APÊNDICE A - PRODUTO EDUCACIONAL: CADERNO DE ATIVIDADES SOBRE POLINÔMIOS

O Produto Educacional desenvolvido em nossa pesquisa de mestrado é um caderno de atividades, no qual constam a teoria sobre polinômios, exemplos e exercícios. O caderno de atividades foi elaborado com lacunas de modo a serem completadas pelos alunos.

Conceitos

Definição .1. *Um **polinômio** na variável $\boldsymbol{x}$ é uma expressão dada por:*

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

em que:

- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ *são números reais denominados* ____________________ *e* $a_n \neq 0$*;*
- a_0 *é o coeficiente* ____________________ *do polinômio e* a_n *é o coeficiente* ____________________*;*
- $\boldsymbol{n}$ *é um número* ____________________*;*
- *o maior expoente de* $\boldsymbol{x}$*, com coeficiente não nulo, é o* ____________________ *do polinômio.*

Para indicar que $p(x)$ representa a expressão $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ escrevemos

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0.$$

Exemplos:

(1) $p(x) = 10x^4 + 5x^2 - 87$ é um polinômio com grau __________, coeficiente independente __________ e coeficiente dominante __________.

(2) $q(x) = \sqrt{x} + 5x^2 - 8x$ não é um polinômio, pois $\sqrt{x} + 5x^2 - 8x = x^{1/2} + 5x^2 - 8x$ e o expoente do termo $x^{1/2}$ não é um número ____________________.

(3) $m(x) = \frac{1}{x^2} - 6x^3 + 12x + 3$ não é um polinômio, pois $\frac{1}{x^2} - 6x^3 + 12x + 3 =$ _________________________ e o expoente do termo ____________________ não é um número natural.

(4) $r(x) = \pi - \sqrt{2}x^3 - 17x^{100} + \dfrac{1}{2}x^{13}$ é um polinômio com grau __________, coeficiente independente __________ e coeficiente dominante __________. Podemos reescrever esse polinômio como ______________________________.

Exercício 1: Classifique cada expressão em polinômio ou não. Em caso negativo, justifique sua resposta. Em caso afirmativo, determine o grau do polinômio, o coeficiente dominante e o coeficiente independente.

(a) $q(x) = x^5 - x^3 + 5x^{-1} + 2$

(b) $s(x) = \dfrac{1}{-3x^2 + x}$

(c) $m(x) = 5 - \sqrt{17}x + 8432x^2 + 23x^7$

(d) $t(x) = 0x^{10} - \frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x$

Exercício 2: Seja $m \in \mathbb{R}$. Qual o grau do polinômio $p(x)$ dado por,

$$p(x) = (m^2 - 1)x^4 + (m + 1)x^3 + x^2 + 3.$$

Definição .2. *(a) Dizemos que um polinômio é **nulo** (ou identicamente nulo) quando todos os coeficientes do polinômio são iguais a ____________________. Assim,*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

é nulo se, $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 =$ __________. Não se define grau do polinômio nulo.

*(b) Dizemos que um polinômio é **constante** se todos os coeficientes são nulos exceto o primeiro. Assim,*

$$p(x) = a + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n$$

e é indicado por $p(x) = a$. O grau do polinômio constante é 0.

Exercício 3: Considere o polinômio $p(x) = (a^2 - 9)x^4 + (2b + 1)x^2 + a + 3$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Determine os valores de a e b tais que:

(a) $p(x)$ seja um polinômio constante;

(b) $p(x)$ seja um polinômio nulo.

Definição .3. *Dois polinômios $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$ são ditos **iguais** (ou idênticos) se $a_i = b_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Exemplo:

(5) Para quais valores de a, b, c e d os polinômios $p(x) = (a+8)x^3 + (b-3)x^2 + (c-5)x + (d+10)$ e $q(x) = 12x^2 + 4x - 9$ são iguais?

Pela definição de igualdade de polinômios obtemos o seguinte sistema:

Exercício 4: Determine os valores a, b e c para que sejam iguais os polinômios $p(x) = cx^3 + 3x + 2$ e $q(x) = (a+b)x^2 + (a+3)x + (2-b)$.

Operações com Polinômios

Definição .4. *A **adição** (soma) de dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ é o polinômio obtido ao se adicionarem os termos de $p(x)$ com os termos de $q(x)$ que têm, respectivamente, o mesmo expoente na variável (caso não conste um termo com determinado expoente na variável, considera-se que seu coeficiente é zero).*

Observação: Valem para a adição as propriedades comutativa, ____________________, ____________________ ____________________ (que é o polinômio nulo __________) e o ______________________________ de $p(x)$ (obtido com a troca dos sinais de todos os termos de $p(x)$).

