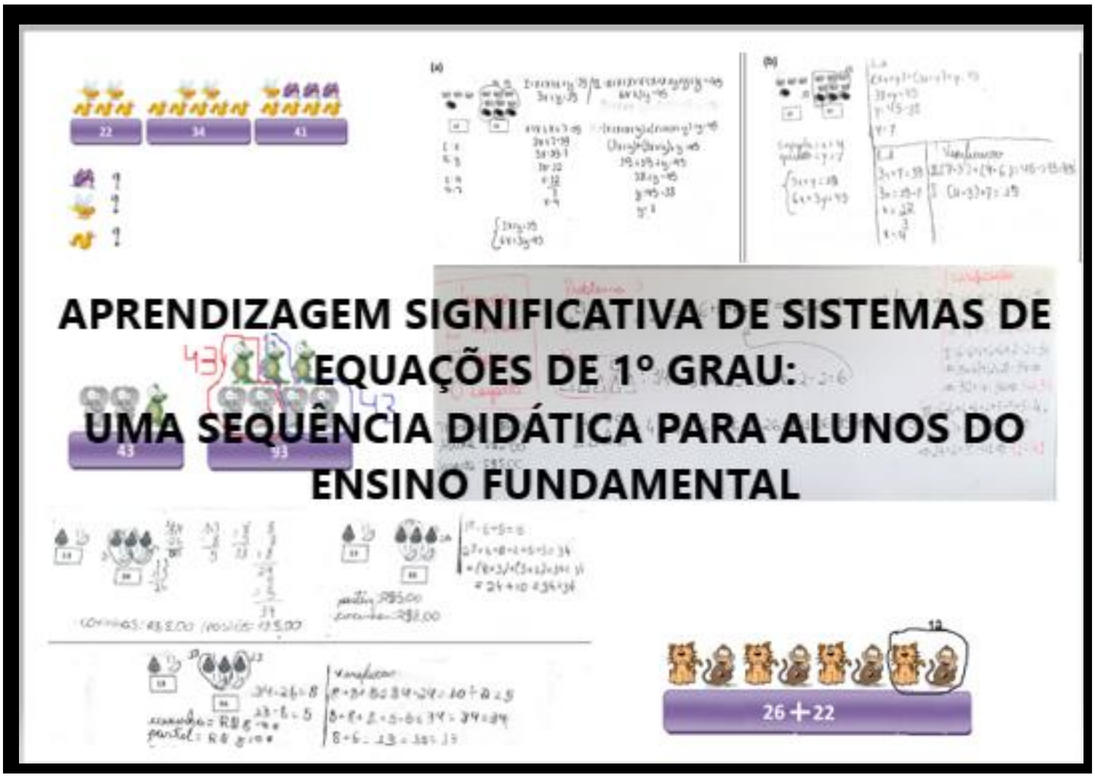
Universidade Federal de Uberlândia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Mestrado Profissional

Produto Educacional



Mestrando: Rodrigo Junior Rodrigues
Professora Orientadora: Drª Odaléa Aparecida Viana

Uberlândia
2021

Sumário

APRESENTAÇÃO

Caro (a) Professor (a)

Este produto educacional foi elaborado no âmbito do Mestrado Profissional de Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, sendo parte da dissertação defendida por este pesquisador.

Trata-se de uma proposta didática na forma de uma sequência de atividades direcionadas a alunos do 8.º ano do ensino fundamental com o tema Sistemas de Equações do 1º Grau e visa, especificamente, à aprendizagem de uma estratégia para solucionar os sistemas – que é diferente dos métodos de substituição, adição e de comparação normalmente ensinados nas aulas de matemática do ensino fundamental. Apresentando vários problemas com figuras, buscou-se a aprendizagem desta estratégia algébrica a partir de estratégias aritméticas de resolução já conhecidas pelos alunos.

O trabalho tem fundamentação na teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel e nos teóricos que tratam da resolução de problemas nas aulas de matemática e do desenvolvimento do pensamento algébrico. Um resumo dessas teorias e das indicações da Base Nacional Comum Curricular será apresentado na primeira seção.

Na segunda seção será apresentada a estratégia algébrica de resolução de sistemas adotada para este trabalho, aqui chamada de ESA – estratégia algébrica de agrupamento.

A apresentação da proposta e sua aplicação – feita por este professor/pesquisador em dois momentos: um estudo piloto em uma escola e uma aplicação definitiva em outra – são mostradas na terceira seção. O estudo piloto foi essencial para o êxito final, já que puderam ser modificadas uma parte do material e, também, a condução da aplicação. Assim, o material foi amplamente revisto, sempre com o objetivo de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos e facilitar a aprendizagem significativa dos procedimentos empregados na estratégia de resolução dos sistemas.

Para melhor orientação ao leitor, as atividades desenvolvidas nessa proposta didática estão descritas conforme foram aplicadas nas aulas deste professor/pesquisador, em que constam: as ações do professor e a interação com os alunos, exemplos dos registros produzidos pelos estudantes e os resultados obtidos naquela ocasião.

Seguem as considerações finais e algumas referências utilizadas neste trabalho e, ao final, as folhas de atividades em anexo.

Espera-se que o presente produto possa trazer contribuições para a prática do professor de matemática do ensino básico, no que tange ao desenvolvimento do pensamento algébrico, especificamente na fase introdutória do objeto do conhecimento: Sistema de Equações do 1º grau. Obviamente as atividades foram planejadas e realizadas para uma turma específica, porém, pode ser replicada em sua integralidade e/ou ser adaptada para atender a uma outra realidade.

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E BNCC

Este trabalho se fundamenta na teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel. Para Ausubel (2003), a aprendizagem significativa é o processo que permite que uma nova ideia, conceito ou procedimento se relacionem com as ideias relevantes já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Essas ideias são chamadas de conhecimentos prévios e, neste trabalho, considerou-se como ideias já aprendidas as estratégias de resolução de problemas com cálculos aritméticos.

A resolução de problemas nas aulas de matemática tem sido defendida por vários autores como Brito (2006), Onuchic (2011), Van de Walle (2001) e muitos outros. Entende-se problema como um processo que, diante da existência de uma situação sem solução aparente, é necessário que o indivíduo busque competências para compreender tal problema, apoiando-se em decisões pertinentes quanto à aplicação de mecanismos para a sua resolução. (MAYER, 1992).

O processo de resolução de problemas tem várias etapas, desde a compreensão do texto, a representação mental e a categorização do problema até a estimativa de solução, o planejamento das estratégias de solução e o monitoramento do procedimento, seguidos da resposta e validação. Neste trabalho, optou-se por apresentar problemas cujos enunciados eram, a princípio, na forma de desenhos e que foram resolvidos de duas maneiras: utilizando operações (estratégia aritmética) e depois utilizando equações que formavam um sistema (estratégia algébrica).

Vários autores compreendem que o raciocínio algébrico – este manifestado na capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos – pode ser desenvolvido em articulação com o pensamento aritmético (KIERAN, 2004; USISKIN, 1995).

A BNCC (BRASIL, 2018) também se refere ao desenvolvimento do pensamento algébrico, alegando que ele é importante na utilização de modelos matemáticos e para compreender, analisar e representar relações quantitativas de grandezas; seu uso também é essencial em situações e estruturas matemáticas, valendo-se de letras e outros símbolos. Um dos assuntos a serem trabalhos nos anos finais do ensino fundamental refere-se aos sistemas de equações, tema deste trabalho.

Assim, pressupõe-se que a aprendizagem significativa de uma estratégia de resolução de um sistema de equações pode estar amparada numa estratégia aritmética já conhecida pelos alunos e que a sequência de atividades aqui proposta possa contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes.

2. A ESTRATÉGIA ALGÉBRICA DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS

Conforme consta no Quadro 1 no oitavo ano do ensino fundamental são estudados os sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e que admitem uma única solução. Convém acrescentar que um sistema linear possui obrigatoriamente: uma solução; nenhuma solução; infinitas soluções. São classificados respectivamente como: Sistema Possível e Determinado (SPD); Sistema Impossível ou Incompatível (SI); Sistema Possível e Indeterminado (SPI).

Quadro 1. Objeto de Conhecimento e Habilidades para a Unidade Temática Álgebra de acordo com a BNCC

8º Ano		
Unidades Temáticas	**Objetos de Conhecimento**	**Habilidades**
Álgebra	Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano	(EF08MA31MG) Reconhecer um sistema de dua equações lineares e utilizá-lo para modelar probl (EF08MA32MG) Identificar a(s) solução (ões) de sistema de duas equações lineares. (EF08MA33MG) Resolver um sistema de equaçõ primeiro grau. (EF08MA08A) Resolver problemas relacionados seu contexto próximo, que possam ser represent por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso. (EF08MA08B) Elaborar problemas relacionados a contexto próximo, que possam ser representado sistemas de equações de 1º grau com duas incóg e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

Fonte: Currículo Referência de Minas Gerais (MINAS GERAIS, 2019, p. 720).

Quanto às técnicas de resolução, em geral, são ensinados os métodos da substituição, da adição e o da comparação.

O Quadro 2 exemplifica os procedimentos para cada um dos métodos.

Quadro 2. Métodos de resolução de sistemas

Resolver o sistema $\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+4y=32 \end{cases}$

Método de substituição	Método da adição	Método da comparação
$\begin{cases} x+y=10 & (I) \\ 2x+4y=32 & (II) \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=10 & (I) \\ 2x+4y=32 & (II) \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=10 & (I) \\ 2x+4y=32 & (II) \end{cases}$
Isolando *x* na equação *(I)* $(I) x+y=10 \leftrightarrow x=10-y$ Substituindo em *(II),* temos: $(II) 2x+4y=32$ $\leftrightarrow 2(10-y)+4y=32$ $\leftrightarrow 20-2y+4y=32$ $\leftrightarrow 2y=12 \leftrightarrow y=6$ Substituindo *y=6* em *(I),* temos $x+y=10 \leftrightarrow x+6=10 \leftrightarrow x=4$ Logo a solução é *S= (4, 6)*	Multiplicando a equação *(I)* por -2 e somando as equações temos: $\begin{cases} -2x-2y=-20 & (I) \\ 2x+4y=32 & (II) \end{cases}$ $2y=12 \leftrightarrow y=6$ Substituindo *y=6* em *(I),* temos $x+y=10 \leftrightarrow x+6=10 \leftrightarrow x=4$ Logo a solução é *S= (4, 6)*	Isolando *x* nas equações *(I)* e *(II)* $(I) x+y=10 \leftrightarrow x=10-y$ *(A)* $(II) 2x+4y=32$ $2x=32-4y \leftrightarrow$ $x=\frac{32-4y}{2} \leftrightarrow$ $x=16-2y$ *(B)* Igualando as expressões *(A)* e *(B):* $10-y=16-2y \leftrightarrow$ $-y+2y=16-10 \leftrightarrow y=6$ Substituindo *y=6* em *(I),* temos $x+y=10 \leftrightarrow x+6=10 \leftrightarrow x=4$ Logo a solução é *S= (4, 6)*

Fonte: elaborado pelo pesquisador

O método que o presente trabalho sugere é diferente desses e é característico para os chamados 'Sistemas Aditivos', isto é, aqueles sistemas possíveis, determinados e de equações[1] do primeiro grau em que: (a) os coeficientes são números naturais e (b) o primeiro membro de uma das equações pode ser inteiramente substituído na outra equação de modo que esta, passe a ter apenas uma incógnita.

Um exemplo desse método é mostrado no Quadro 3, em que pode ser vista a manipulação algébrica referente aos monômios[2], ou seja, a expressão 3x + 5y da segunda equação é decomposta de modo a permitir o agrupamento dos termos na forma da expressão (x + y) – que será substituída pelo valor indicado na primeira equação. Chamamos esse procedimento de Estratégia da Substituição por Agrupamento (ESA).

---

[1] A maioria dos sistemas constantes na sequência didática é formada por sistemas de duas equações, mas há alguns com três equações e três incógnitas em que é possível utilizar o método aqui apresentado.

[2] No ensino fundamental é comum os alunos simplificarem expressões algébricas somando os monômios, por exemplo, dada a expressão $3x+y+x+4y$ o aluno deve reduzir os termos semelhantes e encontrar $4x+5y$. Dificilmente é solicitado o contrário, ou seja, decompor a $4x+5y$ em $x+3x+2y+3y$ *ou* $2x+x+x+y+2y+2y$ ou $x+x+x+x+y+y+y+y+y$ etc., nem agrupar alguns termos, como $(x+2y)+(3x+y)+2y$, por exemplo.

Quadro 3. Resolução de sistema por ESA

Resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 8 \quad (I) \\ 3x + 5y = 42 \quad (II) \end{cases}$
(II) $3x + 5y = 42 \leftrightarrow x + x + x + y + y + y + y + y = 42 \leftrightarrow (x + y) + (x + y) + (x + y) + 2y = 42$
Substituindo $x + y$ pelo valor 8 (conforme indica a primeira equação), encontra-se o valor da incógnita y:
(II) $8 + 8 + 8 + 2y = 42 \leftrightarrow 24 + 2y = 42 \leftrightarrow 2y = 18 \leftrightarrow y = 9$
Substituindo $y = 9$ em *(I)*, temos $x + y = 8 \leftrightarrow x + 9 = 8 \leftrightarrow x = -1$
Logo a solução é $S = (-1, 9)$

Fonte: elaborado pelo autor

É importante ponderar que ESA não é apresentado como um método mais relevante ou mais simples que os outros três mencionados. Na verdade, recomenda-se sua utilização na etapa de introdução do conteúdo Sistema de Equações, pois, ele requer procedimentos algébricos relativos a estratégias aritméticas já conhecidas, o que pode favorecer a atribuição de significados às ações empregadas pelos alunos.

4. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA E SUA APLICAÇÃO

A sequência didática[3] é formada por seis atividades mostradas no Quadro 4.

Quadro 4. Atividades constantes da sequência didática

Atividades	Descrição	Objetivo	Duração
1ª: Desafio I de Problemas	Apresentação de quatro problemas com imagens para serem resolvidos aritmeticamente.	Aplicar estratégias aritméticas de resolução de problemas.	50 min
2ª: Desafio I de Problemas e estratégia aritmética	Correção dos problemas anteriores, com orientação do professor para a estratégia aritmética.	Entender a aplicação de uma estratégia aritmética específica de resolução de problemas.	90 min
3ª: Desafio II de Problemas e Estratégia Aritmética.	Apresentação de quatro problemas com imagem para serem resolvidos aritmeticamente.	Aplicar a estratégia aritmética da 2a atividade em problemas similares.	40 min
4ª: Desafio I de Problemas e Sistema	Orientação do professor para que os problemas do Desafio I sejam resolvidos algebricamente (sistema).	Entender uma estratégia algébrica (sistema) a partir da equiparação com a estratégia aritmética.	100 min
5ª: Desafio II de Problemas e Sistema	Apresentação dos problemas do Desafio II (3ª atividade) para serem resolvidos algebricamente (sistema).	Aplicar a estratégia algébrica (sistema) a partir da equiparação com a estratégia aritmética.	100 min
6ª: Desafio III de Problemas sem imagens – 1ª Etapa.	Orientação do professor para que problemas sem imagens sejam resolvidos por sistemas.	Entender a estratégia algébrica (sistema) para problemas sem imagens	20 min
6ª: Desafio III de Problemas sem imagens – 2ª Etapa.	Apresentação de cinco problemas sem imagem para serem resolvidos algebricamente (sistema).	Aplicar a estratégia algébrica (sistema) para problemas sem imagem	80 min

Fonte: elaborado pelo pesquisador

A maneira de aplicação de cada atividade mencionada, o desempenho dos alunos e alguns exemplos de registros produzidos pelos alunos nas folhas de papel e pelo professor no quadro serão descritos a seguir.

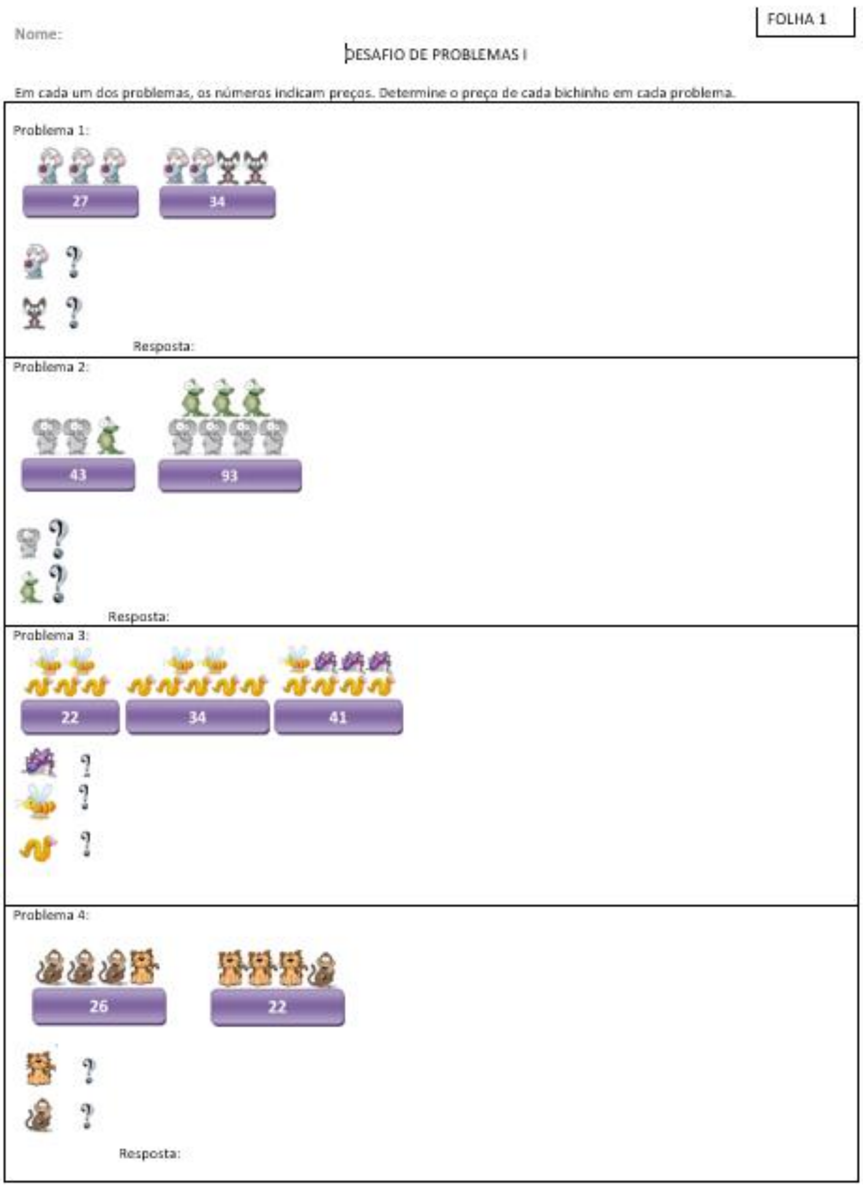
1ª ATIVIDADE - DESAFIO I DE PROBLEMAS

[3]Sequência didática é um “conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (Zabala, 1998, p. 18).

A primeira atividade deve ser o momento de instigar os conhecimentos aritméticos dos alunos, isto é, os conhecimentos prévios, conforme sugere Ausubel (2003). Dessa forma, o professor distribui cópias da Folha 1 (Figura 1), contendo quatro problemas e orienta os alunos para que resolvam livremente, ou seja, que utilizem seus conhecimentos e estratégias próprias, individualmente; deve informar que eles não devem utilizar letras, somente números. Esta é uma atividade para conhecer as habilidades aritméticas dos alunos e os erros devem ser avaliados nesta perspectiva.

Os problemas, como pode ser verificado, possuem progressivo grau de dificuldade. Na pesquisa realizada, a estratégia mais utilizada pelos foi a de tentativas, conforme é exemplificado a seguir.

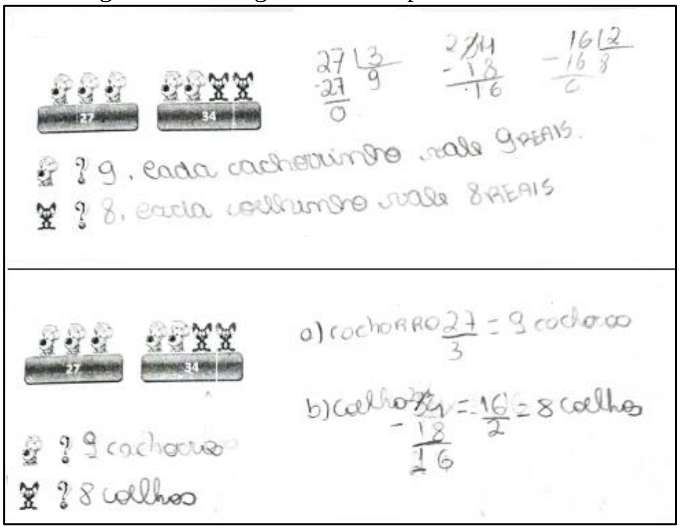
Figura 1. Folha 1 da 1ª atividade



Fonte: Adaptada de Nobre et al (2011)

Problema 1 - Como era de se esperar, grande parte dos alunos chegou aos resultados corretos, realizando a divisão com a primeira informação ($27 \div 3 = 9$) e substituindo o resultado encontrado na segunda informação. Na Figura 2, é possível verificar o desenvolvimento de dois alunos.

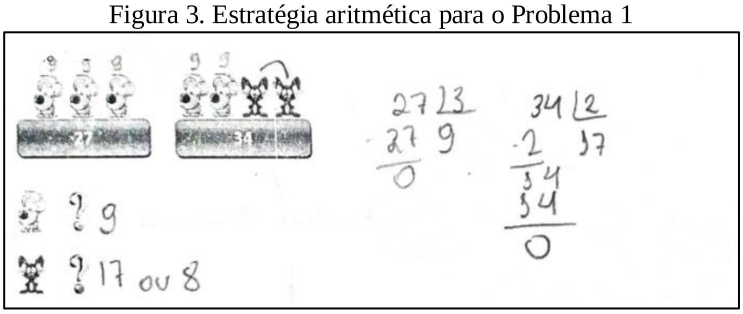
Figura 2. Estratégia aritmética para o Problema 1



Fonte: elaborada pelo pesquisador

Na Figura 3, nota-se o acerto dos cálculos aritméticos com a primeira informação, porém, o aluno não realiza o “desconto” do valor do cachorrinho, no total da segunda informação. Este é um exemplo de erro, evidentemente outros aconteceram e, em uma nova aplicação, com outra turma, provavelmente diferentes erros ocorrerão.

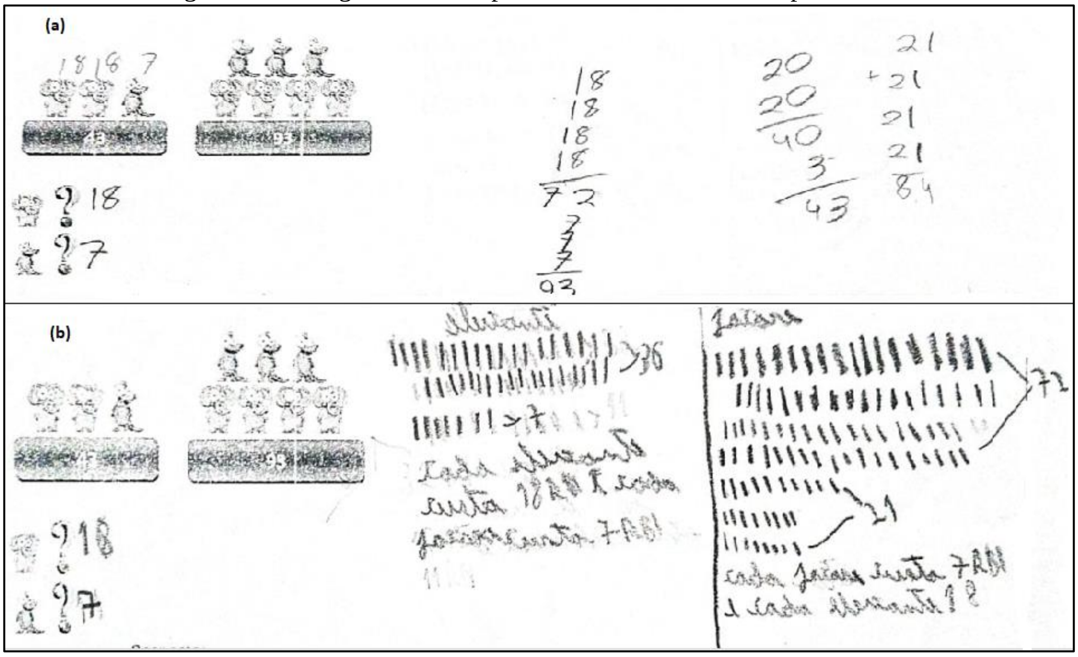
Figura 3. Estratégia aritmética para o Problema 1



Fonte: elaborada pelo pesquisador

Problema 2: Este é um problema em que há um gradativo aumento na dificuldade, já que não basta apenas uma divisão para encontrar os resultados. Considerável parte dos alunos valeu-se de tentativas, isto é, adotaram por hipótese algum valor e testaram nas informações do problema. A Figura 4 ilustra dois registros de alunos.

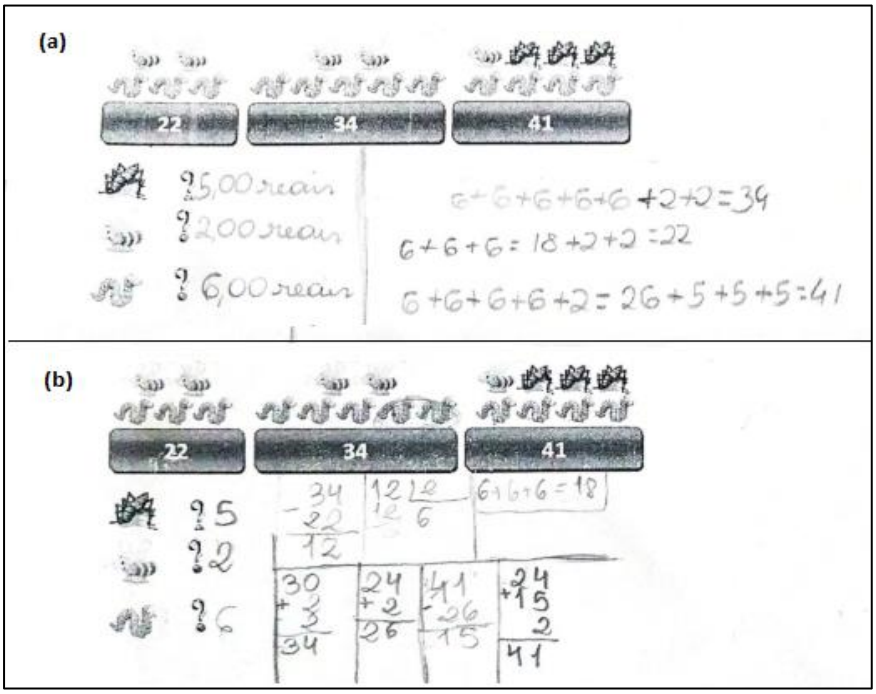
Figura 4. Estratégia aritmética por tentativa de dois alunos para o Problema 2



Fonte: elaborada pelo pesquisador

No Problema 3, prossegue o aumento na dificuldade, já que este possui três informações e três insetos diferentes. Poucos alunos conseguiram chegar ao resultado correto. Na Figura 6, nota-se estratégias diferentes, sendo que em uma dessas estratégias o aluno ensaia um agrupamento.

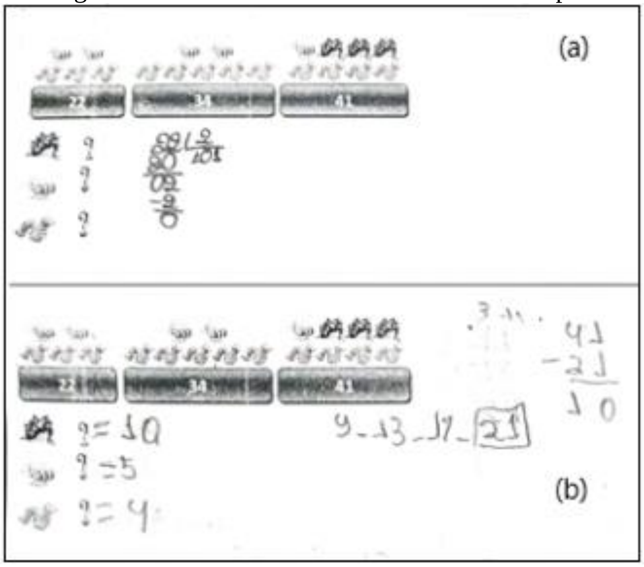
Figura 5. Estratégias aritméticas para o Problema 3: (a) por tentativas e (b) por agrupamento



Fonte: elaborada pelo pesquisador

Na Figura 7(a), observam-se cálculos errados na divisão e não é possível apontar o porquê a divisão por 2. Observa-se falha na manipulação aritmética, ao obter 101 na divisão 22 ÷ 2. Já em (b), não se identifica a estratégia utilizada.

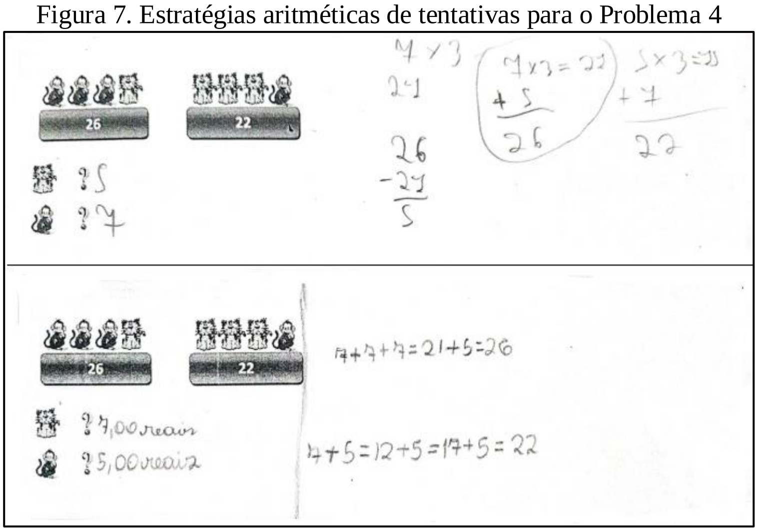
Figura 6. Estratégias aritméticas incorretas e cálculos errados para o Problema 3



Fonte: elaborada pelo pesquisador

Problema 4: Os alunos utilizaram rascunhos para realizar estratégia de tentativas e, a seguir, empreende as operações de adição e multiplicação, conforme pode ser visto na Figura 8, nesta mesma figura é possível verificar a utilização das equivalências de forma errada, ao fazer, por exemplo: 7 + 5 = 12 + 5 = 17 + 5 = 22, quando o correto deveria ser: 7 + 5 = 12, a seguir 12 + 5 = 17 e 17 + 2 = 22.

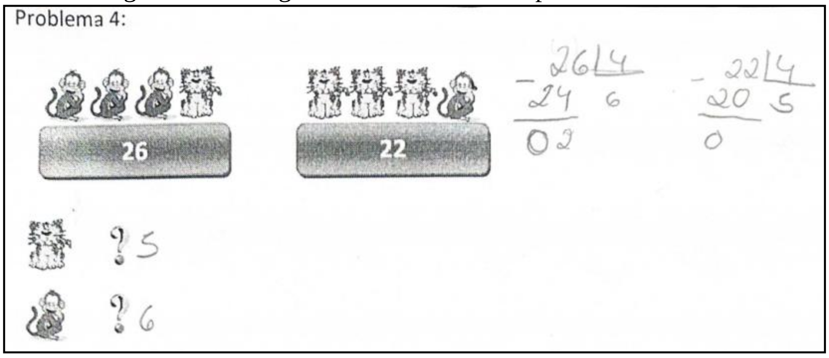
Figura 7. Estratégias aritméticas de tentativas para o Problema 4



Fonte: elaborada pelo pesquisador

Na figura 9 verifica-se exemplo de cálculos errados. Pode-se observar que o aluno realizou a divisão do valor total de cada informação por todos os animais, independente da espécie. A considerar os cálculos matemáticos, o aluno não deu prosseguimento aos mesmos.

Figura 8. Estratégias aritméticas erradas para o Problema 4



Fonte: elaborada pelo pesquisador

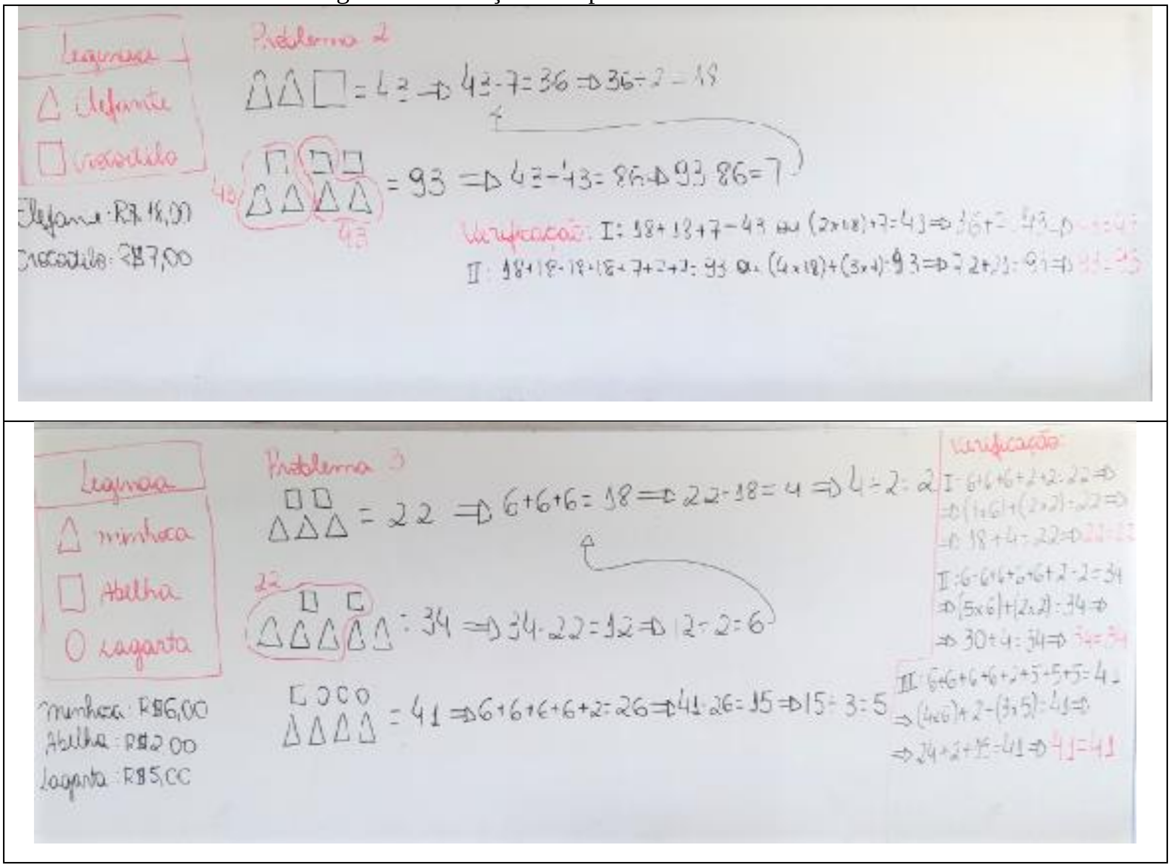
2ª ATIVIDADE - DESAFIO I DE PROBLEMAS E ESTRATÉGIA ARITMÉTICA

Nesta atividade o professor distribui cópias da Folha 2 contendo os mesmos problemas da Atividade I. Ele pode apresentar uma breve análise dos resultados da atividade anterior, comentando os acertos e erros, mas salienta que o objetivo era verificar os conhecimentos e as estratégias utilizadas, por cada um dos alunos.

O professor informa, então, que irá resolver os mesmos quatro problemas utilizando uma estratégia que vai envolver agrupamentos.

Convém reforçar a ideia de que em todos os problemas há sempre duas ou três informações relativas aos bichinhos e que sempre é solicitado o valor de cada um deles. Ao final, deve-se fazer a verificação, ou seja, os valores encontrados devem ser substituídos para confirmar e validar a solução. A estratégia de resolução para cada problema é apresentada em forma resumida na Figura 10, em que constam os problemas 2 e 3 da 2.ª Atividade.

Figura 9. Resoluções dos problemas da atividade 2

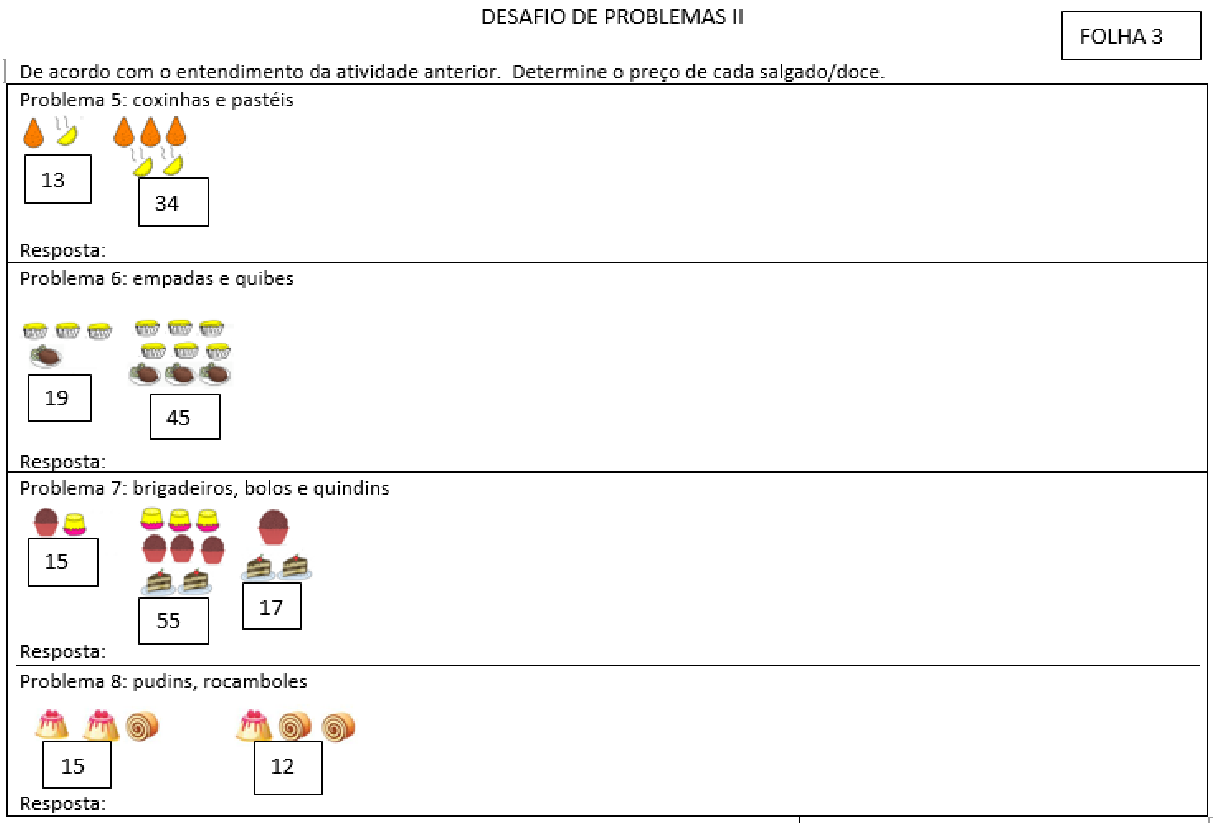


Fonte: elaborada pelo pesquisador

3ª ATIVIDADE - DESAFIO II DE PROBLEMAS E ESTRATÉGIA ARITMÉTICA

Na sequência das atividades, o professor deve distribuir cópias da Folha 3 (Figura 11), contando com quatro problemas com imagens diferentes dos anteriores. Em cada problema há desenhos que se referem a salgados e doces, duas ou três informações e são pedidos os valores desses doces e salgados. Os alunos são orientados para que resolvam os problemas de acordo com o seu entendimento da atividade anterior, realizada pelo professor na lousa. Este é o momento em que os alunos colocam em prática a estratégia de agrupamento aprendida.

Figura 10. Folha 3 da 3º atividade


DESAFIO DE PROBLEMAS II

FOLHA 3

De acordo com o entendimento da atividade anterior. Determine o preço de cada salgado/doce.

