FICHA DE TRABALHO para Professor – FTp – Problema 03

2022

Autor: Eric Robalinho – e-mail: ericrobalinho@yahoo.com.br

PROBLEMA 03 - Estudo da tensão, corrente, potência e energia em um capacitor

Área: Circuitos elétricos

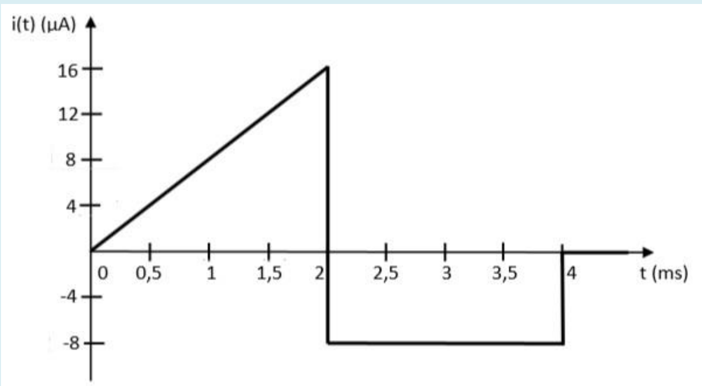
Referências bibliográficas:

Boylestad, Robert L. Introdução à Análise de Circuito. 13. Ed. São Paulo: Pearson Education Do Brasil, 2018.

Nilsson, James W.; Riedel, Susan A. Circuitos Elétricos. 10. Ed. São Paulo: Pearson, Education Do Brasil, 2015.

ENUNCIADO:

A figura a seguir mostra o comportamento da corrente em um capacitor de 4 microF inicialmente descarregado. Faça um estudo da tensão, da corrente, da potência e da energia deste capacitor, interprete e discuta os resultados.



Proposta de trabalho:

Fazer a análise do problema, observando a variação da corrente mostrada no gráfico do enunciado, plotando a distribuição de tensão. Em seguida, calcular a potência no intervalo de tempo considerado, interpretando os resultados. Fazer o estudo da variação da energia armazenada no capacitor, plotando a resposta e discutindo os resultados. Realizar as tarefas propostas.

```
#---------------------------------------------------------------#
# Formas de onda para a corrente, a partir do gráfico       #
#---------------------------------------------------------------#
clear
clc
#
# Para o intervalo t=0 a t=2 ms temos:
#
# I1 = (8*10^-3)*t A
#
function y = f(t)
  y = (8.* 10^-3).* t;
  endfunction
#
# Temos v1(0) = 0, então v1(t) no intervalo 0 a 2 ms é:
#
# v1(t) = (1/4*10^-6)*integral de 0 a t de [(8*10^-3)*t]dt = 10^3*t^2   (1)
#
```

```
# para
# t = 2*10^-3,
#
# expressão da integral em função de t
# v1 = 10^3 * t^2
#
v = integral("f", 0, 2*10^-3)                    # cálculo da integral
#
v1 = (1/(4*10^-6)) * v
#
# Para o intervalo t=2 a t=4 ms temos:
#
# I2 = -8*10^-6 A
#
# expressão da integral em função de t, total (0 a 4 ms)
# v3(t) = (1/4*10^-6)*integral de 0.002 a t (-8*10^-6)dt + 4*10^-3 =
#                                  -2*t + 8*10^-3   (2)
#
#
f = (-8*10^-6);
#
v2 = integral("f", 0.002, 4*10^-3)      # cálculo da integral
#
v3 = (1/(4*10^-6)) * v2 + (4*10^-3)
#
# Para o intervalo t > 4 ms temos:
#
```

I3 = 0 A

#

Tarefa 1:

Desenvolver as integrais dos dois intervalos (1) e (2), como chegamos aos resultados usados? Se você puder, use um programa algébrico para comparar os resultados.

Resposta:

As equações para a forma de onda da corrente nos intervalos de tempo específicos são:

$i(t) = 8 \times 10^{-3} t \qquad 0 \le t \le 2\text{ms}$

$i(t) = -8 \times 10^{-6} \qquad 2\text{ ms} \le t \le 4\text{ ms}$

$i(t) = 0 \qquad 4\text{ms} < t$

Como $v(0) = 0$, a equação para $v(t)$ no intervalo de tempo $0 \le t \le 2$ms é:

$$v(t) = \frac{1}{4 \times 10^{-6}} \int_0^t 8 \times 10^{-3}\, t dt = \frac{1}{4 \times 10^{-6}} 8 \times 10^{-3} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t = 10^3 t^2$$

