UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT

REJEANE DE LIMA

PRODUTO EDUCACIONAL

CADERNO DE ATIVIDADES COM QUESTÕES DE OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA E RESOLUÇÕES POR MEIO DE CONGRUÊNCIAS MODULARES

JOINVILLE

2019

APRESENTAÇÃO

Caro(a) Docente,

Este Caderno de Atividades é produto de uma Dissertação intitulada *"Congruências Modulares: Aplicações em Problemas de Olimpíadas de Matemática e Chave Pública RSA"*, realizada no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) sob a orientação da Professora Doutora Ligia Liani Barz e coorientação do Professor Doutor Fernando Deeke Sasse.

O presente caderno é voltado ao professor(a) e contém uma sequência de exercícios que podem ser aplicados em sala de aula, como uma proposta de aula diferenciada, ou em oficinas de treinamento para alunos que desejam participar de Olimpíadas de Matemática.

As atividades foram escolhidas de modo a oferecer subsídios que podem contribuir na ampliação de conhecimento de professores e no aprimoramento de suas aulas em torno de problemas cujas resoluções envolvem um único conteúdo: congruências modulares. Embora essa temática não seja trabalhada em sala de aula no Ensino Básico, a teoria necessária para sua compreensão é amplamente discutida nos Anos Finais do Ensino Fundamental. A Base Nacional Comum Curricular (MEC (2017)) inclui como habilidades a serem desenvolvidas no sexto ano a classificação de números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre múltiplos, divisores e fatores, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000, além de resolver e elaborar problemas que envolvam ideia de múltiplo e divisor. Estes conceitos trabalhados no Ensino Fundamental são conhecimentos prévios necessários para iniciar o estudo das congruências modulares.

Desejamos que o docente faça um bom uso desse material tornando suas aulas mais desafiadoras com o objetivo de motivar seus alunos para que juntos possam construir o conhecimento matemático escolar necessário.

Rejeane de Lima

SUMÁRIO

1 QUESTÕES DE OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

Neste capítulo apresentamos uma sequência didática de exercícios, retirados do banco de questões da OBMEP e da OBM, para que o professor possa trabalhar com seus alunos. Os enunciados foram transcritos como aparecem nos bancos de questões. No próximo capítulo serão apresentadas as resoluções destes problemas usando a teoria de congruências modulares.

Questão 1 (OBM (2003a)) - Seja $n = 9867$. Se você calculasse $n^3 - n^2$ você encontraria um número cujo algarismo das unidades é:

a) 0
b) 2
c) 4
d) 6
e) 8

Questão 2 (OBM (2003b)) - Considere a sequência oscilante: 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, ... O 2003$^{\underline{o}}$ termo desta sequência é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Questão 3 (OBM (2000)) - Se os números naturais são colocados em colunas, como se mostra abaixo, debaixo de que letra aparecerá o número 2000?

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**
1		2		3		4		5
	9		8		7		6	
10		11		12		13		14
	18		17		16		15	
19		20		21		...		...

a) F
b) B
c) C
d) D

e) I

Questão 4 (OBM (2017)) - Sejam m e n dois inteiros positivos primos entre si. O *Teorema Chinês dos Restos* afirma que, dados inteiros i e j com $0 \leq i < m$ e $0 \leq j < n$, existe exatamente um inteiro a, com $0 \leq a < m \cdot n$, tal que o resto da divisão de a por m é igual a i e o resto da divisão de a por n é igual a j. Por exemplo, para $m = 3$ e $n = 7$, temos que 19 é o único número que deixa restos 1 e 5 quando divididos por 3 e 7, respectivamente. Assim, na tabela a seguir, cada número de 0 a 20 aparecerá exatamente uma vez.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0							
1						19	
2							

Qual a soma dos números das casas destacadas?

