LUCAS ANTONIO MENDES DE LIMA
MIGUEL CHAQUIAM

Produtos Notáveis com materiais manipuláveis

2022

Lucas Antonio Mendes de Lima
Miguel Chaquiam

Produtos Notáveis com materiais manipuláveis

Produto educacional apresentado ao comitê de avaliação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.

Belém
2022

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Lima, Lucas Antonio Mendes de
Produtos notáveis com materiais manipuláveis: produto educacional /Lucas Antonio Mendes de Lima, Miguel Chaquiam. - Belém, 2022.

Produto educacional vinculado à dissertação “Produtos notáveis com materiais manipuláveis” do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Belém, 2022.

ISBN: 978-65-84998-17-9

1. Ensino de matemática. 2. Produtos notáveis. 3.Sequência didática. I. Chaquiam, Miguel (orient). II. Título.

CDD 23 ed. 512

Regina Coeli A. Ribeiro - CRB-2/739

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: **"PRODUTOS NOTÁVEIS COM MATERIAIS MANIPULÁVEIS".**

Mestrando: **LUCAS ANTÔNIO MENDES DE LIMA**

Data da avaliação: **30/09/2022**

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado à:*

(X) Estudantes do Ensino Fundamental ( ) Estudantes do Ensino Médio
( ) Professores do Ensino Fundamental ( ) Professores do Ensino Médio
( ) Outros: ____________________

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

(X) Sequência Didática ( ) Página na Internet ( ) Vídeo
( ) Texto Didático (alunos/professores) ( ) Jogo Didático ( ) Aplicativo
( ) Software ( ) Outro: ____________________

b) *Possui URL:* (X) Sim, qual o URL: ____________________
( ) Não ( ) Não se aplica

c) *É coerente com a questão-foco da pesquisa?*

(X) Sim
( ) Não. Justifique? ____________________

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*

(X) Sim
( ) Não. Justifique? ____________________

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*

(X) Sim
( ) Não. Justifique? ____________________

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Possui sumário:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
b) *Possui orientações ao professor:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
c) *Possui orientações ao estudante:*	( ) Sim	( ) Não	(X) Não se aplica
d) *Possui objetivos/finalidades:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
e) *Possui referências:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
f) *Tamanho da letra acessível:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
g) *Ilustrações são adequadas:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Foi aplicado?*

(X) Sim, onde: Presencialmente com grupo de professores.

( ) Não, justifique:

( ) Não se aplica

b) *Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?*

(X) Sim, onde: Instituições de Ensino Fundamental

( ) Não, justifique:

( ) Não se aplica

c) *O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?*

(X) Sim, onde:

( ) Não, justifique:

( ) Não se aplica

d) *Em qual condição o produto educacional foi aplicado?*

( ) na escola, como atividade regular de sala de aula

( ) na escola, como um curso extra

(X) outro:

e) *A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):*

( ) Alunos do Ensino Fundamental

( ) Alunos do Ensino Médio

(X) Professores do Ensino Fundamental

(X) Professores do Ensino Médio

( ) outros membros da comunidade escolar, tais como

( ) outros membros da comunidade, tais como

O produto educacional foi considerado:

(X) APROVADO ( ) APROVADO COM MODIFICAÇÕES ( ) REPROVADO

MEMBROS DA BANCA Assinaturas

Prof. Dr. Miguel Chaquiam (Presidente)
Doutor em Educação
IES de obtenção do título: UFRN

Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral (Examinador 01)
Doutor em Ciências Humanas
IES de obtenção do título: PUC/RJ

Prof. Dr. João Cláudio Brandenberg Quaresma (Examinador 02)
Doutor em Educação
IES de obtenção do título: UFRN

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O produto educacional evidenciado em questão está vinculado a uma sequência didática para o ensino de produtos notáveis que surgiu como desdobramento da dissertação de mestrado associada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM) da Universidade do estado do Pará (UEPA).

Este produto é destinado a professores e alunos do Ensino Fundamental II para ensino e aprendizagem de produtos notáveis no âmbito escolar. Trata-se de um recurso didático validado experimentalmente, por um grupo de professores que atuam na Educação Básica, que apresentou potencialidades associadas ao seu objetivo que é o de ensinar o conteúdo em destaque para alunos do 8º ano por meio da interatividade dialógica promovida pelo espírito investigativo, de comunicação e argumentação em língua materna e da linguagem matemática de forma interligada.

A elaboração deste constructo foi baseada em um campo de pesquisa da área da Educação Matemática, denominado Didática da Matemática. Com o qual, elencamos como cabedal teórico para subsidiar as correlações entre o professor, o aluno e o saber a Teoria das Situações Didática (TSD) de Brousseau (1996). Bem como, nos embasamos nas percepções de Zabala (1998) acerca da definição de sequência didática. Para sua elaboração nos apoiamos nos pressupostos das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) de Cabral (2017). Assim, como no entendimento dos materiais manipuláveis nos embasamos em Lorenzato (2006).

Tínhamos como pretensão, utilizar as perspectivas da Análise Microgenética de Goes (2000) e Análise do Discurso de Montiman e Scott (2002). Entretanto, devido as circunstâncias ocasionadas pela pandemia da COVID-19 houve a necessidade de um redirecionamento do processo de aplicação e validação da sequência didática coma alunos para uma turma de professores por meio da avaliação de um questionário.

Preliminarmente a estruturação da sequência didática, buscamos realizar uma revisão de estudos afim de compreender os tipos e níveis de abordagens do objeto matemático por outros pesquisadores. Além disso, buscamos entender as perspectivas de alunos egressos, bem como, de professores a respeito do conteúdo. Assim como, de que forma os livros didáticos o abordam, se os níveis de exercícios correspondem as definições propostas. Paralelamente elaboramos, um tratamento matemático afim de subsidiar a elaboração do constructo, bem como, apresentar aos professores correlações do objeto matemático como outros conteúdos em diversos níveis (Ensino Fundamental, Médio e Superior).

De posse de todo esse levantamento e compreensões realizadas acerca do objeto, elaboramos a sequência didática, ramificada em 4 atividades denominadas de UARC-1, UARC-2, UARC-3 e UARC-4. Isto para abarcar as identidades associadas ao quadrado da soma de dois termos, cubo da soma de dois termos, produto da soma pela diferença de dois termos e quadrado da diferença de dois termos, juntamente como os seus respectivos kits manipuláveis que auxiliam na construção do conteúdo.

Sugerimos aos professores que antes da sua utilização seja realizado com a turma um teste de conhecimentos mínimos necessários para a construção do conteúdo da sequência didática, como: as operações com expressões algébricas (adição, subtração); potenciação (definição e propriedades); propriedade distributiva do produto em relação à adição e em relação à subtração (expressões algébricas envolvendo a multiplicação); cálculo de área (quadrado e retângulo) e de volume (paralelepípedo e cubo).

Caso o professor note que os alunos apresentam domínio, pode prosseguir com a sua utilização. Entretanto, em caso de dificuldades dos alunos, indicamos que seja feita uma oficina de conhecimentos básicos destes conteúdos para preparar cognitivamente os estudantes para os novos conhecimentos desenvolvidos na execução das atividades.

Portanto, apresentamos a seguir o material necessário para utilização deste produto educacional. Sua fundamentação teórica, bem como, a sequência didática elaborada na versão dos alunos, assim como, as orientações de utilização de para sua construção com foco aos professores e o tratamento matemático acerca do objeto da sequência didática.

Lucas Antonio Mendes de Lima

Miguel Chaquiam

1. APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Neste capítulo foram abordadas questões concernentes ao aporte teórico que fundamentou a construção da sequência didática abordada como ponto principal do produto educacional. No tocante a este aspecto, foi elucidada a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau (1986), associada à Sequência Didática (SD) na concepção de Zabala (1998). O modelo estruturante das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) de Cabral (2017). Os materiais concretos manipuláveis sob a perspectiva de Lorenzato (2006).

1.1. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS (TSD)

Inicialmente evidenciamos a Didática da Matemática, enquanto campo teórico de investigação da Educação Matemática que se preocupa e propõem uma série de conceitos frente ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática. Com isso, destacamos a noção citada por D'Amore (2007), onde ele afirma que:

> Didática da Matemática: é a disciplina científica e o campo de pesquisa cujo objetivo é o de identificar, caracterizar e compreender os fenômenos e os processos que condicionam o ensino e a aprendizagem da Matemática.
> Educação Matemática: é o sistema social complexo e heterogêneo que inclui teoria, desenvolvimento e prática relativo ao ensino e aprendizagem em Matemática. Inclui a Didática da Matemática como subsistema. D'Amore (2007, p. 97)

Diante disso, a Teoria das Situações Didáticas (TSD) surge enquanto um cabedal teórico que fundamentou este estudo e que faz parte do campo de investigação maior, vinculado à Didática da Matemática. Sobre a TSD, apontamos seus conceitos a partir dos estudos propostos por Brousseau (1986), assim como, suas correlações com a intencionalidade da pesquisa.

A TSD teve sua origem na França, especificamente na década de 70 por Guy Brousseau. Esta ganhou destaque, por ser um modelo teórico que trata de formas de apresentação dos conteúdos matemáticos, a alunos, como uma possibilidade de melhor compreender o fenômeno da aprendizagem matemática. Ou seja, há uma valorização dos conhecimentos mobilizados pelos alunos para a construção do saber matemático, assim como, do trabalho do professor, enquanto profissional que proporciona condições para que os alunos se apropriem dos conteúdos. (FREITAS, 2010, p. 77)

Para que ocorra este cenário, deve ser organizado um meio, afim de que a aprendizagem seja efetivada por parte dos alunos. O qual, a partir da concepção de Freitas (2010), é definido da seguinte forma:

> O meio é onde ocorrem as interações do sujeito, é o sistema antagonista no qual ele age. É no meio que se provocam mudanças visando desestabilizar o sistema didático e o surgimento de conflitos, contradições e possibilidades de aprendizagem de novos conhecimentos. Freitas (2010, p. 79)

A partir das noções preliminares esboçadas sobre a teoria. Destacamos de acordo com as concepções de Brousseau (1986), a noção de *situação didática.* A qual, caracteriza-se pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio (eventuais instrumentos e objetos), o professor e o saber com a finalidade de desenvolver atividades que visem alcançar o processo de aprendizagem sobre os conteúdos matemáticos.

Estes três elementos são de fundamental importância para teoria, visto que caracterizam o espaço vivo da sala se aula. Contudo, eles não são suficientes para abarcar toda complexidade do fenômeno cognitivo. Por isto, de acordo com Pais (2008), eles devem estar associados a outros elementos como: métodos, recursos didáticos, posições teóricas, dentre outros.

Neste sentido, o papel do professor frente as situações didáticas é recontextualizar, repersonalizar e temporalizar o saber. Desse modo, o professor busca não apresentar resultados imediatos e formalizados. Pelo contrário, constrói situações para que os alunos possam vivenciar momentos de investigação no ambiente da sala de aula.

Quando o aluno toma para si o problema ou a situação proposta pelo professor, é neste momento que a aprendizagem vai ser efetivada. Porém, vale ressaltar que entre a aceitação do problema e a aprendizagem, diversa etapas e variáveis são envolvidas.

Das quais, Brousseau (1986) destaca outra categoria frente a teoria, que são as *situações adidáticas*. Evidenciadas como situações caracterizadas pela existência de determinados aspectos da aprendizagem que o professor não possui uma intencionalidade pedagógica de intervenção frente a situação vivenciada pelos alunos.

Ou seja, os próprios alunos colocam em funcionamento o conhecimento que eles mesmos construíram, sem nenhuma intervenção docente.

Freitas (2010), destaca que as situações adidáticas representam os momentos mais importantes da aprendizagem, visto que os próprios alunos constroem e sistematizam de suas maneiras o conhecimento diante do que foi proposto. Assim, elas também não podem ser confundidas com as situações não-didáticas, pois nestas não há um planejamento que visa a aprendizagem.

No mais, Brousseau (1986) aponta uma tipologia de situações que estão presentes ao longo do processo entre as atividades de ensino com as diversas possibilidades de uso do saber matemático frente à um problema escolhido de acordo com nível intelectual do aluno. As quais, foram descritas sobre os olhares de Freitas (2010) e Pais (2008) e denominam-se por: ação, formulação, validação e institucionalização.

Na *situação ação*, o aluno realiza procedimentos imediatos para a solução da atividade ou problema que lhe foi proposto por influência mais experimental e intuitiva do que propriamente teórica. Ou seja, realiza determinadas ações mais imediatas, que resultam na produção de um conhecimento de natureza mais operacional.

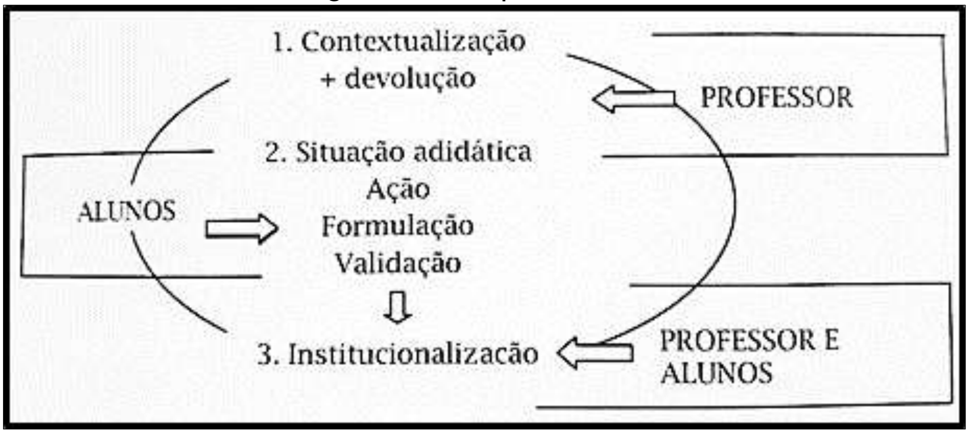
Na *situação formulação*, o aluno passa a utilizar um conhecimento mais elaborado do que na situação anterior, com uso de procedimentos e alguns modelos ou esquemas teóricos explícitos, podendo ainda utilizar uma linguagem mais apropriada para viabilizar o uso da teoria. Contudo, não tem a intenção de julgar a validade do conhecimento utilizado.

Na *situação de validação*, o aluno utiliza mecanismos de prova e o saber já elaborado por ele passa a ser usado com uma natureza essencialmente teórica, o que caracteriza um argumento racional pelo aluno. Estas situações estão relacionadas ao plano da racionalidade e diretamente voltadas para o problema da verdade. Além disso, elas servem para rejeitar ou mesmo para contrapor determinas proposições.

Por fim, na *situação de institucionalização*, o aluno tem como intuito buscar o caráter objetivo e universal do saber científico com a passagem do plano individual para o plano geral, histórico e culturalmente construído. Neste sentido, o saber tem uma função de referência cultural, ou seja, que vai para além da limitação do contexto pessoal e localizado.

