

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática



Lucas Antonio Mendes de Lima

Produtos Notáveis com materiais manipuláveis

Belém
2022

Lucas Antonio Mendes de Lima

Produtos Notáveis com materiais manipuláveis

Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática apresentado a banca de defesa do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.
Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam.

Belém
2022

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Lima, Lucas Antonio Mendes de

Produtos notáveis com materiais manipuláveis /Lucas Antonio Mendes de Lima;
orientação de Miguel Chaquiam. - Belém, 2022.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do
Estado do Pará. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Belém,
2022.

1. Ensino de matemática. 2. Produtos notáveis. 3. Teoria das situações didáticas. I.
Chaquiam, Miguel (orient). II. Título.

CDD 23 ed. 512

Regina Coeli A. Ribeiro - CRB-2/739

LUCAS ANTÔNIO MENDES DE LIMA

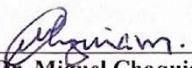
PRODUTOS NOTÁVEIS COM MATERIAIS MANIPULÁVEIS.

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Fundamental.

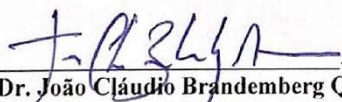
Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam

Data de aprovação: 30/09/2022

Banca examinadora


_____. Orientador
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN
Universidade do Estado do Pará


_____. Examinador Interno
Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Doutor em Ciências Humanas – Pontifícia Universidade Católica / PUC-RJ
Universidade do Estado do Pará


_____. Examinador Externo
Prof. Dr. João Cláudio Brandenberg Quaresma
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN
Universidade Federal do Pará

Belém – PA

2022

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus e à Nsa Senhora de Nazaré por me concederem a dádiva da vida, por me permitirem concluir esta etapa de minha trajetória acadêmica diante de tantos desafios e percalços impostos pela vida. Dentre os quais, destaco a pandemia da COVID-19 que vitimou tantas famílias.

Minha eterna gratidão a cada um dos membros que compõem a minha família (Mãe, Pai, Irmã, sobrinhos e Namorada Gabriela) por sempre me fortalecerem e incentivarem nos momentos difíceis e por sorrirem comigo nas vitórias e nos momentos felizes. Tenho plena certeza que eu não teria chego até aqui se não fosse a existência de cada um deles.

Ressalto também a importância do meu grande amigo e orientador Prof. Dr. Miguel na construção de cada etapa desta pesquisa, página por página. Por todas as vezes que sempre me ajudou a seguir firme, mesmo quando titubeei e pensei em desistir. Professor Miguel Chaquiam, o seu nome sempre fará parte da minha vida, muito obrigado por todos os seus ensinamentos ao longo da graduação, no mestrado, bem como, nos direcionamentos pessoais.

Gratidão aos membros do Grupo de pesquisa em História e Educação Matemática na Amazônia. Ao qual, eu faço parte desde a sua fundação. Menciono em especial os coordenadores Prof. Dr. Miguel Chaquiam e o Prof. Dr. Natanael Cabral, enquanto eximes profissionais e pessoas que são, por trabalharem de forma incansável por seus ideais na Universidade do Estado do Pará.

Gostaria de agradecer também ao corpo de docentes que compõem o Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Por contribuírem com a minha formação profissional e pessoal com todas as particularidades que cada um traz consigo. Bem como, aos amigos da turma de 2019.

Por fim, trago a minha reflexão sobre a academia como um ambiente mágico, capaz de transformar vidas, assim como transformou a minha. O saber é encantador e nos induz buscar sempre uma evolução. Por isto, enquanto ser pensante, afirmo que sempre buscarei seguir as bases da ciência, afinal isto é o que me move e motiva todos os dias.

Lucas Lima

RESUMO

LIMA, Lucas Antonio Mendes de. **Produtos Notáveis com materiais manipuláveis**. 182 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2022.

Com esta pesquisa nos propusemos apresentar as possíveis potencialidades de uma sequência didática com a utilização de materiais manipuláveis para o ensino de produtos notáveis com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da Rede Estadual de Belém do Pará. Para seu desenvolvimento, houve uma fundamentação na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, associada a Sequência Didática com base nas percepções de Zabala, assim como, nas Unidades Articulas de Reconstrução Conceitual de Cabral e nos materiais didáticos manipuláveis com Lorenzato. No que tange as análises dos indícios de aprendizagem dos alunos na aplicação da Sequência Didática, pretendíamos que fossem utilizadas a Análise Microgenética com Góes e Análise do Discurso com Mortimer e Scott. De posse deste embasamento, buscamos compreender o objeto matemático sob diferentes enfoques, dentre os quais, realizamos uma revisão de estudos, buscamos entender a percepção de alunos e professores, a profundidade das abordagens de livros didáticos da Educação Básica, assim com, elaboramos um texto matemático sólido para subsidiar uma formação continuada dos professores e a construção da Sequência Didática que foi estruturada em 4 atividades. Com a sequência didática, concluída, realizamos sua aplicação. Conforme descrito, seria com uma turma de 8º ano, por meio da Análise Microgenética e Análise do Discurso. Entretanto, devido as circunstâncias ocasionadas pela pandemia da COVID-19, houve a necessidade de um redirecionamento do processo para uma turma de professores, afim de que eles realizassem a avaliação do constructo por meio de um questionário. Desta maneira, elucidamos como resultado, que a sequência didática desenvolvida apresenta potencialidades ao ensino do objeto matemático em destaque, por vários motivos apontados pelos professores. Dentre os quais, destacamos: a atratividade vinculada ao uso dos materiais manipuláveis, bem como, as influências em relação ao papel de mediador para o professor, de um ser mais ativo para o aluno e o re(descobrimento) do saber de forma gradual.

Palavras-chave: Teoria das Situações Didáticas; Ensino de Matemática; Produtos Notáveis; Sequência Didática; Material Concreto Manipulável.

ABSTRACT

LIMA, Lucas Antonio Mendes de. Remarkable products with manipulative materials. **Produtos Notáveis com materiais manipuláveis**. 182 f. Dissertation (Professional Master in Mathematics Teaching) - University of Pará State, Belém, 2022.

In this research we proposed to present the potentialities of a didactic sequence with the use of manipulative materials for the teaching of remarkable products with students of the 8th year of Elementary School from the public State Network of Belém do Pará. For its development, there was a foundation in Brousseau's Theory of Didactic Situations, associated with the Didactic Sequence based on Zabala's perceptions, as well as on Cabral's Articulated Conceptual Reconstruction Units and on didactic materials that can be manipulated with Lorenzato. Regarding the analysis of evidence of student learning in the application of the Didactic Sequence, we intended to use Microgenetic Analysis with Góes and Discourse Analysis with Mortimer and Scott. Using this foundation, we seek to understand the mathematical object under different approaches, among which, we carry out a review of studies, we wanted to understand the perception of students and teachers, the depth of the approaches of textbooks of Basic Education, as well as, elaborate a solid mathematician text to support a continuous education of teachers and the construction of the Didactic Sequence, which was structured in 4 activities. After the conclusion of didactic sequence, we carry out its application. As described, it would be with an 8th grade class, through Microgenetic Analysis and Discourse Analysis. However, due to the circumstances caused by the COVID-19 pandemic, there was a need to redirect the process to a group of teachers, so they could carry out the evaluation of the construct through a questionnaire. In this way, we elucidate as a result, that the didactic sequence developed presents potentialities for the teaching of the highlighted mathematical object, for several reasons pointed out by the teachers. Among them, we highlight: the attractiveness linked to the use of manipulative materials, as well as the influences related to the role of mediator for the teacher, of a more active being for the student and gradually rediscovering knowledge.

Keywords: Theory of Didactic Situations; Teaching Math; Notable products; Didactic Sequence; Handled Concrete Material.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 01:	ETAPAS DA TSD	25
FIGURA 02:	UNIDADE ARTICULÁVEL DE RECONSTRUÇÃO CONCEITUAL (UARC)	33
FIGURA 03:	CAPA DO LIVRO MATEMÁTICA BIANCHINI	74
FIGURA 04:	CAPA DO LIVRO PRATICANDO MATEMÁTICA	76
FIGURA 05:	CAPA DO LIVRO MATEMÁTICA COMPREENSÃO E PRÁTICA	77
FIGURA 06:	CAPA DO LIVRO PROJETO TELARIS	79
FIGURA 07:	GEOMETRIA DA IDENTIDADE $(a + b)^2$	108
FIGURA 08:	GEOMETRIA DE $(a + b)^2$	109
FIGURA 09:	GEOMETRIA DE $(a - b)^2$	110
FIGURA 10:	GEOMETRIA DE $(a + b)^3$	110
FIGURA 11:	GEOMETRIA DE $(a + b) \cdot (a - b)$	111

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 01:	RESULTADOS DA 1ª, 2ª E 3ª QUESTÕES DO TESTE.....	88
GRÁFICO 02:	RESULTADO DA 4ª QUESTÃO DO TESTE	89
GRÁFICO 03:	RESULTADO DA 5ª QUESTÃO DO TESTE	90
GRÁFICO 04:	RESULTADO DA 6ª QUESTÃO DO TESTE	91
GRÁFICO 05:	RESULTADO DA 7ª QUESTÃO DO TESTE	91
GRÁFICO 06:	RESULTADO DA 8ª QUESTÃO DO TESTE	92
GRÁFICO 07:	RESULTADO DA 9ª QUESTÃO DO TESTE	93
GRÁFICO 08:	RESULTADO DA 10ª QUESTÃO DO TESTE	93
GRÁFICO 09:	QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS	102
GRÁFICO 10:	QUADRADO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS	102
GRÁFICO 11:	PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA	103
GRÁFICO 12:	CUBO DA SOMA DE DOIS TERMOS	103
GRÁFICO 13:	CUBO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS	104
GRÁFICO 14:	SOMA DE DOIS CUBOS	104
GRÁFICO 15:	DIFERENÇA DE DOIS CUBOS	105

LISTA DE QUADROS

QUADRO 01:	ARTICULAÇÃO ENTRE OS APORTES TEÓRICOS	40
QUADRO 02:	PESQUISAS IDENTIFICADAS POR CATEGORIA	46
QUADRO 03:	ESTORVOS DE APRENDIZAGEM IDENTIFICADOS NA REVISÃO DE ESTUDOS	71
QUADRO 04:	LIVROS DIDÁTICOS DO PNLD	73
QUADRO 05:	PROPOSTA DE ORGANIZAÇÃO DAS ATIVIDADES	122
QUADRO 06:	PERCENTUAL DE RESPOSTAS PARA UARC-1	133
QUADRO 07:	SUGESTÕES DOS PROFESSORES SOBRE A PERGUNTA 1 DA UARC-1	134
QUADRO 08:	SUGESTÃO DO PROFESSOR SOBRE A PERGUNTA 2 DA UARC-1	135
QUADRO 09:	SUGESTÃO DOS PROFESSORES SOBRE A PERGUNTA 4 DA UARC-1	135
QUADRO 10:	PERCENTUAL DE RESPOSTAS PARA UARC-2	136
QUADRO 11:	SUGESTÃO DOS PROFESSORES SOBRE A PERGUNTA 1 DA UARC-2	136
QUADRO 12:	SUGESTÃO DO PROFESSOR SOBRE A PERGUNTA 4 DA UARC-2	137
QUADRO 13:	PERCENTUAL DE RESPOSTAS PARA UARC-3	137
QUADRO 14:	SUGESTÃO DOS PROFESSORES SOBRE A PERGUNTA 1 DA UARC-3	138
QUADRO 15:	PERCENTUAL DE RESPOSTAS PARA UARC-4	139
QUADRO 16:	SUGESTÕES DOS PROFESSORES SOBRE A PERGUNTA 1 DA UARC-4	139
QUADRO 17:	SUGESTÃO DO PROFESSOR SOBRE A PERGUNTA 4 DA UARC-2	140
QUADRO 18:	PERCENTUAL DE RESPOSTAS DOS PROFESSORES PARA O CONJUNTO DAS UARC'S	141
QUADRO 19:	PERCEPÇÃO DOS PROFESSORES SOBRE A PERGUNTA 1 DA ETAPA 2	142
QUADRO 20:	SUGESTÃO DO PROFESSOR SOBRE A PERGUNTA 2 DA ETAPA 2	142
QUADRO 21:	SUGESTÃO DO PROFESSOR SOBRE A PERGUNTA 4 DA ETAPA 2	143
QUADRO 22:	PERCENTUAL DE RESPOSTAS PARA AVALIAÇÃO COMPLEMENTAR DA SD	144
QUADRO 23:	PERCEPÇÃO DOS PROFESSORES SOBRE AS CONTRIBUIÇÕES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	145
QUADRO 24:	PERCEPÇÃO DOS PROFESSORES SOBRE POTENCIALIDADES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	147

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
GHEMAZ	Grupo de Pesquisa em História e Educação Matemática na Amazônia
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
IOMO	Intervenção Oral de Manutenção Objetiva
LDB	Lei de Diretrizes e Bases
PCN's	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PMPEM	Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
PNAD	Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios
PNE	Plano Nacional de Educação
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SD	Sequência Didática
SisPAE	Sistema Paraense de Avaliação da Educação
TIC's	Tecnologias da Informação e Comunicação
TSD	Teoria das Situações Didáticas
UARC	Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual
UEPA	Universidade do Estado do Pará

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	14
2.	APORTES TEÓRICOS	22
2.1.	TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS	22
2.2.	SEQUÊNCIA DIDÁTICA	26
2.3.	UNIDADE ARTICULÁVEL DE RECONSTRUÇÃO CONCEITUAL	28
2.4.	MATERIAIS DIÁTICOS MANIPULÁVEIS	33
2.5.	ANÁLISE MICROGENÉTICA	36
2.6.	ANÁLISE DO DISCURSO	37
2.7.	ARTICULAÇÃO ENTRE OS APORTES TEÓRICOS	40
2.8.	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	41
3.	SOBRE OS PRODUTOS NOTÁVEIS	45
3.1.	REVISÃO DE ESTUDOS	45
3.1.1.	Estudos Teóricos	47
3.1.2.	Estudos Empíricos	54
3.1.3.	Estudos Diagnósticos	64
3.1.4.	Análise Global das categorias	69
3.2.	PRODUTOS NOTÁVEIS NOS LIVROS DIDÁTICOS	72
3.2.1.	Matemática Bianchini	74
3.2.2.	Praticando Matemática	75
3.2.3.	Matemática compreensão e prática	77
3.2.4.	Projeto Teláris	78
3.2.5.	Análise global dos livros	80
3.3.	PERCEPÇÃO DOS ALUNOS EGRESSOS	81
3.3.1.	Produtos notáveis no currículo	83
3.3.2.	Olhar dos alunos sobre os caminhos adotados no ensino de Matemática	84
3.3.3.	Avaliações em Matemática	86
3.3.4.	Quadro de dificuldades e Teste de verificação	87
3.3.5.	Análise Global	94
3.4.	PERCEPÇÃO DOS PROFESSORES	96
3.4.1.	Perfil e formação dos professores	97
3.4.2.	Caminhos adotados para o ensino de Produtos Notáveis	98
3.4.3.	Avaliações em Matemática	99
3.4.4.	Quadro de dificuldades	101
3.4.5.	Análise Global	105
4.	PRODUTOS NOTÁVEIS: UM TRATAMENTO MATEMÁTICO	107
4.1.	UMA BREVE HISTÓRIA DOS PRODUTOS NOTÁVEIS	107
4.2.	TÓPICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL (CASOS ELEMENTARES) ...	108
4.3.	PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO	111
4.4.	PRODUTOS NOTÁVEIS E O COMPLEMENTO DE QUADRADO ...	112
4.5.	BINÔMIO DE NEWTON E TRIÂNGULO DE PASCAL	114
4.6.	PRODUTOS NOTÁVEIS: APLICAÇÕES EM CÁLCULO I	119
5.	SEQUÊNCIA DIDÁTICA	122
5.1.	UARC 1 – QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS	123
5.2.	UARC 2 – CUBO DA SOMA DE DOIS TERMOS	124

5.3.	UARC 3 – PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS	126
5.4.	UARC 4 – QUADRADO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS	127
6.	ANÁLISE E DISCUSSÃO DE DADOS	129
6.1.	DADOS DA ANÁLISE DOS PROFESSORES	133
6.1.1.	Avaliação individual das UARC's	133
6.1.2.	Avaliação do conjunto das UARC's	141
6.1.3.	Avaliação complementar	144
7.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	149
	REFERÊNCIAS	153
	APÊNDICES	157
	APÊNDICE A: TESTE DE VERIFICAÇÃO DOS ALUNOS EGRESSOS	157
	APÊNDICE B: SEQUÊNCIA DIDÁTICA	158
	APÊNDICE C: AVALIAÇÃO APLICATIVA	163
	APÊNDICE D: VALIDAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	166
	ANEXOS	176
	ANEXO A - TCLE PARA OS PAIS DOS ALUNOS	176
	ANEXO B - TCLE PROFESSORES	177
	ANEXO C - QUESTIONÁRIO DOS ALUNOS	178
	ANEXO D- QUESTIONÁRIO DOS PROFESSORES	180

1. INTRODUÇÃO

A Matemática atual associada ao processo de ensino e de aprendizagem na Educação Básica ao longo dos anos tem sido motivo e instrumento de diversas pesquisas na área da Educação Matemática. Este cenário se caracteriza pela amplitude de fatores que envolvem tal processo, dos quais ressaltam-se questões vinculadas ao currículo, metodologias, avaliações, assim como, uma busca constante por mudanças afim de tornar esta relação prazerosa e eficiente ao objetivo geral da educação que é o aprendizado dos alunos.

Nesse sentido, quando a discussão é direcionada no que diz respeito aos atuais modelos de ensino, observamos por vezes este ato está ligado à um emaranhado de conteúdos curriculares que tem que ser vencidos até o final do ano letivo. Dessa forma, notamos uma prática dos professores associada e preocupada com os conteúdos que prevalecem quando comparados com as formas que estes são abordados para proporcionar o aprendizado aos alunos.

Diante disso, D'Ambrosio, B. (1989) enfatizou que o ensino e a aprendizagem de Matemática se caracterizam da seguinte forma: por um lado os professores em geral têm mostrado a Matemática como um corpo de conhecimentos acabado e polido. Por outro, não é dado aos alunos possibilidades ou proporcionado a eles a necessidade de fazer parte do processo, nem mesmo com uma solução mais interessante. Assim, eles passam a acreditar que na aula de Matemática possuem um papel passivo e desinteressante.

Um outro fator presente em neste processo, está associado aos avanços que sociedade moderna vem transcorrendo, os quais, estimulam a utilização de novas práticas sociais, consequentemente a prática do ambiente escolar. A exemplo da compreensão da Matemática enquanto construção humana, que demorou séculos para se chegar ao ensino atual, o advento da tecnologia, assim como, outros cabedais ferramentais que são inerentes ao cotidiano dos alunos e que devem ser levados em consideração.

Estes avanços da sociedade moderna e as necessidades da educação escolar, quando não são adequados pelos professores em suas aulas, acarretam uma série de situações desagradáveis no contexto escolar. Como afirma D'Ambrosio, U. (2001), ao citar que os maiores entraves da educação, são: o alto índice de reprovação e a enorme evasão.

De fato, quando buscamos os documentos da legislação oficial a respeito destes dados, notamos que a situação é realmente preocupante. Com isso, esboçamos os dados estatísticos sobre o desempenho dos alunos a nível estadual, nacional e internacional por meio dos respectivos sistemas: Sistema Paraense de Avaliação da Educação (SisPAE), Índices de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) que ocorrer por meios das avaliações do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) associado com a Prova Brasil e o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA).

No contexto do estado do Pará, os dados encontrados sobre os níveis de proficiência dos alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de Matemática em 2018, segundo o SisPAE apontam que cerca de 82% dos alunos estavam abaixo do básico ou no básico. Níveis que se caracterizam por domínio insuficiente ou mínimo dos conhecimentos, habilidades e competências desejáveis para o ano escolar em que os alunos se encontram.

A nível nacional, observamos de acordo com os dados do IDEB sobre as avaliações em Matemática do ano de 2017 que embora tenhamos apresentados avanços ao longo dos anos, estes não chegaram às metas estabelecidas pelo Plano Nacional de Educação (PNE), especificamente a Meta 7 que tem o seguinte objetivo:

Fomentar a qualidade da educação básica em todas as etapas e modalidades, com melhoria do fluxo escolar e da aprendizagem de modo a atingir as seguintes médias nacionais para o Ideb: 6,0 nos anos iniciais do ensino fundamental; 5,5 nos anos finais do ensino fundamental; 5,2 no ensino médio. (BRASIL, 2009, p. 9).

Destacamos ainda a situação dos estudantes brasileiros em Matemática no PISA. Verificamos que, em geral, o nível de dificuldade dos itens do PISA 2015 para os jovens brasileiros foi maior que para os de outros países. Além disso, foi evidenciado pelo documento os percentuais das unidades da Federação brasileira, com os quais notamos que os estados das regiões Norte e Nordeste são aqueles com os maiores valores de dificuldades em relação a Matemática.

Diante disso, algumas surgiram inquietações, dentre as quais elucidamos a seguir: será que as nossas práticas enquanto profissionais da educação estão atingindo os devidos fins? Como ensinar matemática hoje? Existe uma forma única e eficaz se para ensinar Matemática? De fato, não existe, então quais são as novas propostas que surgem com as pesquisas em Educação Matemática? Elas apontam

o aluno enquanto sujeito do processo? Qual seria de fato o papel do professor no ensino?

Estas indagações quando mal interpretadas pelos professores, ocasionam dificuldades aos alunos inerentes à Matemática na Educação Básica, consequentemente em seus três grandes campos: Aritmética, Álgebra e Geometria. Destes, quando ressaltamos o segundo, notamos que há uma dificuldade ainda maior por parte dos alunos, principalmente os do Ensino Fundamental II, visto que exige certo grau de maturidade e abstração para fazer generalizações de regularidades, para trabalhar com operações algébricas, entre outras coisas.

Sobre o campo da Álgebra, foram evidenciadas algumas críticas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), com relação ao processo de ensino, visto que foi afirmado no documento que os professores reconhecem a sua importância para este nível de ensino, assim como, para embasar estudos futuros. Entretanto,

A ênfase que os professores dão a esse ensino não garante o sucesso dos alunos, a julgar tanto pelas pesquisas em Educação Matemática como pelo desempenho dos alunos nas avaliações que têm ocorrido em muitas escolas. Nos resultados do SAEB, por exemplo, os itens referentes à Álgebra raramente atingem o índice de 40% de acerto em muitas regiões do país. Assim, é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as manipulações com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. (BRASIL, 1998, p. 115 - 116)

Além desta afirmativa, também foi ressaltado no documento como uma espécie de superação de tais práticas, a utilização de relações entre a Álgebra e a Geometria como uma forma de dar significado aos conteúdos e dessa maneira tornar a aula mais atrativa para os alunos. Um dos exemplos desta relação é a visualização de expressões algébricas, por meio do cálculo de perímetros, áreas com figuras planas e volumes com figuras espaciais.

A respeito deste mesmo campo, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), para os anos finais do Ensino Fundamental II, enfatiza que os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica. Também é defendido o uso de recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas

eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas.

Diante destas afirmações sobre o campo algébrico, optamos por desenvolver esta pesquisa acerca de um objeto matemático que faz parte desta área. O qual também foi contemplado em ambos os documentos que é o conteúdo de produtos notáveis. Assim, de acordo com os PCN's e a BNCC por meio de suas recomendações ele deve ser trabalhado respectivamente no 4º ciclo (8º e 9º ano) e no 9º ano, especificamente com a habilidade (EF09MA09).

Vale ressaltar que a escolha deste tema, teve suas motivações por meio de dois pilares. Dos quais destaco em primeiro, a vivência pessoal enquanto aluno, visto que neste período o conteúdo foi abordado como uma espécie de relação única entre os casos que o contemplam e a língua materna. A exemplo do quadrado da soma de dois termos, como uma relação de equivalência entre o quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo, os demais casos também foram abordados da mesma forma.

O segundo fator considerado como motivador para a escolha deste objeto foi a prática de trabalho com os alunos deste respectivo nível de ensino, com a qual pude evidenciar uma série de dificuldades apresentadas por eles frente ao processo de ensino e aprendizagem. Dentre elas, ressaltamos dificuldades como: operações básicas, propriedades de potenciação, distributividade do produto em relação a adição e subtração, entre outras.

Dificuldades estas, corroboradas por diversas pesquisas consultadas na revisão de estudos frente ao período estabelecido de 2008 à 2018. De autores como Rodrigues (2008), Borgato (2013), Soares (2018); Vignetsk (2013); Ventura e Laudares (2016); Dario (2017); Gil (2008) e Brum (2013).

Frente a conjuntura elucidada do atual cenário educacional brasileiro, especificamente sobre os alunos do Ensino Fundamental II com o conteúdo de produtos notáveis. O campo investigativo da Educação Matemática, aponta uma série de possibilidades de abordagens para o ensino com intuito de minimizar estas situações de dificuldades enfrentadas pelos alunos.

Sobre estas questões vinculadas a Educação Matemática, destaco as participações nas reuniões do Grupo de Pesquisa em História, Educação e Matemática na Amazônia (GHEMAZ) e o Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM), vinculado a Universidade do Estado do Pará (UEPA).

Visto que ambos foram fundamentais para a apropriação de questões relevantes acerca de abordagens alternativas para os conteúdos com compõem o currículo educacional e que direcionam o processo de ensino e aprendizagem, principalmente aquelas que colocam o aluno enquanto sujeito de um objeto a ser construído ou re(construído).

Nesse sentido, a respeito do objetivo da Educação Matemática, D'Ambrosio (1996), aponta que é um tipo de estratégia desenvolvida pela espécie humana no decorrer de sua história para explicar, para entender, para manejar e para conviver com a realidade sensível e perceptível, e com o seu imaginário, dentro de um contexto natural e cultural. Para além disso, Fiorentini e Lorenzato (2006) afirmam de modo amplo que existem duas vertentes:

- i) Uma, de natureza pragmática, que tem em vista uma melhoria no processo do ensino e da aprendizagem da Matemática;
- ii) Outra, de cunho científico, que visa o desenvolvimento da Educação Matemática enquanto campo de investigação e de produção de conhecimento.

A partir disso, apresentamos a seguir algumas possibilidades que a Educação Matemática proporciona aos docentes para uso em sala de aula nas abordagens dos conteúdos: uso da Resolução de Problemas, Modelagem Matemática, a Etnomatemática, as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's), o uso de jogos, a História da Matemática e as Sequências Didáticas. Vale ressaltar que elas também são evidenciadas pela BNCC (2018) e pelos PCN's (1998) como "alguns caminhos para fazer Matemática na sala de aula". Dessa maneira, elucidamos de forma breve cada uma delas.

A *Resolução de Problemas*, é uma vertente que envolve os problemas em diversas frentes dos conteúdos matemáticos abordados. Assim, Dante (2000) afirma que um problema é "qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-los". A *Modelagem*, para Bassanezi (2002), é uma forma de encarar a Matemática e "consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real".

A *Etnomatemática*, é uma linha de investigação criada pelo Educador Matemático brasileiro Ubiratan D'Ambrosio. Ela contempla o saber oriundo do cotidiano que está cheio de saberes e fazeres próprios da cultura. De acordo com

Zorzan (2007) é focalizada na inter e transdisciplinaridade, ou seja, a Matemática enquanto disciplina escolar precisa ser trabalhada de forma contextualizada nas diferentes relações com outras áreas, frente as necessidades de um grupo social.

As *Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's)* abrangem um conjunto de elementos voltados para o ensino pautado na utilização dos recursos tecnológicos dos mais variados tipos, sejam eles por meio de softwares ou simplesmente de uma construção utilizando um determinado programa. A *História da Matemática*, para Chaquiam (2016), com enfoque para ensino, é enfatizada sobre sua contribuição para a ampliação da compreensão dos estudantes acerca das dimensões conceituais da Matemática, bem como das contribuições didáticas para o trabalho do professor e para fortalecer suas competências formativas.

Ademais, ressaltamos as Sequências Didáticas, visto que elas se configuram como uma tendência atual para o ensino de Matemática. Este tipo de abordagem permite a construção do conhecimento, por meio da experimentação, generalização, abstração e formação de significados dos conteúdos que estão sendo abordados durante o processo.

Sobre as Sequências Didáticas, apontamos as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) propostas por Cabral (2017) que tem por objetivo servir de referência a elaboração de novas propostas didáticas que envolvam os conteúdos presentes nos documentos que norteiam o currículo. Embora seja uma proposta atual, podemos observar que diversas pesquisas foram desenvolvidas segundo essa ideia, com resultados positivos sobre o processo de aprendizagem.

Com isso, ao associarmos a circunstância atual do Ensino Fundamental II, especificamente no campo da Álgebra, com o ensino de produtos notáveis e as novas possibilidades de abordagens por meio das Sequências Didáticas, destacamos a seguinte questão norteadora: Que potencialidades apresenta uma sequência didática para o ensino de produtos notáveis, estruturada segundo as UARC's, associada a utilização de materiais concretos manipuláveis, direcionada aos alunos do 8º ano de uma escola pública estadual de Belém do Pará?

Para responder ao questionamento apresentado e balizar a elaboração da sequência didática foi estabelecido o seguinte objetivo: Identificar potencialidades de uma sequência didática direcionada ao ensino de produtos notáveis, estruturada segundo as UARC's, a partir dos registros de sua aplicação e análises dos resultados a partir da microgenética e na análise do discurso.

Para melhor desenvolvimento da pesquisa e obtenção de elementos para subsidiar as respostas foram delineados os objetivos específicos a seguir:

- Destacar a importância da temática a partir dos documentos oficiais, bem como, a utilização de recursos didáticos para o ensino desta temática;
- Apresentar percepções de professores e alunos sobre os processos de ensino e de aprendizagem de produtos notáveis, tendo em vista a identificação de possíveis pontos nevrálgicos e pontos positivos nesses processos que irão balizar a elaboração da sequência didática;
- Compreender o processo de ensino e aprendizagem de produtos notáveis a partir de uma revisão de estudos sobre essa temática, tendo em vista obter elementos para constituição da sequência didática;
- Identificar abordagens a respeito do tema em livros didáticos indicados no Guia do Livro Didático do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), tendo em vista balizar a abordagem na constituição da sequência didática;
- Elaborar um texto matemático que contemple o objeto matemático, tendo em vista a formação inicial e continuada de professores de Matemática e obter subsídios matemáticos à constituição da sequência didática;
- Elaborar uma sequência didática baseada nas UARC's, com utilização de material concreto, para o ensino de produtos notáveis no 8º ano do Ensino Fundamental;
- Validar as atividades propostas a partir das potencialidades identificadas durante sua aplicação e das análises dos resultados amparados pela análise microgenética e análise do discurso.

Com isso, elucidamos que a estrutura da pesquisa foi compreendida com a seguinte disposição. No capítulo 2, foram esboçados os pressupostos teóricos e metodológicos que subsidiaram a pesquisa. Os quais fundamentaram desde as relações estabelecidas pelo processo de ensino e aprendizagem com a Teoria das Situações Didáticas até as teorias de base para identificar os indícios de aprendizagem dos alunos frente a aplicação da Sequência, das quais ressaltamos a Análise Microgenética e a Análise do Discurso.

No capítulo 3, o objeto matemático e seus delineamentos foram ressaltados com base na revisão de estudos, a qual foi construída com a categorização em estudos teóricos, empíricos e diagnósticos. Além da pesquisa de campo para

compreender os olhares dos alunos, assim como, dos professores frente ao conteúdo. Por fim, constam as disposições do conteúdo nos livros didáticos.

No capítulo 4, foi elucidada a construção de um texto matemático sobre os produtos notáveis e suas correlações com outros temas como a fatoração, o completamento de quadrado, triângulos de pascal, binômio de Newton e aplicações em questões de Cálculo I. Com o intuito de solidificar a construção da sequência e servir de base para estudos de outros professores.

No capítulo 5, consta a estruturação dos textos da sequência didática estruturada pela UARC, com base nos seguintes casos: quadrado da soma de dois termos, quadrado da soma de três termos, produto da soma pela diferença de dois termos, quadrado da diferença de dois termos e cubo da soma de dois termos. A qual, possui o intuito minimizar as dificuldades de aprendizagem dos alunos frente a temática em questão.

No capítulo 6, foram apresentados os resultados das análises geradas a partir da aplicação da Sequência Didática com uma turma de professores do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. Resultados estes subsidiados por pressupostos da elaboração de um questionário que direcionou a avaliação do constructo educacional pelos professores. Por fim, foram evidenciadas as considerações finais decorrentes do desenvolvimento da pesquisa.

