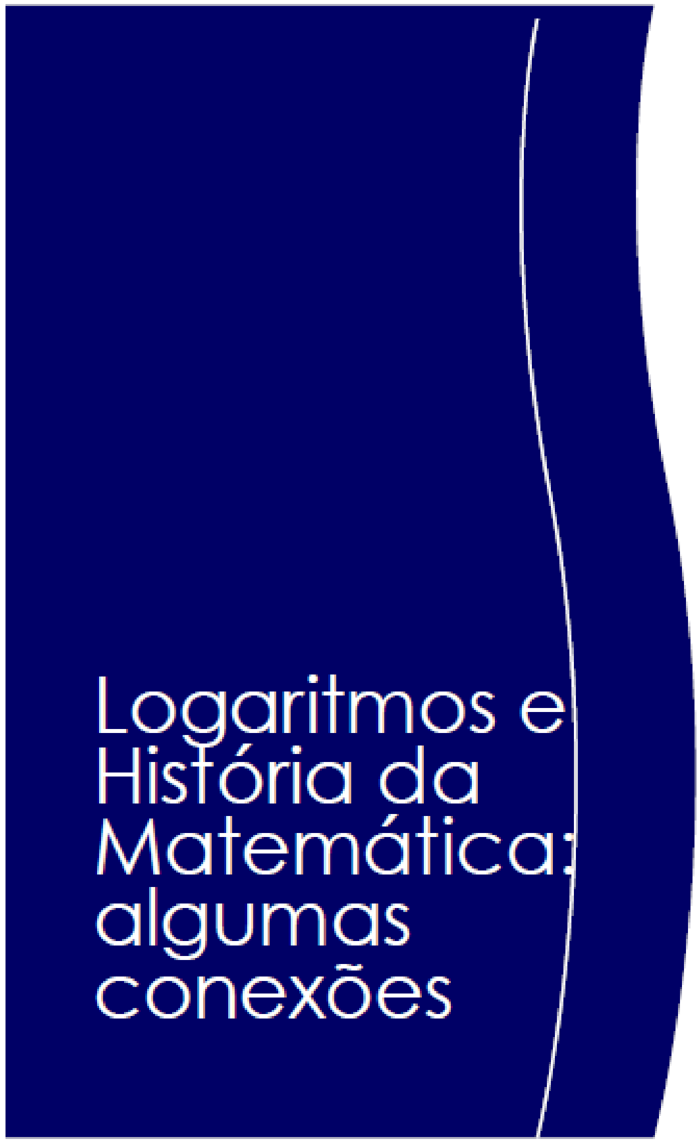
APÊNDICE A - Produto educacional



Apresentação

Caro(a) professor(a),

Este Produto Educacional é resultado do desenvolvimento da pesquisa intitulada "Logaritmos e História da Matemática: elaboração de um material paradidático" realizada no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), sob a orientação da Profa. Dra. Regina Helena Munhoz.

O objetivo desse material paradidático é apresentar uma abordagem diferenciada a respeito da construção do conceito de logaritmo a partir de uma perspectiva histórica. Para tanto, sugiro o uso do mesmo com alunos do Ensino Médio.

O livro está dividido em cinco partes: história dos logaritmos, curiosidades, sugestões de pesquisa, demonstração de propriedades, propostas de exercícios e atividades.

Se desejar mais informações acerca do desenvolvimento deste trabalho, poderá consultar o título no banco de dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Espero que esse material contribua para o seu processo de ensino e aprendizagem!

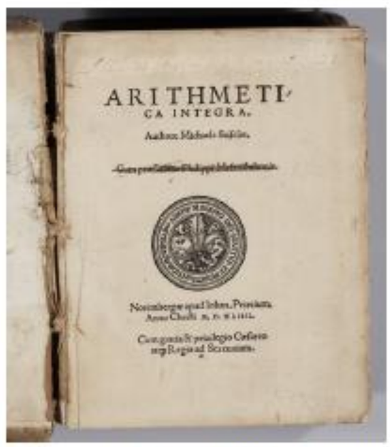
Caroline Vanessa Wendland

Índice

História dos logaritmos

No século XIV surgiu na Itália um movimento cultural, artístico e intelectual chamado Renascimento. A denominação visa a retomada da cultura clássica greco-romana, cultivada nos séculos V e IV a.C.. O Renascimento se difundiu pela Europa nos séculos seguintes, representando, entre outras, uma revolução científica baseada no racionalismo.

No ramo da Matemática, em especial na Alemanha, foram desenvolvidos diversos livros de Álgebra. Um desses é *Arithmetica integra* (1544) de Michael Stifel (1486—1567). Abaixo segue página de rosto desta obra.



Fonte: Mathematical Association of America, 2011.