Exemplos:

(6) Sejam $p(x) = x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 4x + 10$ e $q(x) = 5x^4 + 20x^2 - 8x - 5$. Então

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 4x + 10) + (5x^4 + 20x^2 - 8x - 5) \\ &= (\underline{\qquad})x^4 + (\underline{\qquad})x^3 + (\underline{\qquad})x^2 + (\underline{\qquad})x + (\underline{\qquad}) \\ &= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}. \end{aligned}$$

(7) O simétrico (oposto) do polinômio $p(x) = 4x^3 - 3x - 1$ é

$-p(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

(8) Sejam $p(x) = x^7 - \frac{1}{5}x^3 - 1$ e $q(x) = -\sqrt{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 + 13x^2 - x + 1$. Então

$p(x) + q(x) =$

Definição .5. *A* ***subtração*** *(diferença) entre dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$, nessa ordem, é definida como a adição de $p(x)$ com o oposto de $q(x)$, isto é,*

$$p(x) - q(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

Exemplo:

(9) Sejam $p(x) = 10x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 5x$ e $q(x) = 7x^4 - 14x^2 + 3x - 15$. Então,

$$p(x) - q(x) = (10x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 5x) - (7x^4 - 14x^2 + 3x - 15)$$

e

$$q(x) - p(x) = (7x^4 - 14x^2 + 3x - 15) - (10x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 5x)$$

Note que $p(x) - q(x) =$ ____________________.

(10) Calcule a diferença de $p(x) = 4x^4+4x^3-8x^2-7x+9$ com $q(x) = 4x^4-7x^3+5x^2+2x-1$.

Definição .6. *A **multiplicação** (produto) dos polinômios $p(x)$ e $q(x)$ é o polinômio que obtemos multiplicando cada termo do primeiro polinômio por todos os termos do segundo e adicionando os produtos obtidos.*

Observação: Valem para a multiplicação as propriedades ____________________, ____________________, ______________________________ (que é o polinômio _______________), além das _________________________ da adição em relação a multiplicação.

Exemplos:

(11) Sejam $p(x) = 2x^2 - 1$ e $q(x) = -x^2 - 6$. Então,

$$p(x) \cdot q(x) = \left(2x^2 - 1\right) \cdot \left(-x^2 - 6\right)$$

(12) Sejam $p(x) = x - 1$ e $q(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Então,

$$p(x) \cdot q(x) = (x - 1) \cdot \left(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)$$

(13) Sabendo que os polinômios $m(x), n(x)$ e $p(x)$ têm respectivamente graus 3, 5 e 7, determine o grau do polinômio $q(x)$, sendo:

(a) $q(x) = p(x) + n(x)$

O grau de $p(x)$ é _____ e o de $n(x)$ é _____, então o grau de $q(x)$ é _____.

(b) $q(x) = m(x)n(x)$

O grau de $m(x)$ é _____ e o de $n(x)$ é _____, então o grau de $q(x)$ é __________.

(c) $q(x) = p(x)m(x) - n(x)$.

O grau de $p(x)$ é _____ e o de $m(x)$ é _____, então o grau de $p(x)m(x)$ é _____, e o grau de $n(x)$ é _____, então o grau de $q(x)$ é _____.

Exercício 5: Dados os polinômios $q(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1$ e $t(x) = x^3 + 2x + 4$, determine o polinômio $p(x)$ tal que $p(x) + 3q(x) = 2t(x)$.

Exercício 6: Obtenha os valores das constantes a e b na identidade:

$$(x^3 + x + 1)(ax + b) + 4x^2 - 3x - 1 = 2x^4 + x^3 + 6x^2.$$

Observação: O grau do polinômio produto é igual a _______________ dos polinômios fatores. O grau do polinômio soma é ____________________ ao maior dos graus ,como ilustrado no Exemplo 10.

Divisão de Polinômios

Algoritmo da Divisão: Efetuar a divisão de um polinômio $p(x)$ pelo polinômio $m(x)$ não nulo significa determinar um polinômio $q(x)$ e um polinômio $r(x)$, tais que:

$$p(x) = m(x)q(x) + r(x)$$

com grau $r(x) <$ grau $m(x)$, ou $r(x) = 0$.
Assim, dizemos que:

$p(x)$ é o ____________________; $m(x)$ é o ____________________;
$q(x)$ é o ____________________; $r(x)$ é o ____________________.

