ARITMÉTICA DE FRAÇÕES

Daiane Vieira de Rezende Pinhal

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza

Edifes

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA (EDUCIMAT)

DAIANE VIEIRA DE REZENDE PINHAL
MARIA ALICE VEIGA FERREIRA DE SOUZA

ARITMÉTICA DE FRAÇÕES

Edifes
ACADÊMICO

2022

Editora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
R. Barão de Mauá, nº 30 - Jucutuquara
29040-689 - VITÓRIA - ES
www.edifes.ifes.edu.br - editora@ifes.edu.br

Reitor: Jadir José Pela
Pró-Reitor de Administração e Orçamento: Lezi José Ferreira
Pró-Reitor de Desenvolvimento Institucional: Luciano de Oliveira Toledo
Pró-Reitora de Ensino: Adriana Pionttkovsky Barcellos
Pró-Reitor de Extensão: Renato Tannure Rotta de Almeida
Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação: André Romero da Silva
Coordenador da Edifes: Adonai José Lacruz
Diretoria Geral: Diemerson Saquetto
Diretoria de Administração e Planejamento: André Assis Pires
Diretoria de Ensino: Fernanda Zanetti Becalli
Diretoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Extensão: Rafael Antônio Souza de Lima
Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática: Manuella Villar Amado
Vice Coordenador do Programade Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática: Alex Jordanede Oliveira

Revisão Linguística: Avanisio Alves Araújo
Capa: Daiane Vieira de Rezende Pinhal
Projeto Gráfico e Diagramação: Danielly Rosário
imagens: Banco de dados do site Canva e Bitmoji
Comissão científica:
Dr. Luciano Lessa Lorenzoni – IFES
Dra. Lígia Arantes Sad – IFES
Dra. Nilce Fátima Scheffer – UFSC
Produção e divulgação:
Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática
Avenida Ministro Salgado Filho, Nº 1000, Soteco – Vila Velha - ES – CEP: 29106-010

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Pinhal, Daiane Vieira de Rezende
P654a Aritmética de frações [recurso eletrônico] / Daiane Vieira de Rezende Pinhal, Maria Alice Veiga Ferreira de Souza . – Vitória, ES : Edifes Acadêmico, 2022.

PDF 5293Kb (77p.): il.
Publicação Eletrônica.
Modo de acesso: http://educimat.ifes.edu.br/index.php/produtos-educacionais

Inclui bibliografia
ISBN: 978-85-8263-601-5

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Aritmética. 3. Livros Didáticos. 4. Livros Didáticos - Matemática (Brasil). 5. Livros Didáticos - Matemática (Japão) . 6. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo. 7. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática. I. Souza, Maria Alice Veiga Ferreira de. II. Título.

CDD: 510.7

Bibliotecária: Viviane Bessa Lopes Alvarenga CRB/06-745
DOI: 10.36524/9788582636015

"Mudar a forma como ensinamos matemática pode ajudar a quebrar padrões de desigualdade e injustiça que são perpetuados em nossas salas de aula".

Débora Loewenberg Ball

PREFÁCIO

O conceito do objeto matemático fração e suas operações aritméticas, foco deste livro, remonta a Antiguidade (3000 anos antes de Cristo), faz parte do nosso cotidiano e constitui-se como pré-requisito para a construção de novos conhecimentos ao longo dos anos escolares, particularmente, nos campos da Álgebra e da Probabilidade.

O conceito de fração, aparentemente simples, possui muitas facetas que nem sempre são exploradas em salas de aula o que têm conduzido a dificuldades no entendimento das operações aritméticas com frações e de novos conceitos matemáticos que estão relacionados com esse conceito. O ensino e a aprendizagem do conceito de fração e de suas operações aritméticas, em geral, ocorre de forma mecanizada, por meio de repetições de regras e algoritmos, sem que o aluno construa significado para o que está realizando.

Assim, o livro Aritmética de Frações nos convida a refletir sobre o processo de ensino e aprendizagem de frações e nos apresenta diferentes cenários para o desenvolvimento conceitual e das operações aritméticas desse objeto matemático.

As autoras nos chamam a atenção que o objeto matemático fração é multifacetado e que esse conceito deve ser explorado como um todo e de forma inter-relacionada em seus cinco significados, denominados nesse livro de subconstructos, a saber: parte-todo, medida, razão, operador e quociente.

Tomando como ponto de partida esses subconstructos, analisam a abordagem do conceito de fração e suas operações aritméticas em duas coleções de livros didáticos: uma brasileira e uma japonesa. Destacam e exemplificam possibilidades e limitações (lacunas) identificadas no desenvolvimento do conceito a partir dos subconstructos escolhidos. Essa análise pode (e deve) ser tomada como referência e inspirar os professores a fazer o mesmo com o material didático que tem em mãos,

de modo a explorá-lo criticamente e, a complementá-lo, caso seja necessário.

Esse material é uma importante contribuição para a sala de aula. Numa linguagem acessível, clara e com muitos exemplos, é um convite aos professores a explorar todo o campo conceitual que envolve as frações e suas operações de modo a aperfeiçoar seus procedimentos educacionais, privilegiando o raciocínio e o significado.

Luciano Lessa Lorenzoni
Agosto de 2022

SUMÁRIO

SOBRE O LIVRO

Este livro foi elaborado principalmente, para professores que ensinam matemática na educação básica, com a intenção de promover reflexões acerca do conteúdo de frações e suas operações aritméticas, em três diferentes maneiras de abordagem no ensino, bem como seus benefícios e (ou) obstáculos epistemológicos.

Este material é fruto de uma pesquisa de mestrado que deu origem à dissertação Aritmética de Frações em Livros Didáticos Brasileiros e Japoneses a qual discute abordagem conceitual e de operações aritméticas de frações nos dois países.

As discussões fomentadas na pesquisa revelaram fragilidades no ensino de frações que estão ligadas a aspectos conceituais, como a utilização predominante de certos subconstructos em detrimento de outros, a pouca exploração da flexibilização da unidade de medida, e ao tratamento das propriedades de números racionais como uma extensão das propriedades dos números inteiros. Somam-se a isso, a pouca exploração dos campos conceituais nas operações aritméticas, especialmente no campo da divisão, que no Brasil comumente é apresentada apenas com a ideia de partilha equitativa, deixando para segundo plano a divisão quotitiva, o que dificulta o ensino do conceito da divisão entre duas frações.

As autoras

POR QUE REFLETIR SOBRE O ENSINO DE FRAÇÕES?

1

A aritmética de frações está entre os tópicos mais desafiadores para o ensino da matemática escolar no ensino básico. Quando orientado por algoritmos e memorizações têm deixado lacunas no aprendizado, denunciado em pesquisas científicas internacionais. As pesquisas dizem a insuficiência de domínio conceitual de frações é um dos motivos que levam alunos a fracassar em tópicos da matemática futura, como a álgebra e a probabilidade.

Os algoritmos são importantes e necessários, mas devem estar sempre vinculados à compreensão conceitual do assunto. Compreender de modo amplo e profundo a aritmética de frações significa compreender os reflexos gerados por ela, e a proposta de trazer discussões sobre aspectos conceituais de frações e suas operações aritméticas visa minimizar as dificuldades epistemológicas no ensino.

A pesquisa de mestrado que deu origem a este livro, buscou respostas para algumas dessas dificuldades na aprendizagem que levam alunos a equívocos epistemológicos e encontrou respostas no ensino, ou seja, a forma como é realizado é um dos fatores que contribui para os resultados ineficazes na aprendizagem de frações. Nesse sentido, este livro visa a incentivar o professor que ensina Matemática a diversificar suas propostas para que os alunos ampliem seus modos de ver e conceber o mesmo objeto.

Conhecer os motivos que levam o aluno a se equivocar, realizar uma conexão com os aspectos conceituais envolvidos e compreender as formas como o ensino tem sido idealizado, são fatores que precisam de ser considerados na prática docente. A partir da análise de livros didáticos do Brasil e do Japão, foi possível compreender a intencionalidade prevista para o ensino de frações e suas operações aritméticas, além de verificar se os autores consideram estas variáveis em sua produção textual. Sendo assim, este livro pretende apresentar aspectos conceituais importantes e necessários para operar com frações, e suas manipulações e formas de ensino encontradas nas duas coleções de livros didáticos pesquisadas e na comunidade científica.

CONCEITO DE FRAÇÕES

2

A criação das frações data aproximadamente 3.000 anos AEC[1] no Egito Antigo em torno da prática social de medir magnitudes de comprimentos, áreas e volumes que nem sempre resultavam em um número inteiro. Sendo assim, acredita-se que as práticas de medição fizeram emergir a geometria e as frações simultaneamente[2].

Fonte: Universidade Passo Fundo[1]

É comum encontrarmos a definição de fração como o "quociente entre dois números inteiros $\frac{a}{b}$, tal que $b \neq 0$", entretanto, essa definição não é suficiente conceitualmente falando. Vejamos alguns motivos:

- Esta definição não está ligada à origem material de frações;
- A criação de frações está ligada diretamente à prática de medição;
- Nem toda fração representa um quociente (e.g., frações parte-parte);
- Nem sempre a representação $\frac{a}{b}$ é uma fração (e.g., $\frac{\sqrt{2}}{b}$).

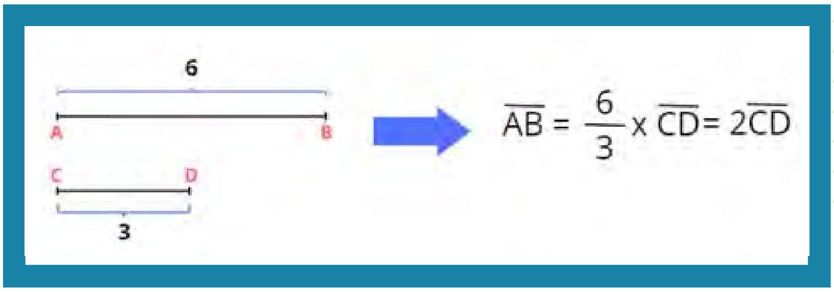
Para construção da ideia de fração devemos considerar três aspectos principais:[4]

1. a escolha da unidade de medida;
2. a comparação com essa unidade e;
3. a expressão dessa comparação por meio de um número.

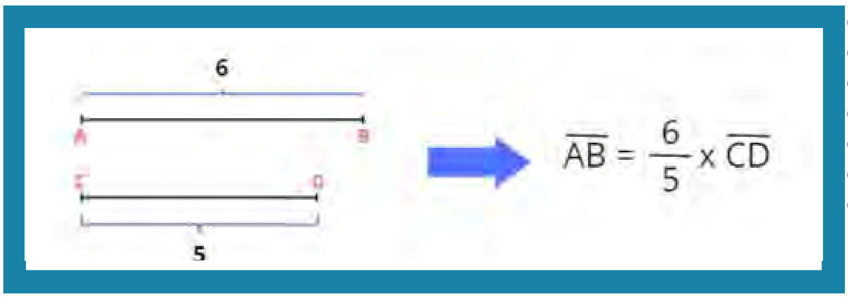
Nos exemplos a seguir a construção da fração se dá por meio da comparação do comprimento de dois segmentos de retas. O segmento $\overline{AB}$ é medido tomando como referência o segmento $\overline{CD}$, sendo este o referencial, o qual comumente chamamos de unidade de medida.

1. AEC - Antes da Era Comum.
2. Powell (2018), Caraça (1951).
3. Disponível em http://usuarios.upf.br/~pasqualotti/hiperdoc/natural.htm.
4. Caraça (1951).

Ao verificar a medida do segmento $\overline{AB}$ em relação à medida do segmento $\overline{CD}$, sendo $\overline{AB}$ divisível por $\overline{CD}$, temos como resultado um número natural. Observe o leitor que na figura abaixo o segmento $\overline{AB}$ mede 6 unidades de comprimento e o segmento $\overline{CD}$ mede 3 unidades de comprimento, portanto, a medida do comprimento de $\overline{AB}$ equivale a 6/3 do comprimento de $\overline{CD}$, que também pode ser expresso pelo quociente entre 6 e 3, ou seja, $\overline{AB}$ mede 2 $\overline{CD}$.



Entretanto, há situações que a comparação do comprimento de segmentos geram resultados que não podem ser expressos por um número natural. Na figura a seguir, a medida do comprimento do segmento $\overline{AB}$ é de 6 unidades e a medida do comprimento do segmento $\overline{CD}$ é de 5 unidades. Como 6 não é divisível por 5, temos o resultado dessa comparação expresso por uma fração. Veja:



Com base na perspectiva ontológica baseada na história, podemos dizer que as frações são fruto da medição, e, portanto, podemos defini-las como uma comparação multiplicativa entre duas quantidades de mesma espécie que têm uma unidade de comensurabilidade[5]. Na comparação da medida de dois segmentos a e b, dizemos que $\frac{a}{b}$ é a medida do comprimento do segmento a em relação à medida do comprimento do segmento b. Portanto, a fração pode ser definida simbolicamente por:

5. Powell (2018, 2019).

$$\text{“}\frac{a}{b}\text{ de ” ou “}\frac{a}{b}\times\text{ ”}$$

Para escolha da unidade de medida, ou seja, a referência, é necessário desenvolver a flexibilidade[6] no julgamento e comparação das magnitudes de frações. Por exemplo, para comparar 1/3 do comprimento de uma estrada com 2/5 do comprimento dessa mesma estrada, é preciso estabelecer uma unidade comum de comparação.

Portanto, é preciso compreender a unidade, não como um objeto estático, mas como um referencial que pode ser convertido de uma forma a outra sempre que necessário para obter novos moldes de comparação. Por isso, é importante estabelecer um estado único de comparação que chamamos de redução ao denominador comum. Neste processo de redução encontramos novas frações, equivalentes às originais, que possuam o mesmo denominador, ou seja, a mesma unidade de referência.

A equivalência, por sua vez, é importante para o desenvolvimento do senso de ordenação, comparação de magnitudes e operações aritméticas com frações. Como ilustração, para a soma de frações com denominadores diferentes, é preciso estabelecer um estado único para comparação, e a equivalência precisa ser acionada. Entretanto, devemos compreender aspectos conceituais envolvidos na equivalência para que o aluno compreenda o algoritmo ao invés de apenas memorizar uma série de procedimentos.