2. APORTES TEÓRICOS

Neste capítulo foram abordadas questões concernentes ao aporte teórico que fundamentou a construção desta pesquisa. No tocante a este aspecto, foi elucidada a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau (1986), associada à Sequência Didática (SD) na concepção de Zabala (1998). O modelo estruturante das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) de Cabral (2017). Os materiais concretos manipuláveis sob a perspectiva de Lorenzato (2006). Por fim, para análise da potencialidade da sequência didática, foram evidenciadas a Análise Microgenética e a Análise do Discurso sob os olhares de Góes (2000) Morttinen e Scott (2002), respectivamente. Paralelamente, apresentamos os procedimentos metodológicos inerentes a cada um dos aportes teóricos.

2.1. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS (TSD)

Ao considerar que o intuito desta pesquisa vincula-se com o processo de ensino e aprendizagem em Matemática, especificamente associada aos produtos notáveis. Evidenciamos a Didática da Matemática, enquanto campo teórico de investigação da Educação Matemática que se preocupa e propõem uma série de conceitos frente a este aspecto. Com isso, destacamos a noção citada por D'Amore (2007), onde ele afirma que:

Didática da Matemática: é a disciplina científica e o campo de pesquisa cujo objetivo é o de identificar, caracterizar e compreender os fenômenos e os processos que condicionam o ensino e a aprendizagem da Matemática.
Educação Matemática: é o sistema social complexo e heterogêneo que inclui teoria, desenvolvimento e prática relativo ao ensino e aprendizagem em Matemática. Inclui a Didática da Matemática como subsistema.
D'Amore (2007, p. 97)

Diante disso, evidenciamos a Teoria das Situações Didáticas (TSD) enquanto um cabedal teórico que fundamentou este estudo e que faz parte do campo de investigação maior, vinculado à Didática da Matemática. Sobre a TSD, apontamos seus conceitos a partir dos estudos propostos por Brousseau (1986), assim como, suas correlações com a intencionalidade desta pesquisa.

A TSD teve sua origem na França, especificamente na década de 70 por Guy Brousseau. Esta ganhou destaque, por ser um modelo teórico que trata de formas

de apresentação dos conteúdos matemáticos, a alunos, como uma possibilidade de melhor compreender o fenômeno da aprendizagem matemática. Ou seja, há uma valorização dos conhecimentos mobilizados pelos alunos para a construção do saber matemático, assim como, do trabalho do professor, enquanto profissional que proporciona condições para que os alunos se apropriem dos conteúdos. (FREITAS, 2010, p. 77)

Para que ocorra este cenário, deve ser organizado um meio, afim de que a aprendizagem seja efetivada por parte dos alunos. O qual, a partir da concepção de Freitas (2010), é definido da seguinte forma:

O meio é onde ocorrem as interações do sujeito, é o sistema antagonista no qual ele age. É no meio que se provocam mudanças visando desestabilizar o sistema didático e o surgimento de conflitos, contradições e possibilidades de aprendizagem de novos conhecimentos. Freitas (2010, p. 79)

A partir das noções preliminares esboçadas sobre a teoria. Destacamos de acordo com as concepções de Brousseau (1986), a noção de *situação didática*. A qual, caracteriza-se pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio (eventuais instrumentos e objetos), o professor e o saber com a finalidade de desenvolver atividades que visem alcançar o processo de aprendizagem sobre os conteúdos matemáticos.

Estes três elementos são de fundamental importância para teoria, visto que caracterizam o espaço vivo da sala de aula. Contudo, eles não são suficientes para abarcar toda complexidade do fenômeno cognitivo. Por isto, de acordo com Pais (2008), eles devem estar associados a outros elementos como: métodos, recursos didáticos, posições teóricas, dentre outros.

Neste sentido, o papel do professor frente as situações didáticas é recontextualizar, repersonalizar e temporalizar o saber. Desse modo, o professor busca não apresentar resultados imediatos e formalizados. Pelo contrário, constrói situações para que os alunos possam vivenciar momentos de investigação no ambiente da sala de aula.

Quando o aluno toma para si o problema ou a situação proposta pelo professor, é neste momento que a aprendizagem vai ser efetivada. Porém, vale ressaltar que entre a aceitação do problema e a aprendizagem, diversas etapas e variáveis são envolvidas.

Das quais, Brousseau (1986) destaca outra categoria frente a teoria, que são as *situações adidáticas*. Evidenciadas como situações caracterizadas pela existência de determinados aspectos da aprendizagem que o professor não possui uma intencionalidade pedagógica de intervenção frente a situação vivenciada pelos alunos. Ou seja, os próprios alunos colocam em funcionamento o conhecimento que eles mesmos construíram, sem nenhuma intervenção docente.

Freitas (2010), destaca que as situações adidáticas representam os momentos mais importantes da aprendizagem, visto que os próprios alunos constroem e sistematizam de suas maneiras o conhecimento diante do que foi proposto. Assim, elas também não podem ser confundidas com as situações não-didáticas, pois nestas não há um planejamento que visa a aprendizagem.

No mais, Brousseau (1986) aponta uma tipologia de situações que estão presentes ao longo do processo entre as atividades de ensino com as diversas possibilidades de uso do saber matemático frente à um problema escolhido de acordo com nível intelectual do aluno. As quais, foram descritas sobre os olhares de Freitas (2010) e Pais (2008) e denominam-se por: ação, formulação, validação e institucionalização.

Na *situação ação*, o aluno realiza procedimentos imediatos para a solução da atividade ou problema que lhe foi proposto por influência mais experimental e intuitiva do que propriamente teórica. Ou seja, realiza determinadas ações mais imediatas, que resultam na produção de um conhecimento de natureza mais operacional.

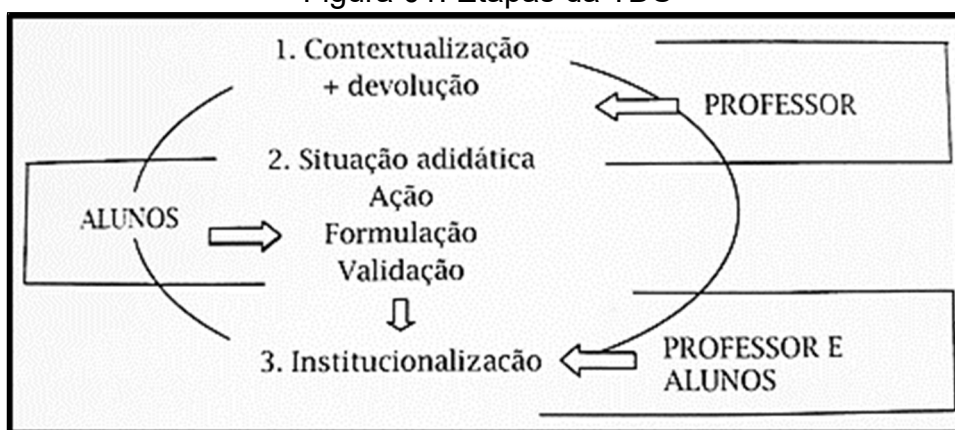
Na *situação formulação*, o aluno passa a utilizar um conhecimento mais elaborado do que na situação anterior, com uso de procedimentos e alguns modelos ou esquemas teóricos explícitos, podendo ainda utilizar uma linguagem mais apropriada para viabilizar o uso da teoria. Contudo, não tem a intenção de julgar a validade do conhecimento utilizado.

Na *situação de validação*, o aluno utiliza mecanismos de prova e o saber já elaborado por ele passa a ser usado com uma natureza essencialmente teórica, o que caracteriza um argumento racional pelo aluno. Estas situações estão relacionadas ao plano da racionalidade e diretamente voltadas para o problema da verdade. Além disso, elas servem para rejeitar ou mesmo para contrapor determinadas proposições.

Por fim, na *situação de institucionalização*, o aluno tem como intuito buscar o caráter objetivo e universal do saber científico com a passagem do plano individual para o plano geral, histórico e culturalmente construído. Neste sentido, o saber tem uma função de referência cultural, ou seja, que vai para além da limitação do contexto pessoal e localizado.

Os autores que fundamentaram tal discussão sobre a TSD, afirmam que as três primeiras situações (ação, formulação e validação) podem ser consideradas como situações adidáticas, enquanto a última (institucionalização) pode ser considerada com uma situação didática, visto que, o professor pode realizar intervenções a fim de que sejam estabelecidas generalizações dos conceitos por parte dos alunos. Tal afirmativa, pode ser corroborada na figura 01 a seguir:

Figura 01: Etapas da TDS



Fonte: Freitas, 2010, p. 103

De posse da compreensão da TSD, consequentemente das tipologias de situações que a compõem, entendemos que tal teoria corrobora o pensamento e construção desta pesquisa. Visto que as situações didáticas preocupam-se com a apresentação do conteúdo, de modo a ter um contexto significativo para os alunos e que também precisa de métodos e recursos didático para contemplar as relações entre professor, aluno e saber frente a um determinado meio. Com isso, elucidado a seguir, um instrumento didático escolhido para compor junto da TSD a base para esta pesquisa, que são as sequências didáticas.

2.2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A respeito da Sequência Didática (SD), enfatizamos a seguir sua origem, assim como, o surgimento das discussões sobre este “instrumento didático” no Brasil, as definições de teóricos da área como Zabala (1998), Pais (2008) e Cabral (2017). Além de citar algumas distinções que são feitas com relação à sua utilização a exemplo da abordagem de cunho teórico e outra de cunho pedagógico.

Nesse sentido, de acordo com os estudos de Cabral (2017) e Nunes e Nunes (2019), as Sequências Didáticas surgem no cenário nacional a partir das pesquisas desenvolvidas pelo grupo de Genebra frente às ações de diversos pesquisadores, como Jean - Paul Bronckart, Bernard Schneuwly, Joaquim Dolz, A. Pasquier, Sylvie Hallerforam, com isso foram introduzidas nos anos de 1980, na formação dos Liceus profissionais. Além disso, foram difundidas em diversos países, mas especialmente na França elas tiveram um maior destaque.

Assim as investigações produzidas por este grupo possuíam direcionamento para aprendizagem da língua francesa no sentido de minimizar as dificuldades recorrentes da produção da língua escrita. Teoricamente, sob os pressupostos do Interacionismo Sócio-Discursivo (ISD). Ou seja, as Sequências Didáticas, foram inicialmente trabalhadas diante da língua materna, para posteriormente se estender a outras áreas. (CABRAL, 2017, p. 32).

Segundo o autor supracitado, o assunto chegou ao Brasil a partir da década de 90, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) como “projetos” e “atividades sequenciadas”. Assim como na França, foi desenvolvida primeiramente no âmbito da linguística e posteriormente estendeu-se a outras áreas da ciência, como por exemplo a Matemática.

Com isso, ao compreender sua origem com influência significativamente francesa, assim como, o surgimento das primeiras discussões no Brasil. Apresentamos a seguir definições por meio de teóricos que a discutem, afim de entender sua composição e de que forma elas podem ser estruturadas. Dentre os quais, ressaltamos as concepções de Pais, Cabral e Zabala respectivamente.

Na concepção de Pais (2008), a SD é desenvolvida a partir da seguinte definição:

É formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem

envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. Essas aulas são também denominadas de seções, tendo em vista seu caráter específico para pesquisa. [...] é preciso estar atento ao maior número possível de informações que podem contribuir para o desvelamento do fenômeno investigado. (PAIS, 2008, p. 102)

Para Cabral (2017) o termo “Sequência Didática” voltado para processo de ensino e de aprendizagem de conteúdos matemáticos, foi definido da seguinte forma:

Um conjunto articulado de dispositivos comunicacionais de natureza escrita ou oral que sistematiza as intervenções de ensino com a intencionalidade objetiva de estimular a aprendizagem de algum conteúdo disciplinar de Matemática a partir da percepção de regularidades e do estabelecimento de generalizações adotando-se uma dinâmica de interações empírico-intuitivas. (CABRAL, 2017, p. 13)

Além desta, também elucidamos a concepção de Zabala. Visto que sequência didática foi definida por este autor como sendo “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”. (ZABALA, 1998, p.18).

De acordo com o mesmo autor, as sequências didáticas são divididas nas seguintes fases:

a) Atividade motivadora relacionada com uma situação conflitante da realidade experiencial dos alunos. b) Explicação das perguntas ou problemas que esta situação coloca. c) Respostas intuitivas ou “hipóteses”. d) Seleção e esboço das fontes de informação e planejamento da investigação. e) Coleta, seleção e classificação dos dados. f) Generalização das conclusões tiradas. g) Expressão e comunicação. (ZABALA, 1998, p.55)

Além disso, o autor expõe uma série de etapas que compõem os modelos de sequências com referências às áreas mais procedimentais como é o caso da Matemática, pautado nas seguintes etapas: apresentação de situação problemática; busca de soluções; exposição do conceito e algoritmo; generalização; aplicação; exercitação; prova ou exame e avaliação. (ZABALA, 1998, p.60)

A partir das definições e do entendimento das etapas que as compõem, ressaltamos que é importante se planejar para utilizá-las. Visto que devem ser levadas em consideração as relações professor e aluno, aluno e aluno, aluno e conhecimento. Assim como, tempo e espaço a ser utilizado, organização dos recursos didáticos e a avaliação dos discentes diante do processo.

Além disso, os objetivos traçados também devem estar claros tanto para o professor, quanto para os alunos. Deve também, ser visto como um instrumento de reflexão sobre a prática docente através da observação do seu processo de desenvolvimento e interação entre todos os envolvidos.

No mais, vale ressaltar que a SD possui uma classificação, em duas grandes dimensões, são elas *estrito senso* e *lato senso*. A primeira, refere-se ao cunho teórico que foi difundida na França e na Espanha. A segunda, refere-se ao cunho pedagógico, a qual Brousseau (2006) denomina de modelo didático espontâneo, possui um direcionamento tanto para sala de aula, quanto para o enfoque de pesquisas científicas. (NUNES e NUNES, 2019, p. 151)

Por fim, elucidamos que a partir da leitura das obras dos autores citados pode-se perceber que a Didática da Matemática oferece uma gama de teorias que possibilitam a construção de Sequências Didáticas. Como a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau, a Dialética-Ferramenta-Objeto de Regine Douady, o Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval, a Teoria Antropológica do Didático (TAD), a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

Embora existam todas estas possibilidades de correlações, optamos nesta pesquisa por construir a SD com base nas Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC) com fundamentação da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau.

As discussões estabelecidas no texto supradito foram de fundamental importância para a compreensão macro do que é este instrumento didático. Assim como, possibilitaram a compreensão e necessidades de correlações com outras teorias como é o caso da UARC para sua construção e posterior utilização em sala de aula.

2.3. UNIDADE ARTICULÁVEL DE RECONSTRUÇÃO CONCEITUAL - UARC

Esta teoria surge de uma motivação do próprio autor, Cabral (2017), enquanto docente do curso de licenciatura, assim como, de sua trajetória profissional percorrida como docente da educação básica, ao longo de anos de labor. Com isso, houve a necessidade desenvolver uma possibilidade alternativa para o exercício docente, uma prática pautada num discurso dialógico promotor de interações verbais

reflexivas afim de gerar condições para os alunos explorarem regularidades, mesmo que intuitivamente, pudessem perceber a necessidade do estabelecimento de generalizações.

Com este formato de abordagem do conteúdo o aluno sai da posição de receptor do conhecimento, enquanto sujeito que apenas tem o papel de repetir um processo, sem por vezes ter a compreensão do motivo pelo qual está ocorrendo. Passa então a exercer um novo papel em sala de aula, o de investigar a partir de seus conhecimentos a situações propostas para se construir com a mediação do professor o conhecimento novo.

Com isso, Cabral (2017), propõem um construto teórico voltado para a reconstrução de conceitos durante as aulas de Matemática. O qual, denominou de Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC) consolidado a partir de uma série de categorias de Intervenções Estruturantes. Tal construto é utilizado com referência para a elaboração de Sequências Didáticas.

Para reconstruir um conceito, o autor da teoria, propõe que o professor crie a primeira destas unidades, denominada de Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual de primeira geração (UARC-1) que serve como ponto de partida e não necessariamente deve ser iniciada com um problema, ela é também denominada de primeira escolha.

Após, deve ter uma outra unidade vinculada com a primeira denominada de Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual de segunda geração (UARC-2). O mesmo critério é adotado para as demais gerações e a medida em que as UARC's são trabalhadas o conceito tende a ser reconstruído. Ou seja, a cada uma delas faz com que o conceito se potencialize de tal modo que na última, a reconstrução é atingida. Assim, Cabral (2017), propõem seis categorias estruturantes que materializam o texto de uma Sequência Didática.

As intervenções propostas pelo autor, estão elucidadas da seguinte maneira: Intervenção Inicial (Ii), Intervenção Reflexiva (Ir), Intervenção Exploratória (Ie), Intervenção Formalizante (If), Intervenção Avaliativa Restrita (IAr) e Intervenção Avaliativa Aplicativa (IAa). As quais, apresentamos uma breve descrição a seguir a partir das concepções evidenciadas pelo autor.

A Intervenção Inicial (Ii), é a primeira peça do jogo na esfera do discurso dialógico-didático, onde o professor estimula os alunos a partir de uma verdade do

pensamento matemático a perceber de maneira empírico-intuitiva as regularidades do conceito que articuladas as outras percepções podem exercer um papel facilitador na reconstrução conceitual pretendida.

A Intervenção Reflexiva (I_r), se materializa por meio de um questionamento, o qual, refere-se a um ou mais aspectos relacionados ao conceito objeto de reconstrução. Onde o aluno é estimulado a refletir sobre o fazer e suas consequências, ou seja, o aluno é levado a levantar hipóteses, fazer conjecturas, verificar possibilidades e estabelecer consequências.

Intervenção Exploratória (I_e), tem por objetivo aprofundar o olhar dos alunos a respeito das respostas obtidas pela (I_r). Elas serão trabalhadas a partir da solicitação do professor aos alunos para executarem os procedimentos, com isso, eles fazem simulações, experimentações, descrições e observações. Esta intervenção juntamente com a anterior possuem um papel fundamental, de acordo com o autor, para a percepção de regularidades no processo de reconstrução conceitual.

A partir das generalizações desenvolvidas nas intervenções anteriores, o professor que orienta o pensamento mediado pela sequência didática se apropria das verdades empírico-intuitivas para enunciar a Intervenção Formalizante (I_f). A qual, possui por objetivo reelaborar as verdades redescobertas pelos alunos e consolidá-las em uma linguagem mais abstrata como um saber disciplinar formal, axiomático próprio da natureza da Matemática.

Após este momento, o professor pode fazer as Intervenções Avaliativas Restritas (IA_r) com um intuito de estabelecer uma primeira aferição de aprendizagem do conceito objeto de reconstrução. Nela, os alunos irão justificar os procedimentos adotados com base nas verdades empírico-intuitivas estabelecidas nas reconstruções conceituais. Ela analisa a aprendizagem com dois enfoques, o primeiro conceitual (significado e o sentido do objeto matemático estudado) e o segundo para justificar os algoritmos (propriedades e operações).

Por fim, as Intervenções Avaliativas Aplicativas (IA_a) buscam a partir da resolução de problemas de aplicação mobilizar as noções conceituais associadas às propriedades operacionais decorrentes de diversos contextos. Entre os quais, são evidenciados contextos reais e/ou abstratos, desde que estejam adequados aos níveis de ensino trabalhados.

Estas Intervenções Estruturantes são divididas em pré-formal (Intervenção Inicial (I_i), Intervenção Reflexiva (I_r), Intervenção Exploratória (I_e)), formal com a

Intervenção Formalizante (If) e pós-formal (Intervenção Avaliativa Restrita (IAr) e Intervenção Avaliativa Aplicativa (IAa).

Neste sentido, destacamos a afirmativa feita pelo autor, de que as Intervenções Estruturantes consolidam o texto de uma Sequência didática para o ensino de conteúdos matemáticos. A qual, é desenvolvida inicialmente por meio de duas modalidades da Intervenção Inicial, denominadas de “Exploração Potencial” e “Conexão Pontual”, assim como, as demais Intervenções Estruturantes materializam a SD escrita.

Associada a elas também foi destacado um tipo oculto de intervenção, denominada de Intervenções Orais de Manutenção Objetiva (IOMO) que sustenta o discurso do professor ao longo do processo de ensino e aprendizagem e lhe permite direcionar os alunos para a reconstrução conceitual.

Neste sentido, o autor descreve a primeira modalidade de Intervenção Inicial, Exploração Potencial, como sendo o início de uma Sequência Didática motivada por meio da apresentação de um jogo, uma situação-problema, um quebra-cabeça, um desafio de natureza aritmética, algébrica ou geométrica ou ainda de natureza híbrida. Ela permite ao professor:

[...] desencadear, a partir de diversos questionamentos aos alunos, uma série de procedimentos investigativos, simulações, conjecturas, hipóteses, analogias, empirias, que são procedimentos típicos de construção do saber matemático. [...] Quanto mais ricas forem essas possibilidades, maior será o “potencial” exploratório da Intervenção Inicial adotada. (CABRAL, 2017, p. 46)

A segunda modalidade de Intervenção Inicial, Conexão Pontual, é apresentada a partir de um comando dado ao aluno que é estimulado a desenvolver um procedimento a partir de seu conhecimento prévio. Este procedimento não necessariamente tem uma relação direta com o seu objeto conceitual em processo de reconstrução. Assim, o autor caracteriza esta modalidade da seguir forma:

Em termos gerais a partir dessa Intervenção Inicial concebida na modalidade “Conexão Pontual ” [Ii – CP] que será adotado pelo professor um conjunto finito de comandos procedimentais pontuais como os elos interligados de uma corrente. Cada procedimento operacional solicitado ao aluno deve estar irremediavelmente ligado ao procedimento anterior. A conexão de n procedimentos pontuais cria, em tese, condições para a percepção de regularidades e do estabelecimento de generalizações empírico - intuitivas fundamentais no processo de aprendizagem do pensamento matemático. (CABRAL, 2017, p. 61)

Além disso, foram criadas categorias que evidenciam as potencialidades da Intervenção Inicial, que são todas as outras intervenções mencionadas anteriormente. Este conjunto de intervenções que potencializam a intervenção inicial foi denominado de “Intervenções Auxiliares” e todas elas compõem o texto da Sequência Didática. Para além destas seis intervenções, foi criada uma sétima denominada de IOMO, cujo objetivo é manter a objetividade planejada, ela funciona ainda como uma espécie de Sequência Didática implícita.

A respeito da IOMO, Cabral (2017) às enfatiza com sendo dotada de uma natureza caótica com relação a dois aspectos. O primeiro, gira em torno da frequência, uma vez que pode acontecer em qualquer momento da aplicação da Sequência Didática. O segundo, está associado com a intensidade, ou seja, ao nível de aprofundamento, assim como, o nível de envolvimento dos alunos com o objeto estudado.

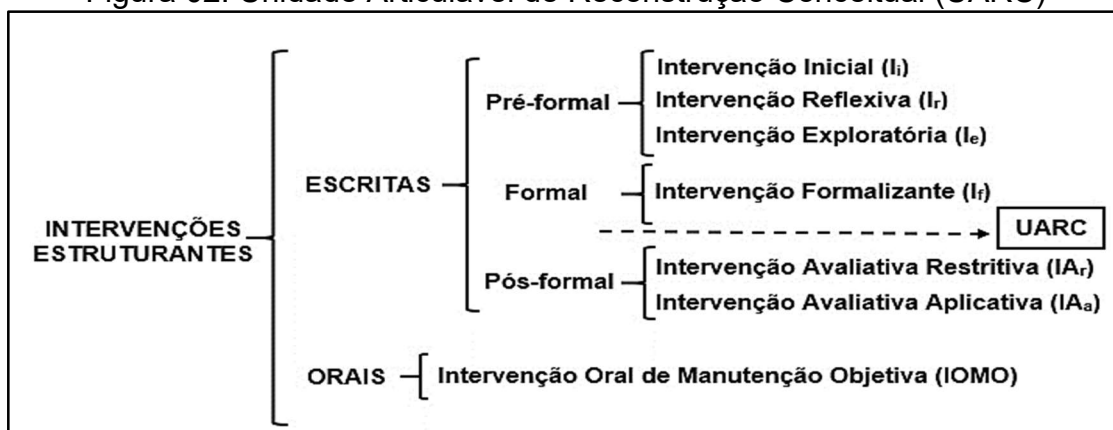
Além disso, os contornos das ações dos alunos em relação às intervenções estruturantes da Sequência Didática dirigida pelo professor ocorrem por meio destas intervenções orais de manutenção objetivas e são caracterizados de acordo com a sua frequência de utilização pelas Zonas de Tensão Discursivas (Alfa, Beta e Gama).

A primeira Zona de Tensão Discursiva, denominada de Alfa, se caracteriza pelas “primeiras articulações argumentativas propostas em direção aos objetos de aprendizagem”. Elas tendem a serem mais acionadas, visto que quanto menor domínio sobre os objetos, maior será o direcionamento do professor por meio das intervenções.

A segunda, denominada de Beta, está associada a uma zona de tensão discursiva menos intensa. Visto que os alunos apresentam uma maior autonomia diante do objeto. Por sua vez, a Gama, tende a avaliar os alunos por meio de indagações e questionamentos e situações mais complexas, a fim de verificar se o objeto foi de fato aprendido por eles.

Neste sentido, para ilustrar as definições que compõem as UARC's, assim como, os demais elementos do construto teórico de Cabral (2017) expomos a figura 02 seguir que foi apresentada pelo autor e sintetiza todas as suas etapas.

Figura 02: Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC)



Fonte: Cabral, 2017, p. 97.

Diante da figura supracitada, vale ressaltar que uma UARC é composta pelas quatro primeiras intervenções, ou seja, pelas etapas pré-formal e a formal, como se pode facilmente perceber pela figura. Dessa forma, apresento a seguir a definição proposta pelo autor sobre a UARC.

É justamente na consolidação das Intervenções Formais que as UARC's têm o seu ciclo completado. Cada UARC é, portanto, definida pelo conjunto de argumentações empírico-intuitivas construído por todas as Intervenções Estruturantes pré-formais que antecedem e inclui alguma Intervenção Formalizante. (CABRAL, 2017, p. 59)

Portanto, a UARC foi abordada enquanto construto teórico que vai subsidiar a construção da Sequência Didática desta pesquisa. Visto que, a partir dela, foram construídas as UARCs (atividades da sequência didática), que serviram de roteiro para os alunos para a reconstrução das identidades dos produtos notáveis. Associada a ela utilizamos também os materiais manipuláveis (como uma forma de Exploração Potencial) enquanto instrumento facilitador para o estudo do objeto estudado.

2.4. MATERIAIS DIDÁTICOS MANIPULÁVEIS

A partir desta derivação de ensino, destacamos a utilização dos materiais didáticos manipuláveis. Materiais estes que de acordo com o estudo de Fiorentini e Miorim (1990), tiveram suas primeiras abordagens e utilidades nas propostas de Pestalozzi (1746-1827) e de seu seguidor Froebel (1782-1852), ao instituírem um currículo em que nas atividades propostas, os alunos deveriam trabalhar com o uso

de materiais manipuláveis, onde as descrições deveriam preceder as definições de modo que o conceito nasce da experiência direta com os objetos.

Assim como, em Montessori (1871-1932), que desenvolveu diversos materiais manipulativos para trabalhar com crianças com deficiência, que após compreender seu forte apelo visual e tátil estende sua utilização para os alunos do ensino regular. Entre seus materiais, destacamos: “material dourado”, “triângulos construtores” e “cubos para composição e decomposição de binômios e trinômios”.

Castelnovo (1970), compreende que o material manipulável deve ter uma dupla finalidade: “exercitar as faculdades sintéticas e analíticas da criança”, sintética, afim de que o aluno construa um conceito a partir do concreto e analítica, pois a criança compreender o objeto para constituir a globalização.

Com isso, a partir dos teóricos citados nota-se que a utilização dos materiais manipuláveis vem favorecendo desde séculos passados até os dias atuais o processo de ensino e aprendizagem em Matemática. Assim, de acordo com Lorenzato (2006), o surgimento das discussões em torno destes materiais no Brasil ocorreu na década de 90. Especificamente sobre a influência de nomes como Julio Cesar de Mello e Souza em 1957 com a obra “Técnicas e procedimentos didáticos no ensino de matemática”. Assim como, com Manoel Jairo Bezerra com a obra intitulada por: “O material didático no ensino de matemática”.

Neste sentido, para Bittar e Freitas (2005) o material didático deve ser interpretado como um instrumento facilitador da aprendizagem. Porém, “não se trata de um instrumento mágico com o qual tudo poderá ser entendido e assimilado pelo aluno”. Ou seja, é necessário que o professor tenha um papel de mediador para que estes materiais sejam utilizados de forma crítica pelos alunos.

Além das assertivas dos autores supracitados, Lorenzato (2006), define os materiais didáticos como “qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem. Portanto, pode ser um giz, uma calculadora, um quebra-cabeça, um jogo...”.

Por sua vez, os Materiais Didáticos Manipuláveis, de acordo com o mesmo autor, podem ser classificados em estáticos e dinâmicos a partir de sua composição e forma com que é utilizado. Por um lado, os estáticos são assim denominados por não possuírem modificações em suas formas e por vezes possibilitam apenas a visualização, como é o caso dos sólidos geométricos em madeira. Porém, existem

outros que possibilitam uma maior participação dos alunos, como é o caso do ábaco, material dourado, entre outros.

Por outro lado, os dinâmicos, são materiais que permitem transformações por continuidade. Com isso, facilitam a redescoberta por parte dos alunos, assim como, auxiliam na percepção de propriedades e a construção de uma efetiva aprendizagem. Vale ressaltar que um material estático pode ser transformado em dinâmico, desde que sejam feitas as devidas alterações.

A partir da compreensão do surgimento, assim como, de sua definição, Sarmiento (2010) evidencia uma série de vantagens para a aprendizagem das crianças com utilização dos materiais manipulativos, das quais: a) Propicia um ambiente favorável à aprendizagem, pois desperta a curiosidade das crianças e aproveita seu potencial lúdico; b) Possibilita o desenvolvimento da percepção dos alunos por meio das interações realizadas com os colegas e com o professor; c) Contribui com a descoberta (redescoberta) das relações matemáticas subjacente em cada material; d) É motivador, pois dá um sentido para o ensino da matemática. O conteúdo passa a ter um significado especial; e) Facilita a internalização das relações percebidas.

Dessa forma, o mesmo autor propõe uma sequência de ensino com base na manipulação de recursos materiais, dispostas da seguinte forma: a) Inicialmente os alunos manuseiam livremente os objetos concretos. Nesta etapa pretende-se aproximar os estudantes dos materiais que serão utilizados, é um momento de exploração, visualização e reconhecimento; b) São realizadas as ações programadas visando à obtenção das relações qualitativas e/ou quantitativas previstas nos objetivos; c) Por meio das interações aluno-objeto-conteúdo-professor buscar a interiorização das relações percebidas na fase anterior; d) Aquisição e formulação do conceito buscando relacionar com os conceitos anteriores e aplicando-os em outras situações.

Diante do exposto, fica evidente a relevância que estes materiais têm sobre o processo de ensino e aprendizagem em Matemática. Porém, eles devem ser pensados com antecedência pelo professor para que o trabalho com os alunos seja bem direcionado e extrapole a ilustração dos conceitos apenas e passe a ser utilizado como um instrumento de redescoberta.

Neste sentido, a definição de Materiais Didáticos Manipuláveis Dinâmicos impulsionou a construção de um kit para esta pesquisa para abordar os produtos

notáveis. O qual, estimula juntamente com o texto da sequência didática e o processo dialógico professor a construção pelos alunos das identidades que compõem o conteúdo.

Ademais, abordamos a seguir de forma detalhada uma das técnicas de análise utilizada para verificar a potencialidade da sequência didática com uso do kit desenvolvido nesta pesquisa. A qual, é denominada de análise microgenética.

2.5. ANÁLISE MICROGENÉTICA

Tendo em vista a necessidade de um instrumento com a capacidade de investigar, selecionar e analisar dados obtidos a partir de interações verbais formadas na relação entre professor, aluno e saber constituídas ao longo da aplicação da sequência didática. A fim de verificar minuciosamente se a aprendizagem foi efetivada de acordo com os objetivos pré-estabelecidos para o ensino. Evidenciamos a seguir uma forma de análise para esta pretensão.

Tal ferramenta foi destacada por Góes (2000) a partir das concepções de Vygotsky sobre o funcionamento humano e as diretrizes metodológicas exploradas por ele, estava incluída a análise minuciosa de um processo, de modo a configurar sua gênese social e as transformações do curso de eventos. Visto que para ele, os processos humanos têm origem na relação com o outro e com a cultura, por isso, tais relações devem ser analisadas. Esta forma de conceber a investigação foi denominada por seus seguidores como “análise microgenética”.

