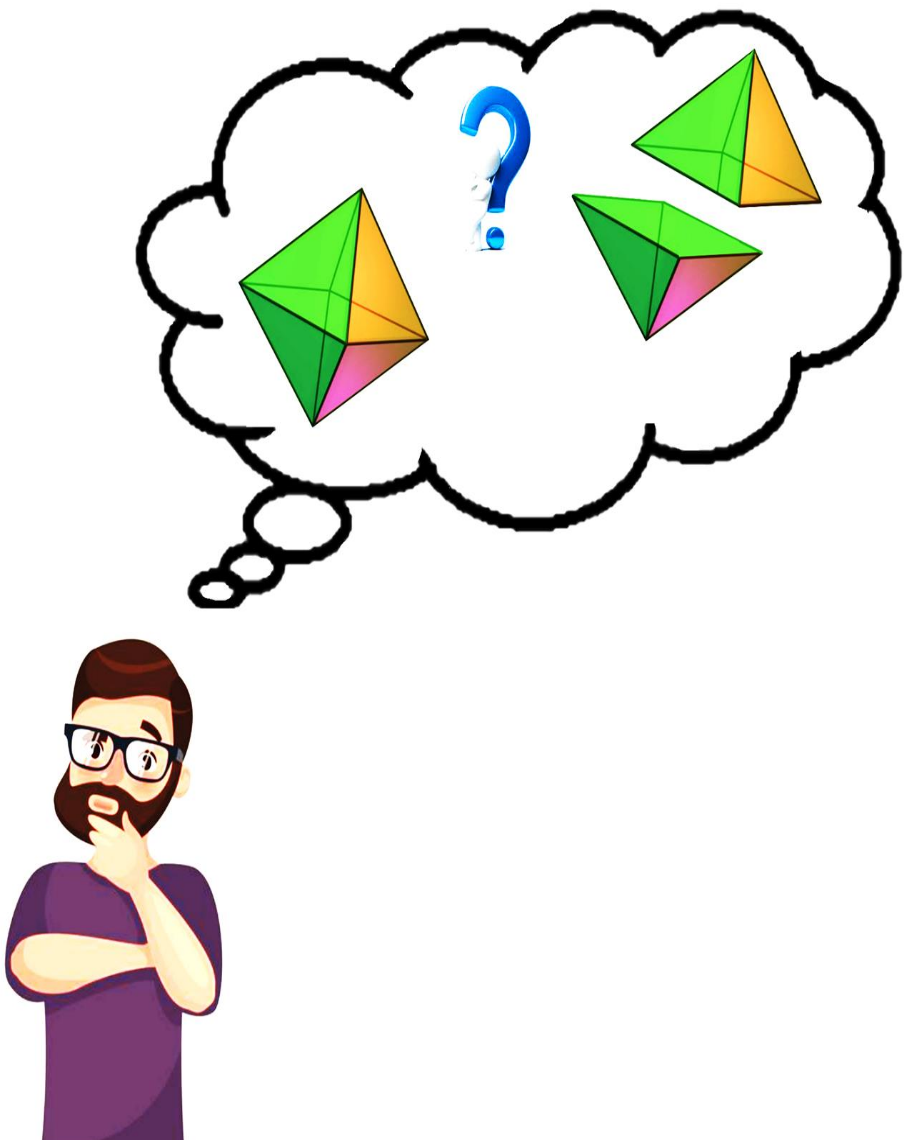
Apêndice (A)

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



APRESENTAÇÃO

Caro (a) professor (a),

O produto educacional foi elaborado por meio da pesquisa de mestrado em matemática intitulada “Apreensões de geometria na resolução de exercícios de geometria espacial na terceira série do ensino médio” desenvolvida no programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, tendo como instituição de Ensino a Universidade Estadual de Santa Catarina – UDESC, sob orientação do Prof. Dr. Rogério de Aguiar.

Este produto é um caderno de atividades voltado ao professor com sugestões e questões de geometria espacial voltado aos alunos do Ensino Médio sob o ponto de vista das representações de registro semiótico.

As atividades aqui apresentadas, não têm a pretensão de serem os únicos no trabalho do professor e sim uma sugestão de problemas de geometria a serem trabalhados em sala de aula sob uma nova perspectiva, olhando para as dificuldades, erros e acertos dos alunos. Minha intenção com esse produto é que sirva ao professor em sua prática docente e que possa enriquecer a dinâmica da sala de aula.

Se desejar mais informações acerca do desenvolvimento deste trabalho, poderá consultar o título no banco de dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Adriano Moser

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Caro (a) Professor (a):

A construção de um corpo de conhecimento a partir do ensino da Geometria Espacial é uma excelente oportunidade de colocar o aluno num contexto que possa desenvolver as habilidades argumentativas lógicas-dedutiva contribuindo para que as competências de raciocínio, análise e visualização sejam melhores desenvolvidas.

A proposta desse produto é apresentar um novo olhar sobre os exercícios de geometria espacial para o Ensino Médio e dar ao professor o discernimento das apreensões em geometria envolvidas nos exercícios e a sua psicodinâmica quanto as suas resoluções, tendo como base o Registros de Representação Semiótica. Além deste, o caderno de atividade contará com um capítulo contendo uma breve reflexão das apreensões em geometria que alicerçam o processo resolutivo dos problemas envolvendo geometria espacial sob o olhar da teoria cognitiva de Raymond Duval – filósofo e psicólogo.

O aporte teórico desse caderno de atividades está disponível para consulta pública no banco de dissertações do Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. É recomendável que o educador busque uma leitura integral da pesquisa a fim de cristalizar a estreita relação que existe entre o processo cognitivo de aprendizagem e o papel dos registros de representação dos objetos matemáticos.

E por fim, no último capítulo, apresenta-se todas as resoluções comentadas das questões propostas no caderno de atividade oportunizando ao professor uma análise em caráter preliminar do custo cognitivo de cada exercício, podendo assim escolher a atividade adequada para seus alunos de acordo com o conteúdo a ser ministrado.

2 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE RAYMOND DUVAL

O ensino de matemática deve participar do desenvolvimento da capacidade de raciocínio, análise e visualização, de modo que a escola deixando de ser um ambiente inerte, com conhecimentos já definidos, passa a ser um espaço no qual o conhecimento do cotidiano se relaciona com o conhecimento científico.

O uso da figura geométrica é fundamental para o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos geométricos, pois permite que o aluno acesse o objeto matemático representado, e ainda possibilita conjecturar propriedades para que se consiga, então, a resolução de problemas.

Nesse contexto, sendo comum os alunos apresentarem dificuldade quanto a compreensão dos conceitos geométricos, principalmente no que tange a Geometria Espacial e suas representações, a teoria cognitiva do filósofo e psicólogo Raymond Duval (1995) intitulada por Registros de Representação Semiótica será o aporte teórico quanto ao entendimento do funcionamento cognitivo da compreensão em matemática, no que se refere a geometria.

Duval (2004) destaca que o processo de aprendizagem dos conceitos geométricos exige de forma simultânea a mobilização entre os registros discursivos e figurais, fazendo com que se exija mais cognitivamente do aluno se comparado a outros conceitos matemáticos (DUVAL, 2004 apud KLUPPEL & BRANDT, 2014, p. 120).

Em particular, na Geometria Espacial a dificuldade natural em representar o registro tridimensional da figura aumenta consideravelmente a complexidade da compreensão, fato esse facilmente observado em muitos ambientes de ensino.

Considerando que o acesso aos objetos matemáticos passa estritamente pelas suas representações semióticas, o que particulariza a matemática das demais ciências, Duval (2013) destaca a importância do papel do professor em sua prática de ensino de modo a conduzir o aprendizado do aluno a fim de que exista o discernimento entre o objeto matemático e a sua representação; tal atitude passa necessariamente pela mobilização de ao menos dois registros semióticos correlacionados ao mesmo objeto matemático (DUVAL, 2013, p.21).

A interação simultânea e automática entre os registros discursivos e figurais caracteriza o aprendizado geométrico, tornando-o único a ponto de Duval distinguir quatro interações interpretativas sobre a figura, denominando-as como sendo as apreensões em geometria, sendo elas: perceptiva, operatória, discursiva e sequencial.

A apreensão perceptiva é o olhar sobre a figura dentro do contexto de uma atividade matemática com a proposta de buscar as interpretações da figura em si, porém dada a sua natureza heurística, sua ação intuitiva pode conduzir o processo resolutivo de forma inapropriada, ignorando hipóteses dadas pelo enunciado da questão. Por outro lado, a apreensão discursiva busca o entendimento dos elementos da figura geométrica a partir do registro discursivo da questão, levando em consideração o estatuto do objeto matemático e suas propriedades.

Quanto a apreensão sequencial, em atividades que tem como norteador uma construção geométrica ou uma descrição de uma dada figura cujo objetivo seja de reproduzi-la, determinada movimentação dessas estruturas cognitivas caracterizam a ação da apreensão sequencial. A apreensão operatória estando centrada nas possíveis modificações que uma figura de partida pode permitir e suas reorganizações perceptivas que tais modificações provocam, visa potencializar a apreensão perceptiva favorecendo assim a resolução do problema de geometria.

Ao considerar que a maior parte dos problemas que envolvem tanto o ensino quanto a aprendizagem da geometria tem como origem sua didática em coordenar os diferentes tipos de registros, uma prática pedagógica que favoreça a compreensão entre o estatuto do objeto e sua representação geométrica pode neutralizar essa realidade ao aprimorar a função heurística da imagem no contexto geométrico.

Embora existam diversas propostas didáticas quanto ao ensino da geometria espacial para o ensino médio, é importante que o professor permeie sua didática considerando as figuras geométricas como parte intrínseca do processo de ensino e aprendizagem, levando em consideração as apreensões em geometria descritas por Duval, a fim de favorecer de forma significativa o aprendizado dos conceitos de poliedro, prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera.

3 ATIVIDADES

As atividades apresentadas nesse caderno buscam interagir com o cotidiano escolar em que o professor utiliza de questões já aplicadas em sistemas de avaliação, como por exemplo o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, de modo a avaliar tanto quantitativamente quanto qualitativamente a compreensão dos estudantes quanto ao tema ensinado. E nessa perspectiva a proposta é dimensionar o olhar do educador para a interação das representações semióticas no processo de ensino e aprendizagem da temática de Geometria Espacial a partir da identificação das apreensões em geometria que permeiam o processo resolutivo dos exercícios aqui apresentados.

Portanto, após cada exercício será apresentado uma breve orientação ao professor para que direcione sua percepção quanto as interações que as apreensões: perceptiva, discursiva, operatória e sequencial a fim de exista uma compreensão significativa quanto ao processo de resolução que o problema instiga.

3.1 POLIEDRO

3.1.1 Exercício 1

Obter o número de arestas de um poliedro convexo que tem 6 faces e 8 vértices.

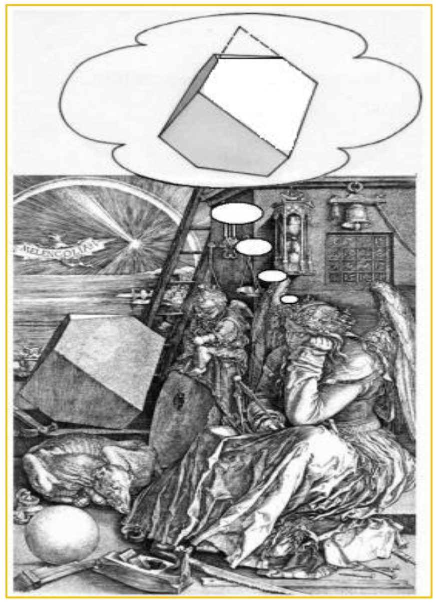
ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Em virtude da predominância nas propostas pedagógicas do uso excessivo de fórmulas e soluções que não fazem uso de registros discursivos, principalmente no contexto geométrico é importante que o professor estimule o aluno a identificar no enunciado as informações pertinentes ao objeto geométrico em questão. Seria conveniente que o uso de sólidos poliédricos convexos de modo que o aluno possa ter a percepção visual dos elementos geométricos de dimensões inferiores ao objeto em questão a fim de que a passagem direta do registro em língua natural (enunciado) para o tratamento conhecido como Teorema de Euler seja de forma consciente.

3.1.2 Exercício 2

A gravura Melancolia de Albrecht Dürer (1514) contém vários objetos e símbolos matemáticos. O anjo olha pensativo para uma face do poliedro, notando que a face é um losango sem uma ponta.

Figura 1:Ilustração adaptada gravura Melancolia de Albrecht Dürer (1514)



Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html

Identifique e quantifique os elementos (arestas, vértices e faces) do poliedro em questão, sabendo que duas de suas faces são triângulos equiláteros e todas as outras faces são idênticas.

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Como o registro figural geométrico não contempla um poliedro que esteja no contexto usual do aluno é importante estimular a manipulação das informações que a imagem oportuniza comparando simultaneamente com as afirmações descritas no enunciado. Uma prática funcional é ler com a turma a questão e identificando fatos relevantes de modo a destacar, como por exemplo, na frase que diz: "*O anjo olha pensativo para uma face do poliedro, notando que a face é um losango sem uma ponta".* Sensibilizar para expressões como "poliedro", face é um losango sem uma ponta" é fundamental para que a partir da reflexão das implicações desses termos no contexto do exercício, o acesso a imagem seja coordenada através do estatuto do objeto em questão.

3.1.3 Exercício 3

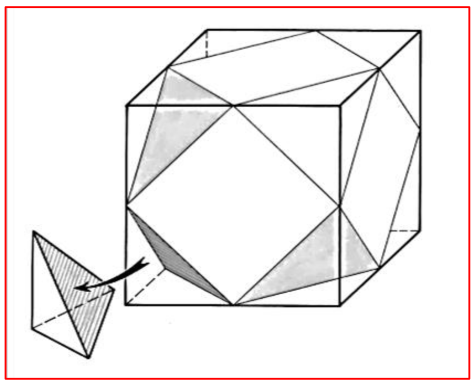
Sobre cada uma das faces de um cubo, desenha-se um quadrado unindo-se os pontos médios das arestas do cubo como mostra a ilustração. As linhas desenhadas formam oito pirâmides a partir de cada vértice do cubo. Se “recortarmos” as oito pirâmides do cubo, obteremos um poliedro convexo denominado: CUBOCTAEDRO.

Para cada poliedro convexo os matemáticos Euler e Descartes, provaram a seguinte relação:

$V - A + F = 2$

Onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces. **Mostre que a relação é válida para este cuboctaedro.**

Figura 2: Poliedro Cuboctaedro



Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Geralmente a representação dos objetos geométricos espaciais condicionam a tomadas de decisões pelos alunos de modo a permitir percepções equivocadas quanto aos elementos quantitativos inseridos no contexto do problema. Essa questão em particular, a fim de minimizar essas tomadas de decisões equivocadas, conduza o trabalho reunindo os alunos em pequenos grupos e sugira que registrem as informações dadas no enunciado que definam o objeto geométrico exposto no registro figural.