Quando $r(x) = 0$, dizemos que a divisão é ____________________, ou que $p(x)$ é ____________________ por $m(x)$.

Além de ser possível provar a existência do quociente e resto, demonstra-se que existem um único quociente $q(x)$ e um único resto $r(x)$ na divisão de $p(x)$ por $m(x)$. Essa demonstração pode ser encontrada em Janesch (2008, p. 32) e no Teorema 5.2 desse trabalho.

Exemplos:

(14) A divisão do polinômio $p(x) = 6x^2 - 8x + 16$ pelo polinômio $m(x) = -3x + 1$ resulta no quociente $q(x) = -2x + 2$ e resto $r(x) = 14$, ou seja,

$$6x^2 - 8x + 16 = \underline{\hspace{6cm}}$$

(15) A divisão do polinômio $p(x) = x^3 - x^2 - 22x + 40$ pelo polinômio $m(x) = x - 4$ resulta no quociente $q(x) = x^2 + 3x - 10$ e no resto $r(x) = 0$, ou seja,

$$x^3 - x^2 - 22x + 40 = \underline{\hspace{6cm}}$$

Isto significa que $p(x)$ ______________________________.

(16) A divisão do polinômio $p(x) = x^7 + 9x^4 - 8x^3 - 12x + 6$ pelo polinômio $m(x) = x^5 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 8$ resulta no quociente $q(x) = x^2 + 5$ e resto $r(x) = 2x^4 + 22x^3 - 43x^2 + 13x - 34$, logo

$$x^7 + 9x^4 - 8x^3 - 12x + 6 = \underline{\hspace{7cm}}$$

Exercício 7: Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que o quociente e resto da divisão de $p(x) = ax^4 - 3x^3 - 20x^2 - x + 13$ por $m(x) = x^2 - 3x$ sejam respectivamente $q(x) = 5x^2 + 12x + 16$ e $r(x) = 47x + 13$.

Veremos a seguir métodos para encontrar o quociente e o resto na divisão de polinômios.

Método de Descartes ou Coeficientes a Determinar: Utilizado para encontrar o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ na divisão de $p(x)$ por $m(x)$. Esse método se baseia em dois fatos:

1. grau $q(x)$ =grau $p(x)$−grau $m(x)$
2. grau $r(x)$ <grau $m(x)$ ou $r(x) = 0$.

O Método de Descartes é aplicado da seguinte forma:

P1: calculam-se grau $q(x)$ e grau $r(x)$;

P2: constroem-se os polinômios $q(x)$ e $r(x)$ deixando seus coeficientes como incógnitas;

P3: determinam-se os coeficientes impondo a igualdade $p(x) = m(x)q(x) + r(x)$.

Observação .1. *O método de Descartes é pouco utilizado, o mais usual é o Método das Chaves, por ser parecido com a divisão de números inteiros, e será apresentado na sequência.*

Exemplo:

(17) Vamos determinar o quociente e o resto da divisão de $p(x) = 5x^3 + x^2 - 10x - 24$ por $m(x) = x - 2$, pelo Método de Descartes:

P1: grau $q(x) =$ grau $p(x) -$ grau $m(x) = 3 - 1 = 2$ e grau $r(x) <$ grau $m(x) = 1$;

P2: $q(x) = ax^2 + bx + c$ e $r(x) = d$;

P3:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= m(x)q(x) + r(x) \\
5x^3 + x^2 - 10x - 24 &= (x-2)(ax^2 + bx + c) + d \\
5x^3 + x^2 - 10x - 24 &= \underline{\hspace{6cm}} \\
5x^3 + x^2 - 10x - 24 &= \underline{\hspace{7cm}}
\end{aligned}
$$

Logo, temos o sistema,

Portanto, $q(x) =$ ____________________ e $r(x) =$ __________.

Método das Chaves: Utilizado para encontrar o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ na divisão de $p(x)$ por $m(x)$. Podemos aplicar a mesma ideia da divisão de números inteiros utilizando chaves e seguindo os passos:

P1: escrever os polinômios (divisor e dividendo) em ordem decrescente dos seus expoentes e completá-los quando necessário, com coeficientes zero;

P2: dividir o termo de maior grau do dividendo pelo de maior grau do divisor, o resultado será um termo do quociente;

P3: multiplicar o termo obtido no passo 2 pelo divisor e subtrair esse produto do dividendo;

P4: se a diferença for o polinômio nulo ou o seu grau for menor do que o grau do divisor, a diferença será o resto da divisão e a divisão termina;

P5: caso contrário, retomasse o passo 2, considerando a diferença como um novo dividendo.