As frações são um objeto matemático multifacetado que se traduzem em múltiplas interpretações que Behr et al. (1983) chamou de subconstructos, sendo elas: parte-todo, medida, razão, operador e quociente. O estudo dos subconstructos é fundamental para que os estudantes construam uma base conceitual sólida acerca de frações, seus usos no cotidiano e consigam desenvolver outros tópicos importantes da Matemática como a Álgebra e a Probabilidade. Vamos falar disso nos próximos tópicos. Acompanhe!

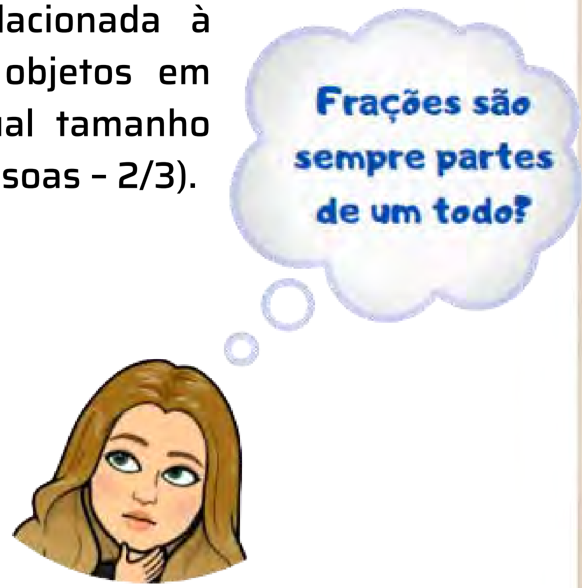
6. É caracterizada pela agilidade mental para alternar entre as formas de uma fração, dependendo do que seja mais apropriado para um contexto específico.

SUBCONSTRUCTOS DAS FRAÇÕES

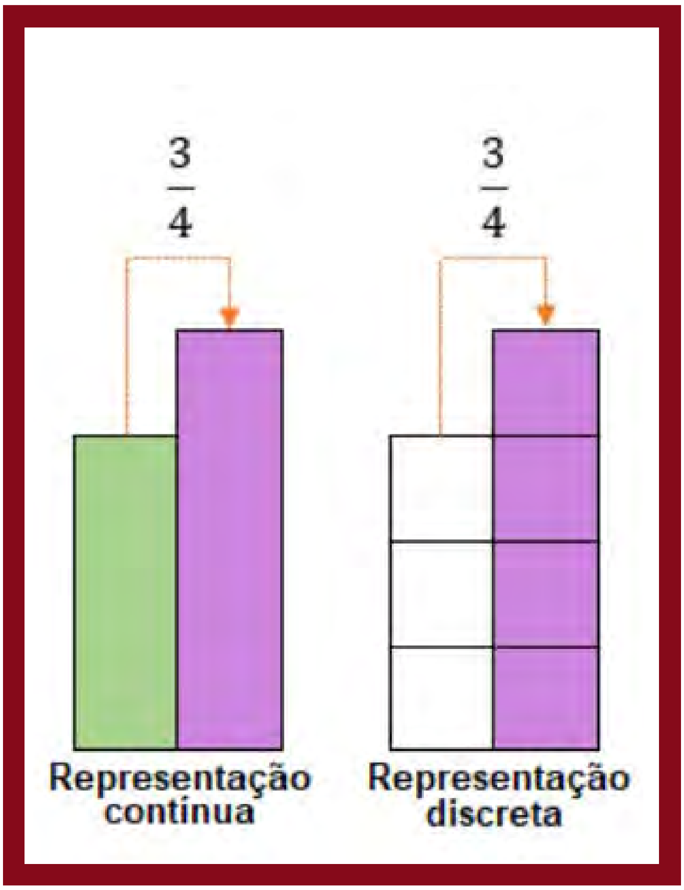
3

Parte-todo

A noção de fração parte-todo está relacionada à partição de um objeto ou conjunto de objetos em subpartes ou conjunto de objetos de igual tamanho (e.g., dois chocolates divididos para três pessoas – 2/3).



Apesar de ser um modelo predominante em livros didáticos brasileiros,[7] o ensino exclusivo via parte-todo limita a compreensão dos alunos no desenvolvimento das frações impróprias (por exemplo), pois, se frações são partes de um todo equiparticionado, como pode haver frações maiores que o todo?



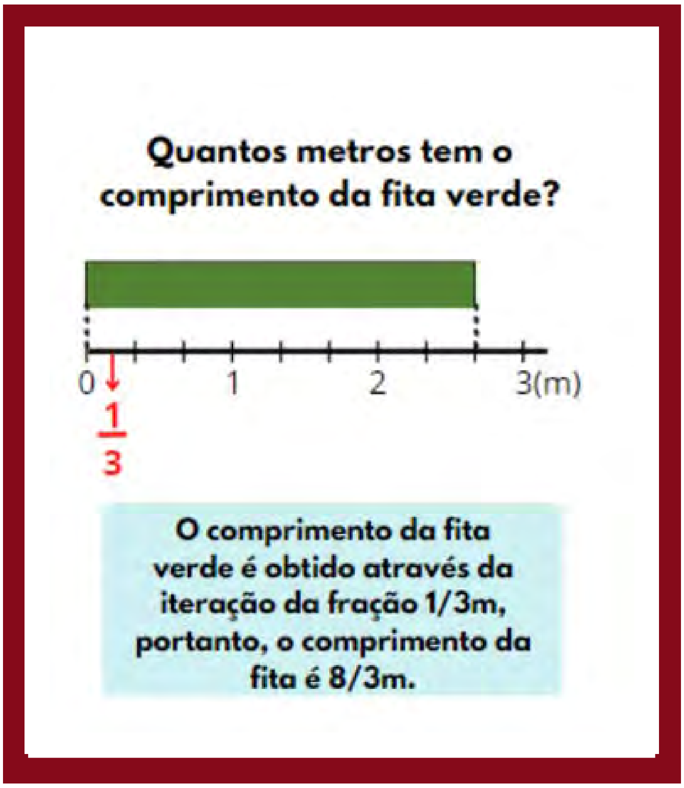
Outra questão é que a noção parte-todo costuma aparecer predominantemente ligada a modelos discretos, e é comum o aluno ser encorajado a desenvolver o processo da “dupla contagem”[8], que é um processo no qual se desenvolve uma linguagem de fração a partir da enumeração das partes, sendo a parte destacada o numerador e o total de partes o denominador, tratando os elementos como termos independentes. Na figura ao lado, temos a representação da fração 3/4 no modelo contínuo do lado esquerdo e discreto do lado direito.

7. Scheffer e Powell (2019); Souza e Powell (2021); Pinhal (2022, no prelo).
8. Nunes e Bryant (1997).

Na representação discreta, muitos alunos podem ser capazes de encontrar a fração 3/4 por meio da enumeração das partes utilizando o processo da dupla contagem. Todavia, na representação contínua, o processo da dupla contagem pode gerar equívocos levando os alunos a representar 1/2 ao invés de 3/4. Isso ocorre porque o aluno não observa haver uma desigualdade entre as partes e acaba por não avaliar a relação proporcional entre a barra verde-clara e a roxa.

Medida

A medida compara duas quantidades de mesma espécie, verificando quanto de uma quantidade há em outra. O subconstructo medida reconceitualiza a noção parte-todo, pois implica em "quanto" há de uma quantidade em outra ao invés de "quantas partes". Para que o aluno consiga compreender a ideia de medida é necessário que ele consiga ter flexibilidade para identificar a unidade de medida ideal para a situação e ainda, encontre a fração unitária para, então, iterá-la para encontrar a quantidade solicitada. A fração unitária é aquela que possui numerador um. A quantidade a ser encontrada é idealizada como um conjunto de frações

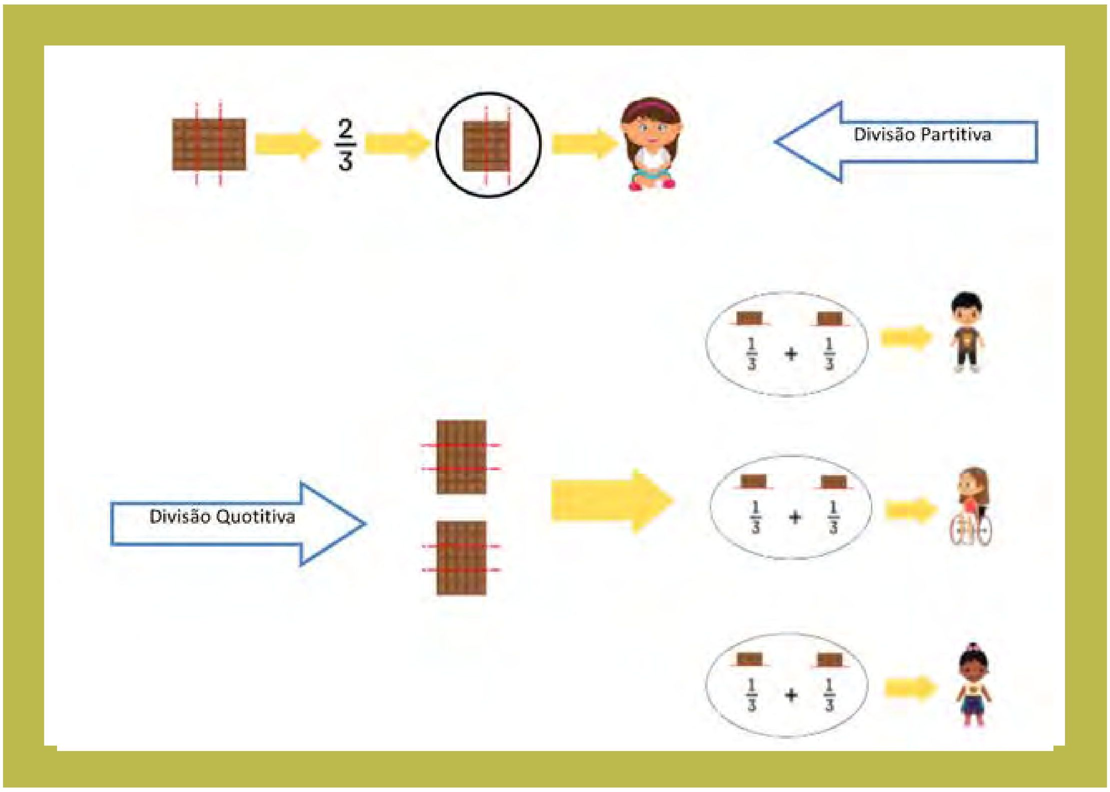


unitárias. Por exemplo, na figura acima a fração unitária é 1/3 do metro, e por meio de sua iteração (repetição), encontramos 8/3 (1/3+1/3+1/3+1/3+1/3+1/3+1/3+1/3) do metro como a medida total da fita verde.

Quociente

A interpretação quociente indica a divisão de um objeto ou grupo de objetos em subpartes de igual tamanho (partição), ou ainda, pode exprimir a ideia de quanto cabe de uma quantidade em outra (quotição).

Por exemplo, 2/3 pode representar um objeto dividido em três partes em que duas são tomadas (partição), ou ainda, pode representar dois objetos divididos entre três pessoas (quotição).



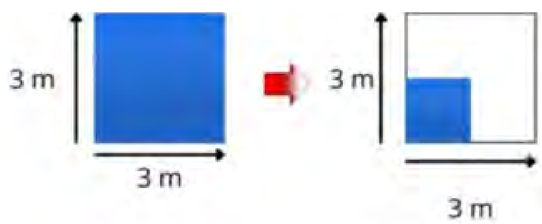
Razão

A razão trata de uma comparação multiplicativa entre duas grandezas, e no contexto das frações é necessário estabelecer um estado único de comparação. Portanto, quando a comparação envolve quantidades de mesma espécie trata-se de uma razão representada por uma fração. Quando a comparação ocorre entre quantidades de espécies diferentes teremos uma razão, mas não uma fração. Diante do exposto, infere-se que as frações são um subgrupo da razão[9]. Nas figuras abaixo podemos observar essa diferença com clareza, já que na figura da esquerda temos uma comparação de quantidades de naturezas distintas (quantidade de habitantes vs km) e na figura da direita temos uma comparação entre quantidades de mesma espécie (distância vs distância).

9. Souza e Powell (2021), Lamon (2012).

Operador

A fração como operador possui o papel de transformação operando sobre uma quantidade para produzir uma nova quantidade. O subconstructo operador assume uma interpretação algébrica e atua sobre uma magnitude como uma função que transforma o objeto em outro p/q vezes maior ou menor. Observe que na figura ao lado, a fração 1/4 é operador que atuará sobre a área original transformando-a em uma cópia reduzida com dimensões 1/4 vezes menor.



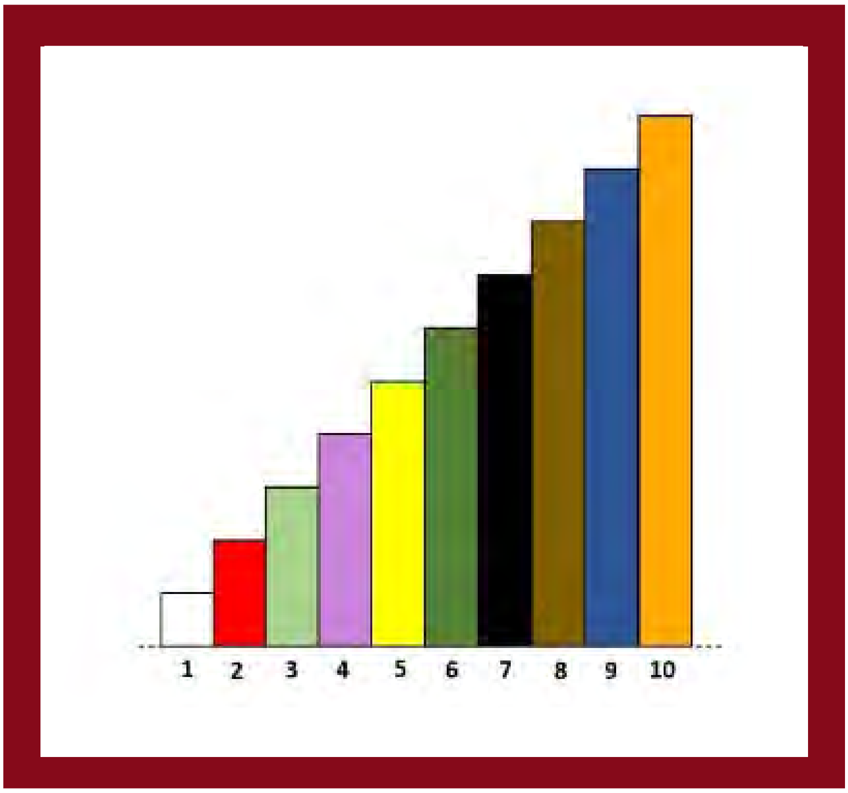
$$\frac{1}{4}\ de\ 3m = \frac{1}{4} \times 3$$

Medição: Uma interpretação alternativa

A literatura científica revelou uma sexta interpretação alternativa para o ensino de frações: a medição (que é diferente de medida). Esta concepção apoia-se na ontologia das frações, baseando-se na sua construção histórica.

O pesquisador estadunidense Arthur B. Powell ao realizar o resgate histórico de sua criação concluiu que as frações surgiram de problemas de medição, ou seja, da comparação multiplicativa entre pares de magnitudes. Portanto, concluiu que práticas pedagógicas baseadas na construção visual de modelos equiparticionados não estão conceitualmente relacionadas com a origem material das frações. Além disso, para Powell, utilizar somente a ideia de que frações surgem da divisão de coisas divisíveis (apesar de ser uma perspectiva dominante no ensino de frações na matemática escolar) limita a compreensão dos alunos a respeito das magnitudes de frações.

Para o professor Powell, a interpretação de frações pela medição contribui para desenvolver o senso numérico de frações e oferece uma estrutura conceitual para os alunos aprenderem posteriormente frações como números e operações com frações. Por isso, ele desenvolveu uma abordagem instrucional para frações por meio da perspectiva de medição, utilizando como material manipulativo de apoio as barras de Cuisenaire. Veja como são essas barras na figura abaixo.

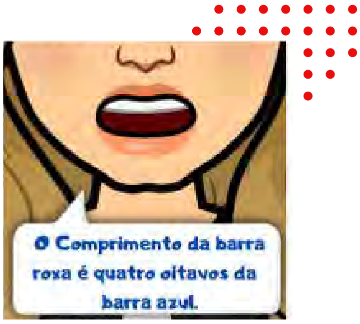


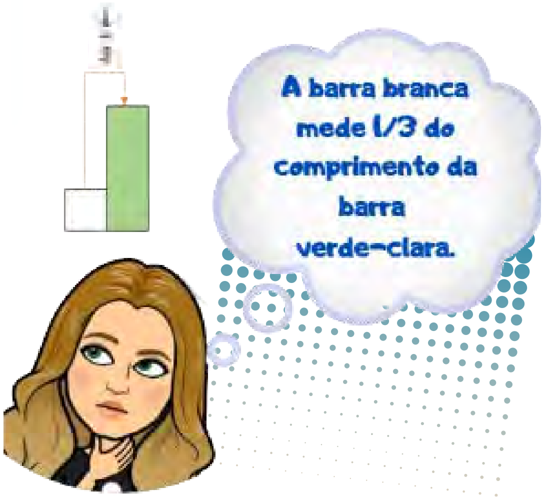
Trata-se de uma escala de 10 comprimentos contínuos representados por diferentes cores, em que cada cor está diretamente ligada a seu comprimento. A menor barra, que geralmente é neutra ou branca, representa a unidade. Na sequência, cada barra é uma unidade maior que a anterior, e suas cores são respectivamente: branca, vermelha, verde-clara, roxa, amarela, verde escura, preta, marrom, azul e laranja.

Para além da utilização do material manipulativo, Powell desenvolveu uma abordagem pedagógica denominada 4A-Instructional [10] Model que envolve quatro fases que compreendem o processo ensino-aprendizagem que vão da experimentação e diálogo à ações virtuais e simbólicas: (1) Actual Actions; (2) Virtual Actions; (3) Actions Written; e (4) Actions Formalized.

10. Powell (2018).

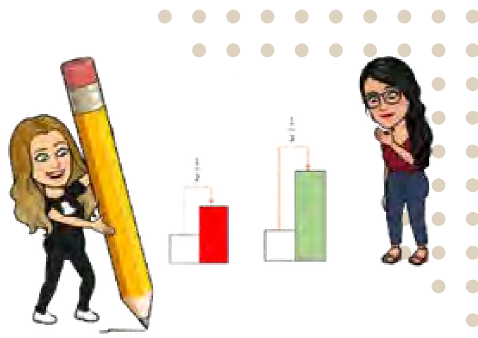
Na fase Actual Actions ou Ações Atuais, os alunos manipulam as barras de Cuisenaire, observam, ouvem, vêem, comparam e sequenciam. Além disso são encorajados a falar sobre suas descobertas.



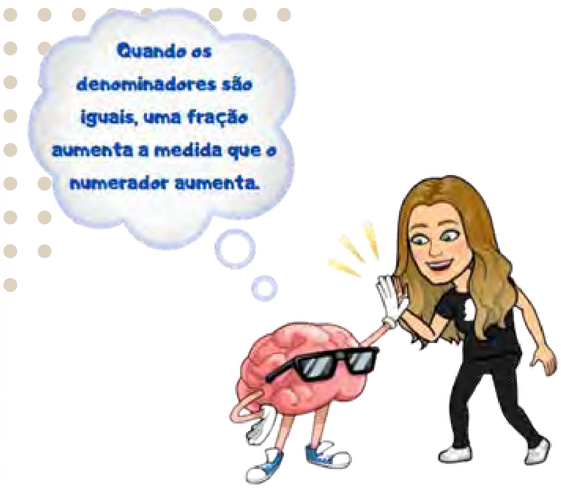


Na fase Virtual Actions ou Ações Virtuais, os alunos virtualizam o material e por meio de abstrações, realizam as comparações e medições que aprenderam na manipulação concreta. Nesta etapa, o aluno pode recorrer ao material concreto até que consiga internalizar suas magnitudes.

Na fase Actions Written ou Ações Escritas, o estudante escreve simbolicamente as magnitudes criando expressões, como equações ou inequações, decorrentes da manipulação das barras e, nesse momento, o professor os encoraja a falar e escrever sobre suas descobertas.



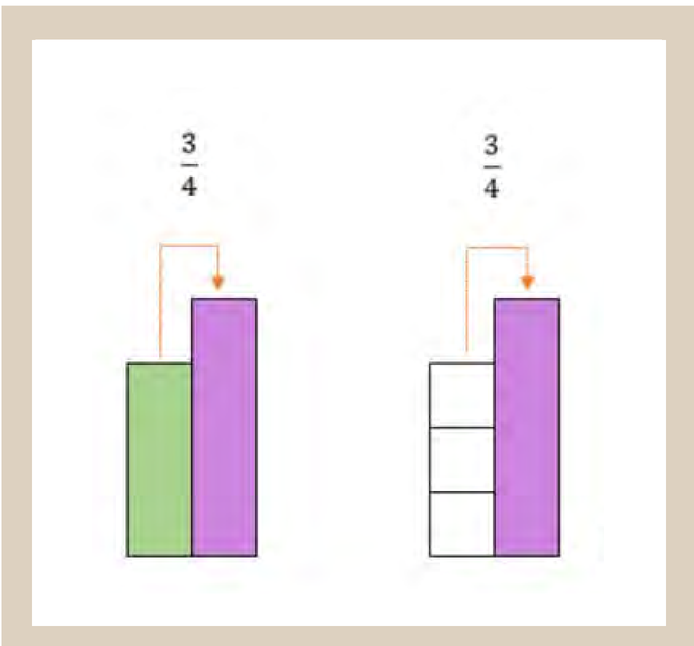
$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$



Na última fase, a Actions Formalized ou Ações Formalizadas, partindo das relações encontradas na manipulação das barras, da abstração e a escrita simbólica, os alunos avançam para a etapa da formalização das ideias matemáticas, momento em que, guiados pelo professor, eles observam padrões e constroem definições sobre o que fizeram nas etapas anteriores.

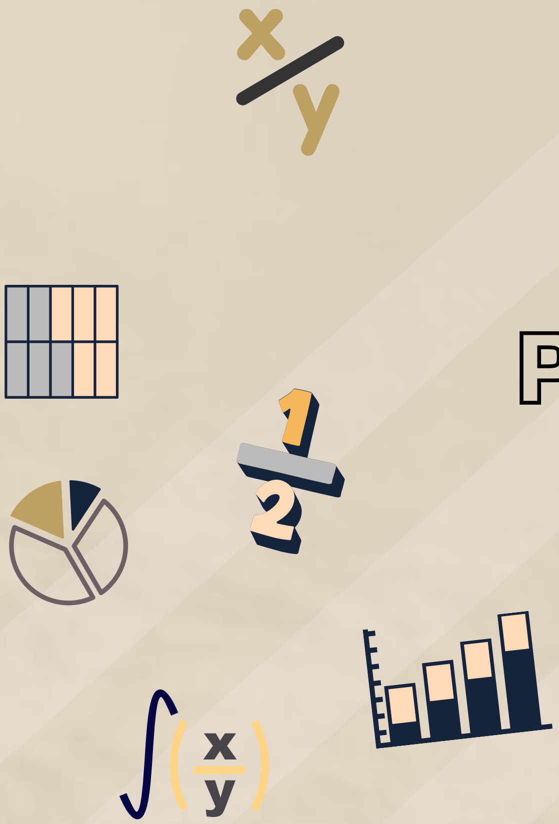
Para Powell, o modelo instrucional 4A-Instructional Model é baseado na ideia de que para a aprendizagem matemática, a fala e a escrita precisam de ocorrer em momentos distintos, já que no desenvolvimento histórico da trajetória humana, ouvir e falar precedem a leitura e a escrita.

O apoio da metodologia do 4A-Instructional Model auxilia os alunos à comparação de magnitudes das barras por meio da comparação multiplicativa entre os pares de comprimento. A título de exemplo, os alunos podem ser questionados quanto é a medida do comprimento da barra verde em relação ao comprimento da barra roxa e a resposta é 3/4 conforme ilustramos na figura abaixo.



Substituindo a barra verde por barras brancas, é possível avaliar que o comprimento da barra verde mede 3/4 do comprimento da barra roxa.

TRÊS DIFERENTES PERSPECTIVAS PARA A CONDUÇÃO INICIAL DO ENSINO DE FRAÇÕES: PARTE-TODO, MEDIDA E MEDIÇÃO



4

O que inferimos dos livros brasileiros e japoneses?

A instrução de frações nos livros didáticos brasileiros se inicia por meio do subconstructo parte-todo que predomina em todos os tópicos relacionados ao tema, utilizando representações geométricas discretas[11]. Apesar de ser a abordagem dominante no Brasil, esse não é a única via de ensino de frações.

Em muitos países do Ocidente que estão no topo do ranking do Pisa, como por exemplo o Japão, o ensino de frações é conduzido por meio do subconstructo medida, e, nessa abordagem, as frações unitárias e a reta numérica possuem um papel central na instrução.

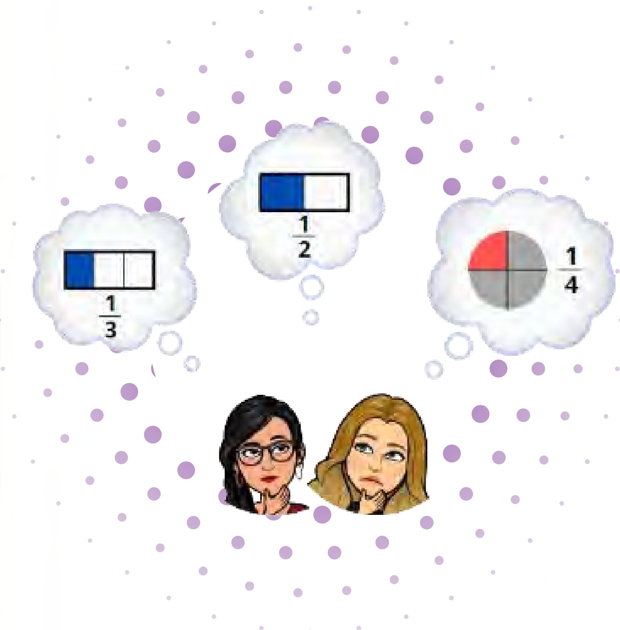
Nesse tema, a comunidade científica internacional vem desenvolvendo estudos que mostram que a instrução inicial baseada em modelos contínuos traz benefícios para aprendizagem de frações e desenvolvem o senso de magnitude. Pesquisadores da Neurociência, Psicologia Cognitiva e Educação Matemática[12] descobriram que mesmo alunos da escola primária são capazes de realizar julgamentos de comparação entre frações no contexto de variáveis contínuas, entretanto, não conseguem o mesmo êxito ao manipularem variáveis discretas por serem influenciados pelo processo da dupla contagem.

11. Pinhal (2022, no prelo).
12.Siegler et al. (2013); Wortha et al. (2020); Abreu-Mendonza, Coulanges, Powell & Roseberg-Lee, (2020) & Abreu-Mendonza, Coulanges, Powell e Roseberg-Lee (2021); Powell (2019), Amaral (2021).

QUAL É A UNIDADE DE MEDIDA?

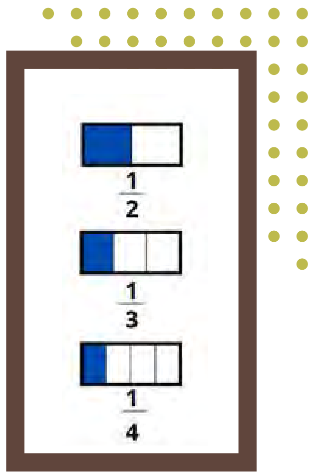
5

Como dissemos, a fixação da unidade de medida é o pré-requisito para o desenvolvimento conceitual de frações, já que ela depende do contexto em que está inserida. Por exemplo, 1/2 de uma pizza grande é diferente de 1/2 de uma pizza pequena, e apesar de a representação simbólica ser a mesma, as medidas são proporcionais, mas não iguais. Portanto, é necessário que o professor auxilie o aluno no desenvolvimento da flexibilização na fixação da unidade de medida, de forma que ele consiga alternar de uma forma a outra sempre que necessário.



No Brasil a perspectiva dominante no ensino de frações é a abordagem parte-todo em que um objeto geométrico é equiparticionado. Retângulos, círculos e hexágonos divididos em subpartes iguais relacionam "partes" com o "todo". Observe na figura ao lado que a parte pintada de azul ou vermelho representa o numerador da fração e o total de partes, o denominador da fração.

Representações com modelos geométricos aleatórios não levam o aluno a refletir sobre a unidade de referência, principalmente quando o "todo" é sempre do mesmo tamanho. É comum encontrarmos exemplos como os da figura ao lado que utilizam sempre as mesmas unidades (referências) e que não desenvolvem no aluno a flexibilidade na escolha da unidade ideal para cada situação.

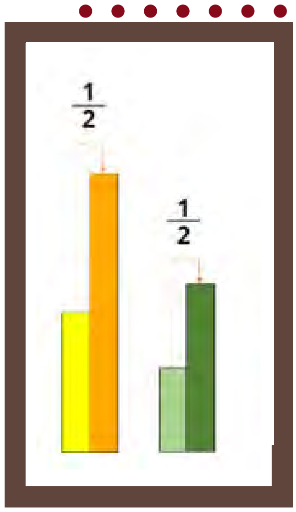


Em contrapartida, a abordagem de medida auxilia o aluno a construir essa flexibilidade, já que para encontrar a fração unitária, o tamanho da amostra deve ser considerado. Nesse contexto, as unidades de medida, ou seja, a referência, é explicitada em unidades de área, distância ou capacidade, o que auxilia na flexibilidade de escolha de um parâmetro.

Observe que na figura abaixo as duas personagens marcam 1/2 do comprimento de uma fita nas mãos, todavia, as medidas dos comprimentos das fitas não são as mesmas.

Em modelos que utilizam a medição, o aluno desenvolve a flexibilidade de julgamento de magnitudes em contextos de proporcionalidade a partir da manipulação das barras de Cuisenaire. Nesta abordagem, os alunos recebem as barras, estabelecem uma barra como unidade de medida, e, posteriormente, comparam os comprimentos de outras barras em relação à unidade fixada utilizando a comparação multiplicativa entre o comprimento das duas barras.

Dessa forma, é possível perceber que a medida 1/2 do comprimento de uma determinada barra é proporcional (mas não igual) à medida 1/2 do comprimento de outra barra. Na figura ao lado, a barra amarela representa 1/2 do comprimento da barra laranja e a barra verde clara representa 1/2 do comprimento da barra verde escura. Mesmo que tenhamos 1/2 em ambos os casos, a medida da barra amarela é diferente da medida da barra verde clara.

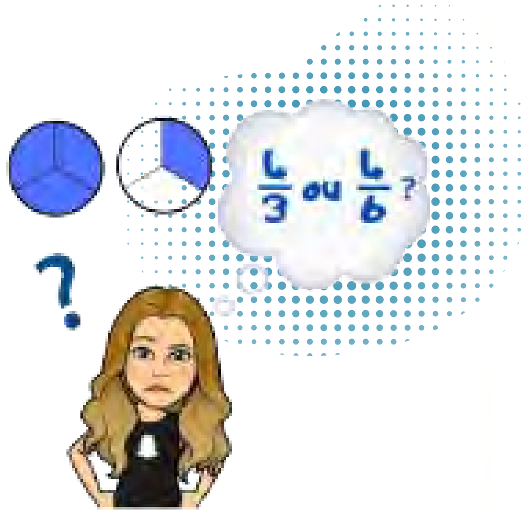


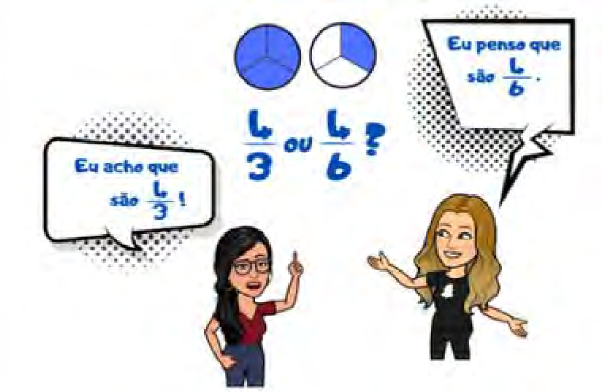
FRAÇÕES IMPRÓPRIAS

6

Pela abordagem parte-todo

Na manipulação de frações impróprias, é comum que os alunos tenham dúvida ao julgar sua magnitude. É comum que a representação pictórica de fração por meio do subconstructo parte-todo utilizando círculos equiparticionados causem uma confusão em sua representação simbólica.

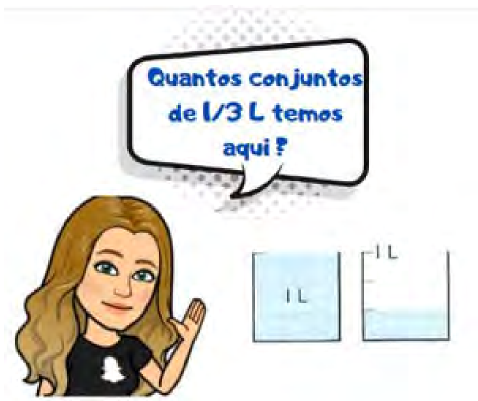


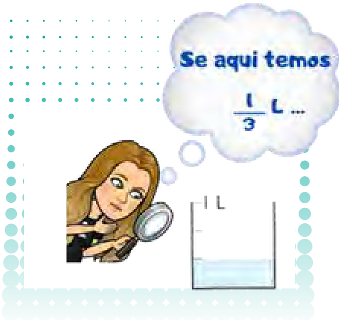


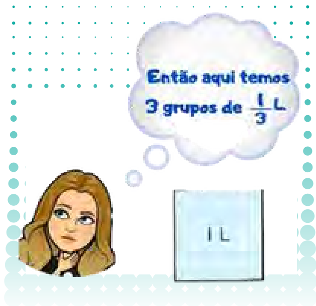
A figura ao lado mostra uma discussão comum no contexto da sala de aula, situação em que os alunos ficam confusos na representação simbólica da fração representada na imagem. Os equívocos acontecem porque no contexto parte-todo, o aluno é influenciado pela contagem ao responder 4/6 como a fração correta, atribuindo ao numerador a quantidade de partes pintadas e ao denominador o total de partes da figura, pois considera que o "todo" são quatro partes. Entretanto a representação correta é 4/3.

Pela abordagem medida

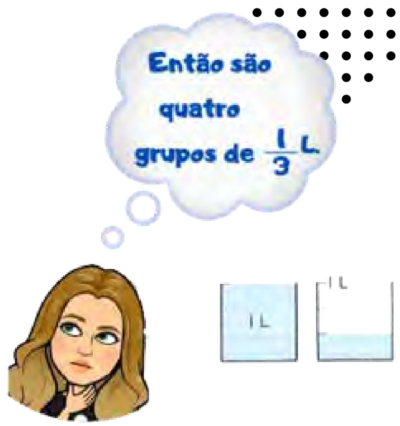
A interpretação medida está sempre relacionada a quantidades contínuas ligadas a medidas de capacidade, área ou comprimento. Ao usar a interpretação medida, precisamos encontrar a fração unitária e iterá-la de forma a encontrar a fração desejada. A figura ao lado e as figuras seguintes apresentam um modelo de discussão de fração imprópria por meio do subconstructo medida.







Observe que após encontrar a fração unitária 1/3, basta iterá-la quatro vezes para chegar à fração imprópria 4/3 (1/3+1/3+1/3+1/3). Veja na figura ao lado que a representação do líquido nos recipientes utiliza uma medida contínua, mas o aluno deve buscar a fração unitária virtualmente para encontrar a representação simbólica da quantidade dada.



Quando se trata da representação medida, a fração nunca aparece desligada de sua unidade de referência que, no caso acima, trata-se do litro. A fração unitária é 1/3 do litro e a fração imprópria 4/3, representa 4/3 do litro.

Pela abordagem medição

A medição também utiliza medidas contínuas, entretanto, diferentemente da abordagem medida, nesta não é necessário encontrar a fração unitária. Basta encontrar uma unidade de comparação e efetuar a comparação multiplicativa entre pares de quantidades. A interpretação de medição auxilia o aluno na compreensão da magnitude da fração imprópria e favorece a transição para número misto.

Na figura ao lado, ao comparar a medida do comprimento da barra branca com o comprimento da barra verde-clara chega-se à conclusão que a branca mede 1/3 da barra verde-clara, duas barras brancas medem 2/3, três barras brancas medem 3/3 e quatro barras brancas medem 4/3 da barra verde-clara.

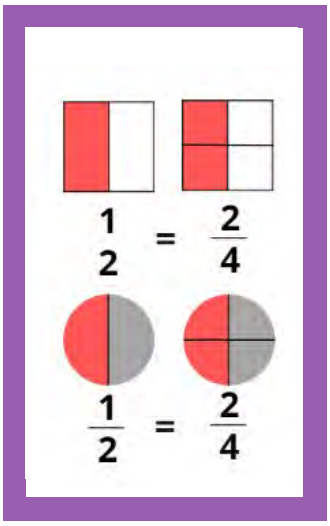
Observe o leitor que o obstáculo epistemológico é minimizado quando se usa a interpretação de medição, já que a transição da fração própria para a imprópria ocorre com tranquilidade e fluidez.

EQUIVALÊNCIA

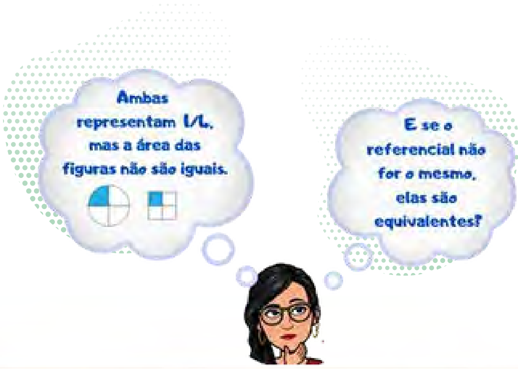
7

Pela abordagem parte-todo

A equivalência é acionada em situações que requerem ordenação ou comparação de medidas. Os livros didáticos brasileiros utilizaram representações parte-todo em modelos discretos de retângulos equiparticionados para abordagem da equivalência de frações.

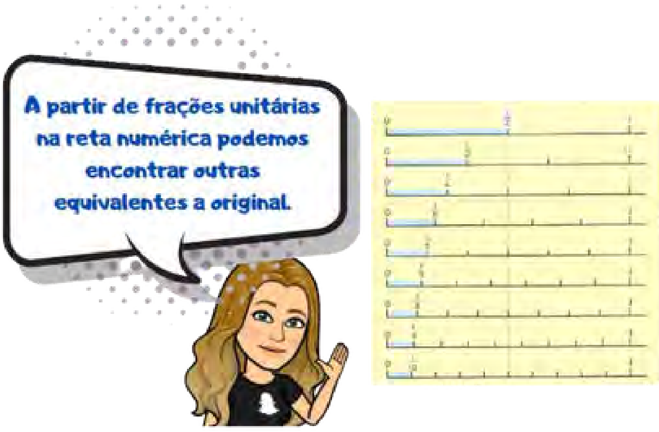


Aparentemente não há nada de errado com as representações acima, afinal, trazem representações pictóricas de frações equivalentes que auxiliam na compreensão do aluno. Entretanto, modelos que apresentam sempre o mesmo referencial para explicar a equivalência, não proporcionam o desenvolvimento da flexibilidade, pois, quando o aluno for confrontado com situações em que os referenciais tiverem medidas diferentes não conseguem estabelecer um critério de proporcionalidade.



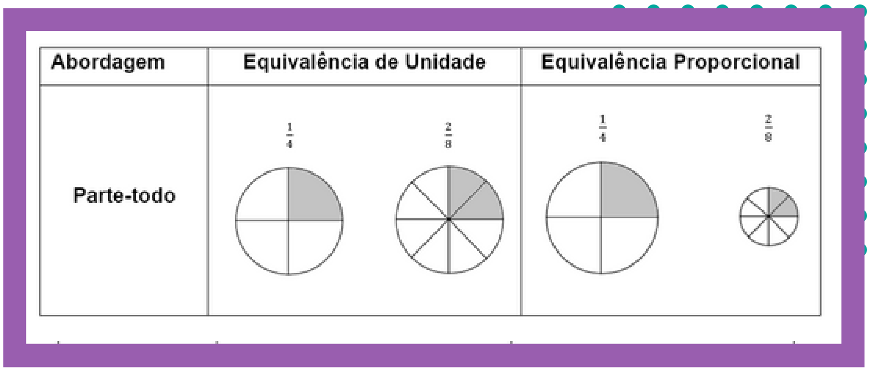
Pela abordagem medida

A equivalência de frações por meio da medida utiliza a fração unitária e a reta numérica como apoio, bem como situações envolvendo medidas de capacidade.



A figura acima mostra possibilidades de se encontrar frações equivalentes por meio da reta numérica. Veja que a representação traz as frações unitárias e o observador pode construir novas frações equivalentes utilizando as frações unitárias como base. Por exemplo, iterando a fração 1/4 duas vezes (1/4+1/4) obtemos a fração 2/4 que é equivalente a fração 1/2, e a reta numérica auxilia na correspondência dos valores.

Apesar de as representações por meio do subconstructo parte-todo e medida trazerem uma discussão conceitual, não estimulam a flexibilidade necessária para a diversidade de contextos que o mundo real requer. Isso porque existem dois tipos de equivalência: A equivalência de unidade e a equivalência proporcional[13]. Observe os exemplos ilustrados na tabela abaixo.



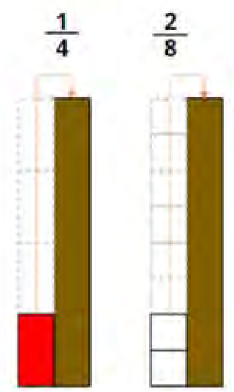
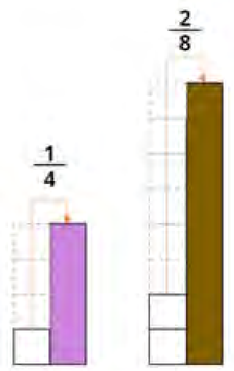
Abordagem	Equivalência de Unidade	Equivalência Proporcional
Parte-todo	$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{8}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{8}$

13. Pedersen e Bjerre (2021).

Na equivalência de unidade de referência é a mesma em ambas as frações, já na equivalência proporcional, apesar de a representação simbólica ser a mesma, a unidade referencial não é de mesmo tamanho. Por exemplo, 1/4 equivale a 2/8 se o referencial for o mesmo, ou seja, 1/4 de uma pizza é igual a 2/8 dessa mesma pizza. Entretanto, se o tamanho das pizzas forem diferentes temos que 1/4 é proporcional a 2/8, mas não se trata da mesma quantidade.