Stifel enuncia que para o produto de quaisquer dois termos da progressão geométrica (*1, q, q², ...*) o resultado será o mesmo que a soma dos expoentes correspondentes. Assim, tem-se a propriedade abaixo.

$$q^m . q^n = q^{m+n}$$

Segue exemplo.

$$2^3 . 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

Analogamente, ao dividir um termo de uma progressão geométrica por outro equivale a subtrair os expoentes correspondentes. Abaixo tem-se a propriedade.

$$\frac{q^m}{q^n} = q^{m-n}$$

Segue exemplo.

$$\frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3$$

VEJA
PROPOSTA 1
PÁGINA 24

Assim, fica também definido $q^0=1$ quando $m = n$.

Desta forma, Stifel verificou que cada termo da progressão é uma potência de razão comum *q* e que os expoentes formam uma progressão aritmética. Assim, relacionou progressões geométricas e aritméticas, prenunciando a invenção dos logaritmos.

P.G.: é uma sequência numérica a qual todo termo é igual ao produto de seu antecessor com uma constante chamada de razão.

P.A.: é uma sequência numérica a qual todo termo é igual à soma de seu antecessor com uma constante chamada de razão.

Observe a tabela de potências de dois abaixo.

Expoente	Potência	Resultado
0	2^0	1
1	2^1	2
2	2^2	4
3	2^3	8
4	2^4	16
5	2^5	32
6	2^6	64
7	2^7	128
8	2^8	256
9	2^9	512
10	2^{10}	1024

Na primeira coluna se encontra uma P.A. de razão 1. Já na terceira coluna há uma P.G. de razão 2.

Note que, caso se deseje calcular algumas potências de dois, é possível utilizar as que aparecem na tabela acima.

Alguns exemplos:

$$2^{13} = 2^{10+3} = 2^{10}.2^{3} = 1024.8 = 8192$$

$$2^{20} = 2^{10+10} = 2^{10}.2^{10} = 1024.1024 = 1048576$$

$$2^{17} = 2^{20-3} = \frac{2^{20}}{2^{3}} = \frac{1048576}{8} = 131072$$

$$2^{24} = 2^{8.3} = (2^{8})^{3} = 256^{3} = 16777216$$

De maneira simples, esta foi a ideia de Napier!

Em 1590, o escocês John Napier (1550 – 1617), ativista religioso muito interessado por aspectos da computação e trigonometria, tomou conhecimento da prostaférese na Dinamarca. Prostaférese, do latim *prosthaphaeresis*, refere-se à um algoritmo utilizado para transformar somas e produtos. Unindo o conhecimento da prostaférese com as ideias de Stifel, começou a desenvolver os logaritmos (da composição grega *logos* e *arithmos*, que significa número proporcional) .

Para construir sua primeira tábua de logaritmos, Napier optou por trabalhar com potências de um número próximo de 1. Para este fim, escolheu o valor abaixo.

$$1 - \frac{1}{10^7} = 0,9999999$$

O escocês construiu uma tabela inicial com 101 elementos e cada termo era obtido subtraindo-se do termo anterior a sua 10^7 parte. Observe:

Progressão geométrica	Valor aproximado (multiplicado por 10^7)	Progressão aritmética
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^0$	10000000	0
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^1$	9999999	1
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2$	9999998	2
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^3$	9999997	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{99}$	9999901	99
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{100}$	9999900	100

Para aplicar a tabela de Napier, procura-se os números que serão multiplicados na coluna de aproximação da progressão geométrica. Então se deve somar os valores correspondentes na coluna da progressão aritmética. O valor obtido deve ser encontrado na coluna da progressão aritmética, daí basta verificar o valor relacionado na coluna de aproximação da progressão geométrica. Por fim, multiplica-se o número por 10^7, aumentando o mesmo em sete ordens decimais.

Por exemplo, suponha que se deseja calcular 9999999 . 9999901. Segundo a tabela, os valores a serem multiplicados estão relacionados com os números 1 e 99, respectivamente, na coluna da progressão aritmética. Ora, 1 + 99 = 100. Na centésima primeira linha da coluna da progressão aritmética, está relacionado o valor $10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{100}$ na coluna da progressão geométrica. Finalmente, multiplicando este valor por 10^7 obtém-se 99999000000000. Em outros termos:

$$\left[10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^1\right].\left[10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{99}\right] =$$

$$10^7.10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^1.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{99} =$$

$$10^7.10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{1+99} =$$

$$10^7.\left[10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{100}\right] =$$