Ou seja, esta abordagem teórico-metodológica surge de correlações entre a educação e a psicologia. Para Góes (2000), trata-se de uma forma de construção de dados que requer a atenção a detalhes e o recorte de episódios interativos afim de relato minucioso de acontecimentos. Além disso, há necessidade do uso de vídeo-gravação (ou áudio-gravação) e a trabalhosa atividade de transcrição.

A própria autora faz uma caracterização e detalha as singularidades da nomenclatura. Porque é denominada de “micro” e porque é denominada de “genética”, como exposto a seguir:

Essa análise não é **micro** porque se refere à curta duração dos eventos, mas sim por ser orientada para minúcias indiciais – daí resulta a necessidade de recortes num tempo que tende a ser restrito. É **genética** no sentido de ser histórica, por focalizar o movimento durante processos e

relacionar condições passadas e presentes, tentando explorar aquilo que, no presente, está impregnado de projeção futura. **É genética**, como sociogenética, por buscar relacionar os eventos singulares com outros planos da cultura, das práticas sociais, dos discursos circulantes, das esferas institucionais. (GÓES, 2000, p. 15)

Para além disso, autores como Wertsch e Rojo (s.d) também discutem suas concepções a respeito da análise microgenética. Sobre os quais em síntese à caracterizam como um acompanhamento minucioso que detalhas as ações intrapessoais e interpessoais dos sujeitos, num curto espaço de tempo afim que sejam identificadas as transformações em suas ações, com a passagem do funcionamento intersubjetivo para o intrassubjetivo.

Neste sentido, tal análise pode ser interpretada frente a três enfoques: o cognitivista, com o plano interpessoal durante os eventos; o interacionista, com foco para o plano das relações interpessoais e o jogo conversacional para a formação do funcionamento intrapessoal; e o discursivo ou enunciativo, que privilegia a dimensão dialógica e relaciona interação, discurso e conhecimento.

De posse da compreensão deste instrumento teórico-metodológico, acerca de sua definição, assim como, de suas classificações e de seu funcionamento. Nesta pesquisa foi considerada a perspectiva enunciativo-discursivo, visto que com ela, pode-se obter recortes das interações (acerca do discurso e do conhecimento) captadas por meio eletrônico com uso de áudio-gravadores. Para com isso, desenvolver análises minuciosas frente a cada uma das atividades que compõem a sequência didática.

Associada a análise microgenética, elucidamos a seguir a análise do discurso na concepção de Mortimer e Scott (2002) como uma forma que compor e corroborar as análises desta pesquisa afim de identificar os indícios de aprendizagem dos alunos frente a apropriação dos produtos notáveis. Tal articulação foi inclusive citada por Góes (2000, p. 17) como uma forma de composição do estudo da microgenética.

2.6. ANÁLISE DO DISCURSO

A teoria da análise do discurso surge como uma ferramenta que permite analisar qualquer tipo de produção textual, como: um diálogo, um texto escrito ou falado produzido em sala de aula frente as interações discursivas.

Neste sentido, Cabral (2004) aponta a fala de Candela ao evidenciar que a teoria é um meio para estudar os processos educacionais na perspectiva de compreender os mecanismos e as condições que propiciam a construção de significados para os alunos. Ou seja, a partir das interações discursivas promovidas em sala de aula nas relações entre professor – aluno ou aluno - aluno, busca-se compreender o discurso que leva os discentes à compreensão do conhecimento.

Diante disso, Mortimer e Scott (2002), apontam a estrutura analítica que compõe a teoria em questão. A qual, foi baseada sob cinco aspectos agrupados em três focos, são eles: o foco do ensino, com as intenções do professor e o conteúdo; o foco da abordagem, com a abordagem comunicativa e o foco das ações, com os padrões de interação e as intervenções do professor.

Na perspectiva do ensino, especificamente nas intenções do professor que fazem alusão ao contexto criado para desenvolver o conteúdo. Segundo Mortimer e Scott (2002), existem seis possibilidades, entre elas a criação de um problema; a exploração da visão dos estudantes; a introdução e desenvolvimento do assunto; direcionamento dos alunos com ideias científicas; direcionamento dos alunos para aplicação de ideias científicas e as consequências de seu uso; e a manutenção de uma narrativa para o desenvolvimento do assunto.

Na mesma perspectiva do ensino, com relação à análise do conteúdo do discurso (assunto científico abordado pelo professor) foram elencadas três categorias. Entre elas: a descrição, com alusão aos enunciados; a explicação, com alusão aos modelos teóricos; e a generalização, com relação à abstração na abordagem do tema em destaque.

Por sua vez, na perspectiva da abordagem, Mortimer e Scott (2002), afirmam que este é o conceito central da estrutura analítica em destaque. Pois fornece a perspectiva sobre como o professor trabalha as intenções e o conteúdo do ensino por meio das diferentes intervenções pedagógicas que resultam em diferentes padrões de interação.

Assim, ao considerar as interações entre o professor e os estudantes, a natureza das intervenções pode ser de dois tipos: comunicativa dialógica (quando o professor considera mais de uma voz, ou seja, permite que o aluno expresse seu ponto de vista); e comunicativa de autoridade (uma única voz é ouvida e o professor considera a fala do aluno apenas do ponto de vista científico escolar). Com isso, entende-se que na prática das interações ocorrem aspectos de ambas as funções.

Além do mais, o discurso pode ser interativo (participação de mais de uma pessoa) e não-interativo (participação de uma única pessoa).

Ao tomar-se por base a compreensão destes conceitos, Mortimer e Scott (2002), apontam quatro classes relacionadas ao papel do professor ao conduzir o discurso em sala de aula, assim como, das interações que ocorrem entre os estudantes. São eles: Interativo/dialógico, onde o professor e estudantes exploram ideias; Não-interativo/dialógico: o professor reconsidera, em sua fala, vários pontos de vista; Interativo/de autoridade: o professor conduz os estudantes com perguntas e respostas para de chegar a um ponto de vista específico; e Não-interativo / de autoridade: o professor apresenta um ponto de vista específico.

Na perspectiva das ações, destaca-se o quarto aspecto da análise, denominado de padrões de interações, que surge na medida em que professor e alunos alternam turnos de fala na sala de aula. Assim, o mais comum são as tríades I-R-A (Iniciação do professor, Resposta do aluno, Avaliação do professor), contudo, também ocorrem outros padrões. Como cadeias de turnos não triádicas do tipo I-R-P-R-P ou I-R-F-R-F onde P significa uma ação discursiva para o prosseguimento na fala do aluno e F um feedback para que o aluno elabore um pouco mais sua fala.

No quinto aspecto, foram abordadas as formas de intervenções pedagógicas do professor, apresentadas em seis categorias. Com as quais, destacam-se a ênfase: na forma dos significados, na seleção de significados, na marcação de significados, no compartilhamento de significados, na checagem do entendimento dos estudantes e na revisão de significados.

Diante disso, entendemos que as teorias citadas subsidiam e corroboram o nosso pensamento com relação as discussões que estabelecidas sobre as situações que envolvem o professor, o aluno e o saber, assim como, as múltiplas consequências dessas relações que ocorrem no rico espaço da sala de aula.

Nessa perspectiva, a análise do discurso juntamente com a análise microgenética serviram de suporte para que fossem desenvolvidas as análises de cada uma das UARC's que compõem a SD, consequentemente da validação de suas potencialidades. A fim de identificar os padrões interativos produzidos, com os quais, enfatizamos as intervenções do professor, visto que com elas pode-se evidenciar o processo de internalização do contexto social para o individual.

2.7. ARTICULAÇÃO ENTRE OS APORTES TEÓRICOS

Com base nas teorias supracitadas elucidamos as articulações entre os aportes teóricos utilizados ao longo da pesquisa, bem como, a intencionalidade e o motivo da escolha de cada uma frente às etapas de sua construção, sintetizados no Quadro 01 que também foi utilizado por Silva (2020) com as mesmas pretensões.

Quadro 01: Articulação entre os aportes teóricos

TSD Situação	UARC Intervenção		AD com AM Interação		Intenção do Professor
Ação	Inicial	Pré-Formal	Interativa Dialógica	Ênfase no Perceptivo / Intuitivo	Engajar os alunos tanto intelectual quanto emocionalmente.
Formulação	Exploratória	Pré-Formal	Interativa Dialógica	Ênfase no Empírico	Apresentar o problema e explorar as ideias e argumentos dos alunos.
Validação	Reflexiva	Pré-Formal	Interativa Dialógica / Interativa de Autoridade	Ênfase no Perceptivo / Intuitivo	Dar oportunidades ao aluno de falar, refletir e expor suas ideias em pequenos grupos ou turma.
Institucionalização	Formalizante	Formal	Não-Interativa /de Autoridade	Ênfase no Teórico	- Estabelecer a visão científica por meio da formalização e generalização dos conceitos pretendidos do saber escolar disciplinar; - Transferir para o aluno o significado do saber escolar elaborado e controle pelo uso e aplicação desse saber.
Monitoramento Processual das aprendizagens	Avaliativa	Pós-Formal	Interativa Dialógica / Interativa de Autoridade	Perceptivo / Intuitivo Empírico e Teórico	Avaliar a mobilização de conceitos, definições e propriedades do saber escolar elaborado em situações reais e/ou fictícias.
Ação Formulação Validação	IOMO	Pré-Formal Pós-Formal	Interativa Dialógica / Interativa de Autoridade	Perceptivo / Intuitivo Empírico e Teórico	Balizar o aluno de modo que este permaneça numa trajetória próxima a pré-estabelecida pelo professor.

Fonte: Silva, 2020, p. 29

Vale ressaltar que todas as teorias foram adotadas com a intenção de embasar cientificamente a atuação do professor, bem como, dos alunos enquanto atores e construtores dos conhecimentos gerados a partir da interação professor-aluno-saber. Diante disso, apresentamos os caminhos percorridos para construção da pesquisa.

2.8. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

De posse das articulações teóricas elucidadas, apresentamos aqui os percursos procedimentais utilizados para o desenvolvimento desta pesquisa de modo a alcançar seus objetivos. Vale ressaltar que estes percursos visam localizar o leitor de um modo global acerca das etapas de construção do processo, visto que em cada capítulo eles foram explanados com maior detalhamento.

No tocante a este aspecto, perpassamos por uma série de levantamentos relacionados aos produtos notáveis, dentre os quais destacamos a revisão de estudos sobre a temática, a compreensão de sua abordagem nos livros didáticos, a percepção dos alunos e professores, assim como, o desenvolvimento de um texto matemático consistente que servisse de subsídio para a construção de nosso constructo.

Com a revisão de estudos a respeito do conteúdo de produtos notáveis, tivemos intuito de compreender de que forma este objeto de vem sendo abordado em pesquisas científicas. Para isso, foram feitas investigações, com as quais balizamos as dissertações, monografias vinculadas às especializações e artigos de revistas. Foram catalogados 33 trabalhos, no período de 2008 a 2018. Destes, buscamos selecionar os que evidenciaram os seguintes critérios: autor (es), ano de publicação, objetivo/questão de pesquisa, metodologia, técnica de sistematização dos resultados, técnicas de análise dos resultados e considerações finais.

Paralelamente a isto, buscamos entender as formas de abordagens e profundidade dos produtos notáveis em livros didáticos do 8º ano do Ensino Fundamental, a fim de verificar de que maneira estes abarcam o conteúdo que é o objeto matemático de estudo desta pesquisa. Assim, procuramos compreender, a metodologia, assim como, as definições empregadas e os exercícios ou atividades vinculadas ao conteúdo abordado pelos livros didáticos. Para isso, optamos pelos livros que compõem a lista do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) do ano de 2017, visto que ele vigorou em 2017, 2018 e 2019.

Na etapa da compreensão da perspectiva dos alunos, foram apresentadas discussões, a fim de contemplar requisitos sobre contextos, ações e experiências acerca da aprendizagem e das dificuldades encontradas por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II em relação ao conteúdo de produtos notáveis em duas escolas públicas de Belém do Pará.

Os instrumentos utilizados para coleta de dados foram os questionários, para que por meio deles houvesse a compreensão dos diversos aspectos que envolvem o processo de aprendizagem de produtos notáveis. Tal instrumento compôs-se com questões subjetivas a respeito das implicações dos alunos sobre currículo, metodologia e avaliação utilizadas pelos docentes, seguido de um quadro de dificuldades e um teste de verificação sobre a temática.

De posse dos dados obtidos, realizamos uma conversão individualmente das respostas dos alunos em dados tabulados. Com a qual foram gerados gráficos por meio do Excel referentes a cada item que o compunha. As análises foram desenvolvidas considerando a tríade (dados – teoria – análise).

Realizamos também uma investigação com professores da educação básica. A qual teve como pretensão, compreender suas perspectivas acerca de diversos aspectos que circundam o processo de ensino de Matemática, consequentemente o ensino de produtos notáveis a nível de Ensino Fundamental II. Neste sentido, para coleta de dados foi utilizada a plataforma do “*google forms*”. Com a qual, foi desenvolvido um questionário (Anexo D) composto com questões objetivas a respeito das implicações dos professores acerca de quatro enfoques: perfil e formação acadêmica; metodologia utilizada para o ensino de produtos notáveis; avaliação; e questões específicas sobre os produtos notáveis com ênfase nos conhecimentos circunscritos e nas identidades que os compõem.

Para isso, houve a elaboração de um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Anexo B). O qual foi enviado para os professores juntamente com o questionário, com o intuito de esclarecer a integridade e preservação das identidades dos participantes, mesmo que por necessidades os dados da pesquisa sejam divulgados.

Após esta etapa, houve a coleta de dados coletados, com os quais foram realizadas análises análogas às dos alunos egressos a partir de gráficos gerados pela própria plataforma a respeito da perspectiva de 36 dos professores. Para o desenvolvimento destas análises, foram estabelecidas correlações com os apontamentos da pesquisa realizada com os alunos, com as abordagens dos livros didáticos, assim como, com evidências de outras pesquisas apontadas por teóricos da Educação e da Educação Matemática.

Além de compreender as perspectivas dos alunos e professores, elaboramos um tratamento matemático sobre produtos notáveis. Com o intuito de apresentar o

tema com maior aprofundamento para os professores afim de situá-lo e caracterizar as possibilidades de interligação a outros conteúdos ou mesmo evidenciá-lo de uma forma para além da apresentada pelos livros didáticos. Assim como, consolidar matematicamente esta pesquisa para a construção da sequência didática.

Assim, a estruturação da Sequência Didática foi feita com base nas discussões estabelecidas no texto supracitado. Com o qual, foi elucidado o embasamento do cabedal teórico que subsidiou sua elaboração, onde a TSD buscou fundamentar as relações estabelecidas no triangulo didático, a SD possibilitou compreender sua definição, a UARC possibilitou sua elaboração em conjunto com os materiais manipuláveis.

Além disso, foram considerados os obstáculos didáticos retratados pelos alunos egressos e a ênfase dada na pesquisa realizada junto aos professores que lecionam neste respectivo nível de ensino. Assim como, as experiências bem-sucedidas de outros pesquisadores na vinculação da Álgebra com a Geometria como foram ressaltadas na revisão de estudos e o tratamento matemático mencionado sobre o conteúdo.

De posse de todas estas interfaces, foi estabelecida para o estudo dos produtos notáveis com os alunos do 8º ano do Ensino Fundamental II, uma sequência didática com 4 atividades. As quais abordam os seguintes conteúdos: Quadrado da soma de dois termos; Cubo da soma de dois termos; Produto da soma pela diferença de dois termos e Quadrado da diferença de dois termos.

Com a SD pronta, seguimos para a fase de planejamento e possibilidades de execução da experimentação. Onde pensamos inicialmente na necessidade de eleger uma determinada turma para aplicação do produto afim de ele seja experimentado por estudantes, com a devida autorização dos responsáveis por meio de termo de consentimento livre e esclarecido (TECLE).

Para utilização desta ideia, existe a necessidade de escolha de uma outra turma. Com intuito de que uma seja a de controle, em que um professor colaborador ministrou o conteúdo de forma expositiva com apoio do livro didático e a outra, a ser direcionada para a aplicação da SD elaborada.

Vale ressaltar que antecedendo à aplicação da SD e o desenvolvimento do conteúdo de forma expositiva, existe a necessidade de uma verificação dos conhecimentos básicos necessários para o ensino dos produtos notáveis em ambas as turmas. Tendo em vista a realização da oficina, ou não, para proporcionar

condições para o ensino deste objeto. Após este processo, na etapa final dos episódios didáticos de ambas as turmas busca-se aplicar um teste de verificação de aprendizagem com a intenção de validar as formas de ensino adotadas nas turmas.

Com a obtenção dos dados gerados pela experimentação da SD, chega-se então na etapa de validação do constructo. Na qual, os dados precisam de uma transcrição a partir dos áudios coletados, bem como, uma análise baseada nas teorias da análise microgenética e análise do discurso.

Na transcrição, conforme a análise microgenética, cada fala passa a ser chamada de turno, que devem ser seccionadas em segmentos e episódios. Após extraídos os indícios de aprendizagem, trechos em que se percebe que o estudante avança na formalização de conceitos pretendidos. Aplica-se a análise do discurso, para verificar quais níveis epistemológicos de aprendizagem foram manifestados nos padrões de comunicação dos estudantes. De posse dos resultados encontrados pode ser feita a validação da SD elaborada nesta pesquisa, ao considerá-la como potencialmente válida para o ensino de produtos notáveis ou não.

Vale ressaltar que mesmo com todas estas etapas planejadas e estruturadas em relação à experimentação e validação da SD, houve a necessidade de um redirecionamento do processo em decorrência das questões sanitárias e de saúde pública nos anos de 2020 e 2021, estendido até o início de 2022. Onde optamos pela manifestação de 20 professores por meio da aplicação de um questionário.

Este questionário é composto de três partes. A primeira, referente à avaliação individual de cada UARC; a segunda, da avaliação do conjunto das UARC's; e a terceira da avaliação complementar com o foco na avaliação aplicada, na promoção da interatividade entre os participantes, na identificação das contribuições em relação aos elementos que compõem o triângulo didático professor-aluno-saber e a identificação das potencialidades da proposta para o ensino do objeto matemático elencado.

Portanto, de posse dos dados obtidos com a sua aplicação. Foram realizadas análises baseadas nas considerações feitas pelos professores. Neste sentido, ao tomarmos por base os apontamentos indicados pelos participantes (sejam positivos ou colaborativos), realizamos as indicações por meio de corroborações ou por colocações de contrapontos com a pretensão de validar a sequência didática como potencialmente válida para o ensino do objeto matemático ou não, de modo análogo ao processo associado à análise do discurso e microgenética.

3. SOBRE O ENSINO DE PRODUTOS NOTÁVEIS

Neste capítulo há a compilação de uma revisão de estudos a respeito do conteúdo de produtos notáveis com intuito de compreender de que forma este objeto foi abordado em outras pesquisas científicas. Assim como, foram apresentadas as identificações sobre a profundidade das abordagens do tema em quatro livros didáticos indicados no Guia do Livro Didático do PNLD. Por fim, foi elucidada uma investigação desenvolvida com alunos e professores para entender as percepções de ambos frente ao processo de ensino e de aprendizagem.

3.1. REVISÃO DE ESTUDOS

Para desenvolver esta etapa da pesquisa, foram feitas investigações de estudos que evoluíram o tema “produtos notáveis”, com as quais balizamos: as dissertações, monografias vinculadas às especializações e artigos de revistas. Tais buscas foram feitas por meio das seguintes palavras: “produtos notáveis”, ““monografias” com produtos notáveis”, ““dissertações” com produtos notáveis” e ““teses” com produtos notáveis”.

Estas pesquisas foram desenvolvidas em sites de buscas convencionais como o “Google” e o “Google Acadêmico”. Assim como, em repositórios das universidades federais e estaduais, no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD).

Vale ressaltar que foram catalogados 33 trabalhos, no período de 2008 a 2018. Destes, buscamos selecionar as pesquisas que evidenciaram de um modo geral os seguintes critérios: autor (es), ano de publicação, objetivo/questão de pesquisa, metodologia, técnica de sistematização dos resultados, técnicas de análise dos resultados e considerações finais.

Frente a estes critérios, foram estabelecidas três categorias, a fim de agrupar, comparar e verificar trabalhos de mesma natureza e a diversidades de suas abordagens. Com as quais, elencamos os trabalhos direcionados aos estudos teóricos (ensino e aprendizagem), aos empíricos (experiências, constructos ou

instrumentos desenvolvidos para o ensino) e aos diagnósticos (apontam dificuldades dos alunos sobre o tema), todos dispostos a seguir no quadro 1 a seguir.

Quadro 02: Pesquisas identificadas por categoria

AUTOR	ANO	TÍTULO	IES	TIPOLOGIA	CATEGORIA
Salete Rodrigues	2008	Uma análise da aprendizagem de produtos notáveis com auxílio do programa Aplusix	PUC SP	Dissertação	Teórico
Keyla Cristina Borgato	2013	O ensino de Produtos Notáveis e Fatoração de Polinômios: uma articulação entre Álgebra e Geometria	UEL	Dissertação	Teórico
Tamiri Pinto Soares	2018	Produtos Notáveis: aplicação da Atividade orientadora de ensino a partir da resolução de problemas	UESC	Dissertação	Teórico
Lúcia Virginia Mamcasz Viginheski	2013	Uma abordagem para o ensino de Produtos Notáveis em uma classe inclusiva: o caso de uma aluna com deficiência visual	UTFPR	Dissertação	Empíricos
Angélica Rodrigues Ventura e João Bosco Laudares	2016	Ressignificação dos Produtos Notáveis Utilizando Material Concreto	PUC Minas	Revista	Empíricos
Érica Maria Rennó Villela Dario	2017	Produtos Notáveis no 8º ano do Ensino Fundamental II: contribuições da utilização de diferentes recursos didáticos	PUC SP	Dissertação	Empíricos
Katia Henn Gil	2008	Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra	PUCRS	Dissertação	Diagnóstico
Lauren Darold Brum	2013	Análise de erros cometidos por alunos de 8º do ensino fundamental em conteúdo de álgebra	UNIFRA	Dissertação	Diagnóstico

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

3.1.1 Estudos Teóricos

Na primeira categoria, abordamos os estudos de Rodrigues (2008), Borgato (2013) e Soares (2018). Vale ressaltar este agrupamento se deu por conta das similaridades com relação aos objetivos, visto que os autores de todos realizaram intervenções a fim de contribuir para o ensino e a aprendizagem dos produtos notáveis. Assim, compreendermos de que forma ocorreram estas intervenções e quais foram os percalços para desenvolvê-las traz contribuições para esta pesquisa.

Rodrigues (2008) propôs como objetivo para sua pesquisa investigar a aprendizagem de Produtos Notáveis de alunos de 8º e 9º anos em uma escola pública, com auxílio do programa de computador Aplusix. A qual teve a finalidade de contemplar aos seguintes questionamentos: o programa Aplusix poderá contribuir para a coordenação de registros de representação semiótica em relação aos produtos notáveis? Em quê? Quais as evoluções percebidas?

Nesse sentido, Rodrigues (2008) ao compreender as dificuldades dos alunos sobre o conteúdo de produtos notáveis, em articular a linguagem algébrica, fundamenta seu trabalho na Teoria dos Registros das Representações Semióticas de Raymond Duval afim de investigar se há coordenação desses registros frente aos problemas envolvendo o conteúdo. Além disso, como referencial metodológico, adotou os princípios da Engenharia Didática que tem por objetivo organizar o trabalho didático na exploração do domínio do conhecimento.

Ao considerar os pressupostos da Engenharia didática, a autora trabalhou inicialmente com 7 alunos do 8º e 9º anos de uma escola pública de São Paulo. Com os quais, realizou levantamento de conhecimento que eles possuíam, conversou com a professora regente para compreender de que forma se deu o ensino. A partir disso, desenvolveu uma sequência de atividades que visaram o desenvolvimento do pensamento algébrico, com o cálculo de área (com as conversões de suas representações) e o uso do programa Aplusix como ferramenta para aprendizagem.

Após essa investigação, ela fez um estudo piloto com dois alunos do 9º ano que desenvolveram individualmente as atividades em 12 encontros de 60 minutos, afim de avaliar a viabilidade desta sequência para reestruturar para o estudo oficial. Com isso, foi possível fazer alterações, acrescentar e exclui atividades e adaptar o programa de acordo com seu interesse, afim sanar possíveis falhas no processo.

Para o estudo oficial, 15 alunos aceitaram participar da atividade, no contraturno e com a devida autorização dos responsáveis. Desses, três foram escolhidos para análise ao considerar-se como critério a frequência. Além disso, sequência foi dividida em três fases, todas possuíam conversões de registros (algébrico, numérico e figural).

A primeira, chamada de pré-teste, com o objetivo de diagnosticar os conhecimentos prévios dos alunos, na segunda, foram as atividades de aprendizagem, houve intervenção e pode-se perceber que tiveram dificuldades na compreensão de conceitos matemáticos. Na terceira, chamada de pós-teste, não houve intervenção, pois, a autora teve por objetivo investigar os avanços dos alunos. Em cada uma delas fez análise a priori e a posteriori os registros dessas atividades e a técnica utilizada para obter os dados dos alunos, foi por meio de gravações do “videocassete”, um recurso do próprio software.

Com resultado de sua pesquisa, Rodrigues (2008), afirmou no pré-teste que os dois alunos apresentaram dificuldades em resolver o quadrado de um binômio, pois queriam elevar ambos os termos ao quadrado. Com relação ao produto da soma pela diferença, as dificuldades foram nas operações com os números inteiros, além de não dominarem totalmente técnicas de operações com expressões numéricas.

Outras dificuldades apresentadas pelos três alunos, foram com relação a distinção do cálculo de área e perímetro, pois ao serem solicitados para calcularem a área, somavam os lados. Ou seja, eles não conseguiram fazer a conversão do figural para o numérico. Além desses, outros equívocos foram percebidos, como a multiplicação de monômios visto que multiplicaram apenas os coeficientes e não a parte literal e os nos sinais. Consequentemente, também tiveram dificuldades com a propriedade distributiva, pois multiplicavam apenas os primeiros e os segundos termos entre si.

Com isso, a autora trabalhou as dificuldades dos alunos na segunda fase e fez por vezes intervenções quando achava conveniente e quando os alunos a perguntavam. Por fim, na última fase, após a análise a posteriori do pós-teste pode-se perceber que os alunos conseguiram evoluir significativamente ao fazer um comparativo entre o pré e o pós-teste. Considera-se que este fato está associado à utilização do programa e a mediação estabelecida pela professora.

Sobre as considerações finais a autora apresenta a evolução dos alunos frente as representações que foram propostas para análises dos testes. Na transição do registro na língua natural para o algébrico, dos três alunos que participaram um obteve sucesso tanto no pré-teste quanto no pós-teste, o segundo, apenas no pós-teste e o terceiro não conseguiu fazer a transição em nenhum dos dois.

Além destes registros, vale ressaltar que nos demais, em sua grande maioria os alunos apresentaram uma evolução conceitual significativa, presente em seus desempenhos nas atividades analisadas. Ela destaca como um ponto chave o papel que teve enquanto mediadora pedagógica do processo e que a partir disso, pode fazer modificações e adaptações da sequência para o estudo final.

A partir do estudo desenvolvido por Rodrigues (2008), destacamos sua preocupação em investigar inicialmente as dificuldades apresentadas pelos alunos para que por meio delas fosse realizada uma intervenção. A qual se deu positivamente com a utilização de um software enquanto ferramenta facilitadora do processo de aprendizagem dos alunos. Assim como, a utilização em paralelo da sequência didática, como um material direcionador e de grande valia.

Borgato (2013) objetivou em sua pesquisa, investigar o papel das representações geométricas no processo de aprendizagem dos produtos notáveis e fatoração de polinômios, a partir da elaboração de uma sequência didática que foi desenvolvida com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental.

A metodologia utilizada neste trabalho foi a Engenharia Didática, proposta por Artigue (1996). Além disso, a autora cita Almouloud, ao apresentar as fases da pesquisa: as análises preliminares; concepção e análise a priori; experimentação; análise a posteriori e validação.

De acordo com as fases previstas, apontadas pela autora em sua metodologia, desenvolveu um levantamento teórico sobre os produtos notáveis, utilizando propriedades e operações com polinômios. Com o qual, percebeu a identificação de relações entre Álgebra e Geometria, quando se trata do estudo dos produtos notáveis. Com isso, elaborou a sequência didática para ensino de produtos notáveis e fatoração de polinômios por meio de representações geométricas.

Esta sequência foi desenvolvida com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, de uma escola estadual localizada numa cidade do interior do estado de São Paulo. A turma era composta por 30 alunos, com os quais formou-se 10 trios que foram denominados de T1, T2... para análise. A experimentação foi realizada

durante dez aulas sequenciais de Matemática, assim, os dados foram coletados mediante análise dos registros escritos dos alunos.

Sobre a sequência didática desenvolvida pela autora, foi composta por atividades que estão relacionadas aos conceitos de produtos notáveis (quadrado da soma, quadrado da diferença e produto da soma pela diferença), além disso, permite que o aluno identifique a fatoração como uma forma de escrita destes produtos.

Nesse sentido, a partir da noção proposta pela Engenharia Didática, Borgato (2013) dividiu a aplicação da sequência em duas etapas: A primeira etapa, composta por 9 questões, foi realizada em sete encontros. Em cada um desses encontros os alunos em trios recebiam o material preparado com as questões da sequência didática. Na segunda etapa, também composta por 9 questões, foi aplicada em um encontro, nesta os alunos trabalharam de forma individual, pois visava consolidar os novos conhecimentos para generalização do objeto matemático.

Sobre as análises, a autora apresenta para cada uma das atividades a análise a priori, logo em seguida, a posteriori. Noção esta tanto na fase 1, quanto na fase 2. Dessa maneira, ao final destas abordagens, ela apresenta uma análise global das atividades referentes às duas fases, com as quais destacamos alguns pontos evidenciados pela autora.

Borgato (2013), apontou na questão 1 que as igualdades foram identificadas e até o momento da primeira institucionalização, os alunos não haviam pensado no uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Além disso, os estudantes não lembravam como calcular áreas de retângulos, cujas medidas dos lados fossem expressas algebricamente. Após uma breve revisão, conseguiram ampliar este conceito e utilizá-lo para a obtenção de novos saberes dispostos nas questões 2, 3 e 4.

As atividades de números 5 a 7, os alunos deveriam observar as representações geométricas e preencher lacunas relativas a essas figuras. Esta característica é citada pela autora como um facilitador para questões, pois alguns estudantes ainda demonstram insegurança sobre os novos conteúdos.

Afirmou ainda que na resolução das atividades 8 e 9 os alunos, de maneira geral, demonstraram domínio na representação geométrica dos produtos notáveis trabalhados, tanto em situações nas quais deveriam fazer a representação geométrica, como em situações nas quais deveriam analisar uma representação geométrica dada.

Sobre as atividades pertencentes à segunda etapa, num contexto geral os estudantes demonstraram de fato, construíram os novos conhecimentos e saberes pretendidos pela autora. Entretanto, ela ressalta algumas dificuldades percebidas ao longo da experimentação.

Representar geometricamente uma medida de comprimento expressa algebricamente por uma subtração de monômios; representar geometricamente uma medida de área de retângulo cujas dimensões estejam expressas algebricamente também por uma subtração de monômios; dominar o cálculo com números inteiros; resolver cálculos que envolvam potenciação; agrupar termos semelhantes em expressões algébricas; utilizar, em situações específicas, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição; fatorar expressões algébricas, utilizando os casos de fatoração fator comum em evidência e agrupamento.

Logicamente que algumas destas foram sanadas ao longo do processo. Porém, situações como agrupar monômios semelhantes, aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em situações mais específicas e fatorar expressões algébricas não representadas geometricamente eram dificuldades previstas como possibilidades de não superar totalmente. Sendo assim, a não superação destas dificuldades não significa uma fragilidade da nossa metodologia e sim um indício de que estes conceitos devem ser retomados.

A partir dos resultados obtidos sobre os alunos que participaram da experimentação da sequência didática. Borgato (2013), conclui dessa maneira que os alunos se tornaram capazes de identificar, compreender e operar com polinômios, sobretudo nos casos de produtos notáveis.

A sequência didática tanto na pesquisa de Rodrigues (2008) quanto nesta mostrou-se ser um instrumento que viabiliza o estudo dos polinômios, consequentemente dos produtos notáveis e fatoração. Assim como, a correlação entre a Álgebra e a Geometria, visto que facilita a visualização no processo de aprendizagem dos alunos. Outro ponto elucidado pela autora, foi com relação a superação das dificuldades de conceitos básicos antes de iniciar o conteúdo.