Espera-se que nesse caso que o termo poliedro convexo seja identificado por parte dos alunos. Dando sequência a atividade, num segundo momento o professor discuta no grande grupo de modo a instigar os alunos a afirmarem as propriedades geométricas que caracterizam um poliedro, como por exemplo, a existência de vértices, arestas e faces, bem como a implicação da particularidade desse poliedro ser convexo.

Para a compreensão de um objeto tridimensional é fundamental que o aluno consiga identificar e manipular componentes de dimensões inferiores, o que valorizaria essa etapa de reflexão sobre o objeto geométrico e suas propriedades.

Tendo em mãos o deslumbre do estatuto do objeto, o professor orienta os alunos para que manipulem o registro figural a fim de identificar as informações para então substituir no tratamento matemático exigido de modo a validar a igualdade desejada.

Vale ressaltar que aproximar o objeto geométrico ao seu estatuto favorece a coordenação dos tratamentos geométricos sobre a imagem, reduzindo assim as tomadas de decisões por achismos, em que a percepção visual sobre a figura tende a condicionar essas ações durante o processo resolutivo.

Por fim, mesmo não sendo o objetivo explícito dessa questão, o professor pode com seus alunos em uma etapa final construir o raciocínio para a apresentação do volume do cuboctaedro, é claro que seria necessário estabelecer uma relação entre o cubo com a pirâmide de base triangular declarada tanto no enunciado quanto no registro figural.

3.1.4 Exercício 4

(Adaptada da UNIRIO). Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro, que satisfaz a relação de Euler, com 60 faces triangulares. Determine o número de vértices deste cristal.

ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

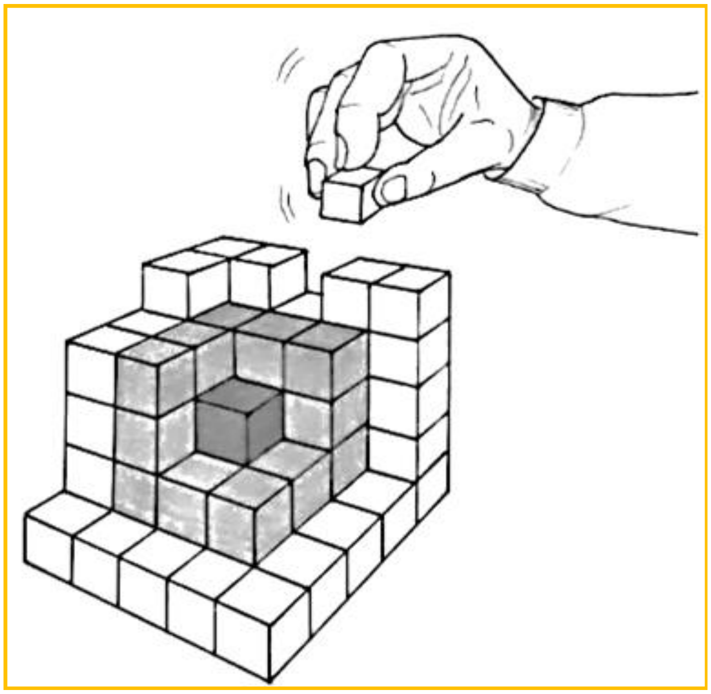
A semelhança com o exercício 1 dessa temática de poliedro se restringe somente ao objeto geométrico em questão, a quantidade expressiva de polígonos que compõe as faces descaracteriza completamente uma iniciativa de desejar construir a solução a partir da elaboração do registro figural desse poliedro. Explique aos alunos que mesmo havendo essa restrição quanto á visualização do objeto, não restringe a necessidade de contemplar o estatuto desse objeto, a fim de que o tratamento geométrico que venha a definir o número de arestas desse sólido permeie na certeza de que por ao o produto do número de faces do poliedro pelo número de arestas do polígono da face não deixe de considerar somente a metade do registro numérico encontrado, uma vez que cada aresta considerada por esse tratamento é adjacente entre duas faces do sólido.

Expor aos alunos que tendo em mãos os registros quantitativos do número de faces e arestas do poliedro, o uso da Relação de Euler é de imediato a forma mais eficiente de concluir a problemática.

3.2 PRISMAS

3.2.1 Exercício 1

Rayane, Bernard e Jeanne brincam com cubos da mesma dimensão. Rayane tem um cubo vermelho de 5 gramas. Bernard circunda o cubo de Rayane com cubos azuis que pesam 8 gramas cada, criando assim um novo cubo. Jeanne coloca cubos verdes, que pesam 12 gramas cada, em torno do cubo de Bernard para formar um novo cubo, totalizando 125 cubos. Calcular a massa total do cubo final?



Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html

ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

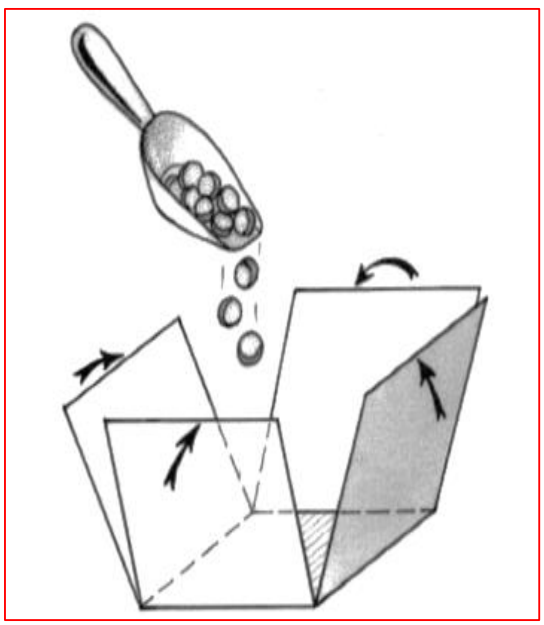
A percepção visual de um registro figural no contexto geométrico é importante que o professor tenha ciência de que a interpretação sobre a figura é dependente de processos cognitivos próprios de cada aluno e por consequência os tratamentos decorrentes dessa interpretação sobre a imagem deve ser ponto de observação e reflexão do educador a fim de que modelando sua pratica pedagógica conduza o estudante a ver o objeto matemático não mais como um aluno, mas da mesma maneira que um professor de matemática contempla, ou seja, através das componentes elementares que toda figura geométrica possui.

Portanto, discuta com os alunos a respeito das consequências sobre o fato de que a formação dos cubos descritos no enunciado está condicionado a revestir um cubo unitário com unidades cúbicas de mesma dimensão. Conduza a reflexão da turma de que mesmo que as unidades cúbicas possuam a mesma unidade, suas cores implicam em pesos diferentes e de maneira poderão quantificar as unidades cúbicas por cor a fim de estabelecer a massa total do objeto formado.

Deve ficar claro para os alunos, de que com exceção do cubo inicial, todos os demais serão formados por unidades cúbicas de pelo menos duas cores distintas. A fim de colaborar na resolução incentive a construção de uma tabela a fim de discriminar o cubo vermelho (inicial), o cubo revestido por unidades cúbicas azuis e por fim o cubo revestido por unidades cúbicas verdes e seus respectivos pesos.

3.2.2 Exercício 2

Utilizando um disco de papel cartão de 10 cm de raio, construí a maior caixa possível, composta por 5 quadrados idênticos, formando uma caixa cúbica sem tampa. Calcule o volume da caixa que eu construí.



Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html

ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

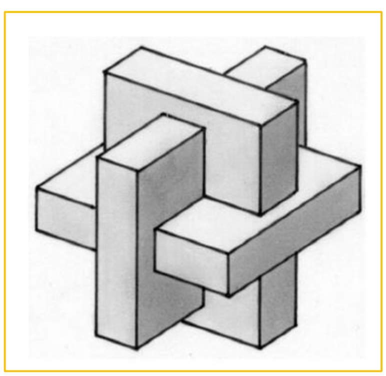
A resolução desse exercício permeia pela utilização das propriedades do objeto geométrico denominado círculo, em particular tomando o diâmetro como sendo um dos lados de um triângulo, qualquer ponto tomado na circunferência de modo a compor os outros dois lados desse triângulo representará um ângulo reto e portanto um triângulo retângulo norteará a determinação da medida do lado do quadrado que irá compor a formação da caixa.

Em virtude dessa atitude não ser intuitiva, cabe o professor solicitar que que os alunos construam a partir dos instrumentos de construção geométrica (compasso e régua) a figura do círculo, porém se existir a indisponibilidade da construção individual, uma única construção no quadro poderá servir como exposição para toda a turma. Nesse caso, explore essa propriedade do arco notável a partir do diâmetro da figura e discuta com os alunos como essa construção geométrica poderá contribuir para a resolução do problema. Permita que os alunos façam em seus cadernos, mesmo não existindo o rigor da construção geométrica suposições para a colocação dos demais segmentos de modo forma os cincos quadrados dentro da figura circular, e é claro evidencie a importância de generalizar o lado do quadrado a fim poder obter através dos tratamentos matemáticos o valor que determinará o maior quadrado e por consequência o maior volume da caixa.

Sempre instigue os alunos a compreensão da proposta do problema de modo que uma vez aplicado o tratamento matemático e determinado a medida do lado do quadrado, pergunte ao grupo se está concluída a questão, uma vez que é comum os alunos depois de alguns tratamentos matemáticos acreditarem terem concluído a questão.

3.2.3 Exercício 3

Três paralelepípedos entrelaçados formam um sólido mostrado abaixo. Eles têm a mesma dimensão 2cm x 8cm x 10cm. Calcule o volume do sólido descrevendo sua resposta:



Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html

ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

Em função da elevada capacidade heurística do registro figural desse problema, a fim de construir uma base argumentativa sobre o processo resolutivo necessário para a conclusão desse exercício, sua resolução em grupos vem a otimizar essa proposta, e portanto é uma boa oportunidade ao professor de uma vez organizado os grupos, estimule que ao término da resolução, cada grupo exponha a maneira que se utilizou para dimensionar o volume do bloco de paralelepípedos descrito na imagem

Durante a discussão em grupo, eles devem perceber que o volume do bloco em questão não se define simplesmente triplicando o volume de um único paralelepípedo, uma vez que, esses sólidos se encontram encaixados, e é papel do professor ao acompanhar a resolução que estimule os alunos a desconstruir o bloco em partes de modo que cada parte seja disjunta as demais.

3.2.4 Exercício 4

Uma carga de 100 contêineres, idênticos ao modelo apresentado na Figura 1, deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de 10m por 32m foi cedida para o empilhamento desses contêineres (Figura 2).

Figura 2

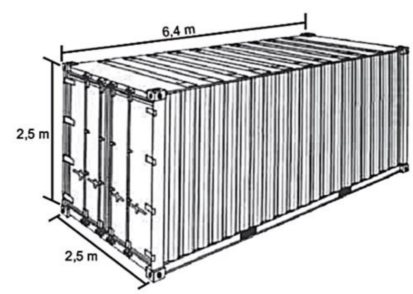


Figura 1

Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos

De acordo com as normas desse porto, os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobrarem espaços nem ultrapassarem a área delimitada. Após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto, qual deverá ser a altura mínima a ser atingida por essa pilha de contêineres?

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

É importante que, costumeiramente o aluno ao identificar que a proposta do problema está em definir a quantidade de acomodação de um objeto num determinado espaço, o uso da grandeza volume pode parecer coerente nesses tipos de exercício, porém nem sempre a acomodação é estritamente exatamente sob o ponto de vista métrico. A fim de descaracterizar essa intenção, peça aos alunos que na leitura do enunciado se atentem para o fato de que nesse caso a acomodação do objeto se dará numa superfície plana e que executar o tratamento da divisão entre a área do terreno e a área da base do containers, do ponto de vista prático não é a melhor escolha, uma vez que não há garantias de que o espaço será estritamente utilizado em sua totalidade

Discuta com seus alunos qual o modo mais otimizado de dispor os containers sobre o terreno, lembrando sempre que para essa situação não existe a unicidade de acomodação do objeto em questão.

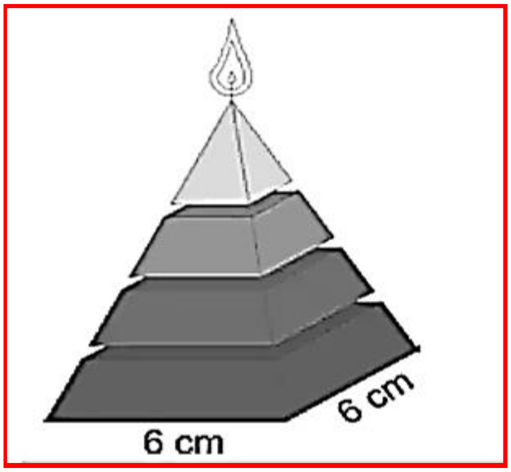
Lembre o aluno que existe critério de segurança quanto ao empilhamento dos containers e um número fixo para acomodação, o que implica em maximizar a quantidade a ser colocada num primeiro momento sobre a superfície plana.

O uso de registro numeral decimal e os tratamentos matemáticos a serem utilizados é uma boa oportunidade do professor identificar dúvidas quanto a esses tratamentos e uma vez existindo, ao final da resolução exponha no quadro a resolução e detalhe passo a passo as operações realizadas e existindo outras formas de representar não deixe também de compor sua explanação.

3.3 PIRÂMIDES

3.3.1 Exercício 1

Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos da mesma altura — 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior —, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.



Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos

Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

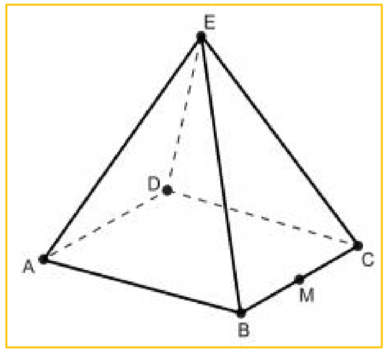
ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Quando o foco de um problema geométrico consiste em quantificar o volume de uma pirâmide, é persistente o erro na determinação da sua altura quando está não vem descrito no contexto do problema, dado o fato de que se faz necessário operações geométricos a fim de habilitar a aplicação dos tratamentos matemáticos, como por exemplo o teorema de Pitágoras.

Nessa questão em particular, a riqueza de informações dada no enunciado do problema destaca a oportunidade do professor solicitar aos alunos que destaquem todo registro capaz de caracterizar o objeto geométrico e em seguida leia em voz para o grande grupo somente a proposta do problema e solicite que os alunos participem selecionando somente os dados pertinentes a resolução.

3.3.2 Exercício 2

João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção esse deslocamento no plano da base da pirâmide.



Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos

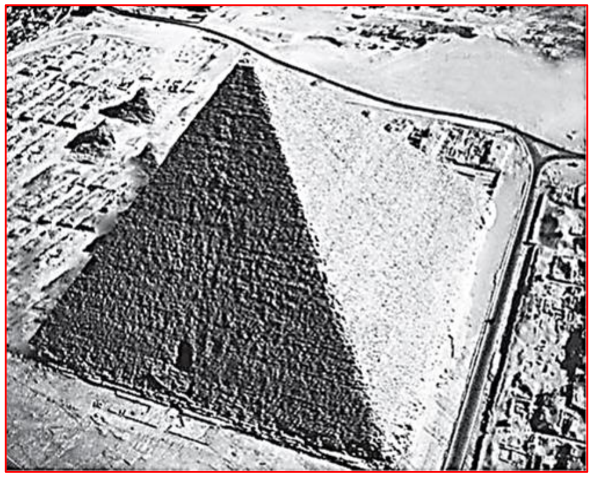
O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C. Esboce o desenho que Bruno deverá fazer:

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Essa questão ao estabelecer como proposta um registro figural que represente a partir da projeção ortogonal um deslocamento orientado, têm na visualização a ação responsável em aproximar para o plano o movimento que ao estar expresso no enunciado é importante que o professor permita um ambiente que estimule a concentração e foco, uma vez que a realização de uma proposta resolutiva passa necessariamente pela interação das informações discursivas e figurais.

3.3.3 Exercício 3

A Figura mostra a pirâmide de Quéops, também conhecida como a Grande Pirâmide. Esse é o monumento mais pesado que já foi construído pelo homem da Antiguidade. Possui aproximadamente 2,3 milhões de blocos de rocha, cada um pesando em média 2,5 toneladas. Considere que a pirâmide de Quéops seja regular, sua base seja um quadrado com lados medindo 214 m, as faces laterais sejam triângulos isósceles congruentes e suas arestas laterais meçam 204 m. O valor mais aproximado para a altura da pirâmide de Quéops, em metro, é?



Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos

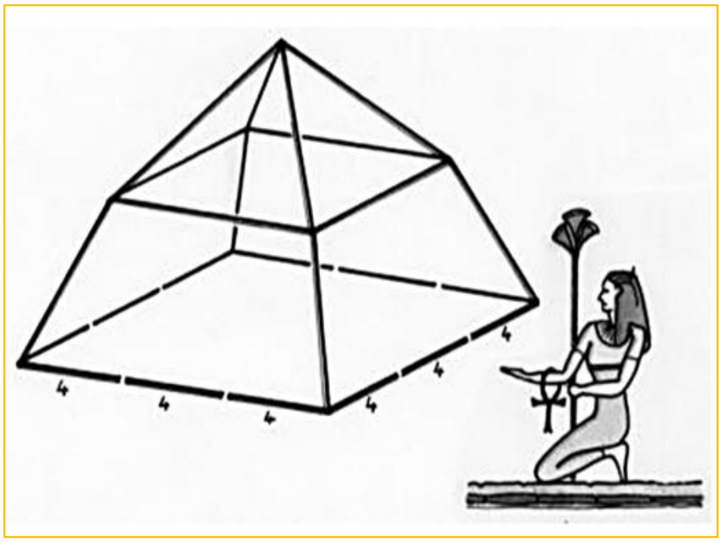
ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

A fim de reduzir a probabilidade de que o aluno apresente uma grandeza que geometricamente não seja a altura da pirâmide, é fundamental que o professor estimule os alunos a realizarem o desenho desse sólido numa perspectiva que seja de fácil visualização os tratamentos geométricos de modo a favorecer a escolha do triângulo retângulo que servirá como base para a aplicação do teorema de Pitágoras.

Vale ressaltar que caso seja favorável, o professor também realize o desenho da pirâmide no quadro e peça atenção para os alunos a fim de coletivamente identificar as possibilidades de interagir com a figura de modo a obter um triângulo retângulo em que uma das componente dessa figura plana seja a altura da pirâmide. Com o registro figural ainda exposto no quadro, é oportuno que o professor conduza a reflexão a turma sobre as incoerências geométricas que a projeção no plano de um objeto tridimensional evidencia, de modo a fazer valer sempre necessário o acesso ao estatuto do objeto a fim de validar suposições visualizadas na imagem, mas que exista dúvida sobre a sua validade.

3.3.4 Exercício 4

Hugo tem uma caixa cheia de varetas de comprimento 4 e 8 cm. Ele constrói o modelo apresentado abaixo. Ele usa hastes de 4 cm para a base quadrada e hastes de 8 cm para todas as outras. Seu sólido não é uma pirâmide, porque as bordas inclinadas não são linhas retas. Usando mais 4 varetas encontre pelo menos uma forma de transformar o sólido numa pirâmide. Justifique sua escolha.



Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Partindo do fato de que a proposta do exercício consiste em manipular elementos geométricos predefinidos a fim de inserir uma modificação controlada na figura original, é conveniente que o professor conduza a resolução a partir da formação de grupos, a fim de favorecer tanto o raciocínio coletivo quanto o argumentativo individual, uma vez que o aluno em seu grupo deverá apresentar fatos que estruturem sua proposta resolutiva a fim de que o grupo compartilhe da sua resolução. O papel do professor quanto a sua participação nos grupos é de garantir que a solução apresentada represente geometricamente uma pirâmide, e nesse caso dada a capacidade heurística da figura de oferecer mais de uma possibilidade de tratamento geométrico de modo validar a preposição geométrica da figura, ao final da atividade, convide os grupos a apresentarem coletivamente suas resoluções.

3.4 CILINDRO

3.4.1 Exercício 1

Um produtor rural perdeu a sua régua graduada para medir o volume de leite no latão que usava em sua propriedade. Como seu filho estava estudando geometria na escola, este produtor pediu sua ajuda. O filho, então, com uma régua simples, mediu o diâmetro da lata, encontrando 30 cm e depois mediu a altura até onde se encontrava o leite, obtendo 60 cm. Sabendo das medidas qual foi o volume de leite em litros encontrado: (adote $\pi = 3{,}1$)

Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos

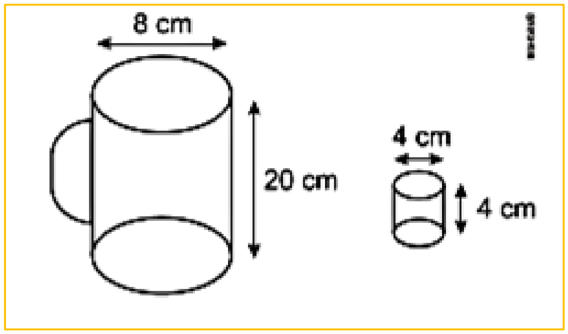
ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Didaticamente é oportuno ao professor nesta questão, orientar os alunos a utilizar o registro figural contextualizado, de modo a identificar o objeto geométrico em questão, uma vez que tal informação não é descrita no enunciado reafirmando assim a importância da imagem no processo da compreensão e resolução de um problema geométrico. Cabe ainda ao professor conduzir a turma a desenvolver o hábito de construir um registro figural do objeto a ser estudado, logo, estimule a turma a realizar a ilustração da imagem geométrica do cilindro a fim de registrar numericamente as grandezas relacionadas ao objeto descritas no enunciado, como por exemplo a medida do seu diâmetro e também da altura que deverá ser levado em consideração.

Os alunos devem perceber que através das informações descritas no problema é possível determinar qual objeto geométrico da imagem que deverá ser considerado, uma vez que o objeto em questão é composto por no mínimo três sólidos geométricos com dimensões distintas, dois cilindros e um tronco de cone.

3.4.2 Exercício 2

Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.



Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos

Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo. Dona Maria está certa nessa decisão? Justifique.

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

A excessiva predominância de problemas geométricos cuja proposta seja a expressão de registro numérico, tem com consequência direta a dificuldade do aluno em apresentar um discurso de modo a validar o seu argumento. Fato este facilmente perceptível nos exercícios propostos pelos livros didáticos por exemplo, estabelecendo assim o papel do professor em fomentar com os seus alunos não só a necessidade desse tipo de resposta para esse problema, mas a importância dentro do contexto de aprendizagem.

O professor pode conduzir individualmente o processo resolutivo, mas ao final é importante que os alunos sejam estimulados a apresentar sua consideração final no quadro a fim de que seja visível a todo a estrutura argumentativa utilizada e com o professor se construa uma proposta de resolução utilizando para isso dos argumentos expostos pelos alunos.

3.4.3 Exercício 3

Muitos restaurantes servem refrigerantes em copos contendo limão e gelo. Suponha um copo de formato cilíndrico, com as seguintes medidas: diâmetro = 6 cm e altura = 15 cm. Nesse copo, há três cubos de gelo, cujas arestas medem 2 cm cada, e duas rodelas cilíndricas de limão, com 4 cm de diâmetro e 0,5 cm de espessura cada. Considere que, ao colocar o refrigerante no copo, os cubos de gelo e os limões ficarão totalmente imersos. (Use 3 como aproximação para π). Qual o volume máximo de refrigerante, em centímetro cúbico, que cabe nesse copo contendo as rodelas de limão e os cubos de gelo com suas dimensões inalteradas?

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Para fazer uso desse problema geométrico com sua turma, o professor deve propor que os alunos identifique e destaque no enunciado os objetos geométrico pertinentes ao processo resolutivo, uma vez que a questão contempla objetos geométricos tridimensionais como o cilindro (copo e as rodelas de limão) e também o hexaedro regular (cubos de gelo). Uma outra possibilidade é o professor fazer uma leitura com a turma e juntos identificar os objetos geométricos e num primeiro instante construir no quadro as representações geométricas das figuras e coletivamente identificar as grandezas métricas a fim formalizar nas representações seus devidos registros numéricos, para que posteriormente os alunos possam reproduzir os registros figurais em seus cadernos de modo a conduzir os tratamentos matemáticos necessários.

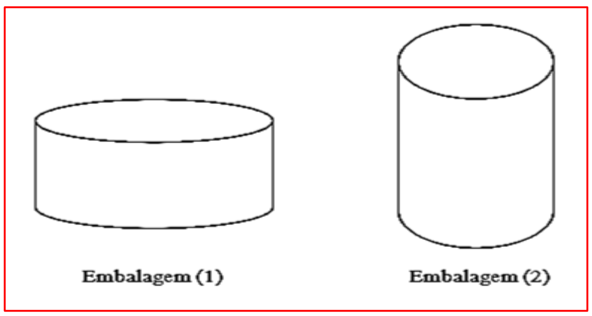
O fato desta atividade propor a identificação de um volume máximo para o copo que inicialmente não está vazio, os tratamentos a serem aplicados necessariamente permeiam a necessidade de uma intensiva coordenação quanto ao volumes que devem ser agregados (rodelas de limão e gelo) bem como nas unidades individuais que cada objeto participa da composição do volume inicial inserido no copo. Tal coordenação parte inicialmente da compreensão do registro discursivo em sua plenitude, desde das afirmativas expostas no discurso até a problemática da questão em si, o que ao final da resolução da turma cabe ao professor reafirmar a importância de fazer a leitura do enunciado de forma integral destacando todas as informações que possam caracterizar os objetos envolvidos no problema.

3.4.4 Exercício 4

Uma determinada empresa preocupada em fazer a escolha certa da embalagem para um de seus produtos levando em consideração seu custo de fabricação. O produto em questão será embalado em latas cilíndricas (cilindros de revolução) de modo que o raio da embalagem (1) é equivalente ao diâmetro da embalagem (2) e quanto as alturas temos que a altura da embalagem (1) é a metade da altura da embalagem (2).

a) Supondo que as duas embalagens sejam feitas do mesmo material, qual delas terá um custo de fabricação menor?

b) Para o consumidor a embalagem (1) seria vendida por 16 reais, já a embalagem (2) por 10 reais, qual das embalagens seria mais vantajosa para o consumidor, supondo que as duas latas estariam cheias?



Fonte: Produção do autor, 2020.

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

A ausência de registros numéricos é destaque nesse problema, é provável que os estudantes apresentem dificuldades para coordenar os tratamentos matemáticos necessários para se estabelecer uma resposta conclusiva. É oportuno então, que o professor se inclua na responsabilidade juntamente com os alunos em buscar solucionar as problemáticas estabelecidas tanto pelo item (a) ao querer determinar o menor custo de fabricação das embalagens, quanto o item (b) em buscar identificar a embalagem com melhor custo benefício.

A partir desse comportamento, o professor pode contribuir mostrando para o grupo de alunos a postura ideal de confrontar uma atividade geométrica se baseando principalmente no estatuto do objeto geométrico em questão. Nesse caso o professor ler a questão ou buscando a interação dos alunos pode solicitar que eles façam a leitura do problema. Como já afirmado em outras ocasiões, é essencial que o acesso ao registro discursivo da questão seja pautada no reconhecimento e destaque das informações que caracterizam a proposta do problema.

O professor pode simultaneamente com os alunos tomar nota dessas informações a fim de que ao final da leitura os alunos tendo identificados os objetos geométricos ocorra a realização do registro figural primeiramente no quadro pelo professor a fim de que coletivamente se evidencie através de registros algébricos as grandezas envolvidas e suas relações.

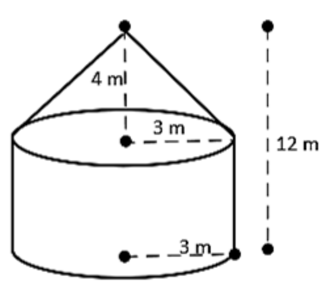
A resolução em si do problema, o professor pode solicitar que os alunos realizem individualmente os tratamentos matemáticos e ao final novamente no coletivo as soluções sejam apresentadas, valorizando assim a atuação do aluno no contexto pedagógico.

3.5 CONE

3.5.1 Exercício 1

Um produtor de soja plantou uma área equivalente a 50 hectares, onde estiva uma produtividade de 55 sacos por hectares (saca de 60 kg). Em sua propriedade existe um silo vertical, conforme a figura abaixo, e seria do seu interesse armazenar toda a sua produção nesse silo. Utilizando os cálculos de volume do cilindro, cone e densidade, será possível armazenar a produção dentro desse silo? Justifique.

Considere a densidade da soja sendo 800kg/m^3.



Fonte: Produção do autor, 2020.

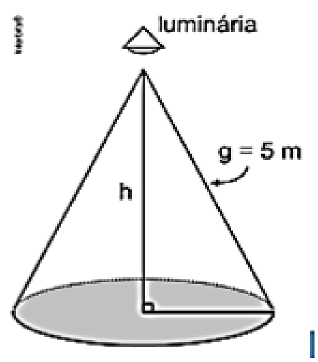
ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Considerando a proposta do exercício de buscar através de fatos numéricos um posicionamento frente ao questionamento da capacidade do silo de ser ou não suficiente para o armazenamento da safra, o professor deve ter a percepção de que a situação acima descrita coloca o estudante na obrigação de identificar as informações tanto da produtividade, quanto da capacidade de armazenamento do silo, o que novamente favorece recordar ao aluno da importância de se fazer uma leitura dedicada nos registros discursivos do problema a fim de otimizar a visualização sobre o registro figural e seus respectivos objetos geométricos mostrados.

Diante da quantidade expressiva de grandezas numéricas descritas tanto no enunciado quanto no registro figural, cabe ao professor coordenar em pequenos grupos o processo de leitura, interpretação e resolução do problema descrito, e ao final os estudantes podem apresentar suas resoluções para o grande grupo.

3.5.2 Exercício 2

Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura:



Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos

Sabendo-se que o raio da base mede 4m, qual a altura que deverá ficar a luminária?

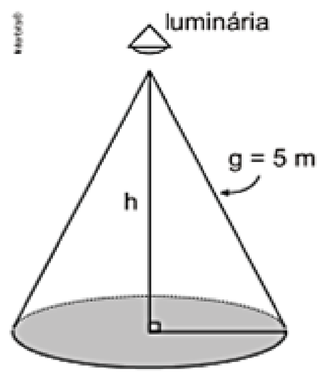
ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Alguns problemas geométricos apresentam uma relação direta quanto ao tratamento matemático necessário para sua resolução, como é o caso dessa questão. Cabe ao professor orientar os alunos da importância trazer acessar o estatuto do objeto geométrico em questão a fim visualizar plenamente não só o tratamento explicito, mas os elementos geométricos que oportunizaram essa ação imediata.

Dada a semelhança do cone reto com a pirâmide regular em relação a determinação da sua altura, é importante que o professor evidencie ao seu aluno a caracterização do perpendicularismo que o segmento que representa a altura desses objetos possui em relação ao plano da base.

3.5.3 Exercício 3

1. Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura:



Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos

Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de 28, 26 m^2, considerando $\pi = 3{,}14$, a altura h será igual a:

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Uma característica marcante dessa questão é evidenciar que um registro figural não possui um estatuto próprio, ou seja, o seu papel dentro do contexto do exercício está atrelado ao registro discursivo que fundamenta o problema geométrico.

Nesse caso, é uma boa prática de aprendizagem utilizar um registro figural para diversas abordagens conceituais, e busque dos próprios alunos a participação quanto a modificação do registro discursivo a fim de que eles possam seja estimulados a ver a figura não só a partir de sua forma, mas principalmente através dos elementos geométricos que a compõe.

A maior dificuldade para resolver esse problema está em explicitar o elemento geométrico do raio do círculo da base a partir da sua área, o professor precisa garantir o entendimento quanto a proposta do exercício, para isso peça que eles após a leitura dedicada dos registros pertinentes a questão expresse oralmente qual o objetivo a ser alcançado, qual o tratamento matemático necessário para a sua realização e quanto a esse tratamento se já é conhecido todos os seus componentes.

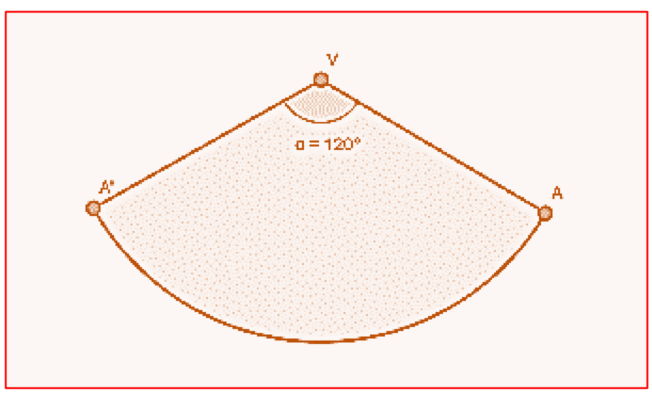
Espera-se que os alunos identifique a medida do raio do círculo da base como sendo a grandeza ausente ao tratamento do teorema de Pitágoras, surgindo então um momento oportuno para o professor instigar os seus alunos sobre como proceder para a sua determinação, quais informações dadas que ainda não compõe o tratamento de resolução, por que seria dada a área do círculo?

Professor, é essencial que todo exercício seja transformado numa atividade de desafio, do qual o aluno precisa compreender que a questão foi construída com o propósito de testa-lo quanto a sua percepção dos fatos e o quanto ele é capaz de redirecionar as informações a fim de conduzir aos tratamentos sejam eles geométricos ou matemáticos de modo a atender a proposta do exercício.

Sendo assim, a participação do professor dentro do contexto da sala de aula se estende muito mais do que a sua simples oratória, sua conduta deve influenciar os alunos a perceber que as atitudes construídas dentro do ensino da matemática de que a habilidade em reconhecer e redirecionar fatos a partir de um objetivo exposto, dentro do contexto social é estritamente uma habilidade louvável.

5.4 Exercício 4

Um copo cônico de papel foi feito a partir de um setor de 12 cm de raio e ângulo central de 120º. Determine o volume desse copo.



Fonte: Produção do autor, 2020.

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Essa atividade em função do registro figural estar evidenciando a planificação parcial de um cone, a coordenação dos tratamentos geométricos e por consequência de todo o processo de resolução ao exigir uma percepção tridimensional do objeto, o professor pode favorecer essa aproximação do aspecto visual levando para sala de aula recortes dessa imagem, ou se existindo a possibilidade, que os próprios alunos em grupos construam essa figura respeitando as dimensões originais, é claro que essa construção exige a manipulação de instrumentos específicos, como o compasso, régua, transferidor e tesoura.

Com a figura em mãos, os estudantes orientados pelo professor em como manipular de modo a forma o objeto tridimensional idealizado no problema, em seguida o professor coordenando o processo resolutivo sugere aos alunos que exponham suas ideias de como identificar os elementos necessários para o cálculo do volume, espera-se que seja expresso entre outras informações, a necessidade de se determinar a medida do raio e da altura da figura.

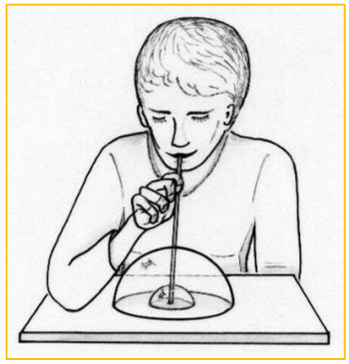
Num primeiro momento, aproveitando o modelo concreto, é conveniente que ainda em grupos os alunos estimem essas medidas a fim obter uma visualização do registro numérico do volume desse copo para que em seguida, cada grupo buscasse estratégias de como proceder teoricamente esse cálculo.

É importante que o professor motive o ambiente com afirmações a respeito das unidades métricas informadas, como por exemplo a indicação do grau do setor circular, ou por exemplo no contexto tridimensional o que representa a medida do raio informado inicialmente. O potencial interpretativo exigido nessa questão a coloca como destaque para que ao final da resolução cada grupo exponha seu processo resolutivo, e o professor poderá até estender o desafio para que cada grupo produza um setor circular e disponibilize para que os outros grupos determinem o seu volume, caracterizando um ensino dinâmico e proativo.

3.6 ESFERA

3.6.1 Exercício 1

Assoprando suavemente em uma superfície horizontal com água e sabão, Estela faz uma bolha de sabão de forma semiesférica com um diâmetro de 12 cm. Em seguida, ela assopra uma segunda bolha dentro da primeira. A primeira bolha então fica maior. O volume final é a soma do volume inicial mais o volume da bolha que está dentro da outra. Qual será o diâmetro da bolha interna, quando o diâmetro da bolha maior for de 14cm. Justifique.



Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

A caracterização dessa questão em apresentar um registro figural que aparentemente o aluno pode julgar não ser necessário a sua existência, é papel do professor conduzir a reflexão que em problemas geométricos a imagem contextualizada deve ser ponto de partida para a imagem geométrica e que da interação dedicado com o enunciado, dimensionalmente deve ser identificado as informações e sempre que possível estabelecer um registro figural próprio a fim de alocar os dados de forma clara e coerente.

O professor nessa questão, inicialmente pode incentivar a percepção dos alunos fornecendo primeiramente só o registro figural a fim de que coletivamente seja identificado o objeto geométrico e suas propriedades mais comuns para em seguida seja estimado quais os questionamentos que poderiam advir e as estratégias para se responder.

Finalizada essa etapa, o professor poderá seguir com o enunciado e novamente em grupo refletir sobre a proposta agora explicita de modo a verificar com a turma se tinham previsto esse questionamento ou não, e caso essa problemática não havia sido exposta, reflita com o grupo quanto as estratégias a tomar a fim de atender a proposta do problema.

3.6.2 Exercício 2

Supondo que as laranja possuísse o formato de uma esfera de 5cm de raio aproximadamente e que em média a quantidade de suco corresponda a 70% do volume da fruta, em uma lanchonete costuma-se vender 20 copos de suco de laranja de 300 ml por dia, quantas laranjas no mínimo são utilizadas diariamente nessa lanchonete?

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

A diversidade de grandezas envolvidas que num primeiro olhar poderia ser um fator de dificuldade, o professor deve valorizar o contexto da problemática a fim de ajudar os alunos quanto a coordenação dos tratamentos matemáticos necessários para atender o objetivo desse problema. Uma extensão possível para essa atividade na dimensão de conduzir o aluno a refletir sobre o impacto que a dimensão do raio de uma esfera representa em seu volume, para isso o professor pode sugerir a confecção de uma tabela de modo que fixando as demais grandezas e estabelecendo um crescimento gradual do raio em uma unidade, é de se notar a redução do número de laranjas necessárias numa escala superior ao aumento do raio da laranja utilizada.

Segue abaixo a sugestão da tabela:

Raio da Esfera (cm) - LARANJA	Volume total da Esfera (cm^3)	70% Volume total da Esfera (ml)	Volume desejado (ml)	Nº de laranjas necessárias
5cm				
6cm				
7cm				
8cm				

3.6.3 Exercício 3

Uma empresa que fabrica esferas de aço, de 6 cm de raio, utiliza caixas de madeira, na forma de um cubo, para transportá-las. Sabendo que a capacidade da caixa é de 13.824 cm^3. Qual o número máximo de esferas que podem ser transportadas em uma caixa?

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

A caracterização desse exercício em buscar alocar esferas dentro de uma caixa cúbica direciona a atenção do professor a conduzir os alunos a reflexão de que uma vez colocadas dentro da caixa todo o espaço da caixa será ocupado? Tal questionamento realizado pelo professor tem a função de descaracterizar a comparação entre o volume da caixa com o volume da esfera, e, portanto, pode-se sugerir coletivamente que os estudantes identifiquem uma estratégia para responder o número de esferas que essa caixa pode acondicionar. Essas estratégias o professor pode utilizar do quadro para registrar assim como realizar o desenho das figuras geométricas em questão de modo a favorecer a visualização contribuindo assim para o surgimento das propostas resolutivas.

3.6.4 Exercício 4

A tira seguinte mostra o Cebolinha tentando levantar um haltere, que é um aparelho feito de ferro, composto de duas esferas acopladas a um bastão cilíndrico.

Suponha que cada esfera tenha 10,5cm de diâmetro e que o bastão tenha 50cm de comprimento e diâmetro da base medindo 1,4cm. Se a densidade do ferro é 7,8g/cm³, quantos quilogramas, aproximadamente, o Cebolinha tentava levantar-se? (Use: $\pi = 22/7$)

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

A atividade proposta, ao fazer uso de registros numéricos inteiros, decimais e fracionários contribui para compor um processo diagnóstico quanto aos tratamentos matemáticos que deverão ser utilizados a fim de estabelecer o argumento necessário para concluir a proposta do exercício. Além do mais a sequência resolutiva ao permear por dois objetos geométricos distintos conduz a exigência de uma significativa coordenação dos dados o que oportuniza o professor de conduzir a realização desse problema individualmente, mas assumindo o papel de investigador quanto as dificuldades apresentadas de modo a favorecer seu planejamento quanto a revisões pontuais diagnosticas necessárias a partir da sua percepção durante o processo de resolução dos alunos.

4 RESOLUÇÕES COMENTADAS

4.1 POLIEDRO

Exercício 1

Por aplicação direta da relação de Euler para poliedro convexo, temos que:

$$F + V - A = 2$$
$$6 + 8 - A = 2$$
$$6 + 8 - 2 = A$$
$$A = 12$$

Portanto, o poliedro que segundo o enunciado apresenta 6 faces, 8 vértices a partir da relação de Euler, possui um total de 12 arestas.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Levando em consideração a ausência de um registro figural nesse problema, espera-se que o aluno ao fazer uso das informações definidas nos registros discursivos (apreensão discursiva) tenha o entendimento de que se trata de um objeto geométrico. Logo, a construção de um registro figural acontece de natureza consciente (semiótica ou mental) ou não, uma vez que, não se acessa um objeto matemático sem se utilizar de uma representação.

Se a representação da figura for inconsciente o estatuto do objeto geométrico em conjunto com suas propriedades implicará na imediata aplicação da Relação de Euler.

Porém, se a representação da figura for consciente e semiótica, a apreensão perceptiva irá favorecer a apreensão operatória (modificação mereológica), assim, manipulando seus elementos geométricos (aresta, vértice e face) sob a coordenação da apreensão sequencial de modo a iniciar por polígonos com os menores números de lados. Todavia, a atividade de tratamento em dispor os polígonos no plano, é fundamental, uma vez que, a planificação de um objeto tridimensional consiste em dispor todas as figuras planas que formam a superfície do objeto, alocando-as de maneira que represente as dimensões: comprimento, largura e altura.

Exercício 2

Totalizando 8 (oito) faces, onde 2 (duas) são triangulares e 6 (seis) pentagonais, de acordo com a igualdade $2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \cdots$, temos que:

$2A = 3V_3 + 5V_5$
$2A = 3.2 + 5.6$
$2A = 6 + 30$
$2A = 36$
$A = 18$

Tendo o conhecimento do número de faces e do número de arestas, e se tratando de um poliedro convexo, através da relação de Euler para poliedros convexos, o número de vértice é:

$V + F - A = 2$
$V + 8 - 18 = 2$
$V - 10 = 2$
$V = 2 + 10$
$V = 12$

Portanto, o poliedro em questão possui 8 faces, 18 arestas e 12 vértices.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

O registro figural presente nesse exercício expõe de maneira destacada o poliedro, ao contrário do que acontece no registro discursivo. Dada a natureza heurística da imagem, o aluno pode se propor a esboçar a planificação do poliedro a fim de contar os elementos da figura (face, aresta e vértice) e solucionar o exercício.