Problema 5: coxinhas e pastéis

13

34

Resposta:

Problema 6: empadas e quibes

19

45

Resposta:

Problema 7: brigadeiros, bolos e quindins

15

55

17

Resposta:

Problema 8: pudins, rocamboles

15

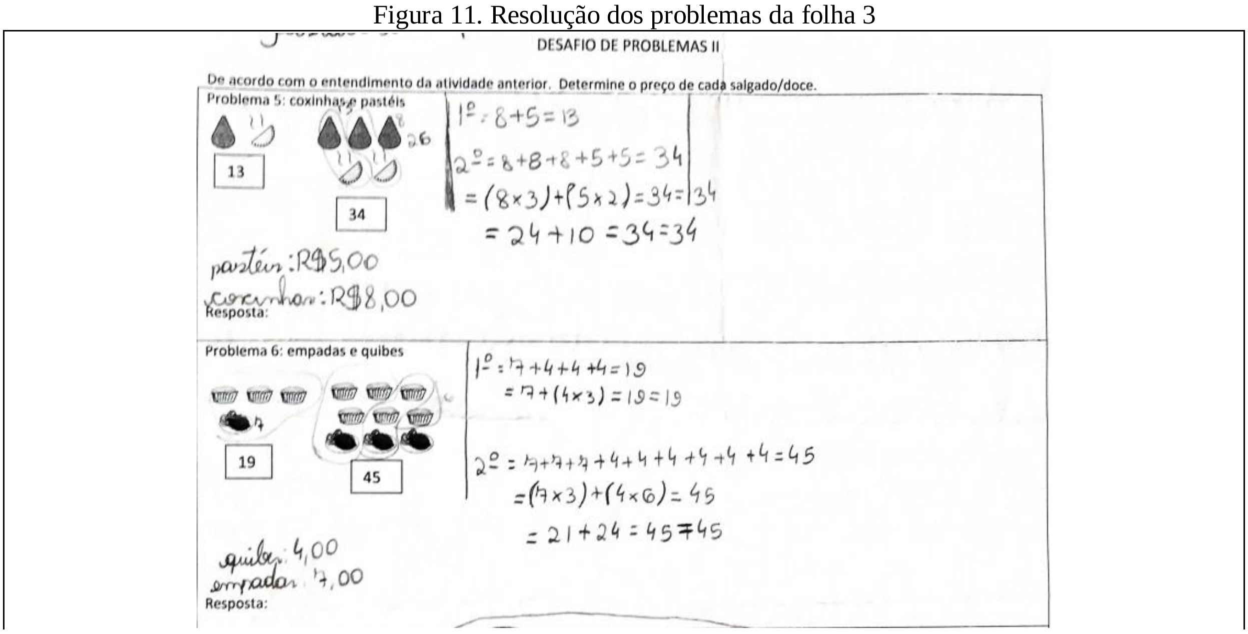
12

Resposta:

Fonte: elaborada pelo pesquisador

Na Figura 12 são mostrados exemplos de resolução dos problemas 5, 6, 7 e 8, realizados por um aluno, utilizando a estratégia de agrupamento, inclusive, realizando a verificação dos resultados – que é a fase da validação do problema.

Figura 11. Resolução dos problemas da folha 3


DESAFIO DE PROBLEMAS II

De acordo com o entendimento da atividade anterior. Determine o preço de cada salgado/doce.

Problema 5: coxinhas e pastéis

13

34

1º: 8+5=13

2º = 8+8+8+5+5 = 34

= (8×3)+(5×2) = 34 = 34

= 24+10 = 34 = 34

pastéis: R$5,00

coxinhas: R$8,00

Resposta:

Problema 6: empadas e quibes

19

45

1º: 7+4+4+4 = 19

= 7+(4×3) = 19 = 19

2º = 7+7+7+4+4+4+4+4+4 = 45

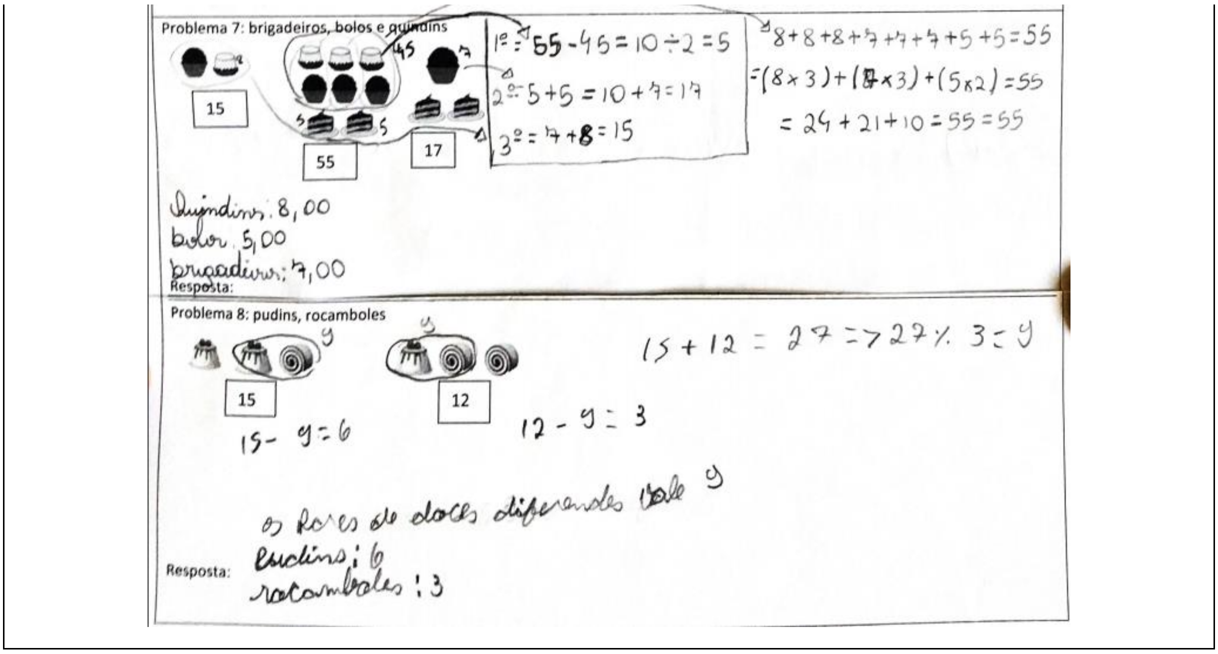
= (7×3)+(4×6) = 45

= 21+24 = 45 = 45

quibes: 4,00

empadas: 7,00

Resposta:



Fonte: elaborada pelo pesquisador

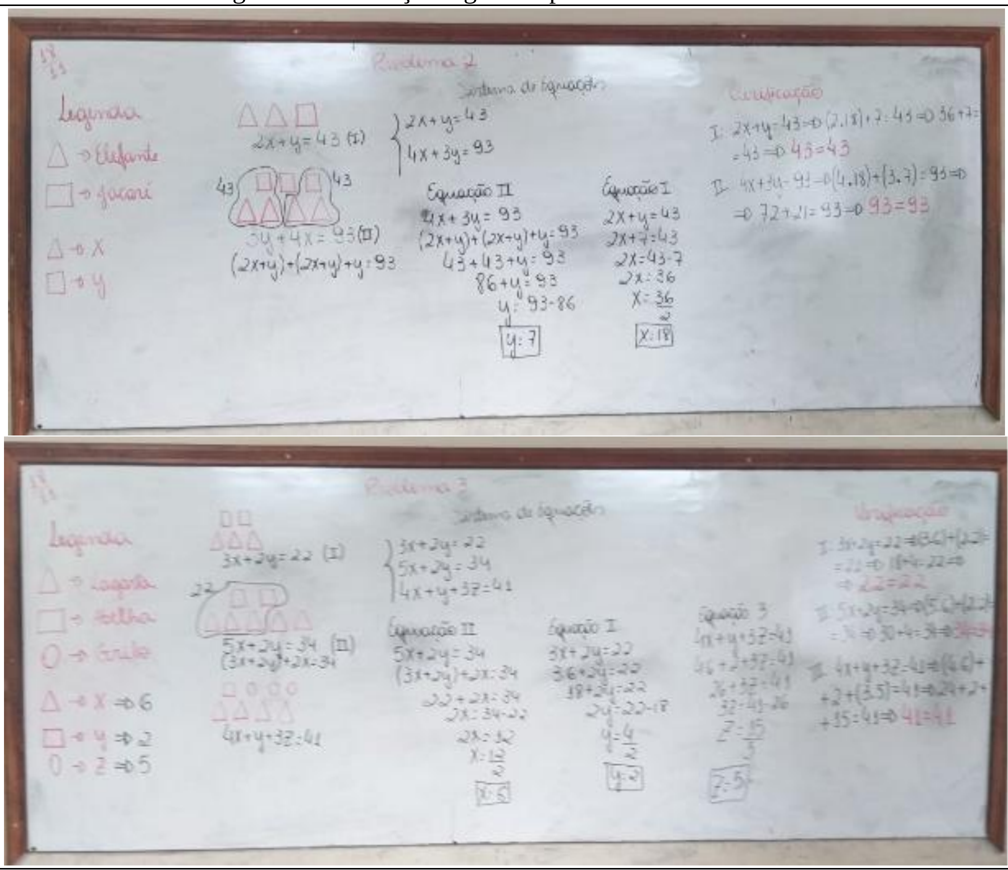
4ª ATIVIDADE - DESAFIO I DE PROBLEMAS E SISTEMA

Nesta atividade o professor trará pela primeira vez a ideia de Sistema de Equações Lineares. Os alunos recebem a Folha 4 que contém os mesmos problemas do Desafio I, isto é, aqueles utilizados nas duas primeiras atividades para que pudessem aprender uma estratégia algébrica de resolução. Com base nos procedimentos aritméticos já realizados para solucionar os problemas, agora são aplicadas as equações.

Como pode ser verificado na Figura 13, na pesquisa realizada o professor retoma a ideia da legenda (lado esquerdo da lousa), para a representação das informações dos problemas contidos na folha; para isso, utiliza-se de figuras geométricas conhecidas dos alunos. Para chegar às equações, o professor explica aos alunos que irá se valer de letras. Como forma de envolver os alunos, o professor instiga os mesmos a verbalizar a representação das informações de cada problema, utilizando-se das letras previamente acordadas. Este é um momento importante para o professor recordar as possibilidades de cálculos com os monômios, ou seja, trabalhar a redução dos termos iguais.

Na Figura 13, nota-se a exposição, na íntegra, das ideias realizadas pelo professor para os problemas 2 e 3.

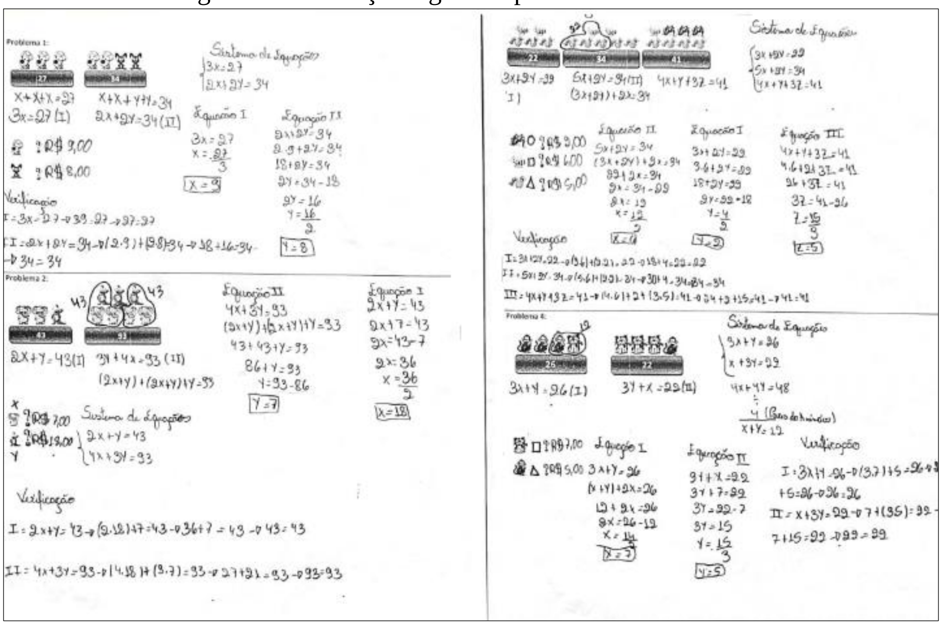
Figura 12. Resolução algébrica para os Problemas 2 e 3



Fonte: elaborada pelo pesquisador

Na Figura 14, é possível verificar como foram os registros de um aluno em sua folha.