Soares (2018) indicou como objetivo de sua pesquisa, desenvolver uma atividade orientadora de ensino tendo como base a resolução de problemas para promover a aprendizagem de produtos notáveis. Para isso, a autora apresentou sua pesquisa com a seguinte divisão: iniciou com uma exposição da história da álgebra e da definição matemática dos produtos notáveis, no segundo momento, abordou a

fundamentação teórica; no terceiro, o percurso metodológico e o desenvolvimento da atividade orientadora de ensino e finalizou com a análise dos dados obtidos.

Como fundamentação teórica de sua pesquisa, a autora se apoiou nos estudos de Polya (1978) e Dante (1991) para abordar discussões acerca da resolução de Problemas, assim como, em Garnier (1996), Moura (2001) e Leontiev (1983) e outros para abarcar os estudos a respeito da Teoria da Atividade e para elaborar a Atividade Orientadora de Ensino (AOE) que foi a sua proposta de ensino.

Dessa maneira, Soares (2018), caracteriza sua pesquisa como qualitativa, embasada pelos textos de Minayo (1996), Ludke e André (1986). Além disso, afirmou que a pesquisa sucedeu-se com alunos de uma escola municipal, de Teixeira de Freitas da Bahia. Os sujeitos foram 16 estudantes do turno vespertino, do 8º e 9º anos, escolhidos para participar pela professora regente das turmas.

Para realizar a coleta dos dados, optou-se por utilizar os seguintes instrumentos e técnicas: atividade diagnóstica (afim de identificar o nível de conhecimento dos alunos); diário de campo (um método cuja finalidade é registrar e descrever todos os caminhos percorridos e as estratégias utilizadas no processo da pesquisa) – Intervenção de Ensino; atividade avaliativa (teve a finalidade de identificar como o grupo aprendeu o conteúdo trabalhado, e se os participantes fizeram a associação das situações-problema com os produtos notáveis).

Para o desenvolvimento da pesquisa, foi necessário cumprir as seguintes etapas: preparação de instrumento diagnóstico; aplicação de instrumento diagnóstico (Atividade Diagnóstica – AD); intervenção (aplicação da atividade orientada de ensino) e aplicação do instrumento avaliativo (Atividade Avaliativa - AA). A Atividade Orientadora de Ensino consiste em apresentar um problema que envolveu separadamente o quadrado da soma, quadrado da diferença e produto da soma pela diferença.

Foram realizadas duas atividades, uma no início chamada de (AD) para diagnosticar o conhecimento dos alunos, antes da execução da AOE, e outra após (AA), para avaliar o desenvolvimento dos alunos. A aplicação da AOE ocorreu durante duas semanas e em oito aulas. A análise inicial foi feita a partir da AD e, em seguida, da AA, para isso, Soares (2018) utilizou a análise de erros.

Sobre as análises obtidas na fase da AD, a autora ressaltou que poucos alunos do 8º ano, que resolveram a primeira questão, usaram o conceito de área, mas não relacionaram com o produto notável quadrado da soma e não identificaram

o valor a ser acrescentado. Na amostra dos alunos do 9º ano, apenas uma aluna tentou resolver, esta, também não relacionou com os produtos notáveis, nem mesmo chegou a solução correta.

Na segunda questão da AD aplicada aos alunos, embora a questão fosse objetiva, poucos acertaram, e os que acertaram não justificaram a resposta. Na terceira e quarta, os alunos do 8º ano não conseguiram expressar nenhum tipo de raciocínio, interpretação do problema e de dados. Somente uma aluna do 9º ano conseguiu com o item a) e o identificou como produto da soma pela diferença.

Dessa forma, alguns erros foram destacados pela autora, dos quais elucidou os seguintes: troca de operação (o aluno confundiu as operações de potência com multiplicação de fatores diferentes, assim como, um número elevado ao quadrado, realizou a operação do dobro do número); erro de operações básicas, o aluno realizou a operação de adição incorretamente.

Em ambos os casos, quadrado da diferença e quadrado da soma, em questões totalmente numéricas, o aluno conseguiu resolver, mas, quando possuía incógnita, multiplicou somente o coeficiente com a variável. Além disso, nestes mesmos casos, foi notado que, quando as questões possuíam variável, alguns alunos apresentaram, como resultado, somente dois termos e não três termos (o termo dobro do primeiro, vezes o segundo, não foi identificado); ou, ainda, só elevou ao quadrado o primeiro termo, sem considerar a variável, e realizou a operação entre os números.

A AA foi direcionada aos alunos após a AOE, como forma de concluir o trabalho e identificar se houve crescimento conceitual e de aprendizado por meio dos problemas trabalhados. Dessa forma, na questão 1, apenas três alunos do 8º ano não conseguiram, assim, todos os outros identificaram que o item se tratava de um quadrado da soma. Os alunos do 9º ano demonstraram melhor interpretação e desempenho.

Na questão 2, os alunos do 8º ano conseguiram interpretar a questão perfeitamente, usando o artifício da representação geométrica. Em relação à área de 900 centímetros quadrados da mesa, uma aluna não conseguiu identificar que o lado do quadrado seria a raiz quadrada da área, e interpretou o lado como o próprio valor da área. Dentre os alunos do 9º ano, poucos apresentaram dificuldades.

Na questão 3, sobre o produto da soma pela diferença, os alunos do 8º ano recorreram a recursos do desenho geométrico para explorar a interpretação. Os

quatro alunos do 9º ano não conseguiram apresentar nenhum tipo de raciocínio sobre a questão, e os demais conseguiram concluir com uma linha de pensamento bem objetiva e clara, demonstrando afinidade com o conceito.

Na questão 4, não necessitava de interpretação, somente cálculos dos produtos notáveis e demonstração do que foi aprendido. Na turma do 8º ano, desenvolveram o produto notável de modo bem específico, em contrapartida, cinco alunos não conseguiram desenvolver corretamente as respostas. Na turma no 9º, houve aluno que resolveu as questões puramente aritméticas de maneira direta, e alguns outros recorreram à definição de produtos notáveis.

Após a análise das questões na fase que antecedeu a AOE, assim como, na que sucedeu, Soares (2018) afirmou nessas comparações, que os alunos sempre recorrem ao desenho para alinhar a forma de pensamento e identificar qual o caso de produto notável e, a considerar assim, desenvolver e conclui-lo. Com isso, o método de trabalho por meio da situação-problema, alinhado à interpretação geométrica, proporcionou aos alunos melhor compreensão do conteúdo.

Neste sentido, entendemos que a pesquisa de Soares (2018) trouxe contribuições inicialmente a respeito dos procedimentos adotados com as avaliações diagnóstica, atividade orientadora e posteriormente a atividade avaliativa. Assim como, na correlação que foi estabelecida na AOE com a resolução de problemas enquanto instrumento que mostrou-se válido para o ensino dos produtos notáveis e diferente das outras pesquisas.

3.1.2 Estudos Empíricos

Na segunda categoria, abarcamos os estudos de Viginheski (2013), Ventura e Laudares (2016) e Dario (2017) associados às empirias (experiências dos pesquisadores), com a utilização de construtos que viabilizaram o processo de ensino e consequentemente de aprendizagem dos alunos como uma alternativa para o desenvolvimento dos produtos notáveis.

Viginheski (2013) ressaltou como objetivo de sua pesquisa o desenvolvimento de procedimentos didático-metodológicos, que possibilitem aos deficientes visuais inclusos e aos demais alunos do ensino regular a apropriação de conhecimentos matemáticos, mais especificamente, dos produtos notáveis. Com o intuito de

responder à questão norteadora: quais procedimentos didático-metodológicos são necessários, para que os deficientes visuais inclusos no ensino regular, assim como os demais alunos, apropriem-se de conceitos matemáticos?

Para isso, a autora apoiou-se na pesquisa qualitativa com ênfase para o estudo de caso. Visto que esta abordagem auxiliou nas descrições, procedimentos e análise dos resultados obtidos. Como referencial teórico foram adotados, dois momentos: o primeiro, com discussões sobre a Educação Inclusiva. No segundo capítulo, com destaque para o Ensino de Matemática e a inclusão de Deficientes Visuais, a partir das contribuições de Vygotski e colaboradores como Galperin no processo ensino e aprendizagem.

Além disso, foi destacado que a pesquisa teve seu desenvolvimento em um colégio da rede estadual de ensino, no município de Guarapuava, Paraná. Com isso, foi escolhida uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental, constituída por quarenta e um alunos que possuía uma com deficiência visual inclusa. A coleta de dados foi realizada por meio da observação e entrevistas, por um período de quatro aulas, com o objetivo de coletar informações importantes para a intervenção pedagógica.

Dessa forma, buscou compreender os conhecimentos que os alunos possuíam sobre os conceitos geométricos área e volume, pré-requisitos necessários para abordagem geométrica do conteúdo de produtos notáveis, a pesquisadora elaborou uma avaliação. Após a conclusão do projeto, a avaliação foi reaplicada. Foi estabelecido um parâmetro comparativo entre a avaliação inicial e final.

Em meio às avaliações a autora propôs uma intervenção pedagógica, com planos de aulas que buscaram seguir as etapas propostas por Galperin. Os quais foram divididos em cinco blocos que abordavam: Sensibilização sobre as diferenças; Figuras geométricas; Perímetro, área, quadrado da soma, quadrado da diferença e produto da soma pela diferença; Volume, cubo da soma e cubo da diferença; Área e volume da sala de aula. Nestes blocos não foram entregues modelos dos produtos notáveis prontos aos alunos, pois eles deveriam elaborá-los a partir das condições e materiais oferecidos, com possibilidades de generalizações em diferentes situações.

A respeito dos resultados e análises destacados por Viginheski (2013), sobre a avaliação inicial e específica a respeito da definição de área o cálculo de área e volume. Entre os alunos que responderam, apenas oito fizeram uso da unidade m^2 na definição de área. Utilizaram termos como medida de um lugar, marcação de espaço, espaço ou lugar que pode ser medido por m^2 . Os outros dezoito utilizaram

termos como: dimensões, espaço e lugar, sem relacioná-los à unidade. Outra definição de área, utilizada por cinco alunos, expressava a relação entre: largura $\times$ comprimento e lado $\times$ altura. Essa relação trata-se da área específica de alguns quadriláteros e não o conceito de área de forma generalizada.

Em outra questão que consistia em calcular a área, 83% chegaram ao resultado. Entretanto, os demais apresentaram alguns erros como troca da multiplicação por adição, respostas aleatórias sem cálculos, porém com evidências da unidade de medida. A aluna com deficiência montou o algoritmo correto, porém não conseguiu efetuar corretamente a operação. Foi possível perceber também nas respostas de outros alunos dificuldades em operar com números decimais. Constatou-se nessa avaliação, de uma forma geral que assim como o conceito de área, o de volume também não apresentou-se consolidado pelos alunos.

No bloco I, foi proposto pela pesquisadora uma peça, uma livre adaptação do romance “O Estorvo”, de Chico Buarque. Com a qual, ela pode apresentar discussões sobre as diferenças. No bloco II, foram utilizados os blocos lógicos e após o contato inicial e conhecimento dos alunos sobre as características do material, lhes foi proposto o jogo de dominó coletivo. Ao final dos jogos, a pesquisadora questionou os alunos sobre o que caracterizava cada uma das figuras geométricas: o quadrado, o retângulo, o círculo e o triângulo. Foi quase que unânime a resposta dos alunos sobre as principais características das figuras geométricas.

Com o objetivo de verificar a compreensão sobre os conceitos abordados nos jogos: classificação, definição das figuras geométricas foram elaboradas algumas atividades. A autora ressalta que percebeu a importância em fazer uso de diferentes formas de registros na disciplina, uma vez que a diversidade se fez presente também nas formas de se expressar. Após as discussões, os alunos notaram que o número de lados não era suficiente para definir um quadrado e um retângulo, também eram necessárias outras características essenciais para a definição.

No bloco III, para abordar o conceito de área e perímetro e o desenvolvimento dos produtos notáveis: quadrado da soma, quadrado da diferença e produto da soma pela diferença, a autora fundamentou-se na Geometria grega, no que se refere ao cálculo de áreas pela forma de completar quadrados e no uso de jogos como encaminhamento metodológico motivador para a aprendizagem, em específico o jogo pré-enxadístico “Prenda o Rei”, de origem desconhecida.

Com isso, o material utilizado para essa etapa da pesquisa foi confeccionado, utilizando cores contrastantes de forma que a aluna com deficiência também pudesse fazer uso sem dificuldades. Assim, em relação ao perímetro, dez duplas não chegaram ao resultado, pois atribuíram valores aleatórios, evidenciando que usaram a régua para medir. Para área, houve o cálculo corretamente, tanto em unidades como em centímetros quadrados por três duplas. Mas ao final das atividades, a pesquisadora, ao perceber as dificuldades dos alunos durante a sua realização, resolveu na lousa as atividades, com a participação de todos.

A atividade da sequência os alunos precisavam determinar a área total do novo tabuleiro. 56% dos alunos, ao considerarem o quadrado com dimensão 12 u, encontraram 48 unidades de perímetro e calcularam a área a partir das dimensões: $12 \times 12 = 144$ ua, inclusive a aluna com deficiência. Alguns deles trocaram os valores de área e perímetro, outros acertavam o perímetro e erravam a área e vice-versa e alguns não acertaram a questão apenas por erro de cálculo. Três alunos fizeram o cálculo da área do novo tabuleiro a partir da soma das áreas encontradas anteriormente: $A = 64 + 32 + 32 + 16 = 144$. Os resultados desses alunos foram utilizados para a socialização e chegaram à conclusão de que a área poderia ser calculada por: 122 e, também $(8 + 4).2$.

Numa outra etapa da pesquisa, as peças do tabuleiro foram viradas, cujo lado era sem graduação. O objetivo da atividade foi o de estabelecer uma ponte entre os conhecimentos aritméticos e os algébricos, a abstração do conceito de área. Alguns alunos fizeram uso da soma dos lados: $p = x + x + x + x$ e outros fizeram uso da multiplicação iguais: $p = 4 \cdot x$. Para a área, foram encontrados resultados como: $x \cdot x$ também x^2 . Apenas quatro alunos utilizaram variáveis diferentes para o cálculo da área: $x.y$, o que pode indicar que eles ainda não consolidaram o conceito de área.

Ao serem solicitado sobre a área do novo quadrado, formado por todas as peças, por meio da soma das dimensões, mais de 50% respondeu como: $x^2 + x.y + x.y + y^2 = x^2 + 2.x.y + y^2$, sendo que 11 alunos completaram a equação com $(x + y)^2$. Outros expressaram a área de outras formas e dois não responderam a questão.

Com relação à área de um quadrado, cuja dimensão fosse alterada por uma subtração, 68% dos alunos responderam como: $(x - y)^2$. Assim como em outras atividades, a pesquisadora resolveu as questões na lousa a partir das participações

dos alunos, uma vez que nem todos conseguiram realizá-las satisfatoriamente e o número de alunos da sala e o tempo da aula não permitiram o atendimento individual. Assim, área da figura resultou em $x^2 - 2.x.y + y^2$.

No produto da soma pela diferença, os alunos receberam uma espécie de tabuleiro graduado, com dimensões: $(8 + 4) u$ na largura e $(8 - 4) u$ na altura. Ao serem questionados sobre a área que faltava para completar o quadrado, responderam $16 u^2$, cujo quadrado completo teria $64 u^2$ de área. Conforme conclusões dos grupos, algebricamente, a área do retângulo, com dimensões $(x + y) \cdot (x - y)$ poderia ser calculada como $x^2 - y^2$.

Dessa forma, foi constatado que o material que desenvolvido para essa etapa da pesquisa, o tabuleiro de xadrez, com seus acréscimos de área, constituiu-se como um instrumento mediador não somente para a aluna “T1”, mas para os demais.

No bloco IV, foi utilizado o jogo “Nunca dez solto”, com o objetivo de construir o cubo maior, para isso a turma foi dividida em grupos. De forma análoga ao conceito de área chegou-se ao conceito de volume, medido nos sólidos a partir de unidades cúbicas. Ao final das discussões, a pesquisadora questionou-os sobre como poderiam calcular o volume de qualquer sólido. Grande parte dos alunos apontou como: “calculando a área da base e multiplicando pela altura”. Observa-se que as ações dos alunos conduziram à generalização e a partir disso foi elaborada uma forma geral para o cálculo do volume dos poliedros.

Num outro momento, foram entregues aos grupos outros sólidos, com as mesmas dimensões do material utilizado, porém, sem graduação, para que, da mesma forma como procederam com os graduados, calculassem o volume de cada sólido. Verificou-se nos resultados obtidos que a determinação das arestas interferiu nos resultados do cálculo do volume dos sólidos. Muitos grupos fizeram uso correto dos cálculos para determinarem a área das faces e o volume do poliedro, no entanto, não perceberam existir duas dimensões diferentes.

Com os sólidos graduados e não graduados, a pesquisadora desenvolveu na lousa, a partir de diálogos com os alunos, as áreas e os volumes de todos os sólidos, inclusive do cubo formado por todos eles, chegando ao resultado: $(x + y)^3 = x^3 + 3.x^2.y + 3.x.y^2 + y^3$. A partir desse resultado, foi abordado o cálculo do volume de um cubo, cujas dimensões eram alteradas pela subtração, sem a

utilização do material concreto a professora construiu na lousa com a participação dos alunos e chegaram à: $(x - y)^3 = x^3 - 3.x^2.y + 3.x.y^2 - y^3$.

Nessa atividade, buscou-se que a ação se convertesse em uma ação teórica. Dos 37 alunos que participaram da atividade, todos resolveram corretamente o quadrado da soma e 65% calcularam satisfatoriamente o quadrado da diferença. Com relação ao produto da soma pela diferença, com 43% de acertos. Percebeu-se que os alunos que não conseguiram chegar ao resultado erraram sinais na multiplicação, repetindo-se nos outros produtos notáveis, além de erros na própria multiplicação. 84% acertaram o cubo da soma e o cubo da diferença foi resolvido corretamente por apenas 19% da turma.

No bloco V, teve como espaço da sala de aula, visto que foi considerado por muitos como um problema. Assim, essa etapa da pesquisa teve como objetivo calcular a área da sala, verificando se o seu tamanho correspondia ao número de alunos, segundo a determinação da Secretaria de Saúde. Para medir a sala, fazendo uso de medidas não padronizadas, a turma foi dividida em quatro grupos. Cada grupo teria como medida uma parte do corpo: cúbito, braço, jarda e passo.

Com o objetivo de verificar mudanças conceituais dos alunos acerca dos conteúdos abordados nesta pesquisa, a mesma avaliação foi aplicada ao final de todas as atividades, a qual foi resolvida por 39 alunos. Ao final do desenvolvimento da pesquisa, 26% da turma considerou a área como medida do tamanho de um espaço, de um lugar. Para 41% o conceito de área ainda estava associado a fórmulas específicas para o cálculo de áreas de determinadas figuras e não como medida em unidades quadradas e 33% consideraram área como a medida de um lugar em unidades quadradas. Dessa forma, perceberam-se mudanças conceituais dos alunos sobre o conceito.

Com relação ao cálculo do volume, 49% o fizeram a partir das dimensões reais da sala, 28% das dimensões atribuídas ao problema, entre eles, "T1", e 18% apenas consideraram o volume como 49. Apesar de nem todos os alunos responderem satisfatoriamente a todas as questões, estabelecendo um comparativo entre as duas avaliações, verificou-se na turma mudanças conceituais para área e para volume.

Foi possível constatar, nos resultados, mudanças no conceito de área e volume como medidas de espaço e capacidade; classificações fundamentadas no sistema de características necessárias para a definição de conceitos, a

generalização, por meio da passagem do numérico para o algébrico, entre outros. Ressalta-se que os alunos que participaram dessa pesquisa puderam vivenciar experiências que os levaram à elaboração de conceitos dos Produtos Notáveis.

Assim, para além dos pontos ressaltados nas pesquisas anteriores, esta foi evidenciada por conta de sua importância com relação a inclusão das pessoas com deficiência nas turmas regulares. Assim como, suas contribuições a respeito da relevância na diversidade dos registros de representações (Língua Materna, Álgebra e Geometria), além da utilização dos materiais concretos com contraste de cores e os jogos enquanto instrumentos que viabilizam as condições para que os alunos construam possibilidades de generalização dos produtos notáveis.

Ventura e Laudares (2016), propõem como objetivo, apresentar atividades para ressignificar os produtos notáveis por meio da utilização de materiais concretos, fazendo a integração da Álgebra com a Geometria. Afim de responder a seguinte questão norteadora “seria possível ressignificar os produtos notáveis, utilizando-se de material concreto e de conceitos da Geometria para alunos do nono ano do ensino fundamental? ”.

Essa proposta foi embasada em uma pesquisa fundamentada por Lorenzato (2006a, 2006b), Fiorentini e Miorim (1990) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para abordar os materiais concretos, assim como, por Zabala (2007) para a construção da sequência didática. Além disso, para analisar as atividades desenvolvidas pelos alunos, apoiaram-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2009).

Assim, os autores apresentam reflexões sobre as abordagens metodológicas desenvolvidas pelos professores em sala de aula, as dificuldades que os alunos apresentaram com a notação matemática, com o significado das letras e das variáveis presentes na Álgebra. A partir desta concepção, sugeriram uma sequência didática que teve como objetivo promover transição da linguagem geométrica para a linguagem algébrica, culminando numa melhor significação por parte dos alunos.

Para desenvolvê-la com os alunos, foi confeccionado um material concreto com varetas de bambu (cortadas em três tamanhos diferentes) e borrachas cirúrgicas (látex) para montar as representações geométricas. Daí explicaram aos alunos que a expressão $(a + b)^2$ equivale calcular a área de um quadrado de lado $a + b$. Assim foi entregue um kit para cada grupo de alunos contendo, os materiais mencionados.

Juntamente ao material, foi entregue a sequência didática afim de que os alunos construíssem um novo conceito a partir de conceitos prévios, sob orientações do professor e, posteriormente, transformar esse conhecimento geométrico abordado em um conhecimento algébrico com o conteúdo de Produtos Notáveis. A atividade foi aplicada à uma turma de nono ano, com 33 alunos, de uma escola particular do ensino fundamental de Belo Horizonte.

Para analisar da atividade desenvolvida, os autores, realizaram uma roda de conversa com os alunos gravada em áudio, assim como, foi pedido que os alunos escrevessem um relato de experiência sobre a atividade com a utilização da representação semiótica.

Como resultado, os autores relatam que os alunos mostraram-se interessados e no dia seguinte indagaram o professor sobre alguns pontos da relação da Geometria com os Produtos Notáveis. Além disso, foi verificado que os alunos apresentavam conhecimento dos conteúdos exigidos como pré-requisitos como multiplicação de polinômios e cálculo de áreas e de volumes. Contudo, expressaram dificuldades na montagem do cubo.

Por fim, relatam em suas considerações a percepção que se teve com a pesquisa de campo, nas anotações e na fala dos alunos, levou a um resultado bastante satisfatório. Pois, a conversa ao final da atividade atesta que o objetivo de mostrar o lúdico auxiliando no processo de ensino e aprendizado, possibilitando a transição da linguagem geométrica para a algébrica, foi compreendido e alcançado por eles.

A respeito desta pesquisa, destacamos como relevante sua inovação com o uso do material concreto que foi confeccionado com varetas de bambu utilizado como proposta. Assim como, a utilização em paralelo da sequência didática, no intuito de promover a transição da linguagem geométrica para a linguagem algébrica. Ressaltamos ainda sua similaridade com a pesquisa Viginheski (2013), visto que em ambas partiram da utilização do concreto para se chegar à generalização de forma eficaz dos produtos notáveis.

No estudo realizado por Dario (2017), a autora evidenciou como questão norteadora de seu trabalho, a seguinte pergunta: como os estudantes do 8º do Ensino Fundamental II exploram diferentes registros de representação semiótica envolvendo Produtos Notáveis? Em decorrência desta questão, ela objetivou investigar como os alunos do 8º ano do Ensino Fundamental II exploram diferentes

registros de representação semiótica envolvendo produtos notáveis. Para isso, explorou o uso de materiais concretos e o software GeoGebra.

Com fundamentação teórica de seu estudo, Dario (2017), elucidou a Teoria Histórico-cultural de Vygotsky que trata dos processos de aprendizagem da criança, em seguida trouxe a teoria da atividade que visa o desenvolvimento do conhecimento a partir de atividades sociais práticas. Por fim os registros da representação semiótica com ênfase da construção e comunicação do processo de ensino e aprendizagem.

Sobre a metodologia utilizada, a autora classificou sua pesquisa como qualitativa ao considerar seu objetivo, assim, ela estabeleceu, afirmações de Fiorentini (2013) sobre este tipo de abordagem. Com isso, Dario (2017) fundamentou-se na teoria da atividade, mais especificamente na teoria da aprendizagem expansiva e elaborou 5 atividades, divididas em duas partes cada uma. A primeira com material manipulativo E.V.A e a segunda com a utilização do software GeoGebra, ambas com objetivo de facilitar a compreensão dos conceitos de produtos notáveis.

Cada uma destas atividades abordava um caso dos produtos notáveis, entre eles estão: quadrado da soma de dois termos, quadrado da diferença de dois termos, produto da soma pela diferença, cubo da soma de dois termos e cubo da diferença de dois termos. Estas atividades, foram desenvolvidas com 6 alunos do 8º ano, divididos em 3 duplas, a autora ressalta que estes apresentam desempenhos heterogêneos de acordo com notas anteriores. Para seu desenvolvimento, foram necessários 3 encontros, além disso, foi ressaltado que os dados foram gravados em áudio, observados pela professora e arquivados por meio de fotos.

De posse destes dados, a autora faz a análise das atividades por meio da Teoria da Representação Semiótica de Duval. Com a qual, constatou na atividade 1 que houve um erro conceitual no produto de a por a , pois alguns alunos afirmaram $a.a = 2a$, além disso, os alunos apresentaram dificuldades na conversão do registro algébrico em relação a identificação de que a área do quadrado era a^2 , um outro erro também citado nesta atividade foi a relação entre $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

Apesar das dificuldades os alunos conseguiram montar a representação geométrica característica do quadrado da soma de dois termos tanto com o E.V.A, quanto no GeoGebra (com maior dificuldade por conta da manipulação das

ferramentas), com isso a autora ressalta que o E.V.A mostrou-se mais eficaz para o aprendizado.

Sobre a segunda e terceira atividade (realizadas no segundo encontro), que envolveram quadrado da diferença de dois termos e produto da soma pela diferença respectivamente. Na segunda atividade, houve comparações com o caso anterior, além de terem cogitado a possibilidade de um dos lados serem negativos (caracterizando mais um erro conceitual que precisou de intervenção da professora). Mas uma das duplas conseguiu resolver algebricamente, logo após, fizeram a conversão do registro algébrico para o geométrico tanto no E.V.A quanto no GeoGebra.

No último encontro, foram desenvolvidas a quarta e a quinta atividade, sobre cubo da soma de dois termos e cubo da diferença de dois termos respectivamente. Com isso, na quarta após uma indagação da professora, os alunos se apoiaram no conhecimento sobre quadrado da soma e com este multiplicaram mais uma vez pela soma dos dois termos, assim, encontraram o resultado algébrico e a partir de uma suposição que a representação geométrica fosse tridimensional, com bastante dificuldade na construção, houve a mediação da professora e desenvolveram mais uma vez nas duas etapas.

Sobre a quinta, a pesquisadora relata que a dificuldade foi ainda maior, pois apesar de compreenderem que seria novamente um cubo, na hora de retirarem as peças que representavam a diferença de dois cubos, consequentemente “uma parte negativa”. Embora tenham encontrado estes percalços, ao final do encontro conseguiram comparar algebricamente o cubo da soma com o cubo da diferença. Com isso, a autora destaca que desta vez, o GeoGebra mostrou-se mais eficiente por conta da movimentação no próprio software.

Desse modo, Dario (2017) conclui que as atividades promoveram um processo de ascensão do concreto para abstrato, conceituadas de duas formas, com o E.V.A e o GeoGebra. Além disso, a aprendizagem dos alunos ficou evidente com as devidas conversões de registros das representações semióticas que foram realizadas. Vale ressaltar que as intervenções feitas pela professora foram de fundamental importância no processo para direcionar e corrigir os erros conceituais.

Assim como nas pesquisas citadas anteriormente nesta mesma categoria. O estudo desenvolvi por Dario (2017) também apoiou-se no processo de transição do concreto para o abstrato, porém com outros tipos de materiais (E.V.A e o

GeoGebra). Com isso, observo a importância de tal influência destes materiais para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem dos produtos notáveis.

3.1.3 Estudos Diagnósticos

Na terceira categoria, englobamos estudos de Gil (2008) e Brum (2013) que buscaram compreender quais as dificuldades dos alunos do 8º ano com relação aos conteúdos de Álgebra e mais especificamente sobre os produtos notáveis. Isto, para que estejamos conscientes dos possíveis entraves encontrados ao longo do desenvolvimento desta pesquisa.

Gil (2008) apontou como objetivo de sua pesquisa compreender as dificuldades encontradas pelos alunos de 7ª série no entendimento dos conceitos e procedimentos que envolvem o estudo de Álgebra e propor alternativas de solução. Com intuito de responder à seguinte questão norteadora: Por que os alunos apresentam tantas dificuldades na aprendizagem de Álgebra?

Este trabalho foi orientado por uma abordagem eminentemente qualitativa, de acordo com a autora, onde buscou compreender a problemática do ensino e aprendizagem que investiga dentro do próprio contexto. Ressaltou ainda que os dados coletados nesta pesquisa são predominantemente descritivos, por meio da utilização de observações e testagem, assim como, de entrevistas com os alunos.

A pesquisa foi realizada no ano de 2007, em uma escola da rede privada de ensino que se localiza na cidade de Porto Alegre – RS e são sujeitos da pesquisa alunos e professores de 7ª série do Ensino Fundamental, pois nesta série há uma ênfase em Álgebra. A amostra para a entrevista foi composta de 10 alunos selecionados da seguinte maneira: 3 da categoria A, 4 da categoria B e 3 da categoria C. As quais foram definidas a partir do aproveitamento definido em percentual com os acertos das questões da testagem.

Os instrumentos aplicados para o estudo foram elaborados com a finalidade de analisar as dificuldades apresentadas na utilização da linguagem simbólica e na sistematização das propriedades envolvidas na aprendizagem de Álgebra. No intuito de verificar como se dá a passagem da linguagem corrente para a algébrica e relacionar as dificuldades encontradas na linguagem algébrica com a aritmética. Estes dados foram analisados quantitativa e qualitativamente, divididos em quatro

subcapítulos: descrição das observações em aula, os dados coletados nas entrevistas com alunos e com professores e os dados obtidos no teste.

Dessa forma, os dados coletados no teste foram realizados em três etapas, com blocos de atividades que se diferenciavam pelo seu grau de dificuldade. Em cada etapa foi aplicado um bloco de atividades. A partir dessa testagem foi analisado o tipo de dificuldade encontrada pelo aluno no estudo algébrico.

No bloco I, foi destacado pela autora que representar simbolicamente cada uma das situações, foi resolvida facilmente pelos alunos. Porém escrever estas representações na forma reduzida, se possível, não foi resolvida com tanta facilidade pelos alunos, ou seja, a redução de uma expressão algébrica traz dificuldade visto que nem sempre esta representação terá um fechamento.

No bloco II, formado por três questões. A primeira questão proposta teve o mesmo objetivo das atividades do bloco I, diferenciando-se apenas na visualização que não está disponível, o desempenho foi inferior. Com isso, o fato de visualizar os objetos que estão sendo representados algebricamente pode ter tornado o processo mais fácil. O maior índice de erro foi no item c, em que o aluno deve fazer uma redução das expressões encontradas anteriormente. Um dos fatores influentes na dificuldade dessa questão é o fato de a representação não ter fechamento (ausência de um resultado puramente numérico).

Na questão 2 do bloco II, exigiu o conceito de perímetro, mostrou assim como na questão 1 do bloco II as dificuldades na ausência de fechamento, a exemplo da dificuldade de aceitar $34 + m + n$ como resposta válida. Na questão 3, ao invés de representar a área representaram o perímetro, demonstrando uma confusão sobre esses conceitos. Além disso, uma parcela dos alunos acrescentou a resposta “quadrado”, ou seja, respondeu a variável x elevada ao quadrado. Esse erro pode ser causado pela confusão com a unidade de medida de área.

No item c da mesma questão “represente a área total do terreno”, apenas 15,63 % obtiveram êxito no resultado, pois exigia uma interpretação maior. Os alunos haviam representado as áreas de cada lote, no entanto não relacionaram as mesmas com a área total do terreno. Gil (2008), enfatizou que à medida que o grau de abstração vai aumentando, a dificuldade aumenta. Além da dificuldade de interpretação, de “ausência de fechamento”, o fato de não terem esclarecido conceitos como área e perímetro contribuem para as dificuldades observadas.