Exemplo:

Os seguintes exemplos consistem em armar e efetuar, conforme o modelo

$$\begin{array}{c|l} p(x) & m(x) \\ \cline{2-2} \vdots & q(x) \\ \cline{1-1} r(x) & \end{array}$$

(18) A divisão utilizando o Método das Chaves dos polinômios:

a) $p(x) = x^3 + 3x - 4$ e $m(x) = x - 1$

Resultam em: $q(x) =$ ____________________ e $r(x) =$ _______________.

b) $p(x) = x^2 + 5x - 6$ e $m(x) = x - 2$

Resultam em: $q(x) =$ ____________________ e $r(x) =$ _______________.

c) $p(x) = 5x^3 - 4x + 8$ e $m(x) = 3x - 2$

Resultam em: $q(x) =$ ____________________ e $r(x) =$ _______________.

(19) Verifique se o polinômio $2x^3 + 5x^2 - x - 6$ é divisível por $x - 1$ e também por $2x + 3$.

Exercício 8: Determine o quociente e o resto da divisão de $p(x) = 3x^5 + 4x^4 - 8x^2 - 15$ por $g(x) = 5x^2 - 3x + 4$.

Definição .7. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio. O* ***valor numérico do polinômio*** *$p(x)$* ***em*** *α é igual ao número real obtido quando substituímos x por α e efetuamos as operações indicadas. Indica-se por $p(\alpha)$. Assim, de modo geral, o valor numérico de $p(x)$ em α é:*

$$p(\alpha) = \rule{8cm}{0.4pt}.$$

Exemplos:

(20) O valor numérico do polinômio $p(x) = x^3 - 9x^2 + 3x + 5$ em $x = -5$ e $x = 1$ é

$p(-5) =$ ____________________ $=$ __________ e

$p(1) =$ ____________________ $=$ __________, respectivamente.

(21) O valor numérico do polinômio $q(x) = -\frac{5}{3}$ em $x = 0, x = 2$ e $x = \pi$ é __________.

(22) Os restos da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x - 1$ e por $x + 2$ são respectivamente, 1 e -23. Qual o resto da divisão de $p(x)$ por $(x - 1)(x + 2)$?

Observação: Considere um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e um número real α. Então:

- Se $\alpha = 1$, o valor numérico de $p(x)$ em α é ____________________ de seus coeficientes:

$p(1) =$ ______________________________ $=$ ______________________________.

- Se $\alpha = 0$, o valor númerico de $p(x)$ em α é o termo ____________________:

$$p(0) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

Definição .8. *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Dizemos que um número real α é **raiz** do polinômio $p(x)$ se,*

$$p(\alpha) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_,$$

ou seja, o valor numérico de $p(x)$ em α é ____________________.

Exemplos:

(23) 4 e 3 são raízes do polinômio $p(x) = x^2 - 7x + 12$, pois
$p(4) =$ ____________________ $=$ __________ e
$p(3) =$ ____________________ $=$ __________.

(24) Dado o polinômio $q(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, temos:

- $q(1) =$ ____________________ $=$ __________, logo 1 __________ de $q(x)$.
- $q(2) =$ ____________________ $=$ __________, logo 2 __________ de $q(x)$.

Exercício 9: O polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$ admite as raízes 6 e 1. Calcule os coeficientes a e b.

Exercício 10: Quais dos itens a seguir correspondem às raízes do polinômio

$$p(x) = x^6 + 3x^5 - 11x^4 - 15x^3 + 46x^2 - 24x?$$

(a) -3 (b) 5 (c) 0 (d) 6 (e) 4 (f) 1 (g) -4 (h) 2

(Sugestão: esse exercício pode ser resolvido em grupos, cada grupo deve testar algumas das possibilidades para assim o processo ser mais rápido.)

Exercício 11: Use a fórmula de Bháskara para determinar as raízes dos polinômios quadráticos:

(a) $p(x) = 3x^2 - 15x + 18$

(b) $k(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$

(c) $r(x) = x^2 - 2x + 2.$

Exercício 12: Determine o polinômio $p(x)$ do 2º grau tal que $p(0) = 2, p(1) = 3$ e $p(2) = 8$. Quantos polinômios existem satisfazendo tais igualdades.

O próximo resultado trata sobre a divisão de polinômios em que o divisor é um polinômio de grau um, $x - k$, então, o resto será o valor do polinômio dividendo calculado em k.

Teorema do Resto de D'Alembert: Considere um polinômio $p(x)$ não constante. Então, o resto da divisão de $p(x)$ por $x - k$, $k \in \mathbb{R}$, é __________.