Pela abordagem medição

A tabela a seguir mostra a representação dos dois tipos de equivalência no contexto da medição. A equivalência de unidade utiliza-se da mesma unidade de medida, ou seja, o referencial é o mesmo, por outro lado, na equivalência proporcional a unidade de medida não é a mesma.

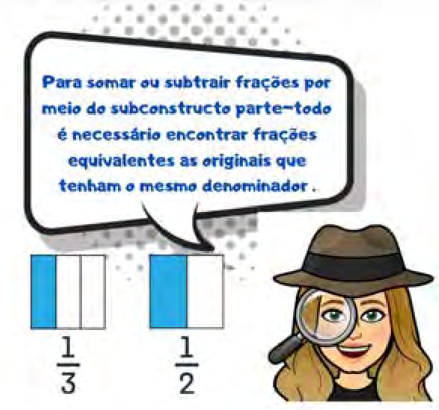
Abordagem	Equivalência de Unidade	Equivalência Proporcional
Medição		

Na tabela acima temos as frações 1/4 e 2/8 na representação pictórica de equivalência de unidade e equivalência proporcional. Note o leitor que no primeiro caso as frações 1/4 e 2/8 são equivalentes e iguais e no segundo caso, são equivalentes, mas não representam o mesmo comprimento.

A abordagem medição auxilia no processo de comparação quando temos um caso de equivalência proporcional, pois é possível equiparar as unidades de medida como veremos a seguir na redução ao mesmo denominador.

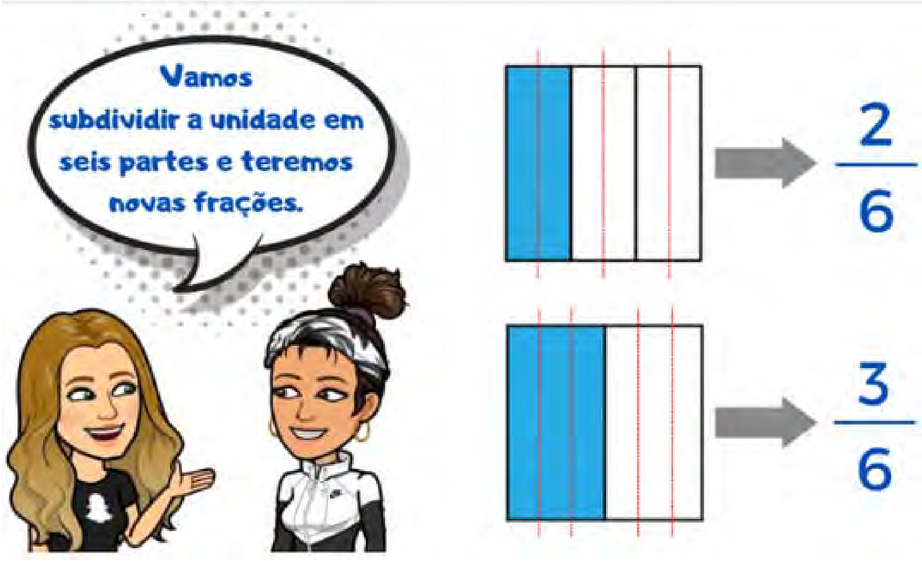
REDUÇÃO DE FRAÇÕES AO MESMO DENOMINADOR

8



A flexibilidade também é importante para se estabelecer um estado único de comparação. Para ordenar, somar ou subtrair frações com denominadores desiguais é preciso estabelecer frações com um denominador comum. Nos modelos parte-todo geralmente encontramos representações pictóricas de círculos e retângulos equiparticionados, e nos casos em que a unidade de referência não é a mesma, basta redividir a figura em um número de subpartes que seja múltiplo comum aos denominadores das duas frações.

Por exemplo, para somar 1/2 + 1/3 representadas na figura acima, é preciso pensar no menor múltiplo comum entre os denominadores 2 e 3 e encontrar frações equivalentes às originais com esse múltiplo como denominador.

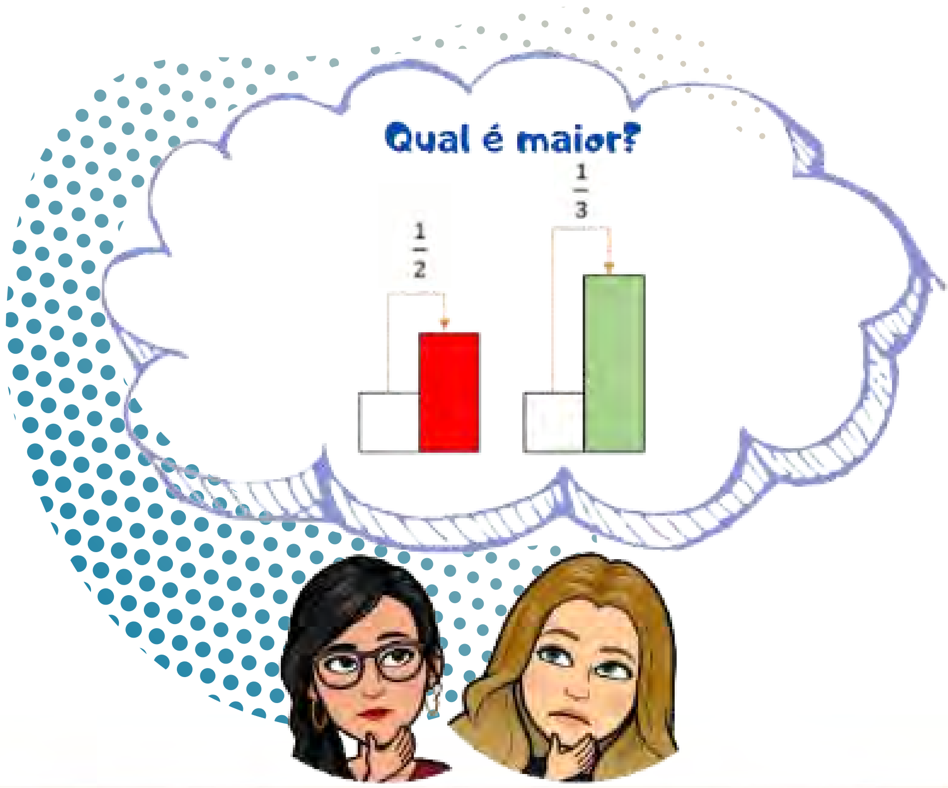


Como podemos observar na ilustração acima, quando encontramos frações equivalentes com um denominador comum, se torna fácil comparar seus tamanhos, assim como adicionar ou subtrair.

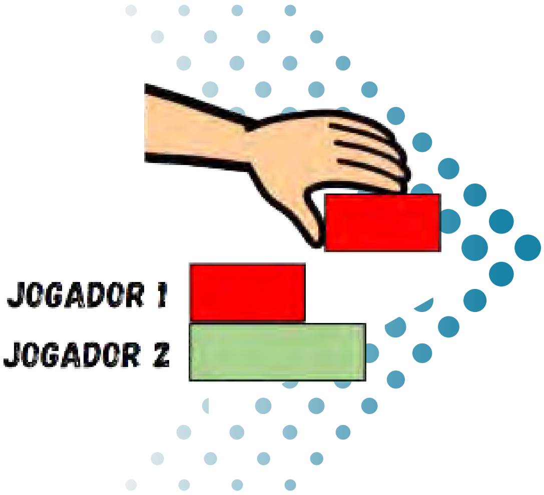
A abordagem medida se dá de forma semelhante, entretanto, utiliza sempre modelos contextualizados de área e capacidade ligados a uma unidade de referência graduada, e, antes da apresentação do critério de equivalência há um trabalho conceitual prévio para auxiliar o aluno a generalizar o algoritmo.

Apesar de ambas as abordagens (parte-todo e medida) apresentarem soluções pictóricas para redução ao denominador comum entre duas frações, elas não apresentam um algoritmo simplificado para se chegar ao menor denominador comum. Nesse caso, é preciso encontrar o menor múltiplo comum entre os denominadores, já que existem outros infinitos denominadores comuns para duas frações quaisquer.

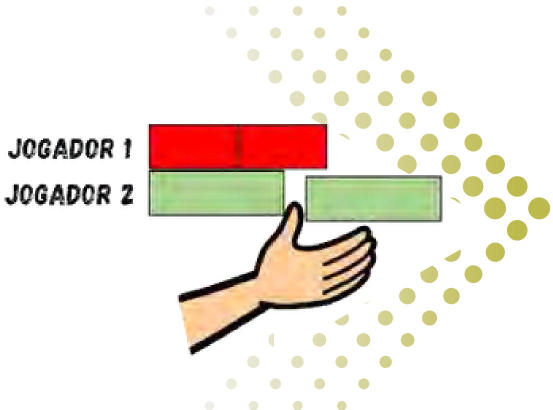
Para encontrar o menor denominador comum de duas frações, o professor Powell desenvolveu um jogo chamado “corrida das cores” cujo objetivo é o de igualar a unidade de medida em questão. Ao invés de se subdividir a unidade como é comum no contexto de parte-todo, são acrescentadas barras às duas unidades de medida que estão sendo comparadas, de suas respectivas cores, até que elas tenham o mesmo comprimento. Por exemplo, para comparar as frações 1/2 e 1/3 (acompanhe na figura abaixo), que apresentam unidades de medida distintas, é preciso estabelecer uma unidade comum para que seja possível realizar a comparação em relação às suas magnitudes.



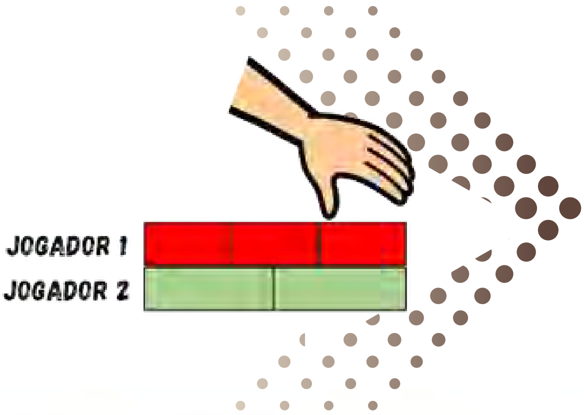
Com as barras vermelha e verde-clara em mãos, cada jogador posiciona suas respectivas barras na mesa. Chamaremos de jogador 1 o que estiver com a barra vermelha e jogador 2 o que estiver com a barra verde-clara. Em seguida, o jogador 1 inicia a partida inserindo barras vermelhas até que o comprimento de suas barras se iguale ou ultrapasse a barra do seu adversário.



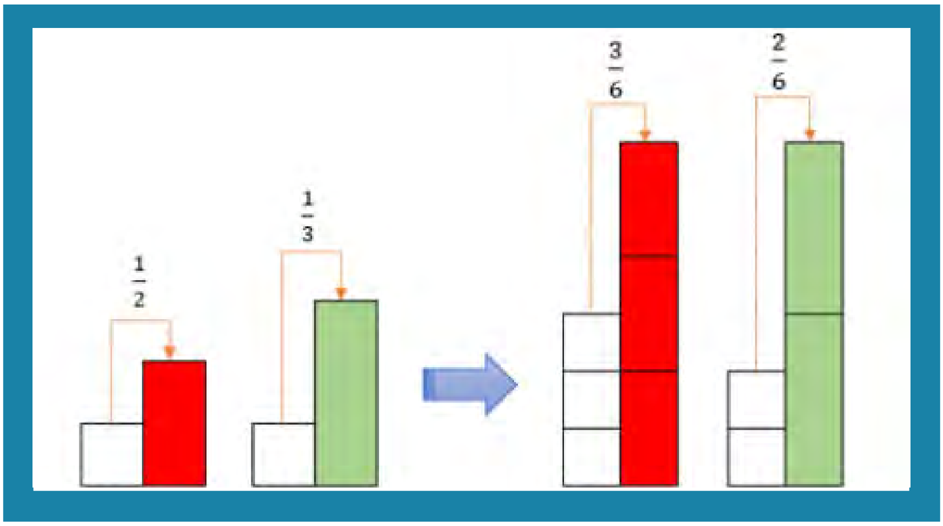
Após ultrapassar o comprimento da barra verde-clara é hora de o jogador 2 acrescentar barras verdes até que o comprimento de suas barras se iguale ou ultrapasse o comprimento das barras vermelhas.



Vence o jogador que conseguir igualar o comprimento das barras primeiro.



Posteriormente, volta-se às frações 1/2 e 1/3 e acrescenta-se na coluna da esquerda quantas barras foram utilizadas na corrida das cores como é possível verificar na ilustração abaixo.



Como foram utilizadas três barras vermelhas na corrida das cores, acrescentam-se três barras brancas do seu lado esquerdo, e, como foram utilizadas duas barras verde-claras na corrida, acrescentam-se duas barras brancas do seu lado esquerdo. Dessa forma, encontramos duas frações equivalentes às frações originais, e estabelecido o novo denominador comum, pode-se concluir que a fração 1/2 é maior que a fração 1/3.

AS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS E A ARITMÉTICA DE FRAÇÕES

9

As operações aritméticas básicas da matemática surgem de problemas e situações que demandam conceitos, procedimentos e diferentes representações, conectadas entre si. Para operar com frações é preciso, antes de tudo, compreender que esse conjunto de conceitos e procedimentos são demandados por situações do cotidiano e a partir desses problemas, resumindo-se em ideias operatórias que estão ligadas a diferentes situações-problema.

Tendo em vista que o professor é o mediador do conhecimento e no processo de mediação deve se levar em consideração seus objetivos de aprendizagem para os alunos. É importante que sejam escolhidas com cuidado as situações-problema que levarão os alunos a explorar todas essas ideias operatórias e que as operações não sejam apresentadas apenas como exercícios puramente de cálculo, ou seja, exclusivamente por meio de procedimentos. O aluno precisa conectar o campo numérico e suas operações com situações do cotidiano, para que seja construído um sentido para a referida operação.