Os autores que fundamentaram tal discussão sobre a TSD, afirmam que as três primeiras situações (ação, formulação e validação) podem ser consideradas como situações adidáticas, enquanto a última (institucionalização) pode ser considerada com uma situação didática, visto que, o professor pode realizar intervenções afim de que sejam estabelecidas generalizações dos conceitos por parte dos alunos. Tal afirmativa, pode ser corroborada na figura 01 a seguir:

Figura 01: Etapas da TDS



Fonte: Freitas, 2010, p. 103

De posse da compreensão da TSD, consequentemente das tipologias de situações que a compõe, entendemos que tal teoria corrobora o pensamento e construção deste produto. Visto que as situações didáticas preocupam-se com a apresentação do conteúdo, de modo a ter um contexto significativo para os alunos e que também precisa de métodos e recursos didático para contemplar as relações entre professor, aluno e saber frente a um determinado meio. Com isso, elucidamos a seguir, um instrumento didático escolhido para compor junto da TSD a base para esta pesquisa, que foi a sequência didática.

1.2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A respeito da Sequência Didática (SD), enfatizamos a seguir sua origem, assim como, o surgimento das discussões sobre este “instrumento didático” no Brasil, as definições de teóricos da área como Zabala (1998), Pais (2008) e Cabral (2017). Além de citar a algumas distinções que são feitas com relação à sua utilização a exemplo da abordagem de cunho teórico e outra de cunho pedagógico.

Nesse sentido, de acordo com os estudos de Cabral (2017) e Nunes e Nunes (2019), as Sequências Didáticas surgem no cenário nacional a partir das pesquisas desenvolvidas polo grupo de Genebra frente às ações de diversos pesquisadores, como Jean - Paul Bronckart, Bernard Schneuwly, Joaquim Dolz, A. Pasquier, Sylvie Hallerforam, com isso foram introduzidas nos anos de 1980, na formação dos Liceus profissionais. Além disso, foram difundidas em diversos países, mas especialmente na França elas tiveram um maior destaque.

Assim as investigações produzidas por este grupo possuíam direcionamento para aprendizagem da língua francesa no sentido de minimizar as dificuldades recorrentes da produção da língua escrita. Teoricamente, sob os pressupostos do Interacionismo Sócio-Discursivo (ISD). Ou seja, as Sequências Didáticas, foram inicialmente trabalhadas diante da língua materna, para posteriormente se estender a outras áreas. (CABRAL, 2017, p. 32).

Segundo o autor supracitado, o assunto chegou ao Brasil a partir da década de 90, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) como "projetos" e "atividades sequenciadas". Assim como na França, foi desenvolvida primeiramente no âmbito da linguística e posteriormente estendeu-se a outras áreas da ciência, como por exemplo a Matemática.

Com isso, ao compreender sua origem com influência significativamente francesa, assim como, o surgimento das primeiras discussões no Brasil. Apresentamos a seguir definições por meio de teóricos que a discutem, afim de entender sua composição e de que forma elas podem ser estruturadas. Dentre os quais, ressaltamos as concepções de Pais, Cabral e Zabala respectivamente.

Na concepção de Pais (2008), a SD é desenvolvida a partir da seguinte definição:

> É formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. Essas aulas são também denominadas de seções, tendo em vista seu caráter específico para pesquisa. [...] é preciso estar atento ao maior número possível de informações que podem contribuir para o desvelamento do fenômeno investigado. (PAIS, 2008, p. 102)

Para Cabral (2017) o termo "Sequência Didática" voltado para processo de ensino e de aprendizagem de conteúdos matemáticos, foi definido da seguinte forma:

> Um conjunto articulado de dispositivos comunicacionais de natureza escrita ou oral que sistematiza as intervenções de ensino com a intencionalidade objetiva de estimular a aprendizagem de algum conteúdo disciplinar de Matemática a partir da percepção de regularidades e do estabelecimento de

> generalizações adotando-se uma dinâmica de interações empírico-intuitivas. (CABRAL, 2017, p. 13)

Além desta, também elucidamos a concepção de Zabala. Visto que sequência didática foi definida por este autor como sendo “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”. (ZABALA, 1998, p.18).

De acordo com o mesmo autor, as sequências didáticas são divididas nas seguintes fases:

> a) Atividade motivadora relacionada com uma situação conflitante da realidade experiencial dos alunos. b) Explicação das perguntas ou problemas que esta situação coloca. c) Respostas intuitivas ou "hipóteses". d) Seleção e esboço das fontes de informação e planejamento da investigação. e) Coleta, seleção e classificação dos dados. f) Generalização das conclusões tiradas. g) Expressão e comunicação. (ZABALA, 1998, p.55)

Além disso, o autor expõe uma série de etapas que compõem os modelos de sequências com referências às áreas mais procedimentais como é o caso da Matemática, pautado nas seguintes etapas: apresentação de situação problemática; busca de soluções; exposição do conceito e algoritmo; generalização; aplicação; exercitação; prova ou exame e avaliação. (ZABALA, 1998, p.60)

A partir das definições e do entendimento das etapas que as compõem, ressaltamos que é importante se planejar para utilizá-las. Visto que devem ser levadas em consideração as relações professor e aluno, aluno e aluno, aluno e conhecimento. Assim como, tempo e espaço a ser utilizado, organização dos recursos didáticos e a avaliação dos discentes diante do processo.

Além disso, os objetivos traçados também devem estar claros tanto para o professor, quanto para os alunos. Deve também, ser visto como um instrumento de reflexão sobre a prática docente através da observação do seu processo de desenvolvimento e interação entre todos os envolvidos.

No mais, vale ressaltar que a SD possui uma classificação, em duas grandes dimensões, são elas *estrito senso* e *lato senso*. A primeira, refere-se ao cunho teórico que foi difundida na França e na Espanha. A segunda, refere-se ao cunho pedagógico, a qual Brousseau (2006) denomina de modelo didático espontâneo, possui um direcionamento tanto para sala de aula, quanto para o enfoque de pesquisas científicas. (NUNES e NUNES, 2019, p. 151)

Por fim, elucidamos que a partir da leitura das obras dos autores citados pode-se perceber que a Didática da Matemática oferece uma gama de teorias que possibilitam a construção de Sequências Didáticas. Como a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau, a Dialética-Ferramenta-Objeto de Regine Douady, o Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval, a Teoria Antropológica do Didático (TAD), a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

Embora existam todas estas possibilidades de correlações, optamos nesta pesquisa por construir a SD com base nas Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC) com fundamentação da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau.

As discussões estabelecidas no texto supradito foram de fundamental importância para a compreensão macro do que é este instrumento didático. Assim como, possibilitaram a compreensão e necessidades de correlações com outras teorias como é o caso da UARC para sua construção e posterior utilização em sala de aula.

1.3. UNIDADE ARTICULÁVEL DE RECONSTRUÇÃO CONCEITUAL - UARC

Esta teoria surge de uma motivação do próprio autor, Cabral (2017), enquanto docente do curso de licenciatura, assim como, de sua trajetória profissional percorrida como docente da educação básica, ao longo de anos de labor. Com isso, houve a necessidade desenvolver uma possibilidade alternativa para o exercício docente, uma prática pautada num discurso dialógico promotor de interações verbais reflexivas afim de gerar condições para os alunos explorarem regularidades, mesmo que intuitivamente, pudessem perceber a necessidade do estabelecimento de generalizações.

Com este formato de abordagem do conteúdo o aluno sai da posição de receptor do conhecimento, enquanto sujeito que apenas tem o papel de repetir um processo, sem por vezes ter a compreensão do motivo pelo qual está ocorrendo. Passa então a exercer um novo papel em sala de aula, o de investigar a partir de seus conhecimentos a situações propostas para se construir com a medicação do professor o conhecimento novo.

Com isso, Cabral (2017), propõem um construto teórico voltado para a reconstrução de conceitos durante as aulas de Matemática. O qual, denominou de Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC) consolidado a partir de uma série de categorias de Intervenções Estruturantes. Tal construto é utilizado com referência para a elaboração de Sequências Didáticas.

Para reconstruir um conceito, o autor da teoria, propõe que o professor crie a primeira destas unidades, denominada de Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual de primeira geração (UARC–1) que serve como ponto de partida e não necessariamente deve ser iniciada com um problema, ela é também denominada de primeira escolha.

Após, deve ter uma outra unidade vinculada com a primeira denominada de Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual de segunda geração (UARC–2). O mesmo critério é adotado para as demais gerações e a medida em que as UARC's são trabalhadas o conceito tende a ser reconstruído. Ou seja, a cada uma delas faz com que o conceito se potencialize de tal modo que na última, a reconstrução é atingida. Assim, Cabral (2017), propõem seis categorias estruturantes que materializam o texto de uma Sequência Didática.

As intervenções propostas pelo autor, estão elucidadas da seguinte maneira: Intervenção Inicial (I_i), Intervenção Reflexiva (I_r), Intervenção Exploratória (I_e), Intervenção Formalizante (I_f), Intervenção Avaliativa Restrita (IA_r) e Intervenção Avaliativa Aplicativa (IA_a). As quais, apresentamos uma breve descrição a seguir a partir das concepções evidenciadas pelo autor.

A Intervenção Inicial (I_i), é a primeira peça do jogo na esfera do discurso dialógico-didático, onde o professor estimula os alunos a partir de uma verdade do pensamento matemático a perceber de maneira empírico-intuitiva as regularidades do conceito que articuladas as outras percepções pode exercer um papel facilitador na reconstrução conceitual pretendida.

A Intervenção Reflexiva (I_r), se materializa por meio de um questionamento, o qual, refere-se a um ou mais aspectos relacionados ao conceito objeto de reconstrução. Onde o aluno é estimulado a refletir sobre o fazer e suas consequências, ou seja, o aluno é levado a levantar hipóteses, fazer conjecturas, verificar possibilidades e estabelecer consequências.

Intervenção Exploratória (I_e), tem por objetivo aprofundar o olhar dos alunos a respeito das respostas obtidas pela (I_r). Elas serão trabalhadas a partir da solicitação do professor aos alunos para executarem os procedimentos, com isso, eles fazem simulações, experimentações, descrições e observações. Esta intervenção juntamente com a anterior possuem um papel fundamental, de acordo com o autor, para a percepção de regularidades no processo de reconstrução conceitual.

A partir das generalizações desenvolvidas nas intervenções anteriores, o professor que orienta o pensamento mediado pela sequência didática se apropria das verdades empírico-intuitivas para enunciar a Intervenção Formalizante (I_f). A qual, possui por objetivo reelaborar as verdades redescobertas pelos alunos e consolidá-las em uma linguagem mais abstrata como um saber disciplinar formal, axiomático próprio da natureza da Matemática.

Após este momento, o professor pode fazer as Intervenções Avaliativas Restritas (IA_r) com um intuito de estabelecer uma primeira aferição de aprendizagem do conceito objeto de reconstrução. Nela, os alunos irão justificar os procedimentos adotados com base nas verdades empírico-intuitivas estabelecidas nas reconstruções conceituais. Ela analisa a aprendizagem com dois enfoques, o primeiro conceitual (significado e o sentido do objeto matemático estudado) e o segundo para justificar os algoritmos (propriedades e operações).

Por fim, as Intervenções Avaliativas Aplicativas (IA_a) buscam a partir da resolução de problemas de aplicação mobilizar as noções conceituais associadas às propriedades operacionais decorrentes de diversos contextos. Entre os quais, são evidenciados contextos reais e/ou abstratos, desde que estejam adequados aos níveis de ensino trabalhados.

Estas Intervenções Estruturantes são divididas em pré-formal (Intervenção Inicial (I_i), Intervenção Reflexiva (I_r), Intervenção Exploratória (I_e)), formal com a Intervenção Formalizante (I_f) e pós-formal (Intervenção Avaliativa Restrita (IA_r) e Intervenção Avaliativa Aplicativa (IA_a).

Neste sentido, destacamos a afirmativa feita pelo autor, de que as Intervenções Estruturantes consolidam o texto de uma Sequência didática para o ensino de conteúdos matemáticos. A qual, é desenvolvida inicialmente por meio de duas modalidades da Intervenção Inicial, denominadas de “Exploração Potencial” e “Conexão Pontual”, assim como, as demais Intervenções Estruturantes materializam a SD escrita.

Associada a elas também foi destacado um tipo oculto de intervenção, denominada de Intervenções Orais de Manutenção Objetiva (IOMO) que sustenta o discurso do professor ao longo do processo de ensino e aprendizagem e lhe permite direcionar os alunos para a reconstrução conceitual.

Neste sentido, o autor descreve a primeira modalidade de Intervenção Inicial, Exploração Potencial, como sendo o início de uma Sequência Didática motivada por meio da apresentação de um jogo, uma situação-problema, um quebra-cabeça, um desafio de natureza aritmética, algébrica ou geométrica ou ainda de natureza híbrida. Ela permite ao professor:

> [...] desencadear, a partir de diversos questionamentos aos alunos, uma série de procedimentos investigativos, simulações, conjecturas, hipóteses, analogias, empirias, que são procedimentos típicos de construção do saber matemático. [...] Quanto mais ricas forem essas possibilidades, maior será o “potencial” exploratório da Intervenção Inicial adotada. (CABRAL, 2017, p. 46)

A segunda modalidade de Intervenção Inicial, Conexão Pontual, é apresentada a partir de um comando dado ao aluno que é estimulado a desenvolver um procedimento a partir de seu conhecimento prévio. Este procedimento não necessariamente tem uma relação direta com o seu objeto conceitual em processo de reconstrução. Assim, o autor caracteriza esta modalidade da seguir forma:

> Em termos gerais a partir dessa Intervenção Inicial concebida na modalidade “ Conexão Pontual ” [Ii – CP] que será adotado pelo professor um conjunto finito de comandos procedimentais pontuais como os elos interligados de uma corrente. Cada procedimento operacional solicitado ao aluno deve estar irremediavelmente ligado ao procedimento anterior. A conexão de n procedimentos pontuais cria, em tese, condições para a percepção de regularidades e do estabelecimento de generalizações empírico - intuitivas fundamentais no processo de aprendizagem do pensamento matemático. (CABRAL, 2017, p. 61)

Além disso, foram criadas categorias que evidenciam as potencialidades da Intervenção Inicial, que são todas as outras intervenções mencionadas anteriormente. Este conjunto de intervenções que potencializam a intervenção inicial foi denominado de “Intervenções Auxiliares” e todas elas compõem o texto da Sequência Didática. Para além destas seis intervenções, foi criada uma sétima de nominada de IOMO, cujo objetivo é manter a objetividade planejada, ela funciona ainda como uma espécie de Sequência Didática implícita.

A respeito da IOMO, Cabral (2017) às enfatiza com sendo dotada de uma natureza caótica com relação a dois aspectos. O primeiro, gira em torno da frequência, uma vez que pode acontecer em qualquer momento da aplicação da Sequência Didática. O segundo, está associado com a intensidade, ou seja, ao nível de aprofundamento, assim como, o nível de envolvimento dos alunos com o objeto estudado.

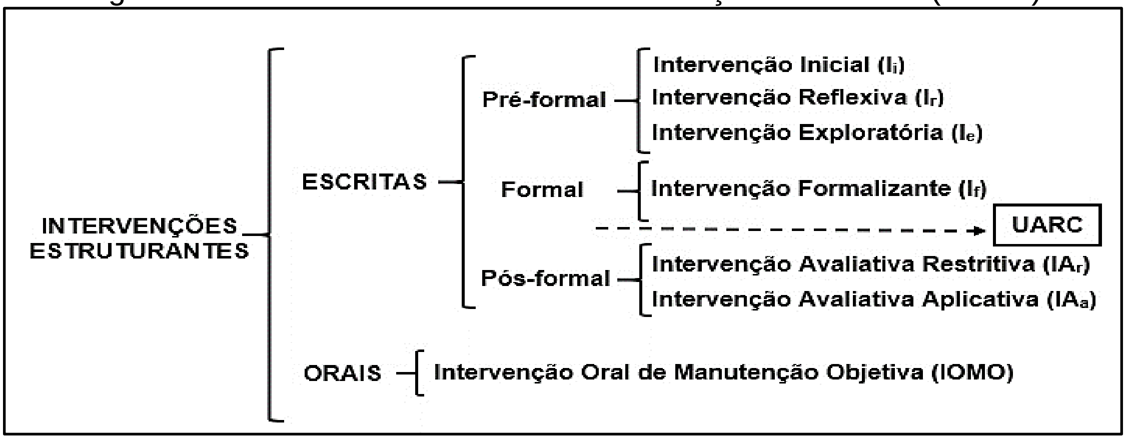
Além disso, os contornos das ações dos alunos em relação às intervenções estruturantes da Sequência Didática dirigida pelo professor ocorrem por meio destas intervenções orais de manutenção objetivas e são caracterizados de acordo o a sua frequência de utilização pelas Zonas de Tensão Discursivas (Alfa, Beta e Gama).

A primeira Zona de Tensão Discursiva, denominada de Alfa, se caracteriza pelas “primeiras articulações argumentativas propostas em direção aos objetos de aprendizagem”. Elas tendem a serem mais acionadas, visto que quanto menor domínio sobre os objetos, maior será o direcionamento do professor por meio das intervenções.

A segunda, denominada de Beta, está associada a uma zona de tenção discursiva menos intensa. Visto que os alunos apresentam uma maior autonomia diante do objeto. Por sua vez, a Gama, tende a avaliar os alunos por meio de indagações e questionamentos e situações mais complexas, afim de verificar se o objeto foi de fato aprendido por eles.

Neste sentido, para ilustrar as definições que compõem as UARC’s, assim como, os demais elementos do construto teórico de Cabral (2017) expomos a figura 02 seguir que foi apresentada pelo autor e sintetiza todas as suas etapas.

Figura 02: Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC)



Fonte: Cabral, 2017, p. 97.

Diante da figura supracitada, vale ressaltar que uma UARC é composta pelas quatro primeiras intervenções, ou seja, pelas etapas pré-formal e a formal, como se pode facilmente perceber pela figura. Dessa forma, apresento a seguir a definição proposta pelo autor sobre a UARC.

> É justamente na consolidação das Intervenções Formais que as UARC's têm o seu ciclo completado. Cada UARC é, portanto, definida pelo conjunto de argumentações empírico-intuitivas construído por todas as Intervenções Estruturantes pré-formais que antecedem e inclui alguma Intervenção Formalizante. (CABRAL, 2017, p. 59)

Portanto, a UARC foi abordada enquanto construto teórico que vai subsidiar a construção da Sequência Didática deste produto. Visto que, a partir dela, foram construídas as UARCs (atividades da sequência didática), que serviram de roteiro para os alunos para a reconstrução das identidades dos produtos notáveis. Associada a ela utilizamos também os materiais manipuláveis (como uma forma de Exploração Potencial) enquanto instrumento facilitador para o estudo do objeto estudado.

1.4. MATERIAIS DIDÁTICOS MANIPULÁVEIS

A partir desta derivação de ensino, destacamos a utilização dos materiais didáticos manipuláveis. Materiais estes que de acordo com o estudo de Fiorentini e Miorim (1990), tiveram suas primeiras abordagens e utilidades nas propostas de Pestalozzi (1746-1827) e de seu seguidor Froebel (1782-1852), ao instituírem um currículo em que nas atividades propostas, os alunos deveriam trabalhar com o uso de materiais manipuláveis, onde as descrições deveriam preceder as definições de modo que o conceito nasce da experiência direta com os objetos.

Assim como, em Mentessori (1871-1832), que desenvolveu diversos materiais manipulativeis para trabalhar com crianças com deficiência, que após compreender seu forte apelo visual e tátil estende sua utilização para os alunos do ensino regular. Entre seus materiais, destacamos: "material dourado", "triângulos construtores" e "cubos para composição e decomposição de binômios e trinômios".

Castelnouvo (1970), compreende que o material manipulável deve ter uma dupla finalidade: "exercitar as faculdades sintéticas e analíticas da criança", sintética, afim de que o aluno construa um conceito a partir do concreto e analítica, pois a criança compreender o objeto para constituir a globalização.

Com isso, a partir dos teóricos citados nota-se que a utilização dos materiais manipuláveis vem favorecendo desde séculos passados até os dias atuais o processo de ensino e aprendizagem em Matemática. Assim, de acordo com Lorenzato (2006), o surgimento das discussões em torno destes materias no Brasil ocorreu na década de 90. Especificamente sobre a influência de nomes como Julio Cesar de Mello e Souza em 1957 com a obra “Técnicas e procedimentos didáticos no ensino de matemática”. Assim como, com Manoel Jairo Bezerra com a obra intitulada por: “O material didático no ensino de matemática”.

Neste sentido, para Bittar e Freitas (2005) o material didático deve ser interpretado como um instrumento facilitador da aprendizagem. Porém, “não se trata de um instrumento mágico com o qual tudo poderá ser entendido e assimilado pelo aluno”. Ou seja, é necessário que o professor tenha um papel de mediador para que estes materiais sejam utilizados de forma crítica pelos alunos.

Além das assertivas dos autores supracitados, Lorenzato (2006), define os materiais didáticos como “qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem. Portanto, pode ser um giz, uma calculadora, um quebra-cabeça, um jogo...”.

Por sua vez, os Materiais Didáticos Manipuláveis, de acordo com o mesmo autor, podem ser classificados em estáticos e dinâmicos a partir de sua composição e forma com que é utilizado. Por um lado, os estáticos são assim denominados por não possuírem modificações em suas formas e por vezes possibilitam apenas a visualização, como é o caso dos sólidos geométricos em madeira. Porém, existem outros que possibilitam uma maior participação dos alunos, como é o caso do ábaco, material dourado, entre outros.

Por outro lado, os dinâmicos, são materiais que permitem transformações por continuidade. Com isso, facilitam as redescoberta por parte dos alunos, assim como, auxiliam na percepção de propriedades e a construção de uma efetiva aprendizagem. Vale ressaltar que um material estático pode ser transformado em dinâmico, desde que sejam feitas as devidas alterações.

A partir da compreensão do surgimento, assim como, de sua definição, Sarmento (2010) evidencia uma série de vantagens para a aprendizagem das crianças com utilização dos materiais manipulativos, das quais: a) Propicia um ambiente favorável à aprendizagem, pois desperta a curiosidade das crianças e aproveita seu potencial lúdico; b) Possibilita o desenvolvimento da percepção dos alunos por meio das interações realizadas com os colegas e com o professor; c) Contribui com a descoberta (redescoberta) das relações matemáticas subjacente em cada material; d) É motivador, pois dar um sentido para o ensino da matemática. O conteúdo passa a ter um significado especial; e) Facilita a internalização das relações percebidas.

Dessa forma, o mesmo autor propõe uma sequência de ensino com base na manipulação de recursos materiais, dispostas da seguinte forma: a) Inicialmente os alunos manuseiam livremente os objetos concretos. Nesta etapa pretende-se aproximar os estudantes dos materiais que serão utilizados, é um momento de exploração, visualização e reconhecimento; b) São realizadas as ações programadas visando à obtenção das relações qualitativas e/ou quantitativas preditas nos objetivos; c) Por meio das interações aluno-objeto-conteúdo-professor buscar a interiorização das relações percebidas na fase anterior; d) Aquisição e formulação do conceito buscando relacionar com os conceitos anteriores e aplicando-os em outras situações.

Diante do exposto, fica evidente a relevância que estes materiais têm sobre o processo de ensino e aprendizagem em Matemática. Porém, eles devem ser pensados com antecedência pelo professor para que o trabalho com os alunos seja bem direcionado e extrapole a ilustração dos conceitos apenas e passe a ser utilizado como um instrumento de redescoberta.

Neste sentido, a definição de Materiais Didáticos Manipuláveis Dinâmicos impulsionou a construção de um kit para esta pesquisa para abordar os produtos notáveis. O qual, estimula juntamente com o texto da sequência didática e o processo dialógico professor a construção pelos alunos das identidades que compõem o conteúdo.

Diante desta fundamentação, acerca das teorias que subsidiaram a elaboração da sequência didática, bem como, a construção deste produto. Ressaltamos que foram mencionadas em Lima (2022) como metodologias de interpretação dos dados gerados pela aplicação da sequência didática com os alunos, a Análise Microgenética e a Análise do Discurso. Entretanto, devido as circunstâncias educacionais e sociais ocasionadas pela pandemia da COVID-19, houve um redirecionamento da aplicação, bem como da validação do constructo com um grupo de professores por meio de um questionário. Com o qual, confirmamos que a sequência elaborada tem potencial para ser utilizada no processo de ensino e aprendizagem dos produtos notáveis.

Neste sentido, apresentamos a seguir a sequência didática a ser utilizada pelos alunos, bem como, esboçamos em seguida orientações para utilização e etapas construtivas a serem desenvolvidas para se alcançar os objetivos desejados por cada atividade.

2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA: VERSÃO DO ALUNO

2.1. UARC-1

Objetivo: Identificar a relação existente entre o quadrado da soma de dois termos e a soma do quadrado do primeiro termo, com o dobro do produto entre o primeiro e o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

Material: Papel, lápis ou caneta, borracha e material didático manipulável (Kit Geométrico), régua graduada e o roteiro da atividade.

Procedimento:
[I_I – EP] Com uso do material do kit Geométrico, construa um quadrado de acordo com as recomendações fornecidas. Num segundo momento determine a área do quadrado. Para isso, responda as seguintes perguntas.

[I_R – 01] Que tipo de figuras planas podem ser identificadas no conjunto de peças fornecidas?

[I_E – 02] Determine as dimensões (Largura e Comprimento) e as áreas correspondentes de cada uma das figuras identificadas.

[I_E – 03] Represente por meio de letras as dimensões de cada uma das peças (verde-laranja-azul), tendo em vista as medidas obtidas. Num segundo momento, calcule a área de cada uma das figuras utilizando as letras atribuídas.

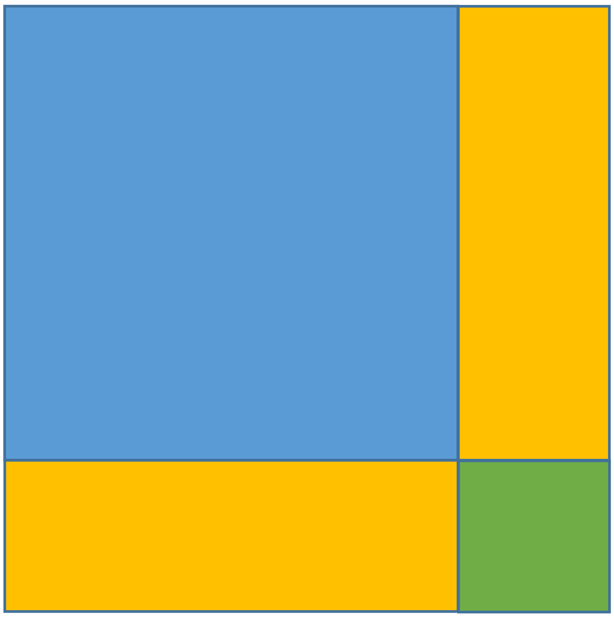
[I_E – 04] Faça uma composição utilizando todas as peças fornecidas de modo a obter uma das figuras planas identificadas anteriormente. Num segundo momento, identifique as dimensões e calcule a área da figura construída.

[I_E – 05] Estabeleça uma relação entre a área da figura formada e as anteriores.

[I_F] Dados a e b, com a e b ∈ $\mathbb{Q}$

Representação algébrica / geométrica:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{a}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^{2} \text{ ou } \boldsymbol{a}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^{2} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\mathbf{2}}$$



Representação na Língua Materna:

O quadrado da soma de dois termos é numericamente igual a soma do quadrado do primeiro termo, com o dobro do produto entre o primeiro e o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

[I_{AR}] Utilize a definição acima para completar os itens abaixo.

a) $(x + y)^2 =$

b) $(x + 3)^2 =$

c) $(5x + y)^2 =$

d) $m^2 + 2.m.n + n^2 =$

2.2. UARC 2

Objetivo: Identificar a relação existente entre o cubo da soma de dois termos e a soma do cubo do primeiro termo, com o triplo do produto do quadrado do primeiro com o segundo termo, mais o triplo do produto do primeiro com o quadrado do segundo termo, mais o cubo do segundo termo.

Material: Papel, lápis ou caneta, borracha e material didático manipulável (Kit Geométrico), régua graduada e o roteiro da atividade

Procedimentos:
[I_I – EP] Com uso do material do kit Geométrico, construa um cubo de acordo com as recomendações fornecidas. Num segundo momento determine o seu volume. Para isso, responda as seguintes perguntas.

[I_R – 01] Que tipos de sólidos geométricos podem ser identificados no conjunto de peças fornecidas?

[I_R – 02] Determine as dimensões (Largura, Comprimento e Altura) e os volumes correspondentes de cada um dos sólidos identificados.

[I_R – 03] Represente por meio de letras as dimensões de cada uma das peças, tendo em vista as medidas obtidas. Num segundo momento, calcule o volume de cada um dos sólidos utilizando as letras atribuídas.

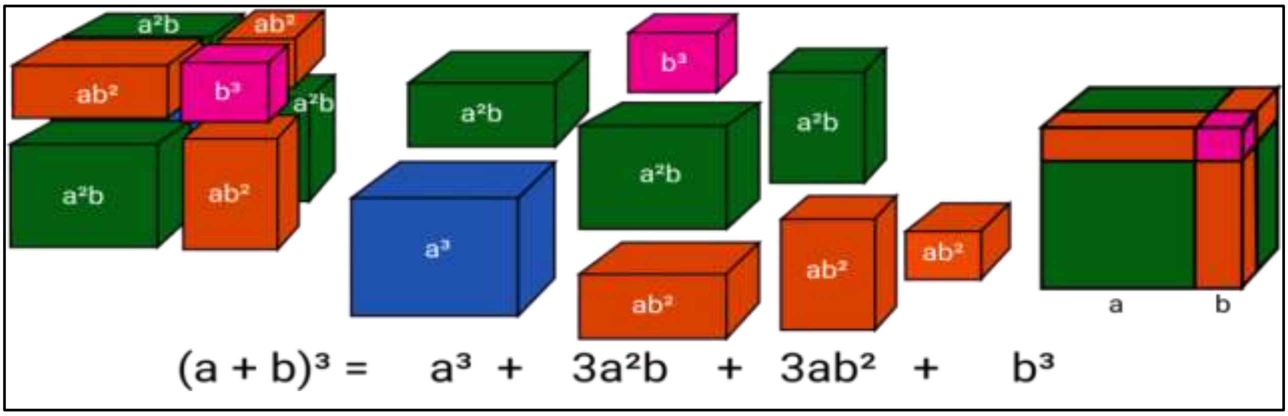
[I_R – 04] Faça uma composição utilizando todas as peças fornecidas de modo a obter um dos sólidos geométricos identificados anteriormente. Num segundo momento, identifique as dimensões e calcule o volume do sólido construído.

[I_R – 05] Estabeleça uma relação entre o volume do sólido formado e os anteriores.

[I_F] Dados a e b, com a e b ∈ ℚ.

Representação algébrica / geométrica:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{3} = \boldsymbol{a}^{3} + 3\,\boldsymbol{a}^{2}\boldsymbol{b} + 3\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}^{2} + \boldsymbol{b}^{3} \text{ ou } \boldsymbol{a}^{3} + 3\,\boldsymbol{a}^{2}\boldsymbol{b} + 3\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}^{2} + \boldsymbol{b}^{3} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{3}$$



Representação na Língua Materna:

O cubo da soma de dois termos é numericamente igual a soma do cubo do primeiro termo, com o triplo do produto do quadrado do primeiro com o segundo termo, mais o triplo do produto do primeiro com o quadrado do segundo termo, mais o cubo do segundo termo.

[I_{AR}] Utilize a definição acima para completar os itens abaixo.

a) $(x + y)^{3} =$

b) $(x + 1)^{3} =$

c) $(x + 5y)^{3} =$

d) $z^3 + 3.z^2.w + 3.z.w^2 + w^3$

2.3. UARC 3

Objetivo: Identificar a relação existente entre o produto da soma e da diferença de dois termos com a diferença entre o quadrado do primeiro termo com o quadrado do segundo termo.

Material: Papel, lápis ou caneta, borracha e material didático manipulável (Kit Geométrico), régua graduada e o roteiro da atividade.

Procedimentos:
[I_R – 01] Que tipo de figuras planas podem ser identificadas no conjunto de peças fornecidas (azul e amarelo)?

[I_E – 02] Determine as dimensões (Largura e Comprimento) e as áreas correspondentes de cada uma das figuras identificadas.

[I_E – 03] Represente por meio de letras as dimensões de cada uma das peças, tendo em vista as medidas obtidas. Num segundo momento, calcule a área de cada uma das figuras utilizando as letras atribuídas.

[I_E – 04] Com o uso da tesoura, recorte um quadrado num dos cantos de uma das figuras de cor azul e calcule a área do quadrado obtido. Num segundo momento atribua letra as dimensões do quadrado recortado e calcule a área utilizando a letra atribuída.

[I_E – 05] Calcule a área da figura resultante, após a retirada do quadrado, a partir das áreas dos quadrados azuis anteriores, tanto numericamente quanto com as letras.

[I_E – 06] Repita o recorte nos cantos das peças de cor amarela com mesmas dimensões do quadrado azul recortado. Num segundo momento identifique as dimensões com as letras utilizadas inicialmente nas peças resultantes de cor amarela.

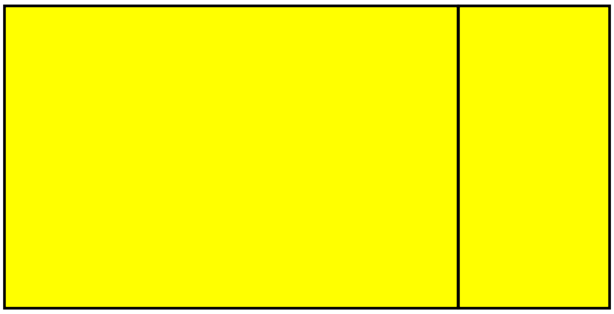
[I_E – 07] Faça apenas um recorte numa das peças amarelas resultantes de modo que as duas peças formem um retângulo. Num segundo momento, calcule a área desse novo retângulo, tanto numericamente quanto com uso das letras.

[I_E – 08] Estabeleça comparação, tanto numérica quanto com letras, entre a figura azul após a retirada do quadrado e a figura retângulo amarelo obtido após o recorte.

[IF] Dados a e b, com a e b ∈ $\mathbb{Q}$.

Representação algébrica / geométrica:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}-\boldsymbol{b}^{2} \textbf{ ou } \boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}-\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$



Representação na Língua Materna:
O produto entre a soma e a diferença de dois termos é numericamente igual a diferença entre o quadrado do primeiro termo com o quadrado do segundo termo.

[IAR] A partir do que foi trabalhado, complete as igualdades frente as seguintes alternativas.

a) (x + y) . (x – y) =

b) (x – 3) . (x + 3) =

c) (2 + y) . (2 – y) =

d) $m^2 - n^2$ =

2.4. UARC 4

Objetivo: Identificar a relação existente entre o quadrado da diferença de dois termos com a diferença do quadrado do primeiro termo e o dobro do produto entre o primeiro e o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

Material: Papel, lápis ou caneta, borracha e material didático manipulável (Kit Geométrico), régua graduada e o roteiro da atividade.

Procedimentos:
[I_I – EP] Com uso do material do kit Geométrico, construa um quadrado de acordo com as recomendações fornecidas. Num segundo momento determine a área deste quadrado. Para isso, responda as seguintes perguntas.

[I_R – 01] Que tipo de figuras planas podem ser identificadas no conjunto de peças fornecidas (azul e amarelo)?

[I_E – 02] Determine as dimensões (Largura e Comprimento) e as áreas correspondentes de cada uma das figuras identificadas.

[I_E – 03] Atribua letras aos lados dos quadrados de maior área e menor área.

[I_E – 04] Faça uma composição das figuras de modo a obter uma figura equivalente ao quadrado de maior área.

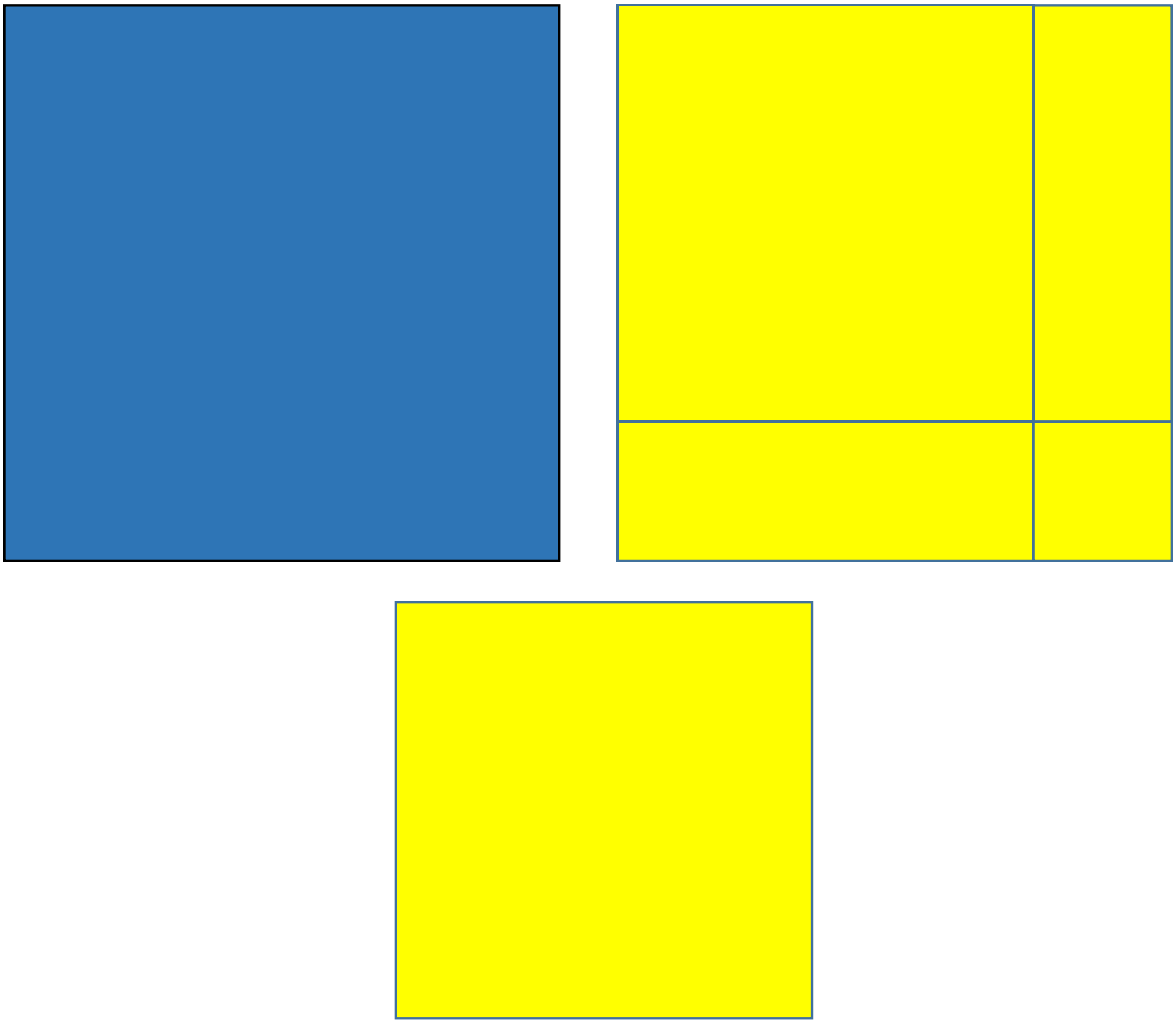
[I_E – 05] A partir das letras atribuídas acima, represente as dimensões das demais figuras e calcule suas respectivas áreas.

[I_E – 06] Como obter a área do quadrado intermediário a partir de retiradas de áreas do quadrado grande.

[I_E – 07] Represente algebricamente a situação anterior.

[IF] Dados a e b, com a e b ∈ ℚ.
Representação algébrica / geométrica:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2 \text{ ou } a^2 - 2\,a\,b + b^2 = (a - b)^2$$



Representação na Língua Materna:
O quadrado da diferença de dois termos é numericamente igual a diferença do quadrado do primeiro termo e o dobro do produto entre o primeiro e o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

[IAR] Utilize a definição acima para completar os itens abaixo.

a) $(x - y)^2 =$

b) $(x - 5y)^2 =$

c) $(x - 1)^2 =$

d) $a^2 - 2.a.b + b^2$

3. SEQUÊNCIA DIDÁTICA: VERSÃO DE ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Neste capítulo apresentamos orientações para o professor com relação a construção a ser realizada com os alunos ao longo de suas aulas frente as intervenções presentes em cada UARC que compõem a sequência didática apresentada anteriormente.

3.1. ORIENTAÇÕES INICIAIS

Conforme mencionado na apresentação deste produto, o professor antes de iniciar o processo de utilização da SD, deve ter convicção de que a turma possui os conhecimentos mínimos necessários. Visto que, uma das intencionalidades da SD é que os alunos façam a construção de um conhecimento novo, baseado em conhecimentos já adquiridos por eles. Dentre os quais, destacamos: operações com expressões algébricas (adição, subtração), potenciação (definição e propriedades), propriedade distributiva do produto em relação à adição e em relação à subtração (expressões algébricas envolvendo a multiplicação), área (quadrado e retângulo) e volume (paralelepípedo e cubo).

De posse deste entendimento, destacamos que a SD evidenciada foi pensada para ser aplicada com estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental II. Como dinâmica para realização das atividades, sugerimos que os alunos sejam divididos em grupos para que realizem as tarefas propostas de maneira coletiva e colaborativa com uso do material manipulável (os quais podem ser elaborados pelo professor com folhas de EVA e de Isopor) de modo que o professor promova momentos de socialização das conclusões dos grupos.

Estes momentos de discussões, são relevantes para o processo, ao considerarmos que a partir das diversas opiniões dos alunos, bem como, as colocações do professor com as Intervenções Orais de Manutenção Objetiva (I-OMO), busca-se chegar a um consenso do saber de modo que seja possível o professor fazer a formalização dos conceitos pretendidos para a respectiva atividade.

Sobre a I-OMO, conforme menciona Cabral (2017), destacamos como um recurso de improviso discursivo fundamental para que os conceitos sejam formalizados de maneira gradual, preenchendo lacunas de situações não previstas na elaboração da sequência. Embora muito importante, essa intervenção deve acontecer apenas quando necessário para resolver impasses que os alunos não consigam resolver entre si, preservando a autonomia do estudante e possibilitando futuras reformulações no texto utilizado que media a aprendizagem.

Em relação as intervenções presentes nas atividades, ressaltamos que a sequência didática na versão do aluno, apresenta propositalmente uma distribuição apenas das intervenções reflexivas e exploratórias nas primeiras páginas das UARC’s. Isto, para que o aluno não tenha contato direto com a intervenção formalizante e com as representações geométricas das identidades dos produtos notáveis a serem construídas. As quais, constam apenas nas páginas subsequentes, visto que neste momento o professor, com base no consenso de todos faz a formalização.

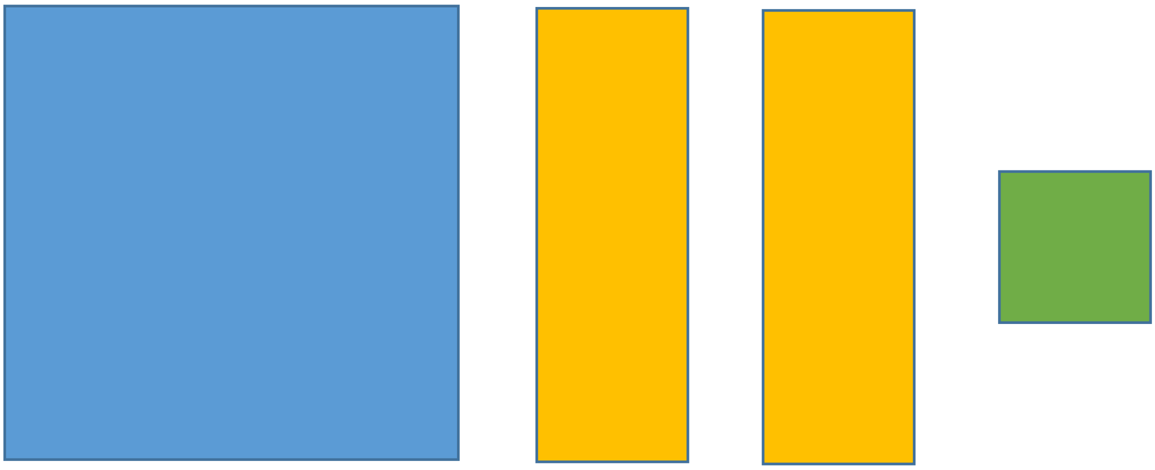
Ao final de todo o processo de construção do conhecimento de cada atividade da SD, são propostas intervenções avaliativas restritivas que nada mais são do que uma verificação de aprendizagem imediata com intenção de avaliar a apreensão do aluno sobre o conhecimento adquirido e assim poder corrigir algum erro conceitual. Bem como, consta na dissertação a avaliação aplicativa, com questões contextualizadas e desafios a serem resolvidos pelos alunos como forma de explorar ainda mais o conhecimento adquirido após a conclusão das 4 UARC’s presentes na sequência.

Neste sentido, apresentamos a seguir orientações referentes às quatro atividades que compõem a sequência didática. Afim de que o professor tenha uma compreensão ainda melhor dos processos de utilização do texto, bem como, dos materiais manipuláveis.

3.2. ORIENTAÇÕES PARA UARC-1

Esta atividade tem por objetivo identificar a relação existente entre o quadrado da soma de dois termos e a soma do quadrado do primeiro termo, com o dobro do produto entre o primeiro e o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo. Isto, com base na utilização do texto, do kit de material manipulável construído em EVA, bem com, dos demais materiais apontados.

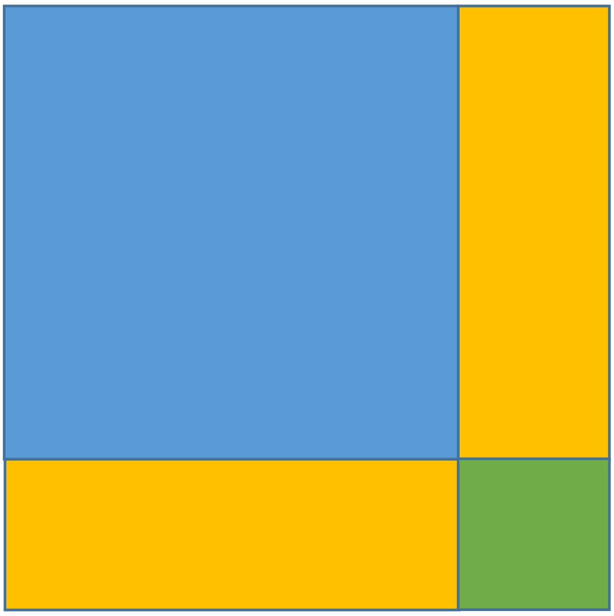
Desta maneira, no item de procedimento ressaltamos que deve ser construído um quadrado de acordo com as recomendações fornecidas pelas intervenções, sejam elas exploratórias ou reflexivas. Com este entendimento, o professor, entrega os kits aos grupos. Na intervenção inicial eles devem fazer o reconhecimento dos tipos figuras geométricas que compõem o kit. Conforme ilustrado a seguir:



Na intervenção exploratória 02, os grupos devem determinar numericamente com uso de régua as dimensões das figuras e áreas correspondentes de cada uma (por este motivo, indicamos que o material deve ser confeccionado com dimensões precisas pelos professores).

De posse dos resultados dos grupos, na intervenção seguinte, eles irão representar as dimensões encontradas, bem como, suas áreas por meio de letras. Neste momento, é de fundamental importância que o professor faça intervenções orais, se necessário para que os alunos identifiquem que o lado do quadrado azul é igual ao comprimento dos retângulos laranja (logo devem ser representados pela mesma letra), assim como, a largura dos retângulos laranja coincide com o lado do quadrado verde (por isso também devem ser representadas pela mesma letra).

Na intervenção 04, os grupos devem fazer uma composição de modo a construir de uma das figuras do kit (retângulo ou quadrado). Isto foi pensado intencionalmente para que os alunos reflitam sobre as possibilidades e cheguem às próprias conclusões (que só possível formar um outro quadrado com as peças, conforme indicado na figura a seguir). Como continuidade, eles devem identificar numericamente as dimensões formadas pelo novo quadrado e, a partir disso, devem realizar o cálculo da área total (obtida pelo produto entre os lados), em seguida devem utilizar as letras escolhidas na intervenção anterior e repetir o processo.



Na intervenção 05, os grupos devem realizar uma comparação e estabelecerem uma relação entre a área do novo quadrado (obtido na intervenção 04) com as figuras anteriores (obtidas na intervenção 03), para que percebam que a área do novo quadrado é igual a soma das quatro figuras. Com isso, esperamos que os alunos cheguem intuitivamente a uma pré-formalização que devem ser externalizadas na socialização dos grupos com a turma.

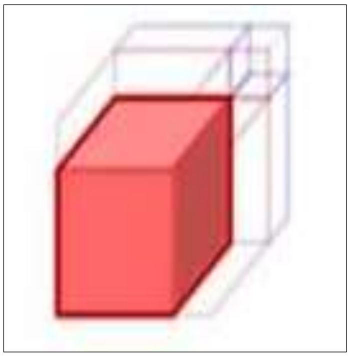
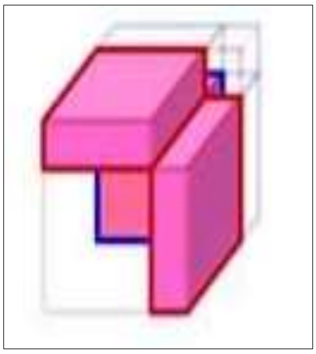
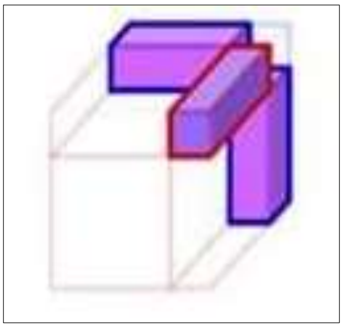
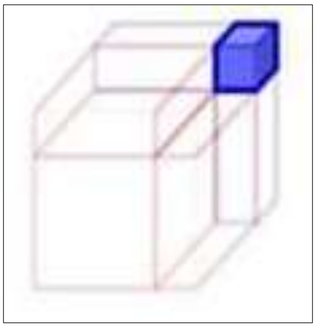
Após este momento o professor dever fazer a formalização, mostrando que a área do quadrado novo é pode ser representada por $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{2}}$ e que a soma das figuras pode ser expressa por $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{2}\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^{2}$ o que caracteriza portanto a igualdade $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{2}}=\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{2}\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{2}}$ vinculada a identidade do produto notável do quadrado da soma de dois termos. Além disso, deve mostrar que independente das letras adotadas pelos grupos a identidade sempre será a mesma. De posse da formalização do professor, os alunos devem virar a página para visualizarem as representações algébrica, geométrica e na língua materna e suas correlações com a identidade formada.

Por fim, para garantir que os conceitos foram devidamente compreendidos e que os alunos se apropriem das representações, propomos as avaliações restritivas com quatro alternativas de tal modo que foram indicadas diferentes letras e possibilidades de construções de respostas.

3.3. ORIENTAÇÕES PARA UARC-2

A segunda atividade teve por objetivo, identificar a relação existente entre o cubo da soma de dois termos e a soma do cubo do primeiro termo, com o triplo do produto do quadrado do primeiro com o segundo termo, mais o triplo do produto do primeiro com o quadrado do segundo termo, mais o cubo do segundo termo. Isto, com base na utilização do texto, do kit de material manipulável construído em isopor, bem com, dos demais materiais apontados.

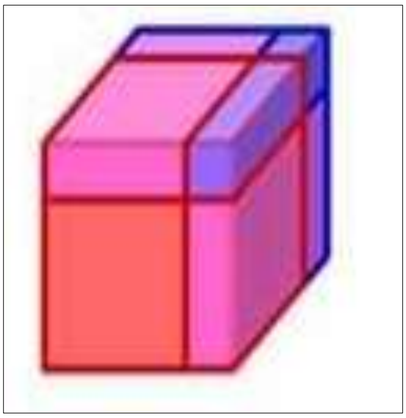
No item de procedimento, evidenciamos que deve ser construído um cubo de acordo com as recomendações fornecidas pelas intervenções, sejam elas exploratórias ou reflexivas. Com este entendimento, o professor, entrega os kits aos grupos. Na intervenção inicial eles devem fazer o reconhecimento dos tipos de sólidos geométricos que compõem o kit. Conforme apontamos de forma ilustrativa, a seguir:

Na intervenção exploratória 02, os grupos devem determinar numericamente com uso de régua as dimensões dos sólidos e os volumes correspondentes de cada um (por este motivo, indicamos que o material deve ser confeccionado com dimensões precisas).

De posse dos resultados dos grupos, na intervenção seguinte, eles irão representar as dimensões encontradas, bem como, os volumes dos sólidos por meio de letras. Neste momento, é de fundamental importância que o professor faça intervenções orais, se necessário para que os alunos identifiquem que a aresta do cubo vermelho é igual a ao comprimento e altura dos paralelepípedos rosa, bem como, ao comprimento dos paralelepípedos roxos (logo devem ser representados pela mesma letra). Assim como, a aresta do cubo azul é igual largura do paralelepípedo rosa, bem como, a largura e altura do paralelepípedo roxo (por isso também devem ser representadas pela mesma letra).

Na intervenção 04, os grupos devem fazer uma composição de modo a construir de um dos sólidos do kit (cubo ou paralelepípedo). Isto foi pensado intencionalmente para que os alunos reflitam sobre as possibilidades e cheguem às próprias conclusões (que só possível formar um outro cubo com as peças, conforme indicado na figura a seguir). Como continuidade, eles devem identificar numericamente as dimensões formadas pelo novo cubo e, a partir disso, devem realizar o cálculo do volume total (obtido pelo produto entre suas arestas), em seguida devem utilizar as letras escolhidas na intervenção anterior e repetir o processo.



Na intervenção 05, os grupos devem realizar uma comparação e estabelecerem uma relação entre a área do novo cubo (obtido na intervenção 04) com os sólidos (obtidas na intervenção 03), para que percebam que o volume do novo cubo é igual a soma de todos os sólidos. Com isso, esperamos que os alunos cheguem intuitivamente a uma pré-formalização que devem ser externalizadas na socialização dos grupos com a turma.

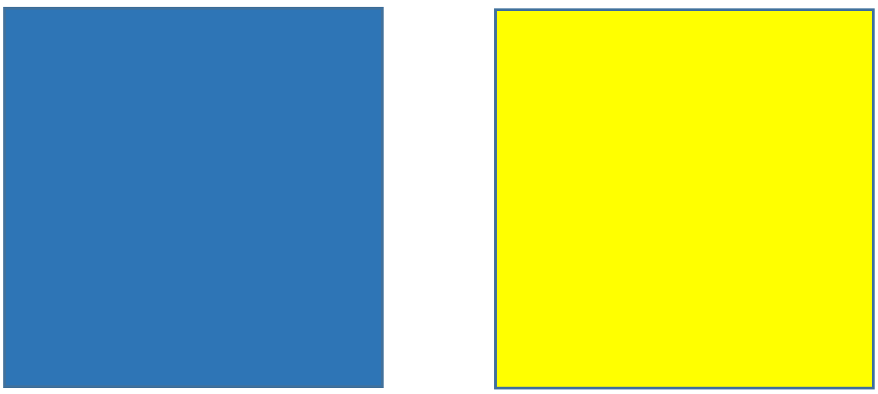
Após este momento o professor dever fazer a formalização, mostrado que o volume do cubo novo pode ser representado por $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\mathbf{3}}$ e que a soma dos demais sólidos pode ser expressa por $\boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}+\mathbf{3}\,\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{b}+\mathbf{3}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}^{2}+\boldsymbol{b}^{\mathbf{3}}$ o que caracteriza portanto a igualdade $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\mathbf{3}}=\boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}+\mathbf{3}\,\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{b}+\mathbf{3}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}^{2}+\boldsymbol{b}^{2}$ vinculada a identidade do produto notável do cubo da soma de dois termos. Além disso, deve mostrar que independente das letras adotadas pelos grupos a identidade sempre será a mesma. De posse da formalização do professor os alunos devem virar a página para visualizarem as representações algébrica, geométrica e na língua materna e suas correlações com a identidade formada.

Por fim, para garantir que os conceitos foram devidamente compreendidos e que os alunos se apropriem das representações, propomos as avaliações restritivas com quatro alternativas de tal modo que foram indicadas diferentes letras e possibilidades de construções de respostas.

3.4. ORIENTAÇÕES PARA UARC-3

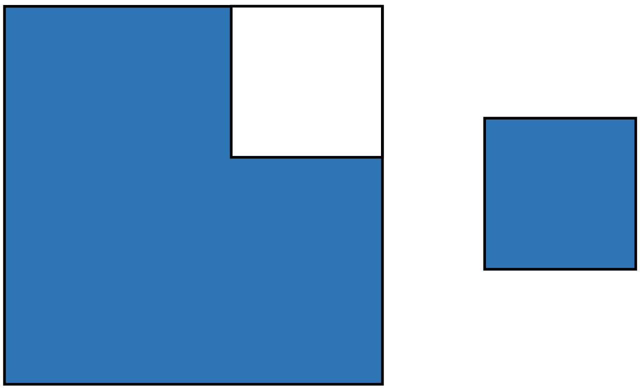
A terceira atividade teve por objetivo, identificar a relação existente entre o produto da soma e da diferença de dois termos com a diferença entre o quadrado do primeiro termo com o quadrado do segundo termo. Isto, com base na utilização do texto, do kit de material manipulável construído folhas de EVA, bem com, dos demais materiais apontados.

No item de procedimento, apontamos que deve ser construído um retângulo de acordo com as recomendações fornecidas pelas intervenções, sejam elas exploratórias ou reflexivas. Com este entendimento, o professor, entrega os kits aos grupos. Na intervenção inicial eles devem fazer o reconhecimento dos tipos de figuras geométricas que compõem o kit. Conforme apontamos de forma ilustrativa, a seguir:

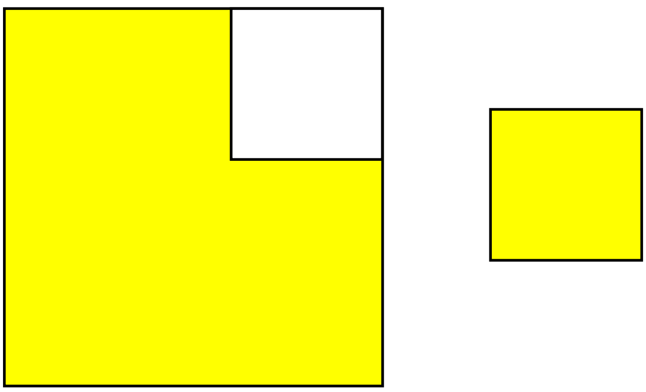


Na intervenção exploratória 02, os grupos devem determinar numericamente com uso de régua as dimensões das figuras e as áreas correspondentes de cada uma (por este motivo, indicamos que o material deve ser confeccionado com dimensões precisas). Cabe ressaltar que o professor deve ter ciência e comunicar aos alunos se necessário que embora os quadrados possuam cores diferentes, mas as dimensões são iguais.

