2023

A HISTÓRIA DOS JUROS E SEU ENSINO

PRODUTO EDUCACIONAL

Andréa Regina Henriques de Medeiros

Miguel Chaquiam

Clay Anderson Nunes Chagas
Reitor Universidade do Estado do Pará

Ilma Pastana Ferreira
Vice-Reitora Universidade do Estado do Pará

Renato da Costa Teixeira
Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação

Anderson Madson Oliveira Maia
Diretor do Centro de Ciências Sociais e Educação

Fábio José da Costa Alves
Coordenador do PPGEM

Natanael Freitas Cabral
Vice coordenador do PPGEM

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Medeiros, Andreá Regina Henriques de

A história dos juros e seu ensino /Andréa Regina Henriques de Medeiros; orientação de Miguel Chaquiam. - Belém, 2023.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Belém, 2023. ISBN: 978-65-00-67887-1

1. Juros. 2. Matemática - História. 3.Ensino de matemática. I. Chaquiam, Miguel (orient). II. Título.

CDD 23 ed. 510.9

Regina Coeli A. Ribeiro - CRB-2/739

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: **"HISTÓRIA DOS JUROS E SEU ENSINO".**

Mestranda: **ANDRÉA REGINA HENRIQUES DE MEDEIROS**

Data da avaliação: **10/01/2023**

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado à:*

( ) Estudantes do Ensino Fundamental (X) Estudantes do Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental (X) Professores do Ensino Médio

( ) Outros: ______

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

( ) Sequência Didática ( ) Página na Internet ( ) Vídeo

(X) Texto Didático (alunos/professores) ( ) Jogo Didático ( ) Aplicativo

( ) Software ( ) Outro: ______

b) *Possui URL:* (X) Sim, qual o URL: ______

( ) Não ( ) Não se aplica

c) *É coerente com a questão-foco da pesquisa?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ______

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ______

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ______

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Possui sumário:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
b) *Possui orientações ao professor:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
c) *Possui orientações ao estudante:*	( ) Sim	( ) Não	(X) Não se aplica
d) *Possui objetivos/finalidades:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
e) *Possui referências:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
f) *Tamanho da letra acessível:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
g) *Ilustrações são adequadas:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Foi aplicado?*

(x) Sim, onde: Reuniões específica com um grupo de professores

( ) Não, justifique: ____

( ) Não se aplica

b) *Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?*

(x) Sim, onde: Educação Básica e Formação Inicial de Professores

( ) Não, justifique: ____

( ) Não se aplica

c) *O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?*

(x) Sim, onde: Reuniões específica com um grupo de professores.

( ) Não, justifique: ____

( ) Não se aplica

d) *Em qual condição o produto educacional foi aplicado?*

( ) na escola, como atividade regular de sala de aula

( ) na escola, como um curso extra

(x) outro: Reuniões específicas

e) *A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):*

( ) Alunos do Ensino Fundamental

( ) Alunos do Ensino Médio

(x) Professores do Ensino Fundamental

(x) Professores do Ensino Médio

( ) outros membros da comunidade escolar, tais como ____

( ) outros membros da comunidade, tais como ____

O produto educacional foi considerado:

(x) APROVADO ( ) APROVADO COM MODIFICAÇÕES ( ) REPROVADO

MEMBROS DA BANCA Assinaturas

Prof. Dr. Miguel Chaquiam (Presidente)
Doutor em Educação
IES de obtenção do título: UFRN

Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral (Examinador 01)
Doutor em Ciências Humanas
IES de obtenção do título: PUC/RJ

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma (Examinador 02)
Doutor em Educação
IES de obtenção do título: UFPA

ANDREA REGINA HENRIQUES DE MEDEIROS

HISTÓRIA DOS JUROS E SEU ENSINO.

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Gaduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam.

Data de aprovação: 10/01/2023

Banca examinadora

______________________________. Orientador
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN
Universidade do Estado do Pará

______________________________. Examinador Interno
Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Doutor em Ciências Humanas – Pontifícia Universidade Católica / PUC-RJ
Universidade do Estado do Pará

______________________________. Examinador Externo
Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN
Universidade Federal do Pará

Belém – PA

2023

SUMÁRIO

APRESENTAÇÂO

O produto educacional apresentado está vinculado a um Recorte (texto histórico e atividades) para o ensino dos Juros como desdobramento da dissertação de mestrado de Medeiros (2023) associada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM) da Universidade do estado do Pará (UEPA).

Este produto é destinado a professores e alunos do Ensino Médio para ensino e aprendizagem dos juros no âmbito escolar com uso da História da Matemática. Trata-se de um elemento didático validado experimentalmente, por um grupo de professores que atuam na Educação Básica, que apresentou potencialidades associadas ao seu objetivo que é o de ensinar o conteúdo em destaque para alunos do ensino médio e também fornecer aportes para a sua formação.

O Recorte apresenta um texto com a temática Juros, que abrange dois momentos, o primeiro, um prelúdio, contendo informações sobre a sua constituição nos primórdios civilizatórios e o segundo, enfatizando as contribuições históricas aos juros de personagens do séc. XVIII.

Desse recorte, temos o uso de textos-base contextualizados com a história dos juros e as atividades inferidas destes que darão suporte ao desenvolvimento desse conteúdo, num trabalho docente dialogado aos seus estudantes, que tem a liberdade de agregar mais atividades e ou adaptá-los a demais níveis de ensino e peculiaridades de suas turmas.

A elaboração deste constructo foi direcionada na linha de pesquisa da História da Matemática, contidas na Educação Matemática e contemplada pela BNCC, como um dos caminhos possíveis para uso docente no desenvolvimento de conteúdos matemáticos que demanda o objetivo de compreensão e aprendizagem de um conhecimento historicamente construído a fim de significar e responder questionamentos inerentes aos estudantes, como sua origem e aplicação.

Importante destacar que essa pesquisa partiu da inquietação originada nos estudos preliminares da revisão da literatura sobre juros, que não identificou nenhum trabalho acadêmico com uso da História da Matemática para o ensino de juros de forma contextualizada e inserida nos livros didáticos.

O que se tinha, até então, eram menções de personagens e algumas curiosidades, em notas de rodapé, acerca do conteúdo financeiro, sem contudo, dialogar entre as partes, não participando do processo produtivo do saber e corroborando com a competência geral prevista na BNCC (2018, p. 8) que valoriza e utiliza “os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo [...] e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva”.

De modo que, embasamos um suporte teórico inferido da revisão de estudos da referida dissertação, no qual ressaltamos os estudos de Chaquiam (2022, 2021, 2020, 2017), Brandemberg (2021), Fossa (2020), Mendes (2020, 2015, 2010), D’Ambrósio (1999) e Miguel e Brito (1996), que nos subsidiou e orientou para a construção desse Recorte, balizado pelo diagrama- metodológico proposto por Chaquiam (2022).

Tínhamos como pretensão, utilizar as percepções de estudantes do ensino médio para validar esse produto, entretanto, devido as circunstâncias ocasionadas pela pandemia da COVID-19 houve a necessidade de um redirecionamento desse processo para professores de matemática que assistem à educação básica da rede pública de Belém.

A coleta de dados ocorreu por meio de um questionário, no formato on-line, direcionada via link de acesso, na forma aleatória, construído pelo aplicativo *google forms*. E para tal, creditamos o termo de consentimento contendo a ciência do conteúdo para participação, e a partir de então, apresentamos o questionário que contava com três partes avaliativas: o texto sobre a História de Juros; as atividades inferidas deste, e por fim, do conjunto (texto e atividades) de modo a responder nossa questão de pesquisa.

A avaliação desse questionário coletou as percepções quantitativas e qualitativas, fruto das contribuições docentes para uma melhor exequibilidade do proposto, sendo assim, foi diagnosticado que: As observações da pesquisa direcionaram para uma avaliação positiva quanto ao aspecto quantitivo, visto que mais da metade dos docentes, em todas as questões, direcionaram para o uso do texto e das atividades para em sala de aula e qualitativamente, mecionaram pontencialidades para o ensino.

Destas, sinalizaram: a possibilidade de aprendizagem de Juros com significado ao objeto matemático, promovendo maior Interação com a contextualização do saber, sendo capaz de despertar a curiosidade, e didaticamente como um facilitador na construção do conhecimento histórico, além de contemplar uma proposta diferente, e que a matemática não é pronta e acabada e sim processo dinâmico peculiar das contribuições históricas. De modo que acreditamos ter respondido a nossa questão de pesquisa.

O processo de ensino e aprendizagem, independente do objeto matemático, é um ciclo que conta com muitos fatores, destes o estudante como prototagonista e o professor como o facilitador, que por sua vez tem o dever de oportunizar conhecimentos e meios necessários para agremiar saberes

Sugerimos aos professores a possilidade de validação do produto educacional junto aos estudante; a construção dos demais contextos previsto pelo diagrama-metodológico proposto por Chaquiam (2022), ou em outros tempos históricos; a construção de novas atividades, para outros níveis de ensino a partir do texto histórico de Juros; a formatação ou adequação das atividades apresentadas para uso em sala de aula; e também, adequar as atividades para serem trabalhadas junto a transversalidade da Educação Financeira.

Portanto, segue o material apresentado nesta organização: O capitulo 2, traz a fundamentação teórica e metodológica da pesquisa que aportou o produto educacional; no capitulo 3, o Recorte (texto histórico e atividades) elaborada na versão aos estudantes do Ensino Médio, com as orientações docentes, e por fim o capitulo 4 intitulado por Juros: um tratamento matemático, com ponderações sob a ótica didática dos juros ao ensino e uma versão moderna do objeto matemático para a formação continuada de professores de Matemática e para estudantes do curso de Licenciatura plena

Andréa Regina Henriques de Medeiros

Miguel Chaquiam

2. APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Neste capítulo abordamos questões concernentes ao aporte teórico que fundamentou a construção desse Recorte (texto histórico sobre juros e atividades) como ponto principal do produto educacional. No tocante a este aspecto, foi explanada as considerações pertinentes ao uso da história no ensino previstos nos documentos oficiais, bem como do embasamento teórico de Chaquiam (2022, 2021, 2020, 2017), Brandemberg (2021), Fossa (2020), Mendes (2020, 2015, 2010), D'Ambrósio (1999) e Miguel e Brito (1996), por fim a metodologia proposta por Chaquiam (2022) que balizou a constituição do texto sobre a História dos juros e orientação das atividades.

2.1. DOCUMENTOS OFICIAIS

A importância e relevância do uso da História da Matemática para o ensino nos Documentos Oficiais são o alicerce para introduzir as discussões nessa seção, assim sendo, tomamos por base uma das competências gerais da BNCC descritas que diz:

> Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. (BRASIL, 2018, p. 9)

Deste modo, o documento referenda a oportunidade de trabalhar os conhecimentos históricos como possibilidade didática ao ensino, sendo assim, alinha-se ao nosso tema como forma de desenvolver os conteúdos matemáticos, em especial os juros, para o ensino na sala de aula, dentre outras situações, ajudando os estudantes a responder questionamentos rotineiros nas aulas de matemática, como: "de onde veio isso? ", decorrentes de sua origem e significado.

Sobre o tratamento desses conhecimentos históricos ao ensino, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) ressaltam que o

> tratamento contextualizado do conhecimento é o recurso que a escola tem para retirar o aluno da condição de espectador passivo. Se bem trabalhado permite que, ao longo da transposição didática, o conteúdo do ensino provoque aprendizagens significativas que mobilizem o aluno e estabeleçam entre ele e o objeto do conhecimento uma relação de reciprocidade. (BRASIL, 1999, p.70).

Essa contextualização, especificamente para uso na História da Matemática, precisa ser planejada para não dá ênfase apenas a fatos e personagens, nas ocorrências dos livros didáticos verificadas no PNLD (2018) e apresentando como tais a um pano de fundo descartado posterirormente, mas promover essa aprendizagem significativa numa união interdisciplinar e mais, correlacionando História a produção do conhecimento.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM) reforçam que a contextualização deve se fazer presente no processo de ensino e de aprendizagem, observado as transposições didáticas, conforme consta no:

> Art. 9º. Na observância da Contextualização, as escolas terão presente que:
> I - na situação de ensino e aprendizagem, o conhecimento é transposto da situação em que foi criado, inventado ou produzido, e por causa desta transposição didática deve ser relacionado com a prática ou a experiência do aluno a fim de adquirir significado. (BRASIL, 1998, p. 4)

Essa diretriz traz a importância de se apresentar um contexto cronológico não apenas para informar, mas para criar uma ferramenta didática que busca a promoção de significância por parte do aluno a algo que ele irá aplicar em situações posteriores não apenas para realização de uma atividade avaliativa, mas para desenvolver habilidades à cidadania, a exemplo, alicerçada à Educação Financeira.

Que por sua vez é mencionada na Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF) que instituí a Educação Financeira para a educação básica criada pelo decreto Federal n° 7.397/2010 e na BNCC, como tema transversal que deverá aparecer nos currículos de estados e municípios, assim, “essas temáticas são contempladas em habilidades dos componentes curriculares, cabendo aos sistemas de ensino e escolas, de acordo com suas especificidades, tratá-las de forma contextualizada. (BRASIL, 2018, p. 20)

Logo, essa contextualização pode ser desenvolvida em atividades práticas constituídas nas relações comerciais facilmente encontradas no cotidiano dos estudantes, ou então num trabalho interdisciplinar, como sugere o próprio documento:

> É possível, por exemplo, desenvolver um projeto com a História, visando ao estudo do dinheiro e sua função na sociedade, da relação entre dinheiro e tempo, dos impostos em sociedades diversas, do consumo em diferentes momentos históricos, incluindo estratégias atuais de marketing. Essas questões, além de promover o desenvolvimento de competências pessoais e sociais dos alunos, podem se constituir em excelentes contextos para as aplicações dos conceitos da Matemática Financeira e também proporcionar contextos para ampliar e aprofundar esses conceitos. (BRASIL. 2018, p. 269)

Assim, de posse dessa projeção, abre-se precedência para utilizar a História da Matemática como recurso ao ensino, a exemplo, em roteiros históricos, que podem propiciar ao estudante uma oportunidade diferente de visualizar conteúdos matemáticos, em especial, os juros, quanto as suas pertinências evolutivas e como não dizer, no cotidiano de outrora.

Na matriz de referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), fornecido pelo site do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), comum a todas as áreas de conhecimento, dentre os eixos cognitivos está a compreensão dos fenômenos, cujo objetivo é “construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas” (BRASIL, 2017, p. 1), logo a compreensão do processo histórico segue com pertinência para a construção do conhecimento do nosso objeto.

Direcionando novamente a BNCC, Os juros são contemplados nos conhecimentos numéricos e algébricos presentes explicitamente em três das cinco competências desse documento e destacadas nas habilidades seguintes:

> (EM13MAT203). Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.
> (EM13MAT303). Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juros compostos, destacando o crescimento exponencial.
> (EM13MAT304). Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros.
> (EM13MAT305). Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros
> (EM13MAT503). Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos da Matemática Financeira ou da Cinemática, entre outros. (BRASIL, 2018, p. 523-533)

Logo, o cabimento quanto ao desenvolvimento dessas habilidades nas aulas de matemática está na sua relação didática à aprendizagem. Importante destacar que nas Competências Específicas da Matemática para o Ensino Médio infere-se da BNCC a possibilidade de utilização de métodos diferenciados que estimule e amplie a ótica à aprendizagem e que nos leva a possibilidade de buscar na História da Matemática essas possibilidades.

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p. 523)

Dessa forma, além dos esforços conjuntos dos personagens escolares que contribuem para o desenvolvimento da educação e mais especificamente dos professores que preconizam seus conhecimentos específicos, preferencialmente na forma interdisciplinar, o professor de Matemática deve prover meios de desenvolver um ensino eficaz e condizente a realidade do estudante, tanto para o desenrolar típico dos conteúdos curriculares da disciplina quanto para seu uso na vida e sendo assim, fazer uso dos mais diversos recursos para que isso ocorra.

Diante das discussões promovidas, ressaltada nos Documentos Oficiais supracitados, identificamos a relevância e importância do uso da História da Matemática ao ensino nas intervenções pedagógicas em sala de aula, de tal modo, que para fortalecer essas ideias, iremos destacar no próximo tópico, a História no ensino, contemplado o posicionamento de algumas referências acadêmicas sobre o assunto que nos promoveu o suporte teórico necessário para a construção desse trabalho.

2.2. SUPORTE TEÓRICO

Para iniciar as discussões sobre a História no ensino e seu uso para a construção do conhecimento, vamos trazer as considerações de D'Ambrosio (1999) quanto a importância da História e em especial da Matemática para o desenvolvimento dos saberes matemáticos no ensino,

> As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhado instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para sua própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, a ideias matemáticas estão presentes e em todas as formas de fazer e de saber. (D'AMBROSIO, 1999, p. 97)

Nessa perspectiva, Nunes e Silva (2006), complementa:

> É evidente que a História da matemática é um conhecimento necessário para o estudo da matemática, assim como sua aplicabilidade faz com que ela se torne um emaranhado de símbolos sem significado, não evidenciar o porquê e para que estudar tal disciplina (com argumentos históricos) reforça o grande número de desprovidos de conhecimentos matemáticos básicos, necessários para o exercício da cidadania. (NUNES e SILVA, 2006, p. 9)

Nessas considerações, ressalta-se a importância e a constância direcionada a busca de significado de objetos matemáticos ensinados por meio da História no ensino, contribuindo positivamente as inquietações tão presentes nas rotinas em sala de aula e que se torna imprescindível na escola atual.

A História no ensino tem alcançado, especialmente na Matemática, espaço considerável nas pesquisas acadêmicas e na prática em sala de aula, que tem como fator percursor a busca de promoção de um ensino que provoque a motivação e também o seu desenvolvimento epistemológico, nesse processo Fossa (2020) salienta:

> A história da matemática pode ser usada de várias formas para promover a aprendizagem da matemática. De fato, a história tem marcado presença em textos matemáticos desde há muito tempo para incentivar e motivar o aluno. Nesse sentido, inclui-se retratos de matemáticos famosos, pequenas biografias dos mesmos ou fatos curiosos (mais ou menos!) Relacionado ao conteúdo sendo abordado no texto. O que tem elevado a história a uma tendência em Educação Matemática, no entanto, são estratégias mais inusitadas. Mas, o que é comum a essas estratégias inovadoras é a análise de produtos históricos, sejam estes documentos ou artefatos, visando a explicitação e a crítica dos conceitos e procedimentos matemáticos neles contido. (FOSSA, 2020, p. 13)

Nesse intuito, Fossa (2020) defende que o estudo de um objeto matemático transcenda as informações históricas biográficas para estratégias didáticas mais desafiadoras que promovam a análise do que será apresentado.

Sobre a História da Matemática no Ensino, Mendes (2015) apresenta a tríade: pesquisa, disciplina e estratégia didática como o percurso epistemológico para a sua exploração e obtenção dos resultados nessa tendência de ensino, ressalta a pesquisa como o primeiro eixo de composição da história da Matemática e fundamental, visto que:

> Contempla a busca de explicações para o contexto sociopolítico, cultural e econômico, no qual a matemática foi e é produzida, ou seja, de onde essas ideias são geradas, porque e como foram ou são geradas. Esse é um dos contextos que caracterizam a epistemologia da matemática construída pela sociedade humana ao longo dos tempos e que atualmente se constitui um objeto de pesquisa, na tentativa de reconstituir o processo de criação matemática com vistas a retomá-lo como veículo de ensino. (MENDES, 2015, p. 125)

Desse processo, o autor complementa e fundamenta como essencial para o contexto da disciplina da História da Matemática aos futuros professores e consequentemente, fomentando informações à constituição de materiais para o ensino. Apesar dessa fundamentação, Nunes e Silva (2006, p.2) afirmam que “não faltam argumentos que reforcem as potencialidades pedagógicas da utilização da história da matemática”, no entanto, “apesar dessas evidências, não vislumbramos com a frequência necessária o uso desta tendência em sala de aula, nem em livros didáticos”.

Sobre as discussões acerca do uso da História da Matemática em sala de aula suas possibilidades didáticas, pertinência e importância nos cursos de Formação de Professores de Matemática e para o ensino, apresentamos as observações citadas por Miguel (1996) presentes nos trabalhos de Stamato (2013) e Moura e Brito (2019) que discutem as possibilidades de uso da história.

Dentre essas citações, Miguel (1996) menciona que a História da Matemática pode constituir-se como: fonte de motivação discente e uso metodológico; fonte objetivos para o ensino-aprendizagem; fonte de problemas práticos e curiosos para constituição de atividades; instrumento de desmistificação da Matemática; instrumento de formalização de conceitos, instrumento da promoção do pensamento independente, crítico e da aprendizagem significativa e possibilidade de resgate da identidade cultural.

Apesar dessas possibilidades de uso, não existe um consenso a esse respeito, enquanto “alguns acreditam que ensinar História da Matemática é fundamental para sua compreensão, outros, no mínimo, acham desperdício de tempo e energia” (STAMATO, 2013, p.89), no entanto,

> A História da Matemática como subsídio metodológico para o ensino desta é multifacetada, apresentando várias concepções. Acreditamos ser salutar, o uso de qualquer uma das concepções desde que bem programadas, objetivando dar mais significado aos conteúdos matemáticos estudados. Ensinar sem apresentar fatos históricos é estar na contramão do ensino. (NUNES e SILVA, 2006, p. 9)

Sobre isso, é cabível destacar algumas considerações a respeito do uso da História da Matemática para o ensino, logo, partimos da premissa que há uma unanimidade que a “História da Matemática é que pode contribuir para anular a sensação de ser a Matemática uma coisa pronta e acabada” (VIANNA ,1998, p. 67), contudo, apesar de ser um ponto de partida que dá luz a significação dos objetos matemáticos a serem estudados, alguns autores atentam para a forma de como esses serão desenvolvidos.

Nesse sentido, agora com um olhar para a sala de aula, Fossa (2020) defende que,

> O desenvolvimento de uma atividade requer a adequação dos seus componentes a uma determinada finalidade através de cuidadoras análises teóricas. O material elaborado ainda precisa ser sequenciado corretamente em relação às outras atividades a serem usadas na mesma unidade de ensino e a sua eficácia precisa ser examinada por testes pilotos usando métodos qualitativos e/ou quantitativos de validação. (FOSSA, 2020, p. 15)

Especificamente, ele traz em seu trabalho, o ensino por atividade com ênfase na História da Matemática como uma possibilidade didática para seu uso em sala de aula. Noutra perspectiva, Mendes (2015) defende o uso de um modelo didático de investigação histórica para o ensino de Matemática, a esse processo ele relata que há

> Uma ampla variedade de temas e métodos que podem surgir durante o exercício da pesquisa histórica em sala de aula. O professor deve ficar atento para perceber algumas possibilidades de exploração da criatividade dos estudantes, mesmo que em determinadas vezes seja necessário reformular alguns dos temas apresentados por eles. Para que essa pratica se torne possível, é preciso utilizar-se das mais diversas modalidades de investigação histórica na sala de aula, tais como, por exemplo: 1) atividades manipulativas extraídas diretamente da história da matemática; 2) atividades manipulativas adaptadas da história da matemática; 3) desenvolvimento de projetos de investigação temática; 4) investigação de problemas históricos; 5) estudo de textos históricos adaptados de fontes primárias; 6) estudo de textos históricos extraídos de fontes primárias; 7) elaboração e uso de vídeos didáticos baseados em textos históricos de fontes primárias e secundárias. (MENDES, 2015, p. 129-130)

Dessas sugestões ele ainda salienta que a eficácia da escolha didática depreende do professor um conhecimento aprofundado do objeto em questão e da sensibilidade ao grau de maturidade dos estudantes a quem essa demanda será aplicada, sendo imprescindível o planejamento da ação e a acessibilidade dos recursos disponíveis para essas atividades didáticas.

Em Mendes (2021), o autor destaca o uso da criatividade na concepção humana do conhecimento matemático historicamente construído, donde a criação desse emerge nas relações com o ambiente sociocultural, não linearmente e até em épocas e personagens diferentes tal qual as necessidades fossem sendo apontadas e exigidas. Assim, denominou-se como movimento de criatividade matemática:

> O recorte das discussões trata das histórias da criação matemática e seus processos criativos no sentido de apontar modos inovadores por meio dos quais diversos matemáticos se envolveram na busca de soluções para problemas que os desafiaram e a partir dos quais organizaram dinâmicas de combinações entre conhecimentos já produzidos, para que pudesse apontar soluções aos problemas novos que surgirem. (MENDES, 2021, p. 64)

Esse estudo eleva a discussões em torno da criação, dos processos criativos, direcionando à Matemática e esses processos alinhados a História da Matemática em sua criação e compreensão, de tal forma a verificar as possibilidades destes ao trabalho docente. Destaca os processos criativos como uma "dinâmica que, de modo geral, leva a sociedade a perceber, registrar, sistematizar e disseminar suas formas de compreender e explicar" (MENDES, 2021, p. 66), culminando assim, no conhecimento Matemático.

Ainda sobre o ensino de Matemática com atividades de cunho histórico, Brandemberg (2021) defende que

> Associar aspectos históricos ao conteúdo se faz importante para conhecermos o desenvolvimento de conceitos matemáticos, uma importância se acentua, quando discutimos um ensino de matemática que visa a contextualização dos conteúdos estudados. Com nossa abordagem utilizando "textos históricos" queremos visualizar e relacionar as estruturas conceituais nos processos de resolução de problemas e fazer a ligação (ou mesmo, para comparação de estratégias de resolução) entre o conhecimento atual e o antigo. (BRANDEMBERG, 2021, p.26)

De tal sorte, que o uso de textos históricos propicia um encontro com a significação de conhecimentos matemáticos, hoje categorizados no currículo escolar visto que garante "uma oportunidade de compartilhar uma matemática que historicamente se consolida com uma produção sociocultural humana" (BRADEMBERG, 2021, P.26).

Outra possibilidade, traz a proposta historiográfica de D'Ambrosio (1999), que assim define-a:

> A proposta historiográfica teve sua origem nos estudos de Etnomatemática que naturalmente não se esgota no conhecer o fazer e o saber matemático de culturas marginalizadas. Mas remete sobretudo à dinâmica da evolução desses fazeres e saberes, resultante da exposição de outras culturas. (D'AMBROSIO, 1999, p.111)

Nesse contexto, D'Ambrosio traz toda sua experiência pioneira da Etnomatemática resultante da aliança entre as múltiplas culturas e os conhecimentos proveniente dessas vivencias como metodologia para o ensino da Matemática em sala de aula.

Das contribuições aqui expostas, contemplam nossos referenciais teóricos: Mendes (2021, 2015), D'Ambrósio (1999), Fossa (2020) e Brandemberg (2021), que trazem suas orientações e situações didáticas que definem o potencial da História ao ensino, seja para formação de cursos de Licenciatura em Matemática e/ou promover o trabalho docente à educação básica em materiais didáticos ao ensino.

Nessa última situação, emerge a inquietação de provocar os docentes para o ponto de partida à pesquisa iminente que abrirá caminhos na construção de propostas didáticas ao ensino dos conteúdos matemáticos a serem trabalhados com seus alunos.

Tal questão nos encaminhou ao conhecimento e estudo do Diagrama-Metodológico proposto nos estudos de Chaquiam (2022) como instrumento balizador para a orientação e construção de um texto histórico e atividades para o ensino, como apresentamos na próxima seção.

2.3. SUPORTE METODOLÓGICO

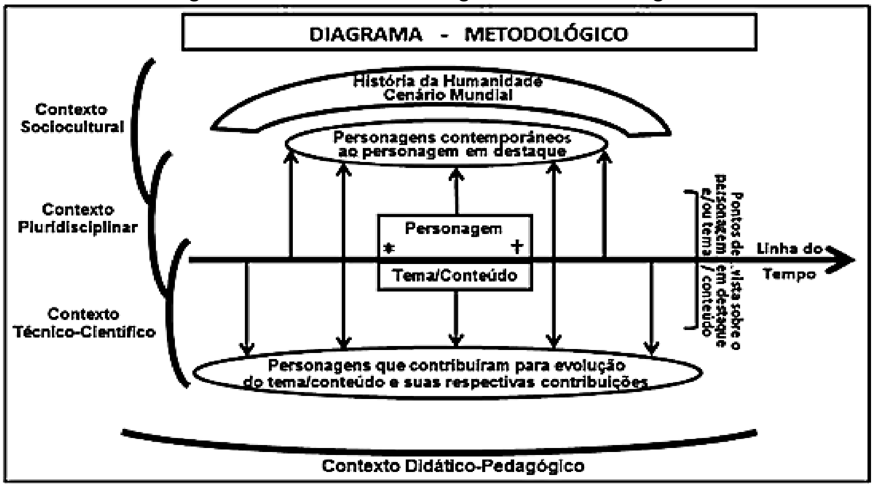
Com o objetivo de fazer um levantamento bibliográfico para aportar uma história sobre juros e prover desse, elementos para uma construção de um recurso didático para o ensino de juros, apresentaremos nesse capítulo os resultados da metodologia aplicada na proposta de Chaquiam (2022).

Assim, iremos expor: o processo metodológico do citado diagrama e suas etapas de concepção e depois como resultado dessa pesquisa um texto sobre juros que irá embasar a construção de nosso produto educacional.

Nesse propósito usamos o diagrama como norteador cronológico para usar as informações identificadas sobre a história dos juros com olhar pedagógico à sala de aula da educação básica adicionada a uma concepção moderna de apresentação do algoritmo de cálculo de juros composto para formação de professores.

Cabível destacar que durante a produção desse trabalho, o diagrama-metodológico passou por algumas atualizações que podem ser verificadas nos trabalhos de Chaquiam (2021, 2020, 2017), cuja visão do diagrama está exposta na figura 1.

Figura 1– Modelo do Diagrama-Metodológico.

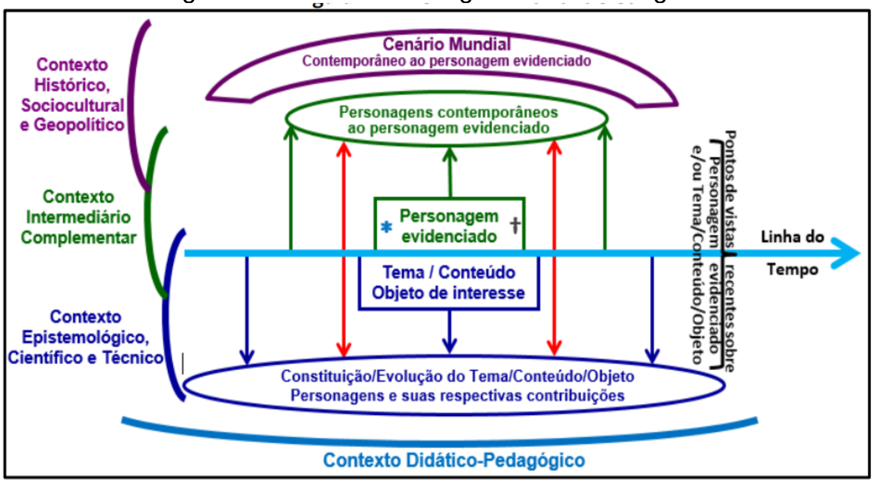


Fonte: Chaquiam (2017, p. 31).

Dessa forma, a atualização dessa obra, assim como as orientações metodológicas detalhadas de CHAQUIAM (2022), poderão ser apreciadas na bibliografia citada, e que será apresentada aqui de forma simplificada para orientação e alinhamento do resultado do diagrama para juros.

Para nosso trabalho desenvolvemos a pesquisa a partir do exposto da Figura 2, o modelo-metodológico que balizou nosso objetivo de construção do recorte (texto histórico e atividades):

Figura 2 – Modelo do Diagrama-Metodológico.



Fonte: Chaquiam (2022, p. 11).

De acordo com as orientações de Chaquiam (2022), será eleito um tema, conteúdo ou objeto matemático que irá direcionar a identificação de fatos e personagens essenciais para o desenvolvimento da temática. A figura 2 mostra a existência de quatro contextos assim definidos:

i. **Histórico, sociocultural e geopolítico**, antes sociocultural, que contempla o cenário mundial contemporâneo a um personagem central, alinhando o tempo e espaço evidenciando a história da humanidade com a da Matemática.
ii. **Intermediário complementar,** antes pluridisciplinar, que contempla personagens históricos do contexto anterior, reverenciando também outras áreas de conhecimento e técnico-científico, proporcionado assim uma visão geral dos fatos, atores e suas façanhas históricas.
iii. **Epistemológico, científico e técnico,** antes técnico-cientifico, nesse último será elencado personagens históricos que contribuiram para a evolução do tema/conceito/objeto, ao qual será destacado um, personagem central, cujos demais contextos serão desenvolvidos.
iv. **Didático- pedagógico**, que em suma, são as possibilidades didáticas que emerge do diagrama para o ensino.

Além desses contextos, Chaquiam (2022) recomenda identificar trabalhos de historiadores ou pesquisadores que fizeram menção do personagem central ou do tema/conteúdo/objeto "visando o enriquecimento do texto frente a essas diferentes visões e/ou interpretações e a obtenção de explorar didaticamente" (CHAQUIAM, 2022, p. 13).

Assim, Chaquiam (2022, p.13) propõe que a produção textual e as pesquisa inerentes a esse processo, ocorra na seguinte ordem:

i. Cenário mundial contemporâneo ao personagem escolhido;
ii. Apresentação dos personagens contemporâneos
iii. Apresentar o personagem evidenciado, exceto com sua contribuição ao tema.
iv. Escrever sobre o desenvolvimento do tema com os respectivos personagens e suas contribuições.
v. Apresentar os pontos de vista de recentes sobre a temática de forma a evidenciar aspectos da constituição/evolução para as discussões didáticas.

Diante do exposto, diagrama evidencia uma teia de informações que traz menções de tempos, lugares e pessoas sob a ótica de um tema/conteudo/objeto de conhecimento cujo desenvolvimento é inerente a todas essas informações, que emergem dos contextos histórico, social e geopolitico e intermediario complementar.

Sobre a exploração das informações fornecidas pelo diagrama, Chaquiam (2022) comenta que:

> [...] funciona como uma espécie de "fotografia" de fatos da história geral em torno da temática elencada, organizadas temporalmente de acordo com a sua constituição, e traz em seu bojo personagens, métodos, técnicas, descobertas, invenções e conceitos – não tão evidenciados no mundo academico – e aclarar diante dos olhos "amostras" de trabalhos matemáticos de primeira linha em suas épocas e seus idealizadores. (CHAQUIAM, 2022, p. 7)

Assim, o encontro dessas informações multifacetadas promovem a organização das ideias centrada no tema/conteudo/objeto e orienta o pesquisador na história em seus diversos aspectos, afinal, a história não é inerte aos acontecimentos de um lugar ou momento cronológico, pelo contrário, o saber matemático emerge justamente no desenrolar das necessidades ocorridas em determinada época, cultura e anseios acadêmicos.

Dessas considerações e mediante a revisão de literatura aludida, destacamos os referenciais Berger (2005), Grando e Schneider (2010) e Soares e Silva (2016) aos quais nos contemplaram com a maioria das informações históricas sobre juros, e desses, em suas referências, demais informações complementares para a constituição do diagrama de juros.

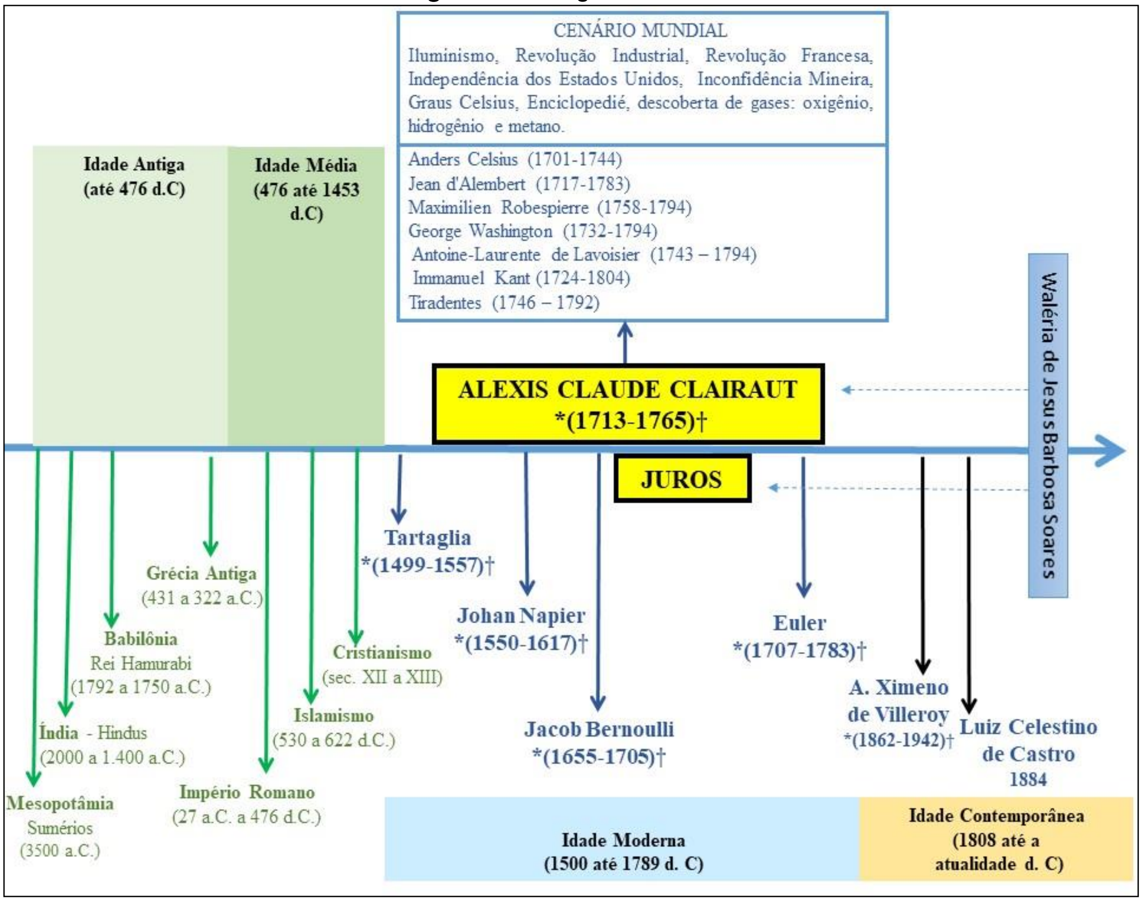
Nessas referências, mencionou-se que muitos dos personagens que deram suas contribuições de juros foram: civilizações, religiões (determinados por sacerdores, reis, lideres religiosos), que emolduraram o conceito atual do que vem a ser juros, antes mesmo, da existência de um sistema financeiro e fórmulas algoritmicas, como visto na apresentação de nossa literatura escolar e acadêmica. Assim, seu uso transcendeu de transações comerciais ao ético e religioso.