A figura abaixo apresenta as ideias envolvidas nas operações adição e subtração:

Uma situação-problema pode envolver uma das ideias apresentadas no esquema acima ou uma combinação de mais de uma ideia, como uma sucessão de transformações positivas ou negativas ou uma combinação das duas.

O quadro abaixo exemplifica o uso dessas ideias na manipulação de números naturais e com frações.

Ideia Operatória	Exemplo com números naturais	Exemplo com frações
Juntar	Paulo tem 6 bolinhas de gude de vidro e 8 bolinhas de gude de metal. Ele tem ao todo 14 bolinhas: 6 + 8 = 14	Paulo percorreu 1/3 de determinada distância pela manhã e 2/3 deste percurso à tarde, no total ele percorreu 3/3 deste percurso: 1/3 + 2/3 = 3/3
Acrescentar	Paulo tinha 7 bolinhas de gude antes de jogar. Ganhou 4 bolinhas. Ele agora tem: 7 + 4 = 11	Paulo tinha 1/2 de R$1,00, ganhou 1/4 de R$1,00 e agora tem 3/4 de R$1,00: 1/2 + 1/4 = 2/4 + 1/4 = 3/4
Tirar	Juliana tinha 15 figurinhas e perdeu 12. Agora tem: 15 – 12 = 3	Sabrina tinha 3/4 de litro de leite na caixa e precisou retirar 1/4 de litro para fazer um bolo. Qual fração do litro ainda tem na caixa? 3/4 – 1/4 = 2/4
Comparar	João tem 15 figurinhas em seu álbum e Pedro tem 7 a mais que João. Quantas figurinhas Pedro tem? 15 – 7 = 8	Luíza tem 1/3 de suco de laranja em sua garrafa. Caio tem 2/3 a mais de suco de laranja que Luíza. Quanto Caio tem a mais que Luiza? 2/3 – 1/3 = 1/3
Completar	Camila está lendo um livro de 56 páginas. Já leu 36 páginas. Quantas páginas faltam ainda para ler? 56 – 36 = 20	João está a 1km da sua casa. Já percorreu 3/5 do caminho até sua casa. Qual fração do caminho ainda falta para percorrer? 5/5 – 3/5 = 2/5

Em relação à operação de multiplicação, é comum a apresentação apenas com a ideia de adição repetida, entretanto é uma ideia insuficiente para muitas situações. Observe o leitor as situações da tabela[14] abaixo:

Adição repetida: Antônio tem 3 carrinhos e Ana tem 3 bonecas. Quantos brinquedos eles têm ao todo?
Correspondência um-a-muitos: A mãe de Ana está fazendo 2 panelas de sopa. Em cada panela ela vai usar 3 tomates. Quantos tomates ela vai usar ao todo?

14. Turra (2016).

No primeiro exemplo temos uma situação que pode ser resolvida través de uma adição repetida porque a soma das partes dá o todo, que no caso são os brinquedos. Entretanto, no segundo exemplo temos a correspondência de 1 panela para 3 tomates e, nesse caso, as grandezas envolvidas no problema são diferentes precisando recorrer à ideia da proporcionalidade, já que a soma é utilizada em situações que tratam da mesma grandeza.

Sendo assim, reduzir a operação de multiplicação à ideia de adição repetida é insuficiente para muitas situações que podem surgir, sendo necessário expandir as ideias operatórias da multiplicação como mostra o esquema abaixo.

A configuração retangular compreende situações em que as variáveis representam medidas dispostas na horizontal e na vertical, de forma retangular. Já a combinatória apresenta a ideia de produto cartesiano entre dois conjuntos distintos. A comparação multiplicativa trabalha com comparações multiplicativas entre duas variáveis da mesma natureza e envolve a ideia de “quantas vezes mais” ou quantas vezes menos” e, em se tratando de frações, essa relação envolve o subconstructos operador, atuando como um esticador ou redutor da magnitude. Por fim, as proporções mostram a relação entre quatro quantidades, sendo duas quantidades medidas de um certo tipo e outras duas medidas de outro tipo e nestes casos são reveladas três quantidades com o intuito de encontrar uma quarta.

Veja na tabela a seguir exemplos de problemas envolvendo essas ideias operatórias.

Veja na tabela a seguir exemplos de problemas envolvendo essas ideias operatórias.

Ideia Operatória	Exemplo com números naturais	Exemplo com frações
Configuração retangular	Em um teatro há 12 fileiras com 10 cadeiras. Qual o total de cadeiras do teatro? $12 \times 10 = 120$	Paulo possui um terreno quadrado com 10 metros de lado. Irá construir uma casa que ocupará 1/4 da medida de cada lado. Qual fração da área do terreno a casa irá ocupar? $1/4 \times 1/4 = 1/16$
Combinatória	A sorveteria Bloom oferece 5 sabores de sorvete e 3 opções de calda. Quantas combinações de sorvetes são possíveis fazer com esses ingredientes? $5 \times 3 = 15$	Não se aplica
Comparação Multiplicativa	Uma loja do Shopping vende tudo 3 vezes mais caro que a lojinha da esquina. Uma sandália custa R$ 6,00 na lojinha da esquina. Quanto custa a mesma sandália na loja do Shopping? $3 \times 6 = 18$	Em uma prova de salto em distância, a média dos competidores é de 8 m. O salto de Patrick foi de 4/3 vezes a média dos competidores. Qual foi a distância em metros do salto de Patrick? $4/3 \times 8 = 32/3$
Proporcionalidade	Uma caixa de leite custa R$4,00. Qual é o preço de três caixas de leite? $3 \times 4 = 12$	Um litro de leite custa R$4,00. Qual é o preço de 1/2 litro de leite ? $1/2 \times 4 = 2$

A divisão surge em situações de configuração retangular quando conhecida a área e deseja-se encontrar a medida do lado e nas situações de comparação multiplicativa e proporcionalidade. As ideias operatórias da divisão podem se dividir em:

A divisão partitiva amplamente utilizada no conjunto dos números naturais não tem efeitos na divisão entre duas frações, e nesses casos, é necessário recorrer à divisão quotitiva. Por exemplo, na divisão $\frac{3}{5} \div \frac{1}{5}$, é necessário verificar quantas quotas de $\frac{1}{5}$ são necessárias para completar $\frac{3}{5}$.

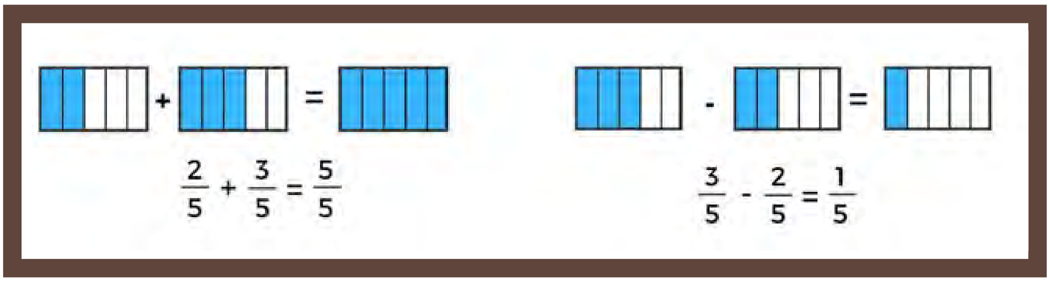
O raciocínio aditivo tem relação com o parte-todo, ou seja, o todo é a soma das partes. Neste caso, as situações aditivas relacionam o tamanho de conjuntos às ações de juntar ou separar objetos e conjuntos. Entretanto, no raciocínio multiplicativo existe uma relação fixa entre duas variáveis, que envolve o raciocínio proporcional, o qual é essencial para construção do conceito de fração.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

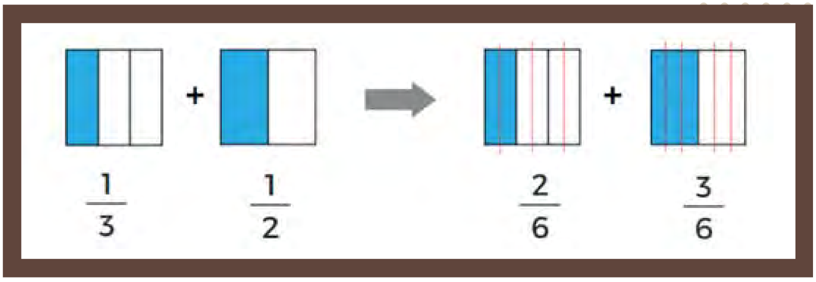
10

Adição e subtração de frações por meio da abordagem parte-todo

A adição e subtração de frações na abordagem parte-todo utiliza representações discretas e, nesses casos, as partes estão sempre dentro do mesmo "todo". Na figura abaixo temos exemplos de adição e subtração de frações no contexto parte-todo em que os denominadores são iguais.



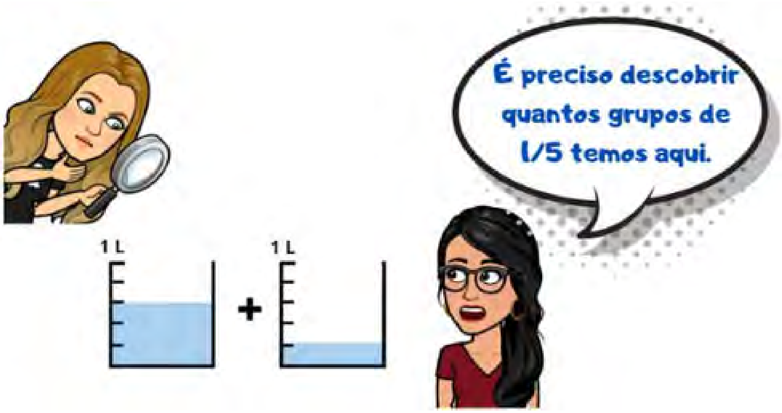
Na adição e subtração de frações de denominadores desiguais é preciso igualar os denominadores antes de efetuar a operação utilizando a redução ao denominador comum. Veja a representação da operação abaixo.



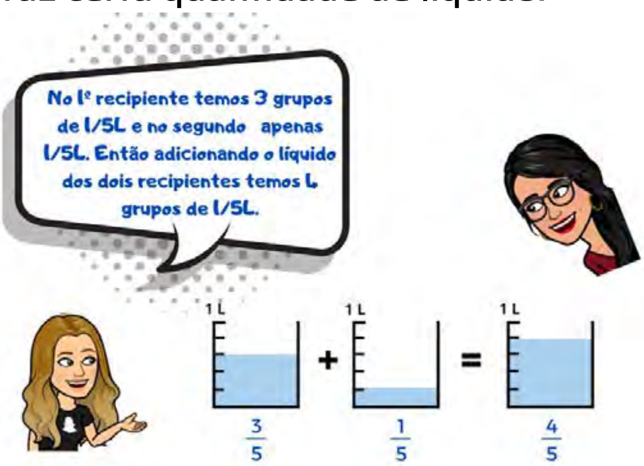
Este tipo de representação geométrica discretizada não tende a levar o aluno a raciocinar de forma proporcional, induzindo-o à dupla contagem, tratando numerador e denominador da fração como dois números naturais independentes (sem relação).

Adição e subtração de frações por meio da abordagem medida

A abordagem de soma e subtração de frações por meio da medida utiliza modelos cotidianos de medidas de área ou capacidade. Nestes contextos é necessário encontrar a fração unitária para, então, iterá-la e encontrar a quantidade solicitada. Na ilustração abaixo, há uma discussão entre os personagens para encontrar a fração unitária.



Na abordagem por meio do subconstructo medida, diferentemente da parte-todo que apenas junta as quantidades para encontrar o total, há um estímulo para que se encontre a fração unitária e, a partir dela, é preciso realizar a sua iteração para alcançar a nova quantidade. Outra diferença é que nas representações de medida a referência é explicitada (e.g., 1L), o que quase sempre não acontece nos modelos parte-todo. Situações em que o referencial é desconhecido dificultam a abstração do aluno quando não é oferecida uma imagem de apoio. Na ilustração abaixo temos uma situação de medida cujo recipiente tem capacidade de 1L (referencial) e traz certa quantidade de líquido.



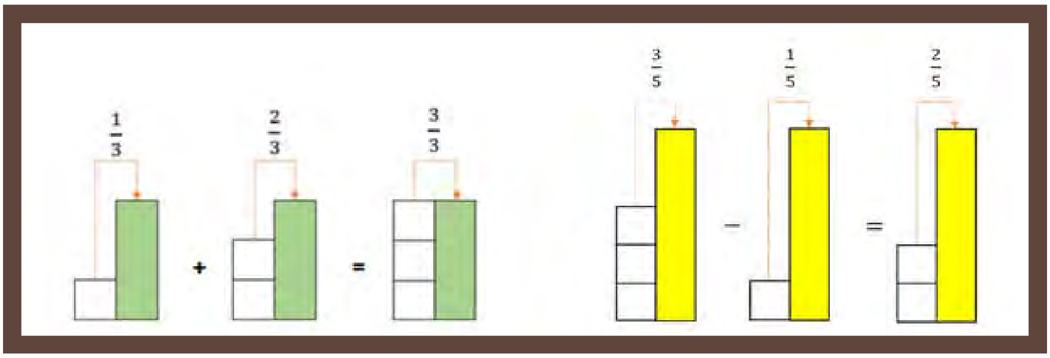
Observe que na representação acima, por meio da iteração da fração unitária 1/5, encontra-se o total de líquido do primeiro frasco (3/5 = 1/5+1/5+1/5) e a junção do líquido dos dois frascos é equivalente a 4/5 (1/5+1/5+1/5+1/5). Da mesma forma, por meio da iteração da fração unitária é conduzida a subtração de frações com mesmo denominador.

Em situações que envolvem adição e subtração de frações com denominadores diferentes o aluno deve ser estimulado a encontrar a equivalência para posteriormente realizar a soma de frações com denominadores iguais.

Adição e subtração de frações por meio da abordagem medição

A abordagem por meio da medição ocorre com a utilização de medidas contínuas e as frações são formadas pela comparação multiplicativa entre pares de quantidades.

Na representação abaixo podemos ver a ilustração da adição e subtração de frações o contexto de medição pela manipulação das barras de Cuisenaire.



Na ilustração da esquerda, a barra branca representa 1/3 do comprimento da barra verde-clara e duas barras brancas representam 2/3 do comprimento da barra-verde-clara. Sendo assim, a junção da barra branca da primeira fração com as duas barras brancas da segunda fração corresponde a 3/3 do comprimento da barra verde-clara.

