



**TERRIED**

# **A visualização para desenvolver o Pensamento Geométrico na Resolução de Problemas**

**José Carlos Pinto Leivas  
Mauricio Ramos Lutz  
[autores]**



**TERRIED**

# **A visualização para desenvolver o Pensamento Geométrico na Resolução de Problemas**

**José Carlos Pinto Leivas  
Mauricio Ramos Lutz  
[autores]**

1.ª Edição - Copyrights do texto - Autores e Autoras

Direitos de Edição Reservados à Editora Terried

É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte.



O conteúdo dos capítulos apresentados nesta obra são de inteira responsabilidade d@s autor@s, não representando necessariamente a opinião da Editora.

Permitimos a reprodução parcial ou total desta obra, considerado que seja citada a fonte e a autoria, além de respeitar a Licença Creative Commons indicada.

### ***Conselho Editorial***

Adilson Cristiano Habowski - ***Currículo Lattes***

Anísio Batista Pereira - ***Currículo Lattes***

Adilson Tadeu Basquerote Silva - ***Currículo Lattes***

Alexandre Carvalho de Andrade - ***Currículo Lattes***

Cristiano Cunha Costa - ***Currículo Lattes***

Celso Gabatz - ***Currículo Lattes***

Denise Santos Da Cruz - ***Currículo Lattes***

Emily Verônica Rosa da Silva Feijó - ***Currículo Lattes***

Fernanda Monteiro Barreto Camargo - ***Currículo Lattes***

Fredi dos Santos Bento - ***Currículo Lattes***

Fabiano Custódio de Oliveira - ***Currículo Lattes***

Guilherme Mendes Tomaz dos Santos - ***Currículo Lattes***

Leandro Antônio dos Santos - ***Currículo Lattes***

Lourenço Resende da Costa - ***Currículo Lattes***

Marcos Pereira dos Santos - ***Currículo Lattes***

## Dados de Catalogação na Publicação (CIP)

A visualização para desenvolver o Pensamento Geométrico na Resolução de Problemas [livro eletrônico]. Autores: José Carlos Pinto Leivas; Mauricio Ramos Lutz. -- Alegrete, RS : TerriED Editora, 2023.

PDF

ISBN 978-65-84959-12-5

1. Educação 2. Ensino 3. Matemática

CDD-370

CDU-21-37/49

### Índices para catálogo sistemático:

1. Educação 370.
2. Câmara Brasileira de Livros - CBL



10.48209/978-65-84959-12-5

*Diagramação e Projeto Gráfico: Gabriel Eldereti Machado*

*Imagem capa: Designed by canva*

*Revisor Ortográfico: Cristiano Egger Veçossi <cristiano.vecossi@gmail.com>*



*www.terried.com*

*contato@terried.com*

*(55) 99656-1914*

## **APRESENTAÇÃO**

A Geometria pode relacionar-se diretamente com a rotina e com o cotidiano do sujeito. É um dos ramos dos estudos matemáticos que instiga a interpretação e o entendimento, possibilitando, tanto a quem ensina quanto a quem aprende, ver com outros “olhos” o mundo que os rodeia.

Não sabemos bem sobre as origens da Geometria, pois os primórdios desse conhecimento são mais antigos que a própria escrita. O reconhecimento da Geometria Euclidiana na Matemática e no cotidiano das pessoas é inegável, posto que, por meio dela, aprendemos sobre formas e medidas que facilmente são encontradas na natureza, em estruturas com padrões regulares como, por exemplo, em uma fachada de uma casa, uma caixa de sapato, entre outros objetos.

Com o estudo da Geometria, podemos abrir caminhos para o desenvolvimento de novas aprendizagens. No nosso caso, optamos por explorar a imaginação e a visualização, verificando se elas poderiam favorecer o desenvolvimento do pensamento geométrico a partir da Resolução de Problemas. Neste estudo, consideramos a visualização como “um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos” (LEIVAS, 2009, p. 22).

Além disso, apontamos a necessidade de os professores utilizarem as tecnologias disponíveis, em especial o uso do *software*, para o desenvolvimento do pensamento geométrico, visto que a utilização dessa ferramenta auxilia no processo de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos, tornando as aulas mais dinâmicas, participativas e, sobretudo, interativas. Vivemos em uma sociedade em que o indivíduo tem acesso aos mais variados meios e formas de tecnologias e, como professores, não podemos deixar de lado essa realidade.

Acreditamos que a utilização de recursos tecnológicos digitais, especialmente na Educação Matemática, deve ser pensada como uma metodologia que pode melhorar os processos de ensino e de aprendizagem. Para esta pesquisa, utilizamos o *software GeoGebra*, cabendo destacar que ele não é um instrumento que ensina, mas apenas uma ferramenta que auxilia o estudante a desenvolver algo. Sendo assim, o aprendizado ocorre por meio da interação do estudante com o *software*, quando o aluno realiza alguma tarefa designada pelo professor.

Entendemos que o uso dessa tecnologia deve auxiliar o enriquecimento do ambiente educacional, possibilitando a construção de conhecimentos por meio de uma ação ativa, crítica e criativa, tanto por parte dos estudantes quanto dos educadores. Além disso, a familiarização do discente com o uso de ferramentas digitais é importante, pois pode gerar uma série de oportunidades de expansão dos conhecimentos, além de promover a autonomia.

Pensando em difundir o conhecimento entre os pares e melhorar os processos de ensino e de aprendizagem em Geometria, elaboramos este e-book. Ele teve início a partir da pesquisa de pós-doutorado de Mauricio Ramos Lutz, orientada por José Carlos Pinto Leivas e realizada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Matemática da Universidade Franciscana (UFN) – Santa Maria/RS.

A partir da temática apresentada, foi elaborado e dinamizado um curso de extensão, oferecido gratuitamente, intitulado “A visualização para desenvolver o Pensamento Geométrico na Resolução de Problemas”, em parceria com o Grupo de Estudos e Pesquisa em Tecnologias Digitais na Educação (GEPTEC), do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha (IFFar), e com o Grupo de Estudos e Pesquisa em Geometria (GEPGEO), vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (UFN).

Nesse contexto, o curso de extensão auxiliou para a coleta dos dados da pesquisa. Foi desenvolvido com 25 professores de Matemática da Educação Básica do estado do Rio Grande do Sul. Com o intuito de favorecer a participação de um maior número de docentes de diferentes regiões do estado, o curso de extensão foi realizado no formato a distância, por meio da plataforma moodle do IFFar.

O curso foi dividido em três módulos, os quais deram origem aos capítulos deste e-book, sendo que, para cada um deles, há um objetivo específico, como segue:

(a) capítulo 1 – “Pensamento geométrico: da compreensão conceitual ao entendimento prático” - tem o objetivo de revisar e/ou estudar conceitos e a teoria que envolve o Pensamento Geométrico.

(b) capítulo 2 – “Visualização e Tecnologias Digitais no auxílio do ensino de Geometria” - tem o objetivo de apresentar ao leitor a importância da visualização e do uso de Tecnologias Digitais para o ensino de Geometria.

(c) capítulo 3 – “Resolução de Problemas como metodologia para o ensino e a aprendizagem de Geometria” - tem o objetivo de trazer ao leitor a metodologia de Resolução de Problema aplicada ao ensino e à aprendizagem de Geometria.

(d) capítulo 4 – “Desenvolvendo atividades com um grupo de professores da Educação Básica” – tem como objetivo mostrar ao leitor uma sucinta análise e discussão dos resultados obtidos a partir da dinamização do curso de extensão.

Esperamos que este e-book possibilite novas inspirações e perspectivas de ensino de Geometria para estudantes de licenciatura e professores de Matemática ou áreas afins.

# **SUMÁRIO**

## **CAPÍTULO 1**

<b>PENSAMENTO GEOMÉTRICO: DA COMPREENSÃO CONCEITUAL AO ENTENDIMENTO PRÁTICO.....</b>	<b>9</b>
--	----------

## **CAPÍTULO 2**

<b>VISUALIZAÇÃO E TECNOLOGIAS DIGITAIS NO AUXÍLIO DO ENSINO DE GEOMETRIA.....</b>	<b>30</b>
---	-----------

## **CAPÍTULO 3**

<b>RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA.....</b>	<b>42</b>
---	-----------

## **CAPÍTULO 4**

<b>DESENVOLVENDO ATIVIDADES COM UM GRUPO DE PROFESSORES DA EDUCAÇÃO BÁSICA.....</b>	<b>55</b>
---	-----------

<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>79</b>
-------------------------	-----------

<b>SOBRE OS AUTORES.....</b>	<b>84</b>
------------------------------	-----------



---

## **CAPÍTULO 1**

---

# **PENSAMENTO GEOMÉTRICO: DA COMPREENSÃO CONCEITUAL AO ENTENDIMENTO PRÁTICO**

A Geometria é um dos conteúdos da Matemática que os professores devem desenvolver na sua sala de aula. Entretanto, alguns docentes não se sentem preparados ou não conseguem trabalhá-los devido ao excesso de conteúdos a serem desenvolvidos. Para Santos e Nacarato (2014), vários fatores têm contribuído para o ensino insatisfatório da Geometria, levando ao seu abandono em muitas escolas. Um desses fatores pode estar relacionado à ordem do seu desenvolvimento no decorrer do ano letivo. Em muitas situações, no plano de ensino ou plano de estudos, a Geometria é deixada para o final e, conseqüentemente, não é desenvolvida de forma satisfatória. Desse modo, o docente acaba por não proporcionar o desenvolvimento do pensamento geométrico a seus discentes.

Ainda em relação ao preparo dos educadores, Santos e Nacarato (2014) descreve que os docentes que ministraram aulas entre os anos de 1970 e 1980 tiveram ênfase na linguagem e se depararam com

[...] dificuldades para ensinar os conteúdos e, associados a toda essa complexidade, os livros didáticos existentes naquela época traziam os conteúdos geométricos nos capítulos finais. Isso de certa maneira contribuiu para que o ensino desse conteúdo se tornasse bastante insatisfatório, provocando o seu abandono pela escola. (SANTOS; NACARATO, 2014, p. 14).

Para os autores, a falta de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos mostra-se de forma preocupante nos anos finais do Ensino Fundamental, principalmente no 6º e no 7º ano. Se não for tomada alguma atitude em relação a esse fato, isso pode perdurar por todo o Ensino Médio e até mesmo no Ensino Superior. Seguindo esse pensamento Pires, Cury e Campos (2000, p. 15) reforçam que a Geometria

[...] é considerada importante por pesquisadores e curriculistas porque, por meio dela, a criança desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.

Apesar disso, devemos destacar que a Geometria não é importante apenas para as crianças. Ela pode fortalecer as habilidades elencadas pelas autoras com alunos de outras idades, por exemplo, nos adolescentes, jovens e adultos.

No entanto, acreditamos que seja necessário fornecer elementos suficientes para desenvolver o pensamento geométrico nos alunos da Educação Básica, a fim de se tornarem agentes ativos no seu processo de aprendizagem. Nesse contexto, sugerimos que o professor passe a desempenhar um papel de mediador, ou seja, a instigar seus alunos por meio de questionamentos sobre os conteúdos abordados, bem como oferecer atividades diferenciadas do rotineiro. Por esse viés, Santos e Nacarato (2014, p. 17) argumenta que

[...] uma instrução adequada, pautada na problematização/indagação, mediada pedagogicamente, com o uso apropriado da linguagem e de materiais didáticos, possibilitará que a aprendizagem promova o desenvolvimento tal como postulado da teoria vigotskiana. Nessa abordagem teórica a aprendizagem antecede o desenvolvimento. Isso nos mostra a importância de práticas pedagógicas que possibilitem aprendizagens dos alunos.

Dessa maneira, o aluno passa a ser o protagonista de seu conhecimento e o professor assume o papel de mediador (organizador) da aprendizagem. Cabe destacar que, para isso acontecer, o professor deve conhecer seu aluno, suas condições, perspectivas e habilidades. Além disso, deve selecionar as atividades de modo a alcançar os objetivos propostos.

De acordo com Santos e Nacarato (2014), quando o pensamento geométrico é desenvolvido, objetos, conceitos, desenhos e imagens mentais são interligados. Para que isso aconteça de forma satisfatória, é importante oportunizar o objeto concreto para manipulação e, assim, possibilitar ao aluno a construção conceitual.

Com o manuseio de uma coleção de objetos a serem classificados, acreditamos que os alunos, a partir da visualização de figuras geométricas que constituem cada um dos itens, terão uma forma mais atrativa e instigadora. Esse

contato direto com as formas percebidas poderá favorecer a construção conceitual, a partir da reflexão sobre as características gerais de cada classificação.

A fim de fundamentar nosso estudo, primeiramente, devemos definir o conceito de pensamento geométrico. Para tanto, tomaremos como base alguns educadores matemáticos como Fischbein (1993), Duval (1995) e Leivas (2009).

Fischbein (1993) define pensamento geométrico como a capacidade de um indivíduo compreender a Geometria composta por entidades mentais, com características conceituais e figurativas, proporcionando a percepção de uma figura geométrica como imagem visual mediante a sua representação mental.

Para Duval (1995), pensamento geométrico é a capacidade mental do indivíduo de produzir conhecimentos geométricos por meio de apreensões geométricas, isto é, quando, por meio do reconhecimento de um objeto geométrico no plano ou espaço, ou da elaboração de figuras geométricas, o indivíduo descreve ou analisa-os apoiado em suas propriedades, além de operar, manipular ou decompor figuras geométricas, entre outras apreensões.

Por último, no entendimento de Leivas (2009), pensamento geométrico pode ser definido como uma ação humana manifestada por meio da investigação de atividades que possam ajudar a despertar a curiosidade dos estudantes ao realizarem conjecturas que podem ser validadas ou não por contraexemplos, fazendo uso de recursos apropriados, justificativas e argumentações.

Pelo exposto, percebemos que não existe definição única para pensamento geométrico. Entretanto, essa pluralidade de definições não inviabiliza nosso estudo, pois as três conceituações apresentadas partem de uma estrutura semelhante para sua compreensão.

Entendida a definição de pensamento geométrico, passaremos a compreender como se deu o seu desenvolvimento até chegar a um modelo. O pensamento geométrico foi desenvolvido, segundo Walle (2009), a partir de 1959 pelo casal

holandês Van Hiele. Tais estudos fornecem reflexões sobre as diferenças que surgem do pensamento geométrico e como essas distinções são estabelecidas.

O modelo Van Hiele para o pensamento geométrico foi desenvolvido por Pierre Van Hiele e sua esposa, Dina Van Hiele Geoldof, com base na observação das dificuldades que seus alunos apresentavam. Segundo Villiers (2010), o fator principal para o fracasso do currículo de Geometria, na perspectiva dos Van Hiele, foi que “[...] o currículo era apresentado em um nível mais alto do que o dos alunos, ou seja, eles não conseguiam entender o professor e o professor não conseguia entender o porquê eles não conseguiam entender” (VILLIERS, 2010, p. 401).

A tese de Pierre, segundo Villiers (2010), buscava esclarecer as dificuldades de aprendizagem e, assim, “sob tal aspecto ela era explicativa e descritiva. Já a tese de Dina versava sobre um experimento educacional e, sob tal aspecto, é mais prescritiva com relação à ordenação do conteúdo de Geometria e atividades de aprendizagem dos alunos” (VILLIERS, 2010, p. 400).

Segundo Hamazaki (2004), o casal Van Hiele traçou um modelo apoiado na valorização da aprendizagem da Geometria em uma evolução gradual, global e construtiva. Para a autora, a evolução é considerada gradual, pois o casal Van Hiele defende que a linguagem da Geometria, do raciocínio e da intuição é adquirida gradualmente. A evolução é dita global uma vez que propriedades e figuras se inter-relacionam, assumindo vários níveis que levam a significados distintos. É construtiva porque implica que os alunos devem construir seus próprios conceitos.

Conforme Lopes e Nasser (1997), a concepção inicial desse modelo indica que os alunos avançam a partir de uma sucessão de níveis de compreensão dos conceitos percebidos durante o tempo em que aprendem Geometria. Nesse sentido, cada nível é caracterizado pela relação entre o objeto de estudo e sua própria linguagem.

O modelo de Van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico é caracterizado por níveis e fases, “os níveis descrevem como pensamos e quais os tipos de ideias geométricas sob as quais pensamos mais do que a quantidade de conhecimento ou de informação que temos a cada nível” (WALLE, 2009, p. 440). Existem cinco níveis hierárquicos, classificados de um a cinco, que definem as características dos processos de pensamento geométrico dos alunos. São eles: nível 1 (reconhecimento ou visualização), nível 2 (análise), nível 3 (abstração ou dedução informal), nível 4 (dedução) e nível 5 (rigor).

Há também fases sequenciais de aprendizagem, que são fundamentais para a evolução do aluno de um nível para o seguinte e isso só irá ocorrer quando perpassar todas as fases. Segundo Crowley (1994), existem cinco fases necessárias para organizar o ensino de acordo com o modelo sugerido por Van Hiele. A primeira é a interrogação/informação, em que o professor deve identificar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o assunto a ser desenvolvido. A fase 2 é referente à orientação dirigida, ou seja, o ensino deve ser direcionado por meio de atividades concretas, organizadas de forma sequencial. A terceira é a explicação e está baseada nas experiências anteriores dos estudantes, em que eles devem ser capazes de apresentar, por meio da escrita ou oralidade, os resultados obtidos por suas experiências, além de discuti-las com o professor e seus colegas. A penúltima fase é a orientação livre, em que os discentes irão empregar os conhecimentos obtidos para resolver atividades e situações diferentes das anteriores. Por fim, a fase 5 é a integração, na qual os estudantes revisam e sintetizam o que aprenderam para formar uma visão geral e uma nova rede de conhecimento aprendido.

Do ponto de vista prescritivo, o modelo possui cinco características que visam orientar os professores no planejamento das atividades que guiarão o ensino da Geometria, as quais são a base para o sucesso do aprendizado em cada nível e para a passagem ao nível seguinte.

A partir dessa ideia, Nasser e Sant’Anna (2010) destacam que as fases descritas no modelo podem acontecer simultaneamente e em diferentes disposições. Entretanto, a última delas dar-se-á após as anteriores terem sido desenvolvidas, pois elas fornecem a estrutura indispensável para que a aprendizagem ocorra.

Assim, o modelo de Van Hiele assume que, à medida que os alunos aprendem Geometria, eles progredem por meio da sequência dos cinco níveis de compreensão de conceitos, os quais permitem as particularidades dos processos de pensamento geométrico dos estudantes. Os níveis recomendados no modelo Van Hiele, bem como suas características, são destacados com referências a Nasser e Sant’Anna (2010) e Crowley (1994) no Quadro 1.

Quadro 1 – Níveis do pensamento geométrico no modelo de Van Hiele

<p>Nível 1 - reconhecimento ou visualização</p>	<p>Os discentes identificam, comparam e atribuem o nome às figuras geométricas com base na sua aparência global sem prestar atenção nas propriedades que as definem, por exemplo, forma e tamanho. Segundo Crowley (1994, p. 2), as figuras geométricas “[..] são reconhecidas por sua forma como um todo, isto é, por sua aparência física, não por suas partes e propriedades”.</p>
<p>Nível 2 - análise</p>	<p>Os alunos começam a compreender as características das figuras e a reconhecer suas propriedades. Além disso, reconhecem as formas por suas partes. No entanto, neste nível, eles não conseguem explicar as relações entre as propriedades. Crowley (1994, p. 3) relata que “[...] os alunos deste nível ainda não são capazes de explicar relações entre propriedades, não veem inter-relações entre as figuras e não entendem definições”.</p>
<p>Nível 3 - abstração ou dedução informal</p>	<p>Os alunos estabelecem relações entre as propriedades de uma figura e uma propriedade que pode ser inferida de outra figura comparando-a com outra, distinguindo, assim, formas e orientações de classes de figuras geométricas. Aqui, por exemplo, eles conseguem estabelecer uma relação entre um retângulo e um paralelogramo. Segundo Crowley (1994, p. 4), os estudantes “[...] são capazes de acompanhar demonstrações formais, mas não veem como se pode alterar a ordem lógica nem como se pode construir uma prova partindo de premissas diferentes ou não familiares”.</p>

<p>Nível 4 – dedução</p>	<p>Os estudantes utilizam-se das definições para justificar, elaborar demonstrações formais, fazendo distinções entre postulados, teoremas e definições. Além disso, de acordo com Crowley (1994, p. 4), os discentes compreendem “[...] o significado de dedução como uma maneira de estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático”.</p>
<p>Nível 5 - rigor</p>	<p>Os estudantes são capazes de fazer análises de outras geometrias, dentre elas as não euclidianas, compreendendo e fazendo comparações: “[...] o aluno é capaz de trabalhar em vários sistemas axiomáticos, isto é, pode estudar geometrias não-euclidianas e comparar sistemas diferentes.” (CROWLEY, 1994, p.4).</p>

Fonte: compilado e adaptado de Nasser e Sant’Anna (2010) e Crowley (1994).

Ainda relacionado aos níveis no modelo de Van Hiele, Nasser (1992) e Andrade e Nacarato (2004) mostram que os alunos podem exibir estratégias específicas de dois níveis em conteúdos distintos da Geometria, transitando entre um nível e outro imediatamente antes ou depois, resolvendo a mesma atividade. De acordo com Nasser e Sant’Anna (2010), um discente também pode apresentar raciocínio em um nível, mesmo que não tenha atingido o imediatamente anterior.

Para as autoras, o modelo pressupõe que o estudante só progride para o próximo nível se atingir o domínio dos anteriores. Essa progressão vai depender mais da aprendizagem apropriada do que da idade ou maturidade do estudante, pois a passagem para outro nível se dá pelas práticas vivenciadas de atividades adequadas e ordenadas, organizadas pelos professores.

Ainda em relação aos níveis, Hoffer (1981, p. 14, tradução nossa) faz um resumo das “[...] habilidades que poderiam ser esperadas dos alunos em diferentes níveis de seu desenvolvimento em Geometria”. Salientamos esse autor por ele utilizar da mesma classificação apresentada por Nasser e Sant’Anna (2010) e Crowley (1994). Além disso, sugere para cada nível as distintas habilidades desejáveis: visual, verbal, desenho, lógica e aplicação (Quadro 2).



Quadro 2 – Relação entre os níveis do modelo de Van Hiele e as habilidades apresentadas por Hoffer (1981)

Níveis Habilidades	1 – Reconhecimento ou visualização	2 – Análise	3 – Abstração ou dedução informal	4 – Dedução	5 – Rigor
<b>Visual</b>	Reconhece figuras diferentes de um desenho. Reconhece informações marcadas em uma figura.	Percebe as propriedades de uma figura. Identifica uma imagem como parte de uma figura maior.	Reconhece as inter-relações dos diferentes tipos de figuras. Reconhece propriedades comuns de diferentes tipos de figuras.	Usa informação sobre a figura para deduzir outras informações.	Reconhece situações injustificadas feitas com o uso de figuras. Concebe figuras relacionadas em vários sistemas dedutivos.
<b>Verbal</b>	Associa o nome correto com uma figura dada. Interpreta sentenças que descrevem figuras.	Descreve com precisão várias propriedades de uma figura.	Define as palavras de forma precisa e concisa. Formula sentenças mostrando inter-relações das figuras.	Compreende a diferença entre definições, postulados e teoremas. Reconhece o que é dado em um problema e o que se pede para achar ou fazer.	Formula extensões de resultados e conhecimentos. Descreve vários sistemas dedutivos.
<b>Desenho</b>	Faz esquemas de figuras, identificando com precisão as partes dadas.	Traduz as informações verbais dadas em uma figura. Usa as propriedades dadas por elas para desenhar ou construir as figuras.	Dadas certas figuras, é capaz de construir outras relacionadas às dadas.	Reconhece quando e como usar elementos auxiliares em uma figura. Deduz, a partir de determinadas informações, como desenhar ou construir uma figura específica.	Compreende as limitações e as capacidades de vários instrumentos de desenho. Representa pictoriamente conceitos não padronizados em vários sistemas dedutivos.

<p><b>Lógica</b></p>	<p>Percebe que há diferenças e semelhanças entre as figuras. Entende a conservação das formas das figuras em posições diferentes.</p>	<p>Entende que figuras podem ser classificadas em diferentes tipos. Percebe que propriedades podem ser usadas para distingui-las.</p>	<p>Entende a qualidade de uma boa definição. Usa propriedades de figuras para determinar se uma classe delas está contida numa outra classe.</p>	<p>Utiliza regras de logica para desenvolver provas. É capaz de deduzir consequências a partir de uma dada informação.</p>	<p>Compreende as limitações e capacidades de hipóteses e postulados. Sabe quando um sistema de postulados é independente, consistente e categórico.</p>
<p><b>Aplicações</b></p>	<p>Identifica formas geométricas em objetos físicos.</p>	<p>Reconhece as propriedades geométricas dos objetos físicos. Representa fenômenos físicos em papel ou em um modelo.</p>	<p>Compreende o conceito de um modelo matemático que apresenta relações entre objetos.</p>	<p>É capaz de deduzir as propriedades dos objetos a partir de informações dadas ou obtidas. É capaz de resolver problemas que relacionam objetos.</p>	<p>Usa modelos matemáticos para representar sistemas abstratos. Desenvolve tais modelos para descrever fenômenos físicos, sociais e naturais.</p>

Fonte: Hoffer (1981, p. 15, tradução nossa).

Para exemplificar o que foi exposto, resolveremos duas questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), sendo a primeira a questão 169 do caderno amarelo do ano de 2018 (Figura 1), apresentando as possíveis classificações para cada nível no modelo de Van Hiele a partir da ótica dos autores deste trabalho. Salientamos que pode haver outras interpretações que também estarão corretas.

Figura 1 – Questão 169 – Caderno Amarelo – ENEM (2018)

**QUESTÃO 169**

Um quebra-cabeça consiste em recobrir um quadrado com triângulos retângulos isósceles, como ilustra a figura.



Uma artesã confecciona um quebra-cabeça como o descrito, de tal modo que a menor das peças é um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2 cm. O quebra-cabeça, quando montado, resultará em um quadrado cuja medida do lado, em centímetro, é

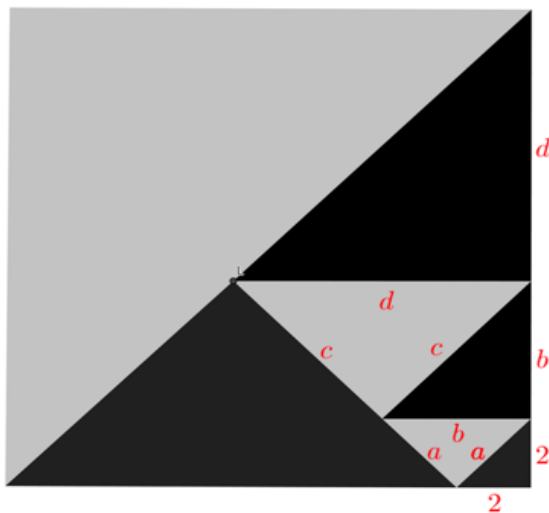
- A 14
- B 12
- C  $7\sqrt{2}$
- D  $6+4\sqrt{2}$
- E  $6+2\sqrt{2}$

Fonte: ([https://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/enem/provas/2018/2DIA\\_05\\_AMARELO\\_BAIXA.pdf](https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2018/2DIA_05_AMARELO_BAIXA.pdf)).

No Quadro 3, apresentamos uma possível resolução para essa questão. Destacamos que o modo de resolução vai depender de como o estudante irá analisar e resolver. Por isso, usamos o termo “possível resolução”.

Quadro 3 – Resolução da questão 169 (caderno amarelo) do ENEM de 2018

Para resolver esta questão, pensamos em aplicar o Teorema de Pitágoras.



O menor triângulo retângulo isósceles possui catetos de 2 cm. Logo, a hipotenusa é dada por:

$$a^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$$

A hipotenusa (lado a) do menor triângulo retângulo isósceles é o cateto do segundo menor triângulo isósceles (lado a). Então, sua hipotenusa é:

$$b^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow b = 4$$

Utilizando raciocínio análogo, encontramos a medida dos demais triângulos retângulos isósceles:

$$c^2 = 4^2 + 4^2 \Rightarrow c = 4\sqrt{2}$$

$$d^2 = (4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow d = 8$$

Logo, a medida do lado do quebra-cabeça é

$$2 + 4 + 8 = 14$$

Portanto, o lado do quadrado mede 14 cm e a alternativa correta é a letra A.

Fonte: adaptado de (<https://resolve.ftd.com.br/caderno-prova-amarela-2-dia-enem-2018/questao/169>).

No Quadro 4, apresentamos uma possível classificação para os 5 níveis de pensamento geométrico baseada no modelo de Van Hiele, relativamente à questão precedente.

Quadro 4 – Domínio dos níveis do pensamento geométrico do modelo de Van Hiele para a questão 169 (prova amarela) ENEM 2018

<p><b>Nível 1 - reconhecimento ou visualização</b></p>	<p>O aluno percebe que existem várias figuras geométricas: 1 quadrado e 7 triângulos, esse último de vários tamanhos e cores. Neste nível, o estudante não presta atenção às propriedades que as figuras geométricas possam ter.</p>
<p><b>Nível 2 - análise</b></p>	<p>O aluno percebe que a figura é um quadrado, pois possui 4 lados congruentes e 4 ângulos internos iguais a <math>90^\circ</math>. Da mesma forma, o estudante percebe que os triângulos apresentados são triângulos retângulos isósceles, pois possuem dois lados e dois ângulos internos congruentes. O terceiro ângulo interno é de <math>90^\circ</math>. O discente ainda não consegue relacionar as figuras geométrica entre si.</p>
<p><b>Nível 3 - abstração ou dedução informal</b></p>	<p>Agora, o aluno consegue estabelecer relações entre o quadrado e o triângulo retângulo isósceles e, também, entre os triângulos retângulos isósceles. Por exemplo, a hipotenusa do triângulo de lado <math>a</math> é o cateto no triângulo retângulo isósceles em que o lado <math>b</math> é a hipotenusa, ou ainda, que a solução da questão é a soma dos lados com medida 2, <math>b</math> e <math>d</math>.</p>
<p><b>Nível 4 – dedução</b></p>	<p>Já neste nível, o aluno irá pensar em uma justificativa e apresentar uma resolução formal pautada em conhecimentos geométrica e algébricos. Neste caso, o aluno percebe que o Teorema de Pitágoras será utilizado para obter a resposta correta.</p>
<p><b>Nível 5 - rigor</b></p>	<p>Neste último nível, o estudante conjectura o problema com outras geometrias não-euclidianas, por exemplo, ele pode comparar com a Geometria Fractal e tentar conjecturar e analisar se a figura apresentada é um fractal ou não, além de estabelecer outras relações de propriedades que a figura geométrica pode apresentar.</p>

Fonte: elaborado pelos autores.

Dando continuidade, apresentamos no Quadro 5 o modelo de pensamento de Van Hiele com suas respectivas habilidades, conforme apresentada por Hoffer (1981) no Quadro 2.

Quadro 5 – Exemplificação dos níveis e habilidade do pensamento geométrico desenvolvidas por Hoffer (1981) para a questão 169 (prova amarela) ENEM 2018

Níveis Habilidades	1 – Reconhecimento ou visualização	2 – Análise	3 – Abstração ou dedução informal	4 – Dedução	5 – Rigor
<b>Visual</b>	Reconhece que tem várias figuras. Entre elas, um quadrilátero e vários triângulos, sem apresentar sua classificação.	As figuras apresentam congruências com alguns de seus lados, possuem dois ângulos internos congruentes e o outro ângulo igual a $90^\circ$ .	Reconhece que, para determinar o valor do lado $b$ , deve obter primeiro o valor do lado $a$ .	A partir da dedução da medida do lado $a$ , o aluno é capaz de fazer a dedução das medidas dos lados $b$ e $d$ .	Tenta relacionar o lado do quadrado maior com os catetos dos triângulos retângulos isósceles.
<b>Verbal</b>	Percebe que a figura maior é um quadrado e, internamente, é composto por triângulos.	Reconhece que é um triângulo retângulo isósceles, além de identificar os lados e ângulos congruentes. Reconhece que o quadrilátero é um quadrado, formado por 4 lados congruentes e 4 ângulos internos de $90^\circ$ .	Reconhece que, para calcular o cateto de lado $b$ , deve primeiro determinar a hipotenusa do triângulo de cateto $a$ .	Reconhece e aplica o Teorema de Pitágoras na resolução do problema.	Formula conjecturas para deduzir o valor do lado do quadrado.

<p><b>Desenho</b></p>	<p>Realiza o desenho do quadrado e dos triângulos que aparecem na questão.</p>	<p>Utiliza as devidas marcações no desenho para mostrar as propriedades identificadas anteriormente.</p>	<p>Reconhece, por meio do desenho, que os lados <math>a</math>, <math>b</math>, <math>c</math> e <math>d</math> estão inter-relacionados.</p>	<p>Identifica, a partir da construção dos ângulos internos do triângulo retângulo <math>e</math>, dessa forma, auxilia na utilização do Teorema de Pitágoras para a resolução.</p>	<p>Por meio da representação de figuras geométricas, o aluno elabora uma estratégia para a resolução.</p>
<p><b>Lógica</b></p>	<p>Percebe que a hipotenusa do menor triângulo, de lado 2 é o lado do segundo de hipotenusa e assim por diante.</p>	<p>Constata que o lado <math>a</math> pode ser cateto ou hipotenusa, dependendo do triângulo que for tomado.</p>	<p>Entende que, para descobrir a solução do problema, deve utilizar o Teorema de Pitágoras.</p>	<p>A partir da determinação do lado <math>a</math>, o aluno pode realizar provas e constatar que seu cálculo realizado está correto.</p>	<p>Entende as limitações e capacidades de hipóteses e postulados. Percebe que utilizar o quadrado maior para determinar o lado dele, não foi a melhor opção de resolução.</p>
<p><b>Aplicações</b></p>	<p>Relaciona a região quadrangular e triangular a objetos que podem ser encontrados em seu cotidiano.</p>	<p>Reconhece que os lados <math>a</math> e <math>c</math> são catetos, enquanto <math>b</math> e <math>d</math> são hipotenusas de triângulos retângulos isósceles.</p>	<p>Realiza a utilização do Teorema de Pitágoras para descobrir os lados <math>a</math>, <math>b</math>, <math>c</math> e <math>d</math>.</p>	<p>A partir do cálculo, o aluno comprova que os triângulos internos ao quadrado maior são triângulos retângulos isósceles.</p>	<p>O aluno conjectura o problema com a Geometria Fractal e tenta realizar inter-relações.</p>

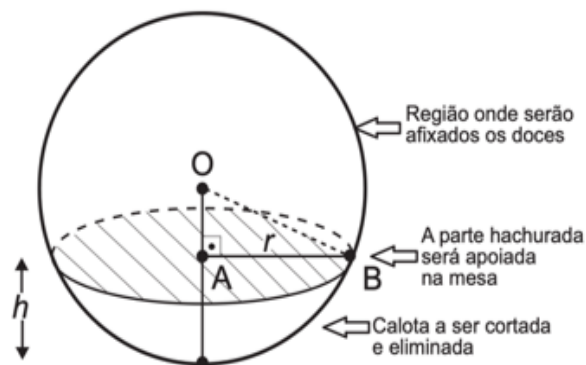
Fonte: interpretação dos autores.

A segunda questão a ser resolvida, conforme os níveis do modelo de Van Hiele, é a de número 180 do caderno amarelo do ano de 2017, Figura 2.

Figura 2 – Questão 180 – Caderno Amarelo – ENEM (2017)

**QUESTÃO 180**

Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10 cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio  $r$  da seção circular de corte seja de pelo menos 3 cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.



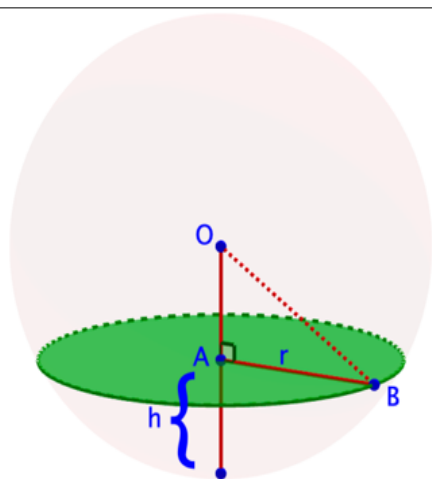
Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura  $h$ , em centímetro, igual a

- A  $5 - \frac{\sqrt{91}}{2}$
- B  $10 - \sqrt{91}$
- C 1
- D 4
- E 5

Fonte: ([https://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/enem/provas/2017/cad\\_5\\_prova\\_amarelo\\_12112017.pdf](https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/cad_5_prova_amarelo_12112017.pdf))

Mostramos, no Quadro 6, uma possível resolução para esta questão. Novamente, usamos o termo “possível”, pois pode haver outras formas de resolver a questão que não sejam a apresentada neste quadro.

Quadro 6 – Resolução da questão 180 (caderno amarelo) do ENEM de 2017



A questão exige do estudante a habilidade de visualizar os elementos de uma esfera, requerendo o cálculo da altura de uma calota esférica a ser eliminada.

Pelo enunciado, sabe-se que o diâmetro do melão é de 10 cm. Logo, o segmento OB, raio da esfera, mede 5 cm. Na situação ilustrada na imagem, a seção do corte, de raio AB, dado como 3 cm, está pintada de verde.

O triângulo OAB é retângulo em A. Então, podemos escrever:

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 \Rightarrow 5^2 = OA^2 + 3^2$$

$$OA = 4 \text{ cm}$$

Por fim, a altura h pedida é a diferença entre o raio da esfera e a medida AO:

$$h = 5 - 4 = 1 \text{ cm}$$

Portanto, a medida h é de 1 cm e a alternativa correta é a letra C.

Fonte: adaptado de (<https://resolve.ftd.com.br/caderno-prova-amarela-2-dia-enem-2017/questao/180>).

Mostraremos no Quadro 7 uma possível classificação para os 5 níveis do pensamento geométrico baseado no modelo de Van Hiele.

Quadro 7 – Domínio dos níveis do pensamento geométrico do modelo de Van Hiele para a questão 180 (prova amarela) ENEM 2017

<p><b>Nível 1 - reconhecimento ou visualização</b></p>	<p>O aluno percebe que há uma esfera e pode fazer um corte e extrair uma calota esférica. Além disso, pode notar que o triângulo OAB é retângulo no ponto A, mas ainda sem considerar as propriedades que podem ser relacionadas.</p>
<p><b>Nível 2 - análise</b></p>	<p>A partir do desenho, ele pode inferir sobre como determinar a altura h, analisando as propriedades que podem ser percebidas a partir do triângulo retângulo OAB, assim como realizar a análise da calota esférica. Entretanto, ainda não faz a ligação entre as figuras geométricas presentes na questão.</p>



<b>Nível 3 - abstração ou dedução informal</b>	Neste nível, o aluno estabelece relação entre as propriedades das figuras geométrica apresentadas, fazendo conjecturas para uma possível resolução.
<b>Nível 4 – dedução</b>	A partir da conjectura elaborada no nível anterior, o aluno percebe que pode resolver a questão aplicando o Teorema de Pitágoras.
<b>Nível 5 - rigor</b>	Neste nível, o estudante conjectura o problema com outras geometrias não-euclidianas, por exemplo, ele pode tentar resolver a questão utilizando a Geometria Esférica, fazendo comparações, conjecturas e relacionando propriedades que a figura geométrica pode apresentar.

Fonte: elaborado pelos autores.

Dando prosseguimento, apresentamos, no Quadro 8, o modelo do pensamento de Van Hiele com suas respectivas habilidades, conforme trazido por Hoffer (1981) no Quadro 2.

Quadro 8 – Exemplificação dos níveis e habilidade do pensamento geométrico desenvolvidas por Hoffer (1981) para a questão 180 (prova amarela) ENEM 2017

<b>Níveis</b> <b>Habilidades</b>	<b>1 – Reconhecimento ou visualização</b>	<b>2 – Análise</b>	<b>3 – Abstração ou dedução informal</b>	<b>4 – Dedução</b>	<b>5 – Rigor</b>
<b>Visual</b>	Reconhece a existência de várias figuras, como triângulo e circunferências, mas sem classificá-las.	Reconhece que o triângulo OAB é retângulo em A e ele está relacionado à calota esférica.	Reconhece que, para determinar o valor de h, deve primeiro determinar o valor do segmento OA.	A partir do valor do segmento OA, ele percebe que deve realizar sua diferença do raio da esfera para determinar a altura.	Tenta relacionar a altura solicitada com o segmento OA.

<b>Verbal</b>	Percebe a calota que deve ser cortada em uma determinada altura. Esse corte forma uma região circular.	Reconhece que o segmento OB é a hipotenusa e os segmentos OA e AB são os catetos do triângulo retângulo.	Reconhece que, para determinar o segmento OA, deve utilizar o Teorema de Pitágoras.	Reconhece a aplicação do Teorema de Pitágoras para facilitar a resolução da questão.	Tenta conjecturar outra forma de resolução que não seja a partir do triângulo retângulo OAB.
<b>Desenho</b>	Realiza anotações no desenho para uma melhor compreensão do que é solicitado.	Realiza as devidas marcações no desenho para um melhor entendimento.	Realiza outros desenhos, por exemplo, do triângulo retângulo OAB para facilitar seu entendimento.	Reconhece, a partir da construção, os elementos necessários para a obtenção da resposta.	Com o auxílio da representação de figuras geométricas, o estudante elabora uma estratégia para a resolução.
<b>Lógica</b>	Reconhece um triângulo OAB e que, mesmo olhando a figura de outro ângulo, são mantidas as propriedades.	Entende a relação entre a calota esférica e o triângulo OAB.	Reconhece que uma forma de resolver a questão é utilizando o Teorema de Pitágoras.	A partir da determinação do segmento OA, é possível determinar a altura do corte da calota esférica.	Compreende as limitações e capacidades de hipóteses e postulados. Percebe que não usar o triângulo retângulo OAB não seria uma boa estratégia para resolução.
<b>Aplicações</b>	A calota esférica se assemelha muito ao corte em um laranja.	Infere sobre como ele pode determinar a altura $h$ , analisando as propriedades que podem ser percebidas a partir do triângulo retângulo OAB, assim como a análise da calota esférica.	Utiliza o Teorema de Pitágoras para determinar o valor do segmento OA e, assim, fazer a relação com a altura em que deve ser feito o corte no melão.	A partir da conjectura elaborada, o aluno percebe que pode resolver a questão aplicando o Teorema de Pitágoras.	Conjectura o problema com outras geometrias não-euclidianas, por exemplo, a Geometria Esférica, fazendo comparações, conjecturas e relacionando propriedades que a figura geométrica pode apresentar.

Fonte: interpretação dos autores.

Conforme preconiza o modelo de Van Hiele, o professor deve ter cuidado ao escolher as atividades, porque os métodos, os conteúdos, os materiais utilizados e a organização das instruções são relevantes para o aprendizado dos alunos.

Também, gostaríamos de destacar a importância de reconhecer o nível em que cada estudante se encontra, o que irá direcionar a demanda do professor em verificar diretamente a forma como cada estudante raciocina e suas estratégias usadas para solucionar as atividades. Sendo assim, uma maneira possível de determinar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico em um estudante é proporcionar a ele desenvolver atividades que solicitem o desempenho apresentado em cada nível. Cabe, destacar que o modelo de Van Hiele recomenda que o desenvolvimento do pensamento geométrico se dê de modo gradual, a partir das formas iniciais até chegar às formas dedutivas finais, nas quais inferências e intuições estão intimamente conectadas.

Interligada ao pensamento geométrico está a forma com que se dá o processo de ensino e de aprendizagem. Segundo Pais (1996; 2000), existem quatro elementos essenciais que influenciam no processo ensino e aprendizagem da Geometria: o objeto, o conceito, o desenho e a imagem mental.

Quando nos referimos ao objeto, estamos considerando modelos ou materiais didáticos que reproduzem algum conceito geométrico, ou seja, é uma forma primária de representação do conceito. Pais (2000) destaca ser importante que os alunos sejam capazes de manipular objetos para construir os conceitos geométricos, porém a manipulação não deve se limitar ao nível sensorial. O material didático deve ser utilizado como ferramenta para a aquisição do conhecimento geométrico, e não como um fim em si mesmo. Dessa forma, a manipulação deve estar associada a uma atividade intelectual, para que os alunos possam estabelecer uma relação entre a atividade prática e a teoria.

A segunda forma de representação é por meio do desenho. A imagem de conceitos mediante desenhos pode ser uma excelente estratégia nas aulas de Geometria. Pais (1996) defende que as ilustrações também têm um caráter estratégico para o ensino de conteúdos geométricos. Entretanto, o autor destaca que, na geometria plana, as ilustrações tendem a ser confundidas com conceitos, os quais são de natureza abstrata. O autor argumenta que a relação entre o particular e o geral, o concreto e o abstrato, em relação à representação de conceitos, é o principal problema da atividade didática, ou seja, a necessidade de transformar o próprio desenho.

A terceira representação de um conceito geométrico é por meio de uma imagem mental. Pais (1996) descreve que não é fácil definir uma imagem mental, mas argumenta que “uma pessoa tem uma dessas imagens quando ela é capaz de enunciar de forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos”. (PAIS, 1996, p.70).

As imagens mentais são de natureza abstrata e subjetiva. Por serem abstratas, podem se relacionar com conceitos, mas por seus aspectos subjetivos e particulares, estão longe de serem conceitos matemáticos. Para o autor, a formação de imagens mentais é consequência da experiência com objetos e desenhos. Cada pessoa tem uma série de imagens mentais associadas a um conceito particular. Nesse sentido, é importante que, durante a escolarização, o conjunto de imagens mentais seja enriquecido em aspectos quantitativos e qualitativos.

Um conceito geométrico pode ser caracterizado por um número infinito de ilustrações, mas na realidade existem alguns desenhos específicos que predominam, sendo encontrados em livros e cadernos, ou desenhados por professores em seu quadro na sala de aula. Para Pais (2000), existe uma tradição de desenhos dessas representações particulares.

A pouca experiência de manipulação de objetos e ilustrações estereotipadas contribui para a redução dos desenhos mentais dos alunos sobre objetos geométricos. Geralmente, os losangos aparecem desenhados com linhas diagonais paralelas às bordas da página ou quadro, os retângulos são desenhados com seus lados paralelos às bordas, e o lado maior horizontal, enquanto os quadrados são geralmente desenhados com seus lados paralelos às bordas.

## **CAPÍTULO 2**

# **VISUALIZAÇÃO E TECNOLOGIAS DIGITAIS NO AUXÍLIO DO ENSINO DE GEOMETRIA**

A Geometria é um conjunto de conhecimentos essenciais utilizados para a compreensão do espaço e das imagens a partir das representações de objetos usados na vida cotidiana. Acreditamos que isso pode possibilitar aos discentes o desenvolvimento de habilidades baseadas na visualização e na experiência. Por esse viés, destacamos a compreensão de Ferreira (2010, p. 10), que relata ser

[...] necessário investigar diferentes formas de trabalhar a geometria para atingir um dos principais objetivos educacionais dessa disciplina: a capacidade de abstração espacial a partir de projeções nos espaços unidimensional, bidimensional e tridimensional. Tal competência se incrementa com atividades que possibilitam o desenvolvimento da habilidade de visualização para a formação do pensamento geométrico.

Uma das dificuldades ligadas ao ensino de Geometria é a visualização de objetos geométricos, sejam eles planos ou espaciais, sendo importantes no desenvolvimento de conceitos matemáticos. Para Garcia (2007, p. 1), a

[...] observação, descrição, representação e análise das formas geométricas favorecem a formação de imagens mentais e são estímulos tanto visuais quanto mentais que contribuem para o desenvolvimento da capacidade de visualização e representação, fundamentando o pensamento geométrico. E é essa capacidade de visualização e representação que faz-se necessário no momento da resolução de um problema.

Do ponto de vista do ensino de Matemática, o tipo de visualização mais comum encontrado em pesquisas acadêmicas é a visualização geometria. Essa visualização, como o próprio nome sugere, relaciona a Geometria e a imagem.

Quando pensamos em Geometria, a euclidiana possivelmente será a que, inicialmente, é evocada pelo estudante. Para Cifuentes (2003 p. 64), “os axiomas da geometria euclidiana são apresentados sugerindo construções, sendo fundamental a palavra traçar, sugerindo um recurso ao visual”. A Geometria de Euclides é de cunho construtivo e os diversos teoremas são essencialmente de existência.

Desde os inícios da geometria, como ciência experimental, até fins do século XIX, inclusive passando pelo desenvolvimento axiomático-material da geometria de Euclides, o aspecto visual, dado por meio de figuras e construções

geométricas, tem sido tão importante quanto a demonstração. (CIFUENTES, 2003, p.70).

Essa ideia é compartilhada por Kaleff (2003) ao relatar que devemos utilizar diferentes modelos que levem à construção da ideia geométrica para o estudante, fazendo com que ele perceba que certas propriedades do objeto ultrapassam suas propriedades materiais como tamanho, cor, textura e, desta forma, pertencem ao mundo ideal da Geometria.

Entendemos que a visualização geométrica pode auxiliar na compreensão, na interpretação e na formulação de conjecturas geométricas. Trata-se de um processo importante na construção de um entendimento da formalização de conceitos geométricos.

Em relação ao termo visualização, ele é utilizado por inúmeros pesquisadores com base nas semelhanças e diferenças nas diversas definições encontradas na literatura. A partir de um estudo das definições de visualização buscadas, percebemos ser uma competência que está associada à capacidade de criar imagens mentais, favorecer diversas transformações com um objeto, e reter as mudanças que são feitas nesse objeto. Entre as definições de visualização, destacamos a de Arcavi (2003, p. 217), o qual relata que

visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre desenhos, imagens, diagramas, em nossas mentes, sobre papel ou com ferramentas tecnológicas, com o propósito de representar e comunicar informações, de pensar e desenvolver ideias previamente desconhecidas e de divulgar entendimentos.

A visualização é essencial para a solução de problemas e raciocínio espacial, pois permite que os indivíduos usem meios concretos para lidar com imagens abstratas. Em Matemática, visualização envolve o processo de formação e manipulação de imagens, seja com papel e lápis, seja de modo tecnológico, ou mentalmente, a fim de investigar, descobrir e compreender.



A imaginação e a visualização estão interligadas, pois, segundo os estudos de Hilbert e Cohn-Vossen (1932, p. iii, trad. nossa), os quais definem no prefácio de seu livro *Geometry and the Imagination*,

[...] com a ajuda da imaginação visual, podemos iluminar a variedade de fatos e de problemas de Geometria e, além disso, é possível, em muitos casos, retratar o esboço geométrico dos métodos de investigação e demonstração, sem necessariamente entrar em pormenores relacionados com a estrita definição de conceitos e com cálculos reais.

Segundo Leivas (2009), em seus estudos, visualização é descrita como sendo “um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos” (p. 22). Além disso, o autor complementa o sentido do termo ao relatar que compreende

[...] visualização não como uma forma de representação em termos de uma figura ou representação de um objeto e sim como um processo capaz de auxiliar na construção do fazer matemático, bem como na comunicação dos conceitos nas diversas áreas desse conhecimento matemático. (LEIVAS, 2009, p. 136).

Do ponto de vista da Educação Matemática, consoante Dreyfus (1990, p. 119), a visualização “[...] inclui duas direções: a interpretação e a compreensão de modelos visuais e a capacidade de traduzir em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica”.

Dessa forma, entendemos que a visualização é geralmente tomada para se referir à capacidade de o indivíduo representar, transformar, gerar, comunicar e documentar as informações visuais apresentadas a ele, refletindo sobre elas. Como tal, ela é um componente crucial do aprendizado de conceitos geométricos. Além disso, uma imagem visual, em virtude de sua concretude, para Fischbein (1987, p. 101, trad. nossa), é “um fator essencial para criar o sentimento de auto-evidência e imediatismo.”

A visualização também é um sentimento de realidade, de verdade, porque estamos observando, experimentando algo. Nesse contexto, Cifuentes (2005)

ênfatiza essa propriedade como um mecanismo de expressão da linguagem das imagens, sendo um dos grandes desafios da Matemática do século XXI fazer da visualização uma prova lógica de argumentos:

A visualização será o principal mecanismo para “ver” a verdade de um resultado matemático sem recurso à demonstração lógica. As demonstrações visuais farão uso possivelmente de uma linguagem visual apropriada, envolvendo também meios computacionais, os quais podem pôr em evidência a expressividade artística da matemática. Todo conceito de visualização remete a uma certa “realidade”, pois “a realidade é a experiência visual básica”. (CI-FUENTES, 2005, p. 71).

Gostaríamos de destacar que, no nosso entendimento, a visualização em Geometria está intrinsecamente relacionada com o desenvolvimento do pensamento geométrico. Esse pode ser associado ao modelo de Van Hiele, que é dividido em 5 níveis e, já no seu primeiro nível, o estudante deve desenvolver o reconhecimento ou visualização de figuras geométricas.

Também é importante observar como a Geometria é vista nos documentos oficiais educacionais. Assim, será apresentado um recorte da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que trata dessa área, aqui denominada unidade temática.

A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. (BRASIL, 2017, p. 271).

Pensamos ser importante o entendimento de como os discentes interpretam representações geométricas, não apenas em sala de aula, mas em seu cotidiano, como indicado por Lorenzato (1995, p. 5), ao afirmar que

[...] sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem habilidade, dificilmente conseguirão resolver as situações da vida que forem geometrizadas; também não poderão utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer a Geo-

metria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzidas e a visão da Matemática torna-se incompleta.

Assim, podemos compreender o porquê de a Geometria ser tão essencial para os discentes. Por esse viés, professores devem constantemente repensar seu fazer pedagógico. A BNCC ancora esse pensamento ao estabelecer que, durante os anos finais do Ensino Fundamental,

[...] o ensino de Geometria precisa ser visto como consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas. Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. (BRASIL, 2017, p. 272).