E, portanto:

$$v(2ms) = 10^3 \left(2 \times 10^{-3}\right)^2 = 4\text{ mV}$$

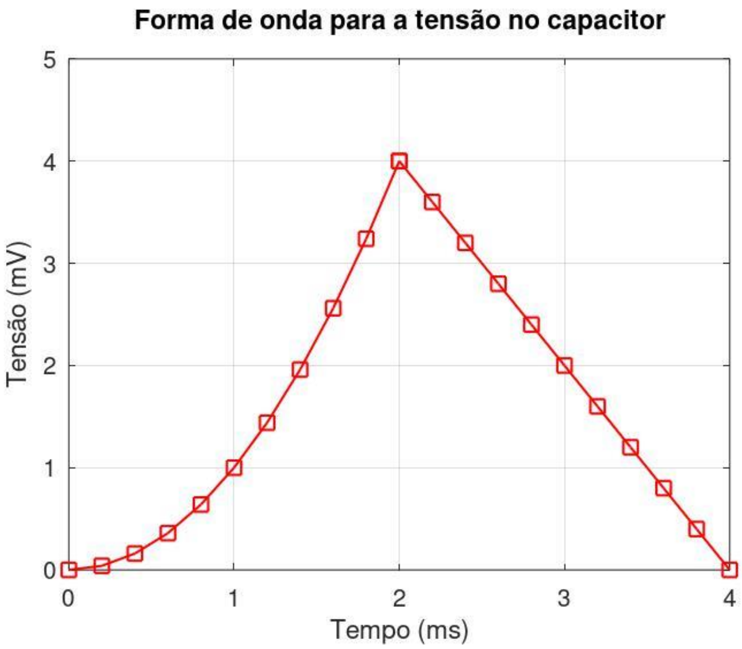
No intervalo de tempo 0 <= t <= 4 ms, temos:

$$v(t) = \frac{1}{4 \times 10^{-6}} \int_{0,002}^t -8 \times 10^{-6} dt + 4 \times 10^{-3} = \frac{1}{4 \times 10^{-6}} 8 \times 10^{-6} [-t]_{0,002}^t + 4 \times 10^{-3} = -2\left[t - 2 \times 10^{-3}\right] + 4 \times 10^{-3}$$

$$v(t) = -2t + 8 \times 10^{-3}$$

v(4 ms) = 0 V

```
#
#------------#
# Gráfico   #
#------------#
#
#
# Construir o gráfico da forma de onda da tensão no capacitor,
# entre os instantes de tempo 0 e 4 ms.
#
X = 0: 0.2: 2;
Y = 0: 0.2: 2;
Y = 10^3 .* (X.*10^-3).^2;
figure(1);
plot(X, Y.*10^3, '-sr', 'LineWidth', 1);
hold;
X = 2: 0.2: 4;
Y = 2: 0.2: 4;
Y = -2 .* X.*10^-3 + (8*10^-3);
plot(X, Y.*10^3, '-sr', 'LineWidth', 1);
hold;
grid on;
title('Forma de onda para a tensão no capacitor');
xlabel('Tempo (ms)');
ylabel('Tensão (mV)');
#
#
#
```



Tarefa 2:

O valor da área sob a curva de Tensão pode ser determinado por meio de cálculos simples. A ideia é confirmar os valores obtidos com o uso da função de integração do Octave, para o domínio do enunciado.

Resposta:

A 1ª parte do gráfico deve ser feita com a aplicação de uma integral definida, entre os valores 0 (zero) e 2 ms, o que nos leva ao resultado já encontrado na Tarefa 1:

$$8\times10^{-3}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t$$

Portanto, para t = 2 ms, temos que o valor desta área é: 16x10^-9.

Na 2ª parte, o gráfico representa um triângulo cuja área pode ser obtida por meio do cálculo: **base X altura / 2** = 2x10^-3 X 4x10^-3 / 2 = **4 x 10^-6**.

Portanto, **a área total** é igual a 16x10^-9 + 4x10^-6 = **4,016 x 10^-6**.

Comparando-se esse valor com a determinação via Octave, com o uso da expressão de v(t) obtida acima, para o intervalo 2 ms <= t <= 4 ms, temos:

$$8\times10^{-6}\left[-t\right]_{0,002}^{t}$$

Temos que v(t) para t = 4 ms, é 8x10^-6 (-4x10^-3) = -32x10^-9

Para t = 2 ms, temos: v(t) = 8x10^-6 (-2x10^-3) = -16x10^-9

Portanto, a integral resulta em v(t) = -32x10^-9 – (-16x10^-9) = -16x10^-9

A área considerada é representada pelo módulo desse valor, |-16x10^-9| = 16x10^-9

Concluímos que o **valor total da área sob a curva da Tensão** é:

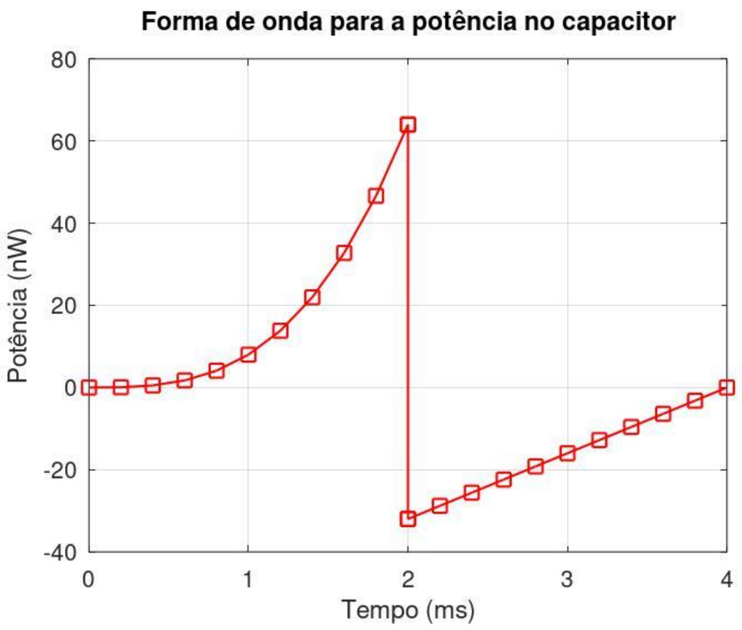
16x10^-9 + 4x10^-6 = **4,016 x 10^-6**.

Obs.: as funções utilizadas acima podem facilmente ser introduzidas no Octave, para finalidade de cálculo de suas respectivas integrais definidas, conforme exemplo descrito neste *script*.

```
#

#

#----------------------------------------------------------#

# Cálculo da potência                                      #

#----------------------------------------------------------#

#

# A potência é dada por P(t) = V(t)I(t), portanto a expressão para a

# potência no intervalo de tempo 0 <= t <= 2 ms será:

#

# P(t) = V(t)I(t) = 10^3 * t^2 * 8 * 10^-3 * t = 8 * t^3          (3)

#

# No intervalo de tempo 2 ms <= t <= 4 ms, a expressão para a potência será:

#

# P(t) = (-2 * t + 8 * 10^-3) * (-8 * 10^-6) = 16 * 10^-6 * t -64 * 10^-9  (4)
```

```
#
# Observamos que, durante o intervalo de tempo 0 <= t <= 2 ms, o capacitor está
# absorvendo energia e durante o intervalo de tempo 2 ms <= t <= 4 ms, o
# capacitor está fornecendo energia.
#
#
#----------#
# Gráfico  #
#----------#
#
#
# Construir o gráfico da forma de onda da potência no capacitor,
# entre os instantes de tempo 0 e 4 ms.
#
X = 0: 0.2: 2;
Y = 0: 0.2: 2;
Y = 8 .* (X.*10^-3).^3;
figure(2);
plot(X, Y.*10^9, '-sr', 'LineWidth', 1);
hold;
X = 2: 0.2: 4;
Y = 2: 0.2: 4;
Y = 16 .* 10.^-6 .* (X.*10^-3) .- 64 .* 10.^-9;
plot(X, Y.*10^9, '-sr', 'LineWidth', 1);
hold;
hold;
x = [2 2];
```