$$10^7.9999900 =$$

$$99999000000000$$

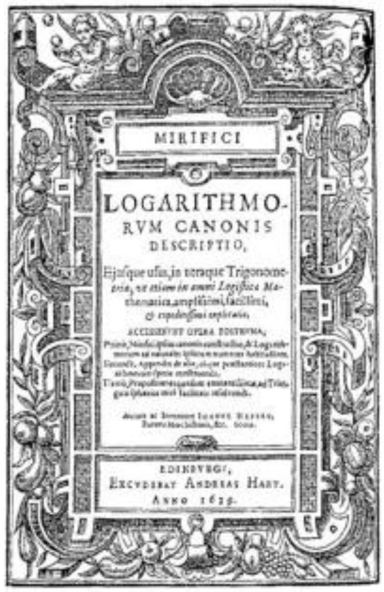
VEJA
PROPOSTA 2
PÁGINA 25

Assim, Napier transformou multiplicações exaustivas em cálculos bem mais simples!

Para Napier, supondo N um número qualquer, L é seu logaritmo se satisfeita a relação abaixo.

$$N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$$

Em 1614 Napier publicou o trabalho em latim intitulado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição do maravilhoso cânone dos logaritmos). Nele há uma tábua que dá os logaritmos dos senos de ângulos para minutos sucessivos de arco (o que interessava muito para estudiosos da época). Um trabalho posterior, chamado *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (Construção do maravilhoso cânone dos logaritmos), foi publicado postumamente por seu filho Robert em 1619. Na figura abaixo encontra-se a folha de rosto da edição de 1619 do *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* de Napier, que também contém o seu *Constructio*.


MIRIFICI

LOGARITHMORUM CANONIS DESCRIPTIO,

Ejusque usus, in utraque Trigonometria, ut etiam in omni Logistica Mathematica, amplissimi, facillimi, & expeditissimi explicatio,

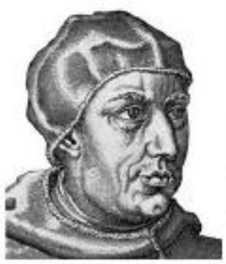
[illegible]

EDINBURGI,
EXCUDEBAT ANDREAS HART.
ANNO 1619.

Fonte: Maor, 2008.

No ano seguinte à publicação da *Descriptio*, o professor inglês Henry Briggs (1561 – 1630), se reuniu com Napier. Ambos concordaram que as tábuas seriam mais eficientes se o logaritmo de um fosse zero, não mais 10^7, e o logaritmo de dez fosse uma potência apropriada de dez. Decidiram que $\log 10 = 1 = 10^0$. Isto é, se um número positivo *N* for escrito como $N = 10^L$, então *L* é o logaritmo *briggsiano* ou *comum* de *N*, escrito como $\log_{10} N$ ou apenas $\log N$. Assim surgiu o conceito de base, implicando nos logaritmos conhecidos hoje.

Em 1736, Leonard Euler (1707 – 1783) apresentou uma definição para logaritmos que difere da de Napier, mas que é utilizada atualmente como definição moderna. Esta diz que se $N = b^L$, onde *b* é um número positivo fixo, diferente de um, então L é o logaritmo de base *b* de *N*.


Stifel


Napier


Euler

VEJA
PROPOSTA 3
PÁGINA 26

Curiosidades

⇒ É comum utilizar o termo *logaritmo neperiano* para designar o logaritmo natural (de base e). Entretanto, encontra-se no trabalho de Napier um sistema de base *1/e*. Vale destacar que Napier não trabalhava com o conceito de base de um sistema de logaritmos, pois sua definição era diferente da atual. Também não se utilizava o símbolo e na época, apesar de seu valor ser conhecido nos estudos que exploravam os logaritmos.

⇒ Aproximadamente, *e = 2,718281...* Este resultado é garantido por meio do limite abaixo.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Alunos do Ensino Médio não têm a obrigação de entender essa notação. Aí vai outro processo: escolha um número bastante garnde Com auxílio de uma calculadora com mais ferramentas, faça 1 dividi-do por esse valor e some 1 ao resultado. Faça esse último resultado elevado pelo valor escolhido. A resposta será um valor que se aproxima do número e.

VEJA
PROPOSTA 4
PÁGINA 27

⇒ Grande construtor de notações matemáticas, o suíço Leonhard Euler (1707 – 1783) foi responsável por boa parte do simbolismo utilizado hoje. Numa exposição manuscrita de seus resultados, elaborada por volta de 1728, Euler utilizou a letra e para representar a base do sistema de logaritmos naturais. Até então não existia nenhuma notação padronizada para este número, que já era bem conhecido. Em 1736, na obra *Mechanica*, de Euler, essa notação apareceu pela primeira vez impressa e se tornou padrão.