Esse recorte da BNCC só reforça a importância dessa produção, pois os conceitos desenvolvidos nela contribuem para as inúmeras relações entre a Geometria e seus demais campos matemáticos, como Aritmética, Álgebra, Estatística e Probabilidade, que são apresentados na BNCC.

Além disso, a BNCC apoia o uso das Tecnologias Digitais. Nesse sentido, apresenta, em suas competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental, que o professor deve “utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (BRASIL, 2017, p. 267).

Acreditamos que a utilização de recursos tecnológicos digitais, especialmente na Educação Matemática, deva ser pensada como uma metodologia que possa melhorar os processos de ensino e de aprendizagem. De acordo com Bacich, Neto e Trevisani (2015, p. 41), “o uso de tecnologias digitais no contexto escolar propicia diferentes possibilidades para trabalhos educacionais mais significativos para os seus participantes”. A fim de que isso ocorra, os educadores devem estar constantemente pesquisando e atualizando suas metodologias de ensino.

Não podemos deixar de lado essa realidade, pois, segundo Almeida (2000, p. 41), o educador deve “[...] promover a aprendizagem do aluno para que ele possa construir o conhecimento dentro de um ambiente que o desafie e o motive para a exploração, a reflexão, a depuração de ideias e descobertas [...]”. O uso das tecnologias digitais vem ao encontro dessa realidade.

Entendemos que Tecnologias Digitais (TD), segundo Valente (2005, p. 23), são o resultado da concentração de “diferentes mídias em um só artefato”, como por exemplo, o vídeo, o computador, o celular, a realidade virtual, entre outros. Para Kenski (2012), as TD não mudam apenas as formas de produção, organização e difusão da informação, mas a maneira como percebemos e entendemos o mundo.

Uma possibilidade de fazer a introdução das TD no cotidiano de nosso alunado é o uso do *GeoGebra*. Trata-se de um *software* livre e de código aberto, voltado para a aprendizagem de Matemática, estabelecendo uma relação entre a Geometria (Geo) e a Álgebra (Gebra). Ele é considerado de Geometria Dinâmica (GD), pois possibilita a movimentação de entes geométricos (por exemplo, pontos, retas, segmento de reta, entre outros), mantendo as propriedades geométricas em sua construção. (PERLIN, 2010).

Segundo Bairral (2009, p. 26), a GD apresenta contribuições como “[...] a interação do sujeito com a TIC<sup>1</sup>; a descoberta mediante tentativa e erro; a observação, o levantamento e verificação de conjecturas, bem como as diferentes formas (não estáticas) de representação do objeto em estudo”. Também, podemos destacar outros pontos positivos como a facilidade na construção geométrica, dinamicidade na visualização e na verificação de propriedades.

Nesse sentido, Melo e Silva (2013, p. 14) afirmam que “o *GeoGebra* proporciona condições que permitem a elaboração de situações onde o próprio aluno

---

1 TIC – Tecnologias da Informação e Comunicação.

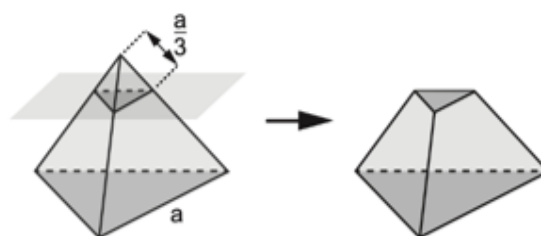
constrói conhecimentos”, corroborando a ideia de que esse *software* é uma ferramenta capaz de propiciar mais autonomia aos alunos.

Após o exposto, apresentamos a resolução de duas questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Ambas podem ser resolvidas utilizando a mobilização de conceitos de geometria plana e espacial e a visualização. A primeira é a questão 161 do caderno amarelo do ano de 2010, Figura 3, a qual é apresentada a seguir.

Figura 3 – Questão 161 – Caderno Amarelo – ENEM (2019)

#### Questão 161

As luminárias para um laboratório de matemática serão fabricadas em forma de sólidos geométricos. Uma delas terá a forma de um tetraedro truncado. Esse sólido é gerado a partir de secções paralelas a cada uma das faces de um tetraedro regular. Para essa luminária, as secções serão feitas de maneira que, em cada corte, um terço das arestas seccionadas serão removidas. Uma dessas secções está indicada na figura.



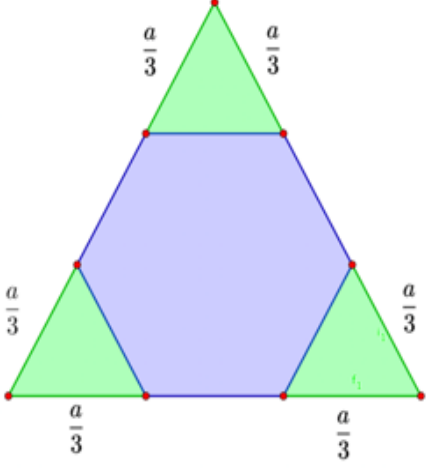
Essa luminária terá por faces

- A 4 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.
- B 2 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.
- C 4 quadriláteros e 4 triângulos isósceles.
- D 3 quadriláteros e 4 triângulos isósceles.
- E 3 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.

Fonte: ([https://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/enem/provas/2019/2019\\_PV\\_impresso\\_D2\\_CD5.pdf](https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2019/2019_PV_impresso_D2_CD5.pdf)).

No Quadro 9, mostramos uma possível resolução para essa questão. Salientamos que a forma de resolução vai depender de como o discente poderá analisar e resolver. A questão mobiliza diversos conhecimentos de geometria plana e espacial, como por exemplo, os conceitos de poliedros, seções e polígonos, entre outros.

Quadro 9 – Resolução da questão 161 (caderno amarelo) do ENEM de 2019



Dado um tetraedro regular, decide-se fazer seções que formem novos tetraedros nas pontas do poliedro original. Assim, a visão frontal das faces pode ser dada pela imagem ao lado.

Logo, cada face será um hexágono regular, de lado  $\frac{a}{3}$ . Já nas pontas retiradas, como ilustra a imagem, serão obtidos triângulos equiláteros, também de lado  $\frac{a}{3}$ .

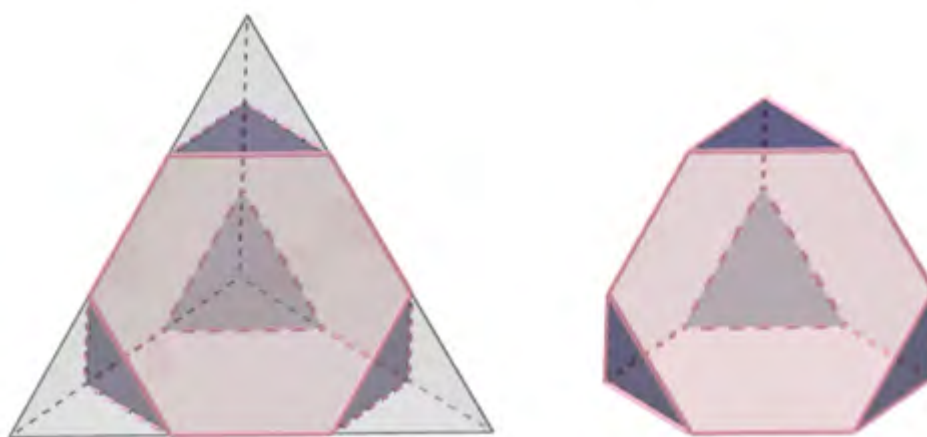
Além disso, serão formados 4 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.

Portanto, a alternativa correta é a letra A.

Fonte: adaptado de (<https://resolve.ftd.com.br/caderno-prova-amarela-2-dia-enem-2019/questao/161>).

Outra maneira de resolução, também por meio da observação e visualização, é utilizando o *GeoGebra*, conforme apresentado na Figura 4. Após a construção, podemos utilizar o recurso “mover na janela 3D” e ver o objeto desenhado de várias posições, pois se trata de um software de GD.

Figura 4 – Resolução da Questão 161 (caderno amarelo) ENEM (2019) com o uso do *GeoGebra*



Fonte: elaborada pelos autores.

O estudante pode fazer conjecturas mentais e verificar, a partir da construção no *GeoGebra*, se suas suposições estavam ou não corretas. Partindo da

leitura do problema, ele pode construir mentalmente o tetraedro regular, salientando que, para que possa fazer isso, já deve ter um certo domínio da abstração. O referido sólido é uma figura geométrica espacial formada por quatro triângulos equiláteros (triângulos que possuem lados com medidas iguais), além de possuir 4 vértices, 4 faces e 6 arestas. Então, continuando a construção, retiramos um tetraedro regular de aresta  $\frac{a}{3}$  de cada um de seus 4 vértices. Dessa forma, como temos 4 faces, o resultado desse truncamento é 4 hexágonos regulares e, dos 4 vértices do tetraedro original, restam 4 triângulos equiláteros.

A segunda questão é a 178 do caderno amarelo do ano de 2020, Figura 5, que pode ser resolvida utilizando a mobilização de conceitos geométricos e de visualização.

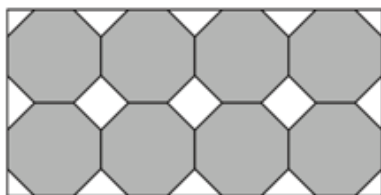
Figura 5 – Questão 178 – Caderno Amarelo – ENEM (2020)

**Questão 178**

Azulejo designa peça de cerâmica vitrificada e/ou esmaltada usada, sobretudo, no revestimento de paredes. A origem das técnicas de fabricação de azulejos é oriental, mas sua expansão pela Europa traz consigo uma diversificação de estilos, padrões e usos, que podem ser decorativos, utilitários e arquitetônicos.

Disponível em: [www.itaucultural.org.br](http://www.itaucultural.org.br). Acesso em: 31 jul. 2012.

Azulejos no formato de octógonos regulares serão utilizados para cobrir um painel retangular conforme ilustrado na figura.



Entre os octógonos e na borda lateral dessa área, será necessária a colocação de 15 azulejos de outros formatos para preencher os 15 espaços em branco do painel. Uma loja oferece azulejos nos seguintes formatos:

- 1 – Triângulo retângulo isósceles;
- 2 – Triângulo equilátero;
- 3 – Quadrado.

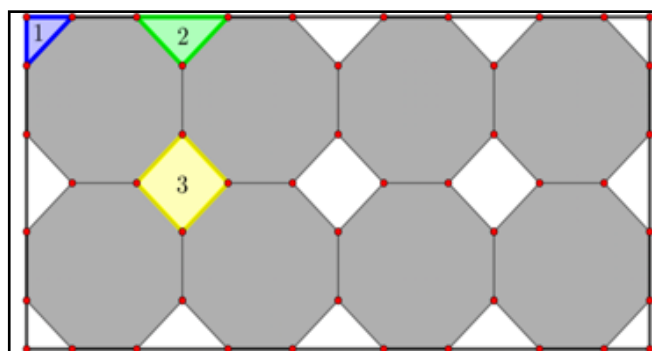
Os azulejos necessários para o devido preenchimento das áreas em branco desse painel são os de formato

- A 1.
- B 3.
- C 1 e 2.
- D 1 e 3.
- E 2 e 3.

Fonte: ([https://download.inep.gov.br/enem/provas\\_e\\_gabaritos/2020\\_PV\\_impreso\\_D2\\_CD5.pdf](https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2020_PV_impreso_D2_CD5.pdf))

No Quadro 10, apresentamos uma possível resolução para a questão. Gostaríamos de destacar que o modo de resolução vai depender muito de como o estudante irá analisar e resolver, por isso usamos o termo “possível resolução”. Essa questão mobiliza diversos conhecimentos de geometria plana, como por exemplo, o conceito de triângulo equilátero, triângulo retângulo, quadrado, soma dos ângulos internos de um polígono regular, entre outros.

Quadro 10 – Resolução da questão 178 (caderno amarelo) do ENEM de 2020



Para resolver essa questão, é necessário ter conhecimento de formas geométricas e do cálculo de ângulos internos de polígonos regulares.

Como estamos trabalhando com um octógono regular, temos que todos os lados são iguais.

Além disso, a soma dos ângulos internos é dada por  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ , logo temos  $1080^\circ$ . Se dividirmos a soma total dos ângulos internos por 8 (número de lados), obtemos  $135^\circ$ , ou seja, cada ângulo interno do octógono possui essa medida.

A figura (1), em azul, é um triângulo retângulo isóscele (consequência de o octógono ser regular e o painel ser retangular) e a figura (2), destacada em verde, é a junção de duas figuras do tipo (1), não sendo necessária uma terceira figura para montar o mosaico.

Desse modo, é possível considerar que a figura (3), destacada em amarelo, seja um quadrado (4 lados iguais e 4 ângulos de  $90^\circ$ ).

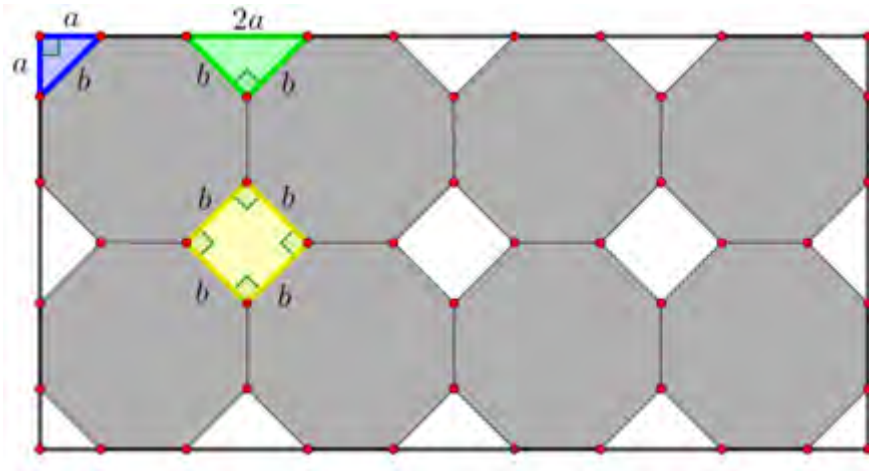
Portanto, a alternativa correta é a letra D.

Fonte: adaptado de (<https://resolve.ftd.com.br/caderno-prova-amarela-2-dia-enem-2020/questao/178>).

Outra forma de resolução é por meio do auxílio do *GeoGebra*, conforme apresentado na Figura 6. Após a construção, podemos utilizar o recurso “ângulo e comprimento de segmento” e verificar que estamos trabalhando com triângulos retângulos isósceles e quadrados.



Figura 6 – Resolução da Questão 178 (caderno amarelo) ENEM (2020) com o uso do *GeoGebra*



Fonte: elaborada pelos autores.

Após a leitura da questão, o estudante realiza a construção mental da imagem apresentada na Figura 5. A partir da construção sem utilizar medidas, ele pode conjecturar que estamos lidando com dois tipos de figuras geométricas, a saber: quadrados e triângulos retângulos isósceles, ambas as figuras tendo semelhanças. Para poder comprovar tal fato, utilizamos os comandos específicos de medidas no *GeoGebra* e confirmamos que estamos trabalhando mesmo com quadrados e triângulos retângulo isósceles.

Como podemos observar nessas duas questões, foram mobilizados conhecimentos sobre geometria plana e/ou espacial, não necessitando a realização de muitos cálculos elaborados para obter a resolução. Ademais, é uma ótima oportunidade de inserir ao nosso alunado o uso das TD, neste caso o *GeoGebra*.

---

## **CAPÍTULO 3**

---

# **RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA**

A Matemática está intimamente associada com a resolução de problemas<sup>1</sup>. Para Berlinghoff e Gouvêa (2008), foi no decorrer da história que os povos desenvolveram a Matemática devido tanto à necessidade de monitorar a produção; arrecadar impostos; medir e dividir a terra; gerenciar número de trabalhadores quanto de mão de obra. Tais demandas estão envolvidas em uma tarefa de resolver problemas na distribuição de herança, entre outras.

Mesmo com essa relação histórica, em que a Matemática evoluiu a partir da resolução de problemas, atualmente, no ambiente escolar, ainda temos professores que relacionam essa resolução com técnicas de repetição para fixação da aprendizagem, o que depende exclusivamente da transmissão do conteúdo pelo professor.

Ao que parece, frequentemente, os alunos não aprendem como resolver problemas; meramente memorizam soluções para situações que são apresentadas pelos professores como exercícios de aplicação. Durante a prática tradicional de resolução de problemas esta situação fica bem evidenciada, pois é bastante comum os alunos conseguirem resolver problemas similares aos anteriores, mas fracassarem ou desistirem frente a novas situações. (CLEMENT; TERRAZZAN, 2012, p. 100).

Onuchic (1999) relata que, no início do século XX, no ensino de Matemática, era comum a repetição e a memorização de conteúdos a partir da resolução de um número elevado de listas de exercícios, as quais eram resolvidas pelos estudantes na escola e em forma de tarefa para casa. Desse modo, tinha-se o entendimento de que, se o estudante repetisse sem dificuldades, ele havia aprendido o que lhe fora proposto. Nesse modelo, os discentes não eram ativos na sua aprendizagem, pois o professor, sendo o detentor do saber, impunha aos estudantes obediência e repetição de suas ordens.

---

<sup>1</sup> Destacamos que a expressão “resolução de problemas”, escrita em letras minúsculas, é referente à ação de resolver problemas e “Resolução de Problemas”, com a primeira letra de cada palavra grafada em maiúscula, refere-se à abordagem metodológica.

Essa estratégia de ensino foi sentenciada, dando lugar a novas conjecturas que sugeriam que o aluno deveria entender o que estava fazendo e não agir como um ser mecânico porque o professor não estava preparado para ensinar de acordo com essas novas tendências. O conhecimento ainda era baseado no aprendizado mecanizado de estratégias que seriam aplicadas à resolução de problemas padrão. (ONUCHIC, 1999).