Demonstração.

Exemplo:

(25) Determine o resto da divisão de $p(x) = x^4 + 5x^3 - 7x + 13$ por $q(x) = x + 4$.

Utilizando o método das chaves, temos que logo, o resto é $r(x) =$ _____.

Por outro lado, pelo Teorema de D'Alembert, temos que o resto da divisão é

____

O resultado a seguir é um dispositivo muito prático, rápido e simples que permite efetuar divisão de polinômios por um binômio. Podemos encontrar essa demonstração no livro (HEFEZ; VILLELA, 2012, p. 118) ou no Capítulo 5 desse trabalho.

Algoritmo de Briot-Ruffini: Utilizado para determinar o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ na divisão de um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ por um binômio do tipo $m(x) = x - k$. O algoritmo segue conforme os passos

P1: na primeira linha colocamos os coeficientes de $p(x)$, do maior grau para o menor, completando com zero os termos faltantes, e na segunda linha à esquerda colocamos o valor de k;

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ k & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

P2: o primeiro número da terceira linha é o coeficiente do termo dominante de $p(x)$;

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ k & & & & & & \\ \hline & a_n & & & & & \end{array}$$

P3: o segundo número da segunda linha é obtido multiplicando-se o primeiro número da terceira linha por k;

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ k & & kb_{n-1} & & & & \\ \hline & \underbrace{a_n}_{b_{n-1}} & & & & & \end{array}$$

P4: o segundo número da terceira linha é obtido somando-se os números que estão imediatamente acima dele na primeira e segunda linha;

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ k & & kb_{n-1} & & & & \\ \hline & b_{n-1} & \underbrace{kb_{n-1} + a_{n-1}}_{b_{n-2}} & & & & \end{array}$$

P5: continua-se repetindo o processo: os números da segunda linha são obtidos multiplicando-se os número da terceira linha situado na coluna anterior por k e os números da terceira linha são obtidos somando-se os números que estão imediatamente acima dele na primeira e segunda linha.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
k & & kb_{n-1} & kb_{n-2} & \cdots & & \\
\hline
 & b_{n-1} & b_{n-2} & \underbrace{kb_{n-2}+a_{n-2}}_{b_{n-3}} & \cdots & &
\end{array}
$$

P6: termina quando a terceira linha estiver completa.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
k & & kb_{n-1} & kb_{n-2} & \cdots & & \\
\hline
 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & r
\end{array}
$$

O quociente será $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_0$ e o resto $r(x) = r$.

Veja no exemplo a seguir como proceder com o algoritmo.

Exemplo:

(26) Determine, usando o Algoritmo de Briot-Ruffini, a divisão de $p(x) = x^4 + 5x^3 + 15x^2 - 2x - 6$ por $q(x) = x - 2$. Temos que,

Passo 1

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\
2 & & & & & \\
\hline
 & & & & &
\end{array}
$$

Passo 2

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\
2 & & & & & \\
\hline
 & 1 & & & &
\end{array}
$$

Passo 3

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\
2 & & 2 & & & \\
\hline
 & 1 & & & &
\end{array}
$$

Passo 4

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\
2 & & 2 & & & \\
\hline
 & 1 & 7 & & &
\end{array}
$$

Passo 5

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\
2 & & 2 & 14 & & \\
\hline
 & 1 & 7 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\
2 & & 2 & 14 & & \\
\hline
 & 1 & 7 & 29 & &
\end{array}
$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & 2 & 14 & 58 & \\ \hline & 1 & 7 & 29 & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & 2 & 14 & 58 & \\ \hline & 1 & 7 & 29 & 56 & \end{array}$$

Passo 6

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & 2 & 14 & 58 & 112 \\ \hline & 1 & 7 & 29 & 56 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & 2 & 14 & 58 & 112 \\ \hline & 1 & 7 & 29 & 56 & \boxed{106} \end{array}$$

Logo, $q(x) =$ ____________________ e $r(x) =$ _____.

(27) Determine, usando o Algoritmo de Briot-Ruffini, a divisão de $p(x) = x^3 - 5x + 4$ por $q(x) = x - 1$.

Logo, $q(x) =$ __________ e $r(x) =$ _____.

A seguir serão apresentadas as Relações de Girard, para polinômios de segundo e terceiro grau, que trazem condições que relacionam as raízes e os coeficientes dos polinômios. Essa demonstração pode ser encontrada no livro Iezzi (2005, p. 115) ou no Capítulo 5 desse trabalho.