Na terceira intervenção, os grupos devem representar por meio de letras as dimensões de cada uma das peças, em seguida devem realizar o cálculo das suas áreas com as letras adotadas (como as dimensões são iguais, as letras utilizadas para a área dos dois quadrados deve ser a mesma). Na intervenção seguinte, os grupos devem realizar com uso de uma tesoura o recorte de um quadrado num dos cantos de uma das figuras de cor azul e calcular numericamente a área obtida (devem utilizar a régua para medir os lados). Em seguida, precisam atribuir uma letra para o quadrado obtido e representar a sua área. Conforme representado na figura ilustrativa a seguir:

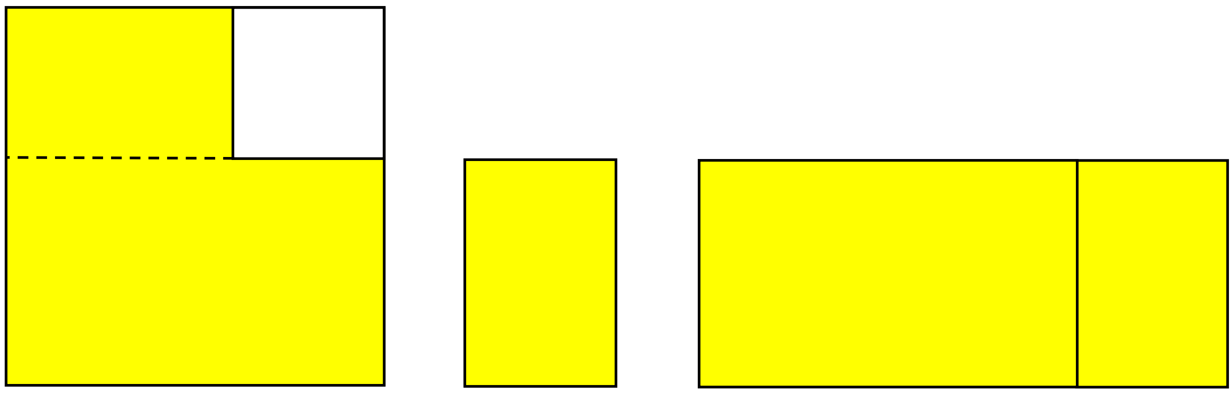


Na quinta intervenção, os grupos devem realizar o calcula da área da figura resultante, tanto numericamente, quanto com uso de letras. Desta forma, supondo que um dos grupos tenha considerado o lado do quadrado maior com a e o menor como b (logo sua área é b^2). Portanto, devem chegar para área da nova figura em $a^2 - b^2$. Na sexta intervenção, eles devem repedir o mesmo recorte num dos cantos da figura de cor amarela com as mesmas dimensões do quadrado azul obtido, após, devem identificar as dimensões dos lados com a letra escolhida para a peça de cor amarela.



Para exemplificar, consideremos que um grupo tenha utilizado a letra a para representar o quadrado azul inicial, o amarelo também deve possuir a mesma representação (já que ele tem as mesmas dimensões do quadrado azul). Assim como, dever ser adotado a mesma analogia para o quadrado recortado azul e o amarelo (portanto, podemos considerar como a letra b). Neste sentido, apontamos que eles chegariam na mesma relação apresentada anteriormente $a^2 - b^2$ para a nova figura. Ao identificarem as dimensões com letras, devem chegar às respostas: três lados representados por a e dois lados representados $a - b$. De tal modo que $a^2 - b^2$ da diferença dos quadrados azuis é igual a $a^2 - b^2$ da diferença dos quadrados amarelos.

Na sétima intervenção, os grupos devem realizar apenas um recorte numa das peças amarelas resultantes de modo que as duas formem um retângulo (neste sentido, ressaltamos que o professor pode intervir oralmente, se necessário para que os alunos identifiquem que a peça a ser recortada dever ser a peça que foi retirada o quadrado amarelo menor). Conforme ilustrado a seguir:



Com isso, devem calcular tanto numericamente quando por meio das letras atribuídas a área do retângulo. Neste sentido, ao considerarmos o grupo que adotou as letras a e b, ressaltamos que os alunos devem obter como como resposta: $b \,.\, (a - b)$. Onde b representa a largura e $(a - b)$ o comprimento do retângulo.

Na última intervenção, os grupos devem estabelecer uma relação tanto numérica quanto com uso das letras atribuídas entre a figura azul após a retirada do quadrado com a figura representada pelo retângulo amarelo após o recorte. O professor deve orientar os grupos que como a retirada dos quadrados menores possuem o mesmo tamanho, significa que a área azul é igual ao novo retângulo obtido. Portanto, resulta na identidade $a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$.

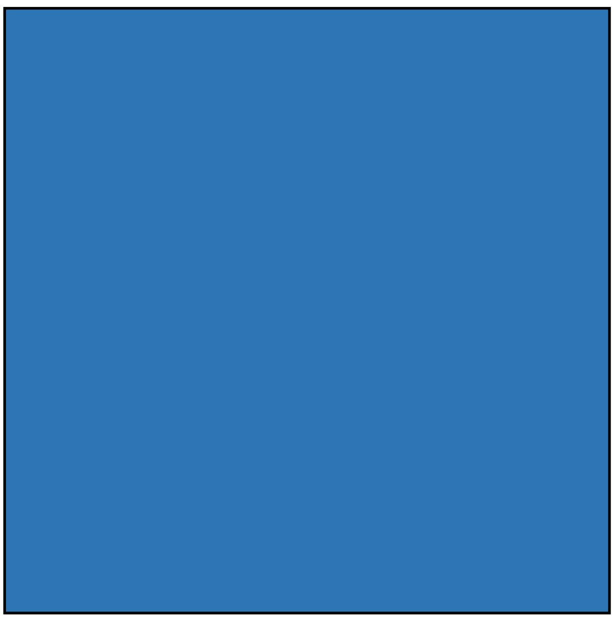
Após este momento o professor dever fazer a formalização, caracterizando de fato a identidade $a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$, vinculada ao produto da soma pela diferença de dois termos. Além disso, deve mostrar que independente das letras adotadas pelos grupos a identidade sempre será a mesma. De posse da formalização do professor, os alunos devem virar a página para visualizarem as representações algébrica, geométrica e na língua materna e suas correlações com a identidade formada.

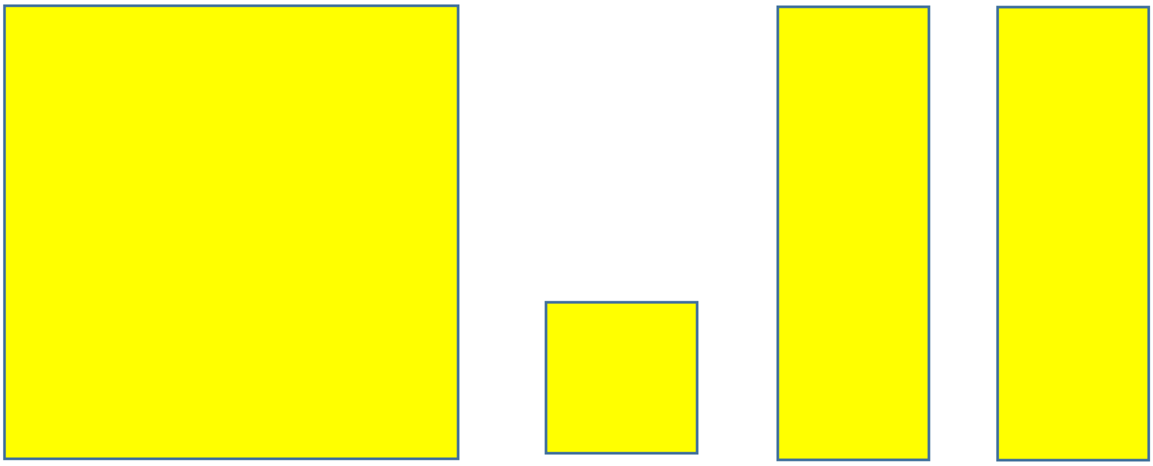
Por fim, para garantir que os conceitos foram devidamente compreendidos e que os alunos se apropriem das representações, propomos as avaliações restritivas com quatro alternativas de tal modo que foram indicadas diferentes letras e possibilidades de construções de respostas.

3.5. ORIENTAÇÕES PARA UARC-4

Esta atividade tem por identificar a relação existente entre o quadrado da diferença de dois termos com a diferença do quadrado do primeiro termo e o dobro do produto entre o primeiro e o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo. Isto, com base na utilização do texto, do kit de material manipulável construído em EVA, bem com, dos demais materiais apontados.

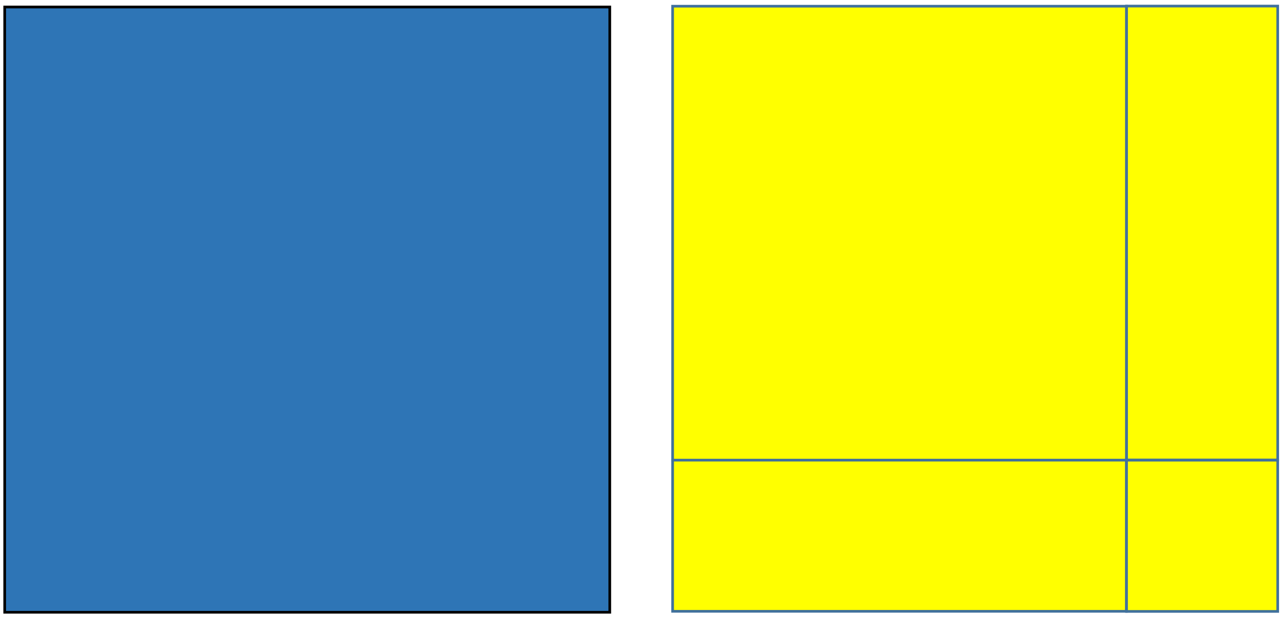
Desta maneira, no item de procedimento ressaltamos que deve ser construído um quadrado de acordo com as recomendações fornecidas pelas intervenções, sejam elas exploratórias ou reflexivas. Com este entendimento, o professor, entrega os kits aos grupos. Na intervenção inicial eles devem fazer o reconhecimento dos tipos figuras geométricas que compõem o kit. Conforme ilustrado a seguir:





Na intervenção exploratória 02, os grupos de alunos formados devem determinar numericamente com uso de régua as dimensões das figuras e áreas correspondentes de cada uma (por este motivo, indicamos que o material deve ser confeccionado com dimensões precisas).

De posse dos resultados, na intervenção seguinte, eles atribuir letras aos quadrados de menor e maior área. Na intervenção 4 eles devem realizar uma composição das figuras amarelas de modo a obter uma figura equivalente ao quadrado de maior área que é o azul. Com isso devem obter a composição ilustrada a seguir:



Na quinta intervenção, os alunos devem reconsiderar as letras atribuídas aos quadrados de menor e maior área na intervenção 03 e com isso representar as dimensões das demais figuras, bem como, realizar o cálculo de suas respectivas áreas. Na intervenção seguinte, eles devem ser direcionados pelo professor, ne necessário, sobre como podem obter a área do quadrado intermediário a partir da retirada de áreas do quadrado grande.

Portanto, ao considerarmos que um grupo utilizou a^2 para área do quadrado grande e b^2 para área do quadrado pequeno, subentende-se que o quadrado intermediário pode ser representado por $(a - b)^2$ e calculado como a^2 (como área do quadrado maior) $- a.b$ e $- a.b$ (retirada da área dos dois retângulos e $- b^2$ (retirada da área do quadrado pequeno). Com isso, esperamos que os alunos cheguem intuitivamente a uma pré-formalização que devem ser externalizadas na socialização dos grupos com a turma da identidade $(a - b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$.

Após este momento o professor dever fazer a formalização, mostrado que a área do quadrado novo é pode ser representada por $(a - b)^2$ é dada por $a^2 - 2\,a\,b + b^2$ vinculada a identidade do produto notável do quadrado da diferença de dois termos. Além disso, deve mostrar que independente das letras adotadas pelos grupos a identidade sempre será a mesma. De posse da formalização do professor os alunos devem virar a página para visualizarem as representações algébrica, geométrica e na língua materna e suas correlações com a identidade formada.

Com isto, para garantir que os conceitos foram devidamente compreendidos e que os alunos se apropriem das representações, propomos as avaliações restritivas com quatro alternativas de tal modo que foram indicadas diferentes letras e possibilidades de construções de respostas.

Por fim, ressaltamos que deve ser utilizada após a conclusão das construções referentes às quatro UARC's a avaliação aplicativa como possibilidade dos alunos aprofundem a compreensão do conteúdo por meio da resolução de questões contextualizadas, bem como, com questões desafiadoras, a exemplo da questão envolvendo o quadrado da soma de três termos (a qual os alunos devem mobilizar os conhecimentos adquiridos ao longo das UARC's para solucioná-la).

4. PRODUTOS NOTÁVEIS: UM TRATAMENTO MATEMÁTICO

Neste capítulo, abordamos um tratamento matemático sobre produtos notáveis, com o qual foi destacada inicialmente uma breve história dos produtos notáveis. Assim como, níveis de abordagens que perpassam desde os enfoques evidenciados pelos livros didáticos associado ao Ensino Fundamental II em sua relação com a Geometria, fatoração e completamento de quadrado a outros casos não usuais e inter-relações deste com outros conteúdos matemáticos.

Dos quais destacamos em âmbito do Ensino Médio (como é o caso do Binômio de Newton e Triangulo de Pascal). Além de correlações e aplicações deste conteúdo com tópicos do Ensino Superior como Cálculo (Limite, Derivada e Integral) e Análise Real (Limites de Sequências Numéricas).

Vale ressaltar que estas correlações foram estabelecidas, pois tivemos a pretensão de apresentar os produtos notáveis com maior aprofundamento para os professores no intuito de situá-lo e caracterizar as possibilidades de interligação a outros conteúdos ou mesmo evidenciá-lo de uma forma para além da apresentada pelos livros didáticos. Além de ter consolidado matematicamente a construção da sequência didática.