Acreditamos ser importante, antes de descrevermos a Resolução de Problemas, entender como alguns autores definem o termo “problema”, relacionado ao campo da Educação Matemática. Para Polya (2006), encontrar um problema significa buscar conscientemente alguma ação apropriada para atingir um objetivo bem definido, mas inatingível de imediato. Dante (2003) relata que um problema é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos específicos para solucionar. Já para Onuchic e Allevato (2004), problema é algo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em realizar. Segundo Walle (2009), problema é qualquer tarefa ou atividade para a qual os discentes não possuem regras definidas ou memorizadas nem a compreensão de que exista um método específico para chegar à resolução correta. Como podemos perceber, não existe uma única definição, mas todas envolvem o desconhecimento da resposta e a vontade de obtê-la.

Conforme descrito anteriormente, o ensino da Matemática evoluiu a partir das práticas de memorização típicas do início do século XX e, na década de 1980, a Resolução de Problemas como ferramenta metodológica inovadora trouxe um lado material para esse assunto tão abstrato, desafiando os estudantes a aprenderem mais sobre conteúdos matemáticos. O ponto de ruptura, o qual mostra que a resolução de problemas é entendida como um meio de aprender Matemática, é a obra “*How to Solve It*” (1945) e, posteriormente (1978), de Polya, cuja primeira

edição foi traduzida para o português com o título “A arte de resolver problemas”. Polya é visto como o precursor da Resolução de Problemas, pois “[...] preocupou-se em descobrir como resolver problemas e como ensinar estratégias que levassem a caminhos para resolver problemas” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 77-78). Assim, a Resolução de Problemas é uma maneira muito popular de aprender conceitos matemáticos nos dias de hoje.

De acordo com Polya (1962), os estudantes, ao serem orientados a resolver problemas, compartilham e discutem suas ideias, promovem o conhecimento matemático, comparam diferentes estratégias e conectam conceitos. Isso ocorre especialmente entre alunos de diferentes idades e níveis de conhecimento.

As atividades de resolução de problemas não devem se limitar a selecionar e aplicar regras e procedimentos previamente aprendidos e treinados. Polya (2006) descreveu quatro etapas na Resolução de Problemas:

- Compreender o problema (CP): quais são as variáveis e as incógnitas? É possível desenhar uma figura, fazer um diagrama ou esquema? É possível conjecturar a resposta?

- Desenvolver um plano para a solução (DP): qual é o seu plano para solucionar o problema? Que estratégias podemos usar para resolver o problema? Já viu algum problema semelhante que poderia ajudar nesta nova situação? As variáveis estão correlacionadas?

- Executar o plano (EP): a partir da elaboração de um plano, é possível verificar cada passo da execução? Foi possível efetuar todos os cálculos apresentados no plano? Foi possível realizar todas as estratégias pensadas, obtendo diversas formas de resolver o mesmo problema?

- Retrospectiva do problema (RP): a solução obtida está correta? Existe outra forma de resolver o problema? A solução encontrada pode ser utilizada para resolver situações semelhantes?

A Resolução de Problemas é um processo metodológico desafiador e não trivial para o qual não existe um procedimento completo de construção de uma solução. Percebemos que a Resolução de Problemas pode ser um processo cíclico, pois, ao chegar à última fase, e verificar que a solução encontrada não satisfaz o problema, o estudante deve iniciar o processo de resolução novamente.

O ponto principal dessa metodologia é compreender o problema e estimular a interpretar o enunciado e resolver a situação proposta. Após essa parte inicial, é necessário desenvolver uma estratégia de resolução, apresentando variáveis, conjecturas e modelos. A implementação do plano só será eficiente se todo o planejamento, desde o entendimento até o seguimento das estratégias, for totalmente implementado. Por último, devemos realizar uma retrospectiva do problema proposto para verificar a veracidade dos resultados encontrados.

Polya foi o precursor dessa metodologia e as autoras Onuchic e Allevato (2011), buscando atender à demanda de dispor aos estudantes conhecimentos prévios fundamentais para o desenvolvimento mais proveitoso da metodologia, mudaram alguns passos do roteiro inicial, incluindo mais 5 elementos.

Assim, a metodologia Resolução de Problemas, segundo Onuchic e Allevato (2011), passa a ter 9 etapas, as quais passamos a descrever:

- (1) Preparação do problema: escolha um problema gerador com a finalidade de desenvolver um novo conceito, princípio ou procedimentos e, além disso, cujo conteúdo envolvido não tenha sido desenvolvido em sala de aula.
- (2) Leitura individual: o professor entrega uma cópia do problema e solicita aos estudantes que façam uma leitura individual.
- (3) Leitura em conjunto: após a etapa anterior, os estudantes se organizam em grupos e realizam uma nova leitura, agora em conjunto.

– (4) Resolução do problema: a partir da compreensão do problema, os estudantes desenvolverão um trabalho cooperativo e colaborativo em seus grupos, buscando resolver o problema. A partir dessa resolução, eles irão construir o conhecimento do novo conteúdo.

– (5) Observar e incentivar: nesta fase, o professor não atua mais como transmissor do conhecimento, mas sim como mediador, passando a observar, analisar e incentivar o trabalho colaborativo dos seus estudantes em grupo na resolução do problema.

– (6) Registro das resoluções no quadro: determinada a solução pelo grupo, um representante irá ao quadro para fazer o registro, não importando se certo, errado ou representado por diferentes processos, para posterior análise e discussão pela turma.

– (7) Plenária: nesta etapa todos os alunos irão discutir, defender e esclarecer as diferentes soluções apresentadas no quadro. O professor é apenas um mediador e incentivador da discussão, fazendo deste momento uma ótima oportunidade para o desenvolvimento da aprendizagem.

– (8) Busca do consenso: após sanar dúvidas e analisar as soluções apresentadas para o problema, o professor tenta, com toda a turma, chegar a um acordo sobre a solução correta.

– (9) Formalização do conteúdo: o professor faz o registro formal (com linguagem matemática) no quadro, apresentando os conceitos, princípios, técnicas operatórias propriedades e demais procedimentos desenvolvidos na resolução do problema.

A partir da inclusão de novos passos para a Resolução de Problemas pelas autoras, percebemos que a grande mudança foi em relação à discussão em grupo

sobre os procedimentos para a resolução do problema. Além disso, essa troca de ideias estimula a discussão e formalização de conceitos, passando o estudante a ser protagonista do seu conhecimento e o professor, o mediador do processo.

Esse método proporciona um esforço coletivo para encontrar soluções para os problemas, favorecendo diferentes tentativas de resolução no interior de um mesmo grupo, pois cada um resolve os problemas de forma diferente. Consideramos importante essa estratégia, pois podem ocorrer equívocos durante a resolução e, dessa forma, serão considerados erros coletivos, eliminando a percepção de falhas individuais que pode ocorrer se a resolução for limitada a cada aluno.

De acordo com Dante (2003), o processo de ensinar a resolver problemas não é uma tarefa fácil; pelo contrário, é uma das mais difíceis, porque o professor deve ir além de ensinar conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos. Nesse caso, o docente deve planejar uma sequência de questionamentos que levem os estudantes à compreensão do problema. Dessa forma, eles são estimulados a fazer questionamentos ao professor e entre eles mesmos.

Em resumo, os procedimentos mecânicos de memorização são substituídos por outro método, neste caso a Resolução de Problemas, para que o estudante seja estimulado e motivado para desenvolver seus conhecimentos e saberes. Assim, o professor passa a ser o mediador do conhecimento, auxiliando os estudantes nessa nova caminhada.

Diante de todo o exposto, apresentamos, na sequência, duas questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), seguindo as etapas do método de Polya para a resolução. A primeira é a questão 137 do caderno amarelo do ano de 2017, Figura 7, que utiliza a mobilização de conceitos de geometria plana.



Figura 7 – Questão 137 – Caderno Amarelo – ENEM (2017)

**QUESTÃO 137**

Um garçom precisa escolher uma bandeja de base retangular para servir quatro taças de espumante que precisam ser dispostas em uma única fileira, paralela ao lado maior da bandeja, e com suas bases totalmente apoiadas na bandeja. A base e a borda superior das taças são círculos de raio 4 cm e 5 cm, respectivamente.



A bandeja a ser escolhida deverá ter uma área mínima, em centímetro quadrado, igual a

- A 192.
- B 300.
- C 304.
- D 320.
- E 400.

Fonte: ([https://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/enem/provas/2017/2017\\_PV\\_impresso\\_D2\\_CD5.pdf](https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/2017_PV_impresso_D2_CD5.pdf)).

Seguindo a metodologia da Resolução de Problemas, teremos:

**CP:** o problema consiste em determinar as medidas mínimas de uma bandeja de base retangular que deverá comportar 4 taças (base e borda superior são círculos), dispostas em uma única fileira.

**DP:** o plano será estabelecido seguindo as hipóteses:

Hipótese 1: A base da bandeja é retangular.

Devemos calcular o comprimento e a largura mínimos para que essa bandeja comporte 4 taças.

Hipótese 2: A bandeja deve comportar 4 taças em uma única fileira.

As taças possuem uma base circular de raio ( $r$ ) 4 cm e uma borda superior circular de raio ( $R$ ) 5 cm.

Hipótese 3: A bandeja deve possuir a menor área mínima para comportar as taças.

**EP:** se seguirmos o plano estabelecido e atentarmos para o enunciado do problema, temos o seguinte esquema (Figura 8):

Figura 8 – Esquema da disposição das taças em uma única fileira



Fonte: elaborada pelos autores.

A partir da análise da Figura 8, podemos perceber que o comprimento da bandeja, em cm, será dado por:

$$6R + 2r = 6 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 38$$

Já a largura, em cm, é dada pela medida do diâmetro da base da taça, ou seja:

$$2r = 2 \cdot 4 = 8$$

Portanto, a bandeja retangular com medidas mínimas deve ter como comprimento 38 cm e largura 8 cm.

Temos, ainda, de calcular o valor dessa área retangular, em  $\text{cm}^2$ , o qual será dado por:

$$38 \cdot 8 = 304$$

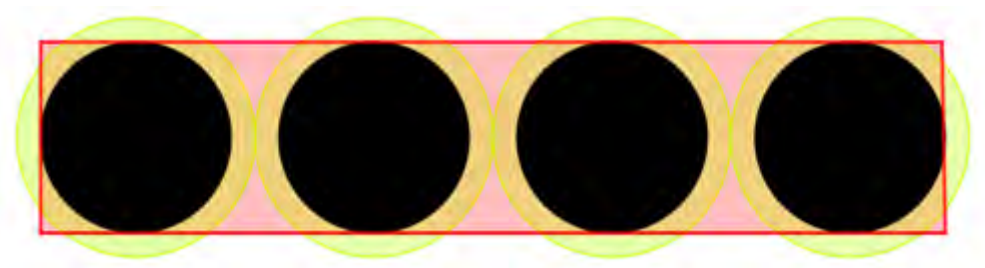
Portanto, teremos uma bandeja retangular de área  $304 \text{ cm}^2$ .

**RP:** percebemos que o resultado encontrado está compatível com o enunciado do problema. Logo, para comportar 4 taças em uma única fileira,

devemos ter uma bandeja retangular de área mínima de  $304 \text{ cm}^2$ . Portanto, a alternativa correta é a letra C.

Outra forma de comprovar se o cálculo está correto é fazermos uma simulação utilizando o *software GeoGebra* (Figura 9).

Figura 9 – Vista superior simulando o resultado encontrado algebricamente



Fonte: elaborada pelos autores.

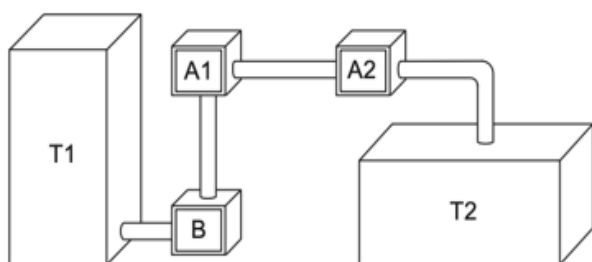
Caso, após a resolução, for verificado algum erro, ou mesmo tendo sido obtido o valor correto, devemos rever todo o processo desde seu início.

A segunda resolução será a da questão 145 do caderno amarelo do ano de 2020, Figura 10, que utiliza a mobilização de conceitos de função afim e geometria espacial.

Figura 10 – Questão 145 – Caderno Amarelo – ENEM (2020)

**Questão 145**

Um processo de aeração, que consiste na introdução de ar num líquido, acontece do seguinte modo: uma bomba B retira o líquido de um tanque T1 e o faz passar pelo aerador A1, que aumenta o volume do líquido em 15%, e em seguida pelo aerador A2, ganhando novo aumento de volume de 10%. Ao final, ele fica armazenado num tanque T2, de acordo com a figura.



Os tanques T1 e T2 são prismas retos de bases retangulares, sendo que a base de T1 tem comprimento  $c$  e largura  $L$ , e a base de T2 tem comprimento  $\frac{c}{2}$  e largura  $2L$ .

Para finalizar o processo de aeração sem derramamento do líquido em T2, o responsável deve saber a relação entre a altura da coluna de líquido que já saiu de T1, denotada por  $x$ , e a altura da coluna de líquido que chegou a T2, denotada por  $y$ .

Disponível em: [www.dec.ufcg.edu.br](http://www.dec.ufcg.edu.br). Acesso em: 21 abr. 2015.

A equação que relaciona as medidas das alturas  $y$  e  $x$  é dada por

- A  $y = 1,265x$
- B  $y = 1,250x$
- C  $y = 1,150x$
- D  $y = 1,125x$
- E  $y = x$

Fonte: ([https://download.inep.gov.br/enem/provas\\_e\\_gabaritos/2020\\_PV\\_impreso\\_D2\\_CD5.pdf](https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2020_PV_impreso_D2_CD5.pdf)).

Seguindo as 4 fases de Polya, obtemos:

**CP:** o problema consiste em determinar a relação entre a altura da coluna de líquido que saiu do tanque T1, denotada por  $x$ , e a altura da coluna de líquido que chegou em T2, denotada por  $y$ , depois de ter passado por dois aeradores.

**DP:** o plano proposto segue as hipóteses apresentadas a seguir:

Hipótese 1: O aerador A1 aumenta o volume do líquido em 15%.

Hipótese 2: O aerador A2 aumenta o volume do líquido em 10%.

Hipótese 3: Os tanques T1 e T2 são prismas retos de bases retangulares.

O tanque T1 tem comprimento  $C$  e largura  $L$ . O tanque T2 tem comprimento  $\frac{c}{2}$  e largura  $2L$ .

Hipótese 4: O líquido sai do tanque T1 até o T2 passando pelos aeradores A1 e A2.

**EP:** por meio do plano estabelecido e pelo enunciado do problema, podemos gerar os seguintes resultados:

Pelo enunciado, os tanques T1 e T2 são prismas retos de bases retangulares em que T1 tem comprimento  $C$  e largura  $L$ . Logo, a área da base é dada por  $C \cdot L$ . Já o tanque T2 tem comprimento  $\frac{c}{2}$  e largura  $2L$ , dessa forma sua área da base é dada por  $\frac{c}{2} \cdot 2L = C \cdot L$ .

Como  $V1$  é o volume do tanque T1 e  $V2$  é o volume do tanque T2, o líquido que sai do tanque T1 sofre um aumento de 15% quando passa pelo primeiro aerador (A1) e depois sofre mais um aumento de 10% quando passa pelo segundo aerador (A2). Portanto, o volume é dado por:

$$V2 = V1 \cdot \underbrace{(1,15)}_{\text{aumento de 15\%}} \cdot \overbrace{(1,10)}^{\text{aumento de 10\%}} = V1 \cdot 1,265 \quad (1)$$

Além disso, o volume de um prisma reto de base retangular é dado pela multiplicação da área da base pela sua altura. Sendo  $x$  a altura do líquido no tanque T1 e  $y$  a altura do líquido no tanque T2, temos:

$$V1 = c \cdot L \cdot x \quad (2)$$

$$V2 = c \cdot L \cdot y. \quad (3)$$

Substituindo as equações (2) e (3) na equação (1) obtemos:

$$c \cdot L \cdot y = c \cdot L \cdot x \cdot 1,265$$

Efetuando as devidas operações temos:

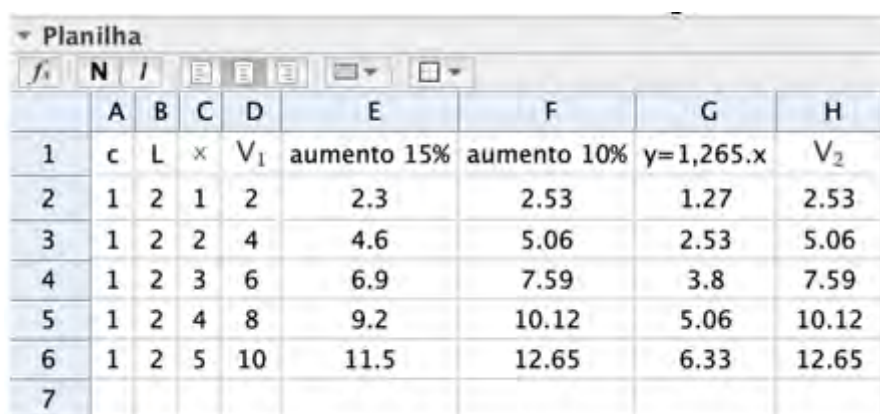
$$y = 1,265 \cdot x$$

Portanto, a equação que relaciona as alturas dos líquidos dos tanques T1 e T2 é dada por  $y = 1,265 \cdot x$ .

**RP:** percebemos que o resultado encontrado está compatível com o enunciado do problema. Logo, a equação que relaciona a altura do líquido do tanque T1 e a altura do líquido após passar por dois aeradores e chegar em um tanque T2, é  $y = 1,265 \cdot x$ . Então, a alternativa correta é a letra A.

Outra forma de comprovar se o cálculo está correto é fazermos uma simulação utilizando a planilha do *software GeoGebra*, Figura 11.

Figura 11 – Simulação da relação das alturas dos líquidos nos tanques T1 e T2



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	c	L	x	V <sub>1</sub>	aumento 15%	aumento 10%	$y=1,265 \cdot x$	V <sub>2</sub>
2	1	2	1	2	2.3	2.53	1.27	2.53
3	1	2	2	4	4.6	5.06	2.53	5.06
4	1	2	3	6	6.9	7.59	3.8	7.59
5	1	2	4	8	9.2	10.12	5.06	10.12
6	1	2	5	10	11.5	12.65	6.33	12.65
7								

Fonte: elaborada pelos autores.