Relações de Girard: Para as equações de segundo grau, seja $p(x) = ax^2 + bx + c$, se r_1 e r_2 são as raízes, temos as relações,

$$r_1 + r_2 = \underline{\hspace{3cm}}$$
$$r_1 r_2 = \underline{\hspace{3cm}}.$$

Para as equações de terceiro grau, seja $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com raízes r_1, r_2 e r_3, temos as relações,

$$r_1 + r_2 + r_3 = \underline{\hspace{3cm}}$$
$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \underline{\hspace{3cm}}$$
$$r_1 r_2 r_3 = \underline{\hspace{3cm}}.$$

Exemplo:

(28) Se a, b e c são as raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$, calcule o valor de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Pelas relações de Girard,

$$a + b + c = \underline{\hspace{1.5cm}}$$
$$ab + ac + bc = \underline{\hspace{1.5cm}}$$
$$abc = \underline{\hspace{1.5cm}}.$$

Temos que
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \underline{\hspace{4.5cm}}.$$

Ou seja,
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \underline{\hspace{10cm}}.$$

Note que podemos resolver esse exemplo usando a divisão de polinômios. Analisando, sabemos que 2 é uma raiz de $p(x)$, usando Briot-Ruffini obtemos $q(x) =$

____________, assim $p(x) = q(x) \cdot$ __________. Agora resolvendo $q(x) = 0$, usando a fórmula de Bháskara, temos

Então, ____________________ também são raízes, e portanto,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}.$$

O próximo resultado é o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) que garante a existência de raízes complexas de qualquer polinômio não constante com coeficientes complexos. Note que o mesmo não vale para raízes reais de polinômios com coeficientes reais, por exemplo, $p(x) = x^2 + 4$ tem coeficentes reais, mas não possui raízes reais. Essa demonstração pode ser encontrada em duas versões no Capítulo 5 desse trabalho ou no livro Hefez e Villela (2012, p. 192). Também veremos o Teorema da Decomposição, que é uma consequência imediata do TFA e do Algoritmo da Divisão. Com este teorema podemos afirmar que qualquer polinômio com grau $n \geq 1$ possui exatamente n raízes complexas.

Teorema Fundamental da Álgebra: Todo polinômio de coeficientes complexos e de grau n possui pelo menos _________________________.

Exemplo:

(29) Encontre as raízes dos polinômios:

a) $p(x) = x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30$.

O polinômio $p(x)$ tem grau 4 e tem __________ raízes reais, a saber _________________________.

b) $q(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$.

O polinômio $q(x)$ tem grau 3 e ____________________ são suas raízes. Logo, só uma é __________ e as outras duas são _______________.

c) $m(x) = 3x^2 + 6$

O polinômio $m(x)$ tem grau 2 e tem duas raízes _______________, a saber _______________.

O próximo teorema mostra que podemos decompor um polinômio com suas raízes, essa demonstração pode ser encontrada em Iezzi (2005, p. 106) ou no Capítulo 5 desse trabalho.

Teorema da Decomposição: Todo polinômio

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

com grau $n \geq 1$ pode ser decomposto em n fatores do ________________, isto é

$$p(x) = a_n \cdot \underline{\hspace{6cm}}$$

em que $r_1, r_2, \cdots, r_n$ são as raízes de $p(x)$ (tais raízes podem ser complexas).

Exemplo:

(30) Decomponha em fatores lineares os polinômios do exemplo anterior.

a) $p(x) = x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 =$ ________________________.

b) $q(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12 =$ ________________________.

c) $m(x) = 3x^2 + 6 =$ ________________________.

Nem toda raiz de um polinômio real é um número __________, como por exemplo o item (b) do Exemplo 30. Temos alguns resultados que nos indicam como encontrar as raízes reais, caso existirem.

O próximo teorema nos fornece um conjunto finito de todas as possíveis raízes racionais de um polinômio com coeficientes inteiros dado. Essa demonstração pode ser encontrada no livro Iezzi (2005, p. 141) ou no Capítulo 5 desse trabalho.

Teorema das Raízes Racionais: Se um polinômio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

com $a_n \neq 0$ de coeficientes inteiros, admite uma raiz racional $\frac{p}{q}$, em que $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}_+^*$ e p e q são primos entre si, então p é divisor de __________ e q é divisor de __________.

Exemplos:

(31) Resolva os seguintes itens:

a) Quais são as raízes inteiras do polinômio $p(x) = x^3 - x^2 - 4$?

Pelo Teorema das Raízes Racionais, as raízes estão no conjunto

____________________, testando no polinômio $p(x) = x^3 - x^2 - 4$

Então, a única raiz inteira é __________.

b) Decomponha o polinômio $p(x)$ em um produto de dois polinômios, um de grau 1 e outro de grau 2.