Também destacamos que a evolução dos registros comerciais, ainda de forma aritmética, emerge com o aprimoramento das grandes navegações, na transição entre a Idade Média e Contemporânea e que exigia cada vez mais dos estudiosos da época, com o avanço algebrico do pensmento matemático as necessidades da época, destacamos Tartaglia, Napier, Jacob Bernoulli, Euler e Alexis Claude de Clairaut, que se fizeram presentes nas suas contribuições para o estudo dos juros historicamente construidos.

Essas primeiras contatações foram possiveis no momento que elegemos Chaquiam (2022) para direcionar as informações que seriam importantes ao nosso trabalho.

Dessarte, mediante os aportes supracitados, das pesquisas inferidas sobre juros em seus aspectos históricos e de acordo com a proposta de Chaquiam (2022) apresentamos a adaptação do diagrama-metodológico na Figura 3, que também determina um dos objetivos dessa pesquisa.

Figura 3 – Diagrama - Juros



Fonte: construído pela autora, adaptado de Chaquiam (2022).

A partir da conclusão do uso desse diagrama, vamos apresentar um texto construído a luz do contexto sobre as informações identificadas sobre a concepção de juros com informações contidas nas primeiras grandes civilizações e depois num recorte do século XVIII com personagens históricos que contribuiram para o aprimoramento do conceito de juros que corrobora com parte da literatura proposta ao ensino de juros compostos na educação básica, as atividades inferidas deste e a apresentação de juros compostos numa versão moderna.

3. RECORTE HISTÓRICO DE JUROS PARA O ENSINO

Apresentaremos agora o produto educacional por Medeiros (2023) na forma de Recorte Histórico composto por um texto histórico sobre juros, as atividades construídas a partir deste e as orientações aos docentes.

3.1. UMA HISTÓRIA DOS JUROS

O que será apresentado agora são informações preliminares que antecedem o período Histórico do sec. XVIII, figura 3, que revelou personagens que contribuíram para a história dos juros, no qual chamaremos de Prelúdio da concepção de Juros, pois forneceram pontos de reflexão acerca do entendimento dos juros, quanto ao seu uso em civilizações milenares e também, o contexto moral e ético resultante deste, pertinente dialogar nesse texto para agremiar significado na proposta de apresentação, contextualizando assim os juros na sala de aula.

3.1.1. Preludio da concepção dos juros

De acordo com Grando e Schneider (2010) muito antes das primeiras civilizações se tornarem organizadas, o homem da antiguidade era nômade e sobrevivia daquilo que retirava da natureza, quando por diversas razões, provavelmente pela necessidade de segurança e continuação de suas tribos, o homem assentou-se em lugar fixo, desenvolveu a agricultura e pecuária que, de tal forma, assegurava sua subsistência.

Com a organização social cada vez mais acentuada, veio a busca de outras necessidades e o homem passou a supri-las por meio de trocas, conforme cita:

> Nas civilizações primitivas, em que os homens sobreviviam tirando diretamente da natureza os produtos para suprir suas necessidades, as trocas comerciais praticamente não ocorriam. Porém, quando se iniciou a comunicação entre os primeiros grupos humanos, começaram também as trocas comerciais, a partir das quantidades excedentes que cada um possuía, sem a preocupação de sua equivalência de valor. (GRANDO e SCHNEIDER, 2010, p. 44)

Essas trocas comerciais ficaram conhecidas como escambo, não havendo nenhuma organização quanto a unidades e medidas, não havia um parâmetro para analisar o valor dos produtos que eram articulados, no entanto,

> com o contato cada vez maior entre as comunidades e com o desenvolvimento do artesanato e da cultura, começaram a surgir dificuldades nas trocas, por não haver uma medida comum de valor entre os produtos permutados. Por isso houve a necessidade de criar um sistema mais estável de avaliação e equivalência, com unidades chamadas de “moeda-mercadoria” ou “padrões fixos”. (GRANDO e SCHNEIDER, 2010, p. 45)

Esse processo que hoje chamamos de sistema monetário, que atribui valor a algo, foi imprescindível para a continuidade dessas relações comerciais, não demorou para que o homem percebesse que o escambo não supria mais suas necessidades e que precisavam de um parâmetro de troca que fosse favorável a todos. No quadro 1 apresentamos um estudo cronológico desse processo.

Quadro 1: Os Primeiros sistemas monetários da Humanidade

Moeda-mercadoria	Local	Periodo	Justificativa
BOI	Grécia	VIII a. C.	locomoção própria, reprodução, uso na prestação de serviço
SAL	não identificado	VIII a. C.	seu uso para a conservação dos alimentos. A palavra salário vem do "SAL"
COLARES DE PÉROLA E CONCHAS	Ilhas do Pacífico		
ALGODÃO, CACAU e CERÂMICAS	America Central (MAIAS)	pré-colombiano	
PEDAÇOS DE TECIDO, SEMENTES DE CACAU	America Central (ASTECAS)	pré-colombiano	*Xiquipilli*, saco com cerca de 8.000 grãos, acredita-se a primeira formalização de moeda
CHIFRES, DENTES, CARAPAÇAS, COURO DE ANIMAIS, DEPOIS BASE DE ARMAS, PEDRA À BRONZE	CHINA	XVI - XI a.C.	
OURO, COBRE, BRONZE, PRATA, DIVIDIDOS EM PEPITAS OU PALHETAS	EGITO FARAÔNICO		Fácil transporte e poderiam ser dividido por peso
METAIS FUNDIDOS EM LINGOTES OU PEÇAS	GRÉCIA DA ÁSIA MENOR E LÍDIA	VII a. C.	as peças eram remanejáveis, podiam adquirir o selo da autoridade pública, cujo preço seria proveniente do peso e quilate.

Fonte: Grando e Schneider (2010), construído pela autora

Esse quadro traz uma lista cronológica dos primeiros sistemas monetários (moeda-mercadoria) da humanidade, infere-se que desde a antiguidade o homem buscava suprir suas necessidades, do escambo e no trato de suas organizações sociais atribuir valor nas suas transações comerciais, que das moedas-mercadorias, as justificativas estão ligadas a importância da mercadoria para a sobrevivência, em especial a alimentar.

Com o passar do tempo e a constituição de civilizações mais organizadas política e socialmente, entram em cena outras necessidades e novas moedas mercadorias que enalteciam a nobreza, por fim, direcionando a unidades (peças), pela facilidade de locomoção e articulação comerciais, pois poderiam adquirir valor conforme seu peso e material, aprimorou-se passando em formato de lingotes ou moedas, que consequentemente foi adotado na Grécia, Fenícia, Roma, entre outros até a própria China.

D'Ambrosio e D'Ambrosio (1980) trazem uma menção a respeito da necessidade de uma moeda, com equivalência de valor, segura e aceita pela maioria dos povos:

> Necessária, pois, se tornava uma terceira mercadoria, de fácil transporte, que pudesse ser aceita sem restrições, e com valor mais ou menos igual em todos os lugares. E muitas apareceram, entre vários povos: o boi, o sal, o chá etc. Mas, desde logo, chamaram a atenção das pedras e os metais preciosos, entre eles o ouro e a prata. E estava solucionado o problema. A troca se tornava mais fácil e segura. (D' Ambrosio e D'Ambrosio,1980, p.85)

A humanidade traz em sua evolução a concepção de quantificar valores que correspondam a resolução de situações pertinentes de sua época. Soares e Silva (2016) citam que por volta de 3.500 a. C. os sacerdotes da Suméria, da milenar Mesopotâmia, que como representantes de deus na terra, administravam toda vontade divina na sociedade.

E sendo assim, emprestavam animais, sementes e arados para o povo sumério para a plantação, passada a colheita e como retribuição os camponeses ofereciam à Inanna (deusa da fertilidade dos campos) parte da colheita como oferenda.

Os sacerdotes passaram a organizar os empréstimos desses insumos aos camponeses e tão logo as oferendas recebidas de atos espontâneos passaram a ser compulsórios. Os sumérios inventaram a escrita e para manter o controle dessas ofertas os sacerdotes passaram a registrar em tabletes de argila, retratada na figura 4, o que comprovaria os indícios desse processo, quanto a ideia primitiva de concepção de juros: como algo a mais adicionada daquilo que foi emprestado.

Figura 4: Tablete com escrita cuneiforme dos sumérios de Uruk

Fonte: *https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Uruk_period_administrative_tablet.jpg*

Os autores Jay (2002) e Rezende filho (1997) atribuem a Uruk a primeira sociedade a cobrar juros após a fusão dos povos da Mesopotâmia aos sumérios, importante destacar que os registros (cuneiforme) das tábuas de argila detinha cálculos que provam essa prática, apresentavam registros de 20% a 30% para empréstimos de metais e sementes.

Segundo Berger (2005) nesse período os sumérios detinham conhecimentos matemáticos entre eles de juros simples e compostos, "Provavelmente esses conhecimentos matemáticos são frutos de uma necessidade da época, principalmente em resolver problemas práticos advindos da vida diária, do comércio incipiente e da prestação de contas dos responsáveis pelos recursos dos deuses – os sacerdotes" (BERGER, 2005, p.73).

Ainda de acordo com Berger (2005), duas outras situações de cunho religioso estavam ligadas a evolução do conceito de juros. A primeira na Babilônia, o Rei Hamurabi (1.792 a 1.750 a.C.) instituiu o código de Leis intitulado com seu nome, logo o sistema de oferendas do povo sumério foi incorporado com uma ressalva, as oferendas deveriam ser encaminhadas ao próprio rei, pois no Código de Hamurabi, ele se intitulava como o favorito dos deuses, assim a religião fazia sua intervenção na economia.

E na segunda, na Índia no período de 2.000 a 1.400 a.C. outro registro de base religiosa sobre juros nos livros Védicos, base do hinduísmo, segundo a Lei, divididas em castas, apenas as duas inferiores poderiam contrair empréstimos. Os juros eram administrados como aluguel do valor emprestado.

No Império Romano, a prática de contrair empréstimos, chamada de usura, era bastante comum, apesar das contestações acerca da moral e ética apresentadas pelas questões gregas.

Com o apogeu do Império, por volta de 450 a. C., os romanos passaram a dar menos importância a essas questões e buscavam por meio de sua legislação distanciar as transações comerciais da religião, a citar a Lei das XII Tábuas (357 a.C.), que instituía dentre elas, as relações entre credor e devedor, estipulava a taxa de juros até 8% anuais para empréstimos que chegavam marginalmente a 50%.

Na Grécia antiga, em 431 a 322 a.C., os juros passaram a ser, além de um problema religioso, ético e moral, de tal forma que Plutarco, Platão e Aristóteles defendiam a ideia que emprestar valores era a pior forma de aprisionar o homem. *Tokos* era a expressão que representava a definição de juros, ainda hoje usada para usura, aos que praticam juros exorbitantes.

Berger (2005) apresenta um conjunto de oito leis que eram exercidas na Grécia antiga e ressalta que:

> Os empréstimos envolvendo juros ou usura faziam parte das práticas econômicas dessa civilização e que as ideias dos filósofos gregos sobre juros e usura ficavam mais com um direcionamento para o campo moral e ético. (BERGER, 2005, p.90).

Em Meca, Maomé, precursor do Islamismo, faz revelações que ele acreditava serem de Deus, transmitidas através do Arcanjo Gabriel, *Jibril*. O conteúdo dessas revelações foi descrito no livro conhecido como o Alcorão, no qual trata os juros como usura, ação condenável e cabível de castigo. Pertinente destacar que “uma grande particularidade do Islamismo é que ela determina a economia. A religião sobrepõe a economia, determinando leis e comportamento de um povo” (BERGER, 2005, p.107).

No sec. X na dinastia de Song houve a introdução do papel-moeda, ao contrário do peso de milhares de moedas, era fácil locomoção, sendo que apenas no sec. XIII foi padronizada e aceita nacionalmente.

Logo o comercio atinge seu auge, os “cambitas” com seus negócios de troca e câmbio de moedas rapidamente aumentaram suas atividades para guardar e emprestar dinheiro, natural, portanto que ele recebesse algum valor pelos serviços prestados, como eles estavam sentados em bancos, ficaram conhecidos como “banqueiros”, e logo “banco”. O primeiro banco privado data de 1157 pelo Duque Vitali, em Veneza. Essa rede bancária se aprimorou nos séculos XIII, XIV e XV.

No cristianismo, na idade média, apesar de condenável pela religião, passou a ser uma prática comum em busca de enriquecimento. A Igreja passou anos tentando em vão controlar essa prática entre seu povo de modo a tentar administrar a sua ação entre seus fiéis, assim para coibir a prática, atribuía os juros a ação do pecado e contra o inevitável acabou por separar a usura dos juros, onde o primeiro diferia do segundo pelas altas taxas cobradas.

Com a expansão da Igreja Católica, que dominaria toda a Idade Média, eram realizados Concílios para estabelecer regras a prática da usura, ainda vista como um mal à sociedade, porém praticada por todos os povos. No séc. XII era um mal, no séc. XIII era considerado um pecado. Em 1314 no Concilio de Viana foi decretado expulsão da Igreja aos governantes que praticavam a usura

Dessas informações, construímos um resumo das ideias identificadas com as primeiras concepções de juros dos povos e nações referenciadas nesse prelúdio, representadas no quadro 2:

Quadro 2: Concepções da ideia de juros da antiguidade à Idade Média

Contribuinte Histórico	Período	Registro geográfico	Noção / concepção de Juros
Sumérios	3.500 a.C.	Mesopotâmia – cidade de Uruk	Oferenda
Rei Hamurabi	1.792 a 1.750 a.C.	Babilônia	Oferenda
Hindus	2.000 a 1.400 a.C.	Índia	Aluguel
Romanos	450 a.C.	Império Romano	usura
Plutarco, Platão Aristóteles	431 a 322 a.C.	Grécia Antiga	Tokos
Maomé	530 a 622	Meca	Usura = *Ribá*
Cristianismo	sec. XII a XII	Países do Império Romano	juros ≠ usura

Fonte: Adaptado de Berger (2005)

Dessa forma podemos verificar que a ideia de juros veio muito antes da formatação de um sistema monetário e mesmo de papel-moeda. Na Europa apenas em 1661 na Suécia que o papel-moeda foi introduzido. Havia muitas vantagens em usar o papel-moeda, facilitou transações comerciais, empréstimos, contudo ocasionou desvantagens das quais destacavam a emissão de impressão de notas sem lastro e consequentemente aumento da inflação.

Desse prelúdio enfatizamos o quanto a concepção dos juros foi sendo tratada da antiguidade até o início da Idade Média, e que os conhecimentos de seu trato transcenderam elementos sociais, em diversas civilizações, em questões religiosas, éticas e morais, e que mediante várias situações os juros esteve presente para a resolução de problemas, tanto de forma regular, por meio das leis estabelecidas, quanto clandestina, o que ocasionou o enriquecimento de pessoas com juros abusivos (ou usura) conforme cita Soares e Silva (2016).

A seguir apresentaremos o texto balizado do recorte proveniente do diagrama CHAQUIAM (2022) supracitado, com olhar em personagens históricos do sec. XVIII que se destacaram na história dos juros em meio a um contexto histórico, cultural e geopolítico a partir da transição da Idade Média à Contemporânea com as situações emergidas da Revolução Industrial, ideias iluministas e grandes revoluções que eclodiram no mundo.

3.1.2. Uma história dos juros no século XVIII

Na transição da Idade Média à Moderna, advindo das grandes navegações, dos novos mercados consumidores oriundos do novo continente, o americano, o cenário mundial, passava por grandes transformações que mudaria a economia e a política em todo o mundo. Na ótica social e política, o Iluminismo[1] (1715 a 1789) foi um movimento filosófico, que propagava a ideia de liberdade, tolerância, progresso, separação entre a igreja e o estado e um governo constitucional, de modo que suas ideias eclodiram em movimentos políticos de liberdade sócio-político em todo o mundo

A Revolução Francesa (1789), que em resumo acabou com o absolutismo no país, a Revolução Americana (1776), donde 13 colônias americanas declararam Independência – os Estados Unidos – o primeiro a adotar uma Constituição política escrita e a Inconfidência Mineira, movimento de libertação do Brasil a Portugal. Esses contemplaram o recorte geopolítico do período em questão com destaque a abrangência e importância, mundial, continental e nacional, respectivamente.

[1] As informações apresentadas nesse resumo histórico constituinte do contexto sociocultural do diagrama foram retiradas das publicações do site público Wikipédia, disponível em: <*https://pt.wikipedia.org/wiki/Iluminismo*>

Na economia, a Revolução Industrial[2] (1760 a 1840), proveniente da Inglaterra, caracterizada pela troca de mão de obra humana pela manufatura, com a introdução de máquinas a vapor, movidas a carvão e depois elétrica, provocou intensas mudanças nas relações de trabalho, na vida e nos hábitos da humanidade. Dentre estas, destaque para o êxodo rural às grandes cidades, aumento do consumo de bens manufaturados, distinção entre a burguesia e proletariado.

Como resultado imediato a Inglaterra firmou-se como grande potência econômica mundial, que levou demais países da Europa Ocidental e depois os Estados Unidos a uma corrida às manufaturas para fazer frente as novas necessidades mundiais e competir com a Inglaterra.

Diante desse contexto histórico os juros, em especial os juros compostos eram objetos de uso tanto para negócios, para fomentar a constituição de capital para os negócios, como também na busca de enriquecimento principalmente pela usura.

No prelúdio da concepção de juros trouxemos informações históricas que mostram que o conhecimento sobre essa forma compensatória, como um retorno dum valor original emprestado, existe há milhares de anos e ainda antecede a formalização do dinheiro, da moeda, dos bancos, e até mesmo das variáveis como a porcentagem das quais é tão comum identificar na literatura atual nos livros de Matemática Financeira, de modo que, em muitas situações, esses conceitos passaram a existir a partir da necessidade de organização e aplicação dos juros, conforme apresenta KILHIAN(2012):

> A cobrança de juro é uma prática muito antiga na história da humanidade, anterior à invenção da moeda, quando os valores eram representados por metais preciosos ou outros produtos. Na Suméria, por exemplo, cerca de 2.000 anos antes de Cristo, a taxa de juro podia variar de 20% a 30%, dependendo da forma de pagamento: em metais preciosos ou em produtos. Mais tarde, entre os babilônios, a taxa variava de 5,5% a 20% para o pagamento em metais preciosos e de 20% a 33,5% para pagamentos em produtos. É bom frisar, porém, que as taxas de juros não eram expressas em porcentagens, como hoje. (KILHIAN, 2012, online)

Esse trecho do trabalho de Kilhian (2012) corrobora com o fato de que o objeto juros, antecedeu toda uma estrutura financeira e traz em seu estudo a evolução da porcentagem e sua representação, no entanto não iremos aprofundar nesse recorte, e sim mostrar que essas civilizações antigas já detinham bastante conhecimento sobre juros, conforme apoia Vargas e Lasta (2018):

---

[2] Ibdem, <*https://pt.wikipedia.org/wiki/Revolu%C3%A7%C3%A3o_Industrial*>

> Não é à toa que os bancos também fizeram parte da civilização mesopotâmica já em 3.400 a.C. Na cidade de Uruk, no sudeste do Crescente Fértil, os recursos podiam ser reunidos e guardados, além de emprestados a juros para agricultores e comerciantes. A atividade econômica evoluiu de tal modo que por volta de 800 a.C. o sistema bancário já realizava operações básicas como empréstimos a juros, pagamento de juros a depósitos, débitos em conta corrente, e transferências de recursos para sistemas bancários de outras praças. (VARGAS e LASTA, 2018, p. 9)

Ainda sobre a existência milenar do conceito de juros, Gonçalves (online) comenta:

> A História também revela que a idéia se tinha tornado tão bem estabelecida que já existia uma firma de banqueiros internacionais em 575 a.C. com os escritórios centrais na Babilônia. Sua renda era proveniente das altas taxas de juros cobradas pelo uso de seu dinheiro para o financiamento do comércio internacional. O juro não é apenas uma das nossas mais antigas aplicações da Matemática Financeira e Economia, mas também seus usos sofreram poucas mudanças através dos tempos. (GONÇALVES, online)

De acordo com Berger (2005), na transição da Idade Média à Contemporânea, a Religião cristã buscava através de Concílios, como o de Viena em 1314, organizar o uso de juros das relações comerciais ou clandestinas de modo a controlar, em vão, a sua prática, visto que a religião ainda tratava os juros como um mal e numa tentativa frustrante buscaram diferenciar a cobrança de juros com a usura, ainda assim, o povo fazia uso dos juros, seja regular em bancos ou de forma clandestina na busca de enriquecimento.