Figura 14. Resolução algébrica para os Problemas 1 a 4



Fonte: elaborada pelo pesquisador

5ª ATIVIDADE - DESAFIO II DE PROBLEMAS E SISTEMA

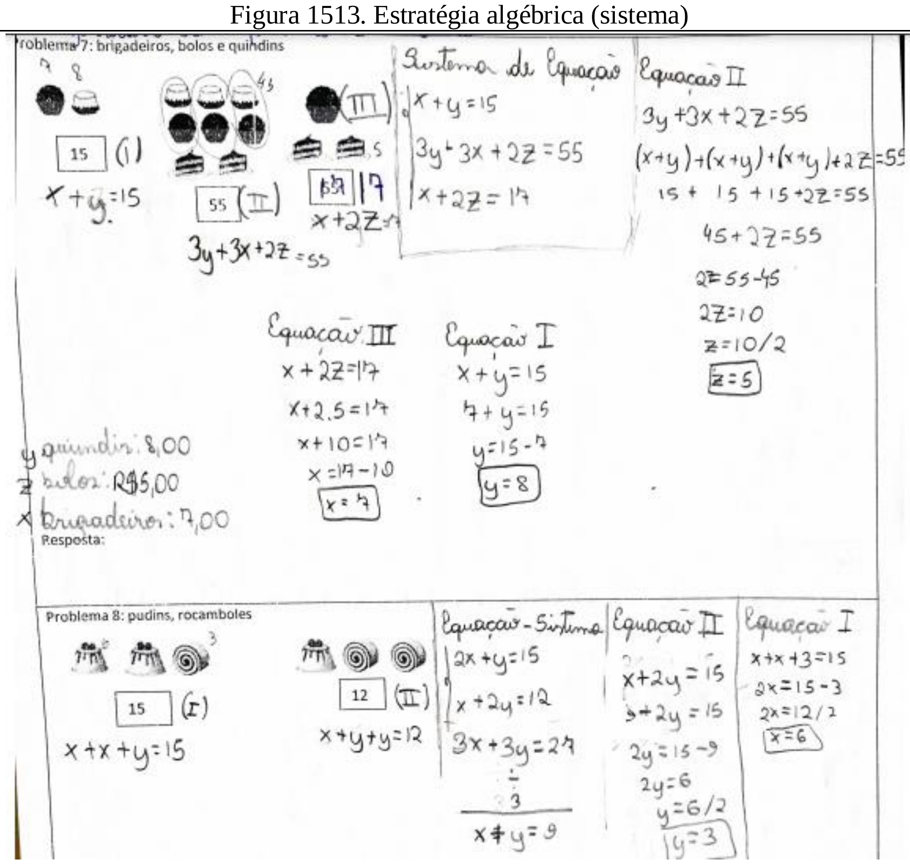
Nesta atividade, o professor entrega cópias da Folha 5, contendo os mesmos quatro problemas da 3.ª atividade.

Os alunos devem ser estimulados a resolver os problemas algebricamente (na forma de sistemas de equações), buscando consolidar os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores. Para que eles pudessem se orientar, podem ser devolvidas suas folhas da atividade anterior.

Na pesquisa realizada, o professor circulou pela sala de aula e verificou grande interação entre os alunos que estavam em duplas. Já os demais estavam concentrados e gostavam de mostrar ao professor sempre que concluíam um problema.

Na Figura 15, pode-se observar a resolução de um aluno, utilizando-se das estratégias algébricas, para os problemas 7 e 8. Nota-se que o aluno demonstra entendimento muito evidente de todo o processo, isto é, agrupamento na imagem, geração das equações e do sistema.

Figura 1513. Estratégia algébrica (sistema)



Fonte: elaborada pelo pesquisador

6ª ATIVIDADE – DESAFIO III DE PROBLEMAS SEM IMAGENS – 2 ETAPAS

Esta sexta atividade (Folha 6 – Figura 16), como é a primeira com problemas sem imagens, pode ser dividida em duas etapas: na primeira, os dois primeiros são solucionados na lousa pelo professor e, na segunda, os demais problemas são resolvidos pelos alunos, sempre na forma algébrica, isto é, por sistema de equações.

Figura 16. Folha 6 da 6º Atividade

Exercícios

FOLHA 6

Resolver os seguintes problemas utilizando sistemas:

1) Três empadinhas custam R$ 12,00. Sabe-se que 2 empadinhas e 3 coxinhas custam R$ 29,00. Quanto custa cada empadinha e cada coxinha?

2) Comprei 2 canetas e uma lapiseira por R$ 28,00. Se tivesse comprado 5 canetas e duas lapiseiras (iguais às anteriores) teria pago R$64,00. Quanto custa cada uma?

3) Quatro livros custam R$48,00. Sabe-se que 3 desses mesmos livros e 2 revistas em quadrinhos custam R$50,00. Quanto custa cada livro e cada revista em quadrinho?

4) Fui a uma loja e comprei 3 camisetas e uma bermuda pagando um total de R$58,00. Caso tivesse comprado 6 camisetas e 3 bermudas, dos mesmos modelos, teria pago R$129,00. Quanto custa cada camiseta e cada bermuda?

5) Estávamos pesando peças A, B e C. Três peças A junto com a peça B pesaram 13 kg. Seis peças A e quatro peças B juntas pesaram 34 Kg. Finalmente, uma peça A mais uma peça B e mais duas peças C pesaram juntas 17 kg. Quanto pesa cada peça?

6) Dois grupos de amigos compraram um ingresso para uma festa em que o ingresso para mulher é mais barato do que o ingresso para homem. No primeiro grupo havia três homens e uma mulher e o total pago foi R$ 45,00. No segundo grupo havia um homem e três mulheres e pagou R$ 55,00. Qual o preço do ingresso para homem e para mulher?

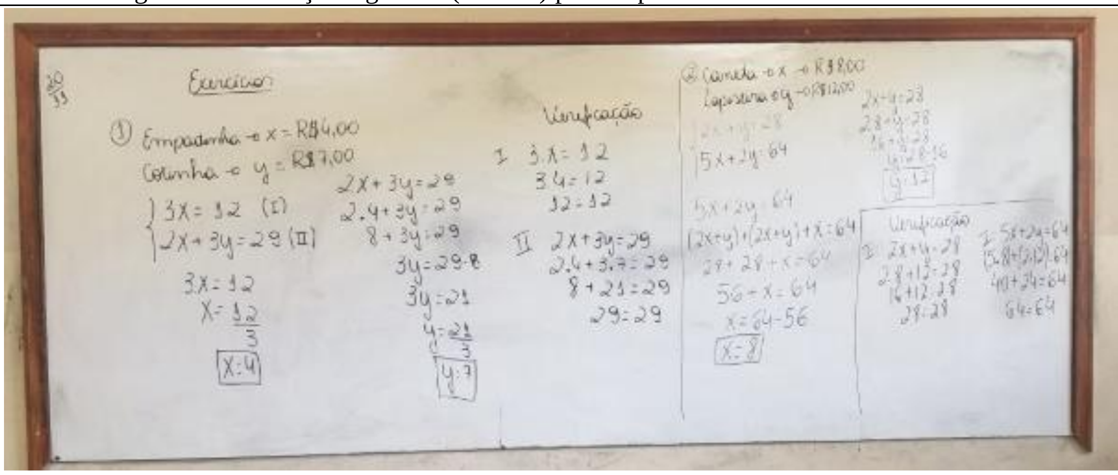
7) Num quintal há galinhas e coelhos, num total de 10 cabeças e 32 pés. Quantos são os coelhos e quantas são as galinhas?

Fonte: elaborada pelo pesquisador

Na pesquisa realizada, o professor solicita a leitura individual, de forma silenciosa; a seguir escolhe um aluno aleatoriamente e pede que leia o problema em voz alta e, por fim, o professor realiza uma leitura, pedindo a atenção de todos para a construção das equações em cada um dos problemas. Por exemplo, no problema 1, o professor faz a leitura de cada uma das informações que pode gerar uma equação - “Três empadinhas custam R$ 12,00” – questionando aos alunos como ficaria a equação. Dessa forma, busca-se uma ativa participação dos alunos, mesmo na exposição do professor.

Como pode ser observado na Figura 17 e, sempre envolvendo os alunos em todo o processo, o professor desenvolve as equações e, consequentemente, os sistemas e suas resoluções, realizando a validação dos resultados.