No bloco III, o aluno deveria identificar a regularidade existente em uma sequência, generalizá-la e, por fim, representá-la algebricamente. Foi destacado que 59,38 % dos alunos identificaram a regularidade existente na sequência, porém, apenas 18,75 % dos alunos conseguiram representar corretamente em linguagem algébrica, $2n + 1$ que generaliza a situação apresentada. O fato de não abstrair a regularidade presente impossibilita o aluno de fazer a representação da mesma através da linguagem algébrica.

Sobre análise das entrevistas com os professores, foi ressaltado por Gil (2008) por meio da fala dos professores que as maiores dificuldades no ensino da Álgebra, são em relação à interpretação que muitas vezes o aluno não tem maturidade para entender a Álgebra. Além disso, dos quatro professores entrevistados, três afirmaram utilizar a Geometria para contextualizar o estudo de Álgebra, pois entendem que facilita a compreensão dos alunos sobre conceitos.

Uma questão que é unânime na fala dos professores na entrevista foi em relação à falta de pré-requisitos pelos alunos, ou seja, conceitos que foram estudados em séries anteriores e não foram efetivamente compreendidos pelos alunos. Estas dificuldades de outros contextos provocam interferências no aprendizado de Álgebra, conseqüentemente, nos conteúdos que a compõem.

Quanto às questões feitas na entrevista com os alunos, no que se refere ao sentimento de estudar Matemática, Álgebra, e fazer representações algébricas, os alunos demonstraram uma simpatia e foi destacado ainda que o fato de não gostar está ligado ao fato de não compreender. Com relação às questões que se referiam à dificuldade da testagem, mais especificamente no bloco III, atividade que exigia um grau maior de abstração e em que a maioria da turma não obteve sucesso, a opinião dos alunos ficou dividida, e uma grande parte deles considerou-a fácil.

Além disso, Gil (2008) finaliza sua pesquisa com a afirmação de que grande parte da dificuldade de interpretação está relacionada com o fato do aluno ter uma deficiência na linguagem escrita. Talvez falte propiciarmos um espaço para que nossos alunos expliquem as suas formas de raciocínio. Explicitando-as terão de organizar as ideias para que possam ser entendidos, desenvolvendo, assim, a linguagem. Portanto, de acordo com a autora, devemos estar constantemente avaliando a nossa prática pedagógica.

A partir do exposto por Gil (2008), destacamos como contribuições de sua pesquisa inicialmente as questões associadas ao grau de abstração, visto que,

quanto maior ele for, maior será também as dificuldades dos alunos. Assim como, em relação a falta de pré-requisitos (conteúdos básicos das séries anteriores). Além disso, observamos que visualizar geometricamente os objetos que estão sendo representados algebricamente torna o processo mais acessível aos alunos, fato este que foi corroborado inclusive pelos docentes entrevistados.

Brum (2013), evidenciou como objetivo de sua pesquisa, analisar os erros cometidos por estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental na resolução de questões algébricas. Como objetivos específicos, propôs classificar os erros cometidos e testar estratégias de ensino elaboradas a partir dos erros apresentados pelos estudantes. Estes objetivos surgem como forma de resposta à questão norteadora: que tipos de erros são cometidos por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental na resolução de questões algébricas?

No tocante a metodologia utilizada para a pesquisa, Brum (2013), se apoiou na pesquisa qualitativa de cunho interpretativo. Além disso, ressalta que a investigação foi desenvolvida em três etapas. Na primeira, foi aplicado um teste composto de cinco questões para 23 estudantes de uma escola pública do município de Tupanciretã, Rio Grande do Sul. A autora verificou com este teste se as questões estavam adequadas para aquele nível de ensino, foi aplicado em uma aula com período de 50 minutos. Para avaliar as dificuldades a autora percorreu a sala com a finalidade de observar os fatos ao longo do processo.

A segunda etapa, foi análoga a primeira, porém foi realizada em uma escola privada do mesmo município com uma outra turma de 8º ano composta de 10 alunos. Por fim, a terceira etapa, diferentemente das anteriores a autora usou com os estudantes uma técnica de ensino embasada pelo software Hot Potatoes.

Para análise dos dados obtidos por meio da aplicação dos testes, foi empregada a metodologia de análise de conteúdo dos erros de CURY (2007) que divide-se em três etapas: pré-análise (identificação dos estudantes por letras), exploração do material (classificação das respostas quanto aos erros cometidos) e tratamento dos resultados (descrição dos erros).

Para classificação das respostas incorretas, foi empregado uma adaptação do modelo proposto por Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987). O qual, divide-se em: uso errado dos dados, linguagem mal interpretada, definição ou teorema distorcido e erros técnicos. Além desses, foram acrescentadas outras classificações:

a simples cópia dos dados da questão, erros não compreendidos e erros por distração.

A respeito da análise, na questão 1 que teve por objetivo verificar a aprendizagem dos alunos sobre o cálculo de área com medidas algébricas, uso da propriedade distributiva do produto em relação a adição, multiplicação e adição de variáveis e propriedade da potenciação. Com isso, os erros encontrados foram: troca do cálculo de área por perímetro; erros técnicos (uso indevido da propriedade distributiva, troca da multiplicação por adição e troca de adição por potência).

Na questão 2, que teve por objetivo trabalhar a generalização de determinada regra que pode ser escrita matematicamente. Os erros comuns encontrados, foram: não tradução da linguagem natural para a linguagem matemática, distorção da resolução adequada (uso de operação ou propriedade inadequada).

Na questão 3, abrangeu como objetivo avaliar se os alunos conseguem realizar a adição e subtração algébrica, assim como, o conceito de perímetro. Os erros evidenciados pelos alunos com mais frequência foram: erros técnicos de várias maneiras (acerto sobre o perímetro, mas erros na subtração de termos semelhantes; troca de adição por subtração; adição de coeficientes de variáveis com constantes).

Na questão 4, que trouxe por objetivo retomar as propriedades mencionadas nas questões anteriores, subtração entre uma área inscrita e outra circunscrita, subtração e multiplicação algébrica. Os erros foram: em relação à definição para o cálculo de área; erros técnicos (falta de parênteses para a multiplicação de binômios, falta de conhecimento da distributiva e a troca da multiplicação pela adição de termos semelhantes).

Na questão 5, que teve como objetivo trabalhar uma situação contextualizada que abordou a linguagem matemática com a noção de equilíbrio associado à igualdade que recaia numa equação. Os erros comuns foram: dificuldade de equacionar o problema, dificuldade de passar da linguagem natural para a algébrica; uso indevido de operações para o equacionamento apesar destas dificuldades os alunos conseguiram solucioná-la.

A autora ressalta ainda, de forma sintetizada que os erros mais frequentes ao final das duas etapas de aplicação do teste foram a tradução da linguagem natural para a matemática; o equacionamento como forma de generalização dos dados evidenciados pelo problema; as dificuldades técnicas como a falta de requisitos

relacionados à propriedade distributiva, troca de operações e adição de termos não semelhantes.

A partir desses dados a autora propõe a testagem de uma atividade com o emprego do software mencionado anteriormente. Nesta, os alunos tinham dois ambientes o lápis e o papel para esboçar a solução da questão proposta pelo software em formato de QUIS (semelhantes às que originaram os erros). Com isso, marcavam solução correta para eles e recebiam o feedback do programa. As análises foram desenvolvidas em cima dos registros dos alunos em papel, elas apontaram que a tecnologia aliada ao ensino proporciona bons resultados.

A pesquisa desenvolvida Brum (2013), assim como a de Gil (2008), também evidenciou uma série de situações de equívocos cometidos por alunos do 8º ano. Dentre os quais estão a não associação da língua materna com a matemática, o equacionamento como forma de generalização de uma situação. Além de erros elementares de conhecimentos básicos das séries anteriores. Desta forma, fica evidente que o professor antes de iniciar o conteúdo deve fazer uma retomada destes tópicos, para que haja progressão do estudo.

3.1.4. Análise global das categorias

A seguir apresentamos uma análise global da revisão de estudos supracitada, por meio de comparação entre as pesquisas, assim como, quais foram suas contribuições e evidencias de dificuldades encontradas pelos alunos ao longo do processo de seus desenvolvimentos.

Sobre as pesquisas da categoria 1, associados aos estudos teóricos vinculados ao ensino e à aprendizagem, ressaltamos que duas das três pesquisas dessa categoria apoiaram-se nos pressupostos da Engenharia Didática, a terceira apoiou-se na Atividade Orientadora de Ensino. Com as quais, observamos dificuldades dos alunos em instancias, como: operações básicas associadas às expressões numéricas (adição, subtração e multiplicação entre monômios), na propriedade distributiva, na potenciação e no cálculo de área e de perímetro.

Diante disso, os autores buscaram realizar intervenções, com uso de diversos recursos didáticos, diferentes da aula expositiva. Eles ressaltam que o avanço dos alunos quando comprado à fase de avaliação inicial foi consideravelmente superior.

Outra evidencia sobre aos trabalhos desta categoria foi a relação entre a Álgebra e a Geometria como possibilidade de abordagem e esclarecimento para os alunos das relações estabelecidas.

Na categoria 2 referente aos estudos empíricos, os autores das três pesquisas evidenciadas apoiaram-se na utilização de materiais concretos (varetas de bambu e borrachas cirúrgicas e E.V.A), assim como, um deles além do concreto utilizou o software GeoGebra como forma de manipulação e de mudanças de registos Geométrico para o Algébrico (relação também apresentada na categoria anterior), vice e versa, visto que ambos apoiaram-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica para fazer a análise.

Com as quais, puderam ressaltar alguns impasses percebidos ao longo do processo, como: as dificuldades com a notação matemática, presentes na Álgebra. Entretanto apenas um trabalho citou que os alunos apresentavam conhecimento como multiplicação de polinômios e cálculo de áreas e de volumes. Contudo, expressaram dificuldades na montagem do cubo.

Além disso, foram comuns os erros conceituais nas operações com monômios e o uso incorreto da relação entre $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Assim como, na diferença de dois termos e produto da soma pela diferença, cogitaram a possibilidade de um dos lados serem negativos e no cubo da soma de dois termos e cubo da diferença de dois termos, supuseram que a representação geométrica fosse tridimensional, com bastante de dificuldade na construção igualmente ao trabalho anterior. Apesar das dificuldades, os autores afirmaram que a aprendizagem dos alunos foi mais significativa por conta da manipulação dos materiais.

A respeito dos estudos diagnósticos enquadrados na categoria 3, desenvolvidos especificamente com a finalidade de investigar as dificuldades encontradas pelos alunos em Álgebra. O autor do primeiro trabalho utilizou-se de observações e testagem, assim como, de entrevistas com os alunos, segundo observou as dificuldades por meio de atividades.

Diante desses instrumentos, elucidaram que as dificuldades mais evidentes foram: o cálculo de áreas e sua troca com perímetro; na propriedade de potenciação e na distributividade do produto em relação a adição; adição de coeficientes de variáveis com constantes; não tradução da linguagem natural para a linguagem matemática; não conseguiram generalizar algebricamente um padrão em forma de equação. Além disso, afirmaram enfaticamente que não compreendem o conteúdo.

Para sintetizar as discussões, elaboramos o quadro 02, a fim de identificar os obstáculos enfrentados pelos alunos, apontados ao longo das pesquisas analisadas.

Quadro 03: Estorvos de aprendizagem identificados na revisão de estudos

AUTOR / ANO	TÍTULO	OBSTÁCULOS
Saete Rodrigues (2008)	Uma análise da aprendizagem de produtos notáveis com auxílio do programa Aplusix	- O quadrado de um binômio, pois elevaram ambos os termos ao quadrado; - Operações com os números inteiros; - Distinção do cálculo de área e perímetro; - Multiplicação de monômios visto que multiplicaram apenas os coeficientes e não a parte literal; - Propriedade distributiva.
Keyla Cristina Borgato (2013)	O ensino de Produtos Notáveis e Fatoração de Polinômios: uma articulação entre Álgebra e Geometria	- Mudança de registros entre a álgebra, geometria e a língua materna; - Cálculo de área; - Operações com os números inteiros; - Agrupamento de termos semelhantes em expressões algébricas; - Propriedade distributiva.
Tamiri Pinto Soares (2018)	Produtos Notáveis: aplicação da Atividade orientadora de ensino a partir da resolução de problemas	- Troca de operação de potência com multiplicação de fatores diferentes, assim como, um número elevado ao quadrado, pela operação com o dobro do número; - Operações básicas; - Operações de expressões algébricas.
Lúcia Virginia Mamcasz Viginheski (2013)	Uma abordagem para o ensino de Produtos Notáveis em uma classe inclusiva: o caso de uma aluna com deficiência visual	- Distinção entre área e perímetro; - Noção de Volume; - Transição do numérico para o algébrico.
Angélica Rodrigues Ventura João Bosco Laudaes (2016)	Ressignificação dos Produtos Notáveis Utilizando Material Concreto	- Notação matemática (a respeito do significado das incógnitas presentes na Álgebra); - Noção de volume.
Érica Maria Rennó Villela Dario (2017)	Produtos Notáveis no 8º ano do Ensino Fundamental II: contribuições da utilização de diferentes recursos didáticos	- Troca de operação de potenciação por multiplicação (produto de a por a, por 2a); - Mudança de registro algébrico para o geométrico; - Uso da identidade $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.
Katia Henn Gil (2008)	Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra	- Operações com expressões algébricas pela ausência de fechamento (resultado puramente numérico); - Troca de área por perímetro; - Generalização algébrica de um padrão.
Lauren Darold Brum (2013)	Análise de erros cometidos por alunos de 8º do ensino fundamental em conteúdo de álgebra	- Troca de área por perímetro; - Propriedade distributiva; - Mudança de registro da linguagem materna para a matemática; - No equacionamento como forma de generalização dos dados evidenciados pelo problema.

Fonte: elaborado pelo autor, 2019.

Para além da revisão supracitada frente às categorias estabelecidas, apresentamos a seguir uma identificação sobre as formas e profundidade dos produtos notáveis em livros didáticos.

3.2. PRODUTOS NOTÁVEIS NOS LIVROS DIDÁTICOS

Ao pensar no processo de ensino e de aprendizagem de conteúdos matemáticos, especificamente dos produtos notáveis, é inevitável deixar de falar das relações que existem, das ferramentas que o viabilizam como: os livros didáticos, a tecnologia e de todo o cabedal de instrumentos que o compõem afim de alcançar os objetivos docentes, conseqüentemente o de maior importância que é a aprendizagem dos discentes.

Neste sentido, buscamos direcionar as discussões para os livros didáticos, visto que sua utilização ainda emerge com certa frequência, pois ainda é considerado de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) como um dos materiais de maior influência na prática de ensino brasileira, conseqüentemente no ensino de Matemática. De acordo com o mesmo documento, o professor deve-se atentar quanto à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos.

Além disso, Choppin (2004) afirmou que os estudos dedicados ao livro didático revelam quatro funções essenciais, que podem variar consideravelmente segundo o ambiente sociocultural, à época, às disciplinas, os níveis de ensino, os métodos e as formas de utilização. Dentre estas funções o autor elucidou: a referencial, a instrumental, a ideológica e cultural e a documental.

A referencial está vinculada à associação dos livros didáticos com os programas de ensino. Nesse sentido, constitui o suporte privilegiado dos conteúdos educativos, de técnicas ou habilidades a serem trabalhados com as novas gerações. A instrumental, está associada à aos métodos de aprendizagem, aos exercícios ou atividades propostas que possuem a finalidade de facilitar a memorização dos conhecimentos, favorecer a aquisição de competências, a apropriação de habilidades, de métodos de análise, de resolução de problemas etc.

A função ideológica e cultural, está relacionada ao papel do livro didático se enquanto um dos vetores essenciais da língua, da cultura e dos valores das classes

dirigentes. Por fim a documental, com a qual, acredita-se que o livro didático pode fornecer um conjunto de documentos textuais ou icônicos, cuja observação ou confrontação podem vir a desenvolver o espírito crítico do aluno.

Nesse sentido, ao tomarmos por base o as implicações dos PCN's juntamente à função instrumental determinada por Choppin (2004). Entendemos que faz-se necessário desenvolver uma identificação sobre as formas e profundidade dos produtos notáveis em livros didáticos do 8º ano do Ensino Fundamental, para compreender de que maneira estes abarcam o conteúdo que é o objeto matemático de estudo desta pesquisa.

Diante disso, buscamos compreender por meio desta identificação a metodologia, assim como, as definições empregadas e os exercícios ou atividades vinculadas ao conteúdo abordado pelos livros didáticos. Para isso, optamos pelos livros que compõem a lista do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) do ano de 2017, visto que ele vigou em 2017, 2018 e 2019, os quais foram elucidados no quadro a seguir:

Quadro 04: Livros didáticos do PNLD

AUTOR	TÍTULO	EDITORA	EDIÇÃO	ANO
Edwaldo Bianchini	Matemática Bianchini	Moderna	8ª	2015
Álvaro Andrini Maria José Vasconcelos	Praticando Matemática	Do Brasil	4ª	2015
Ênio Silveira	Matemática compreensão e prática	Moderna	3ª	2015
Luiz Roberto Dante	Projeto Teláris	Ática	2ª	2015

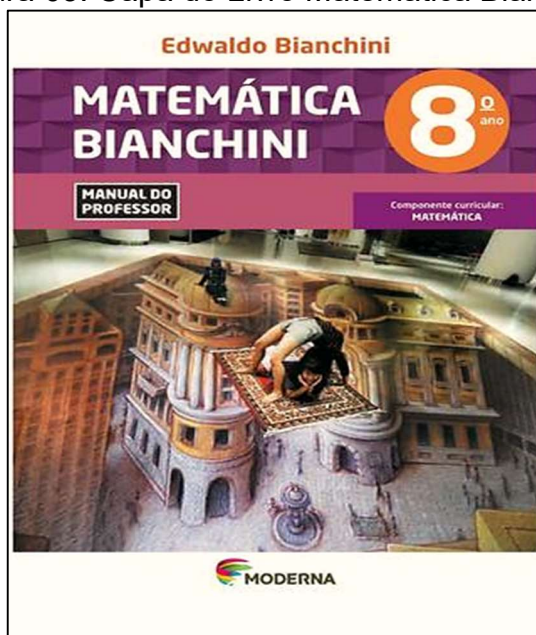
Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Sobre os livros supracitados, foram eleitos como critérios os seguintes pontos: abordagem inicial do conteúdo; quais identidades foram destacadas em seu desenvolvimento; de que forma estas identidades foram abordadas e os tipos de exercícios ou atividades adotadas, assim como, o nível de profundidade e se estas atividades estão em consonância com a abordagem proposta.

3.2.1. Matemática Bianchini

Os produtos notáveis foram abordados pela obra no quinto capítulo. Com o qual, o autor retoma de forma preliminar a importância do produto polinomial, consequentemente da propriedade distributiva. Assim, ressalta-os como produtos binomiais que são utilizados com frequência em diversos outros assuntos da própria Matemática.

Figura 03: Capa do Livro Matemática Bianchini



Fonte: Acervo pessoal

Após este tratamento inicial, foi proposto pela obra o estudo do quadrado da soma de dois termos. Para desenvolvê-lo foram estabelecidas construções geométricas com unidade de medida (u), que resultaram nas seguintes situações:

$$(4u + 3u)^2 = (7u)^2 = 49u^2 \text{ ou } (4u)^2 + 2(4u \cdot 3u) + (3u)^2 = 16u^2 + 24u^2 + 9u^2 = 49u^2.$$

A partir dessa situação foi proposta outra situação que recai na soma de áreas do seguinte modo: $a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2$ que resultou como consequência a identidade $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$. Sugeriu-se também o desenvolvimento puramente algébrico de $(a + b)^2$ como $(a + b) \cdot (a + b)$ por meio da propriedade distributiva. No qual, obtêm-se outra relação com a língua materna da seguinte forma: “o quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo termo mais o quadrado do segundo termo”.

Ao final deste tópico, foram sugeridos exemplos sobre a identidade supracitada. Logo em seguida, em uma seção denominada de “exercícios propostos” foram esboçadas questões de aplicação, de exploração, de sistematização e de aprofundamento como foi ressaltado pelo autor no início da obra ao abordar sobre a composição de sua estrutura. Além disso, foram trabalhadas questões aritméticas com uso desta identidade na seção “pense mais um pouco”

No mais, este tópico do quadrado da soma de dois termos findou-se com um breve relato sobre a origem dos produtos notáveis por meio da História da Matemática. Com o qual, foi demonstrada a importância da Álgebra Geométrica, visto que ela foi motivação para diversos tipos de problemas que surgiram na Grécia.

Outra situação que merece proeminência para além da identidade trabalhada inicialmente é com relação ao destaque para as demais, das quais foram destacadas: o quadrado da soma de dois termos, produto da soma pela diferença de dois termos e o cubo da soma de dois termos. Neste sentido, sobre os casos elucidados na obra observamos que houve uma preocupação do autor em todos, no estabelecimento da relação entre a Álgebra, a Geometria e a língua materna.

Entretanto, observamos de forma notória a ausência de demais identidades como o cubo da diferença de dois termos, além do anúncio sobre a possibilidade de outros produtos polinomiais que também são considerados como notáveis, a exemplo do quadrado da soma de três termos $(a + b + c)^2$, entre outros.

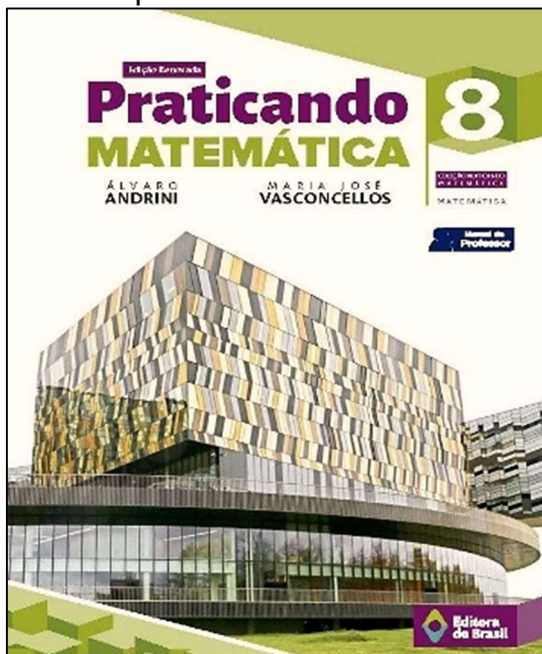
No que diz respeito aos exercícios de um modo geral, verificamos que estes foram abordados de forma intercalada com as identidades e em quantidades relativamente consideráveis. Porém, notamos que apenas no primeiro e no segundo caso houveram questões do tipo “pense mais um pouco”. Além disso, no último caso, também foram disponibilizadas uma quantidade reduzida dos exercícios se comparada com os demais.

3.2.2. Praticando Matemática

Os produtos notáveis foram abordados no livro a seguir na quinta unidade. Nessa, os autores ressaltam inicialmente uma definição, como sendo produtos de binômios que recebem a nomenclatura de notáveis devido ao fato de aparecerem

com frequência em diversos problemas e por apresentarem padrões de regularidades que permitem economizar cálculos.

Figura 04: Capa do livro Praticando Matemática



Fonte: Acervo pessoal

Após a definição, o estudo do conteúdo foi desenvolvido inicialmente acerca do quadrado da soma de dois termos. Com o qual, foi priorizado a construção algébrica por meio da propriedade distributiva do produto em relação a adição, da seguinte forma: $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$. Em seguida, foram apresentados dois exemplos e solicitado um padrão na língua materna, sem, contudo, descrevê-lo.

Num segundo momento, sugeriu-se uma situação a ser desenvolvida entre o professor e os alunos a fim de obter-se a construção geométrica de tal identidade. Em seguida, foi proposta uma lista relativamente pequena de exercícios, com a qual observou-se uma ênfase às questões puramente algébricas em detrimento das questões contextualizadas.

Posteriormente a este tratamento, a obra apresentou demais casos como: o quadrado da diferença de dois termos e o produto da soma pela diferença de dois termos. Com os quais, observou-se uma construção análoga à anterior, com início para prioridade com a construção algébrica, seguida da geométrica. Porém, não ficou evidente nestes dois últimos casos a correlação com a língua materna.

Verificou-se também, a carência de outros casos considerados pela literatura como elementares, dentre eles o cubo da soma e da diferença de dois termos.

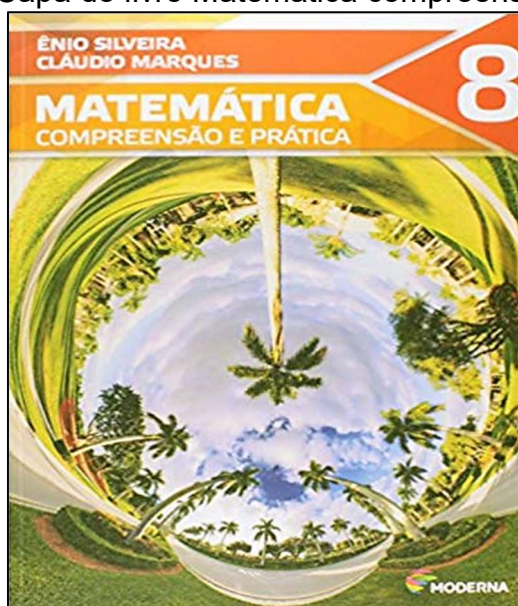
Além disso, sobre os exercícios propostos, observamos a mesma situação destacada na identidade anterior. Embora, a obra tenha apresentado questões deste nível, ao final da unidade foram sugeridas três seções de exercícios. As quais, denominaram-se por: “Revisando, Desafios e Autoavaliação”, com elas notamos questões com diferentes graus de dificuldades, além de um número considerado de questões contextualizadas.

Outro fator presente na seção dos exercícios, especificamente nos desafios, foi o anúncio em uma das questões sobre a possibilidade da existência de outros produtos notáveis. Na ocasião, foi ressaltado o quadrado da soma de três termos associado à geometria como uma situação a ser desenvolvidas pelos alunos a partir dos produtos elucidados.

3.2.3. Matemática compreensão e prática

O conteúdo dos produtos notáveis foi esboçado no quarto capítulo do livro. No qual, o autor iniciou diferentemente das demais obras, pois propôs uma situação problema com valores numéricos que foi direcionada para resultar no quadrado da soma de dois termos.

Figura 05: Capa do livro Matemática compreensão e prática



Fonte: acervo pessoal

Sobre este caso especificamente, foi dado prioridade ao desenvolvimento algébrico, por meio da propriedade distributiva. Seguida da correlação de forma enfática com a língua materna e uma quantidade consideravelmente reduzida de exemplos que ilustravam a construção desenvolvida.

Posteriormente a este tratamento, foi definida o que os autores denominaram de “demonstração geométrica” que resultou na mesma identidade definida anteriormente de forma algébrica e pela língua materna. Além disso, foi destacado na seção “um pouco de história” a origem dos produtos notáveis pela Álgebra Grega (desenvolvia seus embasamentos na Geometria).

No intuito de findar esta identidade, os autores propuseram atividades que enfatizaram de forma prioritária o exercício da manipulação algébrica em detrimento de questões contextualizadas e das relações entre a Álgebra, a Geometria e a língua materna evidenciadas pela abordagem do conteúdo.

Analogamente ao caso anterior, foram alucidados pela obra o quadrado da diferença de dois termos e o produto da soma pela diferença. Com os quais, os autores seguiram a mesma sequência: desenvolvimento algébrico, seguido da relação com a língua materna e a Geometria. Vale ressaltar que nesta obra também observamos a ausência de outras identidades polinômias, ou pelo menos o anúncio das mesmas afim de instigar os alunos à buscarem por meio de pesquisas.

No mais, destacamos que ao final de cada uma das identidades abordadas forma propostas listas de atividades. Sobre este assunto, ressaltamos que há carência de uma lista global que retome o conteúdo estudado, afim de proporcionar um maior aprofundamento do tema e resgatar as correlações evidenciadas por meio da abordagem do conteúdo ao longo do capítulo.

3.2.4. Projeto Teláris

O conteúdo dos produtos notáveis se apresentou disposto em um dos tópicos do quarto capítulo do livro, denominado de “Polinômios”. O qual, foi iniciado por meio da definição que de acordo com autor, advem das multiplicações polinomiais que apresentam regularidades em seus resultados.

Figura 06: Capa do Livro Projeto Teláris



Fonte: acervo pessoal

Após, o estudo foi direcionado para o desenvolvimento do “quadrado da soma: $(a + b)^2$ ou $(a + b).(a + b)$ ”, dessa forma, sem a existencia do complemento da titulação “dois termos”. Neste sentido, foi prioziado o desenvolvimento algébrico, num outro momento a correlação com a Geometria e a lingua materna nesta respectiva estrutura textual.

Posteriormente ao tratamento desenvolvido, foram destacados uma quantdade considerável de exemplos. Seguidos da seção denominada “exercícios”, os quais estavam dispotos em pequena quantidade. Além disso, sobre eles pode-se observar questões que em sua maioria preocupadas com a prática do desenvolvimeto puramente algébrio, ou seja, notou-se uma carência de questões de outro nível para aprofundar o conteúdo e de questões contextualizadas.

Analogamente à identidade supracitada, a obra também expos outros dois casos de produtos notáveis: o quadrado da diferença de dois termos e o produto da soma pela diferença de dois termos. Os quais, mantiveram as mesmas características tanto em relação à ausência da nomenclatura, quanto à quantidade de exercícios presentes acerca do conteúdo. Ou seja, fica evidente que houve ausência com relação ao tratamento de outros produtos notáveis.

No que tange aos exercícios, verificamos que a abra não apresenta uma seção de questões que retomasse a abordagem exposta, afim de alcançar um aprofundamento das identidades desenvolvidas ao longo do capítulo. Assim como,

também observou-se a ausência de questões que apontam para aplicações do conteúdo, como é o caso das questões contextualizadas.

3.2.5. Análise global dos livros

A respeito da abordagem inicial, destacamos que das obras evidenciadas, apenas uma delas iniciou o conteúdo dos produtos notáveis por meio de uma situação problema. As demais, optaram pela definição que surge de uma ramificação dos produtos polinômias.

Em relação ao conteúdo propriamente dito, uma única obra abordou as seguintes identidades: o quadrado da soma de dois termos, o quadrado da diferença de dois termos, o produto da soma pela diferença de dois termos e o cubo da soma pela diferença de dois termos. Em relação aos demais, houve o estudo somente das três primeiras.

Destas, apenas uma anunciou sobre a existência de outros produtos que podem ser considerados como notáveis, especificamente do quadrado da soma de três termos. Ou seja, quase que de forma unânime houve a ausência do cubo da soma e da diferença de dois termos, assim como, de outras identidades.

Neste sentido, no que tange às abordagens estabelecidas para o desenvolvimento do conteúdo, pode-se observar que em praticamente todas as obras foram estabelecidas associações entre o desenvolvimento algébrico, a Geometria e a língua materna não necessariamente nesta ordem, visto que por vezes houveram permutas quanto à organização. Apenas uma não apropriou-se da mesma forma que as demais da língua materna.

Vale ressaltar que das obras analisadas, além das associações supracitadas duas delas também trouxeram contribuições da História da Matemática, afim de retratar a origem dos produtos notáveis, especificamente acerca da Álgebra Geométrica desenvolvida pelos Gregos.

A respeito do último item adotado como critério, os exercícios. Observou-se que eles foram estavam dispostos de forma intercaladas com as respectivas identidades trabalhadas e em quantidades reduzidas. Entretanto, evidenciamos que em uma obra as seções de exercícios com diferentes graus de dificuldades e

aprofundamento sobre o conteúdo, assim como, a presença de questões contextualizadas.

Ou seja, de um modo geral podemos observar que há uma lacuna existente entre as abordagens estabelecidas por meio das associações mencionadas anteriormente com os níveis e tipos de questões trabalhadas nos exercícios. As quais, poucas vezes apontavam para tais correlações.

Desse modo, intuimos que o livro é uma ferramenta didático-pedagógica importante para o processo de ensino e aprendizado. Entretanto, não é suficiente para o aprendizado dos alunos, muito menos deve ser utilizado como único instrumento direcionador para o trabalho do professor, isto, devido ao fato de suas limitações. Por este motivo, devemos buscar variedades de fontes de informação para se ter uma visão ampla e aprofundada sobre o tema em questão.

3.3. PERCEPÇÃO DOS ALUNOS EGRESSOS

Nesta etapa da pesquisa, foram apresentadas discussões, a fim de contemplar requisitos sobre contexto, ações e experiências acerca da aprendizagem e das dificuldades encontradas por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II em relação ao conteúdo de produtos notáveis em duas escolas públicas de Belém do Pará.