Basta dividir $p(x)$ por _______________,

Podemos escrever

$$p(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

c) Quantas raízes reais tem esse polinômio?

Basta utilizar a fórmula de Bháskara para ver se $q(x) =$ _______________ tem raízes reais. Temos que o delta será:

$$\Delta = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

Como o delta é __________ do que zero, $q(x)$ __________ raízes reais, portanto o polinômio $p(x)$ tem _______________.

(32) Se o polinômio $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$ pode ser fatorado na forma $(2x - 1)(x + 3)(x - k)$, então qual é o valor de k?

Solução 1: Pela divisão de polinômios temos que

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-5x^2-28x+15 & 2x-1 \\ \hline & \\ \end{array}$$

então divida o resultado por $x+3$

Como

$$p(x) = (2x-1)(x+3)(x-k)$$

então $k = \underline{\qquad}$. Pela igualdade de polinômios segue que

$$\begin{aligned} p(x) &= (2x-1)(x+3)(x\underline{\qquad}) \\ &= (2x^2+6x-x-3)(x\underline{\qquad}) \\ &= (2x^2+5x-3)(x\underline{\qquad}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2x^3-10x^2+5x^2-25x-3x+\underline{\qquad} \\ &= 2x^3\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}. \end{aligned}$$

Solução 2: Pelo Teorema das Raízes Racionais, temos que as raízes racionais estão no conjunto ____ testando, vemos que além de $1/2$ e -3, _____ também é raiz, portanto, $k = \underline{\qquad}$.

(33) Utilize o Teorema das Raízes Racionais para encontrar as raízes racionais, se houverem, do polinômio $p(x) = x^3-4x+6$.

Pelo Teorema das Raízes Racionais temos que as raízes racionais estão no intervalo ______________________________, substituindo em $p(x)$:

então, $p(x)$ ___________________ raiz racional.

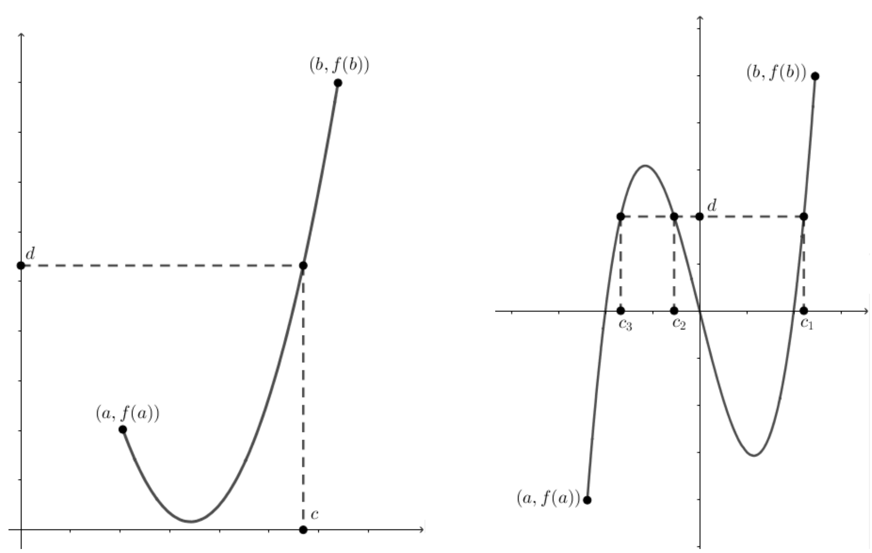
O fato de não haverem raízes racionais no exemplo acima não significa que o polinômio não tem nenhuma raiz real, podemos ter raízes irracionais, e para encontrá-las temos um resultado de Calculo Diferencial e Integral I, o Teorema do Valor Intermediário, e sua demonstração pode ser encontrada no livro Lima (1999, p. 234) ou no Capítulo 5 desse trabalho.

Teorema do Valor Intermediário: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(a) \neq f(b)$. Então, dado qualquer d entre $f(a)$ e $f(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = d.$$

Esse teorema faz muito sentido quando se considera que os gráficos de funções contínuas são desenhados sem retirar o lápis do papel, então se sabemos que o gráfico passa por $(a, f(a))$ e por $(b, f(b))$, com $f(a) \neq f(b)$, então ele deve passar por todos os pontos entre $f(a)$ e $f(b)$, como ilustrado na Figura 2 (a). Como as funções polinomiais são sempre contínuas em um intervalo, sempre podemos usar esse teorema. Note que o teorema diz que existe $c \in (a, b)$, mas ele não é necessariamente único, como, por exemplo, ilustra a Figura 5 (b).