Porém nesse caso é importante para o professor ter o entendimento de que o sucesso da planificação está relacionado a qualidade da interação entre as apreensões perceptiva e discursiva.

Uma vez que do ponto de vista cognitivo a conexão entre as apreensões perceptiva e discursiva tem como resultado não mais um registro figural anônimo, e sim uma figura geométrica com seu próprio estatuto (definição, propriedade, etc.).

Logo a figura plana do pentágono em destaque na imagem é um forte candidato a ser ponto inicial do esboço da planificação. A apreensão operatória mereológica atua desconstruindo o objeto dimensionalmente em elementos como polígonos (2D), lado (1D) e vértice (0D) e a apreensão posicional busca simultaneamente identificar as faces não visíveis na imagem de modo a ser possível estabelecer no plano todas as figuras que formam a superfície do objeto alocando-as de maneira que represente as dimensões: comprimento, largura e altura.

Por fim o aluno se utilizando do estatuto do objeto matemático possa formalizar a contagem dos respectivos elementos – aresta, vértice e face, dando assim por encerado o exercício.

Por outro lado, o aluno pode se dispor de um processo resolutivo a partir da utilização do estatuto do objeto geométrico. No entanto, esse tipo de resolução não exclui o registro figural, mas através da interação da apreensão perceptiva e discursiva, a figura geométrica passa a ser compor o processo de resolução através da aplicação da relação de Euler para poliedro convexo.

<u>Exercício 3</u>

Sendo 60 faces triangulares, pela relação $2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots$ segue que:

$$2A = 3F_3$$
$$2A = 3.60$$
$$2A = 180$$
$$A = 90$$

Pela relação de Euler para poliedro convexo temos que:

$$V + F - A = 2$$
$$V + 60 - 90 = 2$$
$$V = 32$$

Logo, o número de vértice do poliedro em questão é equivalente a 32.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Esse exercício apesar da apreensão perceptiva sobre a imagem evocar uma resolução heurística, dado o fato do poliedro trazer consigo algo muito próximo da imagem de um cubo, o aluno pode se dispor a desenvolver um processo resolutivo se utilizando da representação discursiva, uma vez que a proposta do exercício é validar ou não a relação de Euler.

Importante para o professor é ter clareza de que, mesmo que o aluno desenvolva essa solução aparentemente distante do registro figural, a apreensão perceptiva atuou coordenando transformações na figura do tipo mereológica e posicional em nível mental. As transformações oportunizaram não só identificar, mas principalmente quantificar os elementos (face e/ou aresta e/ou vértice) para então, se utilizando do estatuto do objeto geométrico, possa validar ou não a relação de Euler de acordo com a proposta do exercício.

É pertinente descrever ainda sobre as vantagens de uma representação figural, quando ela apresenta um número significativo de elementos geométricos e que, tais elementos destacados na figura, sejam também destaques tanto no enunciado quanto na composição da solução do exercício.

Quando esse fato ocorre, o aluno com dificuldade em diferenciar o objeto da sua representação, coloca a figura como sendo a única comunicação com a solução do exercício.

Porém, o registro figural precisa cognitivamente que a associação das apreensões perceptiva e discursiva transforme a imagem na figura geométrica do poliedro. Desse modo a propriedade heurística própria da imagem geométrica coordenará a apreensão operatória (mereológica e posicional) a fim de esboçar a planificação do poliedro de modo que possa ao identificar os elementos (faces, arestas e vértices) validar ou não a relação de Euler.

Exercício 4

Sendo 14 faces, com 6 (seis) quadrados e 8 (oito) triângulos. O número de arestas é:

$$2A = 3F_3 + 4F_4$$
$$2A = 3.8 + 4.6$$
$$2A = 24 + 24$$
$$2A = 48$$
$$A = 24$$

Quanto aos seus vértices, todos são colocados no meio de um lado do cubo, e, portanto, o seu número é igual ao número de arestas do cubo, ou seja, 12. Substituindo as grandezas na relação de Euler, obtém:

$$V + F - A = 2$$
$$12 + 14 - 24 = 2$$

Concluindo assim, validação da relação de Euler para poliedro convexo, em particular para cuboctaedro.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Importante destacar que a semelhança desse exercício ao primeiro dessa lista de atividade se resume simplesmente a duas ocorrências: a primeira se julga ao fato de abordarem o mesmo objeto matemático e a segunda se baseia na ausência de um registro figural. Porém, a composição elementar desse poliedro impossibilita a construção do registro semiótico seja do poliedro em si ou de sua forma planificada.

Como já descrito anteriormente, o aluno a partir da apreensão discursiva é direcionado a acessar o estatuto do objeto de modo que possa mentalmente, obter registros figurais do próprio objeto geométrico a fim de que, o desconstruindo dimensionalmente, possa estabelecer relações entre seus elementos com intuito de identificar e quantificar o número de vértice e aresta uma vez que a quantidade de faces faz parte do registro discursivo do enunciado.

É comum o aluno diante dessa configuração de exercício não demonstrar iniciativa de resolução. Para o professor essa atitude deve ser reconhecida como sendo a dificuldade do estudante em diferenciar o objeto matemático da sua representação. Para minimizar esse problema é importante que o professor construa situações de ensino e aprendizagem que sejam pautados na clareza e completude das definições, teoremas e proposições, porém favorecendo sempre as figuras geométricas com seu papel heurístico. Desse modo as apreensões em geometria contribuirão para uma aprendizagem fundamentada tanto nos conceitos e habilidades geométricas quanto no raciocínio lógico-dedutivo.

4.2 PRISMAS

Exercício 1

Quanto aos cubos vermelho, pela hipótese é utilizado um único cubo, logo a soma da massa até o momento corresponde a 5 gramas. Já os cubos azuis ao revestirem o cubo vermelho, tem como formação um novo cubo de aresta cuja medida da aresta é de 3 unidades elementares do cubo, a partir da relação $V = a^3$, segue que:

$$V = a^3$$

$V = 3^3 = 27\ cubos$ cubos de 8 gramas cada, totalizando a massa em:

$$26 \times 8 = 208\ gramas + 5\ gramas = 213\ gramas$$

Da mesma forma, a próxima figura cúbica possuirá 5 unidades elementares de cubo por dimensão. Da relação de volume, temos:

$$V = a^3$$

$$V = 5^3$$

$$V = 125 \ cubos$$

Por fim, subtrair a quantidade do cubo de aresta com dimensão 3 unidades, ou seja:

$$125 \ cubos - (26cubos \ azuis + 1cubo \ vermelho) = 98cubos \ verdes$$

Concluindo a relação de massa do cubo com 125 unidades, temos:

Quadro 1: Relação: cor e quantidade de cubos

COR	QUANTIDADE	PESO EM GRAMAS POR UNIDADE	PESO TOTAL EM GRAMAS
VERMELHO	**1**	**5**	**5**
AZUL	**26**	**8**	**208**
VERDE	**98**	**12**	**1176**

Fonte: Produção do autor, 2020.

Então, a atividade tem como expectativa que os alunos concluam registrando um peso total de 1389 gramas.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

O contexto deste exercício ao envolver um elemento figural (cubo elementar) num processo de construção acumulativa com regras bem definidas no enunciado, pode sugerir num primeiro momento, que este registro figural seja optativo quanto ao sucesso da compreensão e resolução do exercício. No entanto, sua ausência compromete a todos que cognitivamente apresentam resistência em contemplar os objetos geométricos envolvidos, consequência direta da dificuldade em diferencias um objeto matemático de sua representação.

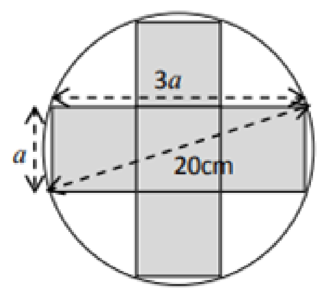
Além do mais a figura apresentada neste exercício possui congruência semântica ao enunciado do problema, o que favorece a sua produtividade heurística, logo o início do processo resolutivo adquire uma pluralidade de tratamentos geométricos e matemáticos que juntos caracterizam uma resolução clara e coerente.

Portanto, a representação figural desse exercício ao denotar elementos estruturais de natureza heurística, no qual a formação dos cubos maiores acontece a partir do revestimento por uma única camada de elementos cúbicos elementares, o aluno pode construir a solução a partir de registros discursivo mediante tratamentos numéricos tradicionais.

Tal atitude é oportunizada em função da apreensão perceptiva se associar a apreensão operatória de tal modo, que o processo de resolução seja pautado simplesmente na manipulação das partes a fim formar o todo. A essa associação cognitiva imediata entre as apreensões perceptiva e operatória para Duval, o resultado é o que comumente chamamos de visualização. Porém, dada a dinâmica do processo heurístico, o aluno ao construir seu processo resolutivo de modo a satisfazer a proposta do exercício, ele está operando também a partir da apreensão discursiva, pois é um fator decisivo para que a partir das informações dadas, a transformação mereológica e posicional nesse exercício possa estabelecer relações válidas com as unidades cúbicas elementares de modo que se desenvolva a correta resolução do problema.

<u>Exercício 2</u>

Pela aplicação direta do teorema de Pitágoras, tomando o diâmetro de 20 cm com sendo correspondente a medida da hipotenusa e seus catetos sendo representado algebricamente por $3a$ e a, segue que:



Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$20^2 = (3a)^2 + a^2$$

$$a = \pm\sqrt{40}$$

Considerando a medida da aresta do cubo uma medida positiva e aplicando a relação que determina o volume do cubo, temos que:

$$V = a^3$$

$$V = (\sqrt{40})^3$$
$$V \cong 253cm^3$$

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

É comum que um registro figural possua elementos cuja função seja estritamente estabelecer para o exercício um grau de contexto; identificar esses elementos favorece o uso da imagem de forma coerente e funcional. A leitura do aluno deve destacar a completude do registro discursivo em relação à proposta do exercício, logo o registro figural pode num primeiro momento parecer um acessório decorativo e que seu uso é de caráter optativo.

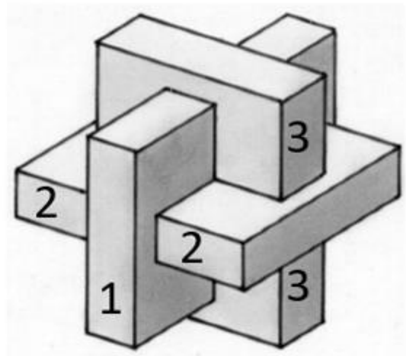
Para a teoria de Registros de Representação Semiótica as figuras formam um suporte intuitivo nos passos da resolução dando uma visão mais heurística de como explorar os elementos geométricos envolvidos. Além do mais, o único acesso ao objeto matemático é pela sua representação, portanto, por mais que simples uma figura aparenta ser é papel do professor estimular os alunos a explorá-la levando em conta suas diferentes apreensões: perceptiva, discursiva, operatória e sequencial.

A resolução desse exercício requer ação conjunta das apreensões perceptiva e discursiva estabelecendo uma teorização da representação figural a partir da compreensão das formas geométricas envolvidas e das informações disposta no enunciado, essa nova imagem seja semiótica ou não, Duval a denomina por figura geométrica.

O aluno a partir do esboço da figura geométrica deve perceber que o processo resolutivo permeia o uso de unidades geométricas dimensionalmente menor, como por exemplo, a aplicação da medida do diâmetro (1D) na relação conhecida por teorema de Pitágoras, a fim de determinar a medida da aresta (1D) da caixa (3D). A apreensão operatória mereológica ao desconstruir a figura dimensionalmente se aporta na teorização do objeto geométrico, mas a apreensão perceptiva tem aqui a responsabilidade de coordenar o que e onde desconstruir.

<u>Exercício 3</u>

Entre algumas estratégias possíveis, tomemos o paralelepípedo (A), conforme a figura abaixo:



Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html

O volume do paralelepípedo (1) é o produto de suas dimensões, então segue que $v = 2 \times 8 \times 10 = 160cm^3$. Considere o agora o paralelepípedo (2) dividido em duas partes de dimensões $(8 \times 2 \times 4)cm$ cada, logo como volume total do paralelepípedo (2) é $v = 2(8 \times 2 \times 4) = 128cm^3$. E por fim, seja o sólido (3), dividindo em duas partes iguais, temos que cada parte consiste na diferença de dois paralelepípedos, portanto o volume do sólido (3) é $v = 2[(8 \times 2 \times 4) - (3 \times 2 \times 2)] = 104cm^3$. Portanto, adicionando os volumes, temos $160cm^3 + 128cm^3 + 104cm^3 = 392cm^3$.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

A figura nesse exercício expõe a manipulação dos três sólidos apresentados no enunciado de modo a formar um único objeto tridimensional favorecendo o registro da imagem no que tange a busca por uma solução correta para o problema, porém dada a natureza heurística dessa problematização, os alunos podem apresentar várias formas distintas de resolução, o que reafirma o potencial operacional de uma imagem.

Portanto, a tomada de raciocínio do aluno tendo na apreensão perceptiva a identificação imediata da formação do objeto tridimensional a partir dos paralelepípedos descritos no enunciado, não desqualifica a importância da apreensão discursiva nesse tipo de exercício, pois uma vez quantificado, as modificações que o objeto oportuniza se faz necessário identificar entre elas quais manteriam os dados iniciais e quais teriam um custo cognitivo menor em seu processo resolutivo.

As modificações não são ao acaso, a apreensão operatória mereológica é determinante e a congruência das partes com o paralelepípedo descrito no enunciado favorece várias desconstruções.

Ao professor cabe aqui a sugestão que, exercícios dessa mesma dinâmica possam ser colocados como proposta para os alunos que através de materiais comuns (caixas de papelão por exemplo) construam novos sólidos a fim desenvolverem as habilidades heurísticas pertinentes aos objetos geométricos.

Exercício 4

No primeiro momento vamos determinar quantos contêineres cabem na Figura (Superfície plana), logo:

Comprimento: $32 \div 6{,}4 = 5$ contêineres

Largura:$10 \div 2{,}5 = 4$ contêineres

Assim, cabem 4 x 5 = 20 contêineres na superfície disponível.