Questão 5 (OBMEP (2009)) - João mora em Salvador e seus pais em Recife. Para matar a saudade, ele telefona para seus pais a cada três dias. O primeiro telefonema foi feito no domingo, o segundo telefonema na quarta feira, o terceiro telefonema no sábado, e assim por diante. Em qual dia da semana João telefonou para seus pais pela centésima vez?

Questão 6 (OBMEP (2005)) - Distribuímos os números inteiros positivos em uma tabela com cinco colunas, conforme o seguinte padrão.

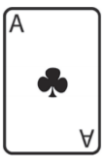
A	**B**	**C**	**D**	**E**
1				
2	3			
4	5	6		
7	8	9	10	
11	12	13	14	15
16				
17	18			
19	20	21		
22	23	24	25	
26	27	28	29	30
31				
32	33			
$\vdots$				

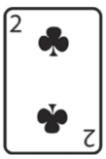
Continuando a preencher a tabela desta manteira, qual será a coluna ocupada pelo número 2005?

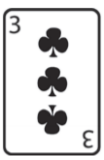
a) coluna A
b) coluna B
c) coluna C
d) coluna D
e) coluna E

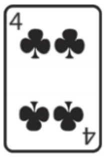
Questão 7 (OBMEP (2012a)) - Cinco cartas, inicialmente dispostas como na figura, serão embaralhadas. Em cada embaralhamento, a primeira carta passa a ser a segunda, a segunda passa a ser a quarta, a terceira passa a ser a primeira, a quarta passa a ser a quinta e a quinta passa a ser a terceira.

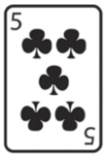
Qual será a primeira carta após 2012 embaralhamentos?

a) 

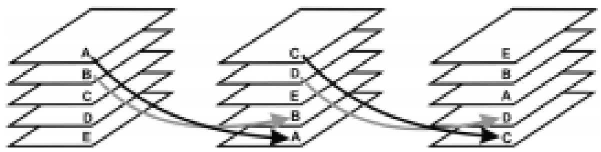
b) 

c) 

d) 

e) 

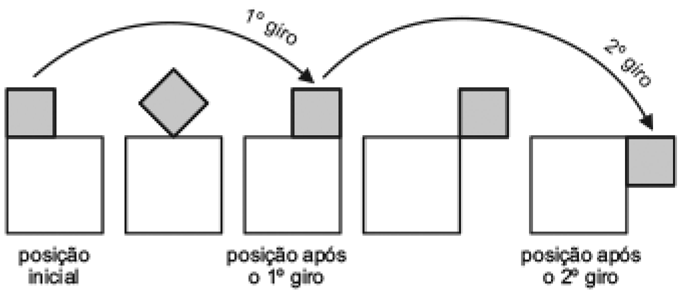
Questão 8 (OBMEP (2012b)) - Estefânia tem cinco cartas marcadas com as letras A, B, C, D e E, empilhadas nessa ordem de cima para baixo. Ela embaralha as cartas pegando as duas de cima e colocando-as, com a ordem trocada, embaixo da pilha. A figura mostra o que acontece nas duas primeiras vezes em que ela embaralha as cartas.



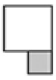
Se Estefânia embaralhar as cartas 74 vezes, qual carta estará no topo da pilha?

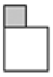
a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

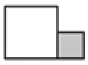
Questão 9 (OBMEP (2012c)) - Um quadrado de lado 1 cm roda em torno de um quadrado de lado 2 cm, como na figura, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior.

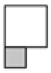


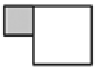
Qual das posições a seguir representa a posição dos dois quadrados após o 2012$^{\underline{o}}$ giro?