Figura 5 – Teorema do Valor Intermediário Caderno



(a) (b)

Fonte: produção da autora, 2020.

Teorema de Bolzano: Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$.

Demonstração.

Sendo assim, o Teorema de Bolzano pode ser utilizado para encontrar intervalos que contenham raízes de um polinômio, basta achar um intervalo em cujos extremos a função assuma valores com sinais ______________. Podemos ver como utilizá-lo nos exemplos abaixo.

Exemplo:

(34) Já vimos que o polinômio $p(x) = x^3 - 4x + 6$ não tem raízes racionais, utilize o Teorema de Bolzano e encontre, se houverem, intervalos que contenham as raízes que não são racionais.

Vimos anteriormente, os valores de $p(x)$ em:

$$\begin{aligned} p(1) &= 3, & p(-1) &= 1 \\ p(2) &= -2, & p(-2) &= -18 \\ p(3) &= -3, & p(-3) &= -57 \\ p(6) &= 78, & p(-6) &= -354. \end{aligned}$$

então, pelo Teorema de Bolzano temos raízes reais nos intervalos ____________________________. O que significa que o polinômio tem _____ raízes reais.

(35) Utilize o Teorema das Raízes Racionais para encontrar as raízes racionais do polinômio $p(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$, encontre um intervalo para as raízes que não forem racionais, se houverem.

Pelo Teorema das Raízes Racionais, as raízes racionais estão no conjunto ________________________________, substituindo em $p(x)$

vemos que _____ é uma raiz de $p(x)$, e as outras raízes reais, se existirem, serão números ______________.

Pelo Teorema de Bolzano temos que as outras raízes estão nos intervalos:

____

____.

Podemos utilizar o Algoritmo de Briot- Ruffini para diminuir o grau de $p(x)$ e depois utilizar a fórmula de ______________ para encontrar as outras _________ raízes.

Temos $g(x) =$ ______________, que tem as raízes ___________________, que estão nos intervalos que o Teorema de Bolzano mostrou que estariam. Pelo Teorema da Decomposição, sabemos que podemos escrever $p(x)$ da forma,

$$p(x) = (\_\_\_\_\_\_\_\_\_)(\_\_\_\_\_\_\_\_\_)(\_\_\_\_\_\_\_\_\_).$$

(36) Analise o polinômio $p(x) = 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x + 32$ e tente localizar suas raízes.

Para esse polinômio fica bastante cansativo utilizar o Teorema das Raízes Racionais, por causa da quantidade de números que o teorema fornece, inclusive frações. Vamos substituir alguns valores para usar o Teorema de Bolzano,

$$
\begin{aligned}
p(0) &= \underline{\hspace{2em}}, \quad p(-1) = \underline{\hspace{2em}} \\
p(1) &= \underline{\hspace{2em}}, \quad p(-2) = \underline{\hspace{2em}} \\
p(2) &= \underline{\hspace{2em}}, \quad p(-3) = \underline{\hspace{2em}} \\
p(3) &= \underline{\hspace{2em}}.
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema de Bolzano temos uma raiz no intervalo ______________, isso não significa que todas as outras raízes são complexas, apenas não obtivemos resultados para encontrar as raízes reais. Ou seja, para polinômios de grau maior ainda é difícil, apenas com esses resultados, determinar todas as raízes. Seria necessário um estudo mais avançado de funções, como por exemplo o que é visto nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral I nas graduações.

Observação .2. *Todo polinômio de grau ímpar tem pelo menos ______________, pois se* $a_n > 0$ *(vale o mesmo para* $a_n < 0$*), temos que quando* x *assume valores muito altos positivos, então o valor do polinômio também assume valores muito altos positivos. Quando* x *assume valores muito altos negativos, então o polinômio também assume valores muito altos negativos, pois um número negativo elevado a uma potência ímpar resulta num número negativo. Assim, existem* a *e* b *tais que* $f(a)f(b) < 0$ *e o polinômio tem uma raiz real pelo Teorema de Bolzano.*

CONSIDERAÇÕES

Maiores informações sobre a concepção e análise das atividades podem ser encontradas no decorrer da dissertação. No Capítulo 6 temos as soluções do exemplos apresentamos no caderno de atividades, além disso, temos uma lista, com resoluções dos exercícios e indicações aos professores. Com base neste caderno podem ser desenvolvidos outros materiais para ensino de polinômios.