Dependendo da altura do "reservatório de contêineres" da Figura 2 poderemos ter várias camadas de 20 contêineres. Mas de acordo com a proposta do exercício que busca a menor altura possível, basta distribuir os 100 contêineres de 20 em 20, lembrando que esse valor representa a disposição máxima no plano, portanto $100 \div 20 = 5$ estabelece que a altura mínima será de 12, 5 metros.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

A abordagem desse modelo de exercício que busca resgatar a aplicabilidade das habilidades matemáticas colabora com restrição a produtividade heurística do processo resolutivo, uma vez que nem todo aluno será deslocado para o contexto exposto no registro discursivo. Portanto, cabe ao professor em sua prática de ensino estabelecer para o aluno que o estatuto do objeto geométrico sobrepõe ao contexto em que está inserido.

A qualidade dos elementos figurais presentes nas imagens leva a apreensão perceptiva desenvolver operações cognitivas como o reconhecimento dos objetos geométricos inseridos no exercício e também a escolha e coordenação dos tratamentos necessários para o processo de resolução. Na apreensão discursiva (subordinada à apreensão perceptiva) aplica-se teorização da imagem dos objetos geométricos de modo que a determinação da altura mínima estabelece a desconstrução dimensional e a ocupação de forma organizada (apreensão operatória mereológica e posicional).

Assim como no exercício anterior, o professor pode remodelar o contexto, conservando os elementos geométricos a partir de situações simples como, por exemplo, ao associar uma quantidade limitada de livros didáticos de uma mesma disciplina, e o desejo de organizá-los num espaço limitado – exemplo: a mesa do professor. Atitudes simples, mas com um nível de percepção visual elevado contribuem de forma significativa o desenvolvimento do olhar resolutivo sobre os problemas geométricos.

4.3 PIRÂMIDES

Exercício 1

A resolução poderia ser desenvolvida pela relação direta do volume de tronco de uma pirâmide, mas considerando a percepção da figura e o contexto da questão, trataremos a solução por diferença de pirâmides.

Portanto, temos que o volume de parafina gasto na nova vela corresponde à subtração do volume da pirâmide maior, com aresta da base de 6 cm e altura de 19 – 3 = 16 cm, pelo volume da pirâmide menor, com 1,5 cm de aresta da base e 4 cm de altura. Então:

$$V_{maior} - V_{menor}$$

$$\frac{1}{3}(6 \times 6 \times 16) - \frac{1}{3}(1{,}5 \times 1{,}5 \times 4)$$

$$192cm^3 - 3cm^3 = 189cm^3$$

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

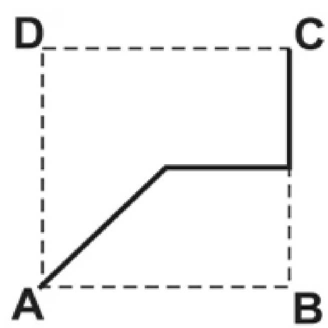
Contracenando com o registro discursivo com uma expressiva carga de informações, o registro figural, apesar de não dispor de muitos elementos descritivos seu mal-uso pode favorecer uma tomada de decisão pelo aluno de modo que o custo cognitivo seja aumentado consideravelmente quando se busca atender a proposta do exercício tomando como figura geométrica o tronco de pirâmide.

Portanto, a visualização (apreensão perceptiva e operatória) do objeto geométrico deve ser subordinada a apreensão discursiva de modo que o tratamento a ser efetuado seja com intuito de buscar a diferença entre pirâmides. A desconstrução em partes (modificação mereológica) coordenada pela apreensão perceptiva direciona o processo heurístico a novamente se utilizar da modificação mereológica desconstruindo agora dimensionalmente os objetos geométricos (3D) em elementos geométricos como arestas (1D), pé da perpendicular (0D) e consequentemente a altura (1D) de modo que, usando do estatuto das pirâmides, seja possível determinar seus respectivos volumes podendo assim estabelecer a diferença entre eles, o que atende a proposta do exercício.

É sugestivo que o professor construa com seus alunos o processo resolutivo direto considerando para isso como objeto geométrico o tronco de pirâmide. Uma vez que nenhuma representação possui a totalidade do objeto matemático, logo desenvolver essa prática pedagógica ampliaria a percepção construtiva da formação dos objetos geométricos pertinentes a esse exercício.

Exercício 2

Considerando a pirâmide regular e que segundo o enunciado (discurso e figura) o ponto E corresponde ao único ponto mencionado que não pertence a base da pirâmide devendo então ser projetado sobre a base. Se utilizando da definição de projeção ortogonal, o trajeto descrito por João partindo do ponto A, passando por E, em seguida deslocando até o ponto M e por fim, seguindo até o vértice C, sempre em linha reta corresponde a seguinte figura abaixo:



Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Em sua grande maioria, exercícios dessa natureza (projeção no plano) priorizam o olhar sobre o conjunto dos registros semióticos envolvidos no problema, uma vez que a apreensão perceptiva sobre a imagem ao coordenar as apreensões operatórias (mereológica, ótica e posicional), precisa ser orientada pela apreensão discursiva, já que as diretrizes do deslocamento sobre o objeto geométrico estão inseridas no enunciado do problema.

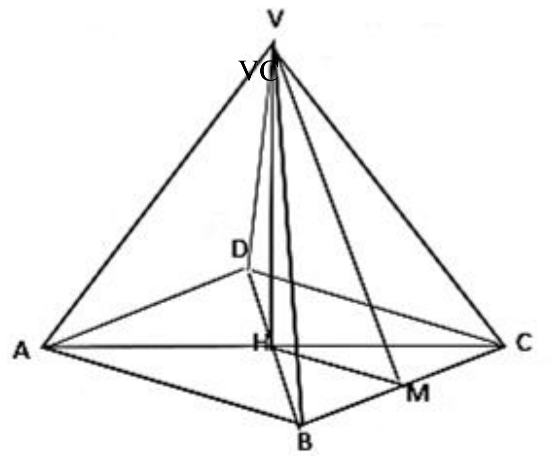
Portanto, a expectativa do professor quanto a resolução não só desse exercício, mas de todos que compartilham da mesma natureza é de que o aluno, a partir da apreensão perceptiva sobre o registro figural, tenha certeza de que o registro de saída (solução) não necessariamente precise apresentar congruência com o registro de entrada (entrada).

Nas operações de tratamento desencadeadas pela apreensão perceptiva subordinando a apreensão discursiva de imediato, temos a desconstrução dimensional, o que possibilita a modificação ótica das unidades figurais através da superposição sobre o plano que, de acordo com a especificidade do tratamento, de forma mais discreta mas não menos importante, a modificação posicional torna evidente a projeção sobre o plano em decorrência de um certo deslocamento orientado no espaço.

Considerando que os exercícios que contemplam projeções no plano estimulam as diversas perspectivas de olhar para um objeto geométrico e que particularmente cada projeção visual do objeto é única quanto aos elementos que a compõe, atividades dessa natureza devem compor diariamente o portfólio do professor de matemática

Exercício 3

Seja o triângulo retângulo VHM com ângulo reto em H. Temos então que o segmento $\acute{H}M$, é apótema da base quadrada onde $\acute{H}M$=107 metros.



Fonte: Produção do autor, 2020.

Já o segmento $\acute{V}M$ ao representar a altura do triângulo isóscele que compõe as faces laterais da pirâmide, da aplicação imediata do teorema de Pitágoras, temos:

$$\acute{V}M = \sqrt{\acute{V}B^2 - (\frac{\acute{B}C}{2})^2} = \sqrt{204^2 - 107^2} = \sqrt{30167}metros$$

E por fim, a medida do segmento $\acute{V}H$ que representa a medida da altura segue também por mais uma aplicação do teorema de Pitágoras, onde:

$$\acute{V}H = \sqrt{30167 - 107^2} \cong \sqrt{18718} \cong 137m$$

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Nessa questão alguns elementos colaboram para que se estabeleça uma proposta heurística para o exercício. Primeiramente temos que considerar que a imagem para o aluno não o insere num contexto novo, uma vez que traz como objeto de estudo a famosa pirâmide egípcia de Quéops. Por consequência, a apreensão perceptiva terá uma menor resistência em estabelecer alguns registros figurais elementares do objeto geométrico, como por exemplo sua base quadrada.

Ainda dentro da proposta heurística que a imagem dessa questão oportuniza, é pertinente estabelecer um cenário em que existam alunos com dificuldade em associar uma representação discursiva ao estatuto do objeto. Poderiam eles a partir de um registro figural contextualizado intuir pela apreensão perceptiva hipóteses capazes de operacionalizar os tratamentos matemáticos necessários para a construção da resolução.

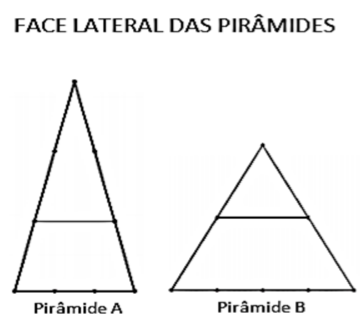
Como por exemplo, o fato de o aluno considerar a partir da visualização da imagem que o vértice da pirâmide tem sua projeção no plano da base exatamente na interseção de suas diagonais. Resultado este também visto através da figura geométrica da pirâmide gerada pela associação das apreensões perceptiva e discursiva.

Logo, através da modificação mereológica, desconstruindo dimensionalmente a figura (3D) em figuras (2D), mais especificamente triângulos retângulos, que de acordo com o estatuto da pirâmide regular de base quadrada a intercessão das diagonais (0D) da figura da base coincide com o pé da perpendicular (1D) que passa pelo vértice (0D) da pirâmide.

Espera-se do aluno nesse exercício a aplicação imediata do teorema de Pitágoras dada a congruência dos elementos geométricos envolvidos.

Exercício 4

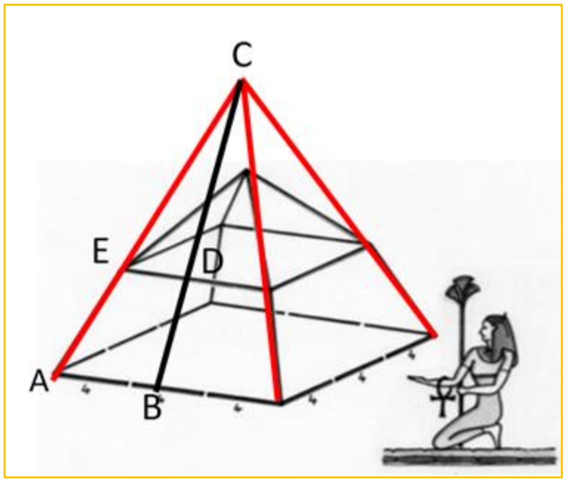
A partir das informações dadas na questão, existe duas maneiras de adicionar os 4 segmentos de 4cm cada de modo se obter uma pirâmide.



Fonte: Produção do autor, 2020.

Na pirâmide A, temos a adição do segmento de medida igual a 4 cm na aresta da base (a), logo, $a = 4 \times 4 = 16cm$, já na pirâmide B conforme o enunciado temos a adição do segmento de medida 8cm na aresta lateral (b).

Uma forma dos alunos argumentar poderia ser por semelhança de triângulos, onde vamos descrever para o caso da pirâmide A, sendo análogo para o outro caso.



Fonte: Produção do autor, 2020.

Portanto, considere o triângulo ABC (cf. Figura acima), com ângulo reto em B e o triângulo CDE, com ângulo reto em D, pelo estatuto de pirâmide reta é de considerar que os alunos associem os triângulos por semelhança pelo caso AA, onde o segmento os segmentos $\acute{A}C$e $\acute{C}E$ pertencem a mesma aresta, o que implica que < BAC é equivalente < DCE, assim como <ABC e <CDE são ângulos retos por construção, logo:

Sendo $\acute{A}B = 4cm$, $\acute{E}D = 6cm$, $\acute{A}C = 16cm$e $\acute{A}E = x$, temos:

$$\Delta ABC \Delta EDC \leftrightarrow \frac{\acute{A}B}{\acute{E}D} = \frac{\acute{A}C}{\acute{C}E} \leftrightarrow \frac{4}{6} = \frac{16}{x} \leftrightarrow x = 24$$

O que confirma o fato de ao adicionar um segmento de medida 8cm na aresta lateral cujo tamanho era de 16 cm, sua medida total passa a corresponder 24 cm, validando assim o objeto geométrico denominado- pirâmide regular de base quadrangular.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Dada a estrutura peculiar do exercício em supor uma limitação quanto aos procedimentos a serem executados, uma vez que, disponibiliza duas opções bem definidas de segmentos para compor a pirâmide. Além do mais, o registro discursivo já denota positivo para a existência da pirâmide, restando então para o aluno vincular as informações do enunciado aos processos cognitivos de resolução que toda figura geométrica oportuniza.

Antes de discorrer sobre as apreensões em geometria para esse exercício, devo chamar a atenção para a simplicidade estrutural do problema. Situações desta natureza envolvendo tomada de decisão são excelentes propostas de atividades matemáticas, principalmente quando envolvem objetos geométricos com seus estatutos já definidos. A partir de materiais comuns, como o uso de palitos de madeira ou algo similar com tamanhos pré-definidos pelo professor ou não, é possível evocar a turma a provar a possibilidade de construir determinados sólidos geométricos.

Tendo em vista o fato de a imagem expor os elementos figurais de modo privilegiado, a apreensão perceptiva e a apreensão discursiva disponibilizam vários processos resolutivos com seus respectivos tratamentos geométricos. Para o aluno essa dinâmica deve ser vista como uma consequência direta das informações transmitidas pela imagem.

O processo de resolução tem seu ponto de partida na ação da apreensão operatória mereológica, que coordenada pela apreensão perceptiva estabelece a desconstrução dimensional do objeto (3D) como sendo o tratamento geométrico que possibilitará agregar os quatros segmentos descritos no enunciado. Reconfigurando os elementos geométricos em triângulos (2D) e utilizando as relações próprias do estatuto das pirâmides com o objetivo de validar as alterações na figura a fim de associar o objeto formado a uma pirâmide de base quadrada.

4.4 CILINDRO

Exercício 1

A resolução consiste numa aplicação direta da relação de volume de um cilindro reto, de acordo com o enunciado temos que o diâmetro equivale a 30cm e altura da coluna de leite corresponde a medida de 60cm, logo:

$$V = \pi \times r^2 \times h$$
$$V = \pi \times 15^2 \times 60$$
$$V = 13500\pi cm^3$$

Se utilizarmos uma aproximação para π, e considerarmos $1cm^3 = 1ml$, temos então que quantidade de leite é equivalente a 42,390 litros, adotando $\pi \cong 3{,}14$.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

O registro figural neste exercício pode num primeiro momento sugerir que sua importância dentro do contexto resolutivo do problema seja ínfima, dada a ausência de informações métricas a respeito do objeto matemático representado.