Analogamente à situação anterior, do lado direito da figura acima temos que a subtração das barras brancas resulta em duas barras brancas que equivalem a 2/5 do comprimento da barra amarela.

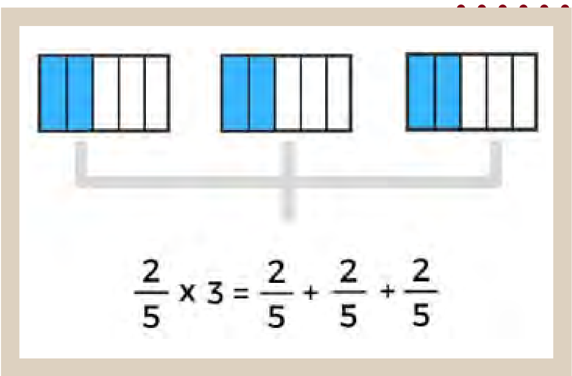
Para a adição e subtração de frações com denominadores desiguais, basta encontrar as frações equivalentes de menor denominador comum por meio da "corrida das cores" e realizar a operação.

MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES

11

Multiplicação de fração pela abordagem parte-todo

É comum encontrarmos a abordagem de multiplicação de números inteiros por frações utilizando a ideia de adição repetida. Observe um exemplo comumente encontrado nos livros didáticos brasileiros na ilustração abaixo.



Entretanto, a ideia de adição repetida não é suficiente para explicar a operação de multiplicação de fração por fração. Por exemplo, na multiplicação 1/3 × 2/5, não faz sentido adicionar 1/3 vezes 2/5.

Multiplicação de fração pela abordagem medida

A multiplicação de frações no contexto medida utiliza modelos de áreas combinados com retas numéricas para apoiar o cálculo.

A solução pictórica apresenta um modelo de área combinado com uma reta numérica para apoiar o raciocínio subjacente ao cálculo. Na figura abaixo a reta numérica representa a quantidade de latas de tinta e a área representa a delimitação da cerca a ser pintada.

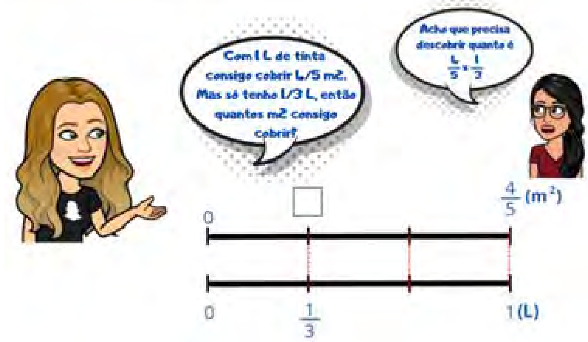
Observe que a abordagem medida encontra a fração unitária para que através de sua iteração encontre-se a quantidade solicitada. A ideia aqui é descobrir quantos conjuntos de 1/5 m^2 são cobertos por 3 latas de tinta. Sendo assim 3 conjuntos de 2/5 m^2 podem ser calculados da seguinte forma:

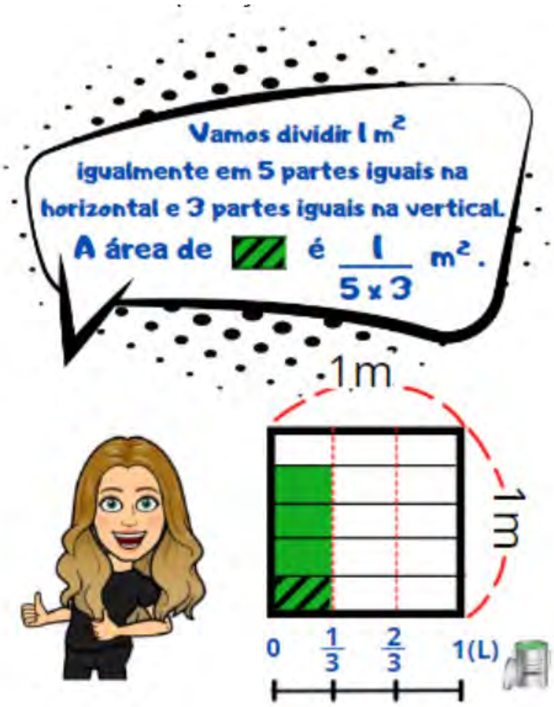
$$\frac{2}{5} \times 3 = (2 \times 3)\ conjuntos\ de\ \frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{5} \times 3 = \frac{2 \times 3}{5} = \frac{6}{5}$$

A representação pictórica de área combinada com a reta numérica auxilia o aluno a raciocinar sobre o cálculo e generalizar o algoritmo.

Podemos utilizar também o apoio de duas retas numéricas, uma para representar a área e a outra para representar a quantidade de litros de tinta como é possível verificar na ilustração abaixo.





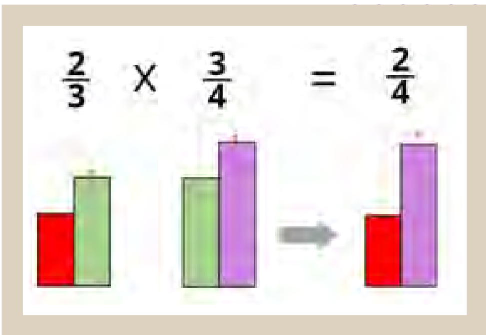
Ou podemos utilizar o modelo de área combinado com linha numérica para resolver a multiplicação entre as duas frações com ilustrado na figura abaixo. A representação de área de 1m² é subdivida em 5 partes iguais na horizontal e 3 partes iguais na vertical. A reta numérica representa 1 litro de tinta que é a unidade de referência do problema. Observe que cada de área corresponde a $\frac{1}{5 \times 3}$ m². A área pintada corresponde a 4 grupos de $\frac{1}{5 \times 3}$ m², ou seja:

$$4 \times \frac{1}{5 \times 3} = \frac{4 \times 1}{5 \times 3} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{15}\, m^2$$

Multiplicação de fração pela abordagem medição

No contexto de medição, para realizar a multiplicação de frações é necessário que o denominador da primeira fração seja o mesmo do numerador da segunda fração. Nessas condições, o resultado será o numerador da primeira fração sobre o denominador da segunda fração.

Tomamos como exemplo a multiplicação $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$. A barra vermelha mede 2/3 do comprimento da barra verde clara e a barra verde clara mede 3/4 da barra roxa. O resultado da relação multiplicativa será o comprimento da primeira barra da primeira fração em relação ao comprimento da segunda barra da segunda fração como ilustrado na figura a seguir.



Quando as frações não apresentarem o denominador da primeira igual ao numerador da segunda, é preciso encontrar o mmc entre esses valores e encontrar frações equivalentes às originais.

No caso da multiplicação $\frac{3}{2} \times \frac{5}{4}$, precisamos primeiramente encontrar o MMC entre 2 e 5, que é 10. Posteriormente, vamos encontrar uma fração equivalente a $\frac{3}{2}$ que tenha denominador 10 e outra fração equivalente a $\frac{5}{4}$ que tenha numerador 10.

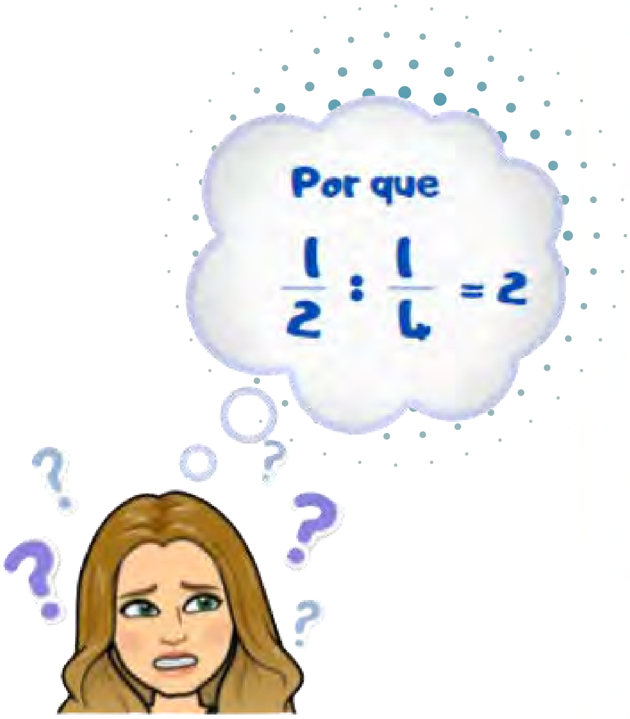
$$\frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{10} \times \frac{10}{8} = \frac{15}{8}$$

O resultado será o numerador da primeira fração sobre o denominador da segunda, ou seja, 15/8.

DIVISÃO DE FRAÇÕES

12

Na divisão entre duas frações o algoritmo mais comum encontrado nos livros didáticos é o de inverter e multiplicar, ou seja, multiplica-se a primeira fração pelo inverso da segunda. Mas, qual a origem do algoritmo?

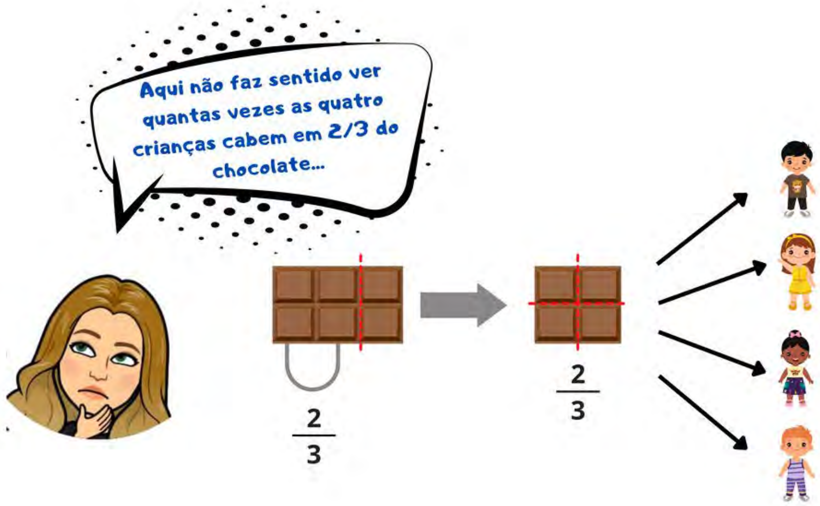


Vamos ver na sequência como é realizada a divisão de frações na abordagem parte-todo, medida e medição, e como são apresentadas as soluções pictóricas e algorítmicas em cada uma delas.

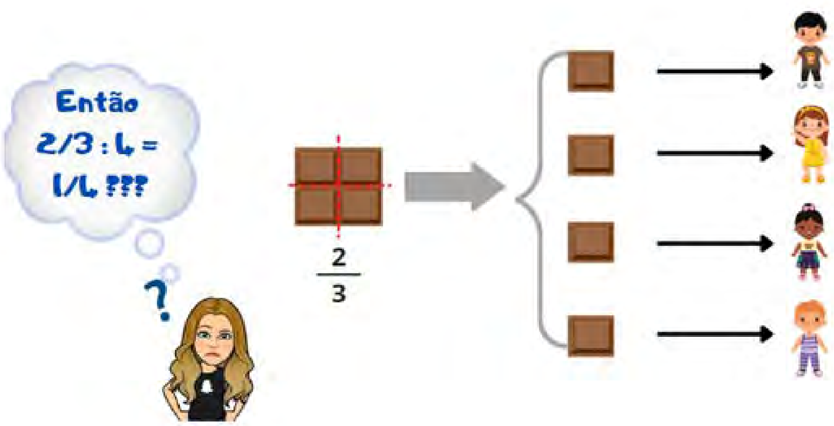
Divisão de fração pela abordagem parte-todo

Na abordagem parte-todo é comum encontrarmos divisões entre frações apoiadas em soluções geométricas de retângulos equiparticionados. No exemplo a seguir temos um caso de divisão de um número inteiro por uma fração.

Nesse tipo de situação contamos quantos 2/3 são necessários para completar as 4 unidades. Se 2/3 cabem seis vezes em 4 barras de chocolate, então $4 \div \frac{2}{3} = 6$. Aqui foi utilizada a ideia da divisão quotitiva, mas será que ela consegue explicar qualquer divisão de frações? E se fossem $\frac{2}{3} \div 4$? Vamos ver...



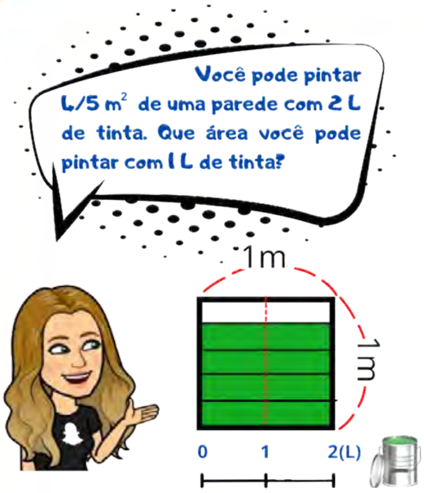
Neste caso, não é possível resolver o problema pela divisão quotitiva. Vejamos se a divisão partitiva ajuda nesta solução.



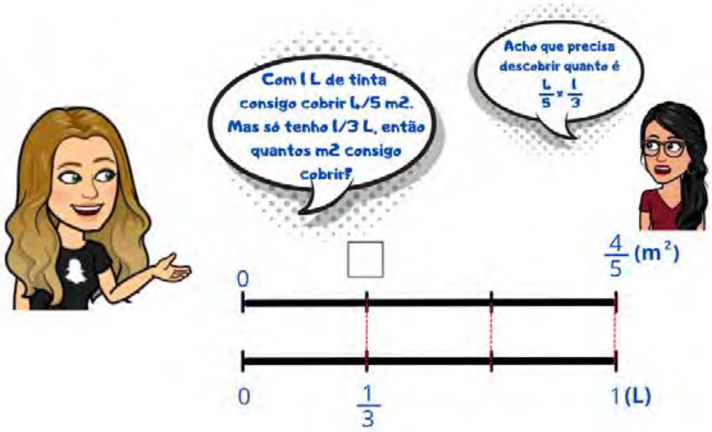
Ao utilizarmos a divisão partitiva podemos cometer o equívoco de encontrar 1/4 ao invés de 1/6. Sendo assim, a ideia a ser utilizada deveria ser a de medida, ou seja, o  corresponde a quanto de  ?