Figura 17. Resolução algébrica (sistema) para os problemas 1 e 2 feita na lousa

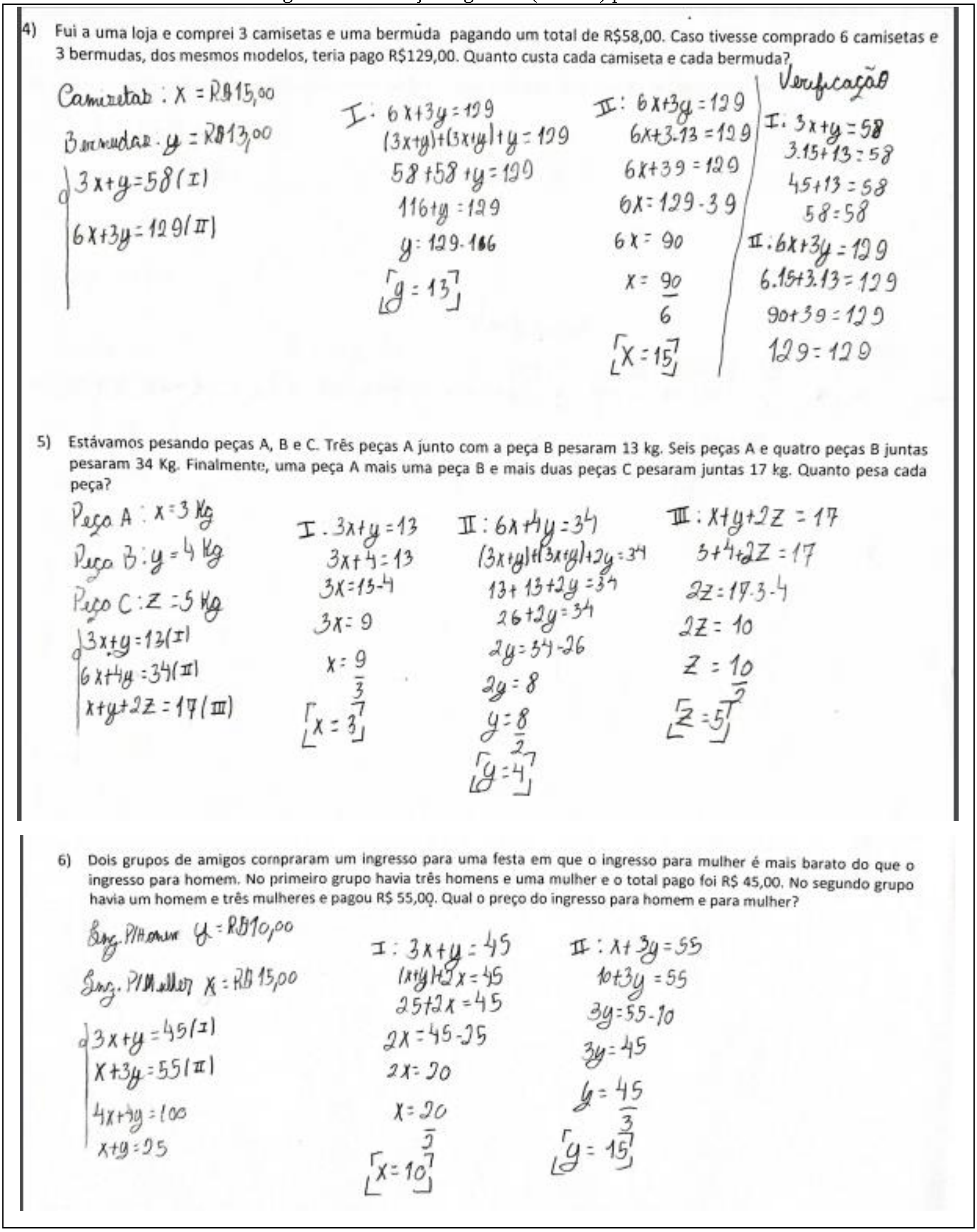


Fonte: elaborada pelo pesquisador

Na segunda etapa desta atividade, os alunos, já com a Folha 6 em mãos, é um momento importante para o professor reforçar a importância da leitura de cada um dos problemas, quantas vezes for necessário; a interpretação dos dados e do que estava sendo pedido em cada situação. Outro ponto importante foi que, na aplicação desta atividade, o professor enfatizou que os alunos deveriam ir "tirando as informações" por etapa, em cada um dos problemas e, assim, gerando as equações e, assim, montando o sistema e resolvê-los. Entende-se que essas ações foram relevantes para o resultado final.

Na Figura 18, é possível observar a resolução de um aluno, para os problemas 4, 5, e 6. Constata-se que, o aluno desenvolve corretamente todo o procedimento das estratégias apreendidas, mesmo que os problemas não possuíam imagens.

Figura 18. Resolução algébrica (sistema) para folha 6


4) Fui a uma loja e comprei 3 camisetas e uma bermuda pagando um total de R$58,00. Caso tivesse comprado 6 camisetas e 3 bermudas, dos mesmos modelos, teria pago R$129,00. Quanto custa cada camiseta e cada bermuda?

Camisetas : x = R$15,00
Bermudas : y = R$13,00
$\begin{cases} 3x+y=58 \ (I) \\ 6x+3y=129 \ (II) \end{cases}$

I: $6x+3y=129$
$(3x+y)+(3x+y)+y=129$
$58+58+y=129$
$116+y=129$
$y=129-116$
$\boxed{y=13}$

II: $6x+3y=129$
$6x+3\cdot13=129$
$6x+39=129$
$6x=129-39$
$6x=90$
$x=\frac{90}{6}$
$\boxed{x=15}$

Verificação
I: $3x+y=58$
$3\cdot15+13=58$
$45+13=58$
$58=58$
II: $6x+3y=129$
$6\cdot15+3\cdot13=129$
$90+39=129$
$129=129$

5) Estávamos pesando peças A, B e C. Três peças A junto com a peça B pesaram 13 kg. Seis peças A e quatro peças B juntas pesaram 34 Kg. Finalmente, uma peça A mais uma peça B e mais duas peças C pesaram juntas 17 kg. Quanto pesa cada peça?

Peça A : x = 3 Kg
Peça B : y = 4 Kg
Peça C : z = 5 Kg
$\begin{cases} 3x+y=13 \ (I) \\ 6x+4y=34 \ (II) \\ x+y+2z=17 \ (III) \end{cases}$

I. $3x+y=13$
$3x+4=13$
$3x=13-4$
$3x=9$
$x=\frac{9}{3}$
$\boxed{x=3}$

II: $6x+4y=34$
$(3x+y)+(3x+y)+2y=34$
$13+13+2y=34$
$26+2y=34$
$2y=34-26$
$2y=8$
$y=\frac{8}{2}$
$\boxed{y=4}$

III: $x+y+2z=17$
$3+4+2z=17$
$2z=17-3-4$
$2z=10$
$z=\frac{10}{2}$
$\boxed{z=5}$

6) Dois grupos de amigos compraram um ingresso para uma festa em que o ingresso para mulher é mais barato do que o ingresso para homem. No primeiro grupo havia três homens e uma mulher e o total pago foi R$ 45,00. No segundo grupo havia um homem e três mulheres e pagou R$ 55,00. Qual o preço do ingresso para homem e para mulher?

Ing. P/Homem y = R$10,00
Ing. P/Mulher x = R$15,00
$\begin{cases} 3x+y=45 \ (I) \\ x+3y=55 \ (II) \\ 4x+4y=100 \\ x+y=25 \end{cases}$

I: $3x+y=45$
$(x+y)+2x=45$
$25+2x=45$
$2x=45-25$
$2x=20$
$x=\frac{20}{2}$
$\boxed{x=10}$

II: $x+3y=55$
$10+3y=55$
$3y=55-10$
$3y=45$
$y=\frac{45}{3}$
$\boxed{y=15}$

Fonte: elaborada pelo pesquisador

São mostrados a seguir alguns resultados obtidos com a aplicação dessa sequência na ocasião da pesquisa. A Tabela 1 mostra os acertos e erros nos problemas constantes da sequência didática e que foram resolvidos pelos alunos.

Tabela 1. Distribuição dos alunos por acertos e erros nos problemas

Atividade	**Problema**	**Acertaram**	**Erraram/em branco**	**Total**
1ª Atividade Desafio I de Problemas	Problema 1	17	6	23
	Problema 2	10	13	23
	Problema 3	5	18	23
	Problema 4	3	20	23
3ª Atividade Desafio II de Problemas e estratégia aritmética	Problema 5	16	4	20
	Problema 6	15	5	20
	Problema 7	12	8	20
	Problema 8	10	10	20
5ª Atividade Desafio II de Problemas e Sistema	Problema 5	21	4	24
	Problema 6	19	5	24
	Problema 7	19	5	24
	Problema 8	14	10	24
6ª Atividade – 2ª Etapa - Desafio III de Problemas sem imagens	Problema 3	21	3	24
	Problema 4	20	4	24
	Problema 5	15	9	24
	Problema 6	18	6	24
	Problema 7	18	6	24

Fonte: elaborada pelo pesquisador

De uma forma geral, os dados constantes na tabela demonstram a evolução dos alunos a cada atividade realizada, isto é, pode-se associar aos resultados, o planejamento, a condução, o envolvimento dos alunos e, especialmente, a potencialidade do material.

Da primeira atividade, para a terceira, que tratavam de cálculos aritméticos, é nítido a queda na quantidade dos erros, o que leva a entender que os novos conhecimentos foram bem assimilados pelos alunos, já que na segunda atividade, o professor apresentou aos alunos a estratégia do agrupamento.

Na quarta atividade, o professor apresenta, pela primeira vez, Sistema de Equações, associado à estratégia do agrupamento, o que pode ser entendido como bem-sucedido, já que a quantidade de erros na quinta atividade, foi de aproximadamente 19%, nos problemas 5, 6 e 7. O problema 8, que teve 58% de acerto, necessitava de uma estratégia inicial, diferente dos demais, o que não foi bem compreendida por uma parte dos alunos. De toda forma, o resultado não pode ser tratado como ruim.

Já na atividade seis, onde os problemas se apresentavam sem imagens, é possível verificar que os alunos se saíram bem, demonstrando mais uma vez, a aquisição e compreensão dos novos conhecimentos, já que demonstraram o desenvolvimento dos procedimentos de forma satisfatória. Considerando os cinco problemas, verificaram-se 77% de acerto, variando um pouco para baixo, ou para cima, de acordo com cada problema. O problema 5, onde se nota um percentual menor de acerto (62,5%), possuía três informações, o que levou um número maior de alunos a se confundir com os cálculos e, consequentemente, foram levados ao erro.

Sugere-se que o professor faça uma avaliação observando os itens aqui analisados para verificar se ocorreu a aprendizagem da estratégia de agrupamento para resolução de sistemas do primeiro grau.

Evidentemente, essa estratégia não se aplica a todos os sistemas. Assim, os métodos da substituição e da adição devem ser ensinados na sequência, conforme o programa adotado nas escolas.

5. CONSIDERAÇÕES

Inicialmente, devemos refletir que, para o desenvolvimento de todo o processo desta pesquisa, foi necessário um planejamento para a aplicação da sequência didática e isso exige do professor uma organização e um estudo do material e do conteúdo a ser trabalhado; requer também certo conhecimento acerca do comportamento dos alunos.

O trabalho é amparado na teoria de Ausubel (2003) que nos fala sobre o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa; para isso, o autor indica duas condições: 1 – que o material a ser trabalhado seja potencialmente significativo; 2 - que o indivíduo busque relacionar as novas ideias com algo presente em sua estrutura cognitiva. Para a primeira condição, as atividades desta pesquisa foram planejadas e organizadas de forma lógica, com objetivos interligados e não apenas sobrepostos. Já para promover a segunda condição, esta pesquisa buscou na aritmética o apoio necessário para introduzir a álgebra, pois se entende que as estratégias aritméticas são algo já formado e conhecido dos alunos, facilitando assim, o entendimento do sistema de equações. Esta articulação da aritmética com a álgebra, é sugerida por diversos autores, entre eles, Lins e Gimenez (2001), Blanton e Kaput (2005), Arcavi (2006) e Walle (2009).