⇒ Uma dúvida quanto à prioridade da invenção dos logaritmos parte dos estudos do suíço Jobst Bürgi (1552 – 1632). Possivelmente a ideia inicial de logaritmo tenha ocorrido a Bürgi em 1588, mas ele só publicou seus resultados em 1620, caracterizando Napier como o primeiro a anunciar a descoberta ao mundo.

Vamos pesquisar?

⇒ Para entender e analisar melhor o Renascimento, sugere-se a leitura do artigo *O Renascimento e as origens da ciência moderna: Interfaces históricas e epistemológicas*, de Abraão Pustrelo Damião. Acesso em: https://revistas.pucsp.br/hcensino/article/viewFile/34411/25535.

⇒ Os livros *História da matemática*, de Carl Benjamin Boyer e Uta Caecilia Merzbach, e *Introdução a história da matemática*, de Howard Eves, são excelentes leituras para entendimento da evolução dos logaritmos. Além disso, são materiais que podem auxiliar os professores de Matemática em muitos outros conteúdos.

⇒ Johannes Kepler (1571 – 1630) foi um dos primeiros astrônomos a aplicar os logaritmos. Ele utilizou este novo conceito no desenvolvimento de seus cálculos envolvendo as órbitas planetárias. Atualmente, quais são as principais aplicações dos logaritmos?

⇒ Pesquisas em livros de história podem auxiliar o entendimento do período renascentista. Consultar um professor de História pode ser uma boa experiência de troca de conhecimentos. Você já pensou em um projeto com outra matéria ou em uma aula dada por dois professores de diferentes disciplinas? É uma oportunidade interessante!

Demonstrando algumas propriedades

Conhecendo os conceitos fundamentais das potências de números reais, pode-se iniciar o estudo dos logaritmos

Definição. Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se de logaritmo de b na base a o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b. Isto é,

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b,$$

em que a é a base do logaritmo, b é o logaritmando e x é o logaritmo. Lê-se x é o logaritmo de b na base a.

Como consequências imediatas da definição 6, tem-se que:

i. $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$;
ii. $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$;
iii. $a^{\log_a b} = b$, pois o logaritmo de b na base a é o expoente que se deve dar à base a para a potência obtida ser igual a b.

Sejam $0 < a$, $a \neq 1$, $0 < b$ e $0 < c$. Seguem propriedades dos logaritmos, conforme definição.

Propriedade: $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

Demonstração: A demonstração está dividida em duas partes.

($\Rightarrow$) Se $\log_a b = \log_a c$, então, pela definição de logaritmo, $a^{\log_a c} = b$. Pela terceira consequência, segue que $b = c$.

($\Leftarrow$) Se $b = c$, então, pela terceira consequência, $a^{\log_a c} = b$. Pela definição de logaritmo, segue que $\log_a b = \log_a c$.

Portanto, dois logaritmos de mesma base são iguais se, e somente se, os logaritmandos são iguais.

$\blacksquare$

Propriedade: $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$

Demonstração: Considere $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a(b.c) = z$. Consequentemente, $a^x = b$, $a^y = c$ e $a^z = b.c$. Daí,

$$a^z = b.c = a^x.a^y = a^{x+y}$$

$$z = x + y$$

$$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c.$$

Portanto, o logaritmo do produto é igual à soma dos logaritmos de cada termo do produto, todos na mesma base.

$\blacksquare$

Propriedade: $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

Demonstração: Considere $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = z$. Consequentemente, $a^x = b$, $a^y = c$ e $a^z = \frac{b}{c}$. Daí,

$$a^z = \frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$z = x - y$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$$

Portanto, o logaritmo do quociente é igual à diferença dos logaritmos de cada termo do produto, todos na mesma base. Particularmente, para $b = 1$, tem-se:

$$\log_a \frac{1}{c} = \log_a 1 - \log_a c = 0 - \log_a c = -\log_a c.$$

∎

Propriedade: $log_a b^{\alpha} = \alpha . log_a b$, $\alpha \in R$

Demonstração: Considere $\log_a b = x$ e $log_a b^{\alpha} = y$. Consequentemente, $a^x = b$ e $a^y = b^{\alpha}$. Daí,

$$a^y = b^{\alpha} = (a^x)^{\alpha} = a^{x.\alpha}$$

$$y = \alpha . x$$

$$log_a b^{\alpha} = \alpha . \log_a b.$$

Portanto, o logaritmo de uma potência de base real positiva e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência. Particularmente, tem-se

$$log_a a^{\alpha} = \alpha . \log_a a = \alpha . 1 = \alpha.$$

∎

Propriedade: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $c \neq 1$

Demonstração: Considere $\log_a b = x$, $\log_c b = y$ e $\log_c a = z$, $z \neq 0$. Consequentemente, $a^x = b$, $c^y = b$ e $c^z = a$. Daí,

$$c^{z.x} = (c^z)^x = a^x = b = c^y$$

$$z.x = y$$

$$x = \frac{y}{z}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Portanto, um logaritmo pode ser convertido para o quociente dos logaritmos do logaritmando e da base, nessa ordem e numa nova base que convém. Particularmente, tem-se $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, pois:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

∎

VEJA
PROPOSTA 5
PÁGINA 28

Propostas de exercícios e atividades

Neste capítulo existem propostas de exercícios e atividades divididas em partes para uma melhor evolução no entendimento do conteúdo. No capítulo seguinte estão as resoluções comentadas.