Conforme Soares e Silva (2016) no sec. XIII com a impulsão das grandes navegações e da Revolução comercial, houve grande procura por financiamentos para custear essa realidade econômica, intensificando no sec. XV, provavelmente foi-se necessário estudar e organizar ainda mais os juros para contemplar os anseios da época.

Nesse cenário, Tartaglia é mencionado “como um matemático que trouxe o estudo dos juros em seus livros” e que ele “ficou conhecido por escrever a melhor aritmética do sec. XVI” (SOARES e SILVA, 2016, p.98). Sendo assim, apresentaremos as contribuições de Nicoloó Fontana.

Niccoloó Fontana[3], nasceu em Brescia, 1500, e faleceu em 15 de dezembro de 1557, em Veneza, aos 57 anos, italiano, conhecido por **Tartaglia**, “ o gago”, seu pai, Michelle Fontana, foi assassinado quando ele tinha 6 anos, de infância humilde, quase foi morto pelas tropas de Luiz XII quando invadiu Brescia, ainda ferido na

---

[3] Ibdem, <*https://pt.wikipedia.org/wiki/Niccol%C3%B2_Fontana_Tartaglia*>

mandíbula, os ferimentos foram difíceis de cicatrizar, provável que teve dificuldades na fala e passou a usar barba para esconder os ferimentos, razão pela qual deve-se o apelido.

Tartaglia foi autodidata e por meio de seu patrono[4] Ludovico Balbisonio, foi levado a Pádua onde se transformou em professor de Matemática, Soares e Silva (2016) comenta que ele aprendeu a ler aos 14 anos e foi considerado um dos maiores matemáticos da Idade Média, na sua obra destaque a fórmula de resolução de equação do 3º grau (cúbica).

Berlinghoff e Gouvêa (2010) menciona que entre os séculos XVI e XVII a álgebra emerge como protagonista de muitas inquietações entre os estudiosos matemáticos, promovendo a possibilidade de resolução de situações inéditas. Antes disso, tinham-se a empreitada de resoluções aritméticas, primeiro introduzindo palavras, depois abreviações e símbolos.

Nesse momento já se tinha resoluções de equações de primeiro e segundo graus, não por meio de fórmulas, mas por meio de uma receita verbal. Foi na Itália com os matemáticos Scipione del Ferro (1465-1526) e depois Tartaglia que descobriram uma forma de resolução das equações cúbicas. Conforme cita Berlinghoff e Gouvêa (2010):

> Ambos descobriram como resolve certos tipos de equações cúbicas e mantiveram em segredo sobre suas descobertas, porque nessa época os estudiosos em geral eram sustentados por patronos ricos e tinham que ganhar seus empregos derrotando outros estudiosos em competições públicas. (BERLINGHOFF e GOUVÊA, 2010, p. 38)

Assim, muitos estudiosos tendiam a não declarar suas descobertas. No entanto, Tartaglia foi convencido por Girolamo Cardano (1501 -1576) a revelar o segredo, que para isso, o fez na forma poética, redigiu a "fórmula" verbal em italiano e em versos alexandrinos, conforme apresenta Launay (2019):

> Quando o cubo e as coisas
> São igualados ao número,
> Encontra dois outros que dele diferem.
> Em seguida, como é habitual
> Que seu produto seja igual
> Ao cubo do terço da coisa.
> Depois do resultado geral,
> De suas raízes cúbicas bem subtraídas,
> Vais obter tua coisa principal. (LAUNAY, 2019, p. 164)

[4] Era comum naquela época os estudiosos sem posses serem patrocinados por patronos, assim eles teriam condições de pesquisar seus objetos de estudo e ainda era frequente a disputa entre eles de soluções de problemas.

Na composição poética, coisa, seria uma incógnita. Após a compreensão do método, Cardano desenvolveu por sua vez uma forma padronizada de resolução de equações cúbicas, que por acreditar ter sido mérito próprio publicou no livro *Ars Magna*, mencionou as contribuições de Tartaglia, mas não o eximiu de sua frustração, que protestou publicamente, mas não tirou a glória de Cardano, no qual ficou conhecido como “fórmula de Cardano”.

Esse contexto não está diretamente relacionado a juros, no entanto é interessante apresentar como a linguagem matemática se apropriou da língua para representar seus conceitos. Apesar de Tartaglia ter se destacado no estudo das equações cúbicas, foram muitas as suas contribuições a matemática, inclusive na área financeira.

Launay (2019) comenta que nessa época já tinham conhecimentos em sinais e Tartaglia foi um dos primeiros matemáticos a usar os parênteses nos seus cálculos. Dentre suas obras, e imerso nas situações envolvendo transações comerciais promovidas pelas grandes navegações e exigências financeiras resultantes dessas, destaque para 1557 quando ele publica *O Tratado Geral de Números e Medidas*, que explorou tópicos que envolvia operações numéricas e aritmética mercantil ou *arte negociatória* como cita Soares e Silva (2016).

Essa obra menciona juros como “merecimento”, “mérito” ou “prêmio” que corrobora com as concepções apresentadas no Prelúdio dessa pesquisa. Assim, Tartaglia traz o conceito e a aplicação de juros em situações que são consideradas peculiares ao momento histórico, exploradas ainda na forma verbal, contemplando os cálculos aritméticos, conforme apresentamos na figura 5:

Figura 5: Exemplo de aplicação de juros de Tartaglia

> "100 ducados ao final de um ano me retornassem 105 ducados, sendo que aqueles 5 ducados se diria juros (mérito) dos ditos 100 ducados".

Para este exemplo, Tartaglia denomina que por ser tal juro segundo o tempo (prazo) de um ano, denominar-se-ia tal juro por 5 por cento (5 por 100) ao ano.

Mas se,

> "100 ducados, ao final do mencionado tempo de um ano me retornassem 110 ducados, os 10 ducados que sobrariam constituiriam o juro dos ditos 100 ducados".

Logo a esses juros, obtidos ao final de um ano, dir-se-ia se 10 por 100 ao ano. Mas se tal juro fosse obtido em outro período de tempo, suponhamos em 8 meses, tal juro se diria 10 por cento em 8 meses.

Fonte: Soares e Silva (2016, p.100)

Soares e Silva (2016) apresentam a forma como Tartaglia tratava os cálculos de juros onde o cabimento de "mérito" e "merecimento" fica em evidencia, como sendo a razão pelo qual se tinha àquele direito ao "prêmio", assim, "observamos como Tartaglia desenvolveu a ideia de juros, numa época, em que o estudo das equações fazia parte a rotina dos grandes matemáticos" (p. 101).

Apesar dele demonstrar os primeiros exemplos com taxas anuais, método comum admitido, visto que, colheitas e navegações teriam a necessidade de tempo com períodos maiores, anuais, também apresenta com períodos menores que esse, e seguia a mesma linha de raciocínio, inclusive, ocorrendo noutras moedas.

As tecnologias existentes e os estudos provenientes dos séculos anteriores, não eram suficientes à leitura da demanda aritmética e a álgebra é o processo que corrobora para simplificar soluções como forma de generalizar essas ações.

Sobre as técnicas de resolução de problemas matemáticos na forma verbal, Launay (2017) chama a atenção para a necessidade de evolução do método que ocorre justamente nessa transição de eras, "para enfrentar essa crescente complexidade, os matemáticos aos poucos começam a simplificar a linguagem algébrica" (LAUNAY, 2017, p. 165), iniciando no mundo mulçumano no final da Idade Média, tendo seu apogeu na Europa entre os séculos XV e XVI.

Esse fato munido a crescente do capitalismo, a ganância de enriquecimento, a necessidade de uso de cálculos aritméticos cada vez mais complexos, impulsionando a aplicação dos juros compostos, conforme menciona Terra (2017), no final do sec. XVI, mesmo que indiretamente, os juros ganham um grande aliado, quando em 1590 Napier descobre os logaritmos.

John Napier[5], nasceu em 1550 em Edimburgo, Inglaterra, falecendo no mesmo lugar em 4 de abril de 1617. Diferente dos demais personagens com influência na matemática, destacados aqui, Napier desenvolveu os logaritmos por meio de interesses pessoais, provavelmente motivados pelos negócios da família e pela matemática. "No início do sec. XVII, John Napier revelou sua invenção dos logaritmos, destacando-os como instrumento de cálculo com o poder de reduzir multiplicações e divisões a simples operações de soma e subtração" (PIPPA, 2014, p. 9). E completa,

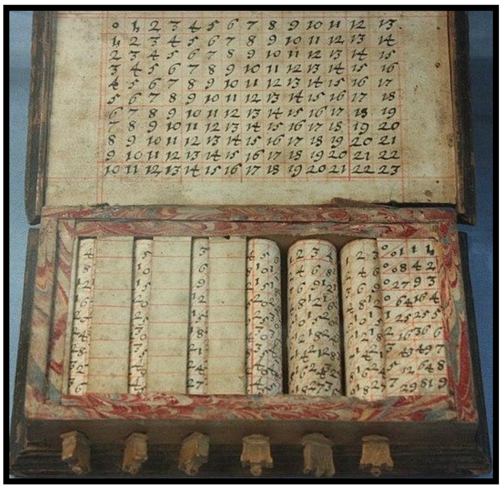
> Por volta de 1590, Napier mostrou tem um grande conhecimento da correspondência entre progressões aritméticas (PA) e geométricas (PG). Ele observou que o produto ou a divisão de dois termos da PG estava associado à soma ou a diferença dos respectivos termos da PA. Partindo dessa correspondência criou os logaritmos. (PIPPA, 2014, p.11)

Desse fundamento, Napier dedica vintes anos de sua vida ao estudo dos logaritmos, e mesmo sem ser da área acadêmica, suas contribuições tiveram importância mundial, pois tanto auxiliou em demais estudos como solucionou inúmeros problemas ocasionados pelas limitações tecnológicas da época.

Segundo Soares e Silva (2016) dentre seus estudos, Napier escreve três obras sobre logaritmos: *Mirifi Logarithmorum Canonis Descripio* (1614), *Logarithmorum chilia prima* (1617) e *Arthmetica Logarithmica* (1624). Além dessas grandiosas contribuições, destaque também aos equipamentos construídos por Napier, a Figura 9, apresenta o ábaco de Napier:

[5] *https://pt.wikipedia.org/wiki/John_Napier*

Figura 9: O ábaco de Napier



Fonte: *https://proyectoidis.org/abaco-de-napier/*

E a figura 10, o conjunto de ossos, que auxiliava Napier ao estudo dos logaritmos.

Figura 10: Conjunto de ossos de Napier (1650)

Fonte: *https://pt.wikipedia.org/wiki/John_Napier*

Essas tecnologias, o auxiliaram nos cálculos aritméticos de valores muito altos ou muito pequenos, construídas artesanalmente com ossos, couro, madeira, que transcenderam ao tempo.

Tais artefatos são alguns exemplos da genialidade de Napier, que também era conhecido como administrador de tempo, visto que essas tecnologias faziam com que ele ganhasse tempo nos cálculos aritméticos, necessários da época. A inclusão dessas tecnologias agremiou facetas importantes à Matemática.

Há indícios que o gosto pelos logaritmos também foi impulsionado pelos juros, ao fato que como seu pai era dono de terras e fazia muitos negócios, entre eles empréstimos e era necessários bons conhecimentos aritméticos para resolver os cálculos de juros, conforme cita Soares e Silva (2016) sobre as atividades desenvolvidas pelo seu pai:

> Que arrendava terras e emprestava dinheiro em troca de pagamentos e recebimentos de juros pelos seus favores, Napier se depara com o valor de 2,718281......Ele observa que nos problemas que envolvem juros, quanto mais aumenta os períodos de capitalização obtemos valores ainda maiores" (SOARES e SILVA, 2016, p. 102)

Nessa menção identificamos que se tratavam de juros compostos e sobre a frequência do irracional 2,718281......nos cálculos de Napier, Terra (2017) comenta:

> acredita-se que sua primeira "aparição" se deu em situações práticas no cálculo de juros compostos, no início do século XVII, período em que a efervescência do capitalismo crescia e o volume das transações financeiras aumentava. Na explosão da ganância, mercadores e banqueiros emprestavam e investiam à taxa de juros de mercado, com objetivo de acumular mais riquezas e, indiretamente, oferecer liquidez ao sistema. (TERRA, 2017, online)

Como supracitado no contexto Histórica em seus aspectos socioculturais e geopolíticos, as transformações econômicas provenientes das grandes navegações, promoveram intensa revolução comercial, movimentos financeiros de empréstimos, seguros, financiamentos que demandavam conhecimentos aritméticos mais complexos na busca do lucro/liquidez.

Infere-se que nos cálculos sobre juros provenientes dessas situações eram comuns as constatações do Napier, que os juros aumentavam proporcionalmente aos períodos de capitalização, mas que em determinado momento direcionava ao número 2,718281......, fato que tornar-se-ia o ***e*** (número neperiano ou número de Euler, que veremos posteriormente).

Napier, com a invenção dos logaritmos, deixa contribuições imprescindíveis para os estudos de juros, em especial dos juros compostos. Na transição da Idade Média a Moderna, eclode a Revolução Industrial, o movimento Iluminista, as grandes Revoluções, Francesa e Americana, e sob novo contexto histórico e sociocultural as demandas financeiras e comerciais se tornaram ainda mais complexas e necessárias.

Nessa conjuntura, surge um dos grandes nomes da Matemática **Jacob (Jacques) Bernoulli**[6], que nasceu na cidade suíça de Basiléia em 6 de janeiro de 1655, vindo a falecer no mesmo lugar em 16 de agosto de 1705. Filho de Nicolaus Bernoulli, irmão de Johann Bernoulli e tio de Daniel Bernoulli. De origem belga e fé cristã protestante, foram refugiados da perseguição religiosa do rei espanhol Filipe. Casou-se em 1684 com Judith Stupanus e teve dois filhos.

Por imposição familiar e com muita frustração se formou em Filosofia e Teologia pela Universidade da Basiléia em 1971 e 1976. No entanto, contra a família e apaixonado pela Matemática, estudou Matemática e Astronomia no período universitário, até então não havia referencias de estudiosos nessas áreas pela família Bernoulli, acredita-se que a tradição dos Bernoulli pela Matemática vem a partir dele.

Jacob publicou trabalhos importantes, dos quais ressaltamos: em 1684 sobre o cálculo diferencial em *Nova Methodus pro Maximis et Minimis,* publicado em *Acta Eruditorum;* em 1685 foram dois, um panfleto sobre paralelos da lógica e da álgebra e depois um trabalho sobre probabilidades; em 1687 um de geometria que resultava na divisão de um triângulo em quatro partes por meio de suas perpendiculares; em 1689, um estudo sobre as séries infinitas, a teoria da probabilidade; entre os anos 1682 e 1704 publicou cinco tratados sobre séries infinitas.

Sendo assim, dentre as contribuições à Matemática por Jacob Bernoulli, deve-se: a primeira aparição do termo Integral, o estudo da catenária, a teoria da probabilidade, primeiros usuários de coordenadas polares, a isócrona e também no estudo de séries infinitas e o descobrimento do número $\boldsymbol{e}$.

Segundo O'Connor e Robertson (2001) o número $\boldsymbol{e}$ foi descoberto por Jacob quando ele estudava juros compostos e não logaritmos, dos estudiosos dos trabalhos de Napier, conforme citam:

> Talvez surpreendentemente, uma vez que este trabalho sobre logaritmos chegou tão perto de reconhecer o número $\boldsymbol{e}$, quando $\boldsymbol{e}$ é "descoberto" pela primeira vez, não é através da noção de logaritmo, mas sim através de um estudo de juros compostos. Em 1683 Jacob Bernoulli olhou para o problema dos juros compostos e, ao examinar os juros compostos contínuos, tentou encontrar o limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ com *n* tende ao infinito. (O'CONNOR e ROBERTSON, 2001, on-line)

[6] *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Jacob/*
https://en.wikipedia.org/wiki/Jacob_Bernoulli

Ainda de acordo com os estudos de O'Connor e Robertson (2001) completam que Jacob fez esse processo através do teorema binomial para mostrar que seu limite estava entre 2 e 3, sendo essa portanto, a primeira aproximação do número ***e*** e ainda, que o foi determinado via processo de limitação.

O problema de juros compostos em questão, implicaria na inquietação em adquirir o máximo de juros em uma aplicação de empréstimo. Percebeu-se que conforme iria sendo diminuindo os períodos de capitalização maiores seriam os juros adquiridos nessa suposta aplicação.

A questão apresenta um empréstimo de $1,00 a ser pago ao final de 1 ano sob os juros de 100% ao ano, o que ocasionaria um montante de $2,00 de acordo com a aplicação do exponencial $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pelo capital emprestado. Ao passo que se esse processo ocorresse duas vezes ao ano, com período semestral, $1,00 emprestado resultaria a cada semestre em $1,5 que ao quadrado, seria $ 2,25.

Continuando o processo, agora com período trimestral, a cada trimestre o montante resultante seria $1,25, que em quatro períodos, seria 1,25 a quarta potência, que resultaria ao final de um ano, o total de $ 2,4418....a percepção que ao fato que valor aplicado fosse calculado e somado em períodos ainda menores ocasionaria maiores lucros, inferiu o questionamento: e se tivéssemos períodos de capitalização na forma mensal, semanal, diário, ou ainda em horas e segundos, qual seria o mais rentável?

Numa forma didática apresentaremos o quadro 3 com os montantes resultantes desses períodos:

Quadro 3: Aplicação da série exponencial em *n* períodos de capitalização

Período	somado e mutiplicado ***n vezes***	Soma acumulada (Montante)
ano	1	2,00000
semestre	2	2,25000
trimestre	4	2,44141
mensal	12	2,61304
semanal	52	2,69260
diário	360	2,71452
hora	8640	2,71812
minuto	548400	2,71828
segundo	31104000	2,71828

Fonte: Adaptado de O'CONNOR e ROBERTSON (2001)

Dessa forma, Jacob concluiu que em períodos de capitalização muito pequenos o resultado tendia ao mesmo valor e assim por meio de um problema de juros compostos, formado de series infinitas de equações exponenciais, foi encontrado o número neperiano, ou o e. Mais tarde, Euler iria ampliar sua aproximação e ainda contribuir com outros avanços sobre esse objeto, que será apresentado nesse recorte.

Sobre esse período cronológico, sec. XVIII, já tínhamos a ciência do uso dos juros compostos em diversas situações comerciais, ocasionadas pelas mais diversas razões. Notório identificar que ao longo do processo investigativo os estudiosos de Matemática administravam o avanço de suas descobertas com demonstrações cada vez mais organizadas ao passo que a sua refutação ou corroboração não fosse uma tarefa fácil.

Os grandes matemáticos orgulhavam-se de suas publicações, determinadas em rigor matemático. Sobre isso, Clairaut, trouxe suas contribuições aos juros, justamente contrapondo a esse roteiro, que mais tarde, conjunto aos demais estudos existentes, congratulou Euler a ampliação do estudo de juros compostos, aproximada da literatura atual da Matemática Financeira, inclusive do ensino na educação básica.

Alexis Claude de Clairaut[7] (Figura 8), nasceu em 13 de maio de 1713, em Paris, donde também veio a falecer em 17 de maio de 1765. Foi o único filho dos vinte do casal Jean-Baptista Clairaut e Catharine Petit, que chegou a vida adulta.

Figura 8: Foto de Alexis Claude de Clairaut

Fonte: *https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a0/Alexis_Clairault.jpg*

[7] As referências biográficas descritas foram catalogadas dos sites: *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Clairaut/ ; https://pt.wikipedia.org/wiki/Alexis_Claude_de_Clairaut; https://www.somatematica.com.br/biograf/clairaut.php; https://clube.spm.pt/news/1166*

Seu pai, Jean-Baptista professor de matemática, alfabetizou Clairaut com *Os Elementos de Euclides* e desde cedo mostrou ser prodígio matemático: aos 10 anos estudou Cálculo, aos 13 anos publicou seu 1° trabalho matemático intitulado “*Quatre problèmes sur de nouvelles curbes”* (Quatro problemas sobre novas curvas) para a Academia de Paris e aproximadamente aos 16 anos publicou o seu 1° Tratado intitulado *"Research on Double Curvature Curves"* (pesquisa sobre curvas de dupla curvatura) que lhe rendeu sua entrada prematura à Academia de Ciências em 1731.

Em 1734 viajou a Basiléia onde estudou meses com Pierre Louis Maupertuis, 15 anos mais velho, e Johan Bernoulli, irmão de Jacob Bernoulli, supracitado. Em 1736 foi a Lepônia com Maupertius e Celsius para montar uma equipe para realizarem as medições dos arcos meridianos em diferentes latitudes com o objetivo de resolver a controvérsias geradas a partir dos estudos de Newton em decorrência da Lei da atração universal (1666).

Clairaut teve como amigos intimos, que lhe rendeu parceria acadêmica, destaque a Maupertuis , Voltaire, Samuel König e du Châtelet, essa última, a duquesa de Châtelet, cujas contribuições de Clairaut foram essenciais ao seu trabalho, e que também foi publicado por ele.

Entre 1733 a 1743 fez várias publicações a destaque de “*Sur quelques questions de maximis et minimis”.* Em 1734, estudou equações diferencias, das quais ficou conhecidas como “Equações diferenciais de Clairaut”. Nesse intervalo publicou duas obras que merece nosso destaque.

Em 1739 publicou trabalhos de Cálculo Integral, provando a existência de fatores para a resolução de equações diferenciais de primeira ordem. O livro “Elementos da Geometria” foi publicado em 1741, com destaque a forma de escrever, na sua metodologia de apresentar os conteúdos matemáticos, conforme mostra a Figura 9:

Figura 9: Trecho traduzido de Clairaut

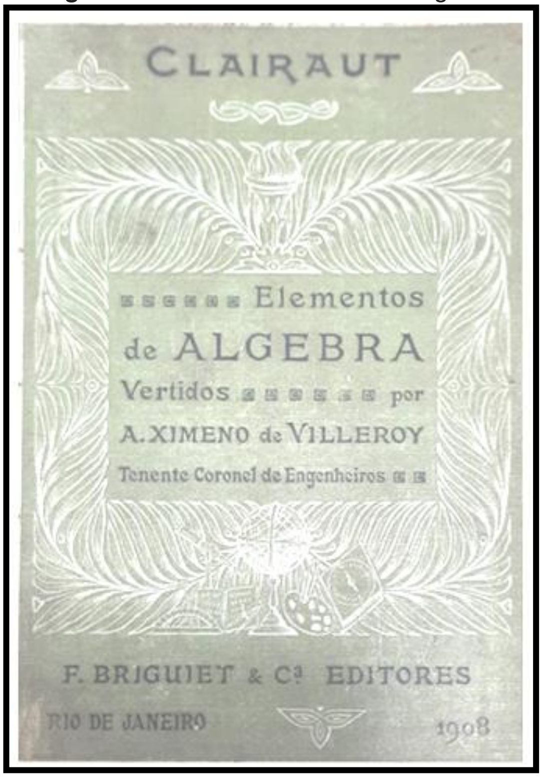
Pretendia voltar ao que poderia ter dado origem à geometria; e tentei desenvolver seus princípios por um método natural o suficiente para que se pudesse supor que fosse o mesmo dos primeiros inventores da geometria, tentando apenas evitar quaisquer passos falsos que eles pudessem ter que dar...

Fonte: *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Clairaut/*

Essa proposta não era vista com bons olhos pelos estudiosos, com severas críticas de D'Alembert, pois considerava que o rigor matemático deveria ser usado metodologicamente para tal, e que a forma como Clairaut desenvolveu sua obra não era cabível numa obra matemática.

No entanto, Clairaut volta a repetir a mesma forma de produção que ele publicou em 1749, intitulada *Os Elementos da Álgebra*. Uma cópia dessa obra está em língua portuguesa, foi traduzida pelo militar A. Ximeno de Villeroy para compor-se como livro didático nas escolas brasileiras do final do século XIX, sobre o militar mencionaremos consequentemente. Segue a figura 10 com a apresentação do livro descrito.

Figura 13: Livro Elementos da Álgebra



Fonte: Clairaut (1908)

Essa publicação, em efeito provocou muitas críticas de matemáticos importantes da época, como dito, pela forma como o autor tratou os objetos matemáticos e desenvolveu seu conteúdo: "ele não apresenta nenhum teorema, justamente por que sua intenção é tratar as regras de Álgebra em ordem semelhante a como eram tratadas pelos inventores" (SOARES e SILVA, 2016, p.103).

Na figura 11, segue a imagem do prefácio desse livro e a forma como ele apresenta o processo de estudo e o desenvolvimento dos objetos matemáticos trabalhados nessa obra.

Figura 11: Prefácio do livro Elementos da Álgebra

PREFACIO

Nesta obra eu me propuz seguir o mesmo methodo empregado nos meus Elementos de Geometria : Procurei dar as regras de Algebra em ordem tal que pudesse haver sido a dos inventores. Nenhuma verdade é aqui apresentada sob a fórma de Theorema. Todas ao contrario, parecem haver sido descobertas pelos esforços exigidos pela solução dos problemas que a necessidade ou a curiosidade nos fizerão abordar.

Problemas uteis ao commercio, taes como aquelles em que se trata de dividir certas sommas entre differentes pessoas na razão de suas entradas ou segundo outras convenções feitas pelos interessados; regras de liga, etc. Taes são os problemas que eu supponho haver occupado os primeiros Algebristas.

Fonte: Clairaut (1908)

O método proposto pelo autor vai de encontro aos matemáticos, como D'Alembert, que apresentavam e acreditavam como sendo a forma de escrever academicamente, enfatizando o rigor matemático, no entanto, Clairaut, não dispensou o rigor matemático simplesmente, seu intuito era fazer a descoberta acontecer, e ainda, teve a preocupação didática de apresentar a álgebra numa forma que estreitasse o seu entendimento junto aos interessados.

Na figura 12, em suas palavras Clairaut apresenta essa indagação:

Figura 12: Apresentação didática de juros compostos por Clairaut

Fallo na segunda parte das equações do segundo gráo ; um problema em que se trata de juros compostos me conduz a uma equação desta especie ; eu a escolhi de modo a dar por suas duas soluções, dois numeros positivos, afim de mostrar melhor como dois numeros differentes resolvem o mesmo problema. Procedi assim temendo que os principiantes, que voluntariamente não considerão as raizes negativas como verdadeiras soluções, acreditassem que o problema não tinha realmente senão uma solução.

Fonte: Clairaut (1908)

Nesse trecho fica evidente a preocupação didática de apresentação do conteúdo de modo que o seja compreensível e não limitado a situações que privilegiasse alguns estudiosos, mas na perpetuação desses.

E ainda,

> Clairaut utiliza em seu livro a aritmética com questões práticas do dia a dia que envolvem Álgebra, sem se preocupar com o rigor matemático, explícito em demonstrações. De um modo muito didático, ele utiliza os juros em seu livro. (SOARES e SILVA, 2016, p. 103)

Conforme referem Soares e Silva (2016), Clairaut traz o objeto juros no segundo capítulo de seu livro mencionado para desenvolver a resolução de equações do 2º grau e para tanto, ele introduz um problema, de forma que ele generaliza a uma equação n-ésimo grau, conforme apresentamos seu enunciado na figura 13.

Figura 13: Problema de juros compostos proposto por Clairaut

I.

Tendo um homem empregado certa quantia a *em um negocio que lhe causa prejuizo, dezeja retirar-se desde o primeiro anno ; porém tendo perdido a occazião, e não se offerecendo outra senão no segundo, no terceiro, ou em geral, no anno* n, *elle reconhece que o capital está diminuido do que era no fim do primeiro anno da quantia* b. *Pede-se a taxa do prejuizo annual.*

Problema que, no caso geral, abrange questões de um grão qualquer.

Fonte: Clairaut (1908)

Para explicar esse problema de resolução de uma equação de 2º grau que poderia abranger qualquer grau, conforme descrito nas suas anotações, ele usa a situação de juros compostos pertinente ao contexto de aplicação de modo que introduz as variáveis para auxiliar em suas explicações.

Inicialmente Clairaut apresenta como x, a variável que representa o valor procurado, logo, o prejuízo sobre o capital de 100£ ao final do primeiro ano seria a expressão resultante da seguinte proporção:

$$100 : 100 - x = a : a\frac{100 - x}{100}$$

Clairaut busca encontrar o quarto termo da proporção, que indicaria a quantia que “a” ficaria reduzido ao final do primeiro ano de prejuízo. Assim, ele faz o seguinte raciocínio:

$$100 : 100 - x = a : a\frac{100 - x}{100}$$

Organizando a proporção na forma racional, teremos:

$$\frac{100}{100-x} = \frac{a}{a\left(\frac{100-x}{100}\right)}$$

O produto dos termos dos meios por extremos, implica que:

$$100 \,.\, a\left(\frac{100 - x}{100}\right) = a\,.(100 - x)$$

$$a\left(\frac{100 - x}{100}\right) = \frac{a\,.(100 - x)}{100}$$

$$a\left(\frac{100 - x}{100}\right) = \frac{a\,.100 - a\,.x}{100}$$

$$a\left(\frac{100 - x}{100}\right) = \frac{a.100}{100} - \frac{a.x}{100}$$

$$a\left(\frac{100 - x}{100}\right) = a - \frac{a.x}{100}$$

$$a\left(\frac{100 - x}{100}\right) = a\left(1 - \frac{x}{100}\right)$$

Assim, o quarto termo é:

$$a\left(1 - \frac{x}{100}\right)$$

Que representa o prejuízo no primeiro ano. Em seguida Clairaut apresenta a proporção decorrente do segundo ano de prejuízo.

$$100 : 100 - x = a\frac{(100 - x)}{100} : a\frac{(100 - x)^2}{10000}$$

Utilizando o mesmo raciocínio, o quarto termo ficaria reduzido a:

$$a\frac{(100-\ x)^2}{10000}=\ a\ \left(1-\ \frac{x}{100}\right)^2$$

E se fosse ao terceiro ano de prejuízo, o quarto termo seria:

$$a\ \left(1-\ \frac{x}{100}\right)^3$$

Logo, Clairaut demonstra que passados n períodos anuais, o capital ficaria reduzido ao produto do capital a pela expressão $\left(1-\ \frac{x}{100}\right)$ elevado a n períodos.

Logo:

$$a\ \left(1-\frac{x}{100}\right)^n$$

Portanto, algo muito próximo da literatura atual para cálculo de montante de juros composto da unidade de Matemática Financeira oferecida nas escolas. A proposta de apresentar o contexto de equações de 2° grau numa aplicação necessária à época mostra o quão visionário foi Clairaut no trato matemático tanto à Álgebra, pela proposta metodológica dos “inventores”, quanto à didática, conforme a aplicação de um problema sobre juros compostos para desenvolver o contexto pretendido e sobre o próprio conteúdo de juros pela apresentação algébrica dele,

> A sequência apresentada para a resolução do problema de juros determina uma passagem da aritmética para a álgebra, ou seja, Clairaut mostra como fazer a relação entre as grandezas envolvidas nesta situação-problema, expressando a solução por meio da linguagem simbólica. Sendo assim, ele mostra que da necessidade de manipular símbolos é que surgem as operações algébricas. (SOARES e SILVA, 2016, 106)

Portanto, Clairaut apresenta uma quebra de paradigma aos estudos da época, tanto na forma de apresentação, quanto no trato desse conhecimento, evidenciado em Soares e Silva (2016) ao ensino dos juros compostos. Para completar as contribuições desse recorte, o também aluno de Johan Bernoulli, Euler traz suas contribuições essenciais ao objeto matemático.

Em 1742 publicou um trabalho de Dinâmica e em 1743 a *“Theoria de la figura da Terre”* (Teoria da figura da Terra), que comprova que a Terra estava achatada nos Pólos e que o formato de um corpo em rotação e que sofria os efeitos da gravidade e da força centrifuga, considerado o livro mais importante nos estudos referente a Hidrostática.

Em 1745 contou com o apoio de Euler para o problema dos três corpos, em particular da órbita da Lua, que foi primordial para ele apresentasse as conclusões de seu estudo, que o quadrado da inversa era falsa, em 1747 à Academia de Paris.

Em 1752 publicou o trabalho Teoria da Lua que conjunto a outros estudos determinou a passagem do cometa Halley em 1759, tamanha façanha o igualou ao "novo Thales" e ainda sugeririam o nome de Clairaut para batizar o cometa.

Clairaut, faleceu aos 52 anos de uma breve doença (não identificada), no auge de suas contribuições acadêmicas, recebeu diversas condecorações e foi eleito para: Royal Society de Londres e nas Academias de Berlim , São Petersburgo, Bolonha e Uppsala.

Leonhard Paul Euler[8], nasceu em 15 de abril de 1707 na Suíça e faleceu em 18 de setembro de 1783, na Rússia, filho de Marguerite Brucker e Paul Euler, foi um dos grandes matemáticos da história daquele século e para a Matemática.

Euler viveu quase toda sua vida na Rússia e na Alemanha, casou-se em 1734 com Katharine Gssel com quem teve 13 filhos. Em 1735 acometido de sérios problemas de saúde, especialmente na visão e mesmo cego não deixou de produzir artigos matemáticos semanalmente. Fez importantes descobertas em várias áreas da matemática como o cálculo e a teoria dos grafos, também na física e astronomia.

Segundo O'Connor e Robertson (1998) o pai de Euler, Paul Euler e Johann Bernoulli moraram com Jacob Bernoulli o que facilitou sua transição na universidade e aos estudos que se dedicou. Aos 14 anos quando entrou na Universidade em 1720 foi aluno de Johann Bernoulli que logo identificou suas qualidades acadêmicas na área da Matemática e em 1723 concluiu seu mestrado em Filosofia.

Naquele mesmo ano, por incentivo do pai e contra vontade, iniciou seus estudos em Teologia, mas foi encaminhado à Matemática por intermédio de Johann Bernoulli, concluindo em 1726 na Universidade de Basel, donde estudou muitas obras matemáticas a citar: Descartes, Newton, Galileu, Jacob Bernoulli, Tayllor, Hermann.

Euler promoveu grandes contribuições à Matemática e desse acervo, destaque para seus estudos em geometria analítica moderna e trigonométrica, sendo o primeiro a usar *sin* e *cos* entre outros; no Cálculo, com as equações diferenciais e cálculo

[8] Ibdem, *https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler*

integral e também na Teoria dos Números; estudou em 1765 com Clairaut sua Teoria Lunar, da mecânica do continuo.

Ressaltamos ainda suas notações matemáticas, suficiente e importantes para os estudos da área conforme apresentamos no quadro 4:

Quadro 4: Algumas Notações de Euler

ANO	NOTAÇÃO	
1734	$f(x)$	estudo de funções
1727	e	número de Euler
1777	i	representar a $\sqrt{-1}$
1755	$\prod$	pi
1755	$\sum$	soma
1755	$\Delta y \ \ e \ \Delta^2 y$	diferenças infinitas

Fonte: O'Connor e Robertson (1998), adaptado pela autora.

Aqui ressaltamos ao número de Euler, destaque para a equação da Identidade de Euler e para nossa pesquisa o e também batizado como Número de Euler, mas como vimos, identificado por Napier, sem, contudo, compreender a grandeza de sua descoberta, feito de Jacob Bernoulli, supracitado. Mas, foi Euler que foi além desses estudos.

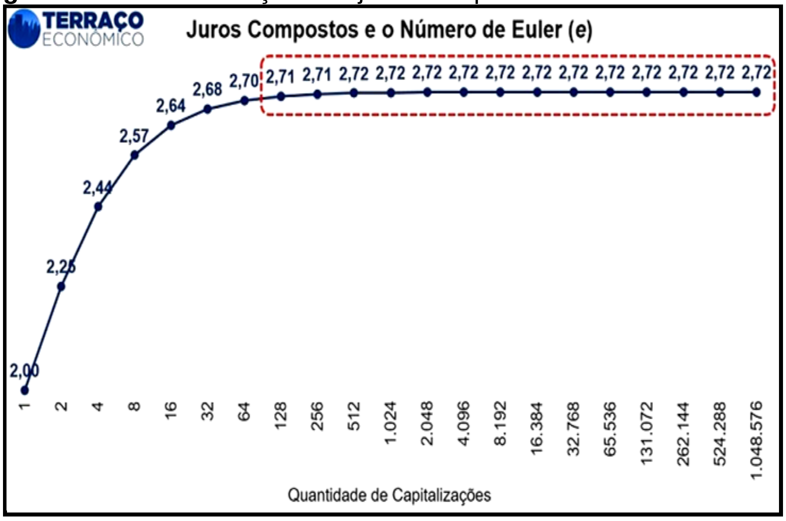
Euler também constatou que aumentando os períodos de capitalização base dos cálculos de juros compostos, o resultado num primeiro momento aumentava consideravelmente, no entanto este estagnava-se a um valor padrão cujo períodos eram muito curtos.