Como podemos observar, nas colunas A e B, atribuímos valores para o comprimento (c) e a largura (L) da base dos tanques T1 e T2. Na coluna F, é apresentado o volume final do líquido no tanque T2 após passar pelos dois aeradores. A coluna H traz o volume V2 no tanque T2. Como os valores finais do volume V2 são os mesmos apresentados na coluna F, depois dos dois aumentos sucessivos, podemos concluir que a equação que relaciona a altura (x) do líquido no tanque T1 e a altura (y) do líquido no tanque T2 está correta.

Se, ao final de todo esse processo, verificarmos que o valor encontrado não foi o correto, devemos rever todas as fases da Resolução de Problemas a fim de identificar onde ocorreu a falha.

## **CAPÍTULO 4**

# **DESENVOLVENDO ATIVIDADES COM UM GRUPO DE PROFESSORES DA EDUCAÇÃO BÁSICA**

O presente capítulo é oriundo do desenvolvimento de um curso de extensão, oferecido gratuitamente a professores de Matemática, o qual dá nome, também, a este *e-book*: “A visualização para desenvolver o Pensamento Geométrico na Resolução de Problemas”. Cabe destacar que a parceria do Grupo de Estudos e Pesquisa em Tecnologias Digitais na Educação (GEPTec) do Instituto Federal Farroupilha (IFFar) com o Grupo de Estudos e Pesquisa em Geometria (GEPGEO), vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (UFN), foi primordial para o sucesso alcançado.

Com o intuito de atingir um maior número de participantes, optamos por realizar o curso de modo on-line, por meio da plataforma *moodle* do IFFar, de forma assíncrona, ou seja, os participantes desenvolviam as atividades propostas em cada módulo no decorrer de cada semana, conforme o tempo de que dispunham. O curso ocorreu entre os meses de setembro e outubro de 2022. Tivemos como público-alvo inscrito um total de 25 docentes que atuam na Educação Básica no estado do Rio Grande do Sul. Entretanto, dos inscritos, finalizaram o curso 15 professores, o que representa 60%.

A partir dos dados coletados durante a realização do curso, oriundos das tarefas realizadas pelos participantes e encaminhadas à organização, realizamos uma pesquisa qualitativa a fim de avaliar o estágio em que se encontram. Para garantir o anonimato, os finalistas serão identificados pelas letras A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N e O.

O curso foi dividido em três módulos, com duração de duas semanas cada um, sendo que, para cada um deles, há um objetivo específico, como segue:

(a) módulo 1 – “Pensamento geométrico” – teve o objetivo de promover a compreensão do que seja pensamento geométrico a partir do desenvolvimento de uma questão do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM);



(b) módulo 2 – “Visualização e Tecnologias Digitais” – teve o objetivo de explorar o ensino de Geometria, por meio da visualização e do uso de Tecnologias Digitais, em especial, com o *software GeoGebra*;

(c) módulo 3 – “Resolução de Problemas” – teve o objetivo de estudar a metodologia de Resolução de Problema aplicada no ensino de Geometria.

Cada um dos módulos foi dividido em três seções: duas de cunho obrigatório e uma de caráter optativo. A primeira seção obrigatória compreendeu um texto versando sobre a temática do módulo e a segunda foi destinada às atividades que deveriam ser realizadas e entregues na plataforma *moodle*. A última seção de cada módulo envolveu a disponibilização de materiais complementares por meio de três textos.

Destacamos que os dados obtidos nessa pesquisa tiveram autorização para seu uso, pois todos os sujeitos assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Esse documento manifesta total e irrestrita concordância do sujeito em participar da pesquisa, voluntariamente, após explicação completa e pormenorizada sobre sua natureza, objetivos, metodologia, coleta de dados, benefícios e riscos que possam acarretar.

A partir do que foi exposto, apresentamos, a seguir, cada um dos três módulos, analisando e discutindo os resultados das atividades apresentadas pelos participantes que finalizaram o curso de extensão.

a) Módulo 1: pensamento geométrico

Neste primeiro módulo, foram estudados os conceitos e a teoria que envolve o pensamento geométrico.

Na primeira semana de estudos, os cursistas tiveram de realizar a leitura do texto “Pensamento geométrico: da compreensão conceitual ao entendimento prático” (capítulo 1 deste *e-book*), bem como refletir sobre ele. Como atividade

desta etapa, os participantes foram convidados a refletir e responder três perguntas relacionadas à temática.

A primeira pergunta, de cunho pessoal, solicitava aos participantes que definissem, a partir da leitura do texto indicado, qual seria seu entendimento do conceito de pensamento geométrico. Como consta no texto, não existe uma única definição para pensamento geométrico, além das apresentadas por Fischbein (1993), Duval (1995) e Leivas (2009). Os cursistas apresentaram conceituações diferentes a partir do seu ponto de vista. O que nos chamou a atenção, na grande maioria das respostas, foi que, na essência das definições, apareceram os termos: visualização, investigação, reconhecimento, descrição, conceituação e conjecturas.

Entendemos que a Geometria está presente em nossas vidas, mesmo que muitas vezes não o seja diretamente. Por esse viés, o papel do professor é torná-la mais acessível e compreensível para os estudantes. Dessa forma, nem sempre é fácil mostrar aos alunos aplicações que despertem o interesse ou que possam motivá-los por meio de problemas e/ou atividades contextualizados.

Pelas respostas apresentadas, percebemos que houve o entendimento da conceituação de pensamento geométrico. Entretanto, destacamos que sentimos a falta de uma discussão entre os cursistas, pois a atividade foi no formato de questionário, e não sob a forma de fórum, visto que esse último poderia ter o cunho de discussão em grupo. Sendo assim, elaboramos uma quarta conceituação, a partir da compilação das escritas dos cursistas, conforme apresentado:

O pensamento geométrico faz parte de um conjunto de saberes que envolvem percepção, visualização, investigação, reconhecimento e descrição dos objetos geométricos e seus elementos no espaço; ver e interpretar medidas e formas e conseguir estabelecer relações, características conceituais e figurativas destes objetos. Além disso, devem estimular manipulações mentais que permitam a compreensão de definições e propriedades envolvidas.

A segunda pergunta foi em relação a ser importante o desenvolvimento do pensamento geométrico na Educação Básica. Todos os cursistas foram unânimes em responder que é importante desenvolver o pensamento geométrico dentro da sala de aula da Educação Básica. Chamou a atenção que 80% (12 cursistas) utilizaram, para expressar sua resposta, os seguintes termos: muito importante ou de extrema importância ou extremamente importante ou de suma importância.

Atualmente, um dos documentos balizadores da educação brasileira, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), na unidade temática Geometria, apresenta que ela deve envolver “o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento” (BRASIL, 2017, p. 271). Acreditamos ser necessário que o estudante se aproprie de conceitos de posição e deslocamentos no espaço, relações entre figuras planas e espaciais, simetrias, representações. Por esse viés, cabe destacar que o professor tem de desenvolver na Educação Básica toda a unidade temática relacionada à Geometria.

A última pergunta foi para verificar se é possível desenvolver pensamento geométrico na sala de aula da Educação Básica. Em caso afirmativo, como poderíamos realizar esse desenvolvimento? Ou, em caso negativo, o que estaria faltando para efetivá-lo?

Da mesma forma que na questão anterior, todos os alunos concordaram que é possível desenvolver pensamento geométrico na sala de aula. Entretanto, no que divergiram foi em relação à forma como poderia ser feito esse desenvolvimento. Para melhor compreensão dos relatos apresentados, separamos as respostas em 3 grupos, por similaridades.

O primeiro grupo, composto por 4 cursistas, relatou que o pensamento geométrico poderia ser motivado com o uso das Tecnologias Digitais. Acreditamos

ser possível de ocorrer por este meio, quando abordamos essa temática no capítulo 2 deste *e-book*.

Outro grupo, com 6 estudantes, apresentou que as atividades devem ser diferenciadas e contextualizadas com a realidade dos estudantes, instigando-os a pensar, investigar e elaborar conjecturas. Corroborando essa ideia, Pontes e Da Silva (2020, p. 10) relatam que “os problemas de Matemática desenvolvidos em sala de aula, muitas vezes, têm sido conduzidos de forma tradicional e sem correlação com o cotidiano, fato este que gera total desmotivação dos envolvidos no processo”. Destacamos ser interessante o professor planejar suas aulas para contemplar exemplos e/ou atividades que façam sentido para o estudante, uma vez que, dessa forma, ele irá conseguir fazer essa ligação com o seu cotidiano e, conseqüentemente, desenvolver o pensamento geométrico.

No terceiro e último grupo, 5 cursistas relataram em suas repostas que o pensamento geométrico deve já iniciar nos anos iniciais do Ensino Fundamental e finalizar no Ensino Médio, entretanto não comentaram de que forma isso poderia ser realizado. Essas colocações apresentadas podem ser ancoradas em Faiguelernt (1999, p. 21), ao comentar que, entre “[...] os matemáticos e os educadores matemáticos, existe um consenso de que o ensino da Geometria deveria começar desde cedo e continuar, de forma apropriada, através de todo o currículo de Matemática”.

Para finalizar o módulo, na segunda semana, os cursistas tiveram três atividades para desenvolverem. A primeira atividade foi a resolução da questão 148 (caderno amarelo) do ENEM de 2020 com o auxílio do *software GeoGebra* (Figura 12).

Figura 12 – Questão 148 – Caderno Amarelo – ENEM (2020)

**Questão 148**

A fabricação da Bandeira Nacional deve obedecer ao descrito na Lei n. 5.700, de 1º de setembro de 1971, que trata dos Símbolos Nacionais. No artigo que se refere às dimensões da Bandeira, observa-se:

“Para cálculos das dimensões, será tomada por base a largura, dividindo-a em 14 (quatorze) partes iguais, sendo que cada uma das partes será considerada uma medida ou módulo (M). Os demais requisitos dimensionais seguem o critério abaixo:

- I. Comprimento será de vinte módulos (20 M);
- II. A distância dos vértices do losango amarelo ao quadro externo será de um módulo e sete décimos (1,7 M);
- III. O raio do círculo azul no meio do losango amarelo será de três módulos e meio (3,5 M).”

BRASIL. Lei n. 5.700, de 1º de setembro de 1971. Disponível em: www.planalto.gov.br. Acesso em: 15 set. 2015.

A figura indica as cores da bandeira do Brasil e localiza o quadro externo a que se refere a Lei n. 5.700.

Um torcedor, preparando-se para a Copa do Mundo e dispondo de cortes de tecidos verde (180 cm x 150 cm) e amarelo (o quanto baste), deseja confeccionar a maior Bandeira Nacional possível a partir das medidas do tecido verde.

Qual a medida, em centímetro, do lado do menor quadrado de tecido azul que deverá ser comprado para confecção do círculo da bandeira desejada?

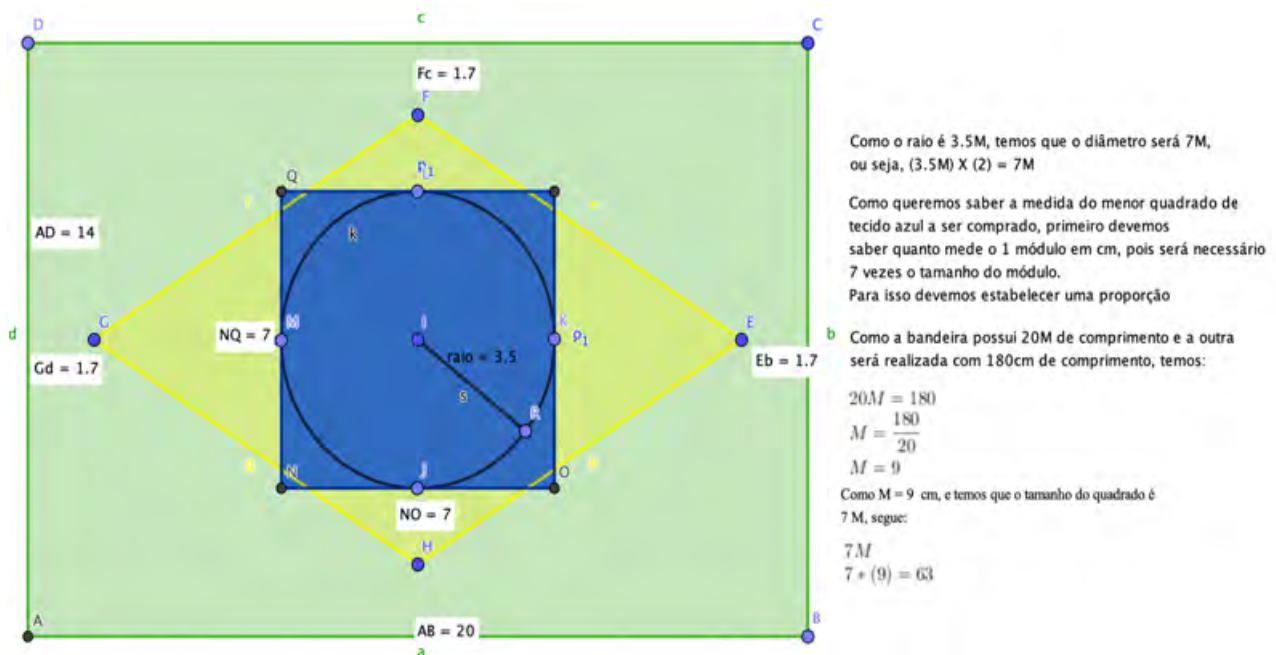
**A** 27  
**B** 32  
**C** 53  
**D** 63  
**E** 90

Fonte: ([https://download.inep.gov.br/enem/provas\\_e\\_gabaritos/2020\\_PV\\_impresso\\_D2\\_CD5.pdf](https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2020_PV_impresso_D2_CD5.pdf)).

O intuito desta resolução foi preparar os cursistas a refletirem sobre o uso de uma Tecnologia Digital e se apropriarem dos conceitos envolvidos para, posteriormente, classificarem nos níveis recomendados no modelo Van Hiele.

Nessa primeira parte da segunda semana, apenas 13 cursistas entregaram a construção no *GeoGebra*, destacando que a alternativa correta é a letra D. A Figura 13 representa a resolução apresentada pelo cursista G. Outros 2 cursistas entraram em contato com os coordenadores do curso para relatar que estavam com dificuldades na utilização do *software* e, por essa razão, entregaram a questão de forma manuscrita.

Figura 13 – Resolução apresentada pelo cursista G no *GeoGebra* para a Questão 148 – Caderno Amarelo – ENEM (2020)



Fonte: acervos dos autores.

Como a nossa intenção nessa atividade não estava no conhecimento da utilização do recurso tecnológico, e sim nos conceitos envolvidos na resolução da questão, percebemos que, para uma futura utilização desse tipo de recurso, será necessária uma preparação prévia dos cursistas.

Na segunda atividade, os cursistas tiveram de refletir e responder se a utilização do *GeoGebra* auxiliou no desenvolvimento do pensamento geométrico. Pelas semelhanças, podemos dividir em dois grupos as respostas apresentadas.

O primeiro grupo, com 11 cursistas, destacou que o uso do *GeoGebra* pode auxiliar no desenvolvimento do pensamento geométrico desde que os estudantes tenham conhecimento desse recurso tecnológico. O cursista D destacou: “[...] o software pode facilitar se o estudante souber utilizá-lo ou dificultar a resolução, se ele não tiver o conhecimento necessário”.

O outro grupo, com 4 estudantes, relatou que, para essa questão, não seria necessário o uso do *GeoGebra*, pois é possível desenvolver o pensamento

geométrico resolvendo-a de forma manuscrita. Não conseguiram resolver utilizando o recurso tecnológico 2 alunos.

Acreditamos que a utilização do *GeoGebra* possa contribuir tanto para o desenvolvimento do pensamento geométrico quanto para aqueles relacionados à proporcionalidade. Se realizarmos uma análise da questão, perceberemos que ela aborda muito mais relações de proporcionalidade do que de conhecimentos geométricos. Ao resolvê-la sem o *software*, além da determinação da constante de proporcionalidade, seria necessário apenas estabelecer a relação entre o lado de um quadrado e o raio de um círculo nele inscrito.

Todavia, ao resolvê-la com o auxílio do *GeoGebra* foi possível explorar as definições das formas geométricas presentes na formação da bandeira nacional, bem como outras propriedades geométricas necessárias para os passos da construção. Do ponto de vista da proporção, foi interessante a utilização do *software*, pois permitiu um processo de verificação da constante de proporcionalidade presente na questão, envolvendo todas as dimensões da bandeira. Além disso, permitiu estabelecer uma relação entre as dimensões e o lado maior do retângulo.

Na última atividade do módulo 1 do curso de extensão, os participantes foram desafiados a apresentar uma possível classificação em cada um dos 5 níveis do modelo de Van Hiele. Como as escritas produzidas foram semelhantes, apresentaremos, no Quadro 11, a resposta apresentada pelo cursista E. Gostaríamos de destacar que pode haver outras interpretações que também estarão corretas.

Quadro 11 – Domínio dos níveis do pensamento geométrico do modelo de Van Hiele para a questão 148 (caderno amarelo) ENEM (2020) apresentada pelo cursista E

<p><b>Nível 1 - reconhecimento ou visualização</b></p>	<p>O aluno reconhece formas geométricas planas: retângulo, losango e círculo.</p>
<p><b>Nível 2 - análise</b></p>	<p>O aluno percebe que a construção do losango e do círculo depende do tamanho do retângulo, que tem lados com medidas proporcionais. Além disso, constata que o lado do quadrado procurado corresponde ao diâmetro do círculo.</p>
<p><b>Nível 3 - abstração ou dedução informal</b></p>	<p>O aluno percebe que os vértices do losango estão a uma distância fixa (e proporcional) do ponto médio dos lados do retângulo. Também observa que o círculo tem centro no ponto de encontro das diagonais do retângulo ou, ainda, das retas definidas por pontos médios de lados opostos e que a medida de seu raio também é proporcional.</p>
<p><b>Nível 4 – dedução</b></p>	<p>O aluno verifica que, conhecendo a constante de proporcionalidade para o maior lado do retângulo, é possível determinar todas as demais relações de medidas envolvidas no problema. Verifica que a partir da razão entre a medida total do comprimento do retângulo e a quantidade de módulos que ele deve conter é possível determinar a constante procurada, com a qual será possível determinar o raio do círculo e, conseqüentemente, o lado do quadrado procurado.</p>
<p><b>Nível 5 - rigor</b></p>	<p>Aqui, o aluno poderia buscar, em um processo de abstração e generalização, uma relação entre o comprimento do retângulo e as demais dimensões da bandeira, de modo a obter expressões que dependessem desta medida, mantendo a constante de proporcionalidade.</p>

Fonte: elaborado pelos autores.