Sugere-se que as propostas sejam desenvolvidas em sequência, mas nada impede de trabalhar especificamente com apenas uma ou algumas no seu processo de ensino e aprendizagem.

Bons estudos!

Proposta 1

REVISANDO PROPRIEDADES DE POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

1. Calcule:

a) $2^3 . 2^4 =$

b) $3^2 . 3^{-2} =$

c) $\frac{5^6}{5^4} =$

d) $\frac{7^2}{7^5} =$

e) $8^8 . 8^{-9} =$

f) $(2^3)^2 =$

g) $\left(\frac{64}{9}\right)^{\frac{1}{2}} =$

h) $\sqrt{6^2} =$

i) $\sqrt{\sqrt{16}} =$

j) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} =$

2. Seja x um número positivo e diferente de um. Escreva na forma de uma só potência:

a) $x^9 . x^2 =$

b) $x^4 . x^{-7} =$

c) $\frac{x^{12}}{x^2} =$

d) $\frac{x^{10} . x^5}{x^7} =$

e) $\sqrt{x} . x^3 =$

f) (Considere $n \in \mathbb{R}$) $x^n . x^{-n} =$

g) $\sqrt[4]{x^3} . \sqrt[3]{x^4} =$

h) $(x^7)^8 =$

Proposta 2

TABELA DE LOGARITMOS DE NAPIER

1. Abaixo encontra-se o modelo da primeira tabela de logaritmos de Napier.

Progressão geométrica	Valor aproximado (multiplicado por 10^7)	Progressão aritmética
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^0$	10000000	0
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^1$	9999999	1
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2$	9999998	2
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^3$	9999997	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{99}$	9999901	99
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{100}$	9999900	100

Utilize a tabela para aproximar os cálculos a seguir.

a) $10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^4 =$

b) $10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{50} =$

c) $10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{98} =$

d) $10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{101} =$

e) $9999902 \, . \, 9999998 =$

f) $9999990 \, . \, 9999980 =$

g) $0{,}9999999 \, . \, 0{,}9999991 =$

h) $0{,}999995 \, . \, 0{,}999994 =$

Proposta 3

APLICANDO A DEFINIÇÃO DE LOGARITMO

1. Calcule:

a) $\log_2 8 =$

b) $\log_3 9 =$

c) $\log_5 125 =$

d) $\log_7 1 =$

e) $\log_3 3 =$

f) $\log 100 =$

g) $\log 0{,}1 =$

h) $\ln e =$

i) $\ln 1 =$

j) $\log_5 \sqrt{5} =$

2. Seja $x \in \mathbb{R}$. Determine x.

a) $\log_2 \sqrt{32} = x$

b) $\log_6 x = 3$

c) $\log_x 100000 = 5$

d) $\log_{0,5}(4\sqrt[3]{8^5}) = x$

3. (UDESC) Sejam a, b e c valores que satisfazem simultaneamente as equações $\begin{cases} \log_2(a+b+c) = 0 \\ \log(a+2b) = 1 \\ \frac{2^a \cdot 4^b}{8^c} = 2 \end{cases}$. Analise as proposições em relação a a, b e c.

I. Um dos valores é um número primo.

II. Todos os valores são números reais não negativos.

III. Dois dos valores são números naturais.

IV. Todos os valores são números racionais não inteiros.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas II e IV são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas III e IV são verdadeiras.
e) Somente as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

Proposta 4

O NÚMERO e

1. O número π aparece no cálculo da área e do perímetro do círculo. O número *e* aparece na resolução de equações em que as incógnitas aparecem em expoente. Esse número é irracional, assim como o π. Para encontrar aproximações para e, faça 3 substituições de valores para *n* em cada caso. Sugere-se o uso de calculadora.

a) $(1+n)^{\frac{1}{n}}$, com *n* próximo de zero.

b) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, com *n* infinitamente positivo.

c) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, com *n* infinitamente negativo.