Assim, Euler chegava a essa conclusão no estudo de séries infinitas, de tal forma que o valor limite determinado por essa soma era o número e, conforme a expressão:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Assim, o fator multiplicador de juros se aproximava de um número fixo, aproximadamente 2,71828....., conforme demonstra o gráfico na figura 14:

Figura 14 – Demonstração dos juros compostos e o Número de Euler



Fonte: Money times, disponível em: *https://www.moneytimes.com.br/juros-compostos-e-o-numero-de-euler-e/*

Sendo assim, o número e também passou a se chamar número de Euler. Em 1840, Euler publica “Elementos da Álgebra” e apresenta o conceito de juros com a denominação “interest”, que traduzido do inglês quer dizer interesse, a mesma usada pelos romanos. Nessa obra ele se detém aos juros compostos e de acordo com Soares e Silva (2016), o “Cálculo do interesse” é apresentado pelo autor no capítulo de razão e proporção com uma aplicação direta da regra de três.

O problema envolveria uma aplicação de 100 libras sobre uma taxa anual de 5 por cento sobre um capital a, Euler chega a seguinte proporção:

$$\frac{105\,.\,a}{100} = \frac{21}{20}a = \frac{20}{20}a + \frac{1}{20}a = a + \frac{1}{20}a$$

E assim ele deduz que ao final do período anual a soma do capital com a sua vigésima parte seria o montante daquele período, e se quisesse o montante referente ao final do segundo ano, adicionaria a esse resultado a sua vigésima parte, de modo que, fazendo esse processo, subsequentemente, conseguiria calcular os sucessivos aumentos anuais do capital a para qualquer ano.

Desse modo, Euler completa que para o interesse de 5 por cento ao ano a expressão que representa o montante de juros compostos a uma capital a depois de n períodos de aplicação anuais seria a expressão:

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{n}\,.\,a$$

E que mudando o interesse, converteria a razão simplificada do exemplo.

Numa forma de generalizar o pensamento de Euler com relação ao tratamento do montante de um empréstimo de capital *a* e cuja taxa seria representada por *x*, teríamos:

$$a + \frac{x}{100}a = a\left(1 + \frac{x}{100}\right)$$

E tomando o mesmo raciocínio de que ao final de cada período, o montante seria a soma do capital com a parte correspondente a taxa aplicada, o montante para dois, três ou quatro períodos de capitalização seriam representados respectivamente assim:

$$a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 \; ; \; a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^3 \; ; a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^4$$

Logo numa generalizando a n-ésimos períodos de capitalização teríamos:

$$a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^n$$

Se compararmos essa expressão aos estudos de Clairaut, percebemos que a diferença entre as duas expressões está no fato de que o primeiro ser um montante revelador de prejuízos, logo descontos sucessivos e o segundo apresentado por Euler, ser um montante de acréscimos sucessivos, decorrentes do interesse de quem empresta um capital e tem a pretensão de receber um prêmio ao final do processo, ambas próximas da literatura apreciada pela educação básica ao ensino.

Sobre as contribuições dos logaritmos presentes da literatura do desenvolvimento do cálculo de juros composto proveniente dos estudos de Euler, não identificamos artefatos que demonstrasse tal fato, no entanto, encontramos numa literatura dos irmãos Nicolau D’Ambrosio e Ubiratam D’Ambrosio (1980) uma demonstração da aplicação de logaritmos, por meio da tábua de logaritmos, para a resolução de problemas de juros composto, conforme apresentamos na figura 15.

Figura 15: Aplicação logarítma aos juros compostos

Então: $\boxed{M = a(1+i)^n \quad \text{ou} \quad M = au^n}$

será o montante do capital inicial a, à taxa unitária i, no fim de n períodos.

A aplicação da fórmula se fará com o emprego de

1) *logaritmos*
2) *tábuas financeiras* (apêndice)
3) *desenvolvimento de* $(1+i)^n$ *pelo binômio de Newton*

Aplicando *logaritmos*, a fórmula se transformará em

I) $\log M = \log a + n \log(1+i)$ ou $\log M = \log a + n \log u$, donde:

II) $\log a = \log M - n \log(1+i)$ ou $\log a = \log M - n \log u$

III) $n = \dfrac{\log M - \log a}{\log(1+i)}$ ou $n = \dfrac{\log M - \log a}{\log u}$

IV) $\log(1+i) = \dfrac{\log M - \log a}{n}$ ou $\log u = \dfrac{\log M - \log a}{n}$

APLICAÇÃO: *Coloquei Cr$ 2.000,00 em um banco, a juros compostos de 6% a.a., capitalizados anualmente. Quanto receberei no fim de 8 anos?*

Aplicando a fórmula: $\log M = \log 2.000 + 8 \log 1{,}06$

ou

$$\begin{array}{lr} \log M = \log 2.000 & = 3{,}301.0 \\ \quad + 8 \log 1{,}06 & = 0{,}202.4 \\ \hline \log M & = 3{,}503.5 \\ \therefore \quad M & = 3.187{,}67 \end{array}$$

O montante procurado será de Cr$ 3.187,67.

Fonte: D'Ambrosio e D'Ambrosio (1980, p. 176)

Essa aplicação mostra o quanto foi importante o estudo dos logaritmos de Napier a Euler, mediante as dificuldades de cálculos demasiadamente grandes e a falta de tecnologias suficientes na época, Napier proporcionou a Euler o suporte necessário para ampliar a resolução de problemas de juros compostos.

Logo, assim como Clairaut, Euler também apresenta juros compostos num formato didático simples e com propostas dedutivas, ambos reúnem os elementos algébricos às contribuições aritméticas e algébricas anteriores, especialmente de Tartaglia, Napier e Jacob, convertendo assim, resoluções de situações problemas do contexto Histórico, sociocultural e geopolítico nas contribuições pertinentes do contexto Epistemológico, técnico e científico desse recorte.

Convém acrescentar a apresentação de dois personagens brasileiros que apesar de não estarem diretamente ligados à construção do conceito dos juros, foram importantes para agremiar informações à história do ensino dos juros nas escolas brasileiras: Luiz Celestino de Castro e A. Ximeno de Villeroy, o primeiro autor do livro “Lições de Arithmetica” publicado em 1884, utilizado na Escola Militar do Rio Grande do Sul aonde lecionava.

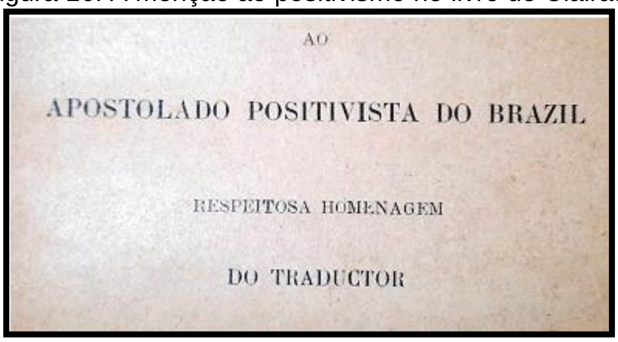
Nesse, **Luiz Celestino,** militar brasileiro e professor da região sul do Brasil, apresenta juros conforme Euler, chamando de interesse e faz críticas quanto às taxas de juros aplicadas pelo governo, conforme Soares e Silva (2016) foram os aspectos econômicos, políticos e morais apresentados aos juros que tornaram a obra interessante.

Acorda citar que no alcance das literaturas assistidas, não identificamos informações pessoais de Luiz Celestino, infelizmente nossas pesquisas apontavam a um homônimo e para não causar problemas de identidade, não iremos apresentar aqui maiores detalhes de sua biografia.

Por último, o tenente coronel da Aeronáutica, **A. Ximeno de Villeroy**[9] , nasceu no Rio Grande do Sul em 1862 e faleceu no Rio de Janeiro em 1942, militar-positivista, foi o 1º governador do Amazonas e crio o município de Boa Vista do Rio Branco, atual Boa Vista capital de Roraima.

Villeroy que fez a tradução da obra de Clairaut, analisada nessa pesquisa, publicada-a em 1908 editada no Rio de Janeiro, cuja contracapa menciona o positivismo (Figura 16) referência comentada na revisão de literatura no trabalho de Gouveia Neto e Gouveia (2017), que corrobora com a menção de poder pelo saber associada ao positivismo.

Figura 16: A menção ao positivismo no livro de Clairaut


AO

APOSTOLADO POSITIVISTA DO BRAZIL

RESPEITOSA HOMENAGEM

DO TRADUCTOR

Fonte: Clairaut (1908)

[9] *https://pt.wikipedia.org/wiki/Augusto_Ximeno_de_Villeroy*

Com as considerações dos personagens brasileiros aqui citados e suas contribuições no contexto escolar, que contemplam a história dos juros pela inserção desse conteúdo ao currículo nacional, finalizamos o texto sobre uma história dos juros. Ante o que foi apresentado, enfatizamos que a história dos juros é um contexto amplo e cuja totalidade de elementos não estão exibidos nesse proposto, não identificados nas literaturas dessa pesquisa e pela própria ação dinâmica da história.

3.2. AS ATIVIDADES SOBRE JUROS

Como dito, as atividades apresentadas nesse produto educacional estão presentes em Medeiros (2023), aportadas sob as contribuições de Chaquiam (2022) e Mendes (2015) a partir do texto: Uma história dos juros, supracitado integralmente, que emergiu informações importantes para serem convertidas em atividades ao ensino dos juros na educação básica.

Importante enfatizar que as atividades foram construída sob a competência geral prevista na BNCC: de valorizar os conhecimentos "historicamente construídos sobre o mundo [...] e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva" (BRASIL, 2018, p. 9)

E assim, para cada atividade, iremos dispor de uma ficha técnica com os objetivos pretendidos, alinhados a BNCC, o texto-base, as propostas de atividades (questões para exploração do conteúdo) e uma nota ao docente para orientações

3.2.1. Atividade 1 - Juros: de Coadjuvante a Protagonista

Iniciamos a atividade apresentando o objetivo, as competências e habilidades pertinentes previstas na BNCC (2018) para proporcionar ao leitor/professor uma visão geral sobre o que será abordado, seguido do texto-base e questões para o desenvolvimento desta.

Objetivo	Analisar a ideia e os componentes da concepção de juros na história da humanidade e identificar as grandezas que o compõe.

Competência específica	1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda, questões econômicas ou tecnológicas, divulgadas por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
Habilidade	(EM13MAT101) Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas

TEXTO-BASE

Você sabe quando surgiram os juros?

Por volta de 3.500 a.C. na Mesopotâmia, os sumérios tinham o costume de oferecer parte de sua produção à Deusa Inana, responsável pela fertilidade e produção dos campos, essa oferenda era encaminhada aos sacerdotes que emprestavam animais, sementes e arado, além da terra para plantio. Sendo assim, surtia o efeito de uma gratificação pelos meios que proveram à plantação. Mais tarde, os sacerdotes desenvolverem métodos de registros e cálculos para a prestação de contas advindas dessas oferendas.

Provavelmente, pelos sumérios, os Babilônicos incorporam essa prática de oferendas, com uma diferença, sendo o Rei Hamurabi intitular-se o "favorito dos deuses", essa retribuição passaria a ser recebida pelo próprio imposta pela lei, logo o famoso *Código de Hamurabi - "Olho por olho, dente por dente"* tornou-se uma forma de intervenção na economia.

Na Índia, por volta de 1.500 a.C., já se fazia menção dos juros nos *livros védicos*, base das escrituras do Hinduísmo, a Lei descrevia que das quatro castas apenas as duas inferiores poderiam fazer empréstimos. Na Grécia antiga, os juros passaram a ser um problema moral e ético. Os Filósofos Platão, Aristóteles e Plutarco acreditavam que os juros aprisionavam os homens, pois para eles a usura era a pior forma de se ganhar dinheiro.

A princípio o império Romano também era contra a usura e assim, os empréstimos se tornaram um problema ético e religioso. Os juros eram vistos como empréstimos a Deus no judaísmo de Abraão, como tal, justificaria a prática e era visto como forma de servir a Deus, pois pagando suas dividas havia paz. Em contraponto, no Alcorão, O Islamismo via a usura como crime cabível de pena de castigo.

Com o decorrer dos séculos e a organização dos povos em sociedades cada vez mais estruturadas, as relações comerciais ocasionadas por meio do escambo foram se limitando e surgiu a necessidade de criação de uma moeda que promovesse a equivalência de valores para trocas comerciais entre eles.

Assim, no sec. VII a.C. o boi foi a primeira moeda da Grécia antiga; na mesma época, o SAL, era a moeda-mercadoria do Império Romano, donde vem a origem de "salário"; nas Ilhas do Pacifico eram colares de pérola e conchas, na América Central pré-colombiana eram: algodão, cacau, sementes; na China(sec. XVI a XI a. C) dentes ou chifre de animais, depois armas; no Egito faraônico, peças de metais que era determinados pelo peso, que mais tarde na Ásia menor e Lídia, estabeleceram uma moeda de troca fundindo pequenas peças de metal(geralmente ouro e prata), seladas com uma marca oficial de uma autoridade pública, certificando assim o preço e o quilate.

No sec. X, na dinastia de Song houve a introdução do papel-moeda, ao contrário do peso de milhares de moedas, era de fácil transporte, sendo que apenas no sec. XIII foi padronizado e aceito nacionalmente, na Europa, apenas em 1661 o papel-moeda foi introduzido na Suécia. Havia muitas vantagens em usar o papel-moeda: facilitou transações comerciais, empréstimos, contudo ocasionou desvantagens das quais destacavam-se a emissão de impressão de notas sem lastro e consequentemente aumento da inflação.

Logo, o comércio atinge seu auge, os "cambistas" com seus negócios de troca e câmbio de moedas rapidamente aumentaram suas atividades para guardar e emprestar dinheiro, natural, portanto que ele recebesse algum valor pelos serviços prestados, como eles estavam sentados em bancos, ficaram conhecidos como "banqueiros" e no futuro deu origem a palavra "banco". O primeiro banco privado data de 1157 pelo Duque Vitali, em Veneza. Essa rede bancária se aprimorou nos séculos XIII, XIV e XV.

Com a expansão da Igreja Católica, que dominaria toda a Idade Média, eram realizados Concílios para estabelecer regras a prática da usura, ainda vista como um mal à sociedade, porém praticada por todos os povos. No séc. XII era um mal, no séc. XIII era considerado um pecado. Em 1314, no Concilio de Viana foi decretada a expulsão da Igreja aos governantes que praticavam a usura.

Na Idade Média, as expansões marítimas intensificavam as relações comerciais, desenvolveu-se a economia monetária, aumentou as importações, surgiu o Mercantilismo e a Revolução Comercial, ao fato que os empréstimos e a cobrança de juros passaram a ser evidenciados como imprescindíveis a ascenção da época. Assim, na Idade Média, a Igreja católica deixava seu legado, na Europa do sec. XV, mesmo sendo condenável, a usura era praticada com juros exorbitantes com registros de 15%, 25% a 60% ao ano, casos de 200%, não haviam regras.

Ao fim desse último século, destacamos **Nicolo Fontana de Brescia** (1499-1557), mais conhecido como **Tartaglia**, o gago, homem humilde, alfabetizado apenas aos 14 anos, autodidata, o que não o impediu de ser engenheiro e professor de Matemática em cidades italianas. Importante matemático, que dentre suas contribuições à Álgebra, Geometria, publicou em 1556 um tratado intitulado O *Tratado Geral de Números e Medidas*, composto de 17 livros, de onde desenvolveu todas as operações práticas e regras para a arte negociatória e mercantil.

Tartaglia destaca os juros como "mérito", "merecimento" ou "prêmio", com a ideia de que este seria pago no fim de uma determinada época para saldar algo. Assim ele descrevia:

A — "100 ducados ao final de um ano me retornariam 105 ducados, sendo que aqueles 5 ducados se diriam mérito dos ditos 100 ducados"

B — "100 ducados ao final do mencionado tempo de um ano me retornassem 110 ducados, os 10 ducados que sobrariam constituiriam o prêmio dos ditos 100 ducados"

C — "Suponhamos, 80 ducados, me retornassem 87 ducados ao final de 9 meses"

Ele ainda apresenta seu conceito de juros em outras moedas daquela época:

"45 soldi ganharão 15 soldi em 7 meses"
"45 duados merecerão 15 duados no tempo de 7 meses"
"45 groffi ganharão ou merecerão 15 groffi em 7 meses"
"45 fiorini ganharão ou merecerão 15 fiorini no mencionado tempo"

Tartaglia deixa um legado que entre suas contribuições, desenvolveu a ideia de juros aplicada a situações das necessidades daquela época, ficando conhecido por escrever a melhor aritmética do sec. XVI entre operações numéricas e aritmética mercantil.

ATIVIDADE

Questão 1 – De acordo com as informações do texto, como a ideia de juros veio se construindo ao longo da história da humanidade, enumere algumas?

Questão 2 – Como você definiria juros segundo o texto?

Questão 3 – O texto traz menções de algumas situações no contexto financeiro (moeda, juros, bancos, entre outros), faça uma enumeração delas na forma crescente diga em poucas palavras o que você compreendeu da evolução dessas situações.

Questão 4 - O texto mostra três exemplos aonde Tartaglia apresenta o conceito dos juros. Faça uma análise desses exemplos ressaltando as grandezas que compõem seus cálculos.

Questão 5 – Qual a intenção pretendida por Tartaglia quando apresenta juros em várias moedas da época?

NOTA DIDÁTICA AOS PROFESSORES

As Questões 1, 2 e 3 buscam nos objetivos estabelecidos a intenção de apresentar juros em seu contexto de construção ao longo da história e inferir que o conceito de juros existiu antes mesmo de taxas, moedas, bancos, desmistificando o que é apresentado em livros da literatura atual, que os juros antecederam e foram o precursor de toda a Matemática Financeira.

A Questão 4 pretende avaliar se os estudantes já identificam as grandezas que representam o capital, taxa, juros e montante. E a questão 5, se eles identificam que independente da moeda a ser trabalhada, o conceito de juros é o mesmo.

3.2.2. Atividade 2 - o número *e* nos estudos de Napier a Jacob Bernoulli

Iniciamos a atividade apresentando o objetivo, as competências e habilidades pertinentes previstas na BNCC (2018) para proporcionar ao leitor/professor uma visão geral sobre o que será abordado, seguido do texto-base e questões para o desenvolvimento desta.

Objetivo	Identificar o número *e,* por meio do uso de planilha eletrônica, de modo a constatar que há um limite de juros em períodos de capitalização muito curtos.
Competência específica	2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
Habilidade	(EM13MAT203) Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões (EM13MAT303) Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juros compostos, destacando o crescimento exponencial, cada questão, com seus respectivos objetivos.

TEXTO-BASE

No sec. XIII com a impulsão das grandes navegações e da Revolução comercial, houve grande procura por financiamentos para custear essa realidade econômica, intensificando no sec. XV, provavelmente foi-se necessário estudar e organizar ainda mais os juros para contemplar os anseios da época.