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Questão 10 (OBMEP (2016)) - Juca possui menos do que 800 bolinhas de gude. Ele gosta de separar as bolinhas em grupinhos com a mesma quantidade de bolinhas. Ele percebeu que se formar grupinhos com 3 bolinhas cada, sobram exatamente 2 bolinhas. Se ele formar grupinhos de 4 bolinhas, sobram 3 bolinhas. Se ele formar grupinhos de 5 bolinhas, sobram 4 bolinhas. E, finalmente, se ele formar grupinhos com 7 bolinhas cada, sobram 6 bolinhas.

a) Se Juca formasse grupinhos com 20 bolinhas cada, quantas bolinhas sobrariam?
b) Juca possui quantas bolinhas de gude?

2 RESOLUÇÕES DOS PROBLEMAS

Neste capítulo são apresentadas as resoluções detalhadas dos problemas através da aplicação de congruências modulares.

Questão 1 - Para determinarmos o dígito das unidades de um número, podemos fazer a análise da congruência desse número em módulo 10. Assim, para $n = 9867$, temos:

$$9867 \equiv 7 \mod 10, \tag{2.1}$$

$$9867^2 \equiv 7^2 mod 10 \tag{2.2}$$

e como $7^2 = 49$ e $49 \equiv 9 \mod 10$, segue que

$$9867^2 \equiv 9 \mod 10. \tag{2.3}$$

Das Congruências (2.1) e (2.3), temos que

$$9867^2 \cdot 9867 \equiv 9 \cdot 7 \mod 10. \tag{2.4}$$

De $9 \cdot 7 = 63$ e $63 \equiv 3 \mod 10$, segue que

$$9867^3 \equiv 3 \mod 10. \tag{2.5}$$

Das congruências (2.3) e (2.5), temos que

$$9867^3 - 9867^2 \equiv 3 - 9 \mod 10. \tag{2.6}$$

Como $-6 \equiv 4 \mod 10$, obtemos

$$9867^3 - 9867^2 \equiv 4 \mod 10. \tag{2.7}$$

O algarismo das unidades é o 4, portanto a resposta correta é o item "c".

Questão 2 - Podemos observar que a sequência é infinita e podemos identificar que o bloco 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, formado por 8 termos, se repete. Para determinar o termo que está na 2003ª posição devemos encontrar o resto da divisão de 2003 por 8, isto é, o número que é congruente a 2003 módulo 8. Temos que

$$10 \equiv 2 \mod 8, \tag{2.8}$$

$$10^2 \equiv 2^2 = 4 \mod 8, \tag{2.9}$$

$$10^2 \cdot 10 \equiv 4 \cdot 2 \mod 8. \tag{2.10}$$

Como $8 \equiv 0 \mod 8$, temos que

$$10^3 \equiv 0 \mod 8, \tag{2.11}$$

$$2 \cdot 10^3 \equiv 2 \cdot 0 \mod 8, \tag{2.12}$$

$$2000 \equiv 0 \mod 8. \tag{2.13}$$

Como $3 \equiv 3 \mod 8$, da congruência (2.13) segue que

$$2000 + 3 \equiv 0 + 3 \mod 8, \tag{2.14}$$

ou seja, $2003 \equiv 3 \mod 8$. Assim, o $2003^{\underline{o}}$ termo da sequência será igual ao terceiro termo, ou seja, o número 3. Portanto, a resposta correta é o item "c".

Questão 3 - Escrevendo a sequência, temos : A, C, E, G, I, H, F, D, B. Já que a sequência se repete a cada 9 termos, para determinar a coluna em que estará o número 2000, devemos encontrar o resto da divisão de 2000 por 9, isto é, o número que é congruente a 2000 módulo 9. Temos que

$$10 \equiv 1 \mod 9, \tag{2.15}$$

$$10^3 \equiv 1^3 \mod 9, \tag{2.16}$$

$$2 \cdot 10^3 \equiv 2 \cdot 1 \mod 9, \tag{2.17}$$

isto é, $2000 \equiv 2 \mod 9$. Portanto, o número 2000 estará na mesma coluna que o número 2, ou seja, na coluna C. Portanto, a resposta correta é o item "c".