Porém, tomando um olhar mais atento, se percebe que o registro discursivo em nenhum momento descrimina a forma do recipiente que é armazenado o leite. Podemos supor que, alguns alunos arriscariam a forma cilíndrica como sendo a forma idealizada nesse exercício, seja pelo contato com outros exercícios semelhantes, ou por já terem tido contato social com a atividade contextualizada no exercício.

Mas no geral, o registro figural necessariamente não precisa estar respaldado em informações métricas, mas sim expor a partir da apreensão perceptiva o objeto matemático relevante a proposta do exercício.

Portanto a resolução desse problema permeia a interação das apreensões perceptiva e discursiva como gesto intelectual inicial a fim de que, possa ocorrer a desconstrução dimensional da forma cilíndrica (3D) em figuras elementares capazes de operacionalizar os tratamentos matemáticos comumente vistos pelos alunos como sendo as fórmulas de aplicação em geometria espacial, em particular a que determina o volume de um cilindro.

<u>Exercício 2</u>

Sendo que validar ou não a tese, passa pela análise do volume, onde o volume de um cilindro reto implica no produto entre a área da base pela sua altura, o que nessa atividade mostra que:

i. **Área do círculo da base da leiteira representada por A_L;**
ii. **Área do círculo da base do copo representa por A_C**
iii. **Altura da leiteira representado por H;**
iv. **Altura do copo representado por h.**

Onde:

$$A_L = 4A_C \text{ e } H = 5h$$

Então:

$$Volume\ \ da\ \ leiteira(V_L) = A_L.H$$

$$Volume\ \ da\ \ leiteira(V_L) = 4A_C.5h$$

$$Volume\ \ da\ \ leiteira(V_L) = 20.A_C.h$$

$$Volume\ \ da\ \ leiteira(V_L) = 20.V_C(Volume\ \ do\ \ copo)$$

Porém, o enunciado da questão afirma que o objetivo está em abastecer os copos pela metade, e de modo que não exista sobra, logo, a atitude não está correta, uma vez que enchendo a leiteira cheia e cada copo utilizando a metade de sua capacidade será possível servir 40 copos, o dobro que se deseja na atividade.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

O aluno diante deste exercício pode expressar um certo desconforto em produzir seu discurso argumentativo, uma vez que em seu cotidiano escolar problemas de geometria espacial se resumem a um desdobramento de fórmulas e como gesto conclusivo decidir em qual alternativa marcará o x. Porém, desenvolver no aluno a habilidade argumentativa, além de favorecer o desenvolvimento das funções cognitivas, contribui ainda para a sua organização intelectual que por experimentação passa a categorizar cognitivamente cada ação do raciocínio lógico-dedutivo.

Adaptações nos exercícios são ações simples e de grande impacto no desenvolvimento do registro discursivo no aluno. Como este exercício extraído do Exame Nacional do Ensino Médio cuja proposta é descrever um argumento na forma discursiva sobre uma determinada decisão tomada a partir de objetos geométricos.

Inicialmente é importante evidenciar que, quando o aluno permite que as propriedades heurísticas da imagem restrinjam a dinâmica da interação entre as apreensões perceptiva e discursiva, é bem provável que se desenvolva um processo resolutivo equivocado e distorcido da realidade do exercício.

Portanto, a ação da apreensão perceptiva sobre a imagem, sinergicamente regida pela apreensão discursiva precisa estar firmada no estatuto do objeto matemático envolvido.

Desse modo a apreensão operatória mereológica em seu processo cognitivo de desconstruir dimensionalmente o cilindro (3D) oportuniza identificar elementos figurais dimensionalmente inferiores que, dentro das definições do objeto geométrico sua manipulação em tratamentos matemáticos resultará no processo resolutivo correto desse exercício.

Exercício 3

Fazendo por etapa, temos:

i. Volume do copo: $V = \pi \times r^2 \times h = 3 \times 3^2 \times 15 = 405cm^3$

ii. Volume do cubo de gelo: $V = a^3 = 2^3 = 8cm^3$

iii. Volume da rodela de limão: $V = \pi \times r^2 \times h = 3 \times 2^2 \times 0{,}5 = 6cm^3$

Como segundo o enunciado, as duas rodelas de limão e os três cubos de gelo já ocupam parte do volume do copo, então pela diferença entre volumes se define o volume máximo de refrigerante que pode ainda ser colocado no copo, ou seja:

$$V_{refrigerante} = V_{copo} - (3 \times V_{gelo} + 2 \times V_{limão}) = 405 - (3 \times 8 + 2 \times 6) = 369cm^3$$

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Não é difícil se deparar com exercícios envolvendo geometria espacial que não apresentam um registro figural. Em concordância com a pesquisa, a existência de um registro figural potencializaria algumas operações cognitivas que explorariam soluções para a resolução do problema. Porém, é importante que o professor sempre evidencie o papel dos registros semióticos no processo de ensino, principalmente no que se refere a geometria.

Considerando que o registro discursivo tem um forte apelo ao contexto e que o processo resolutivo precisa se dividir por etapas, dado a sua composição de objetos geométricos sugerir a existência de dois cilindros distintos (copo e a rodela de limão) e um cubo (gelo), é possível a ação de esboçar os objetos espaciais de modo a impor um princípio de organização quanto aos tratamentos matemáticos em cada caso favorece a ação da apreensão sequencial nesse caso.

Independente por qual objeto espacial se inicia, a sinergia entre a apreensão discursiva e a apreensão perceptiva ocorrerá a fim de coordenar as modificações sobre o objeto geométrico. Normalmente acontece em processos para se determinar volume e a desconstrução dimensional, visto a importância que os elementos, a se utilizar nas fórmulas, sejam obtidos a partir das definições e axiomas próprios dos objetos estudados, desse modo os resultados serão coerentes com a proposta do exercício.

Portanto, independentemente do exercício apresentar ou não um registro figural, o professor precisa durante o processo de ensino enfatizar para que exista voluntariamente o trânsito entre no mínimo duas representações semióticas, o que na geometria já é algo próprio do objeto geométrico.

Exercício 4

Item (a): a resposta almejada passa pelo cálculo da área total da figura, destacando algumas representações:

- Embalagem (1), medida do raio, representada por “R” e sua altura por “h”;
- Embalagem (2), medida do raio, representada por “r” e sua altura por “H”;
- Área do círculo da base da embalagem (1) será equivalente a representação A_1 e de forma análoga A_2 representará a área do círculo da base da embalagem (2).
- S_1 é a representação da área total da superfície da embalagem (1)
- S_2 é a representação da área total da superfície da embalagem (2)

A partir das hipóteses se conclui que:

$$R = 2r \text{ e } H = 2h$$

Portanto, determinando a área superficial da embalagem (1) temos:

$$S_1 = 2.A_1 + 2.R.\pi.h$$

$$S_1 = 2.(2r)^2.\pi + 2.(2r).\pi.h$$

$$S_1 = 8.r^2.\pi + 4.r.\pi.h$$

Quanto a embalagem (2), analogamente:

$$S_2 = 2.A_2 + 2.r.\pi.H$$

$$S_2 = 2.r^2.\pi + 2.r.\pi.2.h$$

$$S_2 = 2.r^2.\pi + 4.r.\pi.h$$

A análise das expressões que determinam as áreas superficiais, em relação a área lateral as duas embalagens possuem a mesma superfície, porém a embalagem (1) têm a área da base equivalente ao quádruplo quando comparada a área da base da embalagem (2), e portanto o custo maior de produção será aquela que tiver a maior área superficial e logo, será a embalagem (1).

<u>Item (b)</u>: O processo resolutivo é fundamentado pela capacidade de cada embalagem, uma vez que a hipótese afirma que ambas as embalagens estão sendo consideradas com seus respectivos volumes máximos, e a embalagem (1) ao custo de 16 reais, já a embalagem (2) ao custo de 10 reais, valores esses definidos para o consumidor.

$$Volume\ \ embalagem(1) = V_1 = A_1.h$$

$$Volume\ \ embalagem(2) = V_2 = A_2.H$$

Onde:

$$V_1 = (2r)^2.\pi.h$$

$$V_1 = 4.r^2.\pi.h$$

E:

$$V_2 = r^2.\pi.2.h$$

$$V_2 = 2.r^2.\pi.h$$

É possível percebe que a embalagem (1) possui o dobro da capacidade se comparada a embalagem (2), no entanto, para o consumidor seu custo não corresponde ao dobro do custo da embalagem (2), então, a embalagem (1) possui um melhor custo/benefício para o consumidor.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

É de se esperar que o aluno apresente dificuldade para determinar um processo resolutivo visto que, a ausência de registros numéricos aumenta consideravelmente a necessidade de que a apreensão discursiva, ao subjugar os registros figurais através da apreensão perceptiva, se estruture firmemente no estatuto do objeto geométrico.

O uso do registro algébrico pode ser outro fator que venha fazer com os alunos apresentem resistência em desenvolver os tratamentos geométricos e matemáticos necessário para se obter os resultados de modo a poderem formular a resolução através do registro discursivo argumentativo.

Entretanto, é papel do professor estimular o aluno a valorizar a ação das apreensões discursivas e perceptivas, uma vez que, para o item (a), o tratamento geométrico parte em desconstruir o objeto (3D) dimensionalmente a fim de visualizar sua extensão no plano de modo que, uma vez identificando as unidades geométricas elementares possa se utilizar dos tratamentos matemáticos obtendo assim, grandezas quantitativas que irão compor a base argumentativa do discurso.

Quanto ao item (b), exige uma sequência de procedimentos heurísticos já muito comentado nesse caderno, uma vez que a interpretação já iniciada no item (a) participa ativamente na ação das apreensões discursiva e perceptiva em operacionalizar as figuras de modo a obter os seus respectivos volumes, e de forma análoga, uma vez possuindo as grandezas cognitivas, sua comparação é imediata e intuitiva quanto ao melhor custo benefício do ponto de vista do consumidor.

4.5 CONES

Exercício 1

Estabelecendo o volume da produção para uma plantação de 55 hectares, tendo uma estimativa de 50 sacas por hectares, e cada saca pesando 60 quilos, logo seu produto determinar o peso total da produção.

$$Produção(P) = 55(ha).50\left(\frac{saca}{ha}\right).60\left(\frac{kg}{saca}\right) = 165\ 000kg$$

Portanto, se a densidade da soja dada na questão representa:

$$densidade = \frac{800kg}{1m^3}$$

Proporcionalmente, segue que:

$$\frac{800kg}{1m^3} = \frac{165000kg}{x}$$

$$x = \frac{165000}{800} = 206{,}25m^3$$

Uma vez estabelecido o volume da produção a ser armazenada, basta determinar seus o volume do silo, podendo assim afirmar ou não a possibilidade de armazenamento da produção no silo.

Partindo, das propriedades do cilindro reto, temos que a relação do seu volume quanto a medida do raio da base e sua altura é:

$$VolumeCilindro = V_{CI} = r^2.\pi.h$$

Considerando o valor aproximado para PI (π)≅ 3,14 o volume de armazenamento do cilindro é:

$$V_{CI} = r^2.\pi.h$$
$$V_{CI} = 3^2.3{,}14.6$$
$$V_{CI} = 9.3{,}14.6 = 169{,}56m^3$$

Já o volume do cone reto é expresso como sendo:

$$Volume\ \ do\ \ cone = V_{CO} = \frac{r^2.\pi.h}{3}$$
$$V_{CO} = \frac{3^2.3{,}14.4}{3}$$
$$V_{CO} = \frac{9.3{,}14.4}{3} = 37{,}68m^3$$

Por fim, ao acumular o volume do cilindro com o volume do cone, temos:

$$V_{CI} + V_{CO} = 169{,}56m^3 + 37{,}68m^3 = 207{,}24m^3$$

Como a produção esperada é na ordem de 206,25m^3 e a capacidade de armazenamento é de 207 24 m^3, existe um excedente de espaço de 0,99 m^3, logo é afirmativo que a colheita possa ser armazenada no silo descrito no enunciado.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Exercícios que envolvam mais de um objeto geométrico são oportunos quando se busca observar a capacidade do aluno em diferenciar não somente o objeto matemático de suas representações, mas também correlacionar unidades geométricas entre os dois objetos.

Dada a clareza heurística do recurso visual da imagem, a apreensão perceptiva ao subordinar a apreensão discursiva apresentará os tratamentos pertinentes a cada objeto geométrico, pois mesmo possuindo unidades geométricas elementares equivalentes pelo estatuto de cada objeto, os tratamentos geométricos e matemáticos possuem suas particularidades.

Em vista que, a entrada correta no raciocínio resolutivo implica numa sequência didática particular para esse problema, a ação da apreensão sequencial também é requerida e, portanto, coordenará em conjunto com as apreensões discursivas e perceptivas as operações geométricas de modificação mereológica.

A construção dimensional sendo uma das ações da apreensão operatória mereológica visa identificar os elementos geométricos necessários de modo a quantificar grandezas como: área e volume; uma vez que, de acordo com o enunciado são componentes indispensáveis para compor o discurso argumentativo da solução.

Exercício 2

Pela aplicação direta do teorema de Pitágoras, temos que:

$$h = \sqrt{g^2 - r^2}$$

$$h = \sqrt{5^2 - 3^2}$$

$$h = \sqrt{16} = 4metros$$

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

O registro figural desse exercício é de uma natureza heurística muito intuitiva. Nos elementos figurais que compõe a imagem, independente dos registros discursivos, os alunos são compelidos pela apreensão perceptiva a pressupor que em algum momento do processo resolutivo a aplicação do teorema de Pitágoras será realizada, caracterizando assim a forte influência que uma imagem impõe numa situação que envolva conceitos geométricos.

É evidente que apreensão perceptiva estabeleça com a apreensão discursiva a ação imediata da aplicação do teorema de Pitágoras, mas cognitivamente, sua percepção passa pela desconstrução dimensional, uma vez que elementos como hipotenusa e catetos são entes geométricos de dimensão um.

Outro fator que favorece essa percepção imediata é a congruência entre os registros geométricos uma vez que o problema já expõe as unidades métricas de cada componente do teorema a ser aplicado.

Casos assim, devem ser trabalhados não somente com a intenção de resolvê-los matematicamente, mas também de estudar os elementos geométricos dispersos no problema e suas implicações na figura geométrica.