John Napier, (1550 – 1617), diferente dos demais personagens com influência na matemática, o inventor dos logaritmos, desenvolveu seus estudos por meio de interesses pessoais. Há indícios que o gosto pelos logaritmos também foi impulsionado pelos juros, ao fato que como seu pai era dono de terras e fazia muitos negócios, como empréstimos era necessários bons conhecimentos aritméticos para resolver os cálculos de juros, conforme cita Soares e Silva (2016) sobre as atividades desenvolvidas pelo seu pai:

> Que arrendava terras e emprestava dinheiro em troca de pagamentos e recebimentos de juros pelos seus favores, Napier se depara com o valor de 2,718281......Ele observa que nos problemas que envolvem juros, quanto mais aumenta os períodos de capitalização obtemos valores ainda maiores” (SOARES e SILVA, 2016, p. 102)

Nessa menção identificamos que se tratavam de juros compostos e sobre a frequência do irracional 2,718281......nos cálculos de Napier, Terra (2017) comenta:

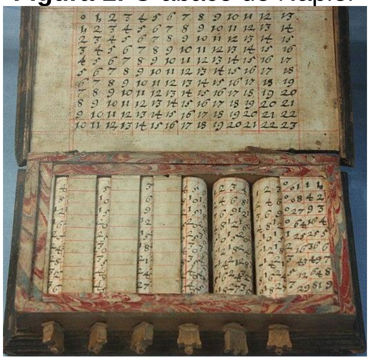
> acredita-se que sua primeira “aparição” se deu em situações práticas no cálculo de juros compostos, no início do século XVII, período em que a efervescência do capitalismo crescia e o volume das transações financeiras aumentava. Na explosão da ganância, mercadores e banqueiros emprestavam e investiam à taxa de juros de mercado, com objetivo de acumular mais riquezas e, indiretamente, oferecer liquidez ao sistema. (TERRA, 2017, online)

No início do sec. XVII, John Napier revelou sua invenção dos logaritmos, destacando-os como instrumento de cálculo com o poder de reduzir multiplicações e divisões a simples operações de soma e subtração” (PIPPA, 2014, p. 9). E completa,

> Por volta de 1590, Napier mostrou tem um grande conhecimento da correspondência entre progressões aritméticas (PA) e geométricas (PG). Ele observou que o produto ou a divisão de dois termos da PG estava associado à soma ou a diferença dos respectivos termos da PA. Partindo dessa correspondência criou os logaritmos. (PIPPA, 2014, p.11)

Desse fundamento, Napier dedica vintes anos de sua vida ao estudo dos logaritmos, e mesmo sem ser da área acadêmica, suas contribuições tiveram importância mundial, pois tanto auxiliou em demais estudos como solucionou inúmeros problemas ocasionados pelas limitações tecnológicas da época. Destaque também aos equipamentos construídos por Napier que o auxiliaram nos cálculos aritméticos de valores muito altos ou pequenos, conforme mostramos nas figuras 1 e 2, tecnologias construídas artesanalmente com ossos, couro, madeira, que transcenderam ao tempo.

Figura 1: O ábaco de Napier



Fonte: https://proyectoidis.org/abaco-de-napier/

Figura 2: Conjunto de ossos de Napier

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/John_Napier

Esses são alguns exemplos da genialidade de Napier, também conhecido como administrador de tempo, visto que essas tecnologias faziam com que ele ganhasse tempo nos cálculos aritméticos, necessários da época. A inclusão dessas tecnologias agremiou facetas importantes à Matemática.

Na transição da Idade Média a Moderna, eclode a Revolução Industrial, o movimento Iluminista, as grandes Revoluções, Francesa e Americana, e sob novo contexto histórico e sociocultural as demandas financeiras e comerciais se tornaram ainda mais complexas e necessárias.

Nessa conjuntura, surge um dos grandes nomes da Matemática Jacob (Jacques) Bernoulli[10], que nasceu na cidade suíça de Basiléia em 6 de janeiro de 1655, vindo a falecer no mesmo lugar em 16 de agosto de 1705. Filho de Nicolaus Bernoulli, irmão de Johann Bernoulli e tio de Daniel Bernoulli. De origem belga e fé cristã protestante, foram refugiados da perseguição religiosa do rei espanhol Filipe. Casou-se em 1684 com Judith Stupanus e teve dois filhos.

Por imposição familiar e com muita frustração se formou em Filosofia e Teologia pela Universidade da Basiléia em 1971 e 1976. No entanto, contra a família e apaixonado pela Matemática, estudou Matemática e Astronomia no período universitário, até então não havia referencias de estudiosos nessas áreas pela família Bernoulli, acredita-se que a tradição dos Bernoulli pela Matemática vem a partir dele.

Sendo assim, dentre as contribuições à Matemática por Jacob Bernoulli, deve-se: a primeira aparição do termo Integral, o estudo da catenária, a teoria da probabilidade, primeiros usuários de coordenadas polares, a isócrona e também no estudo de séries infinitas e o descobrimento do número $\boldsymbol{e}$.

Segundo O'Connor e Robertson (2001) o número $\boldsymbol{e}$ foi descoberto por Jacob quando ele estudava juros compostos e não logaritmos, o problema de juros compostos em questão, partiu na inquietação em adquirir o máximo de juros em uma aplicação de empréstimo. Ele percebeu que conforme iria sendo diminuindo os períodos de capitalização maiores seriam os juros adquiridos nessa suposta aplicação.

A questão apresenta um empréstimo de \$1,00 a ser pago ao final de 1 ano sob os juros de 100% ao ano, o que ocasionaria um montante de \$2,00 de acordo com a aplicação do exponencial $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pelo capital emprestado. Ao passo que se esse processo ocorresse duas vezes ao ano, com período semestral, \$1,00 emprestado resultaria a cada semestre em \$1,5 que ao quadrado, seria \$ 2,25.

Verificou-se assim, que os juros aumentaram e logo a lucratividade da operação inferiu um questionamento: e se tivéssemos períodos de capitalização na forma trimestral, mensal, semanal, diário, ou ainda em horas e segundos, qual seria o mais rentável?

---

[10] *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Jacob/*
https://en.wikipedia.org/wiki/Jacob_Bernoulli

ATIVIDADE

Questão 1 – De acordo com as informações do texto, qual a percepção que Napier teve do irracional 2,718281.......?

Questão 2 – De acordo com as informações do texto, como Jacob descobriu o número $\boldsymbol{e}$?

Questão 3 – O texto apresenta essa questão sobre juros:

> Um empréstimo de $1,00 a ser pago ao final de 1 ano sob os juros de 100% ao ano, o que ocasionaria um montante de $2,00 de acordo com a aplicação do exponencial $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pelo capital emprestado. Ao passo que se esse processo ocorresse duas vezes ao ano, com período semestral, $1,00 emprestado resultaria a cada semestre em $1,5 que ao quadrado, seria $ 2,25. Verificou-se assim, que os juros aumentaram e logo a lucratividade da operação inferiu um questionamento: e se tivéssemos períodos de capitalização na forma trimestral, mensal, semanal, diário, ou ainda em horas, minutos e segundos, qual seria o mais rentável?

a) Vamos construir uma planilha eletrônica para calcular o montante decorrente das aplicações descritas na questão desde da anual até a capitalização por segundos, com uso da expressão exponencial $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

b) Verifique os juros decorrentes desses períodos de capitalização e verifique qual a mais vantajosa?

c) Qual a sua percepção quanto aos resultados das aplicações de capitalização diária, em horas, em minutos e por segundo?

d) De acordo com o texto o que você pode afirmar quanto aos resultados do item c?

e) De acordo com as informações contidas e desenvolvidas nessa atividade, como você definiria o número $\boldsymbol{e}$**?**

NOTA DIDÁTICA AOS PROFESSORES

Essa atividade tem a pretensão de provocar o ensino do número neperiano $\boldsymbol{e}$ na sua constituição, trazendo parte de sua concepção, ainda dentro da história de juros, pelo seu aspecto histórico-social, pelas necessidades da época e suas aplicações em situações peculiares e presentes na vida das pessoas.

Outro ponto, é permitir aos estudantes a verificação de que há um limite de cobrança de juros, identificando que quanto maiores os períodos de capitalização maior será o lucro, no entanto há situações que esse ganho é praticamente nulo.

Esses são pontos de discussões inerentes as questões 1 e 2. Com relação a questão 3, trouxemos a sugestão do uso da TIC – planilha eletrônica – pela sua popularidade, entretanto, pode ser usada outras tecnologias disponíveis, tais como: *Geogebra, Scratch* e *APP Inventor*.

Diante do exposto, partiremos para a validação desse produto educacional, elaborado mediante os objetivos formalizados nesse estudo para responder a questão de pesquisa e ponderar as considerações deste para o ensino de juros.

3.2.3. Atividade 3 - Os juros por Clairaut e Euler

Iniciamos a atividade apresentando o objetivo, as competências e habilidades pertinentes previstas na BNCC (2018) para proporcionar ao leitor/professor uma visão geral sobre o que será abordado, seguido do texto-base e questões para o desenvolvimento desta.

Objetivo	Apresentar o fator de capitalização de juros compostos nas situações desenvolvidas por Clairaut e Euler, de descontos e acréscimos sucessivos, de modo que os estudantes percebam que são aplicações resultante da subtração ou adição da taxa aplicada na equação proposta.
Competência específica	3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente
Habilidade	(EM13MAT303) Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juros compostos, destacando o crescimento exponencial, cada questão, com seus respectivos objetivos. (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira [...]

TEXTO-BASE

Sobre o sec. XVIII em meio a Revolução Industrial, iluminismo, revoluções Russa, Americana e Inconfidência Mineira, tínhamos a ciência do uso dos juros compostos em diversas situações comerciais, ocasionadas pelas mais diversas razões. Notório identificar que ao longo do processo investigativo os estudiosos de Matemática administravam o avanço de suas descobertas com demonstrações cada vez mais organizadas ao passo que a sua refutação ou corroboração não fosse uma tarefa fácil.

Os grandes matemáticos orgulhavam-se de suas publicações, determinadas em rigor matemático. Sobre isso, Clairaut, trouxe suas contribuições aos juros, justamente contrapondo a esse roteiro, que mais tarde, conjunto aos demais estudos existentes, congratulou Euler a ampliação do estudo de juros compostos, aproximada da literatura atual da Matemática Financeira.

Alexis Claude de Clairaut (Figura 1), nasceu em 13 de maio de 1713, em Paris, donde também veio a falecer em 17 de maio de 1765. Foi o único filho dos vinte do casal Jean-Baptista Clairaut e Catharine Petit, que chegou a vida adulta.

Figura 1: Foto de Alexis Claude de Clairaut

Fonte: *https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a0/Alexis_Clairault.jpg*

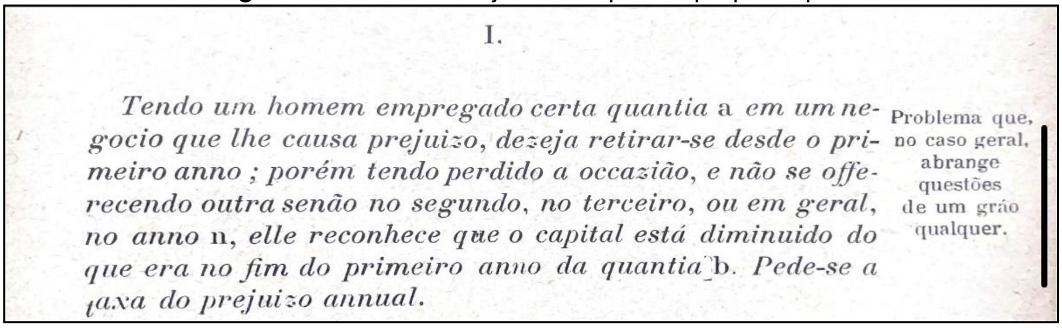
Seu pai, Jean-Baptista professor de matemática, alfabetizou Clairaut com *Os Elementos de Euclides* e desde cedo mostrou ser prodígio matemático: aos 10 anos estudou Cálculo, aos 13 anos publicou seu 1° trabalho matemático intitulado “*Quatre problèmes sur de nouvelles curbes”* (Quatro problemas sobre novas curvas) para a Academia de Paris e aproximadamente aos 16 anos publicou o seu 1° Tratado intitulado *"Research on Double Curvature Curves"* (pesquisa sobre curvas de dupla curvatura) que lhe rendeu sua entrada prematura à Academia de Ciências em 1731.

Ele fez muitas publições entre 1733 e 1743, com destaque a: “*Sur quelques questions de maximis et minimis”*; Em 1734, estudou equações diferencias, das quais ficou conhecidas como “Equações diferenciais de Clairaut”. Nesse intervalo publicou duas obras que merece nosso destaque. Em 1739 publicou trabalhos de Cálculo Integral, provando a existência de fatores para a resolução de equações diferenciais de primeira ordem.

Em 1741 publicou o livro “Elementos da Geometria” e em 1749, a obra, *Os Elementos da Álgebra,* com destaque a forma de escrever e na sua metodologia de apresentar os conteúdos matemáticos, que não era bem vista pelos estudiosos da época como o matemático D’Alembert, pois considerava que o rigor matemático deveria ser imprescindível para uma obra matemática.

Nessa última obra, Clairaut traz o objeto juros no segundo capítulo de seu livro mencionado para desenvolver a resolução de equações do 2º grau e para tanto, ele introduz um problema, de forma que ele generaliza a uma equação n-ésimo grau, conforme apresentamos seu enunciado na figura 2.

Figura 2: Problema de juros compostos proposto por Clairaut



I.

Tendo um homem empregado certa quantia a *em um negocio que lhe causa prejuizo, dezeja retirar-se desde o primeiro anno ; porém tendo perdido a occazião, e não se offerecendo outra senão no segundo, no terceiro, ou em geral, no anno* n, *elle reconhece que o capital está diminuido do que era no fim do primeiro anno da quantia* b. *Pede-se a taxa do prejuizo annual.*

Problema que, no caso geral, abrange questões de um grão qualquer.

Fonte: Clairaut (1908)

Para explicar esse problema de resolução de uma equação de 2º grau que poderia abranger qualquer grau, conforme descrito nas suas anotações, ele usa a situação de juros compostos pertinente ao contexto de aplicação de modo que introduz as variáveis para auxiliar em suas explicações.

Clairaut busca encontrar o quarto termo da proporção, que indicaria a quantia que “a” ficaria reduzido ao final do primeiro ano de prejuízo. Assim, ele faz o seguinte raciocínio:

$$100 : 100 - x = a : a\frac{100 - x}{100}$$

Organizando a proporção na forma racional, teremos:

$$\frac{100}{100-x} = \frac{a}{a\left(\frac{100-x}{100}\right)}$$

O produto dos termos dos meios por extremos, implica que:

$$100\,.\ a\left(\frac{100-\ x}{100}\right)=a\,.\,(100-x)$$

$$a\left(\frac{100-\ x}{100}\right)=\ \frac{a\,.\,(100-x)}{100}$$

$$a\left(\frac{100-\ x}{100}\right)=\ \frac{a\,.\,100-a\,.\,x}{100}$$

$$a\left(\frac{100-\ x}{100}\right)=\ \frac{a.\,100}{100}-\ \frac{a.\,x}{100}$$

$$a\left(\frac{100-\ x}{100}\right)=\ a-\ \frac{a.\,x}{100}$$

$$a\left(\frac{100-\ x}{100}\right)=\ a\ \left(1-\ \frac{x}{100}\right)$$

Assim, o quarto termo é:

$$a\ \left(1-\frac{x}{100}\right)$$

Que representa o prejuízo no primeiro ano. Em seguida Clairaut apresenta a proporção decorrente do segundo ano de prejuízo.

$$100\,:\,100-x=a\,\frac{(100-\ x)}{100}\,:\ a\,\frac{(100-\ x)^2}{10000}$$

Utilizando o mesmo raciocínio, o quarto termo ficaria reduzido a:

$$a\,\frac{(100-\ x)^2}{10000}=\ a\ \left(1-\ \frac{x}{100}\right)^2$$

E se fosse ao terceiro ano de prejuízo, o quarto termo seria:

$$a\ \left(1-\ \frac{x}{100}\right)^3$$

Logo, Clairaut demonstra que passados n períodos anuais, o capital ficaria reduzido ao produto do capital a pela expressão $\left(1 - \frac{x}{100}\right)$ elevado a n períodos.

Logo:

$$a\left(1 - \frac{x}{100}\right)^n$$

Portanto, essa era a forma de calcular o montante de juros composto.

Ainda nesse século, outro grande matemático que também rendeu contribuições aos juros foi **Leonhard Paul Euler**, nasceu em 15 de abril de 1707 na Suíça e faleceu em 18 de setembro de 1783, na Rússia, filho de Marguerite Brucker e Paul Euler, foi um dos grandes matemáticos da história daquele século e para a Matemática, foram muitas suas contribuições, como as notações matemáticas, suficiente e importantes para os estudos da matemática conforme apresentamos no quadro 1:

Quadro 1: Algumas Notações de Euler

ANO	NOTAÇÃO	
1734	$f(x)$	estudo de funções
1727	e	número de Euler
1777	i	representar a $\sqrt{-1}$
1755	$\prod$	pi
1755	$\sum$	soma
1755	$\Delta y \;\; e\; \Delta^2 y$	diferenças infinitas

Fonte: O'Connor e Robertson (1998), adaptado pela autora.

Em 1840, Euler publica "Elementos da Álgebra" e apresenta o conceito de juros com a denominação "interest", que traduzido do inglês quer dizer interesse, mesmo termo usado pelos romanos. O "Cálculo do interesse" é apresentado pelo autor a partir de uma razão e proporção aplicada direta da regra de três.

Euler ressalta um problema que envolve uma aplicação de 100 libras sobre uma taxa anual de 5 por cento sobre um capital a, que chega a seguinte proporção:

$$\frac{105\,.\,a}{100} = \frac{21}{20}a = \frac{20}{20}a + \frac{1}{20}a = a + \frac{1}{20}a$$

E assim ele deduz que ao final do período anual a soma do capital com a sua vigésima parte seria o montante daquele período, e se quisesse o montante referente ao final do segundo ano, adicionaria a esse resultado a sua vigésima parte, de modo que, fazendo esse processo, subsequentemente, conseguiria calcular os sucessivos aumentos anuais do capital a para qualquer ano.

Desse modo, Euler completa que para o interesse de 5 por cento ao ano a expressão que representa o montante de juros compostos a uma capital a depois de n períodos de aplicação anuais seria a expressão:

$$\left(\frac{21}{20}\right)^n .a$$

E que mudando o interesse, converteria a razão simplificada do exemplo.

Numa forma de generalizar o pensamento de Euler com relação ao tratamento do montante de um empréstimo de capital *a* e cuja taxa seria representada por *x*, teríamos:

$$a + \frac{x}{100}a = a\left(1 + \frac{x}{100}\right)$$

E tomando o mesmo raciocínio de que ao final de cada período, o montante seria a soma do capital com a parte correspondente a taxa aplicada, o montante para dois, três ou quatro períodos de capitalização seriam representados respectivamente assim:

$$a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 ;\ a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^3 ;\ a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^4$$

Logo numa generalizando a n-ésimos períodos de capitalização teríamos:

$$a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^n$$

Uma expressão muito peculiar presente nos livros que constam juros compostos da atualidade.

ATIVIDADE

Questão 1 – De acordo com o texto tanto Clairaut como Euler foram grandes matemáticos do sec. XVIII e ambos chegaram na generalização de uma expressão para cálculo do montante.

a) Reescreva a expressão construída por Clairaut?
b) Reescreva a expressão construída por Euler?
c) O que você consegue identificar de diferente entre elas?
d) De acordo com as informações do texto a quê se deve essa diferença?