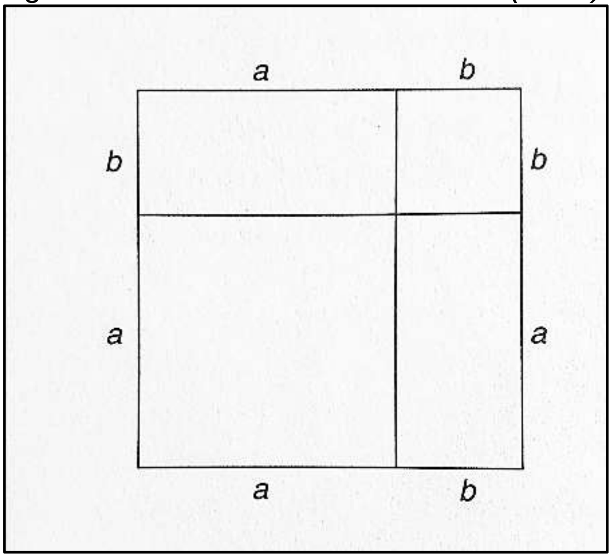
4.1. UMA BREVE HISTÓRIA DOS PRODUTOS NOTÁVEIS

Os gregos se destacaram quanto as formas de abordagens quando o assunto estava relacionado às identidades e operações algébricas, especificamente os produtos notáveis. De acordo com Eves (2004), eles partiam do pressuposto da representação de um número por meio de um comprimento para efetuaram tais operações.

Assim, foram atribuídas aos pitagóricos tais proezas que se encontram espalhadas em vários dos primeiros Livros de Euclides. Especificamente no Livro II, visto que este contém várias proposições, as quais, caracterizam-se no fundo como identidades algébricas envolvidas numa terminologia geométrica. Para ilustração, Eves (2004) aponta o método na proposição 4 do Livro II: "*Dividindo-se uma reta em duas partes, o quadrado sobre a reta toda é igual à soma dos quadrados sobre as partes juntamente com o dobro do retângulo contido pelas partes*".

Em suma tal enunciado diz respeito à identidade associada ao quadrado da soma de dois termos ou $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. A qual pode ser interpretada geometricamente a partir da ilustração proposta por Euclides, como temos a seguir na figura 1:

Figura 04: Geometria da identidade $(a + b)^2$



Fonte: Eves, 2004, p.108.

Além desta, também foram abordadas outras identidades algébricas que posteriormente receberam o tratamento geométrico que estão contidas no livro *Os Elementos de Euclides*. A parti disso, apresentamos a seguir um tratamento matemático por meio de situações acerca de construções da própria álgebra, assim como, da correlação apresentada anteriormente. Além de relações entre os produtos notáveis com tópicos de diferentes níveis de ensino.

4.2. TÓPICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL (CASOS ELEMENTARES)

Inicialmente desenvolvemos situações acerca de produtos polinomiais de um modo geral, consequentemente a evidência das identidades proporcionadas por eles. As quais podem ser verificadas por meio da utilização de propriedades de potenciação, assim como, a distributividade do produto em relação a adição e subtração de monômios.

Dados $a\ e\ b\ \in\ \mathbb{R}$, considere os produtos a seguir:

a) $3a^2(4a^3 - 12a + 3) = 3a^2.4a^3 - 3a^2.12a + 3a^2.3 = 12a^5 - 36a^3 + 9a^2$

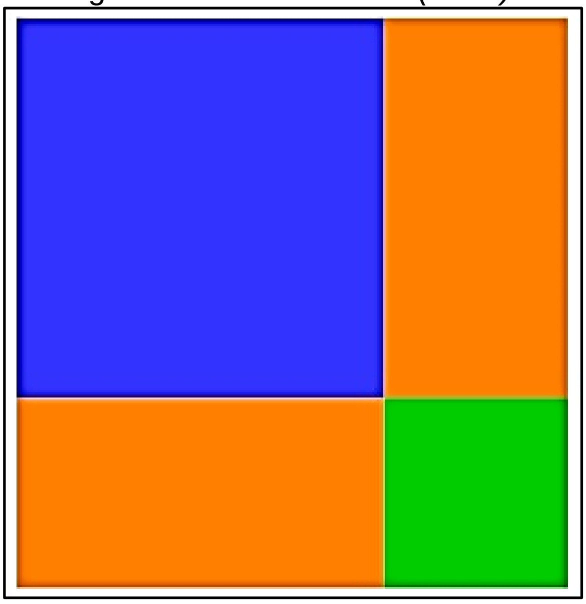
b) $$\begin{aligned}(4a + b)(9a - 7b + 2) &= 4a(9a - 7b + 2) + b(9a - 7b + 2)\\ &= 4a.9a + 4a.(-7b) + 4a.2 + b.9a + b(-7b) + b.2\\ &= 36a^2 - 28ab + 8a + 9ab - 7b^2 + 2b\\ &= 36a^2 + 8a - 19ab + 2b - 7b^2\end{aligned}$$

Diante disso, ressaltamos adiante outros casos de produtos polinomiais que são utilizados com maior frequência em diversos níveis de ensino e abordagens. Os quais, são denominados de *produtos notáveis*, devido sua importância para esta pesquisa, os apresentamos associados às respectivas interpretações geométricas.

I) Quadrado da Soma e da Diferença de dois termos

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

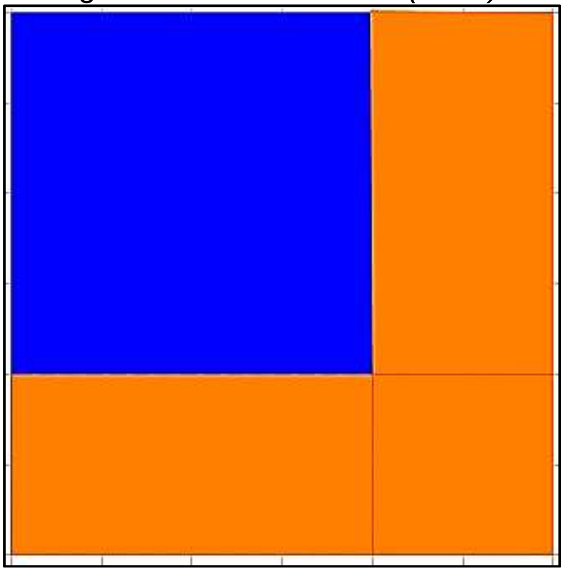
Figura 05: Geometria de *(a + b)*^{2}



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

Figura 06: Geometria de *(a – b)²*

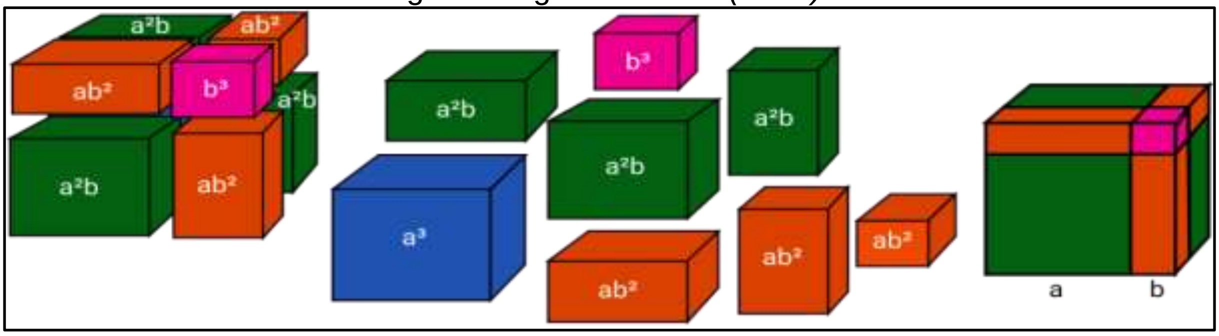


Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

II) Cubo da Soma e da Diferença de dois termos

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Figura 07: geometria de *(a + b)³*



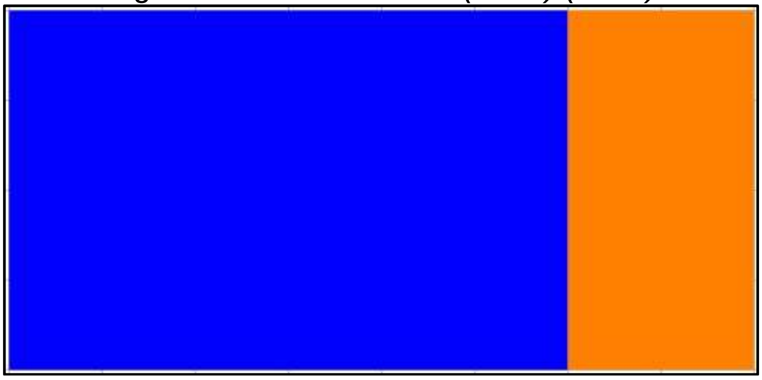
Fonte: https://matematicabasica.net/produtos-notaveis/

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

III) Produtos da Soma pela Diferença

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Figura 08: Geometria de *(a + b).(a – b)*



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

IV) Outros casos

Nestes, não serão abordados a interpretação geométrica, devido à dificuldade existente para tal elaboração. Com isso, buscamos apenas apresentá-los diante de suas respectivas verificações.

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$(a-b-c)^2 = (a-b-c)(a-b-c) = a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc+b^2$$

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= (a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)\\ &= a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(c+b)\end{aligned}$$

4.3. PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO

De acordo com Boulos (2001), fatorar significa escrever uma expressão (um polinômio) em forma de produto. Em outras palavras a fatoração se desenvolve de modo contrário aos produtos notáveis. Pois enquanto este chega-se a parti de um produto num polinômio, a fatoração transforma um polinômio num produto. Dessa forma, o mesmo autor ressalta alguns casos como:

Caso 1. $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

Neste caso basta notar o trinômio quadrado perfeito, pois a partir dele pode-se facilmente efetuar a troca com a identidade supracitada. De modo análogo ao caso 1, observa-se que também pode ser utilizada a seguinte identidade: $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$. Além disso, acrescentamos outras identidades:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3 \qquad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

Caso 2. $a^2 + (m + n)a + mn = (a + m)(a + n)$, onde m e n são inteiros tais que $(m + n)$ formam o coeficiente de a e mn o termo independente.

Exemplo: Para fatorar $x^2 + 8x + 12$, devemos achar m e n tais que *m . n = 8* e *m + n =12*. Como *12* tem fatores *1* e *12*, *2* e *6*, *3* e *4*, observa-se que *2* e *6* também forma *8*. Donde conclui-se que *m = 2* e *n = 8*. Então,

$$x^2 + 8x + 12 = (x + 2)(x + 6)$$

Caso 3. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Ao notar que se trata de uma situação característica da diferença de dois quadrados pode-se tranquilamente efetuar a permuta.

Caso 4. $a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$ e $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Diante do exposto, fica evidente a correlação direta existe entre os conteúdos. Além disso, ressaltamos a importância destas relações frente à simplificação de expressões algébricas.

4.4. PRODUTOS NOTÁVEIS E O COMPLETAMENTO DE QUADRADO

Segundo Boulos (2001), uma equação na incógnita x é chamada de equação quadrática se puder ser colocada na forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a, b\ e\ c\ \in \mathbb{R}$, $com\ a\ \neq 0$. Dessa forma, quando *b = 0* ou *c = 0* a equação é considerada como incompleta. Nesse sentido, ao considerar os dois casos de equações incompletas o autor afirma que é possível determinar o método por meio do completamento de quadrado. Para uma melhor compreensão desta técnica, segue um exemplo.

Dada a expressão $x^2 + 7x$, vamos supor que seja necessário escrevê-la na forma $(x + m)^2 + n$, onde m e n são números a determinar. Igualando ambas e desenvolvendo o segundo membro chega-se à:

$$x^2 + 7x = x^2 + 2mx + m^2 + n$$

Da igualdade conclui-se que $7 = 2m,\ logo\ m = \frac{7}{2}$. Além disso, igualando-se os termos independentes e substituindo o $m = \frac{7}{2}$, obtém-se $n = \frac{-49}{4}$. Portanto, a expressão fica na forma:

$$x^2 + 7x = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$$

Diante disso, aborda-se a técnica de um modo geral a partir da expressão

$$y = x^2 + kx$$

Agora, ao dividir *k* por *2* e somar $\left(\frac{k}{2}\right)^2$ chega-se à :

$$y + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = x^2 + kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

$$y = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

Portanto,

$$y = x^2 + kx = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

Esta técnica é utilizada para determinar as raízes de qualquer equação quadrática. A exemplo da seguinte equação: $2x^2 + 3x = 27$. Para resolvê-la por completamento de quadrado divide-se ambos os membros por *2*.

$$x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{27}{2}$$

Como o coeficiente do *x* é *3/2*, deve-se dividi-lo por *2*. Com isso, chega-se à *3/4*. Ao elevar ao quadrado e somar à ambos os membros nota-se

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{225}{16}$$

Daí resulta em, $x' e\ x'' = 3$

Fato que corrobora a eficiência da técnica, consequentemente a utilização do quadrado da soma de dois temos (produto notável) para a solução de qualquer equação quadrática.

4.5. BINÔMIO DE NEWTON E TRIANGULO DE PASCAL

Neste tópico destacamos a relação estabelecida entre os produtos notáveis com o Binômio de Newton e Triangulo de Pascal. Visto que a parti do desenvolvimento destes, podemos elaborar generalizações de diversos casos dos produtos notáveis, a exemplo de $(a+b)^4, (a+b)^5, \dots, (a+b)^n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Nesse sentindo, os apresentamos seguidos de suas respectivas demonstrações.

I) Binômio de Newton

Segundo Ávila (2005), o desenvolvimento de $(a+b)^n$, para $n \in \mathbb{N}, a\ e\ b \in \mathbb{R}$ é dado por:

$$(a+b)^n = a^n + n\, a^{n-1}b + \frac{n\,(n-1)}{2}\, a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n\,(n-1)(n-2)(n-r+1)}{r!}\, a^{n-r}b^r + \cdots + b^n \quad \textbf{(*)}$$

Para demonstrá-lo, devemos utilizar o princípio da indução matemática. Nesse sentido, inicia-se com os chamados coeficientes binomiais

$$\binom{n}{r} = \frac{n\,(n-1)(n-2)(n-r+1)}{r!} \quad , r = 1, 2, \dots, n.$$

Ao multiplicar o numerador e denominador por $(n-r)!$, obtemos:

$$\binom{n}{r} = \frac{n\,!}{n!\,(n-r)!}$$

Neste sentido, em termos de coeficientes binomiais, **(*)** assume a forma:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}\ a^n + \binom{n}{1}\ a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n}\ b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^n \ \textbf{(**)}$$

A expressão acima, caracteriza uma proposição que denota-se por P (n). Agora, objetivamos provar que ela implica em P (n + 1). Para isso, multiplica-se a expressão **(**)** por (a + b). De onde obtêm-se por um lado:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\left[\binom{n}{0}\ a^n + \binom{n}{1}\ a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n}\ b^n\right]$$

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0}\ a^{n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right]\ a^n b + \cdots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] ab^n + \binom{n}{n}\ b^{n+1}$$

Por outro lado,

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-r+1)}{r!} + \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-r)}{(r+1)!}$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-r+1)}{r} . \left(1 + \frac{n-r}{r+1}\right)$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{(n+1)n\,(n-1)\,\ldots\,(n-r+1)}{(r+1)!} ;\, (***)$$

Isto é,

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

Daqui e do fato de ser

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1 \ \ e \ \ \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

Observa-se que **(***)**, se escreve como:

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0}\ a^{n+1} + \binom{n+1}{1}\ a^n b + \cdots + \binom{n+1}{n+1}\ b^{n+1}$$

O que caracteriza o P (n + 1). Ou seja, P (n) implica no P (n+1), que completa a demonstração. Visto que P (1) é verdadeira, por inspeção, conclui-se que P (n) é verdadeira para todo $n \geq 1$, desde que $n \in \mathbb{N}$.