Questão 4 - Para encontrar a soma das casas destacadas, precisamos descobrir qual número que ocupa cada casa. Considere a Tabela (2.1)

Tabela 2.1 – Resolução problema 4

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0		A				B	
1				C		19	D
2		E			F		

Para determinar A, temos que

$$A \equiv 0 \mod 3 \tag{2.18}$$

e

$$A \equiv 1 \mod 7 \tag{2.19}$$

Pelo Teorema Chinês dos Restos, temos $a_1 = 0, a_2 = 1, m_1 = 3$ e $m_2 = 7$. Assim, $M = 21, M_1 = \frac{21}{3} = 7$ e M_2
Precisamos agora determinar y_1 e y_2 tais que

$$7y_1 \equiv 1 \mod 3 \tag{2.20}$$

e

$$3y_2 \equiv 1 \mod 7. \tag{2.21}$$

Analisando as congruências (2.20) e (2.21), por inspeção, obtemos $y_1 = 1$ e $y_2 = 5$. Assim, uma solução do sistema é dada por

$$A = 7 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 5 = 15 \tag{2.22}$$

Portanto, já que A é um número entre 0 e 20, temos que $A = 15$.

Podemos observar que, uma vez que a questão trata de números pequenos, o aluno pode chegar ao resultado simplesmente por inspeção das congruências (2.20) e (2.21), não havendo necessidade da aplicação rigorosa do Teorema Chinês dos Restos. Porém, isso mostra aplicação deste teorema em problemas de olimpíadas de matemática de nível básico.

De forma análoga ao cálculo anterior, obtemos os resultados de B, C, D e F.
Para determinar B, temos que $B \equiv 0 \mod 3$ e $B \equiv 5 \mod 7$ então, $B = 12$.
Para determinar C, temos que $C \equiv 1 \mod 3$ e $C \equiv 3 \mod 7$ então, $C = 10$.
Para determinar D, temos que $D \equiv 1 \mod 3$ e $D \equiv 6 \mod 7$ então, $D = 13$.
Para determinar E, temos que $E \equiv 2 \mod 3$ e $E \equiv 1 \mod 7$ então, $E = 8$.
Para determinar F, temos que $F \equiv 2 \mod 3$ e $F \equiv 4 \mod 7$ então, $F = 11$.

Portanto, a soma das casas destacadas é $A + B + C + D + E + F = 15 + 12 + 10 + 13 + 8 + 11 = 69$.

Questão 5 - Vamos listar os dias em que aconteceram as primeiras chamadas:

Primeira chamada: domingo
Segunda chamada: quarta feira
Terceira chamada: sábado
Quarta chamada: terça feira
Quinta chamada: sexta feira
Sexta chamada: segunda feira
Sétima chamada: quinta feira

Oitava chamada: domingo
Nona chamada: quarta feira

Como os telefonemas são realizados a cada três dias, a sequência de dias da semana se repete a cada 7 telefonemas então, para determinar o dia da centésima ligação, devemos encontrar o resto da divisão de 100 por 7. Isto é, devemos encontrar o número que é congruente a 100 módulo 7. Temos que

$$10 \equiv 3 \mod 7, \tag{2.23}$$

$$10^2 \equiv 3^2 \mod 7. \tag{2.24}$$

De $9 \equiv 2 \mod 7$, segue que

$$100 \equiv 2 \mod 7. \tag{2.25}$$

Assim, o centésimo telefonema será realizado no mesmo dia da semana que o segundo telefonema, isto é, em uma quarta feira.