Nesse sentido, sua construção foi feita a partir de um nível de abordagem das pesquisas descritivas que possuem como objetivo essencial de acordo com GIL (2008) o seguinte:

As pesquisas deste tipo têm como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou o estabelecimento de relações entre variáveis, uma de suas características mais significativas está na utilização de técnicas padronizadas de coleta de dados. Dentre as pesquisas descritivas salientam-se aquelas que têm por objetivo estudar as características de um grupo: sua distribuição por idade, sexo, procedência, nível de escolaridade, nível de renda, estado de saúde física e mental etc (GIL, 2008, p. 28)

Com isso, o instrumento utilizado para coleta de dados foram os questionários, para que por meio deles houvesse a compreensão dos diversos aspectos que envolvem o processo de aprendizagem de produtos notáveis. Tal instrumento compôs-se com questões subjetivas a respeito das implicações dos

alunos sobre currículo, metodologia e avaliação utilizadas pelos docentes, seguido de um quadro de dificuldades e um teste de verificação sobre a temática.

Após a elaboração desta ferramenta investigativa, houve a necessidade de ir a campo, especificamente em quatro turmas de 9º ano de duas escolas da rede estadual de ensino da região metropolitana de Belém do Pará, localizadas nos bairros da Pedreira e do Telégrafo. Visto que a pesquisa deveria ser desenvolvida com alunos egressos, ou seja, que haviam estudado o conteúdo.

Neste período, houve inicialmente uma visita às escolas com a qual, podemos dialogar com as diretoras e os professores de Matemática das turmas de 9º ano, a fim de verificar a possibilidade de desenvolver as pesquisas. Após a confirmação, num outro momento levamos um ofício (para validar nosso vínculo com a Universidade do Estado do Pará - UEPA) seguido de uma minuta para as diretoras e professores, como uma forma de esclarecimento sobre a pesquisa.

Neste mesmo dia, afim de atender as questões éticas solicitamos à todos os alunos o preenchimento do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) a ser assinado pelos pais, autorizando-os a participarem da pesquisa (Anexo A). Com isso, em uma terceira visita às escolas destinamos o tempo ao preenchimento dos questionários pelos alunos e o recolhimento dos termos, o quantitativo de participantes foi de 94 alunos.

De posse dados obtidos, posteriormente ao preenchimento dos questionários, do quadro de dificuldades e do teste de verificação, realizamos uma conversão individualmente das respostas dos alunos em dados tabulados. Com a qual foram gerados gráficos por meio do Excel referentes a cada item que o compunha.

As análises foram desenvolvidas considerando a tríade (dados – teoria – análise) e fundamentada pela pesquisa bibliográfica, a qual é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos (GIL, 2008, p. 50). Com isso, utilizamos documentos da legislação que regem a educação brasileira, teóricos e pesquisadores da Educação e da Educação Matemática, assim como, algumas impressões nossas enquanto pesquisador.

As quais apresentamos a seguir com as titulações: produtos notáveis no currículo; olhar dos alunos sobre os caminhos adotados no ensino de Matemática; avaliações em Matemática; Quadro de dificuldades e Teste de verificação. Finalizamos com a uma análise global da investigação.

3.3.1 Produtos notáveis no currículo

Nesta categoria, houveram análises sobre indagações relativas ao currículo a partir da resposta dos alunos com relação aos seguintes aspectos: gosto dos alunos pela Matemática, frequência de estudo fora da escola e questões específicas acerca dos produtos notáveis.

Sobro o gosto dos alunos pela Matemática, podemos observar que mais de 88% dos alunos participantes afirmaram que não gostam, suportam ou gostam pouco. Estes dados ocorrem, de acordo com Thomaz (1999) devido às dificuldades pessoais na aprendizagem de Matemática.

Além deste, Sanchez (2004) enfatiza que estas dificuldades associadas à Matemática, podem estar relacionadas aos diversos vieses, como: dificuldades cognitivas, dificuldades quanto às crenças à cerca da Matemática, dificuldade relativas à própria complexidade da Matemática e dificuldades originadas do ensino.

Nesse sentido, em consonância com as pesquisas citadas, entendemos que o gosto pela disciplina está associado de fato à sua compreensão e à forma com a qual o conteúdo é conduzido pelo professor. Portanto, se possuem diversos níveis de dificuldades, isso acarreta como consequência uma contrariedade à Matemática.

A frequência de estudo fora da escola apontou dados que cerca de 67% dos alunos não possuem um hábito de estudo contínuo, pois estudam apenas no período de prova, na véspera ou nem se quer estudam.

Este fato, está associado segundo Pacheco e Andreis (2015), com a falta de orientação da família, visto que sem ela os alunos não têm a organização necessária para o estudo, deixando tudo para a última hora. Além disso, esta falta de apoio pode ter como consequência o desinteresse pelas atividades, acarretando um baixo índice de rendimento em Matemática. Com isso, entendemos que esta falta de hábito de estudo pode ser combatida por meio de uma cooperação mútua entre a relação escola, família e aluno.

Com base no questionamento sobre o ano em que os participantes estudaram produtos notáveis, os dados apontaram que 83% deles estudaram o conteúdo, no 8º ano do Ensino Fundamental. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), este conteúdo deve ser trabalhado no 4º ciclo que faz referência à 7ª e 8ª série, atuais, 8º e 9º ano, no campo de números e operações que envolvem a aritmética e a álgebra.

Entretanto, de acordo com as novas orientações curriculares para a educação básica, evidenciadas por meio da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), este conteúdo deverá ser abordado no 9º ano deste nível de ensino. O qual, os alunos ao final das aulas devem ter a seguinte habilidade:

(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau. (BRASIL, 2018, p. 317)

Portanto, a partir dos PCN's observamos que o conteúdo tem sido trabalhado de forma normatizada no 8º ano, porém de acordo com as novas recomendações da BNCC será transferido gradualmente para 9º ano.

3.3.2. Olhar dos alunos sobre os caminhos adotados no ensino de Matemática

Nesta categoria, foram abordadas questões relativas à metodologia utilizada pelos professores ao ensinar Matemática e outras específicas sobre produtos notáveis. Para isso levantamos indagações sobre os seguintes aspectos: as explicações dos professores, o domínio do conteúdo dos professores, compreensão dos alunos sobre as aulas, o interesse dos alunos pelas aulas de matemática e se eles conseguem relacionar os conteúdos com o cotidiano.

Quando mais de 73 % dos alunos afirmam que a explicação do professor é boa ou excelente, que foram os dados encontrados na pesquisa. É porque fazem alusão ao domínio de conteúdo que o professor possui, fato este, enfatizado por Ângelo (2012). Afirmativa esta que pode ser corroborada com o questionamento a seguir.

Os alunos apontaram predominantemente (com aproximadamente 86 %) o domínio do conteúdo de produtos notáveis pelos professores. Vale ressaltar que este é um dos saberes considerados como fundamentais para a profissão docente. Como orienta os PCN's:

Para desempenhar seu papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, o professor precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos [...] e uma concepção de Matemática como ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis [...] sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos. (BRASIL, 1998, p.36)

Embora os alunos considerem como boas as aulas desenvolvidas pelos professores, como foi ressaltado anteriormente, notamos que há uma irregularidade quanto a compressão das explicações. Visto que 57% afirmaram que compreendem as vezes, poucas vezes ou nunca as aulas ministradas.

Para Pimenta (2005), este fato está relacionado à não utilização de forma adequada de um dos saberes fundamentais dos docentes de Matemática, os quais, são: a experiência, o conhecimento e os saberes pedagógicos. Neste último o professor deve preocupar-se com sua ação didática, que é percebida pela relação entre professor, conteúdo, método e aluno, Libâneo (1994).

Apesar da irregularidade citada anteriormente. Quando perguntados se as aulas de Matemática despertam a atenção, mais de 89 % dos alunos compreendem que as aulas de Matemática despertam ou despertam às vezes sua atenção. Embora haja o despertar, os alunos por vezes não compreendem o conteúdo.

Fato este evidenciado por Sena et al. (2016), onde afirmam que a aprendizagem se torna efetiva e atraente para as gerações atuais quando são utilizados recursos interativos e engajadores, semelhantes aos que os estudantes estão familiarizados em suas rotinas, fazendo com estes se interessem pelos conteúdos propostos. Além disso, um outro fator que pode tornar a aula atraente, para além do uso destes recursos é a relação dos conteúdos com o cotidiano.

Sobre esta relação, a resposta dos alunos com a predominância de 70% que relacionam ou às vezes relacionam os conteúdos com o cotidiano vai ao encontro do que afirma D'Ambrósio (1989):

O aluno, acreditando e supervalorizando o poder da Matemática formal perde qualquer autoconfiança em sua instituição Matemática, perdendo dia a dia, o seu bom senso matemático. Além de acreditar que a solução a solução de um problema encontrada matematicamente não estará necessariamente relacionada com a solução do mesmo problema numa situação real. (D'AMBRÓSIO, 1989, p.15)

Nesse sentido, ressaltamos a contextualização dos conteúdos com o dia a dia como um fator importante para inserção do aluno na disciplina. Assim, de acordo com Tufano (2001), contextualizar é o ato de colocar no contexto; é uma ação premeditada para situar um indivíduo no tempo e no espaço desejado. A contextualização também está evidenciada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), por meio dos temas transversais (Saúde, Orientação Sexual, Pluralidade Cultural, Trabalho e Consumo, Ética, Meio Ambiente).

Sobre o formato das aulas para o ensino de produtos notáveis podemos perceber que 60% enfatizaram uma educação formal, com um início pela definição seguido de exemplo e exercícios. A qual, de acordo com D'Ambrosio (1989), caracteriza-se por seu modelo expositivo e por vezes é criticado, pois essa prática revela a concepção de que é possível aprender matemática através da transmissão de conhecimentos.

Assim como na questão anterior, nesta também há o predomínio da prática do conteúdo por meio de lista de exercícios pré-definidos. D'Ambrósio (1989) afirma que é muito comum os alunos desistirem de resolverem um problema matemático, ao afirmar que ainda não aprendeu aquele tipo de questão. Nesse sentido, a autora destaca que falta aos alunos propostas que lhe motivem e desafiem a resolvê-los.

Diante disso, optamos por ressaltar metodologias que situam os alunos enquanto sujeitos ativos. Morán (2015), propõe neste sentido três possibilidades de abordagens: ensino por projeto, ensino híbrido e sala de aula investida.

3.3.3. Avaliações em Matemática

Nesta categoria abordamos situações que envolvem as avaliações em Matemática como: a dependência escolar, sensação dos alunos diante das avaliações da disciplina, formas de avaliação utilizada pelos professores para o conteúdo de produtos notáveis.

A respeito da indagação sobre dependência escolar, podemos perceber que dentre os alunos pesquisados, pouco mais de 40 % ficaram em recuperação, destes, mais da metade ficou apenas em Matemática. Estes dados vão ao encontro de outros abordados pelo Censo Escolar (2018) com a situação da distorção idade-série que alcança 24,7% nos anos finais. Observamos que a taxa do Censo é bem próxima da que encontramos dos alunos que ficaram em Matemática.

Segundo D'Ambrosio (2000), as avaliações conforme vêm sendo conduzidas, tem aberto espaços para deformações às vezes irreversíveis. Tal situação revela um crescente e preocupante índice de reprovação, de repetência e de evasão. Com isso, é importante ter objetivos bem definidos para avaliação, para que ela não seja usada como um instrumento para reprovação.

Nesse sentido, os dados sobre a sensação frente às avaliações de Matemática apontam que mais de 66 % dos alunos demonstraram ter preocupação ou medo. Estes fatores de acordo com D'Ambrosio (2001) estão associados por vezes às ameaças que os professores fazem com os alunos sobre o nível de avaliação que eles terão, além disso, ele evidencia que:

A avaliação deve ser uma orientação para o professor na condução de sua prática docente e jamais um instrumento para reprovar ou reter alunos na construção de seus esquemas de conhecimento teórico e prático. Reprovar, selecionar, classificar, filtrar indivíduos não é missão do educador. Outros setores da sociedade devem se encarregar dessa missão. (D'AMBRÓSIO, 2001, p. 98)

Neste sentido, cabe ao professor esclarecer de que forma os alunos serão avaliados, a partir de que objeto e qual será a finalidade da avaliação, visto que ela deve fornecer indícios sobre as suas próprias aprendizagens.

Sobre as formas de avaliação mais usada pelos professores de Matemática, notamos que mais de 80% ainda privilegiam as avaliações por meio de provas/simulados e testes semanais. Fato este caracterizado por Lopes (2010) ao afirmar o seguinte:

Não acreditamos que o avaliar possa traduzir-se em aplicar uma ou mais provas e corrigi-las por meio de critério os quais nem sempre são claros para o próprio elaborador das questões. Cada situação que proponho a uma pessoa com o intuito de avaliá-la requer de mim clareza sobre os objetivos que tenho com essa ação. (LOPES, ano, p. 136)

Diante desta afirmação, podemos compreender a relevância da avaliação, assim como, com os instrumentos que utilizamos para tal, visto que sua finalidade deve estar claro para o professor e para o aluno. Diante disso, Mendes (2009) enfatiza que as teorias de aprendizagem têm cada vez mais refletido sobre este processo, pois defendem uma avaliação que valorize repostas analíticas e reflexivas, a fim de evidenciar a subjetividade do aluno continuamente.

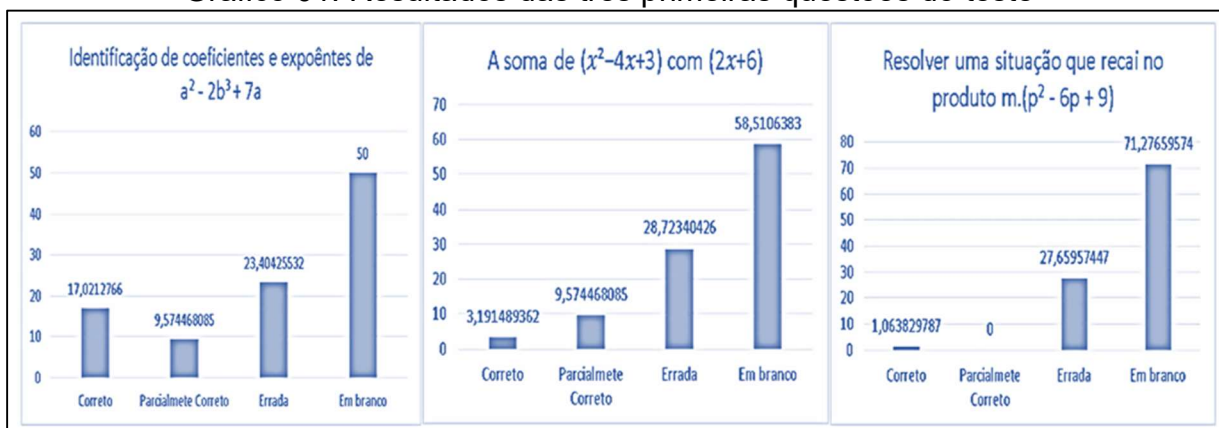
3.3.4. Quadro de dificuldades e Teste de verificação

Vale ressaltar que o teste de verificação foi composto de 10 questões, das quais, 5 foram subjetivas, destas, 3 abordavam conhecimentos considerados como base para o tema, como: identificação de expoente e coeficientes, adição e

subtração de termos algébricos e a propriedade distributiva. As outras duas subjetivas mais as 5 últimas objetivas foram específicas de produtos notáveis, com as quais abordamos os seguintes aspectos: quadrado da soma e da diferença de dois termos, produto da soma pela diferença, cubo da soma e da diferença de dois termos, soma e diferença de dois cubos (Apêndice A).

Dessa forma, apresentamos a seguir uma análise destas questões em comparação com dados obtidos pelos itens do quadro de dificuldades (Anexo C), assim como, com as pesquisas encontradas na revisão de estudos sobre o tema em cheque.

Gráfico 01: Resultados das três primeiras questões do teste



Fonte: Dados resultantes de pesquisa de campo, 2019.

As questões evidenciadas anteriormente pelo gráfico 01, quando relacionadas com o quadro de dificuldades percebemos no item 1 (identificação de coeficientes) que mais de 70% dos alunos afirmaram ter estudado, destes, 50 % acharam fácil ou regular. No item 2 (identificação de expoentes), 77 % afirmaram ter estudado, destes, 56 % também acharam fácil ou regular.

Entretanto, apesar das classificações apresentadas pelos alunos, percebemos que estes dados não condizem com as suas repostas no gráfico da questão 1 do teste de verificação, exposta pela imagem à cima, visto que mais de 70% dos alunos deixaram em branco ou não responderam, este fato é caracterizado que a maioria dos alunos não conseguem identificar os elementos de uma potência, dificuldades estas corroboradas com a pesquisa de Costa et al. (2016) ao ressaltarem que os alunos possuem esta dúvida e confundem a nomenclatura por não possuírem a compreensão do conceito de potenciação.

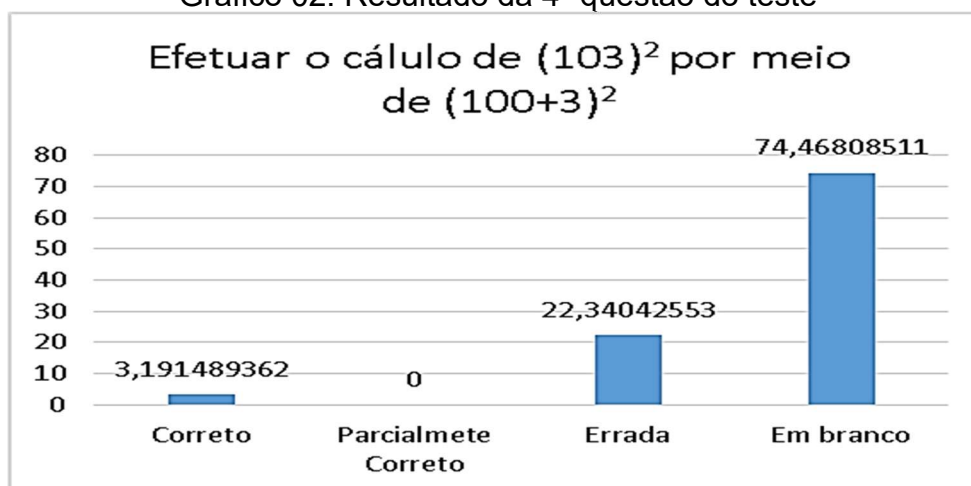
Além disso, nos itens 3 e 4 (adição e subtração de termos algébricos respectivamente) do quadro de dificuldades, cerca de 70% dos alunos enfatizaram em ambos lembram de ter estudados e 50 % destes consideraram como fácil ou regular. Porém, os dados da questão 2 do teste, no gráfico revelam que mais de 86% dos alunos não responderam ou simplesmente erraram.

Isso também é apontado pela revista do SisPae (2015, p. 41), ao ressaltarem que dos alunos participantes da pesquisa, apenas 35,6 % acertaram. Os erros característicos encontrados foram as tentativas de multiplicar os termos ao invés de agrupar por meio os termos semelhantes e operacionalizarem a adição e a subtração entre eles.

No item 5 (propriedade distributiva do produto em relação a adição e subtração) do quadro de dificuldades, 54 % afirmaram ter estudado, destes 43% consideraram este tópico como regular ou difícil, ou seja, a resposta diferiu das anteriores. Esta dificuldade se evidencia pelo gráfico anterior, especificamente com a questão 3, a qual revela que mais de 88% não conseguiram resolver esta questão que envolvia o cálculo de área.

Estas situações também foram evidências no estudo de Costa et al. (2016), com uma questão similar, pois solicitavam que os alunos calculassem a área e para isso utilizassem a propriedade distributiva. Elas ressaltam na pesquisa que os alunos não tinham o conceito de área bem definido, assim como, não sabiam efetuar a distributividade. Além disso, Rodrigues (2008) afirma uma outra situação também presente na nossa pesquisa, na qual, os alunos multiplicavam apenas os primeiros e os segundos termos entre si.

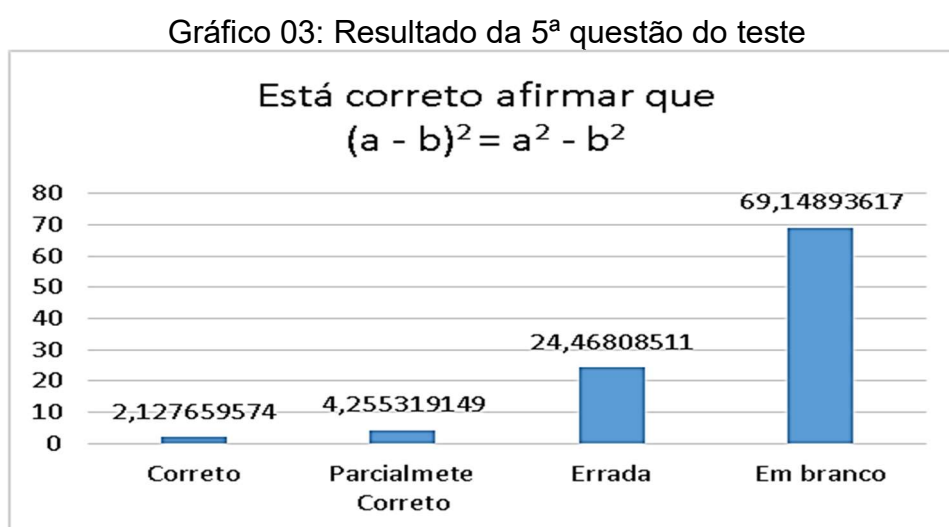
Gráfico 02: Resultado da 4ª questão do teste



Fonte: Dados resultantes de pesquisa de campo, 2019.

No item 6 (quadrado da soma de dois termos) do quadro de dificuldades, 74% dos alunos afirmaram que lembram de ter estudado, destes, 51% acham muito fácil, fácil ou regular. Porém, os dados do gráfico acima nos revelam outra realidade, como pode-se observar. A qual, caracteriza uma dificuldade considerável dos alunos em desenvolverem este produto notável.

Fator este citado também por Dario (2017), em uma das atividades desenvolvidas na sua pesquisa, a autora ressalta que foi comum encontrar o erro relacionado a este tópico, por meio do uso equivocado da seguinte relação: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, fato este também presente em nossa pesquisa. Ou seja, os alunos não desenvolveram de forma correta o quadrado da soma de dois termos.

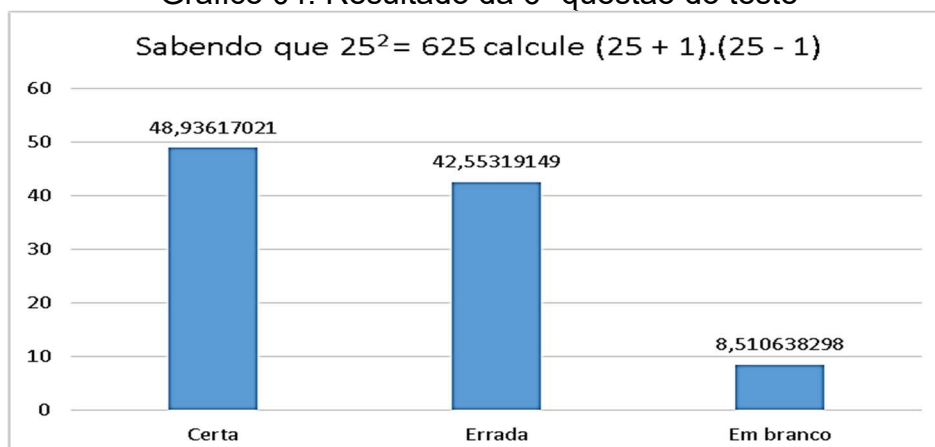


Fonte: Dados resultantes de pesquisa de campo, 2019.

No item 7 (quadrado da diferença de dois termos) do quadro de dificuldades, 69% dos alunos afirmaram que lembram de ter estudado este tópico do conteúdo, destes, 44% classificaram como muito fácil, fácil ou regular. Contudo, mais de 93% erraram ou deixaram em branco como podemos observar no gráfico.

Fato que também foi caracterizado em consonância com as respostas encontradas nos testes, com o qual, Dario (2017), evidencia um erro análogo ao citado anteriormente pela mesma autora. Entretanto, desta vez utilizaram-se da seguinte relação: $(a - b)^2 = a^2 - b^2$. Mas como o direcionamento a autora afirmou que os alunos conseguiram desenvolver a atividade proposta por ela associada à área.

Gráfico 04: Resultado da 6ª questão do teste



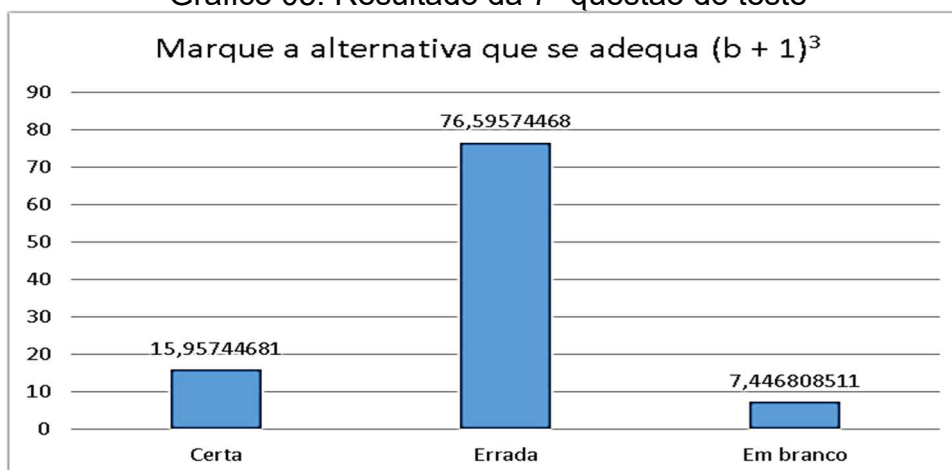
Fonte: Dados resultantes de pesquisa de campo, 2019.

Tópico ressaltado no item 8 do quadro de dificuldades referente a este caso (produto da soma pela diferença de dois termos), observamos que 62% dos alunos afirmaram ter visto o conteúdo, além disso, 40% deste quantitativo classificou como muito fácil, fácil ou regular.

Um outro fator que nos chamou atenção nesta questão é pelo fato do número de acertos sem a utilização do produto pela diferença, ou seja, grande parte dos alunos fez a adição e a subtração presente nos parênteses, depois multiplicou e obteve o resultado sem a utilização dos produtos notáveis.

Sobre este caso, Rodrigues (2008), evidenciou situações análogas às nossas, com dificuldades encontradas na atividade sobre produto da soma pela diferença que foram com relação às operações com os números inteiros, além de os alunos não dominarem totalmente técnicas de operações com expressões numéricas.

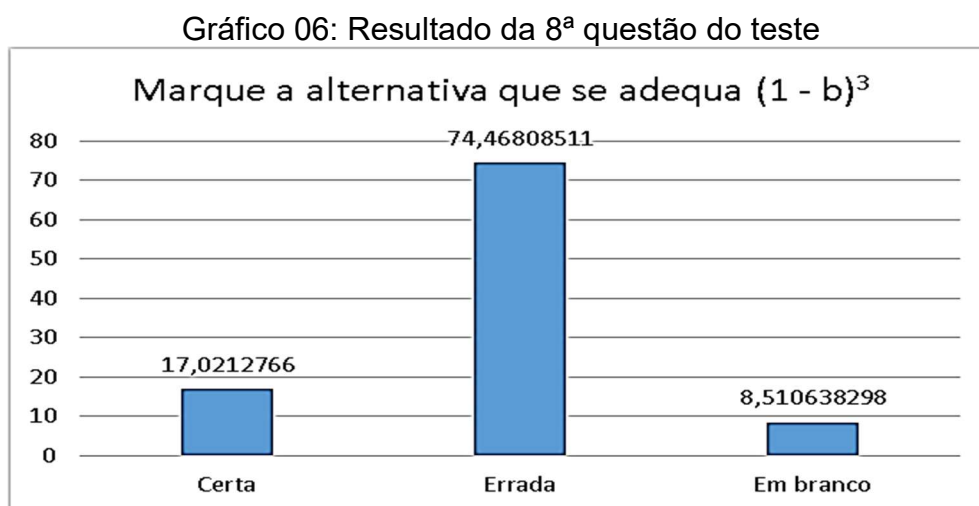
Gráfico 05: Resultado da 7ª questão do teste



Fonte: Dados resultantes de pesquisa de campo, 2019.

No item 9 (cubo da soma de dois termos) do quadro de dificuldades, observamos que 58% dos alunos afirmaram que haviam estudado este tópico, destes, 35% classificaram como difícil ou muito difícil. Notamos uma situação preocupante, notada a partir da quantidade de erros e respostas em branco ressaltadas no gráfico acima.

As quais possuem como motivação dificuldades elucidadas por Ventura e Laudares (2016), ao enfatizarem que os discentes expressaram dificuldades na conversão da expressão algébrica para a geométrica com a montagem do cubo (por ser tridimensional), visto que o objetivo da pesquisa deles era desenvolver a representação geométrica deste caso dos produtos notáveis. Além disso, recorrem à uma espécie de distributividade do expoente sobre os termos.

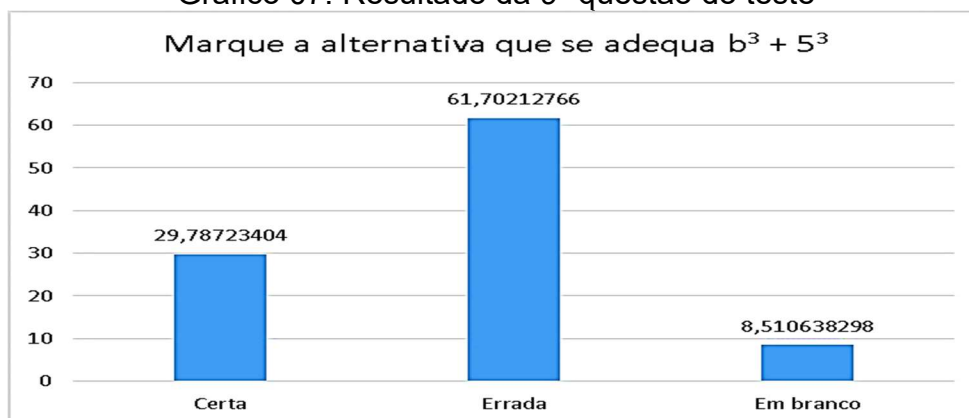


Fonte: Dados resultantes de pesquisa de campo, 2019.

Analogamente aos dados da questão anterior, no item 10 (cubo da diferença de dois termos), 50% dos alunos asseguraram que não estudaram o conteúdo. Dado que pode ser corroborado com o gráfico acima que evidência com mais de 82% de respostas erradas ou em branco.

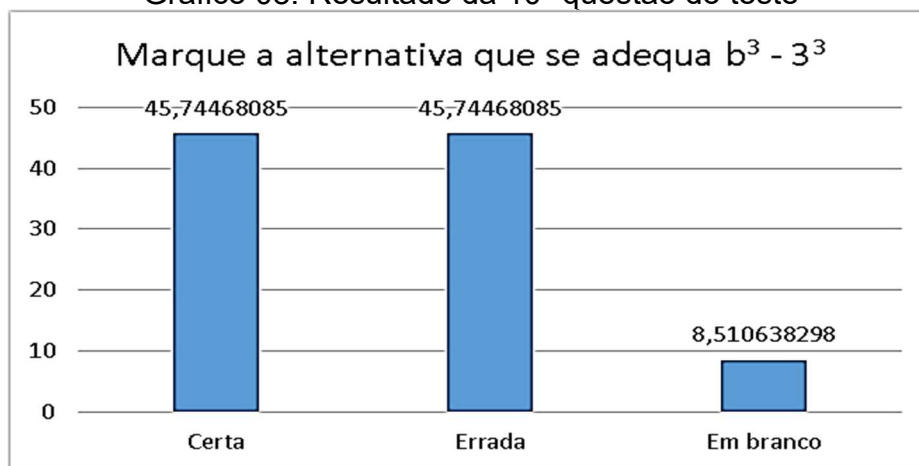
As quais, são também elucidadas também por Ventura e Laudares (2016), como um caso análogo a questão anterior. Dessa maneira, foi ressaltado pelos autores uma maior dificuldade de construção geométrica, principalmente deste caso por conta da subtração.

Gráfico 07: Resultado da 9ª questão do teste



Fonte: Dados resultantes de pesquisa de campo, 2019.

Gráfico 08: Resultado da 10ª questão do teste



Fonte: Dados resultantes de pesquisa de campo, 2019.

Sobre os dois últimos casos abordados em nossa pesquisa, os itens 11 e 12 do quadro de dificuldades (soma e diferença de dois cubos) enfatizaram que cerca de 60% dos alunos não lembram de ter estudado. O que fica evidente no gráfico 07 com 70% de respostas erradas ou em branco, diferente do gráfico 08 que trouxe o número de acertos maior, os quais nós podemos supor que foi por meio de respostas aleatórias, visto que era uma questão objetiva e os alunos afirmaram que não lembram de ter estudado.