Divisão de fração pela abordagem de medida

A divisão de fração por número inteiro através da perspectiva de medida utiliza modelos de área ou combinados com uma reta numérica.



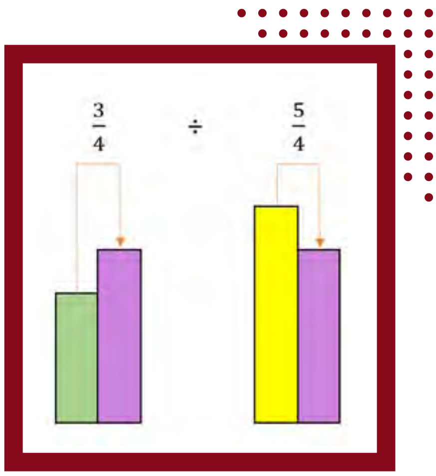
No caso da divisão 4/5 por 2, é possível pensar na metade de 4/5, ou seja, 1/2 de 4/5 que pode ser expresso pela comparação multiplicativa 1/2 × 4/5. Essa abordagem parece enfatizar a conexão entre as operações de multiplicação e divisão de frações, que pode ser uma explicação matemática para o algoritmo de inverter e multiplicar utilizado na divisão de frações.



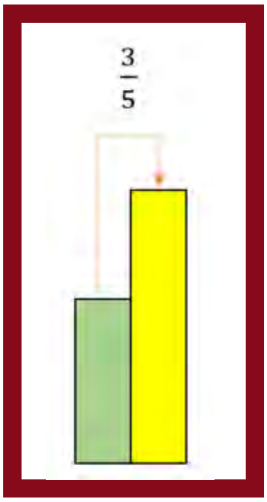
De outro modo, se transformarmos a fração 4/5 em um conjunto de frações unitárias (1/5 + 1/5 + 1/5 + 1/5) e iterar duas vezes a fração unitária de 1/5, chegaremos ao resultado 2/5.

Divisão de fração por fração pela abordagem de medição

Para a divisão de fração por outra fração, vamos tomar como exemplo a divisão de $\frac{3}{4} \div \frac{5}{4}$. Usando as barras de Cuisenaire e a interpretação medição temos:



Para resolver essa divisão precisamos descobrir quantos comprimentos de 5/4 são necessários para medir o comprimento de 3/4. Como a unidade de medida é a mesma (barra roxa), precisamos verificar qual é a medida da barra verde-clara em relação à barra amarela.



Ao medir a barra amarela com a barra verde-clara podemos concluir que a barra verde-clara mede 3/5 do comprimento da barra amarela. Podemos demonstrar a generalização da fórmula da seguinte forma:

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{4} = \frac{3 \times 4}{4 \times 4} \div \frac{4 \times 5}{4 \times 4} = \frac{3 \times 4}{4 \times 5} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{20} = \frac{4}{5}$$

Diante disso podemos concluir que:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} \div \frac{b \times c}{b \times d} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c},$$

sendo: $a, b, c, d \in Z$ e $b, c, d \neq 0$.

Temos também as situações de divisão de fração por fração em que os denominadores são desiguais. Nestes casos, é preciso primeiramente encontrar frações equivalentes que tenham um denominador comum para então efetuar a divisão.

AFINAL, O QUE TEMOS A DIZER SOBRE O ENSINO DE FRAÇÕES?

13

O objetivo desse livro não é defender o uso de um único subconstructo no ensino de frações. Pelo contrário, é necessário oferecer ao aluno diversas interpretações das frações aproximando-as das situações em que elas podem surgir.

Para além da manipulação de algoritmos, é importante que o aluno desenvolva as ideias subjacentes à aritmética de frações e compreenda os efeitos gerados por essas operações. O aluno precisa compreender por que na operação de multiplicação entre duas frações próprias o resultado é sempre menor que os fatores, assim como compreender que na divisão entre duas frações próprias o resultado pode ser maior que o dividendo.

Sendo assim é necessário que se desenvolva o conceito junto ao procedimento, para que, ao manipular as frações, o aluno encontre sentido em suas relações. Para isso, não basta apenas deduzir fórmulas ou apresentar representações pictóricas, é necessário que essas representações estejam em harmonia e que não apresentem fragilidades conceituais quando há mudança de contextos.

A partir das discussões apresentadas, defendemos o uso de variáveis contínuas na introdução de frações, pois, acreditamos que ela tem potencial para o desenvolvimento da ideia de proporcionalidade e senso de magnitude. A abordagem medição, além de utilizar medidas contínuas trabalha com a perspectiva de relação multiplicativa entre pares de quantidade, não necessitando da subdivisão de objetos. Já a abordagem medida, se aproxima da abordagem de medição, entretanto, necessita da discretização do objeto para que se encontre a fração unitária. Quanto à abordagem parte-todo, ela não deve ser descartada, mas pode ser apresentada com moderações intercalada com outras ideias.

Vimos que as representações parte-todo apresentam abordagens insuficientes para justificar os algoritmos e suas generalizações, já a abordagem medida e medição trazem um apoio a esses elementos.

REFERÊNCIAS

Abreu-Mendoza, R. A., Coulanges, L., Ali, K., Powell, A. B., & Rosenberg-Lee, M. (2020). Children's discrete proportional reasoning is related to inhibitory control and enhanced by priming continuous representations. Journal of Experimental Child Psychology, 199, 104931.

Abreu-Mendoza, R. A., Coulanges, L., Ali, K., Powell, A. B., & Rosenberg-Lee, M. (2021). From non-symbolic to symbolic proportions and back: a Cuisenaire rod proportional reasoning intervention enhances continuous proportional reasoning skills. Recuperado de https://doi.org/10.31234/osf.io/tc8af

Amaral, Camila Augusta do Nascimento. (2021). Conceito de fração pela perspectiva de medição: Uma abordagem baseada no 4ª-Instructional Model utilizando as barras de Cuisenaire e conduzida por um Lesson Study. (Dissertação de Mestrado). Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória. Recuperado de https://cutt.ly/gKPTyOl

Behr, Merlyn J., Lesh, Richard, Post, Thomas. R., & Silver, Edward A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds), Acquisition of mathematics concepts and processes, (pp. 91-126). Academic Press. Recuperado de Rational-Number Concepts (archive-it.org)

Caraça, Bento de Jesus. (1951). Conceitos Fundamentais da Matemática. Lisboa: Tipografia Matemática.

Lamon, Susan J. (2012).Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3th edition. New York: Routledge, 2012.

Nunes, Terezinha, & Bryant, Peter (1997). Crianças Fazendo Matemática. Porto Alegre: Artes Médicas.

Pinhal, Daiane Vieira de Rezende. (prelo). A aritmética de frações em livros didáticos brasileiros e japoneses. (Dissertação de Mestrado). Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória.

Powell, Arthur Belford (2018). Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A Instructional Model. Perspectiva, 36(2), 399-420. Recuperado de https://doi.org/10.5007/2175-795X.2018v36n2p399

Powell, Arthur Belford (2019). Aprimorando o conhecimento dos estudantes sobre a magnitude da fração: Um estudo preliminar com alunos nos anos iniciais. RIPEM, 9(2), 50-68. Recuperado de https://cutt.ly/kKPRhb1

Powell, A. B. (2020a). Operações com Frações - parte 1. [Arquivo de vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=JvXvzw7Vpns&feature=youtu.be.

Powell, A. B. (2020b). Operações com Frações - parte 2. [Arquivo de vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=ccEtz9LzA3s.

Powell, A. B. (2020c). Operações com Frações - parte 3. [Arquivo de vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=Ckf-MDJbuak.

Powell, A. B. (2020d). Operações com Frações - parte 4. [Arquivo de vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=CFboWc8mwjM.

Scheffer, Nilce Fátima, & Powell, Arthur Belford (2019). Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Revemop, 1(3), 476-503. Recuperado de https://periodicos.ufop.br/revemop/article/view/1977/1674

Siegler, Robert S., Fazio, Lisa K., Bailey, Drew H., & Zhou, Xinlin (2013). Fractions: The new frontier for theories of numerical development. Trends in cognitive sciences, 17(1), 13-19. Recuperado de https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1364661312002653

Souza, Maria Alice Veiga Ferreira de; Powell, Arthur Belford (2021). How do textbooks from Brazil, the United States, and Japan deal with fractions?. Acta Scientiae, 2(4), 77-111. Recuperado de http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/6413

Turra, F. F. R. (2016). O conhecimento específico do campo multiplicativo de professores do 3º e 4º ano do ensino fundamental (Bachelor's thesis, Universidade Tecnológica Federal do Paraná). Recuperado de http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/15859/1/campomultiplicativoprofessoresensinofundamental.pdf

Vergnaud, Gérard. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. Addition and subtraction: A cognitive perspective, 39-59. Recuperado de https://cutt.ly/IKPRmtI

Vergnaud, G. A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar (2009). Tradução Maria Lucia Faria Moro; revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Editora da UFPR.

Wortha, Silke M., Bloechle, Johannes, Ninaus, Manuel, Kiili, Kristian; Lindstedt, Antero, Bahnmueller, Júlia, Moeller, Korbinian, & Klein, Elise (2020). Plasticidade neurofuncional na aprendizagem por fração: um estudo de treinamento de fMRI. Trends in Neuroscience and Education, 21, 100141. Recuperado de https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S221194932030017X?via%3Dihub

PÓSFACIO

O livro ”Aritmética de Frações” de Daiane e Maria Alice, Produto Educacional da Dissertação de um Programa de Mestrado Profissional foi elaborado para professores que ensinam matemática na Educação Básica. Este livro promove reflexões acerca do tema frações e suas operações, constitui-se em resultado de pesquisa de mestrado que discute e aprofunda o tema, na sua abordagem conceitual e operações, em dois países.

O estudo que foi transformado em livro incentiva o professor que ensina matemática a diversificar suas propostas para que os alunos ampliem seus modos de ver, representar e conceber o tema. Coloca em destaque também os motivos que levam o aluno a se equivocar, realiza uma conexão com os aspectos conceituais e compreensão de formas como o ensino tem sido idealizado, fatores a serem considerados na prática docente.

De acordo com o estudo apresentado no livro, o tema aritmética de frações está entre tópicos desafiadores para o ensino da matemática escolar. Apresenta pesquisas que apontam para a insuficiência do domínio conceitual de frações como um dos motivos que levam ao fracasso escolar em tópicos futuros da matemática, como a álgebra e a probabilidade.

Este livro segue uma sequência que contempla: O Conceito de frações; Os Subconstructos das frações nas noções de Parte-todo, Medida, Quociente, Razão e Operador. Trata dos tipos de Frações, da Equivalência, da Redução de frações ao mesmo denominador pela abordagem parte-todo, das Operações aritméticas e da Aritmética de frações, todos estes aspectos desenvolvidos e amparados por um referencial teórico e histórico do tema.

A partir da análise de livros didáticos do Brasil e do Japão, realizada no estudo da dissertação, as autoras analisaram e aprofundaram o tema, ensino de frações e suas operações aritméticas. Assim, o livro apresenta aspectos conceituais importantes para operar com frações, além de formas de ensino encontradas nas duas coleções de livros didáticos analisados e na comunidade. E enfatiza também a relevância de trabalhar com comparação e diferentes materiais para explorar o tema desde os anos iniciais, e em áreas do conhecimento matemático.

Parabéns às autoras pela obra, que está muito bem fundamentada e estruturada na ordem dos capítulos, nos referenciais que se complementam e nas sugestões de atividades exploratórias distribuídas ao longo de todo o texto. Constitui-se em uma contribuição válida para pesquisadores e professores que ensinam matemática na Educação Básica, e em formação inicial e continuada, além de apresentar potenciais reflexões teóricas sobre o tema frações.

A leitura foi uma viagem ilustrada e muito didática, viagem que com certeza todos os professores que ensinam frações na Educação Básica irão gostar de fazer também, considerando diferentes frentes de ensino e reflexão para o tema.

Nilce Fátima Scheffer
Agosto de 2022.

MINICURRÍCULO DAS AUTORAS

DAIANE VIEIRA DE REZENDE PINHAL

Mestranda em Educação em Ciências e Matemática pelo Instituto Federal do Espírito Santo - Ifes, Licenciada em Matemática pela Universidade Estácio de Sá (2019), formada em Ciências Contábeis pela Faculdade Pitágoras - Campus Guarapari (2009), possui especialização em Gestão Estratégica de Negócios pelo Ifes - Campus Guarapari (2015) e em Docência do Ensino Superior pela Fundação Mário Schenberg (2012). É professora de matemática e atua como técnica do setor pedagógico do Ensino Fundamental Anos Finais no município de Guarapari - ES.

Currículo Lattes
http://lattes.cnpq.br/9795292495063231

MARIA ALICE VEIGA FERREIRA DE SOUZA

Graduação em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo -Ufes, mestrado em Educação Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo - Ufes, doutorado em Psicologia da Educação Matemática pela Universidade Estadual de Campinas-Unicamp, pós-doutorado em Resolução de Problemas de Matemática na Universidade de Lisboa - Portugal, pós-doutorado em Números Racionais e 4A-Instructional Model pela Rutgers University - United States of America. É professora de Matemática das graduações e pós-graduações do Instituto Federal do Espírito Santo - Ifes. É docente do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (Educimat) do Ifes. Foi Coordenadora Geral de Pesquisa e Extensão do Cefor - Reitoria - Ifes, Coordenadora Administrativa do Mestrado em Educação Agrícola UFRRJ-Ifes, Coordenadora da Pós-graduação em Engenharia de Produção do Campus Cariacica - Ifes. É pesquisadora bolsista da Fapes. Possui experiência na área de Matemática, atuando principalmente na área de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear e Probabilidade e Estatística nas Engenharias e Cursos das Ciências Exatas. Na Educação Matemática atua, principalmente, em: Lesson Study, formação de professores, linguagem matemática, habilidade matemática, representação mental e teorias de aprendizagem. Foi parecerista adhoc da Câmara de Assessoramento da Fapes.

Currículo Lattes

http://lattes.cnpq.br/2876710785262591

Edifes

"A álgebra é a porta de entrada para a matemática avançada e as frações são a chave do portão."

Arthur B. Powell

ISBN: 978-85-8263-601-5

9 788582 636015