac{1}{2}\right)$
2	⊠	$\left(2; \frac{1}{4}\right)$
3	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$	$\left(3; \frac{1}{8}\right)$



Observe que: Se $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) > f(x_1)$, ou seja, aumentando os valores de x, os valores de y diminuem. Nesse caso, dizemos que a função é decrescente.

Assim: Se $0 \; < \; a \; < \; 1$, a função é crescente (base entre 0 e 1).

III. SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Para representar uma sequência, utilizamos uma regra ou lei de formação. Pode ser de forma matemática utilizando letras e números para representar os termos, mas também escrita. Exemplo:

(2, 5, 8, 11, 14, ...)

(2, 2+3, 5+3, 8+3, 11+3, ...)

Regra: a partir do primeiro termo, obtemos o próximo somando 3 unidades.

Definição: Uma sequência numérica ocorre quando o termo seguinte pode ser calculado em função do anterior.

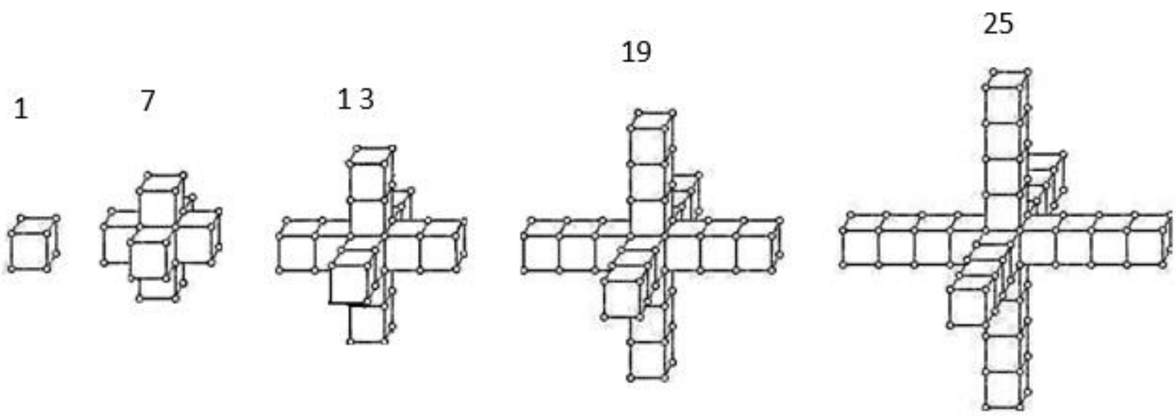
Exemplos:

a) (2, 5, 8, 11, 14, 17, ...);

b) (21, 11, 1, – 9, – 19, ...).

IV. NÚMEROS FIGURADOS

Observe a seguinte sequência de figuras:



É possível obter uma expressão que permita descobrir o número de cubos de qualquer figura dessa sequência?

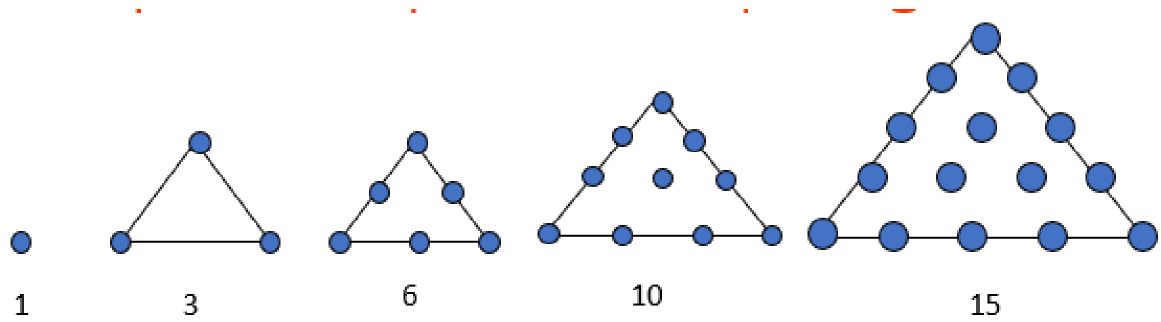
Figura	**Nº de cubos**

1	1+6 x 0 = 1
2	1+6 × 1=7
3	1+6 × 2=13
4	1+6 × 3=19
5	1+6 × 4=25
6	1+6 × 5=31
…	...
N	1+6 ×(n-1)

Obtemos a expressão: **1+6 ×(n-1) = 6n-5** que define a lei de formação dos cubos da figura.

Números Triângulares

Observe as figuras abaixo

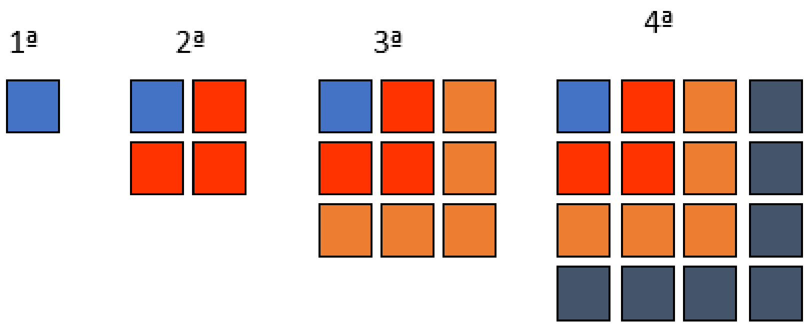


A sequência dos números (1,3,6,10,15,...) é chamada de sequência dos números triangulares. Assim, a lei de formação que define essa sequência de números triangulares e dada por:

$$\boldsymbol{a_n = \frac{(n+1).n}{2}}$$

Números Quadrados

Observe as figuras abaixo



Essa sequência de figuras pode ser representada pela sequência numérica:

(1, 4, 9, 16, ...)

Neste caso, a sequência numérica que representa a figura é chamada de sequência dos números quadrados. Assim, a lei de formação que define essa sequência de números quadrados e dada por:

$$a_n = n^2$$

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem