FICHA DE TRABALHO para Professor – FTp – Problema 04

2022

Autor: Eric Robalinho – e-mail: ericrobalinho@yahoo.com.br

PROBLEMA 04 - Lei de formação de uma colmeia

Área: Dinâmica populacional

Referências bibliográficas:

BASSANEZI, R.C. Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia. 4. ed. 2ª reimpressão, São Paulo: Contexto, 2021.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

ENUNCIADO: (BASSANEZI, 2021, p.230)

Apresentar um modelo matemático contínuo da dinâmica populacional de uma nova colmeia, levando-se em consideração dois estágios distintos: o período de adaptação que é intermediário entre a postura inicial e o nascimento das primeiras operárias (21 dias), e o período de desenvolvimento quando nascem diariamente 2000 abelhas. Vamos utilizar a hipótese, em relação ao período inicial, que o índice de mortalidade das operárias é proporcional à quantidade que se tem de abelhas em cada instante.

Proposta de trabalho:

Fazer a análise do problema, levantando inicialmente as características de uma colmeia. A partir do enunciado, escrever o problema proposto em linguagem matemática, ou seja, usando equações diferenciais e condições iniciais. Resolver as equações diferenciais, interpretando e discutindo a solução. Construir gráficos a partir da solução encontrada. Realizar as tarefas propostas.

```
#
#
#-----------------------------------------------------------#
# Equações para o modelo contínuo                           #
#-----------------------------------------------------------#
#
clear
clc
#
# No caso contínuo (t é a variável contínua), podemos descrever as
# informações do enunciado da seguinte maneira:
#
# dy/dt = -0,025y
# y(0) = 10000,   0 <= t <= 21                              (1)
#
# onde dy/dt indica a variação instantânea da população de abelhas. Até os
# primeiros 21 dias, a variação da população de abelhas (mortalidade) é
```

```
# proporcional à quantidade presente em cada instante, com um índice de
# mortalidade igual a 1/40 = 0,025 e uma população inicial de 10000 abelhas.
#
# A solução do problema de valor inicial (1) é obtida separando-se as
# variáveis e integrando,
#
# dy/y = -0,025 dt
#
# integral dy/y = integral -0,025 dt
#
# portanto, ln y = -0,025 t + k
#
#          e y(t) = e^k e^(-0,025 t)                          (2)
#
# Condição inicial: y(0) = 10000, obtemos e^k = 10000, e reescrevemos (2),
#
#          y(t) = 10000 e^(-0,025 t),   0 <= t <= 21
#
# Para o período de crescimento da colmeia, consideramos a equação
# diferencial (modelo assintótico):
#
# dy/dt = k (L - y)                                           (3)
#
# onde L = 80000 é a população limite, t >= 21, k = ln 0,975
# e y(21) = 7500 (5500 remanescentes mais 200 recém-nascidas)
#
# Resolvendo (3) por meio de separação de variáveis e integração, temos:
```

#

y(t) = L - e^c e^(-k(t-21)),   t >= 21   (4)

#

Usando y(21) = 7500, temos -e^c = 7500 - 80000 = -72500

#

Portanto, y(t) = -72500 e^(-0,02532(t-21)) + 80000, t >= 21   (5)

#

#

Tarefa 1:

Mostre a resolução de (3), apresentando a separação das variáveis e a solução das integrais obtidas.

Resposta:

Temos, inicialmente, a expressão para o modelo exponencial assintótico, dada pela equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = k(L - y)$$

Onde L = 80000 é a população limite, t >=21, k = ln 0.975, y(21) = 7500.

Separando as variáveis temos:

$$\frac{dy}{L - y} = kdt$$

Integrando, temos:

$$-\ln(L - y) = kt + c$$

Portanto, escrevemos:

$$\mathrm{L} - \mathrm{y} = e^{c}e^{-kt}$$

E considerando, agora, que esta equação está definida para t >= 21, escrevemos:

$$\mathrm{y(t)} = \mathrm{L} - e^{c}e^{-k(t-21)}, t \geq 21$$

Fazemos y(21) = 7500,

$$-e^{c} = 7500 - 80000 = -72500$$

E, finalmente,

$$\mathrm{y(t)} = -72500e^{-0.02532(t-21)} + 80000, t \geq 21$$

Tarefa 2:

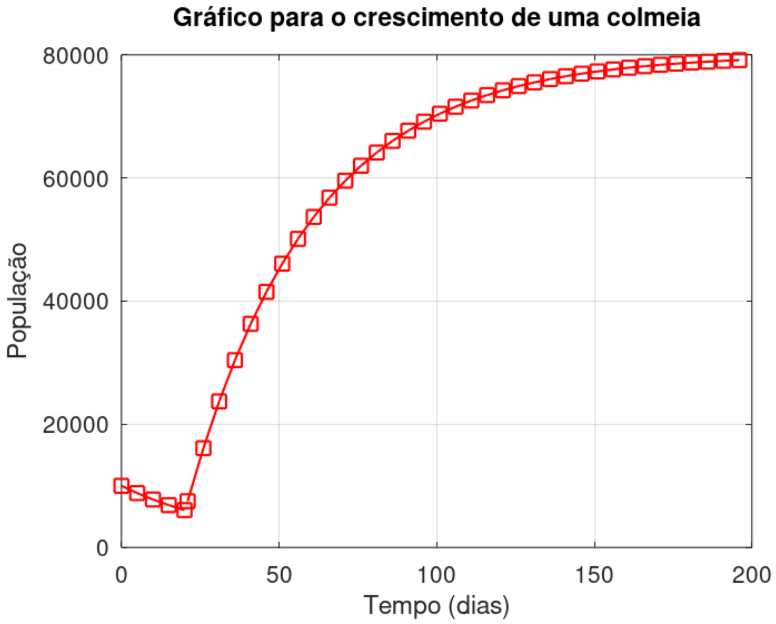
Interprete a expressão (5), que descreve o crescimento populacional da colmeia.

Resposta:

A expressão (5) pode ser entendida como a descrição do comportamento da colmeia, em relação ao seu crescimento, ou seja, o crescimento populacional desta colmeia é proporcional à diferença entre a população máxima sustentável e a população dada em cada instante.

```
#

#

#-----------#

# Gráfico  #

#-----------#

#

#

# Construir o gráfico do crescimento da colmeia.

#

X = 0: 5: 21;

Y = 0: 5: 21;

Y = 10000 .* e.^(-0.025 .* X);
```

```
figure(1);

plot(X, Y, '-sr', 'LineWidth', 1);

hold;

X = 21: 5: 200;

Y = 21: 5: 200;

Y = -72500 .* e.^(-0.02532 .* (X.-21)) .+ 80000;

plot(X, Y, '-sr', 'LineWidth', 1);

hold;

grid on;

title('Gráfico para o crescimento de uma colmeia');

xlabel('Tempo (dias)');

ylabel('População');
```



#

#

<u>Dicionário de variáveis</u>:

t	[dias]	tempo
L	[população]	limite populacional
c, k		constantes de integração
X, Y, x, y		variáveis auxiliares

<u>Sugestões para DESAFIOS</u>:

Desafio-1: as equações que descrevem o problema, em (1), representam um Problema de Valor Inicial - PVI, que pode ser resolvido no Octave. Implemente a resolução deste PVI, testando a solução para diferentes condições iniciais. Apresente seus resultados para discussão em grupo.

Desafio-2: discuta como tornar o modelo proposto mais realista. Por exemplo, sabe-se que no período de adaptação (início da colmeia), a rainha não tem condições de colocar 2000 ovos por dia pois os alvéolos ainda nem estão construídos. De que forma isso poderia ser considerado?

Desafio-3: discuta a hipótese do índice de mortalidade usada no modelo. O que significa supor que as abelhas têm idades equidistribuídas?

Referência para o Octave:


```
John W. Eaton, David Bateman, Søren Hauberg, Rik Wehbring (2021).
 GNU Octave version 6.4.0 manual: a high-level interactive language
for numerical computations.
 URL https://octave.org/doc/v6.4.0/
```