Além disso, dentre os estudos consultados, dos quais apontamos os resultados de Costa et al. (2016); Rodrigues (2008); Dario (2017) e Ventura e Laudares (2016). Nenhum deles fez análise ou buscou compreender estes dois últimos casos, caracterizando-se, portanto, uma carência de trabalhos relacionados eles.

3.3.5. Análise Global

Expomos a seguir uma análise global das categorias estabelecidas para o desenvolvimento da pesquisa. Com a qual, destacamos pontos relevantes e resultados obtidos sobre cada uma delas.

Na primeira categoria, evidenciamos que a maioria dos alunos participantes afirmaram que não possuem afinidade com a Matemática e em consonância com as pesquisas citadas, entendemos que tal fato está associado à sua compreensão. Outro ponto de destaque, foi que os alunos também não possuem um hábito de estudo contínuo, este fato de acordo com as pesquisas está associado com a falta de orientação da família que promovem como consequência o desinteresse e baixos índices de rendimento em Matemática. No mais, destacamos os produtos notáveis tem sido trabalhado de forma normatizada pelos PCN's no 8º ano, porém de acordo com as novas recomendações da BNCC será transferido para 9º ano.

Na segunda categoria, a maioria dos alunos afirmou que a explicação dos professores é boa ou excelente, de acordo com as pesquisas quando afirmam isso é porque fazem alusão ao domínio de conteúdo que eles possuem. Embora tenham feito tal afirmação, observamos que há uma irregularidade quanto a compressão das explicações, este fato pode estar relacionado à não utilização de forma adequada de um dos saberes fundamentais dos docentes de Matemática.

Além disso, apesar de tal irregularidade citada quanto ao entendimento, notamos eles compreendem que as aulas de Matemática despertam ou despertam às vezes sua atenção. Alguns dos fatores para isso são os recursos interativos e a relação dos conteúdos com o cotidiano (importante para inserção do aluno na disciplina).

Um outro ponto de destaque nesta categoria foi a respeito da predominância de uma educação formal, a partir da qual, apontamos alternativas metodológicas para o ensino de Matemática. Em consenso com este método, notamos o predomínio da prática do conteúdo por meio de lista de exercícios pré-definidos, como proposta de mudança sugerimos as metodologias ativas.

Na terceira categoria, notamos que mais de 40 % dos participantes ficaram em recuperação, destes, mais da metade ficou em Matemática, esta situação vai ao encontro dos dados abordados pelo Censo Escolar (2018) com a conjuntura da distorção idade-série. Um dos fatores para isso, segundo as pesquisas realizadas é

que as avaliações conforme vêm sendo conduzidas, tem aberto espaços para deformações às vezes irrecuperáveis. Para isso, os objetivos devem ser bem definidos para avaliação, visto que ela é um instrumento que quando utilizada indevidamente contribui para a repetência dos alunos.

Devido ao formato de avaliação que foi desenvolvido com os alunos, eles demonstraram ter preocupação ou medo como as principais sensações ao realizarem uma prova de Matemática. Um dos motivos, segundo as pesquisas são as ameaças que os professores fazem com os alunos sobre o nível de avaliação. Nesse sentido, cabe ao professor esclarecer de que forma os alunos serão avaliados, a partir de que objeto e qual será a finalidade da avaliação.

Outro ponto enfatizado por eles, foi o privilégio das avaliações por meio de provas/ simulados. Entretanto, as teorias de aprendizagem têm cada vez mais refletido sobre este processo, pois defendem uma avaliação que valorize repostas analíticas e reflexivas dos discentes.

Por fim, destacamos que as dificuldades evidenciadas na pesquisa com relação ao conteúdo de produtos notáveis a partir do quadro de dificuldades e do teste de verificação foram a não identificação de coeficientes e de expoentes enquanto elementos de uma potência.

Sobre a adição e subtração de termos algébricos, os erros característicos encontrados foram as tentativas de multiplicar os termos ao invés de agrupar os termos semelhantes e operacionalizarem a adição e a subtração entre eles. Na propriedade distributiva do produto em relação a adição e subtração, os alunos não tinham o conceito de área bem definido e não sabiam efetuar a distributividade, pois multiplicavam apenas os primeiros e os segundos termos entre si.

No quadrado da soma de dois termos uma dificuldade característica dos alunos em desenvolverem este produto notável uso equivocado da seguinte relação: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Assim como, no quadrado da diferença de dois termos, que utilizaram-se da seguinte relação: $(a - b)^2 = a^2 - b^2$, ou seja, análoga à anterior.

No produto da soma pela diferença de dois termos, destacamos como a questão com maior número de acertos, entretanto, notamos que os alunos não utilizam o produto da soma pela diferença, ou seja, grande parte dos alunos fez a adição e a subtração presente nos parênteses. Além disso, os que não conseguiram apresentaram dificuldades nas operações com os números inteiros e não domínio de técnicas de operações com expressões numéricas.

No cubo da soma de dois termos, observamos uma situação preocupante, notada a partir da quantidade de erros e respostas em branco. Um dos motivos foram as dificuldades conversão da expressão algébrica para a geométrica, quando era necessária tal relação. Além disso, recorrem à uma espécie de distributividade do expoente sobre os termos. Situações análogas foram encontradas no cubo da diferença de dois termos, assim como, dificuldades principalmente por conta da subtração.

Na soma e na diferença de dois cubos respectivamente, os alunos apresentaram respostas erradas ou em branco e um maior número de acertos maior, os quais nós podemos supor que foi por meio de respostas aleatórias, visto que era uma questão objetiva e os alunos afirmaram que não lembram de ter estudado. Além disso, apontamos uma carência de trabalhos relacionados a estes casos.

A seguir, foram apresentadas as percepções dos professores acerca de uma investigação análoga a qual foi desenvolvida com os alunos egressos.

3.4. PERCEPÇÃO DOS PROFESSORES

Nesta etapa da pesquisa, foi ressaltada uma investigação realizada com professores da educação básica. A qual teve como pretensão, compreender suas perspectivas acerca de diversos aspectos que circundam o processo de ensino de Matemática, consequentemente o ensino de produtos notáveis a nível de Ensino Fundamental II.

Neste sentido, para coleta de dados foi utilizada a plataforma do “*google forms*”. Com a qual, foi desenvolvido um questionário (Anexo D) composto com questões objetivas a respeito das implicações dos professores acerca de quatro enfoques: perfil e formação acadêmica; metodologia utilizada para o ensino de produtos notáveis; avaliação; e questões específicas sobre os produtos notáveis com ênfase nos conhecimentos circunscritos e nas identidades que os compõem.

Para isso, houve a elaboração de um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Anexo B). O qual foi enviado para os professores juntamente com o questionário, com o intuito de esclarecer a integridade e preservação das identidades dos participantes, mesmo que por necessidades os dados da pesquisa sejam divulgados.

Após esta etapa, houve a coleta de dados coletados, com os quais foram realizadas análises análogas às dos alunos egressos a partir de gráficos gerados pela própria plataforma a respeito da perspectiva de 36 dos professores. Para o desenvolvimento destas análises, foram estabelecidas correlações com os apontamentos da pesquisa realizada com os alunos, com a abordagem dos livros didáticos, assim como, com evidências de outras pesquisas apontadas por teóricos da Educação e da Educação Matemática, como foram apontadas a seguir.

3.4.1. Perfil e formação dos professores

Neste primeiro enfoque, a respeito do perfil dos professores foram destacados aspectos sobre o tempo de magistério como professor (a) de Matemática e o tipo de escola que trabalha. Sobre formação acadêmica, houve indagações sobre o nível de formação que possuem e sobre a presença dos produtos notáveis em disciplinas na formação inicial e continuada.

Com relação ao tempo de magistério, a pesquisa apresentou uma heterogeneidade. Visto que 36% dos professores possuem até 5 anos, assim como, 50 % possui de 6 a 15 anos, enquanto o restante que é uma minoria, possui 16 anos ou mais. No que tange ao tipo de escola onde trabalham, foi constatado que 72% atuam em escolas públicas de âmbito municipal, estadual ou federal. Quanto ao restante, atuam apenas nas escolas privadas.

Com base nas informações citadas, Pimenta (2005) aponta que os saberes fundamentais à docência, são: a experiência, o conhecimento e os saberes pedagógicos. Neste sentido, a experiência em sala de aula, assim como, esta diversidade de ambientes escolares vivenciados pelos professores e suas percepções, trazem contribuições consideráveis para esta pesquisa.

A respeito da formação dos professores, evidenciamos que 66% estão cursando mestrado e que apenas 11% possuem graduação. Quanto aos demais, possuem ou estão em andamento com a especialização ou doutorado. Ou seja, estes professores trazem consigo além da experiência e um arcabouço acadêmico sólido quanto aos outros saberes fundamentais à profissão.

A respeito da presença dos produtos notáveis em disciplinas da formação inicial, a pesquisa apontou que 66% dos professores participaram de alguma

disciplina que abordou os produtos notáveis. Na formação continuada, esta porcentagem decaiu para 11%.

Sobre estes dados evidenciados, Pimenta (2005) afirmou que a formação inicial está preocupada por vezes com o desenvolvimento de um currículo associado aos conteúdos, enquanto a continuada preocupa-se em aprofundá-los. Assim, podemos destacar que de fato os produtos notáveis aparecem em disciplinas com Cálculo e Álgebra na graduação, o que caracteriza a relevância quanto ao seu estudo. Porém na pós-graduação há um distanciamento, até porque existem diversas perspectivas neste nível de formação.

Com base nas indagações estabelecidas com os professores, ficou evidente que os participantes de pesquisa além de experientes, trazem consigo um cabedal acadêmico considerável. Por consequência promovem opiniões relevantes acerca dos dados gerados adiante.

3.4.2. Caminhos adotados para o ensino de Produtos Notáveis

Neste segundo enfoque, com relação as estratégias metodológicas usadas pelos professores para o ensino de produtos notáveis. Foram evidenciados os seguintes aspectos: a quantidade de aulas utilizadas; a estratégia usada para iniciar as aulas deste conteúdo; e a indagação quanto a importância da associação da Álgebra com a Geometria para o seu ensino.

Sobre a quantidade de aulas utilizadas para trabalhar o assunto de produtos notáveis ficou evidente que mais de 45% os professores afirmaram que usam de 4 a 6 aulas. Pouco mais de 20% afirmaram que utilizam cerca de 7 a 8 aulas. Quanto aos demais, houve uma discrepância nas respostas como 1 ou 18 aulas. Diante disso, vale ressaltar que compreender a opinião de professores experientes na esfera de atuação do Ensino Fundamental II, é importante para que seja delimitada também a quantidade dos encontros para realização da sequência didática desta pesquisa.

No que tange a estratégia adotada para iniciar o conteúdo de produtos notáveis, ficou evidente que 64% dos professores seguem a sequência clássica de definição, exemplo e exercício. Esta supremacia relacionada a tríade citada, também foi apontada pelos alunos, ou seja, há um consenso pelos personagens da

educação quanto ao seu uso. Contudo, este tipo de prática para Barbosa (2017), não favorecem as interações entre professor e alunos e entre os próprios alunos.

Quanto aos demais professores, foram ressaltadas por eles outras possibilidades de abordagens como: a história, situação problema, por meio da utilização de materiais concretos e por jogos para depois sistematizar os conceitos. As quais, estão em consonância com, Luiz e Col (2013), visto que também apontam estas alternativas de recursos metodológicos para o ensino de Matemática. Assim como, a Etnomatemática, a Modelagem, Resolução de Problemas, a Investigação Matemática e Tecnologias da Informação e Comunicação.

Como forma de consolidar os estudos sobre produtos notáveis, o instrumento que mais se destacou foram as listas de exercício com 53%, o qual conversa com a perspectiva de ensino supracitado. Os demais, permeiam pelo uso de jogos, exercícios do livro didático e questões pesquisadas pelo aluno sobre o assunto.

Por fim, a respeito da associação da Geometria com a Álgebra para o ensino de produtos notáveis. Mais de 97% dos professores, ou seja, quase que em unanimidade consideraram de suma importância tal relação. A qual foi inclusive reafirmada pelos PCN's e BNCC, ao elucidarem nos documentos que as interligações entre os campos da Matemática como: a Aritmética, a Álgebra e a Geometria e outros campos do conhecimento são fundamentais para o bom desenvolvimento da aprendizagem dos alunos.

Nesta categoria, notamos que a presença da tríade, definição – exemplo – exercício ainda está arraigada no ensino de Matemática, conseqüentemente no ensino de produtos notáveis. Assim como, as listas de exercícios também se destacam como um instrumento adequado para aprofundar as discussões do conteúdo. Além disso, outros fatores relevantes, foram a quantidade de aulas e a associação da Álgebra com a Geometria.

3.4.3. Avaliação em Matemática

Neste terceiro enfoque, com relação ao aspecto da avaliação em Matemática, especificamente sobre os produtos notáveis. Foram destacados aspectos como as principais formas de avaliação dos alunos; a sensação do professor ao aplicar uma

avaliação e se eles costumam investigar os conhecimentos básicos dos alunos para iniciar o conteúdo.

Quando perguntados sobre as principais formas utilizadas para avaliar seus alunos, 97 % dos professores enfatizaram como instrumento a prova escrita, dados que estão em consonância com os registros dos alunos. Quanto aos 3%, eles alternaram suas respostas com prova oral; prova escrita; autoavaliação; fichas de observação; produções no caderno e trabalhos.

Sobre isso, Luckesi (2005) afirma que ao contrário do exame, a avaliação faz uso de um processo avaliativo-construtivo, onde o desempenho do aluno é provisório ou processual, ou seja, “cada resultado obtido serve de suporte para um passo mais à frente”. Neste sentido, ela não é um fim em si, mas parte do processo avaliativo, por isso possui, também, caráter dinâmico. Então, de acordo com os resultados apontados os professores realizam exames e não avaliação de fato.

Sobre a sensação dos professores ao aplicar uma avaliação de Matemática foi apontado que 77% dos participantes sentiam-se seguros. Contudo, os 23% restante elucidaram um sentimento de insegurança. Tais dados, contrastam a sensação de mais de 66 % dos alunos frente às avaliações de Matemática, ao demonstrarem ter preocupação ou medo.

Esta sensação de contraste entre alunos e professores pode estar associada aos tipos de avaliações da aprendizagem mais frequente nos estabelecimentos de ensino que são formais, decorativas, autoritárias e sem sentido, visando classificar em detrimento de apontar a necessidade de melhoria no ensino. (VASCONCELLOS, 2006, p.67; FERNANDES, 2009, p.29). Olhar este que vai ao encontro da fala de D'Ambrosio (2001), apontada na pesquisa com os alunos.

Quando perguntados sobre o levantamento de conhecimentos básicos dos alunos, para iniciar o conteúdo de produtos notáveis, aproximadamente 53% dos professores responderam que fazem por meio de diálogo, outros 28% também utilizam a estratégia por meio de testes. Os demais afirmaram que não costumam fazer este tipo de investigação.

Esta indagação feita aos professores, caracteriza uma das etapas considerada como relevantes para a avaliação, visto que se enquadra na concepção de avaliação diagnóstica. A qual, é definida por Ferreira (2009, p. 33), pode ser utilizada para: conhecer o aluno, sua bagagem cognitiva e/ou suas habilidades; identificar possíveis dificuldades de aprendizagem; verificar o que o aluno aprendeu

ou não aprendeu, identificando causas de não aprendizagem; caracterizar o aluno quanto a interesses ou necessidades; replanejar o trabalho.

Com base nas respostas dos professores, vale ressaltar que a avaliação possui suas finalidades. Como o fornecimento de indícios sobre a aprendizagens, assim como, de obstáculos a serem superados tanto pelos professores quanto pelos alunos. Por isso, é importante que sejam diversificados os instrumentos utilizados para tal e não ter um olhar delimitador e unilateral a fim de pontuar ou classificar o conhecimento dos alunos.

3.4.4. Quadro de dificuldades

Neste último enfoque da pesquisa, com interesse de avaliar o nível de dificuldades que os alunos possam ter na aprendizagem dos conteúdos relacionado aos produtos notáveis. Foi solicitado aos professores que avaliassem a relevância e o grau de dificuldade de aspectos que circundam o ensino de produtos notáveis, assim como, as identidades que o compõem com base em suas práticas.

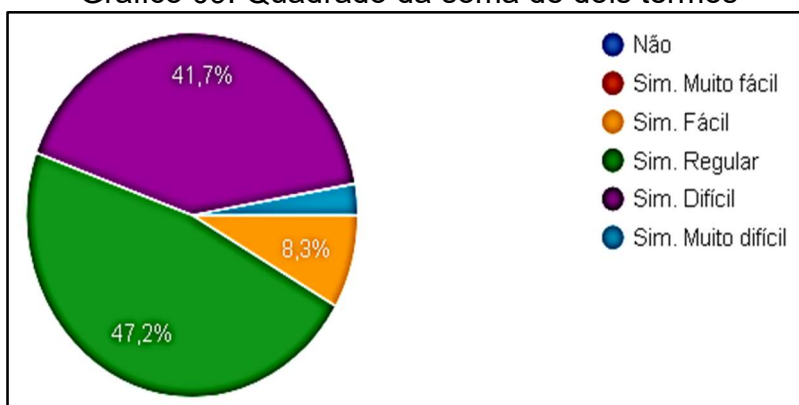
Com relação a identificação de coeficientes de termos algébricos, 62% dos professores consideraram como fácil ou regular, além disso, 13% deles afirmaram não ter ensinado. Para identificação de expoentes de termos algébricos, 86% dos professores consideraram como fácil ou regular, 11% afirmaram não ter ensinado.

Embora seja relativamente pequena o percentual de professores que não ensinaram, este fato gera uma preocupação, visto que ambos são considerados como básicos para o estudo de produtos notáveis com apresentam os próprios livros didáticos analisados e as pesquisas da revisão de estudos. Preocupação esta que aumenta ao levar em consideração que cerca 70% dos alunos deixaram em branco ou não responderam as questões que faziam referência a eles.

Além disso, sobre adição de termos algébricos cerca de 80% dos professores afirmaram que é um tópico fácil ou regular, os demais o consideraram como difícil. Sobre a subtração de termos algébricos, as percentagens foram quase as mesmas, visto que apenas aumentou em 5% a consideração deste tópico como difícil. Fato este que contrasta com os dados da questão 2 do teste realizados pelos alunos, o qual revela que mais de 86% dos alunos não responderam ou simplesmente erraram. Erro que foi citado também pela revista do SISPAE (2015).

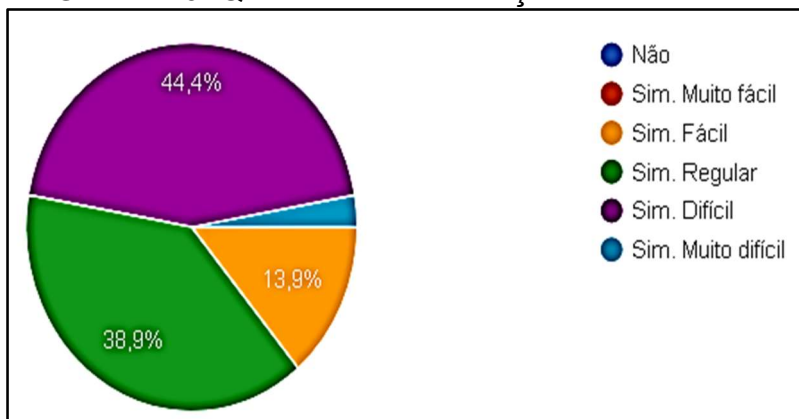
Sobre estes quatro tópicos iniciais que foram destacados (conceitos básicos de potenciação, assim como, as operações de com adição e subtração com termos algébricos semelhantes). As pesquisas de Borgato (2013) e Soares (2018) também apontaram que grande parte dos alunos apresentaram estas dificuldades e em outros conceitos da Matemática Básica como as quatro operações. Por conseguinte, estas dificuldades impedem a aprendizagem com fluidez dos produtos notáveis.

Gráfico 09: Quadrado da soma de dois termos



Fonte: Dados da pesquisa, 2020.

Gráfico 10: Quadrado da diferença de dois termos

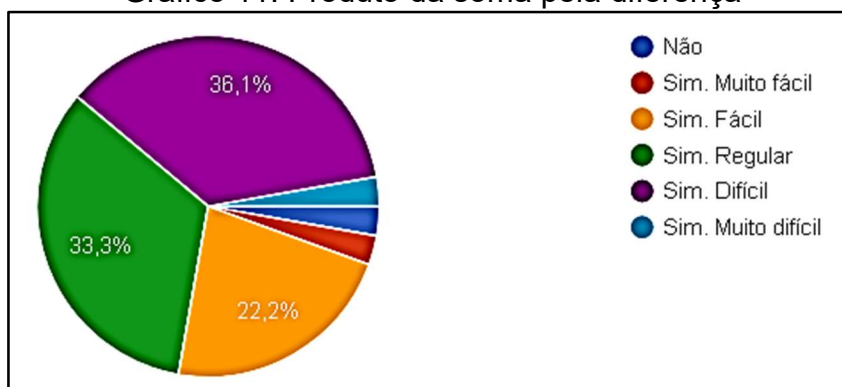


Fonte: Dados da pesquisa, 2020.

Os gráficos 09 e 10 ilustram de modo análogo a opinião dos professores quanto as identidades “quadrado da soma e da diferença de dois termos”, pois todos afirmam que as ensinam. Contudo, ao apontarem sobre grau de dificuldade dos alunos na aprendizagem houve um equilíbrio nas respostas. Fato que ganha mais realce, na pesquisa realizada com os alunos, especificamente no teste, onde mais 90% de suas respostas foram em branco ou erradas.

Sobre este fato, a pesquisa de Soares (2018) apontou que em ambos os casos, isto ocorre devido caráter de abstração da Álgebra, pois em questões totalmente numéricas, o aluno conseguiu resolver, mas, quando possuía incógnita, multiplicou somente o coeficiente com a variável. Além disso, Borgato (2013) também afirma que pode estar associado com as dificuldades supraditas sobre os conceitos matemáticos básicos e em conceitos da geometria.

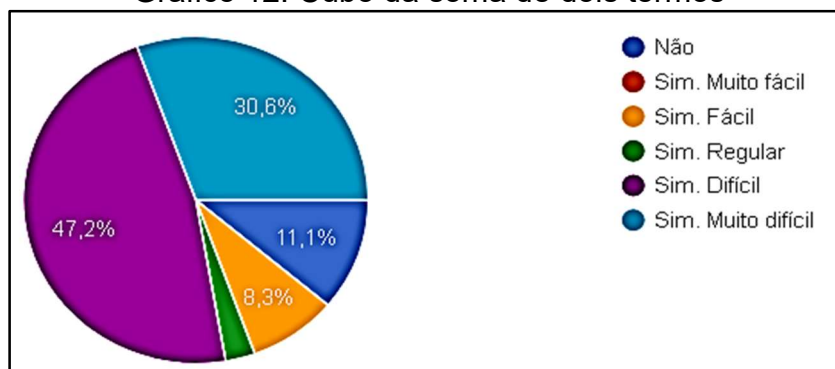
Gráfico 11: Produto da soma pela diferença



Fonte: Dados da pesquisa, 2020.

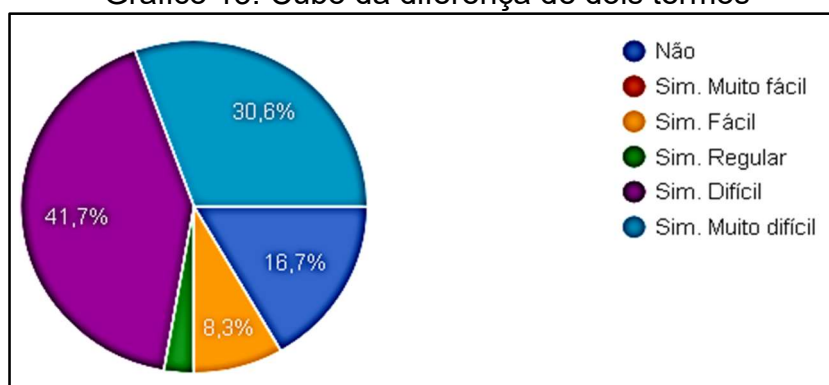
Com base na leitura do gráfico 11, ficou evidente que esta identidade do “produto da soma pela diferença” também costuma ser ensinada pelos professores e apresentou um relativo equilíbrio frente à dificuldade para aprendizagem dos alunos. A qual também esteve presente na pesquisa com os alunos, visto que 62% deles afirmaram ter visto o conteúdo, destes pouco mais de 48% acertaram a questão do teste. Além disso, com base com na revisão de estudos, os alunos apresentaram dificuldades análogas ao quadrado da soma e da diferença de dois termos.

Gráfico 12: Cubo da soma de dois termos



Fonte: Dados da pesquisa, 2020.

Gráfico 13: Cubo da diferença de dois termos

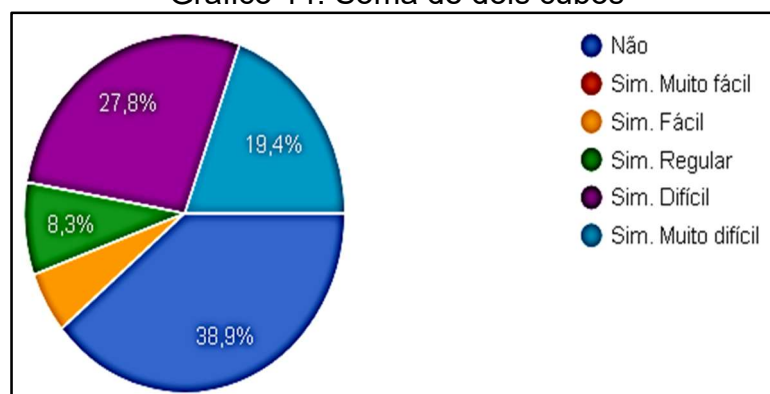


Fonte: Dados da pesquisa, 2020.

Sobre o cubo da soma e da diferença de dois termos, os gráficos apontaram uma outra característica em relação aos anteriores que foram as ausências de ambas no ensino dos um grupo minoritário de professores. Quanto aos que ensinaram a maioria afirmou que são tidos como difíceis de serem aprendidos pelos alunos. O que foi confirmado na pesquisa com os alunos egressos, onde cerca de 50% deles afirmaram que haviam estudado estes tópicos, destes, 35% classificaram como difícil ou muito difícil.

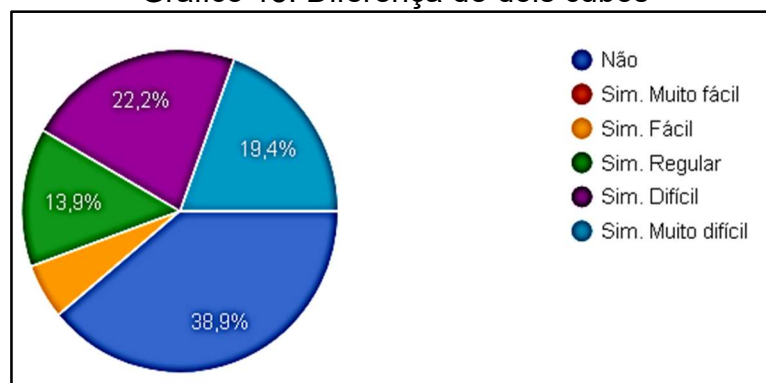
Ausência esta que foi percebida inclusive nas pesquisas da revisão de estudos, visto que uma das poucas que as aborda foi a de Vignestki (2013). Além disso, dos 4 livros didáticos que foram investigados do PNLD, apenas um deles apresentou o quadrado da soma de dois termos, consequentemente a carência de outras identidades.

Gráfico 14: Soma de dois cubos



Fonte: Dados da pesquisa, 2020.

Gráfico 15: Diferença de dois cubos



Fonte: Dados da pesquisa, 2020.

A respeito da soma e da diferença de dois cubos, os gráficos elucidaram uma porcentagem ainda maior que as identidades anteriores sobre suas ausências frente ao ensino. Dos professores que afirmaram que ensinam, a grande maioria os considerou como difícil ou muito difícil no processo de aprendizagem. O que foi confirmada na pesquisa com os próprios alunos, onde ressaltam que mais de 60% deles não lembram ter estudado.

Além disso, estas identidades também não foram abordadas por nenhuma das pesquisas da revisão de estudos. Assim como, não estiveram presentes em nenhum dos livros didáticos do PNLD que foram investigados.

3.4.5. Análise Global

Nesta etapa, as categorias foram apresentadas de forma sintetizada com os resultados obtidos na pesquisa com os professores. Assim como, também foram evidenciados seus apontamentos acerca de obstáculos enfrentados pelos alunos, com base nos conteúdos que circundam e nas identidades que compõem os produtos notáveis.

Na primeira categoria ficou evidente a caracterização do perfil dos professores que participaram da pesquisa. A qual, elucidou que grande parte dos professores possuem experiência consideráveis devido ao tempo de magistério e pela diversidade de instituições que atuam. Além disso, trazem consigo um cabedal acadêmico com base nas formações acadêmicas apresentadas.

Na segunda categoria, com relação as estratégias metodológicas usadas pelos professores para o ensino de produtos notáveis. A respeito da quantidade de aulas

foram destacadas, 4 a 8 aulas, além disso, quanto a estratégia usada para iniciar as aulas ainda ficou evidente a supremacia relacionada a tríade definição, exemplo e exercícios, para fixação, os instrumentos destacados também foram as listas de exercício. Por fim, acerca da associação da Álgebra com a Geometria, os professores apontaram de forma quase que unânime tal relevância.

Na terceira categoria, sobre a avaliação em Matemática, especificamente com os produtos notáveis. Os professores enfatizaram a prova escrita como instrumento principal para avaliar os alunos, além disso, a maioria afirmou realizar um levantamento sobre o conhecimento dos alunos antes de iniciar o conteúdo, isto é feito, por meio do diálogo e de testes. Quanto a sensação, houve um contraste, pois há segurança por parte dos professores e insegurança pelos alunos.

Na última categoria, com interesse de compreender o nível de dificuldades que os alunos possam ter acerca do conteúdo, foram destacados pelos professores a relevância e o grau de dificuldade para a aprendizagem de cada tópico. Sobre conceitos básicos de potenciação, assim como, as operações de com adição e subtração com termos algébricos semelhantes ficou evidente que os professores apontaram como fácil, porém nem sempre foram ensinados o que ocasiona dificuldades para a aprendizagem dos alunos.

Sobre o quadrado da soma e da diferença de dois termos, assim como, produto da soma pela diferença ficou evidente que são ensinadas e estão presentes nos livros didáticos. Contudo, sobre grau de dificuldade na aprendizagem dos alunos houve um equilíbrio nas respostas dos professores (entre difícil e regular).

Sobre o cubo da soma e da diferença de dois termos foram destacadas ausências de ambas no ensino de um grupo minoritário de professores. Quanto aos que ensinaram a maioria afirmou que são tidos como difíceis de serem aprendidos pelos alunos. A respeito da soma e da diferença de dois cubos, uma grande percentagem dos professores afirmou que não ensinaram. Os que ensinaram, a grande maioria os considerou como difícil ou muito difícil no processo de aprendizagem.

Diante dos resultados supracitados pela investigação realizada com os professores, fica evidente que as contribuições para esta pesquisa foram consideradas de suma importância. Visto que todos os pontos destacados foram levados em consideração para a elaboração e aplicação da sequência didática com os alunos do 8º ano do Ensino Fundamental II.

4. PRODUTOS NOTÁVEIS: UM TRATAMENTO MATEMÁTICO

Neste capítulo, abordamos um tratamento matemático sobre produtos notáveis, com o qual foi destacada inicialmente uma breve história dos produtos notáveis. Assim como, níveis de abordagens que perpassam desde os enfoques evidenciados pelos livros didáticos associado ao Ensino Fundamental II em sua relação com a Geometria, fatoração e completamento de quadrado a outros casos não usuais e inter-relações deste com outros conteúdos matemáticos.

Dos quais destacamos em âmbito do Ensino Médio (como é o caso do Binômio de Newton e Triângulo de Pascal). Além de correlações e aplicações deste conteúdo com tópicos do Ensino Superior como Cálculo (Limite, Derivada e Integral) e Análise Real (Limites de Sequências Numéricas).

Vale ressaltar que estas correlações foram estabelecidas, pois tivemos a pretensão de apresentar os produtos notáveis com maior aprofundamento para os professores no intuito de situá-lo e caracterizar as possibilidades de interligação a outros conteúdos ou mesmo evidenciá-lo de uma forma para além da apresentada pelos livros didáticos. Além de consolidar matematicamente esta pesquisa para a construção da sequência didática.