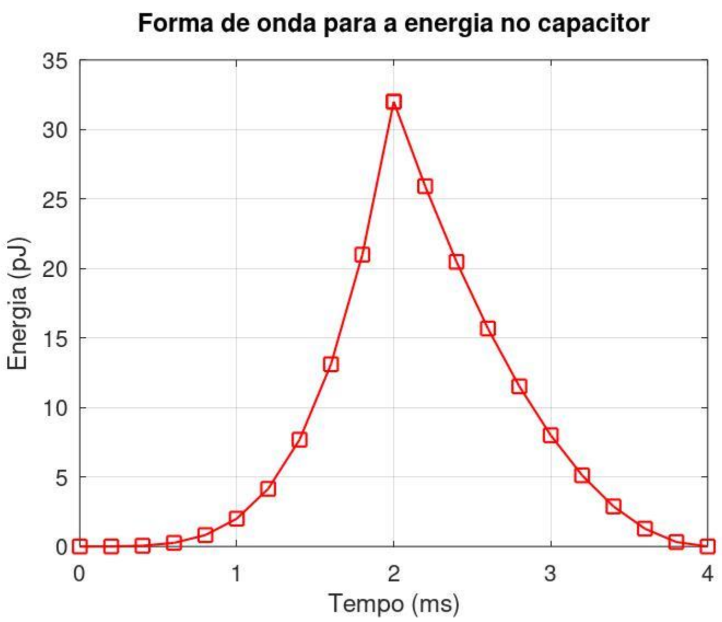
```
y = [(16 * 10^-6 * (2*10^-3) - 64 * 10^-9)*10^9 (8 * (2*10^-3)^3)*10^9];

plot(x, y, '-sr', 'LineWidth', 1);

hold;

grid on;

title('Forma de onda para a potência no capacitor');

xlabel('Tempo (ms)');

ylabel('Potência (nW)');
```




```
#

#

#---------------------------------------------------------#

# Cálculo da energia                                       #

#---------------------------------------------------------#

#

#

# A energia é expressa por:

#
```

```
# w(t) = integral de t0 a t ( P(t) dt ) + w(t0)

#

# No intervalo de tempo 0 <= t <= 2 ms, temos:

#

# w(t) = integral de 0 a 0.002 (8 * t^3 dt) = 2*t^4 = 32 pJ        (5)

#

# No intervalo de tempo 0 <= t <= 4 ms, temos:

#

# w(t) = integral de 0.002 a t (16 * 10^-6 * t - 64 * 10^-9)dt + 32 * 10^-12 =

#

#      = 8 * 10^-6 * t^2 -64 * 10^-9 * t + 128 * 10^-12            (6)

#

#

#

#------------#

# Gráfico   #

#------------#

#

#

# Construir o gráfico da forma de onda da energia no capacitor,

# entre os instantes de tempo 0 e 4 ms.

#

X = 0: 0.2: 2;

Y = 0: 0.2: 2;

Y = 2 .* (X.*10^-3) .^4;

figure(3);

plot(X, Y.*10^12, '-sr', 'LineWidth', 1);
```

```
hold;

X = 2: 0.2: 4;

Y = 2: 0.2: 4;

Y = 8 * 10^-6 .* (X.*10^-3) .^2 .-64 * 10^-9 .* (X.*10^-3) .+ 128 * 10^-12;

plot(X, Y.*10^12, '-sr', 'LineWidth', 1);

hold;

grid on;

title('Forma de onda para a energia no capacitor');

xlabel('Tempo (ms)');

ylabel('Energia (pJ)');
```



#

#

#

Tarefa 3:

Desenvolva as integrais das expressões (5) e (6), mostrando as expressões resultantes e calculando as integrais definidas. Depois compare as respostas com as mesmas integrais feitas no Octave (precisa implementar a rotina das integrais, e para isso você poderá olhar como está escrita a rotina para o cálculo das tensões na 1ª parte do *script*).

Resposta:

A energia é expressa por:

$$w(t) = \int_{t_0}^{t} p(t)dt + w(t_0)$$

No intervalo de tempo 0≤ t ≤ 2ms, tem-se:

$$w(t) = \int_{0}^{0,002} 8t^3 dt = 8\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^{0,002} = 2\times\left(2\times10^{-3}\right)^4 = 32\times10^{-12} = 32 \text{ pJ}$$

No intervalor de tempo 0 <= t <= 4 ms, temos:

$$w(t) = \int_{0,002}^{t} \left(16\times10^{-6}t - 64\times10^{-9}\right)dt + 32\times10^{-12} = \left[16\times10^{-6}\times\frac{t^2}{2} - 64\times10^{-9}\times t\right]_{0,002}^{t} + 32\times10^{-12}$$

$$w(t) = \left(8\times10^{-6}t^2 - 64\times10^{-9}t\right) - \left[8\times10^{-6}\times\left(2\times10^{-3}\right)^2 - 64\times10^{-9}\times2\times10^{-3}\right] + 32\times10^{-12}$$

$$w(t) = 8\times10^{-6}t^2 - 64\times10^{-9}t - \left(32\times10^{-12} - 128\times10^{-12} + 32\times10^{-12}\right)$$

$$w(t) = 8\times10^{-6}t^2 - 64\times10^{-9}t + 128\times10^{-12}$$

#

#

#

#

<u>Dicionário de variáveis</u>:

v1, v2, v3		variáveis auxiliares
I, I1, I2, I3	[A]	corrente
t	[ms]	tempo
V, v, v1, v2, v3	[mV]	tensão
P	[nW]	potência
w	[pJ]	energia
X, Y, x, y		variáveis auxiliares

<u>Sugestões para DESAFIOS</u>:

<u>Desafio-1</u>: utilizando a expressão obtida para a energia do capacitor, determine o valor da energia nos instantes t = 2 ms e t = 4 ms.

<u>Desafio-2</u>: discuta o resultado dos valores de energia do capacitor, relacionando quanto dessa energia é absorvida e quanto é fornecida, a partir da leitura do gráfico.

<u>Desafio-3</u>: faça uma pesquisa sobre capacitores, seus tipos e aplicações mais comuns em eletrônica. Apresente sua pesquisa para o grupo.

Referência para o Octave:


```
John W. Eaton, David Bateman, Søren Hauberg, Rik Wehbring (2021).
 GNU Octave version 6.4.0 manual: a high-level interactive language
for numerical computations.
 URL https://octave.org/doc/v6.4.0/
```