2. Calcule:

a) $\ln e =$

b) $\ln 1 =$

c) $\ln e^3 =$

d) $\ln(\ln e) =$

e) $\log(\ln e^{10}) =$

f) $\ln -5 =$

Proposta 5

PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

1. Determine o valor de x:

a) $\log_2 x = \log_2 16$

b) $\log_7(2x - 5) = \log_7(x + 3)$

c) $\log_5(25 \,.\, 125) = x$

d) $\log_2 \frac{512}{64} = x$

e) $\log_2 8^{21} - x$

f) $\log 0{,}01^{38} = x$

2. Sejam $\log 2 - 0{,}30$, $\log 3 - 0{,}47$, $\log 5 - 0{,}69$ e $\log 7 - 0{,}84$, calcule:

a) $\log 6 =$

b) $\log 4 =$

c) $\log_7 5 =$

d) $\log_7 10 =$

e) $\log_3 7 =$

f) $\log_5 100 =$

3. (UDESC) O valor de $x.y$ com $x, y \in \mathbb{Z}$, sabendo que $\log_2 x + \log_4 y = 2$ e $2^{x+y} = 32$, é igual a:
   a) 4
   b) 8
   c) 2
   d) 6
   e) 10

Proposta 6

LOGARITMOS EM PROVAS

1. (ENEM) Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de 3.000°C e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 min. Use 0,477 como aproximação para log (3) e 1,041 como aproximação para log (11). O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja 30 °C é mais próximo de

a) 22
b) 50
c) 100
d) 200
e) 400

2. (UDESC) O valor de $x.y$ com $x, y \in Z$, sabendo que $\log_2 x + \log_4 y = 2$ e $2^{x+y} = 32$, é igual a:

a) 4
b) 8
c) 2
d) 6
e) 10

Resoluções comentadas

RESOLUÇÕES PROPOSTA 1

1. Calcule:

a) $2^3.2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$

b) $3^2.3^{-2} = 3^{2+(-2)} = 3^0 = 1$

c) $\frac{5^6}{5^4} = 5^{6-4} = 5^2 = 25$

d) $\frac{7^2}{7^5} = 7^{2-5} = 7^{-3} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{343}$

e) $8^8.8^{-9} = 8^{8+(-9)} = 8^{-1} = \frac{1}{8}$

f) $(2^3)^2 = 2^{3.2} = 2^6 = 64$

g) $\left(\frac{64}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3}$

h) $\sqrt{6^2} = |6| = 6$

i) $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[2.2]{16} = \sqrt[4]{16}$

j) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3.2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$

2. Seja x um número positivo e diferente de um. Escreva na forma de uma só potência:

Resoluções comentadas

RESOLUÇÕES PROPOSTA 1

1. Calcule:

a) $2^3 . 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$

b) $3^2 . 3^{-2} = 3^{2+(-2)} = 3^0 = 1$

c) $\frac{5^6}{5^4} = 5^{6-4} = 5^2 = 25$

d) $\frac{7^2}{7^5} = 7^{2-5} = 7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}$

e) $8^8 . 8^{-9} = 8^{8+(-9)} = 8^{-1} = \frac{1}{8}$

f) $(2^3)^2 = 2^{3.2} = 2^6 = 64$

g) $\left(\frac{64}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3}$

h) $\sqrt{6^2} = |6| = 6$

i) $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[2.2]{16} = \sqrt[4]{16}$

j) $\sqrt[2]{\sqrt{64}} = \sqrt[2.2]{64} = \sqrt[4]{64} = 2$

2. Seja x um número positivo e diferente de um. Escreva na forma de uma só potência:

a) $x^9 . x^3 = x^{9+3} = x^{12}$

b) $x^4 . x^{-7} = x^{4+(-7)} = x^{-3}$

c) $\frac{x^{12}}{x^3} = x^{12-3} = x^9$

d) $\frac{x^{10} . x^5}{x^7} = x^{10+5-7} = x^8$

e) $\sqrt{x} . x^3 = x^{\frac{1}{2}} . x^3 = x^{\frac{1}{2}+3} = x^{\frac{7}{2}}$

f) (Considere $n \in \mathbb{R}$) $x^n . x^{-n} =$

$x^{n+(-n)} = x^0 = 1$

g) $\sqrt[4]{x^3} . \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{3}{4}} . x^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{3}{4}+\frac{4}{3}} = x^{\frac{25}{12}}$

h) $(x^7)^8 = x^{7.8} = x^{56}$

RESOLUÇÃO PROPOSTA 2

1. Abaixo encontra-se o modelo da primeira tabela de logaritmos de Napier.

Progressão geométrica	Valor aproximado (multiplicado por 10^7)	Progressão aritmética
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^0$	10000000	0
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^1$	9999999	1
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2$	9999998	2
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^3$	9999997	3
⋮	⋮	⋮
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{99}$	9999901	99
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{100}$	9999900	100