Reflexões baseadas em Ausubel (2003), Coll e Valls (1998) e Pozo (2008) foram facilitadoras para estruturar essa sequência de atividades, de forma a favorecer a aprendizagem significativa de procedimentos relativos ao objeto do conhecimento: Sistema de Equações do 1º Grau.

Para a aplicação desta sequência didática, é importante reforçar a importância da aplicação Piloto, já que foi o momento de revisão do material, contribuindo para o resultado.

As atividades aqui expostas pareceram ter contribuído para o desenvolvimento, de forma significativa, do pensamento algébrico nos alunos, conforme se observou nas dimensões anunciadas por Usiskin (1995) e nas atividades geracionais e transformacionais de Kieran (2004,2007).

Obviamente, a sequência didática aqui apresentada e descrita foi elaborada para atender a uma turma específica de alunos, porém, pode ser aplicada por outros professores de matemática, ficando a cargo de cada um que a utilizar, adequá-la à sua realidade, organizando o planejamento, recorrendo a outros materiais e acrescentando atividades complementares.

Dessa forma, os leitores desse produto são convidados a fazerem uma minuciosa leitura da dissertação que deu origem a esse produto: nela é apresentada essa proposta de ensino, assistida de estudos realizados com base em conhecimentos teóricos e em uma revisão bibliográfica que podem amparar as decisões do professor no ambiente de sala de aula.

6. REFERÊNCIAS

ARCAVI, A. El desarrolo y el uso del sentido de los símbolos. In: VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, P. **Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática. Lisboa, p. 29-48, 2006.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos:** Uma Perspectiva Cognitiva. Lisboa: Plátano, 2003.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. **Journal For Research in Mathematics Education,** V. 36, N.5, 412-446, 2005. Disponível em: https://mathed.byu.edu/kleatham/Classes/Fall2010/MthEd590Library.enlp/MthEd590Library.Data/PDF/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning-1974150144/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning.pdf. Acesso em: 03 set. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 02 set. 2020.

BRITO, M. R. F. **Solução de problemas e a matemática escolar**. Campinas: Alínea, 2006.

COLL, C.; VALLS, E. Aprendizagem e o Ensino de Procedimentos. In: COLL, C.; POZO, J. I; SARABIA, B.; VALLS, E. **Os Conteúdos na Reforma. Ensino e Aprendizagem de Conceitos, Procedimentos e Atitudes**. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artes Médica, p.70-118, 1998.

KIERAN, C. Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? **The Mathematics Educator**, Vol. 8, No. 1, 139-151, 2004. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/228526202_Algebraic_thinking_in_the_early_grades_What_is_it. Acesso em: 11 out. 2020.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas, SP: Papirus, 2001. Disponível em: https://docplayer.com.br/123326665-Romulo-campos-lins-joaquim-gimenez.html. Acesso em: 23 set. 2020.

MAYER, R. A capacidade para a matemática. In: STERNBERG, R. **As capacidades intelectuais humanas**. Porto Alegre: Artmed, 1992, cap. 6, p.114-168.

MINAS GERAIS. Secretária Estadual de Educação. Currículo Referência de Minas Gerais. 2019. Disponível em: https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br. Acesso em: 25 set. 2020.

POZO, J. I. Aprendizes e mestres: a nova cultura da aprendizagem. Tradução Ernani Rosa. Porto Alegre: Artes Médicas, 2008.

USISKIN, Z. As ideias da álgebra. Tradução Hygino H. Domingues. Atual Editora. São Paulo, 1995.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. 4. ed. New York: Longman, 2001.

ZABALA, A. **A prática educativa.** Tradução Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

APÊNDICE

APÊNDICE A: Folha 1 – Desafio de Problemas I

FOLHA 1

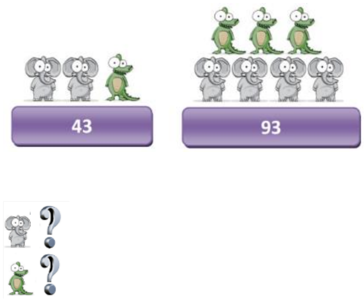
DESAFIO DE PROBLEMAS I

Em cada um dos problemas, os números indicam preços. Determine o preço de cada bichinho em cada problema.

Problema 1:

Resposta:

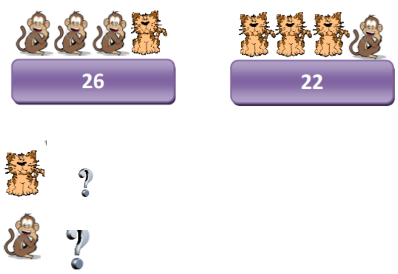
Problema 2:



Resposta:

Problema 3:

Problema 4:



Resposta:

APÊNDICE B: Folha 2 – Desafio de Problemas I

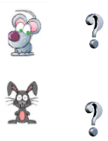
DESAFIO DE PROBLEMAS I

FOLHA 2

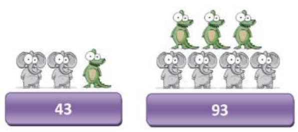
Vamos acompanhar uma forma de resolver os problemas:

Problema 1:

Resposta:

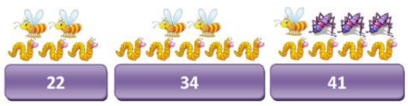


Problema 2:



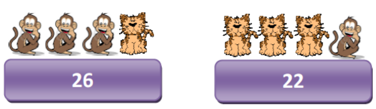
Resposta:

Problema 3:



Resposta:

Problema 4:



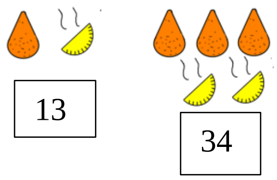
APÊNDICE C: Folha 3 – Desafio de Problemas II

DESAFIO DE PROBLEMAS II

FOLHA 3

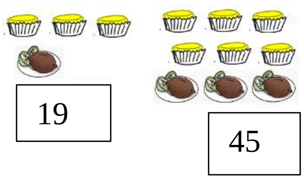
De acordo com o entendimento da atividade anterior. Determine o preço de cada salgado/doce.

Problema 5: coxinhas e pastéis



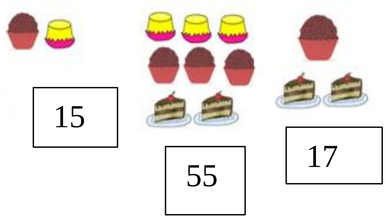
Resposta:

Problema 6: empadas e quibes



Resposta:

Problema 7: brigadeiros, bolos e quindins



Resposta:

Problema 8: pudins, rocamboles

Resposta:

APÊNDICE D: Folha 4 – Desafio de Problemas I e Sistema

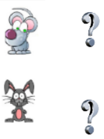
DESAFIO DE PROBLEMAS I E SISTEMA

FOLHA 4

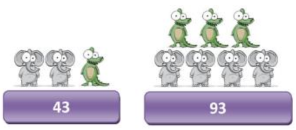
Agora vamos resolver os problemas utilizando sistemas de equações do primeiro grau.

Problema 1:

Resposta:

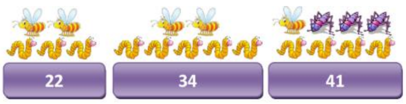


Problema 2:



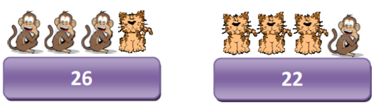
Resposta:

Problema 3:



Resposta:

Problema 4:



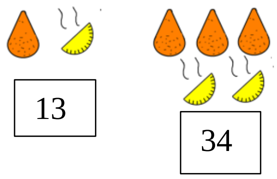
APÊNDICE E: Folha 5 – Desafio de Problemas II e Sistema

FOLHA 5

DESAFIO DE PROBLEMAS II E SISTEMA

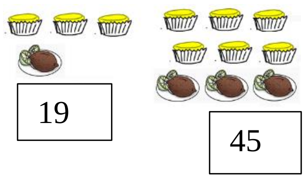
Utilizando a ideia de sistemas de equações apresentada na atividade anterior. Determine o preço de cada salgado/doce.

Problema 5: coxinhas e pastéis



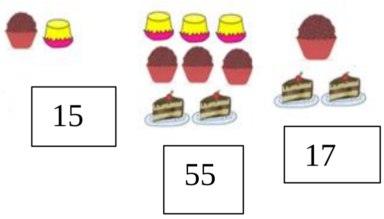
Resposta:

Problema 6: empadas e quibes



Resposta:

Problema 7: brigadeiros, bolos e quindins



Resposta:

Problema 8: pudins, rocamboles

Resposta:

APÊNDICE F: Folha 6 – Exercícios sem Imagem

Exercícios

Resolver os seguintes problemas utilizando sistemas:

FOLHA 6

1-Três empadinhas custam R$ 12,00. Sabe-se que 2 empadinhas e 3 coxinhas custam R$ 29,00. Quanto custa cada empadinha e cada coxinha?

2-Comprei 2 canetas e uma lapiseira por R$ 28,00. Se tivesse comprado 5 canetas e duas lapiseiras (iguais às anteriores) teria pago R$64,00. Quanto custa cada uma?

3-Quatro livros custam R$48,00. Sabe-se que 3 desses mesmos livros e 2 revistas em quadrinhos custam R$50,00. Quanto custa cada livro e cada revista em quadrinho?

4-Fui a uma loja e comprei 3 camisetas e uma bermuda pagando um total de R$58,00. Caso tivesse comprado 6 camisetas e 3 bermudas, dos mesmos modelos, teria pago R$129,00. Quanto custa cada camiseta e cada bermuda?

5-Estávamos pesando peças A, B e C. Três peças A junto com a peça B pesaram 13 kg. Seis peças A e quatro peças B juntas pesaram 34 Kg. Finalmente, uma peça A mais uma peça B e mais duas peças C pesaram juntas 17 kg. Quanto pesa cada peça?

6-Dois grupos de amigos compraram um ingresso para uma festa em que o ingresso para mulher é mais barato do que o ingresso para homem. No primeiro grupo havia três homens e uma mulher e o total pago foi R$ 45,00. No segundo grupo havia um homem e três mulheres e pagou R$ 55,00. Qual o preço do ingresso para homem e para mulher?

7-Num quintal há galinhas e coelhos, num total de 10 cabeças e 32 pés. Quantos são os coelhos e quantas são as galinhas?