II) Triangulo de Aritmético de Tartaglia-Pascal.

De acordo com Hazzan (2004), é uma tabela que podemos dispor ordenadamente os coeficientes binomiais $\binom{n}{r}$.

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \qquad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \qquad \binom{2}{1} \qquad \binom{2}{2}$$

....

$$\binom{k}{0} \qquad \binom{k}{1} \qquad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \binom{k}{k}$$

Isto é:

A 1ª linha contém o coeficiente binomial n = 0.

A 2ª linha contém o coeficiente binomial n = 1.

A Kª linha contém o coeficiente binomial n = k.

Com isso, pode-se reescrever o Triangulo de Pascal com os respectivos coeficientes binomiais, da seguinte forma:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

....

Vale ressaltar que não há necessidade de se calcular os coeficientes binomiais. Basta que sejam consideradas as seguintes propriedades:

P1) Em cada linha do triângulo o primeiro elemento vale 1, pois qualquer que seja a linha o primeiro elemento é o $\binom{n}{0}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

P2) Em cada linha do triângulo o último elemento também vale 1, pois é sempre da forma $\binom{n}{n}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

P3) A partir da terceira linha cada elemento (exceto o primeiro e o último) é obtido pela soma dos elementos da linha anterior, imediatamente acima dele. Esta propriedade é conhecida com relação de Stifel e afirma que:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}; n \geq 2$$

Demonstração do teorema citado anteriormente:

Seja A um conjunto com n elementos, agora tome $a \in A$. Com isso, pode-se calcular o número de combinações dos elementos de A, formados de P a P de dois modos:

1º modo) Diretamente pela fórmula, isto é, $\binom{n}{p}$ $(*)$.

2º modo) calcula-se o número de combinações que não possuam o elemento a.

Tal número é $\binom{n-1}{p}$.

Em seguida calcula-se o número de combinações que possuem o elemento a que é descrito por:

$$\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} (**)$$

De (*) e (**) conclui-se que:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

P4) Numa linha, dois coeficientes equidistante dos extremos são iguais

Demonstração:

$$\binom{n}{p} = \frac{n\,!}{n!(n-p)!} \quad \text{e} \quad \binom{n}{n-p} = \frac{n\,!}{(n-p)!n!}$$

De onde conclui-se que

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Portanto, a partir do exposto nota-se que cada linha contém os coeficientes dos respectivos desenvolvimentos dos produtos notáveis do tipo $(a+b)^n\ \forall\, n\ \in\ \mathbb{N}$.

A parti do supracitado acerca da compreensão do Binômio de Newton e do Triangulo de Pascal podemos desenvolver com certa razoabilidade os seguintes casos:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10\,a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Além disso, de acordo com Quinet (1970) quando encontram-se casos do tipo $(a-b)^n$ basta utilizar as técnicas dos casos anteriores com a alternância dos sinais. Inicia-se sempre pelo positivo, seguido do negativo e assim sucessivamente.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10\,a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

Por fim, elucidamos com a observação de que a fórmula do Binômio de Newton possui restrições quando pensamos para além dos números reais. Um destes casos, é com relação as matrizes, como temos no seguinte enunciado.

Sejam $X\ e\ Y\ \epsilon\ \mathbb{M}(\mathbb{R})_{N\,x\,N}$, vejamos que a identidade a seguir não é válida para este espaço. Pois ao desenvolvermos o binômio, observa-se que:

$$(X+Y)^2 = (X+Y)(X+Y) = X^2 + XY + YX + Y^2$$

Como, o produto matricial $X.Y$ não é comutativo, não pode-se generalizar a seguinte identidade neste caso.

$$(X+Y)^2 = (X+Y)(X+Y) = X^2 + 2XY + Y^2$$

Além disso, no contexto da Álgebra Abstrata ou Moderna também temos o seguinte pensamento. Seja *(A , + , .)* um anel comutativo com unidade, sem divisores de zero e de característica 2, ao determinarmos as expressões dos seguintes casos, observa-se que:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2$$

A partir das situações supracitadas observa-se que as generalizações das identidades são validas em sua totalidade para os números reais. Contudo quando ampliamos para o campo das matrizes e outras situações no contexto da Álgebra, elas se apresentam de forma limitadas.

4.6. PRODUTOS NOTÁVEIS: APLICAÇÕES DE CÁLCULO I

Adiante ressaltamos algumas aplicações referentes aos produtos notáveis em tópicos de Cálculo (Limite Derivada e Integral). Com as quais são destacadas ao longo do processo de suas soluções a utilização enquanto ferramenta de manipulação algébrica. Fato que caracteriza a relevância deste tema também frente ao Ensino Superior.

I) Questões de limite de função de uma variável, Guidorizzi (2002).

Exemplo 1: $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$

Exemplo 2: $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$

Exemplo 3: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4})} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$

II) Questão sobre derivada de uma função de uma variável de Flemming e Gonçalves (2007).

Dada função $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$, encontre $f'(x)$

Solução:

Pela definição temos que $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Decorre, portanto, ao seguinte:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{x+\Delta x-2}{x+\Delta x+3} - \frac{x-2}{x+3}}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x-2)(x+3)-(x+\Delta x+3)(x-2)}{(x+\Delta x+3)(x+3)\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{5\Delta x}{(x+\Delta x+3)(x+3)\Delta x}$$

$$f'(x) = \frac{5}{(x+3)^2}$$

III) Questão sobre integral de uma função de uma variável de Flemming e Gonçalves (2007).

Resolva

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$$

Solução:

Para resolver esta integral devemos completar o quadrado do denominador da seguinte maneira: $x^2+6x+13 = (x^2+6x+9)-9+13 = (x+3)^2+4$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+4}$$

Chama-se $u = x+3$ e $du = dx$, com o qual obtemos:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} = \int \frac{du}{u^2 + 3} = \frac{1}{2} arc\ tg\ \frac{u}{2} + c =$$

$$\frac{1}{2} arc\ tg\ \frac{x + 3}{2} + c$$

Neste sentido, ressaltamos a importância de se compreender historicamente o objeto de estudo. Visto que favorece o entendimento sobre as intercorrências e influências perpassadas ao longo de sua construção e evolução. A exemplo das contribuições dos gregos que permanecem até os dias atuais com a relação entre a álgebra e geometria.

Além disso, frente ao que foi evidenciado com o tratamento sobre os produtos notáveis destacamos sua relevância para a Matemática. A qual foi evidenciada com as relações estabelecidas frente aos conteúdos dos três níveis de ensino. No Fundamental II, com a fatoração e o completamento de quadrado, no Médio, com o Binômio de Newton e Triangulo de Pascal e suas restrições, assim como, no Superior em questões de limite, derivada, integral.

Também elucidamos que tal tratamento transcende abordagem dos livros didáticos. Pois, trouxemos com ele discussões e acréscimos para os discentes e principalmente para os docentes que forem utilizar esta pesquisa como embasamento para sala de aula e para pesquisas acerca do conteúdo e suas correlações com os demais temas.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELOS, Maria José. **Praticando Matemática**. 4 ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise matemática para licenciatura**. São Paulo: Editora Blücher, 2006.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**. 8 ed. São Paulo: Moderna, 2015.

BOULOS, Paulo. **Pré-cálculo**. Pearson Makron Books, 2006.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.

BARBOSA, Pedro Lucio. Interações entre professor e aluno: caminhos para aprendizagem matemática? In: ONOFRE, Gomes Eduardo. Et. Al. **Ensino de Ciências e Educação Matemática**: diálogos interdisciplinares. Curitiba: CVR, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular**. Brasília, DF: 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5º a 8º séries)** Brasília: MEC/SEF, 1998.

BORGATO, Keyla Cristina. **O ensino de produtos notáveis e fatoração de polinômios:** uma articulação entre álgebra e geometria. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

BRUM, Lauren Darold. **Análise de erros cometidos por alunos de 8º do ensino fundamental em conteúdo de álgebra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Física e Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Rio Grande do Sul, 2013.

CABRAL, Natanael Freitas. **O papel das interações professor-aluno na construção da solução lógico-aritmética otimizada de um jogo com regras**. 2004. 151 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - UFPA.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências Didáticas:** estrutura e elaboração. Belém: SBEM-PA, 2017.

CHAQUIAM, M. Um diagrama, um texto. In: MENDES, I. A. & CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática**: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016, p. 77 - 125.

COSTA, Amanda Silva da. Et al. Investigando as dificuldades apresentadas em álgebra por alunos do oitavo ano do ensino fundamental **Destaques Acadêmicos**, Lajeado, v. 8, n. 4, p. 159-176, 2016.

CHOPPIN, Alain. **História dos livros e das edições didáticas:** sobre o estado da arte. Educação e Pesquisa, São Paulo, v.30, n.3, p. 549-566, set./dez. 2004.

D'AMBRÓSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. SBEM. Vol. 2. N 2. Brasília. 1989. P 15 – 19.

D`AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** da teoria à prática. 7 ed. Campinas: Papirus, 2000, 120p.

D`AMBROSIO, Ubiratan. **Educação pra uma sociedade em transição**. 2 ed. Campinas: Papirus, 2001, 197p.

D'AMORE, Bruno. **Elementos de didática da matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DANTE, L.R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 2ªed. São Paulo: Ática, 2000.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris**. 2 ed. São Paulo: Ática, 2015.

DARIO, Érica Maria Rennó Villela. **Produtos Notáveis no 8º ano do Ensino Fundamental II:** contribuições da utilização de diferentes recursos didáticos. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.

SILVA, Edna Machado da. **O conceito de função e suas linguagens**.215 f. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino da Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2020.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**, tradução: Hygino H. Domingues, Campinas-SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FERREIRA, Lucinete Maria Sousa. **Retratos da avaliação**: conflitos, desvirtuamentos e caminhos para a superação. 3 ed. Porto Alegre: Mediação, 2009.

FERNANDES, Domingos. **Avaliar para aprender**: fundamentos, práticas e políticas. São Paulo: Unesp, 2009.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas – SP, 2006. - (Coleção Formação de Professores) – p. 10.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. Boletim SBEM-SP, ano 4, n 7.1990.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A**. Pearson Educación, 2007.

FREITAS, José Luiz Magalhães de. Teoria das Situações Didáticas. In: FRANTI, Anna. et al. **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3 ed. São Paulo: EDUC, 2010.

GIL, Katia Henn. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra**. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2008.

GOÉS, Maria Cecília Rafael de. **A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural**: Uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. Cadernos Cedes. Ano XX, nº 50, Abril/ 2000.

GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um curso de cálculo**. 2002.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar** – vol 5. 7 ed. São Paulo: Atual Editora, 2004.

LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

LIMA, Lucas Antonio Mendes de. **Produtos Notáveis com materiais manipuláveis.** 180 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2022.

LUIZ, Elisete Adriana José; COL, Lidiane de. **Alternativas metodológicas para o ensino de matemática visando uma aprendizagem significativa**. Rio Grande do Sul, 2013.

LUCKESI, Cipriano C. **Avaliação da Aprendizagem Escolar**. 17ª ed. São Paulo, SP: Cortez, 2005.

MORAN, J.M. **Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica**. Ed. Papirus, 12 ed. 2006.

MORTIMER, Eduardo F. SCOTT, Phil. **Atividade discursiva nas salas de aula de ciências**: uma ferramenta sóciocultural para analisar e planejar ensino. Investigações em Ensino de Ciências. v. 7. n. 3. p. 283-306. 2002.

NUNES, Roberto da Silva; NUNES, José Messildo Viana. Modelos constitutivos de sequências didáticas: enfoque na Teoria das Situações Didáticas. **Revista Exitus**, Santarém/PA, Vol. 9, N° 1, p. 148 - 174, jan./mar. 2019.

PIMENTA, Selma Garrido. **Saberes pedagógicos e atividade docente**. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

PARÁ (Estado). Secretaria de Educação. **Sistema Paraense de Avaliação - (SisPae)**. Pará: SEDUC, 2015.

POLYA, G.A. **Arte de Resolver Problemas:** Um Novo Aspecto de Método Matemático. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1987.

QUINET, J. **Matemática Superior**. Tradução da Editora Globo S.A. Rio Grande do Sul, 1970.

RODRIGUES, Salete. **Uma análise da aprendizagem de produtos notáveis com auxílio do programa Aplusix**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

SARMENTO, Alan. **A utilização dos materiais manipulativos nas aulas de matemática**. Universidade Federal do Piauí: VI Encontro, 2010.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática compreensão e prática**. 3 ed. São Paulo: Moderna, 2015.

SOARES, Tamiri Pinto. **Produtos Notáveis:** aplicação da atividade orientadora de ensino a partir da resolução de problemas. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual De Santa Cruz, Bahia, 2018.

VASCONCELLOS, Celso dos Santos. **Avaliação**: Concepção Dialética –libertadora do processo de avaliação escolar. 16 ed. São Paulo: Libertad, 2006.

VENTURA, Angélica Rodrigues; LAUDARES, João Bosco. **Ressignificação dos Produtos Notáveis Utilizando Material Concreto**. Abakós, Belo Horizonte,v. 5, n. 1, p. 34-47, nov. 2016.

VIGINHESKI, Lúcia Virginia Mamcasz. **Uma abordagem para o ensino de Produtos Notáveis em uma classe inclusiva:** o caso de uma aluna com deficiência visual. Dissertação (Mestrado em Ensino em Ciência e Tecnologia) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Paraná, 2013.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ZORZAN, A. S. L. **Ensino-Aprendizagem: Algumas tendências na Educação Matemática**. Revista de Ciências Humanas: v.8, n.1, jun. 2007.

Lucas Lima

Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade do Estado do Pará – UEPA (2022). Especialista em Ensino de Matemática pela Escola Superior da Amazônia – ESAMAZ (2019). Licenciado Pleno em Matemática pela Universidade do Estado do Pará - UEPA (2018).

Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN (2012), Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Pará (2001), Especialista em Matemática pela UNESPA (1989), licenciado em Matemática pelo Centro de Estudos Superiores do Estado do Pará (1984) e Licenciado em Ciências pelo Centro de Estudos Superiores do Estado do Pará (1983).

Miguel Chaquiam

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA
TRAV. DJALMA DUTRA, S/Nº - TELÉGRAFO
66113-010 BELÉM-PA