A partir das repostas apresentadas nas atividades, conjecturamos ter atingido o objetivo deste módulo, pois os cursistas conseguiram entender a conceituação de pensamento geométrico, além de terem percebido, em uma questão do ENEM, o enquadramento nos níveis de pensamento geométrico do modelo de Van Hiele. Para uma futura dinamização, deixamos como sugestão repensar sobre o uso do *GeoGebra*, pois entendemos ser necessária uma abordagem inicial, explicando os principais recursos disponíveis antes do seu uso na resolução de alguma questão.

#### b) Módulo 2: visualização e Tecnologias Digitais

Para este segundo módulo, foi destinado o estudo dos conceitos que envolvem visualização e Tecnologias Digitais no ensino de Geometria.

Os estudos da primeira semana compreenderam a leitura e a reflexão do texto “Visualização e Tecnologias Digitais no auxílio ao ensino de Geometria.” (capítulo 2 deste *e-book*). Foram propostas três perguntas relacionadas à temática como atividade desta etapa.

A primeira pergunta solicitava uma resposta a partir da reflexão do texto disponibilizado sobre a percepção do cursista em relação à visualização no ensino de Geometria e se ele acredita ser importante o seu desenvolvimento na sala de aula.

Obtivemos um retorno de todos os cursistas relatando ser fundamental a utilização da visualização para o desenvolvimento de pensamento geométrico e, conseqüentemente, efetivar o processo de aprendizagem em Geometria. Isso vem ao encontro do que relata Ferreira (2010) quando destaca que as atividades dos professores precisam objetivar o desenvolvimento da habilidade de visualização para a formação do pensamento geométrico. Percebemos tal preocupação em algumas escritas. Por exemplo:

*Acredito que o ensino de Geometria necessite de visualizações para a compreensão e apropriação dos conceitos. (cursista A)*

*[...] a imaginação e a visualização favorecem o desenvolvimento do pensamento geométrico. (cursista D)*

*A visualização auxilia e muito pois uma das grandes dificuldades da geometria é visualização dos objetos geométricos, sejam eles planos ou espaciais. (cursista G)*

*O processo de visualização faz com que o estudante passe a compreender a geometria que está estudando e não somente decorar o que está sendo passado para ele. (cursista O)*

Entendemos que o processo de visualização é uma das etapas mais importantes para o ensino de Geometria, sendo esse o passo inicial para sua aprendizagem. Quando tal processo não é efetivado, a aprendizagem acaba sendo inviabilizada como um todo, haja vista que, mesmo que o professor adote diferentes recursos metodológicos, é a visualização que atua como alicerce para o processo de aprendizagem. Tal ideia é enfatizada por Garcia (2007), o qual ressalta que a visualização é parte integrante do processo de fundamentação do pensamento geométrico.

Percebemos que, durante os anos escolares dos estudantes, a principal fonte de conhecimento geométrico é obtida por meio de representações gráficas de figuras geométricas em sua grande maioria e, dessa forma, os estudantes possuem pouco contato com demonstrações matemáticas. Ainda cabe destacar que, de forma geral, partindo dos níveis de Van Hiele, a maior parte dos estudantes não está no nível apropriado de formalismo suficiente para a compreensão de demonstrações matemáticas formais, sendo necessária, assim, a utilização da visualização para o ensino de Geometria.

Além disso, o processo de abstração na Geometria requer ainda mais dedicação do professor por ser uma área que envolve a compreensão do cálculo a partir da visualização ou vice-versa, nesse processo da formação da imagem mental. Quando tal compreensão não ocorrer, tende a haver sérios problemas na aprendizagem.

O segundo questionamento foi se é possível desenvolver a habilidade de visualização geométrica na sala de aula da Educação Básica. Se sim, de que forma poderia ser realizado? Todos concordaram que é possível e houve poucas divergências entre os modos de desenvolver essa habilidade na sala de aula. Os cursistas apresentaram duas formas: a primeira, utilizando materiais concretos, associados ou não a instrumentos de medidas (régua, compasso e transferidor); a segunda forma seria a partir da utilização de *software* de Geometria Dinâmica, em especial, o *GeoGebra*. Entendemos ser esse último um diferenciador, caso o educador possa utilizá-lo em sala de aula, pois é um recurso que pode instigar a imaginação e possibilitar a testagem e verificação de hipóteses e conjecturas.

Apoiamos o uso do *GeoGebra*, por compreender que ele possa permitir ao educando estimular a criatividade, a curiosidade, a visualização, a representação de figuras geométricas, além de observar sob diversos ângulos, estabelecer conjecturas, animar, transformar em tempo real as figuras geométricas, permitindo agilidade de raciocínio. A habilidade de visualização pode e deve ser desenvolvida em sala de aula. Entretanto, ela requer planejamento e tempo, visto que, por meio dela, o educando vai avançando nos níveis de pensamento geométrico, isso pensando no modelo de Van Hiele.

A última pergunta era se o uso de algum *software* de Geometria Dinâmica (*GeoGebra*, por exemplo) poderia auxiliar no processo de visualização. Essa pergunta já foi respondida na questão anterior, pois apareceu nos relatos de 10 estudantes. Destacamos que aqueles dois cursistas que tiveram dificuldades na utilização do *GeoGebra* na atividade do módulo 1 modificaram sua opinião, como podemos ver na escrita de um deles.

*Acredito que sim, pois quando temos que fazer algum desenho para ilustrar alguma figura geométrica nem sempre os estudantes conseguem perceber*

*todos os entes envolvidos naquele desenho, e muito menos conseguem reproduzir o desenho em seu caderno, com o Software, além de trazer a figura de forma mais compreensiva ainda podem ser feitas movimentações que possibilitam visualizar e concluir conceitos e características da geometria que está sendo estudada. (cursista H)*

Também tivemos o relato de dois cursistas que disseram terem sido auxiliados pelo *GeoGebra*, principalmente quando tinham de trabalhar com figuras geométricas planas e espaciais. Além disso, apareceu em uma resposta, do cursista I, que “[...] o *GeoGebra* é uma ótima ferramenta, pois proporciona a experimentação, ou seja, o indivíduo pode cometer um erro na sua construção e imediatamente refazê-la do zero ou a partir de um ponto e testar novamente”. Isso conduz ao trabalho com a ideia do erro em sala de aula. Além disso, pode contribuir para que os estudantes construam uma melhor habilidade de argumentação e formulação de estratégias para a solução de situações problemas.

De forma geral, a utilização do *GeoGebra* pode auxiliar no processo de aquisição da habilidade de visualização pelos estudantes. Ademais, destacamos que, por meio do *software*, eles ainda podem estabelecer relações entre as figuras geométricas e a álgebra, uma vez que o *GeoGebra* estabelece uma relação entre a Geometria (*Geo*) e a Álgebra (*Gebra*).

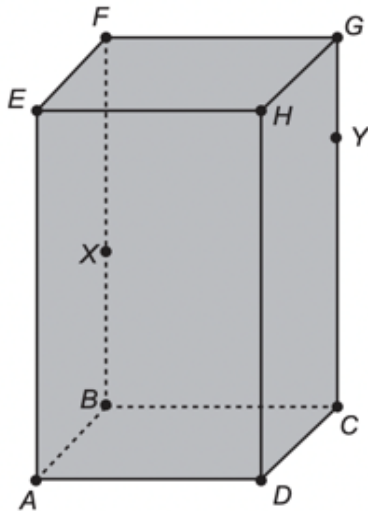
Para finalizar o módulo, na segunda semana, os cursistas tiveram três atividades para desenvolverem.

A primeira atividade estava relacionada à resolução de questão 141 (caderno amarelo) do ENEM de 2021 (Figura 14). A referida questão utiliza-se de conceitos de geometria plana e espacial, além da visualização.

Figura 14 – Questão 141 – Caderno Amarelo – ENEM (2021)

**Questão 141** enem2021

Um inseto percorreu sobre a superfície de um objeto, em formato de um prisma reto  $ABCDEFGH$ , com base retangular, uma trajetória poligonal, com vértices nos pontos:  $A - X - Y - G - F - E - X - G - E$ , na ordem em que foram apresentados.



É necessário representar a projeção ortogonal do trajeto percorrido pelo inseto sobre o plano determinado pela base do prisma.

A representação da projeção ortogonal do trajeto percorrido pelo inseto é

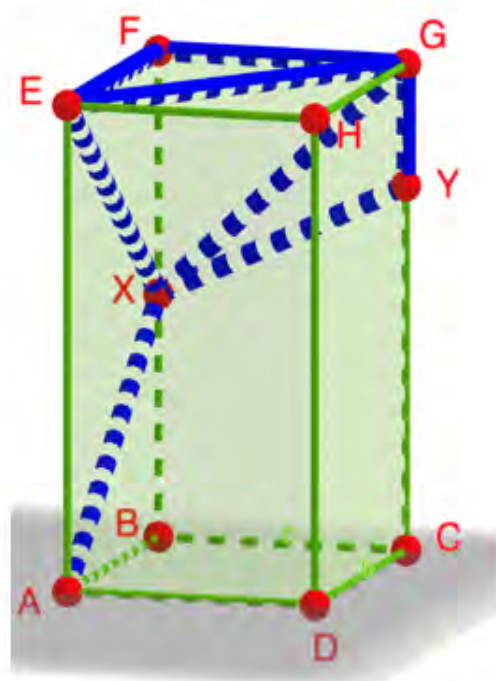
- A
- B
- C
- D
- E

Fonte: ([https://download.inep.gov.br/enem/provas\\_e\\_gabaritos/2021\\_PV\\_reaplicacao\\_PPL\\_D2\\_CD5.pdf](https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2021_PV_reaplicacao_PPL_D2_CD5.pdf)).

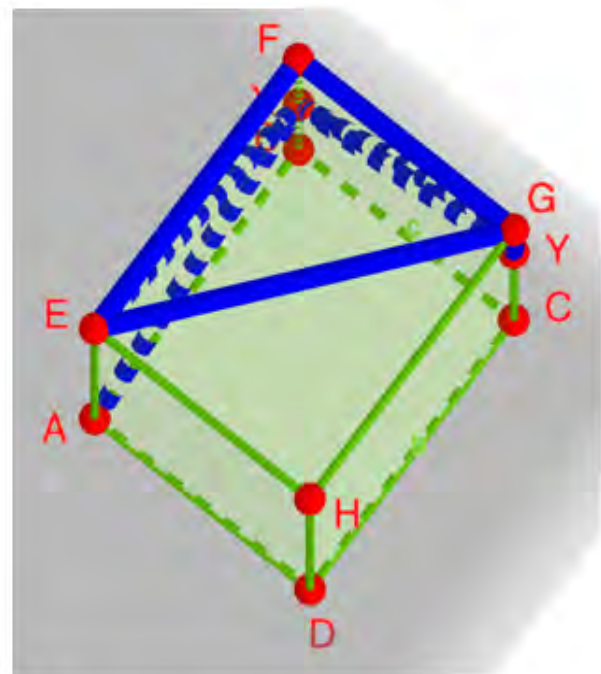
Inicialmente, essa questão foi pensada para os cursistas resolverem com o auxílio do *GeoGebra*, utilizando a Janela 3D (tridimensional). Como tivemos alguns participantes que demonstraram dificuldade no módulo anterior, na utilização da Janela 2D (bidimensional), optamos em disponibilizar a construção do problema proposto na plataforma *GeoGebra* Materiais (Figura 15). Destacamos essa escolha por dois motivos. O primeiro deles era fazer com que o cursista tivesse contato com esse recurso tecnológico. Já no segundo, o intuito não estava na construção, e sim nas manipulações do objeto geométrico, levando à verificação se era possível obter a visualização.

Pelos relatos dos participantes, tivemos duas formas de resolução em que todos chegaram à resposta correta (alternativa D). Na primeira (2 cursistas), não houve o uso do *GeoGebra*. O cursista G relata “[...] que a construção no software não auxiliou na resolução, pois foi mais fácil ir realizando uma representação no plano do trajeto realizado a partir da relação entre os segmentos”. O cursista N relatou que “[...] acompanhou com o lápis sobre a tela para visualizar a trajetória e tentou rotacionar para observar a vista superior do prisma.[...]”. Ele finalizou: “[...] depois fui ao software para verificar, chegando a mesma conclusão”. Como pode ser visto nos relatos, mesmo inicialmente não utilizando o recurso tecnológico, os cursistas G e N confirmaram suas conjecturas com sua utilização. A segunda forma de resolução, optada por 12 cursistas, foi com a utilização do arquivo disponibilidade no *GeoGebra* Materiais (Figura 15).

Figura 15 – Questão 141 – Caderno Amarelo – ENEM (2021) resolvida utilizando o *GeoGebra*



Vista frontal



Vista superior

Fonte: (<https://www.geogebra.org/m/cvraupzj>).

Com o auxílio do *GeoGebra*, podemos facilitar a visualização dos movimentos, a projeção ortogonal do trajeto percorrida pelo inseto e identificar, entre as alternativas, qual seria a correta. Esta é uma questão que utiliza não só a visualização, mas também a imaginação. Por vezes pode acontecer de os estudantes não conseguirem, sem um desenho ou animação, visualizar o que está acontecendo no problema. Reforçando essa ideia, Bairral (2009) destaca a facilidade e a praticidade na visualização do objeto geométrico.

Para finalizar o módulo, a segunda atividade foi um questionamento a respeito da percepção em relação ao uso do *GeoGebra*, se ele facilitou ou dificultou a resolução da questão. Foi unânime o relato de que o *software* ajuda na visualização, principalmente para aquele que tem dificuldade em realizar o desenho. Vejamos alguns relatos:

*O GeoGebra é sensacional, pois ele permite uma exploração dinâmica, e de todos os lados e ângulos. (cursista B)*

*O software auxilia na resolução da questão, pois ele ajuda a movimentação do sólido em nossa mente, algo que nem todos conseguem realizar sem o GeoGebra. (cursista E)*

*A utilização do Geogebra facilitou bastante a resolução da questão, pois, ao conseguir manipular a figura espacial nesse software, girando e rotacionando, foi possível verificar de forma bem mais fácil o trajeto realizado. (cursista H)*

*Facilitou muito, pois por meio da interação com a ferramenta tecnológica pude observar a figura por todos os ângulos, me despertando a curiosidade do caminho nas laterais e, também, por baixo. (cursista J)*

*O software facilitou a conclusão da resposta, pois ele facilitou uma melhor visualização do trajeto percorrido e com isso identificar a projeção da sombra feita. (cursista K)*

A partir das repostas apresentadas nas atividades, acreditamos ter atingido o objetivo deste módulo, uma vez que todos os cursistas conseguiram explorar o ensino de Geometria, por meio da visualização e do uso de um recurso tecnológico, em especial, com o uso do *GeoGebra*.

### c) Módulo 3: Resolução de Problemas

Para o último módulo, optamos por um estudo da metodologia de Resolução de Problemas com enfoque para o ensino de Geometria.

Da mesma forma que nos outros módulos, a primeira semana foi destinada à leitura do texto “Resolução de Problemas: uma proposta de metodologia para o ensino e a aprendizagem de Geometria” (capítulo 3 deste *e-book*) e reflexão acerca das ideias nele expressas. Como atividade desta etapa, os cursistas tiveram de responder se eles acreditam que a metodologia de Resolução de Problemas poderia facilitar ou dificultar o processo de ensino e de aprendizagem de Geometria.

Pelas respostas apresentadas, todos os cursistas acreditam que a metodologia da Resolução de Problemas seja uma ótima estratégia a ser utilizada em sala e aula e que pode melhorar o processo de aprendizagem em Geometria.

Entretanto, cabe destacar a reflexão do cursista E, que relata: “*Nesta metodologia, confundida muitas vezes com a resolução de situações problemas em aula, se diferencia por envolver problemas selecionados pelo professor com um propósito específico a ser atingido*”. O participante faz um destaque para a distinção entre a simples ação de resolver problemas e a metodologia. Percebe que a metodologia é algo que vem a facilitar a aprendizagem, ou seja, um caminho a seguir, como Polya (2006) apresenta em suas quatro etapas da Resolução de Problemas: o estudante compreende o problema (etapa 1), a partir disso ele vai criar as estratégias e elaborar um plano de ação (etapa 2) para atacar o problema proposto e, após executar esse plano de ação (etapa 3), é a fase da retrospectiva do problema (etapa 4), de modo a verificar se a solução está correta.

Pensando na última fase de Polya (retrospectiva do problema), por experiência em sala de aula, percebemos que é comum que os estudantes questionem o professor se o pensamento deles está coerente, sem ao menos verificar se sua



resolução está certa. Desse modo, é fundamental que os docentes estimulem a Resolução de Problemas com seus alunos. Esta etapa é fundamental para fazer com que o discente pense, reflita e analise a sua resolução, verificando se está coerente e correta. Além disso, ao estimular o pensamento sobre se existem outros métodos e outros caminhos, estaremos estimulando o seu raciocínio matemático.

Acreditamos que, atualmente, é muito desafiador trabalhar com os estudantes atividades que envolvem resoluções de questões, já que muitas vezes eles não compreendem o problema em questão, faltando a interpretação. Contudo, uma atividade desafiadora pode envolver os alunos na problemática e motivá-los a encontrar a solução. Cabe destacar que a metodologia de Resolução de Problemas potencializa o ensino de qualquer conteúdo matemático, desde que utilizada da forma correta, pois o estudante consegue aplicar seus conhecimentos e articular diferentes saberes, o que é essencial para a aprendizagem em Geometria e para a Matemática como um todo.