Utilize a tabela para aproximar os cálculos a seguir.

a) $10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^4 = 9999996$

b) $10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{50} = 9999950$

c) $10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{98} = 9999902$

d) $10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{101} = 9999899$

e) $9999902 . 9999998 =$

$10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{98}.10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2 =$

$10^7.10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{100} =$

$10^7.9999900 = 99999000000000$

f) $9999990 . 9999980 =$

$10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10}.10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{20} =$

$10^7.10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{30} =$

$10^7.9999970 = 99999700000000$

g) $0{,}9999999 . 0{,}9999991 =$

$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^1.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^9 =$

$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10} = 0{,}9999990$

h) $0{,}999995 . 0{,}999994 =$

$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^5.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^6 =$

$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{11} = 0{,}999989$

RESOLUÇÃO PROPOSTA 3

1. Calcule:

a) $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$.

b) $\log_3 9 = 2$, pois $3^2 = 9$.

c) $\log_5 125 = 3$, pois $5^3 = 125$.

d) $\log_7 1 = 0$, pois $7^0 = 1$.

e) $\log_3 3 = 1$, pois $3^1 = 3$.

f) $\log 100 = 2$, pois $10^2 = 100$.

g) $\log 0{,}1 = -1$, pois $10^{-1} = \frac{1}{10}$.

h) $\ln e = 1$, pois $e^1 = e$.

i) $\ln 1 = 0$, pois $e^0 = 1$.

j) $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$, pois $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$.

2. Seja $x \in \mathbb{R}$. Determine x.

a) $\log_2 \sqrt{32} = x$

$2^x = 32^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^x = (2^5)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$2^x = 2^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{5}$

b) $\log_6 x = 3$

$6^3 = x \Leftrightarrow x = 216$

c) $\log_x 100000 = 5$

$x^5 = 100000 \Leftrightarrow x = 10$

d) $\log_{0,5}(4\sqrt[3]{8^5}) = x$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 2^2.(2^3)^{\frac{5}{3}} \Leftrightarrow (2^{-1})^x = 2^2.2^5$

$\Leftrightarrow 2^{-x} = 2^7 \Leftrightarrow x = -7$

3. (UDESC) Sejam a, b e c valores que satisfazem simultaneamente as equações $\begin{cases} \log_2(a+b+c) = 0 \\ \log(a+2b) = 1 \\ \dfrac{2^a \cdot 4^b}{8^c} = 2 \end{cases}$. Analise as proposições em relação a a, b e c.

I. Um dos valores é um número primo.
II. Todos os valores são números reais não negativos.
III. Dois dos valores são números naturais.
IV. Todos os valores são números racionais não inteiros.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas II e IV são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas III e IV são verdadeiras.
e) Somente as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

Por $\log_2(a+b+c) = 0$, tem-se que $a+b+c = 2^0 = 1$. Por $\log(a+2b) = 1$, tem-se que $a + 2b = 10^1 = 10$. Portanto, $a = 10 - 2b$ e $c = b - 9$. Segue que:

$$\frac{2^a.4^b}{8^c} = 2 \Leftrightarrow \frac{2^a.2^{2b}}{2^{3c}} = 2 \Leftrightarrow 2^{a+2b-3c} = 2 \Leftrightarrow a + 2b - 3c = 1 \Leftrightarrow$$

$$10 - 3c = 1 \Leftrightarrow c = 3.$$

Consequentemente, $b = 12$ e $a = -14$.

Resposta: alternativa “a”.

RESOLUÇÃO PROPOSTA 4

1. O número π aparece no cálculo da área e do perímetro do círculo. O número e aparece na resolução de equações em que as incógnitas aparecem em expoente. Esse número é irracional, assim como o π. Para encontrar aproximações para e, faça 3 substituições de valores para n em cada caso. Sugere-se o uso de calculadora.

a) $(1+n)^{\frac{1}{n}}$, com n próximo de zero. $\begin{cases} n = 0{,}1 \Rightarrow (1+0{,}1)^{\frac{1}{0{,}1}} \approx 2{,}593 \\ n = 0{,}01 \Rightarrow (1+0{,}01)^{\frac{1}{0{,}01}} \approx 2{,}704 \\ n = 0{,}001 \Rightarrow (1+0{,}001)^{\frac{1}{0{,}001}} \approx 2{,}717 \end{cases}$

b) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,com n infinitamente positivo. $\begin{cases} n = 100 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2{,}704 \\ n = 1000 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx 2{,}716 \\ n = 10000 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000} \approx 2{,}718 \end{cases}$

c) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, com n infinitamente negativo. $\begin{cases} n = -100 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{-100}\right)^{-100} \approx 2{,}731 \\ n = -1000 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{-1000}\right)^{-1000} \approx 2{,}719 \\ n = -10000 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{-10000}\right)^{-10000} \approx 2{,}718 \end{cases}$

2. Calcule:

a) $\ln e = 1$, pois $e^1 = e$.

b) $\ln 1 = 0$, pois $e^0 = 1$.

c) $\ln e^3 = 3$, pois $e^3 = e^3$.

d) $\ln(\ln e) = \ln 1 = 0$.

e) $\log(\ln e^{10}) = \log 10 = 1$.

f) $\ln -5 = \nexists$, pois o logaritmando deve ser positivo.