Exercício 3

Considerando que se faz necessário a determinação do raio da base do cone, para que com a aplicação direta do teorema de Pitágoras seja possível determinar a medida da altura, logo:

$$A_{BASE} = \pi . r^2$$
$$28{,}26 = 3{,}14 . r^2$$
$$\frac{28{,}26}{3{,}14} = r^2$$
$$9 = r^2$$
$$3 = r$$

Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos que:

$$h = \sqrt{g^2 - r^2}$$
$$h = \sqrt{5^2 - 3^2}$$
$$h = \sqrt{25 - 9}$$
$$h = \sqrt{16} = 4 \ metros$$

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Apesar de utilizar o mesmo registro figural do exercício anterior, a ausência da congruência entre os elementos figurais de entrada e saída colocam o processo de resolução num contexto no qual o aluno provavelmente encontrará dificuldade em desenvolver a resolução do exercício.

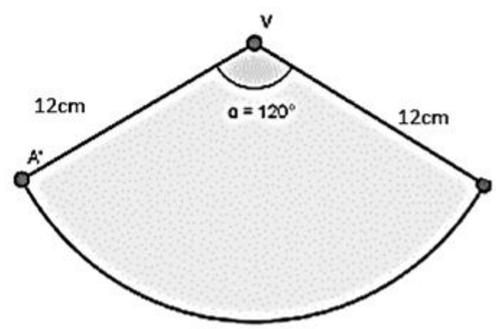
Importante destacar que o registro figural ainda instiga de forma intuitiva a aplicação imediata do teorema de Pitágoras, porém a falta da unidade geométrica do raio condiciona que se explore heuristicamente a figura através das apreensões perceptiva, discursiva e operatória.

Inicialmente as apreensões perceptiva e discursiva juntas coordenando os registros tanto discursivos quanto figurais integram uma rede de definições e propriedades que conduzem a necessidade de desconstruir o objeto (3D) em unidades elementares dimensionalmente menores.

Uma vez que, identificado as unidades geométricas elementares do sólido que tenham relações com as informações descritas no enunciado, é possível através de tratamentos matemáticos determinar a medida do raio e por consequência aplicar o teorema de Pitágoras, concluindo assim a resolução do exercício.

<u>Exercício 4</u>

Observando a figura abaixo e estabelecendo as hipóteses, temos:



Sendo a área de um setor circular uma parte proporcional da área do círculo, uma relação direta de proporção deve ser conduzida pelos alunos a fim de determinar a medida do raio.

Logo, se a área de um círculo representa:

$$Área_{círculo} = \frac{\propto}{360}\pi.R^2 \leftrightarrow \alpha = 360^0$$

A área do setor, é dada pela expressão:

$$Área_{setor} = \frac{\propto}{360}\pi.R^2$$

Portanto:

$$Área_{setor} = \frac{\propto}{360}\pi.R^2$$

$$Área_{setor} = \frac{120}{360}.3{,}14.12^2$$

$$Área_{setor} = 150{,}72cm^2$$

Considerando que a área da superfície é:

$$Área\ \ superficial_{CONE} = Área_{setor\ circular} = \pi.r.g$$

Onde o raio do setor circular é a medida da geratriz do cone, que pela hipótese temos que:

$$raio_{setor\ circular} = geratriz = g = 12cm$$
$$Área\ \ superficial_{CONE} = \pi.r.g$$
$$150{,}72 = 3{,}14.r.12$$
$$150{,}72 = 37{,}68.r$$
$$r \cong 4cm$$

Utilizando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$h = \sqrt{g^2 - r^2}$$
$$h = \sqrt{12^2 - 4^2}$$
$$h = \sqrt{144 - 16}$$
$$h = \sqrt{128} \cong 11{,}3cm$$

E, por fim, para determinar o volume do copo, basta que se estabeleça relação:

$$Volume_{CONE} = \frac{\pi.r^2.h}{3}$$
$$Volume_{CONE} = \frac{3{,}14.4^2.11{,}3}{3}$$
$$Volume_{CONE} = \frac{567{,}712}{3} \cong 189{,}2cm^3$$

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Os dados iniciais retratados nos registros semióticos têm como particularidade sua dimensão ser inferior à proposta do exercício. A figura evidencia uma região plana (2D) bem definida a partir do objeto que representa. Por outro lado, o registro discursivo complementa uma unidade geométrica da imagem a partir da medida do segmento que representa o raio (1D).

Contudo a proposta do exercício está em determinar o volume do copo a ser construído com os dados já apresentados. Vale destacar para o professor que exercícios desta natureza não são imediatos e costumam trazer dificuldade para o aluno proceder a um processo resolutivo coerente.

A apreensão perceptiva sobre a imagem ao estabelecer o olhar para o setor circular como sendo uma parte de um todo (círculo), orienta a ação da apreensão operatória mereológica a se utilizar das partes para se chegar ao todo. Um tratamento matemático imediato que reflete essa ação é o uso da regra de três.

Dada a extensão e as variedades dos tratamentos, é de fácil percepção a atuação da apreensão sequencial coordenando a ordem com que as operações precisam ser feitas. Além do mais, a necessidade de projetar a tridimensionalidade na figura a fim de potencializar a apreensão perceptiva com o objetivo de que as operações alcancem os resultados esperados, as apreensões operatórias (ótica e posicional) também compõe as operações cognitivas necessárias.

O que coloca esse exercício numa escala alta de dificuldade é em função da excessiva quantidade de tratamentos geométricos e matemáticos que a resolução exige. Como suporte a gama de operações cognitivas terem próximo a si a visualização do objeto geométrico que se deseja alcançar, contribui para o sucesso do processo resolutivo.

O que protagoniza o papel do professor em incentivar o aluno a se manter sempre próximo do seu olhar é o objeto matemático que se deseja explorar numa resolução de problema.

4.6 ESFERA

Exercício 1

Pelo enunciado temos uma semiesfera cujo diâmetro é igual a 14 cm a partir da acumulação dos volumes da semiesfera anterior que tem como diâmetro a medida de 12 cm e outra, interna a essa, cujo diâmetro é o foco da resolução.

Portanto, vale a seguinte igualdade:

$$Volume_{Esfera\ Final} = Volume_{Esfera\ Inicial} + Volume_{Esfera\ \ interna}$$

Partindo de que o volume da esfera é dado pela expressão:

$$V = \frac{4}{3}.\pi.r^3.$$

Logo:

$$Volume_{Esfera\ Final} = Volume_{Esfera\ Inicial} + Volume_{Esfera\ interna}$$

$$\frac{4}{3}.\pi.r_F^3 = \frac{4}{3}.\pi.{r_0}^3 + \frac{4}{3}.\pi.{r_I}^3$$

$$r_F^3 = {r_0}^3 + r_I^3$$

$$7^3 = 6^3 + r^3$$

$$r = \sqrt[3]{343 - 216}$$

$$r \cong 5cm$$

Concluindo assim que o diâmetro da semiesfera interna é igual a 10 cm.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Nesse exercício, ao trazer um registro figural ausente de informações métricas, a postura do aluno deve se voltar ao reconhecimento do objeto geométrico que se busca estudar e estar atento as evidencia heurísticas do registro figural.

Visto que a visualização do objeto geométrico é determinante para que a entrada na resolução do problema considere que o volume final é a soma do volume inicial mais o volume da bolha que está dentro da outra.

O que leva as apreensões perceptivas e discursivas serem responsáveis em coordenar a desconstrução do objeto geométrico (3D) proposto pelo exercício, tanto dimensionalmente ao estabelecer o centro dos objetos (0D) e o segmento do diâmetro (1D) quanto a desconstrução por partes, ou seja, a transformação de uma semiosfera cujo diâmetro é igual a 14 cm a partir da acumulação dos volumes da semiosfera anterior que segundo o enunciado tem como diâmetro a medida de 12 cm e outra, interna a essa, cujo diâmetro é o foco da resolução heurística.

Exercício 2

Dimensionando o volume unitário aproximado da laranja, que por suposição possui a forma de uma esfera de raio igual a 2,5cm e utilizando $\pi \cong 3{,}14$, segue que:

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times 2{,}5^3$$

$$V \cong 65cm^3$$

Considerando 70% do volume, temos que $0{,}70 \times 65 \cong 45{,}5cm^3$, de modo que sua capacidade por fruta seja equivalente a 45,5 ml aproximadamente. Se o contexto trabalha com 20 copos de 300ml cada, portanto:

$20 \times 300 = 6000ml$, onde $\frac{6000ml}{45{,}5ml}$ ≅132 laranjas.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

O registro discursivo desse exercício destaca a necessidade de que os tratamentos matemáticos sejam feitos numa determinada ordem e que mesmo tendo como ponto inicial um objeto geométrico (esfera), seu contexto coloca o aluno em contato com situações matemáticas que predominam a comparação entre grandezas (regra de três).

É evidente que apreensão discursiva e a apreensão perceptiva terão participação ativa no processo de resolução uma vez que, existe um objeto geométrico e sua representação figural seja ela semiótica ou não, estabelece os desdobramentos cognitivos operacionais pertinentes para esse modelo de problema geométrico.

A determinação de volume de um sólido geométrico estabelece a sua desconstrução dimensional, uma vez que elementos dimensionalmente menores são essenciais para o tratamento matemático que tem como produto final a quantificação do volume do sólido. As modificações ótica e posicional quando requeridas atuam na modificação a partir transformação da figura em outra (maior, menor, diferente) que é reconhecida ainda como sua imagem ou em sua orientação e disposição no espaço.

Deve ser do conhecimento do professor que as apreensões em geometria são sinergicamente associadas e que em todo o caderno de exercício o registro delas foi buscando evidenciar as que possuem um papel determinante quando se tem como objetivo a resolução de um exercício que envolva objetos geométricos.

Nesse modelo de exercício a modificação mereológica (sob coordenação das apreensões discursiva e perceptiva) ao oportunizar a quantificação da grandeza volume, os tratamentos matemáticos a seguir tem como único objetivo readaptar para uma nova realidade.

Exercício 3

Sendo que a aresta do cubo pode ser determinada através da raiz cúbica do seu volume, logo:

$$a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{13824} = 24cm$$

Como o raio da esfera é de 6 cm, segue que a seu diâmetro é igual a 12 cm. Comparando com a dimensão da caixa cúbica, ou seja 2 no comprimento, 2 na largura e 2 na altura. Totalizando $2^3 = 8$ bolas.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Considerando que o processo resolutivo desse exercício não está cognitivamente vinculado a uma relação semântica entre as unidades elementares geométricas expressas no enunciado, faz com que o aluno precise de uma maior aproximação do estatuto do objeto geométrico.

A apreensão perceptiva subordinada a apreensão discursiva estabelece a partir da modificação mereológica as transformações necessárias para que ao final se quantifique a grandeza cuja representação equivale a medida da aresta do cubo (caixa).

Por lado, ao relacionar os objetos geométricos disposto no enunciado, a ação da apreensão operatória posicional é solicitada a fim de obter as informações finais quanto ao processo resolutivo do exercício, porém vale destacar que toda operação sobre a figura possui coordenação direta com as apreensões perceptiva e discursiva.

Exercício 4

Fazendo por etapa, temos:

i. Volume da esfera:$V_E = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 5{,}25^3 = 606{,}375cm^3$
ii. Volume do cilindro (haste): $V_C = \pi \times r^2 \times h = \frac{22}{7} \times 0{,}7^2 \times 50 = 77cm^3$
iii. Volume a ser levantado: $V_T = V_C + 2 \times V_E = 77 + 2 \times 606{,}375 = 1.289{,}75cm^3$

Por fim se utilizando da relação da densidade do ferro dada no enunciado, segue que:

$$d_{FERRO} = 7{,}8\frac{g}{cm^3}$$

Então:

$$Peso\ \ a\ \ ser\ \ \ levantado = V_T \times d_{FERRO} = 1289{,}75 \times 7{,}8 \cong 10kg$$

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Esse exercício possui alguns componentes que o tornam interessante para o professor que antes de sua aplicação conduza seus alunos a pensar no motivo da expressão do *pi* estar no registro numérico fracionário (qual a vantagem) ou até mesmo sobre as transformações de medida que o exercício estabelece (qual a vantagem).

O registro figural apesar de ter um caráter intuitiva e não geométrico, é suficiente para que ao identificar os objetos geométricos pela ação imediata da apreensão perceptiva, a apreensão discursiva busca interpretar os elementos figurais acessando seus respectivos estatutos para então estabelecer as apreensões operatórias necessárias para o processo de resolução.

Nesse caso, temos etapas que evidencia a participação da associação na apreensão sequencial com mais clareza, também em conjunto com as demais operações cognitivas coordenando a modificação mereológica em cada sólido de modo a obter como produto final os seus respectivos volumes.

Os tratamentos matemáticos a seguir se fazem necessário em decorrência do problema buscar nas aplicabilidades das habilidades matemáticas o interesse do aluno, até por que, como já descrito em outros comentários, a contextualização encoraja atitudes intuitivas por parte dos alunos o que numa perspectiva o estimula a desenvolver a habilidade e conjecturar.

5. CONSIDERAÇÕES

Apresentei neste caderno de atividades alguns exercícios de geometria espacial analisados sob a ótica dos registros de representação semiótica procurando fornecer um olhar sobre o porquê dos erros dos alunos e enfatizando a visualização como um processo indispensável para resolução de exercícios de geometria espacial, espero que este material contribua de maneira significativa para processo de ensino e aprendizagem de geometria espacial no ensino médio.

Maiores informações sobre o processo de pesquisa e criação deste produto estão na dissertação do autor que pode ser encontrado em https://www.udesc.br/cct/profmat/defesas.

Para entrar em contato com o autor para maiores esclarecimentos e/ou troca de informações enviar e-mail para adrianofisico@hotmail.com

Professor(a), sinta-se à vontade para alterar, complementar e adaptar esse produto para que fique de acordo com a realidade de suas turmas.

Bom trabalho!

6 REFERÊNCIA

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais** – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. **Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência.** Trad. Méricles T. Moretti. REVEMAT, v.7, n.1, Florianópolis: UFSC/MTM; PPGECT, 2012b. (Disponível em http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat)

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA – INEP . **Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM**. Disponível em <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em 01/03/2020.

KLUPPEL, Gabriela Teixeira; BRANDT, Célia Finck. Reflexões Sobre o Ensino da Geometria em Livros Didáticos à Luz da Teoria de Representações Semióticas Segundo Raymond Duval. In: MORETTI, Méricles Thadeu (Org.). **As Contribuições da Teoria das Representações Semióticas Para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2014 – 256p.

LIMA, Elon Lages, **Coleção: A Matemática do Ensino Médio** – Vol. 2, Rio de Janeiro: SBM, 6ª Ed. 2006.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org), **Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica** – 8ª Edição, - Campinas, SP: Papirus, 2013

REDE DO PROGRAMA DE OLIMPÍADAS DO CONHECIMENTO – REDE POC. **Olimpíada Internacional Matemática Sem Fronteiras.** Disponível em: <http://matematicasemfronteiras.org/provas.html>. Acesso em: 01/03/2020.