A proposição de problemas durante a aula de Matemática permite diferentes encaminhamentos e retomadas de conhecimentos. Sua adoção talvez não se dê como uma facilitadora do processo de ensino e de aprendizagem, mas como um mecanismo que subsidia a construção de significados do estudante para os diferentes conteúdos desenvolvidos, entre eles, a Geometria.

Tal cenário é ainda mais promissor quando a Resolução de Problema passa a ser utilizada como uma metodologia de ensino, conforme proposto por Onuchic e Allevato (2011). A aplicação das 9 fases definidas pelas autoras, além de incentivar o trabalho em grupo, promove a elaboração e a testagem de hipóteses e de estratégias de resolução, bem como a discussão e sistematização dos resultados encontrados, promovendo a construção do saber em conjunto, além da avaliação.

Para finalizar o módulo e o curso, na segunda semana, solicitamos aos participantes colocar em prática a metodologia Resolução de Problemas por

meio de uma atividade. Eles tiveram de resolver a questão 157 (caderno amarelo) do ENEM de 2017 (Figura 16), de forma manuscrita, descrevendo as 4 etapas da Resolução de Problemas descritas por Polya (2006), a saber: compreender o problema (CP); desenvolver um plano para a solução (DP); executar o plano (EP); e retrospectiva do problema (RP).

Figura 16 – Questão 157 – Caderno Amarelo – ENEM (2017)

**QUESTÃO 157**

A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

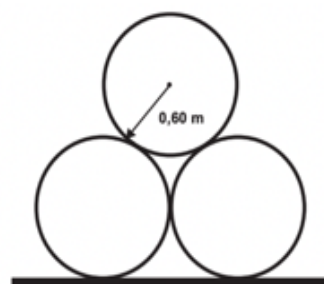
**Caminhão entala em viaduto no Centro**

Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.



Disponível em: [www.caminhoes-e-carretas.com](http://www.caminhoes-e-carretas.com). Acesso em: 21 maio 2012 (adaptado).

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.



A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto.

Considere 1,7 como aproximação para  $\sqrt{3}$ .

Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

- A 2,82
- B 3,52
- C 3,70
- D 4,02
- E 4,20

Fonte: ([https://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/enem/provas/2017/2017\\_PV\\_impreso\\_D2\\_CD5.pdf](https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/2017_PV_impreso_D2_CD5.pdf)).

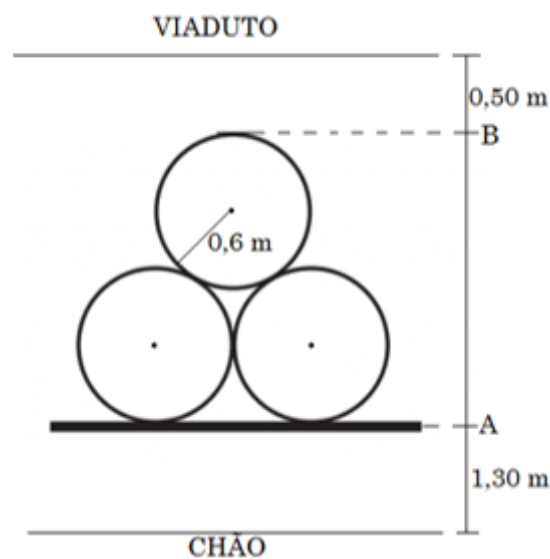
Todos os cursistas resolveram a questão conforme solicitado e chegaram à resposta correta. Analisando as resoluções dos docentes participantes, elas foram muito semelhantes, havendo divergências na forma de escrita, e não no teor. Chamou atenção que todos apresentaram desenhos e/ou esquemas, ou seja, usaram o auxílio da visualização. Para melhor organização, apresentamos, a seguir, a solução do cursista F, seguindo a metodologia da Resolução de Problemas. Desta forma, teremos:

**CP:** O primeiro passo para resolver o problema é retirar os dados do mesmo e identificar o que é questionado.

Fazendo uma leitura do enunciado, podemos indicar na Figura 17 os valores fornecidos. Os dados apresentados na questão foram: a altura acima dos cilindros (margem de segurança) de 0,5 metros; altura do caminhão de 1,3 metros.

Além disso, verificamos que, para resolver o problema, é necessário determinar a distância entre A e B, que é a medida parcialmente desconhecida, ou seja, qual deve ser a altura mínima do viaduto para passar o caminhão.

Figura 17 – Desenho apresentado pelo cursista F para a etapa de compreensão do problema para a Questão 157 – Caderno Amarelo – ENEM (2017)



Fonte: imagem elaborada pelo cursista F.

**DP:** nessa etapa, devemos pensar sobre como utilizar as informações obtidas e pensar em uma solução.

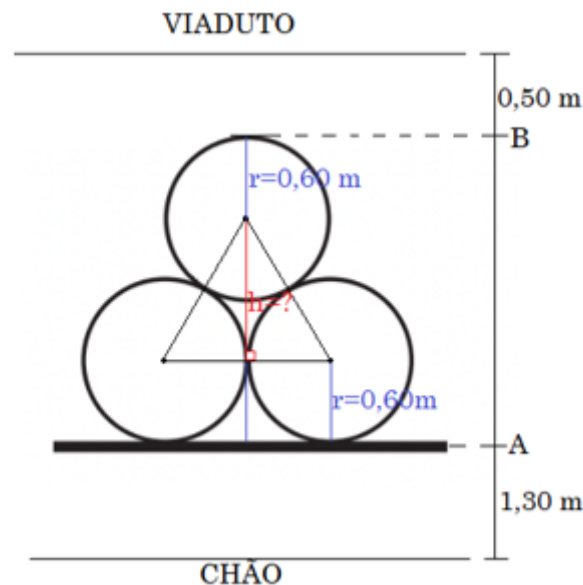
O plano será estabelecido seguindo as hipóteses:

Hipótese 1: Os 3 círculos são tangentes entre si e possuem o mesmo raio.

Hipótese 2: Os segmentos que ligam os centros dos círculos formam um triângulo equilátero.

Para determinar a distância entre A e B, podemos observar que ela corresponde à soma de duas medidas de raio do círculo e da altura do triângulo equilátero definido pelos segmentos que ligam os centros dos círculos, como indicado na Figura 18.

Figura 18 – Desenho apresentado pelo cursista F para a etapa de desenvolvimento de um plano para a solução da Questão 157 – Caderno Amarelo – ENEM (2017)



Fonte: imagem elaborada pelo cursista F.

Hipótese 3: A altura mínima é dada pela soma da distância entre A e B e pela altura existente entre a carroceria do caminhão e o vão de segurança.

Conhecida essa altura (do chão ao viaduto), é possível determinar a distância entre A e B e, posteriormente, a altura mínima do viaduto, que deverá considerar a altura da carroceria do caminhão (1,3 m) e o vão de segurança (0,50 m).

**EP:** se seguirmos o plano estabelecido e atentarmos para o enunciado do problema, temos:

A altura de um triângulo equilátero é dada por:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{1,2\sqrt{3}}{2} = 0,6\sqrt{3} = 1,02 \text{ m}$$

Assim, a distância entre A e B será:

$$d_{AB} = 0,6 + 1,02 + 0,6 = 2,22 \text{ m}$$

Portanto, a altura mínima H do viaduto será:

$$H = 1,3 + 2,22 + 0,5 = 4,02 \text{ m}$$

**RP:** como o problema questiona sobre a altura mínima, podemos verificar que os passos realizados são suficientes para resolver o problema.

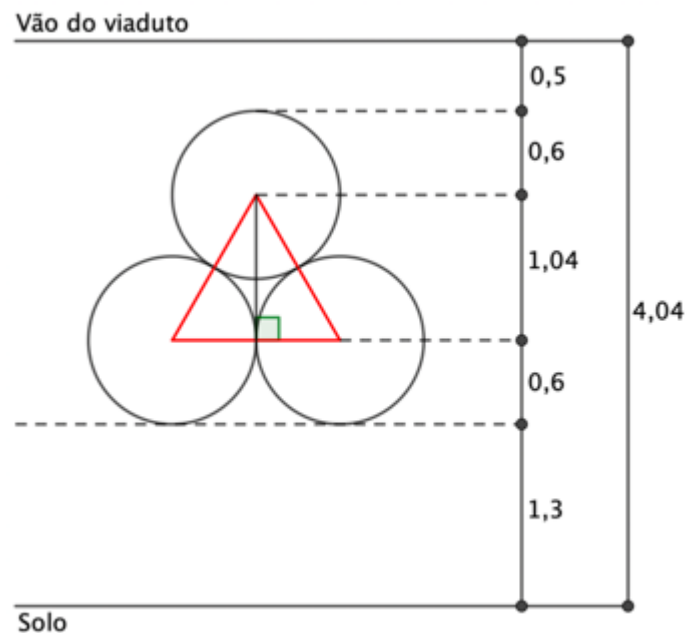
Logo, a altura mínima do viaduto é de 4,02 m. A alternativa correta corresponde à letra D.

Tivemos 10 cursistas que resolveram a etapa de execução do plano (EP) com o auxílio do *GeoGebra* e dois deles relataram que a resposta apresentada 4,02 m não seria a correta, pois eles encontraram 4,04 m, conforme apresentamos:

*Utilizando o GeoGebra consegui encontrar o valor exato de 4,04 metros. Entretanto, o valor mais próximo nas alternativas é 4.02 metros. (cursista H)  
Como altura mínima do viaduto utilizando o software GeoGebra encontrei 4.04 m, acredito que o motivo seja o arredondamento do valor da  $\sqrt{3}=1,7$ . (cursista L)*

Como podemos perceber, o cursista L percebeu o motivo da diferença entre as respostas utilizando o *GeoGebra* e o valor apresentado na alternativa D. O motivo está realmente na utilização de apenas uma casa decimal após a vírgula para o valor da  $\sqrt{3}$ . Na Figura 19, apresentamos uma simulação da situação apresentada, comprovando o real valor com duas casas decimais após a vírgula.

Figura 19 – Desenho construído no *GeoGebra* simulando a situação apresentada na Questão 157 – Caderno Amarelo – ENEM (2017)



Fonte: acervo dos autores.

Para a resolução deste problema, acreditamos ser inevitável fazermos um esboço do desenho. Se tivermos a apropriação do *software* e conseguirmos representar o desenho nele, simulando a situação proposta, ficará mais fácil a interpretação do enunciado, além de instigar o estudante a pensar as diversas maneiras de visualizar e interpretar um mesmo enunciado.

De forma geral, acreditamos ter alcançado o objetivo do módulo, que foi o de estudar a metodologia de Resolução de Problema aplicada ao ensino de Geometria. Entretanto, pelo fato de o curso ser realizado de forma totalmente assíncrona, sem encontros presenciais, não pudemos utilizar as 9 etapas da Resolução de Problemas de Onuchic e Allevato (2011), o que poderia enriquecer o aprendizado de Geometria.

## Referências

ALMEIDA, Maria Elisabeth de. **ProInfo: Informática e Formação de Professores**. v. 1. Secretaria de Educação a Distância. Brasília: Ministério da Educação, 2000.

ANDRADE, José Antônio Araújo; NACARATO, Adair Mendes. Tendências Didático- Pedagógicas no Ensino de Geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs. In: **Educação Matemática em Revista**, n. 17, ano 11, p. 61-70, 2004.

ARCAVI, Abraham. The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, 52, 2003. p. 215-241.

BACICH, Lilian; NETO, Adolfo Tanzi; TREVISANI, Fernando de Mello. **Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação**. Porto Alegre: Penso, 2015.

BAIRRAL, Marcelo Almeida. **Tecnologias da Informação e Comunicação na formação e educação matemática**. v. 1. Seropédica: EDUR, 2009.

BERLINGHOFF, Willian P.; GOUVÊA, Fernando Quadros. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. Tradução Elza Gomide e Helena Castro. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.

CIFUENTES, José Carlos. Fundamentos estéticos da Matemática In: **Filosofia da Educação Matemática: Concepções e Movimento**. Brasília: Plano Ed., 2003.

CIFUENTES, José Carlos. Uma Via Estética de Acesso ao Conhecimento Matemático. **Boletim GEPEM (USU)**, Rio de Janeiro, v. 46, p. 55-72, 2005.

CLEMENT, Luiz; TERRAZZAN, Eduardo Adolfo. Resolução de problemas de lápis e papel numa abordagem investigativa. **Experiências em Ensino de Ciências**, Cuiabá, v. 7, n. 2, p. 98- 116, ago. 2012.

CROWLEY, Mary L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. **Aprendendo e ensinando Geometria**. Tradução de Hygino H. Domingos. São Paulo: Atual, 1994, 1-20.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Ática, 2003.

DREYFUS, Tommy. Advanced Mathematical thinking. In: Pearla Nesher e Jeremy Kilpatrick. (Eds). **Mathematics and Cognition**. Cambridge: University Press, 1990. p. 113-134.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Berne: Peter Lang, 1995.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Berne: Peter Lang, 1995.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. **Educação matemática: representação e construção em geometria**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

FERREIRA, Lúcia Helena da Cunha. **Desenvolvimento do pensamento geométrico com visualização de figuras espaciais por meio da metodologia de oficinas**. 2010. 137f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2010.

FISCHBEIN, Efraim. **Intuition in science and mathematics: an educational approach**. Dordrecht: Reidel, 1987.

FISCHBEIN, Efraim. The Theory of Figural Concepts. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 24, n.2, p. 139-162, 1993.

GARCIA, Luciane Maia Insuela. **Os Processos de Visualização e Representação dos Signos Matemáticos no Contexto Didático-pedagógico**. 2007. 161 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) –Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.



HAMAZAKI, Adriana Clara. O ensino da Geometria sob a ótica dos Van Hiele. In: **ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VIII**. Recife, Brasil, 2004.

HOFFER, Alan. Geometry is more than Proof. **The Mathematics Teachers**, vol 74, n. 1, p. 11-18, 1981.

KALEFF, Ana Maria. **Vendo e entendendo Poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos**. 2. ed. Niterói: EDUFF, 2003.

KENSKI, Vani Moreira. **Educação e tecnologias: O novo ritmo da informação**. Campinas: Papirus, 2012.

LEIVAS, João Carlos Pinto. **Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática**. 2009. 294 f. Tese (Doutorado em Educação Produção) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

LOPES, Maria Laura Mouzinho Leite. NASSER, Lilian. **Geometria na era da imagem e do movimento**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/UFRJ, 1997.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? In: **A Educação Matemática em Revista**, Ano III, n. 4, jan/jun, p. 3-13, Blumenau: SBEM, 1995.

MELO, André Luís Canuto Duarte; SILVA, Gilmar Silvestre da Cruz. O uso do software geogebra no estudo de funções. In: **ENCONTRO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES**, 6., 2013. Aracaju. **Anais eletrônicos...** Aracaju: UNIT, 2013.

NASSER, Lilian. Níveis de van Hiele: uma explicação definitiva para as dificuldades em geometria? **Boletim GEPEN (USU)**, Rio de Janeiro, v. 29, p. 33-38, 1992.

NASSER, Lilian. SANT'ANNA Neide da Fonseca Parracho. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele**. 2. ed. rev. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

ONUCHIC, Lurdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Sueli Gomes. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. (Orgs.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 212-231.

ONUCHIC, Lurdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Sueli Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p.73- 98, dez. 2011.

ONUCHIC, Lurdes de La Rosa. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Editora Unesp, 1999. p. 199-218.

PAIS, Luís Carlos. Intuição, Experiência e Teoria Geométrica. In **Zetetiké**. v. 4, n. 6, julho/dezembro, pp. 65-74, Campinas: CEMPEM /FE/ UNICAMP, 1996.

PAIS, Luís Carlos. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria. In: **REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 23º**, Caxambu, Minas Gerais, 2000.

PERLIN, Patrícia. **Geometria Dinâmica: uma proposta de atividades no estudo de triângulos através do GeoGebra**. 2010. 63 p. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática. Centro de Ciências Naturais e Exatas, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2010.

PIRES, Célia Maria Carolino; CURY, Edda; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. **Espaço e Forma: a construção de noções geométricas**. São Paulo, PROEM, 2000.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

POLYA, George. **Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving**. Hoboken, Nova Jersey: John Wiley & Sons, 1962.

PONTES, Edel Alexandre Silva; DA SILVA, Luciano Martins. Aritmética modular na interpretação de sistemas codificados no processo de ensino e aprendizagem de matemática. **Revista de Ciência e Inovação**, v. 5, n. 1, 2020.

SANTOS, Cleane Aparecida dos; NACARATO, Adair Mendes. **Aprendizagem em geometria na Educação Básica: a fotografia e a escrita na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

VALENTE, José Armando. Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador: o papel do computador no processo ensino-aprendizagem. In: ALMEIDA, Maria Elizabeth Brisola Brito Prado; MORAN, José Manuel (Org.) **Integração das Tecnologias na Educação**. Secretaria de Educação a Distância. Brasília: Ministério da Educação, 2005. p. 23-31.

VILLIERS, Michael de. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. In: **Educação Matemática Pesquisa**. v. 12, n. 3, p. 400-431, São Paulo, 2010. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/5167>>. Acesso em: 5 abr. 2022.

WALLE, John A. Van de. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. 6a ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

## Sobre os autores

### José Carlos Pinto Leivas



*É doutor em Educação (Matemática) pela Universidade Federal do Paraná (UFPR), mestre em Matemática Pura e Aplicada pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e licenciado em Matemática pela Universidade Católica de Pelotas (UCPEL).*

*Atualmente é professor e pesquisador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (UFN).*

*Lattes:<<http://lattes.cnpq.br/0314545667166824>>*

### Mauricio Ramos Lutz

*É doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Franciscana (UFN), mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), especialista em Matemática, Mídias Digitais e Didática também pela UFRGS e licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM).*

*Atualmente é professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico no Instituto Federal Farroupilha (IFFar) e no Mestrado Profissional em Educação Profissional e Tecnológica em Rede Nacional (ProfEPT),*

*Lattes:<<http://lattes.cnpq.br/5099730179818142>>.*



*www.terried.com*



*@editora\_terried*



*/editoraterried*



*contato@terried.com*



**TERRIED**