RESOLUÇÃO PROPOSTA 5

1. Determine o valor de x:

a) $\log_2 x = \log_2 16$

$x = 16$

b) $\log_7(2x - 5) = \log_7(x + 3)$

$2x - 5 = x + 3 \Leftrightarrow x = 8$

c) $\log_5(25 \,.\, 125) = x$

$\log_5 25 + \log_5 125 = x \Leftrightarrow$

$2 + 3 = x \Leftrightarrow x = 5$

d) $\log_2 \frac{512}{64} = x$

$\log_2 512 - \log_2 64 = x \Leftrightarrow$

$9 - 6 = x \Leftrightarrow x = 3$

e) $\log_2 8^{21} = x$

$2^x = (2^3)^{21} \Leftrightarrow 2^x = 2^{63} \Leftrightarrow x = 63$

f) $\log 0{,}01^{58} = x$

$10^x = (10^{-2})^{58} \Leftrightarrow 10^x = 10^{-116}$

$\Leftrightarrow x = -116$

2. Sejam $\log 2 = 0{,}30$, $\log 3 = 0{,}47$, $\log 5 = 0{,}69$ e $\log 7 = 0{,}84$, calcule:

a) $\log 6 =$

$\log 2.3 = \log 2 + \log 3 = 0{,}77$

b) $\log 4 =$

$\log 2^2 = 2.\log 2 = 0{,}6$

c) $\log_7 5 = \frac{\log 5}{\log 7} \approx 0{,}82$

d) $\log_7 10 = \frac{\log 10}{\log 7} \approx 1{,}19$

e) $\log_3 7 = \frac{\log 7}{\log 3} \approx 1{,}78$

f) $\log_5 100 = \frac{\log 100}{\log 5} \approx 2{,}89$

3. (UDESC) O valor de $x.y$ com $x, y \in \mathbb{Z}$, sabendo que $\log_2 x + \log_4 y = 2$ e $2^{x+y} = 32$, é igual a:
   a) 4
   b) 8
   c) 2
   d) 6
   e) 10

Aplicando a mudança de base, tem-se:

$$\log_2 x + \log_4 y = 2 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{\log_2 y}{\log_2 4} = 2 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{\log_2 y}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow 2.\log_2 x + \log_2 y = 4 \Leftrightarrow \log_2 x^2 + \log_2 y = 4 \Leftrightarrow$$

$$\log_2 x^2.y = 4.$$

Pela definição de logaritmo, $x^2.y = 2^4 = 16$. A questão também informa que $2^{x+y} = 32$, isto é, $x + y = 5$, ou ainda, $y = 5 - x$. Daí,

$$x^2.y = 16 \Leftrightarrow x^2.(5 - x) = 16 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 16 = 0.$$

A única solução inteira é $x = 4$. Logo, $y = 1$. Finalmente, $x.y = 4$.

Resposta: alternativa "a".

Considerações

Espera-se que esse material possa contribuir para professores e alunos do Ensino Médio.

Professor(a), fique à vontade para adaptar esse material de acordo com as suas necessidades e da sua turma. Este livro é apenas uma das tantas maneiras de se trabalhar com logaritmos.

Bom trabalho!

Bibliografia

BOYER, Carl Benjamin; MERZBACH, Uta Caecilia. **História da matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996. Tradução de Elza F. Gomide.

DAMIÃO, Abraão Pustrelo. O Renascimento e as origens da ciência moderna: Interfaces históricas e epistemológicas. **História da Ciência e Ensino: construindo interfaces**. PUC—SP. v. 17, 2018. p. 22—49.

EVES, Howard. **Introdução a história da matemática.** Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004. Tradução: Hygino H. Domingues.

MAOR, Eli. **e: a história de um número**. 5. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008. Tradução de Jorge Calife.

MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA. **Mathematical Treasures – Michael Stifel's Arithmetica Integra**. 2011. Disponível em: <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasures-michael-stifels-arithmetica-integra >. Acesso em: 14 jan. 2019.

Para dúvidas, relatos ou troca de experiências entre em contato.

Caroline Vanessa Wendland
E-mail: caroline.wendland@hotmail.com