Questão 6 - A cada 15 termos a sequência se repete. A sequência é formada pelos termos A, A, B, A, B, C, A, B, C, D, A, B, C, D, E. Para determinar a coluna que será ocupada pelo número 2005, devemos calcular o número que é congruente a 2005 módulo 15. Temos que

$$10 \equiv 10 \mod 15 \tag{2.26}$$

e

$$200 \equiv 5 \mod 15. \tag{2.27}$$

Então,

$$10 \cdot 200 \equiv 10 \cdot 5 \mod 15, \tag{2.28}$$

isto é, $2000 \equiv 50 \mod 15$. Como $50 \equiv 5 \mod 15$, segue que

$$2000 \equiv 5 \mod 15. \tag{2.29}$$

Também,

$$5 \equiv 5 \mod 15. \tag{2.30}$$

Das congruências (2.29) e (2.30), concluímos que

$$2005 \equiv 5 + 5 = 10 \mod 15. \tag{2.31}$$

Logo, a coluna ocupada pelo número 2005 será a mesma ocupada pelo número 10, isto é, a coluna D. Portanto, a resposta correta é o item "c".

Questão 7 - Após o primeiro embaralhamento, a sequência de cartas será: 3, A, 5, 2, 4.
Após o segundo embaralhamento, a sequência de cartas será: 5, 3, 4, A, 2.
Após o terceiro embaralhamento, a sequência de cartas será: 4, 5, 2, 3, A.
Após o quarto embaralhamento, a sequência de cartas será: 2, 4, A, 5, 3.
Após o quinto embaralhamento, a sequência de cartas será: A, 2, 3, 4, 5.
Podemos perceber que a cada cinco embaralhamentos a sequência de cartas se repete. Então, para determinar a primeira carta da sequência após 2012 embaralhamentos, devemos determinar o número que é congruente a 2012 módulo 5.

Temos que

$$2012 \equiv 2 \mod 5. \tag{2.32}$$

Portanto, após 2012 embaralhamentos a sequência de cartas será a mesma que depois de 2 embaralhamentos. Sendo assim, a primeira carta da sequência será o 5. Então o item que apresenta a resposta correta é o "e".

Questão 8 - Após o primeiro embaralhamento, a sequência de cartas será: C, D, E, B, A.
Após o segundo embaralhamento, a sequência de cartas será: E, B, A, D, C.
Após o terceiro embaralhamento, a sequência de cartas será: A, D, C, B, E.
Após o quarto embaralhamento, a sequência de cartas será: C, B, E, D, A.
Após o quinto embaralhamento, a sequência de cartas será: E, D, A, B, C.
Após o sexto embaralhamento, a sequência de cartas será: A, B,C, D, E.
Podemos perceber que após 6 embaralhadas a sequência se repete. Então, para determinar a carta que estará no topo da pilha após 74 embaralhadas, devemos encontrar o número que é congruente a 74 módulo 6. Temos que

$$74 \equiv 2 \mod 6. \tag{2.33}$$

Logo, após 74 embaralhadas, a sequência de cartas será a mesma que depois a segunda embaralhada. Logo, a carta que estará no topo, será a de letra E, que se encontra no item "e".

Questão 9 - Girando o quadrado menor em volta do maior, podemos perceber que após o oitavo giro, o quadrado menor volta a sua posição inicial e, então, a sequência de imagens se repete.

Portanto, para determinar a posição do quadrado menor no 2012º giro, devemos encontrar o número que é congruente a 2012 módulo 8. Temos que

$$10 \equiv 2 \mod 8, \tag{2.34}$$

$$10^3 \equiv 2^3 \mod 8. \tag{2.35}$$

De $2^3 = 8$, e $8 \equiv 0 \mod 8$, segue que $1000 \equiv 0 \mod 8$. Então,

$$2 \cdot 1000 \equiv 2 \cdot 0 \mod 8. \tag{2.36}$$

Como $12 \equiv 4 \mod 8$, segue que

$$2012 \equiv 4 \mod 8. \tag{2.37}$$

Portanto, após o 2012º giro, a posição do quadrado menor será a mesma do quarto giro, ou seja, a resposta correta é o item "a".