NOTA DIDÁTICA AOS PROFESSORES

Nosso grande objetivo nessa atividade é apresentar aos estudantes que a expressão algoritma de juros compostos apresentada nos livros didáticos escolares, tem uma história de situações e personagens de modo a inferir mais significado e método de aplicação. Inclusive o professor pode em seguida sugerir algumas questões, dialogando com a Educação Financeira, envolvendo acréscimos e descontos para uso das expressões apresentadas.

4. JUROS: UM TRATAMENTO MATEMÁTICO

Esse capítulo aborda dois alhares no tratamento de juros, o primeiro relacionado ao contexto didático-pedagógico proposto em Chaquiam (2022), que vem a apresentar aos docentes uma visão didática de alguns personagens referidos do texto de juros e que pode ser objeto de trabalho para sala de aula e o segundo, uma versão moderna dos juros como contribuição a docentes e estudantes em Licenciatura Plena em Matemática agregando tais conhecimentos à sua formação.

4.1. UM OLHAR DIDÁTICO SOBRE O ATUAL ENSINO DE JUROS

Uma das propostas do Diagrama de Chaquiam (2022) é recorte didático-pedagógico sobre as informações calhadas na pesquisa que faz uma triangulação entre o personagem central, o objeto de estudo e suas contribuições destacado na visão de um pesquisador, agremiando mais informações sobre o tema escolhido.

De modo que, sendo um trabalho de objetivos educacionais para o ensino, acreditamos ser pertinente explorar esse recorte para elucidar um olhar para fornecer essas contribuições a professore e estudantes de Matemática e agregar mais significado na contextualização do ensino de juros.

O diagrama de juros supracitado apresenta o nome da professora pesquisadora Waléria de Jesus Barbosa Soares, que dentre seus trabalhos sobre História da Educação e do Ensino da Matemática, identificamos dois sobre juros e História da Matemática, em ambos mencionam o nosso personagem central Alexi Claude Clairaut, Soares e Silva(2016) e Soares (2016), fazendo a ponte do olhar didático promovido pelo matemático na forma de apresentar o conteúdo juros.

Clairaut, transcende o rigor matemático para explicar a resolução de uma equação de 2ª grau através de um problema de juros compostos, partindo de uma proporção para explica-lo e generaliza algebricamente para uma equação de n-ésimo grau.

Segundo Soares e Silva (2016), ele não tinha a preocupação de demonstrar apenas a Matemática que academicamente era práxis entre os estudiosos da época, mas provocou didaticamente o desenvolvimento de uma situação problema (juros compostos) a uma forma algébrica (algoritmo da capitalização composta) para fazer a transição da aritmética a álgebra.

O trabalho de Clairaut evidenciando por Waléria emerge a sensibilidade do personagem em empreender uma forma didática para o ensino acessível a quem dele se apropriar, sobressaindo do rigor matemático presente e exigido nas grandes obras matemáticas, isso é corroborado pelo fato dessa obra ter sido traduzida e reproduzida no Brasil para fins educativos ao processo de ensino e aprendizagem.

4.2. UM OLHAR MODERNO DE JUROS

A partir das informações desse texto, bem como as contribuições dos personagens elencados do sec. XVIII, vimos que a concepção de juros é a retribuição (mérito, prêmio, aluguel) pelo uso de um capital, uma quantidade (Q), num determinado período (t) de onde incide uma taxa (i). A imersão de juros compostos proveniente de séries infinitas nos estudos de Jacob Bernoulli e Euler apresenta a seguinte situação:

Numa taxa fixa (i) a variação do capital (Q) está diretamente proporcional a seu tempo, assim a derivada de Q em relação ao tempo pode ser representada desta forma:

$$\frac{dQ}{dt} = \lambda Q$$

De modo que trocando Q pela derivada do tempo, temos:

$$\frac{dQ}{Q} = \lambda dt$$

Integralizando essa equação temos:

$$\int \frac{dQ}{Q} = \int \lambda dt$$

$$ln\,(Q) = \lambda t + k$$

Conforme descrita, a integral da derivada da quantidade é o log natural de Q que é igual a variação do tempo λt somada a uma constante k, de efeito temos que:

$$Q = e^{\lambda t+k}$$

$$Q = e^{k}.e^{\lambda t}$$

Sendo Qo o capital no tempo to, a equação fica:

$$Qo = k'.e^{\lambda o}$$

Desse modo,

$$Qo = k'$$

Logo, substituindo esse valor na equação acima, temos a seguinte generalização:

$$\boldsymbol{Q = Qo.e^{\lambda t}}$$

Portanto, para efeito de estudos em formação de professores temos a equação mencionada como forma de calcular o montante de juros compostos na variação de tempo.

Essas contribuições tem a pretensão de agregar informações, conceitos, olhares, que promovam tanto aos professores de matemática em seus processos formativos, a atualização e incremente de conhecimentos direcionados na história de juros, quanto como mediador no processo escolar, elementos que infiram potencialidades ao ensino.

Com dito, não temos aqui a totalidade de informações históricas, tampouco todos os personagens que contribuíram para a constituição dos juros e sua incorporação como conteúdo escolar, primeiro pelas dificuldades inerentes na identificação de fontes históricas disponíveis e segundo e extremamente relevante, a captação de fatos epistemológicos cronológicos não estarem disponíveis, pela própria ação dinâmica da história.

Portanto, diante do exposto, exploramos conhecimentos preliminares da concepção de juros e no contexto do séc. XVIII informações validas que tem o objetivo de fornecer uma história sobre juros a luz da metodologia proposta por CHAQUIAM (2022) para exploração didática em sala de aula e contribuir assim para melhoria do processo de ensino e aprendizagem desse objeto matemático.

REFERÊNCIAS

BERGER, Ronye**. Da “usura” a “preferência” a liquidez**: a noção histórica de juros. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Federal do Espirito Santo, Vitória, 2005.

BERLINGHOFF, William P. e GOUVÊA, Fernando Q. **A Matemática através dos tempos**: Um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Tradução Elza Gomide, Helena Castro. 2ª edição. São Paulo: Blucher, 2010.

BRANDEMBERG, João Claudio. **Sobre textos históricos e o ensino de conteúdos matemáticos**. In: PEREIRA, Ana Carolina Costa e MARTINS, Eugeniano Brito (Org.). Investigações Científicas envolvendo a história da Matemática sob o olhar pluralidade. Curitiba: CRV, 2021, p. 23-34.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. Disponível em: < <*http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf*>. Acesso em: 23 mai. 2019.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil** [recurso eletrônico]. -- Brasília, DF: Supremo Tribunal Federal, Secretaria de Documentação, 2018. p.160. Disponível em: < *https://www.stf.jus.br/arquivo/cms/legislacaoConstituicao/anexo/CF.pdf* >. Acesso em: 10 mai. 2019.

BRASIL. Lei nº. 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Brasília, DF: 20 de dezembro de 1996. Constituição (1988).

BRASIL. Ministério da Educação**. Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** (DCNEM) - Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Disponível em < http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=102481-rceb003-18&category_slug=novembro-2018-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 23 mai. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio. Brasília: MEC-SEMTEC, 1999.

BRASIL. **PISA 2018**. Disponível em < *https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/pisa/historico*>. Acesso em: 20 jun. 2021

BRASIL. **Programa nacional do livro didático para o ensino médio**. PNLD/2018: Matemática - Brasília: Ministério da Educação, SEMTEC, FNDE, 2005. Disponível em: <*https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/guia-do-livro-didatico/item/11148-guia-pnld-2018*>. Acesso em: 23 mai. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Sistema de Avaliação da Educação Básica** - SAEB/Prova Brasil. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Anísio Teixeira. Brasília: MEC, 2015.

CAMPOS, Ana Cristina. **CNC: Brasil encerrou 2021 com recorde de endividados**. Agência Brasil, 2021. Disponível em: <*https://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2020-05/cnc-endividamento-das-familias-alcanca-665-em-maio*>. Acesso em: 20 fev. 2022.

CARVALHO, Dione Lucchesi de. **Metodologia do Ensino da Matemática**. 2 ed. São Paulo: Cortes, 1994.

CHAQUIAM, Miguel. **História e Matemática: um elo entre contextos, textos e atividades**. Coleção VIII – Educação Matemática na Amazônia. V. 1. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2022.

CHAQUIAM, Miguel. História e Matemática: um elo e quatro contextos. **Revista Cocar**, Revista Cocar. Edição Especial N.14/2022 p.1-23. DOI: *https://doi.org/10.31792/rc.v0i14.* Acesso em: 30 set. de 2022.

CHAQUIAM, Miguel. **História e Matemática dos contextos as atividades**. Anais da X de BIENAL de Matemática: Belém, Pará, 2022. Disponível em: <*https://sbm.org.br/bienal/wp-content/uploads/sites/2/2022/09/Anais_da_X_Bienal_de_Mat.pdf*>. Acesso em: 10 de ago de 2022.

CHAQUIAM, M**. Constituição do conceito de função e generalidades por Leonhard Euler em Introductio in Analysis Infinitorum**. In: O Olho do Mestre: Dez livros-textos históricos. Org. Fossa, J. A. Campina Grande (PB): EDUEPB, 2021.

CHAQUIAM, M. **Da Tábua de Plimpton às primeiras definições de função In: Investigações científicas envolvendo a História da Matemática sob o olhar da pluralidade**. Org. Pereira, A. C. C; Martins, E. B. Curitiba: Editora CRV, 2021.

CHAQUIAM, Miguel. Historia y Matemáticas integradas através de un diagrama metodológico. **Revista Paradigma**, Vol. XLI, Nº Extra 1; Abril de 2020 / 197 – 211. DOI: *<https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p197-211.id838>.* Acesso em: 10 mai de 2020.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaios Temáticos**: história e matemática em sala de aula. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

CLAIRAUT. Alexis claude. **Elementos da álgebra.** 5. Ed. Rio de Janeiro: F. Briguiet e Cia, Livreiros Editores. 1908.

D’AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**: Arte ou Técnica de Explicar e Conhecer. São Paulo: Editora Ática, 1990.

D´AMBROSIO, Ubiratan. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p. 97-115.

D´AMBROSIO, Nicolau e D´AMBROSIO Ubiratan. **Matemática Financeira e Comercial**: com complementos da matemática e introdução ao cálculo.28 ed. São Paulo: Ed. Nacional, 1980.

ENEM 2008 – **Exame Nacional do Ensino Médio ENEM)**. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em<*https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/16668/16668_6.PDF*>*.* Acesso em: 9 mar. 2019.

Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF), 2010. Disponível em: <*http://www.bcb.gov.br/pre/pef/port/Estrategia_Nacional_Educacao_Financeira_ENEF.pdf*>*.* Acesso em: 16 abr. 2019.

FOSSA, John A. Algumas considerações teóricas sobre o ensino de matemática por atividades. **REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, Ano 15, Número 35, p.10-26 ISSN: 2675-190914. 2020. Disponível em: <*http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/283/227*>. Acesso em: 1 out. 2021.

GONÇALVES, Jean Piton. **A História da Matemática Comercial e Financeira**. Só Matemática. Disponível em: < *https://www.somatematica.com.br/historia/matfinanceira4.php*>. Acesso em 9 mar. 2019.

GOUVEIA NETO, Sérgio Candido de e GOUVEIA, Cristiane Talita Gromann de. **Contadores e seus livros de Matemática Comercial e Financeira no Brasil do início do século XX**. Anais do XII SNHM: Itajubá, MG, 2017. Disponível em: <*https://www.sbhmat.org/download/download?ID_DOWNLOAD=6*> . Acesso em: 15 mar 2020.

GRANDO, Neiva Ignês. e SCHNEIDER, Ido José. Matemática financeira: alguns elementos históricos e contemporâneos. **Zetetike**. Unicamp, vol. 3, n. 33, 2010. Disponível em: <*https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646693*>*.* Acesso em: 15 mai. 2020.

HOFFMANN, Jussara. **Avaliar para promover**: as setas do caminho.17. ed. Porto Alegre: Mediação, 2018.

JAY, Peter. **A riqueza do homem**: uma história econômica. Rio de Janeiro, Record, 2002.

KILHIAN, Kleber. **A origem do Juros**. O baricentro da mente. 2012 . Disponível em: <*https://www.obaricentrodamente.com/2012/01/juro.*html>. Acesso em: 15 jan. 2021.

LAUNAY, Michael. **A Fascinante História da Matemática**: da pré-história aos dias de hoje. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2019.

MENDES, Iran Abreu. **Sobre processos criativos nas histórias da criação Matemática**. In: PEREIRA, Ana Carolina Costa e MARTINS, Eugeniano Brito (Org.).

Investigações Científicas envolvendo a história da Matemática sob o olhar pluralidade. Curitiba: CRV, 2021, p. 63-73.

MENDES, Iran Abreu. O Estudo da Realidade como Eixo da Formação Matemática dos Professores de Comunidades Rurais. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 23, n° 36, p. 571-595, agosto, 2010. Disponível em: <*https://www.redalyc.org/pdf/2912/291221905002.pdf*>. Acesso em: 20 jun. 2020.

MENDES, Iran Abreu. **História da Matemática no Ensino:** Entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

MIGUEL, Antônio e BRITO, Arlete de Jesus. **A História na Formação do Professor de Matemática.** Caderno CEDES – História e Educação Matemática. Campinas: Papirus, nº 40, 1996.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre História e Educação Matemática.** 1993. 285 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993.

MEDEIROS, Andréa Regina Henriques de. **A História dos Juros e seu Ensino.** Dissertação do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática – Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará, Belém, 2023.

MOURA, Elmha Coelho Martins e BRITO, Arlete de Jesus. **A História da Matemática em Sequências Didáticas, na Formação Inicial de Professores.** *Educ. Teoria Prática* [online]. 2019, vol.29, n.62, pp.609-625. Epub 01-Ene-2020. ISSN 1981-8106. Disponível em< *https://doi.org/10.18675/1981-8106.vol29.n62.p609-625*>. Acesso em: 31 abr. 2019.

NUNES, José Messildo Viana e SILVA, Franscisco Hermes Santos e. **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**: Um tendência necessária. In anais SIPEMAT: Recife, UFPE, 2006. Disponível em: < *https://docplayer.com.br/53431946-Historia-da-matematica-na-educacao-matematica-uma-tendencia-necessaria-1-resumo.html*>. Acesso em: 20 jan. 2020.

O'CONNOR,J.J. e ROBERTSON, E.F . **Leonhard Euler***. Mac Tu*tor História da Matemática. 1998*. Disponível em: < https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler/*>. Acesso em: 2 ago. de 2022.

O'CONNOR,J.J. e ROBERTSON, E.F*.* **"O número e ".** *Mac Tutor História da Matemática. 2001.* Disponível em: <</>*.* Acesso em: 2 ago. de 2022.

PIPPA, Tânia Cristina Maggione. **A Função logarítma e a regra de cálculo**. 2014, 62f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014. Disponível em: <*https://teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-09062014095044/publico/TaniaMaggioni_revisada.pdf*>. Acesso em: 1 mar. 2022.

RÊGO, R. M. do; FOSSA, J. A. Cultura Popular e Educação Matemática. In RÊGO, Rogéria Gaudêncio do; RÊGO, Rômulo Marinho do; FOSSA, John Andrew; PAIVA, Jussara Patrícia A. Alves. **Padrões de Geometria:** Do Cotidiano à Sala de Aula. João Pessoa (PB): Editora Universitária/ UFPB, 2006.
REZENDE FILHO, Cyro de Barros. **História Econômica Geral**. 3ª edição. São Paulo, Contexto, 1997.

RIBEIRO, Dulcyene Maria. **Aspectos relevantes da pesquisa histórica**: alguns pontos de vista. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. In. Encontro Nacional de Educação Matemática, VIII ENEM, 2004, Recife. Anais, Comunicação Cientifica. Disponível em <*http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/05/CC26642643895.pdf*.> Acesso em: 15 jun. 2021..

SANTANA, Cecília Cabral Mascarenhas de; SILVA, Ana Lúcia Gomes. **O ensino da matemática e o princípio da contextualização**. In: II CONEDU, 2015, Campina Grande. Trabalhos. Campina Grande – PB, 2015. Disponível em<*http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV045_MD4_SA8_ID6052_07092015215957.pdf*>. Acesso em: 20 jun. 2019.

SILVA, Douglas Santos; ALVES, Evanilson Landim. **Representações Sociais de Reprovação em Matemática por estudantes da Educação Básica**. In. Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2016, São Paulo. Anais do evento. São Paulo: 2016. Disponível em: <*http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/7893_3552_ID.pdf*>. Acesso em: 22 mai. 2019.

SILVA, Francisco Hermes Santos da; SANTO, Adilson Oliveira do Espírito. A Contextualização: Uma questão de contexto. In. SILVA, Francisco Hermes Santos da (Org.). **Formação de Professores**: mitos do processo. Belém: EDUFPA, 2009, p. 55-82

SILVA, Francisco Hermes Santos da. **Formação de Professores**: mitos do processo. Belém: EDUFPA, 2009.

SOARES. F.J. **Uma proposta de atividades para o ensino da Matemática Financeira na educação básica**. 2016. 64 p. Dissertação (Mestrado Professional). Universidade Federal de Juiz de Fora: Juiz de Fora, 2016. Disponível em: <*https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/3254*>. Acesso em: 15 abr. 2019.

SOARES, Waléria de Jesus Barbosa. **Juros em livros didaticos de matematica no Maranhão do Seculo XIX.** 2009. 174p. Dissertação (Mestrado Profissional). UNICAMP: São Paulo, 2009. Disponível em: <*https://acervus.unicamp.br/index.html*>. Acesso em: 20 abr. 2019.

SOARES, Waléria de Jesus Barbosa. **Juros simples na artimética do Maranhão oitencentista**. In. X Encontro Nacional de Educação Matemática – X ENEM, Bahia: Salvador, 2010. Disponível em: <*https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/?info_type=Tema6&lang_user=*>. Acesso em: 20 abr. 2019.

SOARES, Waléria de Jesus Barbosa e SILVA, Circe Mary Silva da. **Uma História sobre o Ensino dos Juros**. Curitiba, Appris, 2016.

STAMATO, Jucélia Maria de Almeida. A História da Matemática na Formação do professor de Matemática: Algumas reflexões. **Revista HISPECI & LEMA ON LINE**. Centro Universitário UNIFAFIBE – Bebedouro/SP – Ano IV – n. 4 – nov. 2013 – 97 p. Disponível em< *https://www.unifafibe.com.br/hispecielemaonline/?edicao=26*>, acesso em: 15 jun. 2021.

SOARES, Waléria de Jesus Barbosa Soares e SILVA, Circe Mary Silva da. **Uma História sobre o Ensino dos Juros**. Curitiba, Appris, 2016.

TERRA, Rubens. **Juros composto e o número de Euler**. Money times. 04/04/2017. Disponível em: *<https://www.moneytimes.com.br/juros-compostos-e-o-numero-de-euler-e/.>* Acesso em: 02 mar. 2022.

VARGAS, Diego Boehlke e LASTA, Tatiane Thaís. **História econômica geral.** Indaial: UNIASSELVI, 2018. Disponível em : <*https://www.uniasselvi.com.br/extranet/layout/request/trilha/materiais/livro/livro.php?codigo=25184*>. Acesso em: 15 jan. 2021.

VIANNA, Carlos Roberto. **Usos Didáticos para a História da Matemática**. In: Anais do I Seminário Nacional de História da Matemática. (Ed.) Fernando Raul Neto. Recife: 1998, p. 65-79.

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Trav. Djalma Dutra, s/nº – Telégrafo
66113-010 Belém-PA