Questão 10 - Para resolver esta questão é mais interessante iniciarmos pelo item "b", uma vez que podemos usar a resposta desse item para concluir a resolução do item "a".

b) Queremos determinar o número x tal que satisfaça o sistema

$$x \equiv 2 \mod 3 \tag{2.38}$$

$$x \equiv 3 \mod 4 \tag{2.39}$$

$$x \equiv 4 \mod 5 \tag{2.40}$$

$$x \equiv 6 \mod 7. \tag{2.41}$$

Podemos resolver esse problema utilizando o Teorema Chinês dos Restos. Assim, temos que $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_4 = 6$, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $m_3 = 5$, $m_4 = 7$. Como $M = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot m_4$, segue que $M = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 240$. Além disso, $M_i = \frac{M}{m_i}$ então, $M_1 = 140$, $M_2 = 105$, $M_3 = 84$ e $M_4 = 60$. Para determinar y_1, y_2, y_3 e y_4, temos que encontrar as soluções de cada uma das congruências abaixo:

$$140y_1 \equiv 1 \mod 3 \tag{2.42}$$

$$105y_2 \equiv 1 \mod 4 \tag{2.43}$$

$$84y_3 \equiv 1 \mod 5 \tag{2.44}$$

$$60y_4 \equiv 1 \mod 7. \tag{2.45}$$

Assim, por inspeção, temos que $y_1 = 2$, $y_2 = 1$, $y_3 = 4$ e $y_4 = 2$. De acordo com o Teorema Chinês dos Restos, uma solução do sistema é dado por

$$x_0 = M_1a_1y_1 + M_2a_2y_2 + M_3a_3y_3 + M_4a_4y_4. \tag{2.46}$$

Sendo assim, temos

$$x_0 = 140\cdot 2\cdot 2 + 105\cdot 5\cdot 3 + 84\cdot 4\cdot 4 + 60\cdot 2\cdot 6 = 560 + 315 + 1344 + 720 = 2939. \tag{2.47}$$

A solução geral do sistema é dada por

$$x(t) = x_0 + Mt, \tag{2.48}$$

então, temos

$$x(t) = 2939 + 420t, \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{2.49}$$

Como o número procurado é menor que 800, devemos resolver a inequação $2939 + 420t < 800$, obtendo o resultado $t < -5$. Portanto, para $t = -6$, obtemos

$$x = 2939 + (-6)\cdot 420 = 419 \tag{2.50}$$

Isto é, Juca possui 419 bolinhas de gude.

a) Como o total de bolinhas é 419 e $419 = 20\cdot 20 + 19$, temos que ao formar grupinhos com 20 bolinhas cada, sobrariam 19 bolinhas.

REFERÊNCIAS

OBM. **OBM 2000**. 2000. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/02/obm2000_1fase-1-N1.pdf>. Acesso em: 17 out. 2018.

OBM. **OBM 2003**. 2003. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/02/1faseOBM_2003-N2.pdf>. Acesso em: 16 out. 2018.

OBM. **OBM 2003**. 2003. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/02/1faseOBM_2003-N2.pdf>. Acesso em: 17 out. 2018.

OBM. **OBM 2017**. 2017. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/2Fase_Nivel3_2009.pdf>. Acesso em: 17 out. 2018.

OBMEP. **OBMEP 2005**. 2005. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n2-2005.pdf>. Acesso em: 15 out. 2018.

OBMEP. **OBMEP 2009**. 2009. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/bq/bq2009.pdf>. Acesso em: 15 out. 2018.

OBMEP. **OBMEP 2012**. 2012. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n2-2012.pdf>. Acesso em: 15 out. 2018.

OBMEP. **OBMEP 2012**. 2012. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/bq/bq2012.pdf>. Acesso em: 17 out. 2018.

OBMEP. **OBMEP 2012**. 2012. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n2-2012.pdf>. Acesso em: 16 out. 2018.

OBMEP. **OBMEP 2016**. 2016. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/bq/bq2016.pdf>. Acesso em: 16 out. 2018.