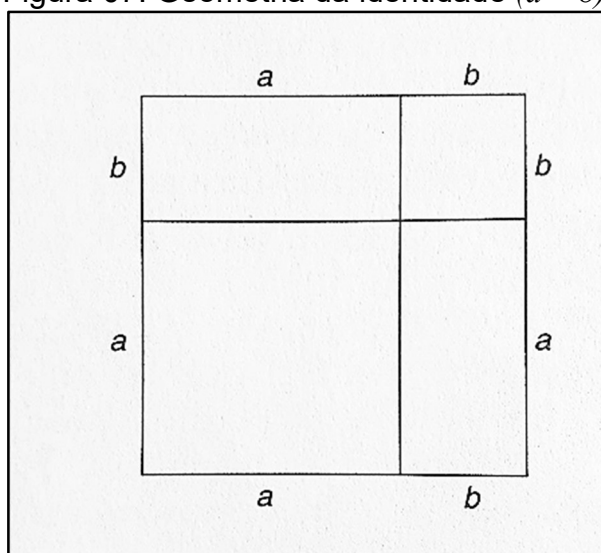
4.1. UMA BREVE HISTÓRIA DOS PRODUTOS NOTÁVEIS

Os gregos se destacaram quanto as formas de abordagens quando o assunto estava relacionado às identidades e operações algébricas, especificamente os produtos notáveis. De acordo com Eves (2004), eles partiam do pressuposto da representação de um número por meio de um comprimento para efetuaram tais operações.

Assim, foram atribuídas aos pitagóricos tais proezas que se encontram espalhadas em vários dos primeiros Livros de Euclides. Especificamente no Livro II, visto que este contém várias proposições, as quais, caracterizam-se no fundo como identidades algébricas envolvidas numa terminologia geométrica. Para ilustração, Eves (2004) aponta o método na proposição 4 do Livro II: *“Dividindo-se uma reta em duas partes, o quadrado sobre a reta toda é igual à soma dos quadrados sobre as partes juntamente com o dobro do retângulo contido pelas partes”*.

Em suma tal enunciado diz respeito à identidade associada ao quadrado da soma de dois termos ou $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. A qual pode ser interpretada geometricamente a partir da ilustração proposta por Euclides, como temos a seguir na figura 1:

Figura 07: Geometria da identidade $(a + b)^2$



Fonte: Eves, 2004, p.108.

Além desta, também foram abordadas outras identidades algébricas que posteriormente receberam o tratamento geométrico que estão contidas no livro *Os Elementos de Euclides*. A partir disso, apresentamos a seguir um tratamento matemático por meio de situações acerca de construções da própria álgebra, assim como, da correlação apresentada anteriormente. Além de relações entre os produtos notáveis com tópicos de diferentes níveis de ensino.

4.2. TÓPICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL (CASOS ELEMENTARES)

Inicialmente desenvolvemos situações acerca de produtos polinomiais de um modo geral, conseqüentemente a evidência das identidades proporcionadas por eles. As quais podem ser verificadas por meio da utilização de propriedades de potenciação, assim como, a distributividade do produto em relação a adição e subtração de monômios.

Dados a e $b \in \mathbb{R}$, considere os produtos a seguir:

$$a) 3a^2(4a^3 - 12a + 3) = 3a^2 \cdot 4a^3 - 3a^2 \cdot 12a + 3a^2 \cdot 3 = 12a^5 - 36a^3 + 9a^2$$

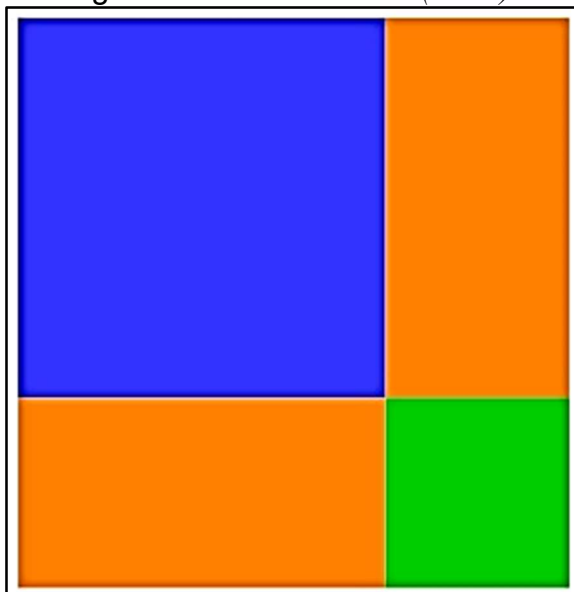
$$\begin{aligned} b) (4a + b)(9a - 7b + 2) &= 4a(9a - 7b + 2) + b(9a - 7b + 2) \\ &= 4a \cdot 9a + 4a \cdot (-7b) + 4a \cdot 2 + b \cdot 9a + b(-7b) + b \cdot 2 \\ &= 36a^2 - 28ab + 8a + 9ab - 7b^2 + 2b \\ &= 36a^2 + 8a - 19ab + 2b - 7b^2 \end{aligned}$$

Diante disso, ressaltamos adiante outros casos de produtos polinomiais que são utilizados com maior frequência em diversos níveis de ensino e abordagens. Os quais, são denominados de *produtos notáveis*, devido sua importância para esta pesquisa, os apresentamos associados às respectivas interpretações geométricas.

I) Quadrado da Soma e da Diferença de dois termos

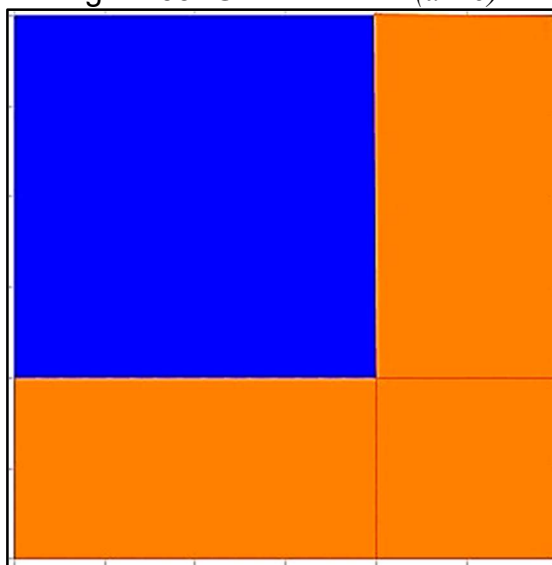
$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

Figura 08: Geometria de $(a + b)^2$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

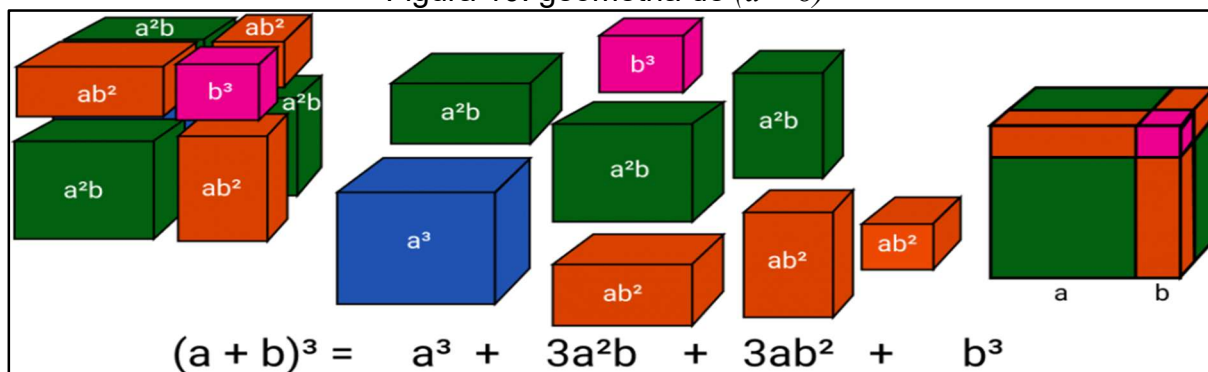
$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

Figura 09: Geometria de $(a - b)^2$ 

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

II) Cubo da Soma e da Diferença de dois termos

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

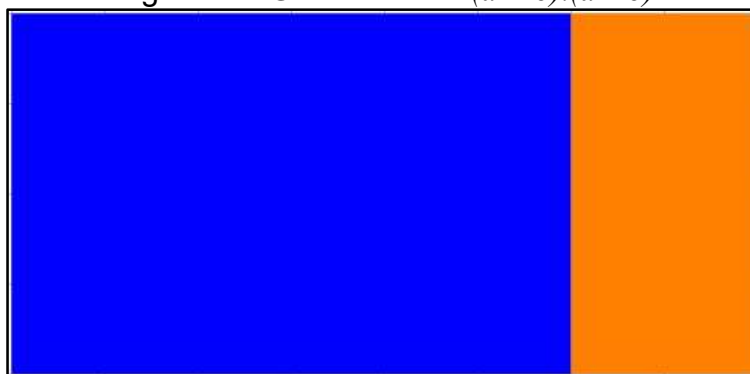
Figura 10: geometria de $(a + b)^3$ 

Fonte: <https://matematicabasica.net/produtos-notaveis/>

$$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

III) Produtos da Soma pela Diferença

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Figura 11: Geometria de $(a + b).(a - b)$ 

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

IV) Outros casos

Nestes, não serão abordados a interpretação geométrica, devido à dificuldade existente para tal elaboração. Com isso, buscamos apenas apresentá-los diante de suas respectivas verificações.

$$(a + b + c)^2 = (a + b + c)(a + b + c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a - b - c)^2 = (a - b - c)(a - b - c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc + b^2$$

$$\begin{aligned} (a + b + c)^3 &= (a + b + c)(a + b + c)(a + b + c) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(c + b) \end{aligned}$$

4.3. PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO

De acordo com Boulos (2001), fatorar significa escrever uma expressão (um polinômio) em forma de produto. Em outras palavras a fatoração se desenvolve de modo contrário aos produtos notáveis. Pois enquanto este chega-se a parti de um produto num polinômio, a fatoração transforma um polinômio num produto. Dessa forma, o mesmo autor ressalta alguns casos como:

Caso 1. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

Neste caso basta notar o trinômio quadrado perfeito, pois a partir dele pode-se facilmente efetuar a troca com a identidade supracitada. De modo análogo ao

caso 1, observa-se que também pode ser utilizada a seguinte identidade: $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$. Além disso, acrescentamos outras identidades:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3 \quad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

Caso 2. $a^2 + (m + n)a + mn = (a + m)(a + n)$, onde m e n são inteiros tais que $(m + n)$ formam o coeficiente de a e mn o termo independente.

Exemplo: Para fatorar $x^2 + 8x + 12$, devemos achar m e n tais que $m \cdot n = 8$ e $m + n = 12$. Como 12 tem fatores 1 e 12, 2 e 6, 3 e 4, observa-se que 2 e 6 também forma 8. Donde conclui-se que $m = 2$ e $n = 6$. Então,

$$x^2 + 8x + 12 = (x + 2)(x + 6)$$

Caso 3. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Ao notar que se trata de uma situação característica da diferença de dois quadrados pode-se tranquilamente efetuar a permuta.

Caso 4. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ e $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Diante do exposto, fica evidente a correlação direta existe entre os conteúdos. Além disso, ressaltamos a importância destas relações frente à simplificação de expressões algébricas.

4.4. PRODUTOS NOTÁVEIS E O COMPLEMENTO DE QUADRADO

Segundo Boulos (2001), uma equação na incógnita x é chamada de equação quadrática se puder ser colocada na forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e $c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Dessa forma, quando $b = 0$ ou $c = 0$ a equação é considerada como incompleta. Nesse sentido, ao considerar os dois casos de equações incompletas o autor afirma que é possível determinar o método por meio do complemento de quadrado. Para uma melhor compreensão desta técnica, segue um exemplo.

Dada a expressão $x^2 + 7x$, vamos supor que seja necessário escrevê-la na forma $(x + m)^2 + n$, onde m e n são números a determinar. Igualando ambas e desenvolvendo o segundo membro chega-se à:

$$x^2 + 7x = x^2 + 2mx + m^2 + n$$

Da igualdade conclui-se que $7 = 2m$, logo $m = \frac{7}{2}$. Além disso, igualando-se os termos independentes e substituindo o $m = \frac{7}{2}$, obtém-se $n = \frac{-49}{4}$. Portanto, a expressão fica na forma:

$$x^2 + 7x = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$$

Diante disso, aborda-se a técnica de um modo geral a partir da expressão

$$y = x^2 + kx$$

Agora, ao dividir k por 2 e somar $\left(\frac{k}{2}\right)^2$ chega-se à :

$$y + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = x^2 + kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

$$y = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

Portanto,

$$y = x^2 + kx = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

Esta técnica é utilizada para determinar as raízes de qualquer equação quadrática. A exemplo da seguinte equação: $2x^2 + 3x = 27$. Para resolvê-la por completamento de quadrado divide-se ambos os membros por 2.

$$x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{27}{2}$$

Como o coeficiente do x é $3/2$, deve-se dividi-lo por 2. Com isso, chega-se à $3/4$. Ao elevar ao quadrado e somar à ambos os membros nota-se

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{225}{16}$$

Daí resulta em, x' e $x'' = 3$

Fato que corrobora a eficiência da técnica, consequentemente a utilização do quadrado da soma de dois termos (produto notável) para a solução de qualquer equação quadrática.

4.5. BINÔMIO DE NEWTON E TRIÂNGULO DE PASCAL

Neste tópico destacamos a relação estabelecida entre os produtos notáveis com o Binômio de Newton e Triângulo de Pascal. Visto que a partir do desenvolvimento destes, podemos elaborar generalizações de diversos casos dos produtos notáveis, a exemplo de $(a + b)^4, (a + b)^5, \dots, (a + b)^n \forall n \in \mathbb{N}$. Nesse sentido, os apresentamos seguidos de suas respectivas demonstrações.

I) Binômio de Newton

Segundo Ávila (2005), o desenvolvimento de $(a + b)^n$, para $n \in \mathbb{N}, a \text{ e } b \in \mathbb{R}$ é dado por:

$$(a + b)^n = a^n + n a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} a^{n-r}b^r + \dots + b^n \quad (*)$$

Para demonstrá-lo, devemos utilizar o princípio da indução matemática. Nesse sentido, inicia-se com os chamados coeficientes binomiais

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}, r = 1, 2, \dots, n.$$

Ao multiplicar o numerador e denominador por $(n-r)!$, obtemos:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{n!(n-r)!}$$

Neste sentido, em termos de coeficientes binomiais, (*) assume a forma:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \quad (**)$$

A expressão acima, caracteriza uma proposição que denota-se por P (n). Agora, objetivamos provar que ela implica em P (n + 1). Para isso, multiplica-se a expressão (**) por (a + b). De onde obtêm-se por um lado:

$$(a + b)^{n+1} = (a + b) \left[\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n} b^n \right]$$

$$(a + b)^{n+1} = \binom{n}{0} a^{n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right] a^n b + \dots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right] a b^n + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

Por outro lado,

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{r!} + \frac{n(n-1) \dots (n-r)}{(r+1)!}$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{r} \cdot \left(1 + \frac{n-r}{r+1}\right)$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{(n+1)n(n-1) \dots (n-r+1)}{(r+1)!}; \quad (***)$$

Isto é,

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

Daqui e do fato de ser

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1 \text{ e } \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

Observa-se que (***), se escreve como:

$$(a + b)^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \dots + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}$$

O que caracteriza o P (n + 1). Ou seja, P (n) implica no P (n+1), que completa a demonstração. Visto que P (1) é verdadeira, por inspeção, conclui-se que P (n) é verdadeira para todo $n \geq 1$, desde que $n \in \mathbb{N}$.

P1) Em cada linha do triângulo o primeiro elemento vale 1, pois qualquer que seja a linha o primeiro elemento é o $\binom{n}{0}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

P2) Em cada linha do triângulo o último elemento também vale 1, pois é sempre da forma $\binom{n}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

P3) A partir da terceira linha cada elemento (exceto o primeiro e o último) é obtido pela soma dos elementos da linha anterior, imediatamente acima dele. Esta propriedade é conhecida com relação de Stifel e afirma que:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}; n \geq 2$$

Demonstração do teorema citado anteriormente:

Seja A um conjunto com n elementos, agora tome $a \in A$. Com isso, pode-se calcular o número de combinações dos elementos de A, formados de P a P de dois modos:

1º modo) Diretamente pela fórmula, isto é, $\binom{n}{p}$ (*).

2º modo) calcula-se o número de combinações que não possuam o elemento a.

Tal número é $\binom{n-1}{p}$.

Em seguida calcula-se o número de combinações que possuem o elemento a que é descrito por:

$$\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} (**)$$

De (*) e (**) conclui-se que:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

P4) Numa linha, dois coeficientes equidistante dos extremos são iguais

Demonstração:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{n!(n-p)!} \quad \text{e} \quad \binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!n!}$$

De onde conclui-se que

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Portanto, a partir do exposto nota-se que cada linha contém os coeficientes dos respectivos desenvolvimentos dos produtos notáveis do tipo $(a + b)^n \forall n \in \mathbb{N}$.

A parti do supracitado acerca da compreensão do Binômio de Newton e do Triângulo de Pascal podemos desenvolver com certa razoabilidade os seguintes casos:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Além disso, de acordo com Quinet (1970) quando encontram-se casos do tipo $(a - b)^n$ basta utilizar as técnicas dos casos anteriores com a alternância dos sinais. Inicia-se sempre pelo positivo, seguido do negativo e assim sucessivamente.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

Por fim, elucidamos com a observação de que a fórmula do Binômio de Newton possui restrições quando pensamos para além dos números reais. Um destes casos, é com relação as matrizes, como temos no seguinte enunciado.

Sejam X e $Y \in \mathbb{M}(\mathbb{R})_{N \times N}$, vejamos que a identidade a seguir não é válida para este espaço. Pois ao desenvolvermos o binômio, observa-se que:

$$(X + Y)^2 = (X + Y)(X + Y) = X^2 + XY + YX + Y^2$$

Como, o produto matricial $X.Y$ não é comutativo, não pode-se generalizar a seguinte identidade neste caso.

$$(X + Y)^2 = (X + Y)(X + Y) = X^2 + 2XY + Y^2$$

Além disso, no contexto da Álgebra Abstrata ou Moderna também temos o seguinte pensamento. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo com unidade, sem divisores de zero e de característica 2, ao determinarmos as expressões dos seguintes casos, observa-se que:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2$$

A partir das situações supracitadas observa-se que as generalizações das identidades são validas em sua totalidade para os números reais. Contudo quando ampliamos para o campo das matrizes e outras situações no contexto da Álgebra, elas se apresentam de forma limitadas.

4.6. PRODUTOS NOTÁVEIS: APLICAÇÕES DE CÁLCULO I

Adiante ressaltamos algumas aplicações referentes aos produtos notáveis em tópicos de Cálculo (Limite Derivada e Integral). Com as quais são destacadas ao longo do processo de suas soluções a utilização enquanto ferramenta de manipulação algébrica. Fato que caracteriza a relevância deste tema também frente ao Ensino Superior.

I) Questões de limite de função de uma variável, Guidorizzi (2002).

$$\text{Exemplo 1: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$

$$\text{Exemplo 2: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Exemplo 3: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4})} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

II) Questão sobre derivada de uma função de uma variável de Flemming e Gonçalves (2007).

Dada função $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$, encontre $f'(x)$

Solução:

Pela definição temos que $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Decorre, portanto, ao seguinte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x + \Delta x - 2}{x + \Delta x + 3} - \frac{x - 2}{x + 3}}{\Delta x} \\ f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x - 2)(x + 3) - (x + \Delta x + 3)(x - 2)}{(x + \Delta x + 3)(x + 3)\Delta x} \\ f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5\Delta x}{(x + \Delta x + 3)(x + 3)\Delta x} \\ f'(x) &= \frac{5}{(x + 3)^2} \end{aligned}$$

III) Questão sobre integral de uma função de uma variável de Flemming e Gonçalves (2007).

Resolva

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}$$

Solução:

Para resolver esta integral devemos completar o quadrado do denominador da seguinte maneira: $x^2 + 6x + 13 = (x^2 + 6x + 9) - 9 + 13 = (x + 3)^2 + 4$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} = \int \frac{dx}{(x + 3)^2 + 4}$$

Chama-se $u = x + 3$ e $du = dx$, com o qual obtemos:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} = \int \frac{du}{u^2 + 3} = \frac{1}{2} \arctan \frac{u}{\sqrt{3}} + c =$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+3}{2} + c$$

Neste sentido, ressaltamos a importância de se compreender historicamente o objeto de estudo. Visto que favorece o entendimento sobre as intercorrências e influências perpassadas ao longo de sua construção e evolução. A exemplo das contribuições dos gregos que permanecem até os dias atuais com a relação entre a álgebra e geometria.

Além disso, frente ao que foi evidenciado com o tratamento sobre os produtos notáveis destacamos sua relevância para a Matemática. A qual foi evidenciada com as relações estabelecidas frente aos conteúdos dos três níveis de ensino. No Fundamental II, com a fatoração e o completamento de quadrado, no Médio, com o Binômio de Newton e Triângulo de Pascal e suas restrições, assim como, no Superior em questões de limite, derivada, integral.

Também elucidamos que tal tratamento transcende abordagem dos livros didáticos. Pois, trouxemos com ele discussões e acréscimos para os discentes e principalmente para os docentes que forem utilizar esta pesquisa como embasamento para sala de aula e para pesquisas acerca do conteúdo e suas correlações com os demais temas.

5. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo consta a consolidação do texto de uma sequência didática que tem por objetivo a reconstrução das identidades dos produtos notáveis por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental II, por meio das interações verbais dialógicas presentes no contexto de sala de aula.

Sua construção foi baseada nas discussões estabelecidas no texto supracitado. Com o qual, foi elucidado o embasamento do cabedal teórico que subsidiou sua elaboração, onde a TSD buscou fundamentar as relações estabelecidas no triângulo didático, a SD possibilitou compreender sua definição, a UARC possibilitou sua elaboração em conjunto com os materiais manipuláveis.

Além disso, foram considerados os obstáculos didáticos retratados pelos alunos egressos e a ênfase dada na pesquisa realizada junto aos professores que lecionam neste respectivo nível de ensino. Assim como, as experiências bem-sucedidas de outros pesquisadores na vinculação da Álgebra com a Geometria como foram ressaltadas na revisão de estudos.

O tratamento matemático feito sobre o conteúdo, foi um outro ponto que trouxe contribuição para esta etapa da pesquisa, visto que, transcendeu as abordagens apresentadas pelos livros didáticos utilizados na educação básica, como foram retratados na identificação dos livros do PNLD. Com isso, possibilitou uma base matemática sólida para a construção da SD.

De posse de todas estas interfaces, foi estabelecida para o estudo dos produtos notáveis com os alunos do 8º ano do Ensino Fundamental II, uma sequência didática com 4 atividades. Na qual são abordados os seguintes pontos: Quadrado da soma de dois termos; Cubo da soma de dois termos; Produto da soma pela diferença de dois termos e Quadrado da diferença de dois termos. Todos, ressaltados de forma detalhada com relação ao tempo estimado no quadro 05.

Quadro 05: Proposta de organização das atividades

Sessão	Título da Atividade	Tempo estimado
1ª	Diagnóstico inicial	1 aula de 45 min
2ª	Quadrado da soma de dois	2 aulas de 45 min
3ª	Cubo da soma de dois termos	
4ª	Produto da soma pela diferença de dois termos	2 aulas de 45 min
5ª	Quadrado da diferença de dois termos	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021.

Para a realização da aplicação da sequência didática disposta a seguir, faz-se necessário promover uma verificação dos conhecimentos mínimos que circundam os produtos notáveis. Tendo em vista a realização de uma oficina, ou não, a fim de proporcionar condições básicas para o ensino deste conteúdo.

A sequência didática, que foi estruturada com base nas UARC's, contém um padrão de organização com os seguintes critérios: título, objetivo, material a ser utilizados pelos alunos, assim como, os procedimentos a serem adotados para que obtenham êxito em seu estudo. Os quais foram detalhados nas 4 atividades a seguir. Após a construção das identidades, os professores podem fazer uso da avaliação aplicada com questões contextualizadas em relação ao conteúdo abordado (conforme constam nos apêndices B e C respectivamente a sequência didática e a avaliação aplicada).

5.1. UARC 1 – QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS

Objetivo: Identificar a relação existente entre o quadrado da soma de dois termos e a soma do quadrado do primeiro termo, com o dobro do produto entre o primeiro e o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

Material: Papel, lápis ou caneta, borracha e material didático manipulável (Kit Geométrico), régua graduada e o roteiro da atividade.

Procedimento:

[Ii – EP] Com uso do material do kit Geométrico, construa um quadrado de acordo com as recomendações fornecidas. Num segundo momento determine a área do quadrado. Para isso, responda as seguintes perguntas.

[Ir – 01] Que tipo de figuras planas podem ser identificadas no conjunto de peças fornecidas?

[Ie – 02] Determine as dimensões (Largura e Comprimento) e as áreas correspondentes de cada uma das figuras identificadas.

[IE – 03] Represente por meio de letras as dimensões de cada uma das peças (verde-laranja-azul), tendo em vista as medidas obtidas. Num segundo momento, calcule a área de cada uma das figuras utilizando as letras atribuídas.

[IE – 04] Faça uma composição utilizando todas as peças fornecidas de modo a obter uma das figuras planas identificadas anteriormente. Num segundo momento, identifique as dimensões e calcule a área da figura construída.

[IE – 05] Estabeleça uma relação entre a área da figura formada e as anteriores.

[IF] Dados a e b , com a e $b \in \mathbb{Q}$

Representação algébrica:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ ou } a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Representação na Língua Materna:

O quadrado da soma de dois termos é numericamente igual a soma do quadrado do primeiro termo, com o dobro do produto entre o primeiro e o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

[IAR] Utilize a definição acima para completar os itens abaixo.

a) $(x + y)^2 =$

c) $(5x + y)^2 =$

b) $(x + 3)^2 =$

d) $m^2 + 2.m.n + n^2 =$

5.2. UARC 2 – CUBO DA SOMA DE DOIS TERMOS

Objetivo: Identificar a relação existente entre o cubo da soma de dois termos e a soma do cubo do primeiro termo, com o triplo do produto do quadrado do primeiro com o segundo termo, mais o triplo do produto do primeiro com o quadrado do segundo termo, mais o cubo do segundo termo.

Material: Papel, lápis ou caneta, borracha e material didático manipulável (Kit Geométrico), régua graduada e o roteiro da atividade

Procedimentos:

[I_I – EP] Com uso do material do kit Geométrico, construa um cubo de acordo com as recomendações fornecidas. Num segundo momento determine o seu volume. Para isso, responda as seguintes perguntas.

[I_R – 01] Que tipos de sólidos geométricos podem ser identificados no conjunto de peças fornecidas?

[I_E – 02] Determine as dimensões (Largura, Comprimento e Altura) e os volumes correspondentes de cada um dos sólidos identificados.

[I_E – 03] Represente por meio de letras as dimensões de cada uma das peças (verde-laranja-azul), tendo em vista as medidas obtidas. Num segundo momento, calcule o volume de cada um dos sólidos utilizando as letras atribuídas.

[I_E – 04] Faça uma composição utilizando todas as peças fornecidas de modo a obter um dos sólidos geométricos identificados anteriormente. Num segundo momento, identifique as dimensões e calcule o volume do sólido construído.

[I_E – 05] Estabeleça uma relação entre o volume do sólido formado e os anteriores.

[I_F] Dados a e b , com a e $b \in \mathbb{Q}$.

Representação algébrica:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3 \text{ ou } a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3 = (a + b)^3$$

Representação na Língua Materna:

O cubo da soma de dois termos é numericamente igual a soma do cubo do primeiro termo, com o triplo do produto do quadrado do primeiro com o segundo termo, mais o triplo do produto do primeiro com o quadrado do segundo termo, mais o cubo do segundo termo.

[I_{AR}] Utilize a definição acima para completar os itens abaixo.

a) $(x + y)^3 =$

c) $(x + 5y)^3 =$

b) $(x + 1)^3 =$

d) $z^3 + 3.z^2.w + 3.z.w^2 + w^3 =$

5.3. UARC 3 – PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

Objetivo: Identificar a relação existente entre o produto a soma e a diferença de dois termos com a diferença entre o quadrado do primeiro termo com o quadrado do segundo termo.

Material: Papel, lápis ou caneta, borracha e material didático manipulável (Kit Geométrico), régua graduada e o roteiro da atividade.

Procedimentos:

[I₁ – EP] Com uso do material do kit Geométrico, construa um retângulo de acordo com as recomendações fornecidas. Num segundo momento determine sua área. Para isso, responda as seguintes perguntas.

[I_R – 01] Que tipo de figuras planas podem ser identificadas no conjunto de peças fornecidas (azul e amarelo)?

[I_E – 02] Determine as dimensões (Largura e Comprimento) e as áreas correspondentes de cada uma das figuras identificadas.

[I_E – 03] Represente por meio de letras as dimensões de cada uma das peças, tendo em vista as medidas obtidas. Num segundo momento, calcule a área de cada uma das figuras utilizando as letras atribuídas.

[I_E – 04] Com o uso da tesoura, recorte um quadrado num dos cantos de uma das figuras de cor azul e calcule a área do quadrado obtido. Num segundo momento atribua letra as dimensões do quadrado recortado e calcule a área utilizando a letra atribuída.

[I_E – 05] Calcule a área da figura resultante, após a retirada do quadrado, a partir das áreas dos quadrados azuis anteriores, tanto numericamente quanto com as letras.

[I_E – 06] Repita o recorte nos cantos das peças de cor amarela com mesmas dimensões do quadrado azul recortado. Num segundo momento identifique as dimensões com as letras utilizadas inicialmente nas peças resultantes de cor amarela.

[I_E – 07] Faça apenas um recorte numa das peças amarelas resultantes de modo que as duas peças formem um retângulo. Num segundo momento, calcule a área desse novo retângulo, tanto numericamente quanto com uso das letras.

[I_E – 08] Estabeleça comparação, tanto numérica quanto com letras, entre a figura azul após a retirada do quadrado e a figura retângulo amarelo obtido após o recorte.

[I_F] Dados a e b , com a e $b \in \mathbb{Q}$.

Representação algébrica:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2 \text{ ou } (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Representação na Língua Materna:

O produto entre a soma e a diferença de dois termos é numericamente igual a diferença entre o quadrado do primeiro termo com o quadrado do segundo termo.

[I_{AR}] A partir do que foi trabalhado, complete as igualdades frente as seguintes alternativas.

a) $(x + y) \cdot (x - y) =$

b) $(x - 3) \cdot (x + 3) =$

c) $(2 + y) \cdot (2 - y) =$

d) $m^2 - n^2 =$

5.4. UARC 4 – QUADRADO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

Objetivo: Identificar a relação existente entre o quadrado da diferença de dois termos com a diferença do quadrado do primeiro termo e o dobro do produto entre o primeiro e o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

Material: Papel, lápis ou caneta, borracha e material didático manipulável (Kit Geométrico), régua graduada e o roteiro da atividade.

Procedimentos:

[I_I – EP] Com uso do material do kit Geométrico, construa um quadrado de acordo com as recomendações fornecidas. Num segundo momento determine a área deste quadrado. Para isso, responda as seguintes perguntas.

[IR – 01] Que tipo de figuras planas podem ser identificadas no conjunto de peças fornecidas (azul e amarelo)?

[IE – 02] Determine as dimensões (Largura e Comprimento) e as áreas correspondentes de cada uma das figuras identificadas.

[IR – 03] Atribua letras aos lados dos quadrados de maior área e menor área.

[IR – 04] Faça uma composição das figuras de modo a obter uma figura equivalente ao quadrado de maior área.

[IR – 05] A partir das letras atribuídas acima, represente as dimensões das demais figuras e calcule suas respectivas áreas.

[IR – 06] Como obter a área do quadrado intermediário a partir de retiradas de áreas do quadrado grande.

[IR – 07] Represente algebricamente a situação anterior.

[IF] Dados a e b , com a e $b \in \mathbb{Q}$.

Representação algébrica:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ ou } a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Representação na Língua Materna:

O quadrado da diferença de dois termos é numericamente igual a diferença do quadrado do primeiro termo e o dobro do produto entre o primeiro e o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

[IAR] Utilize a definição acima para completar os itens abaixo.

a) $(x - y)^2 =$

b) $(x - 5y)^2 =$

c) $(x - 1)^2 =$

d) $a^2 - 2.a.b + b =$

6. ANÁLISE E DISCUSSÃO DE DADOS

Este capítulo evidencia as análises e discussões dos dados gerados a partir da avaliação da sequência didática, mencionada anteriormente, por um grupo de professores atuantes nas redes de ensino da Educação Básica.

Conforme mencionado nos procedimentos metodológicos, pensamos inicialmente na realização desta etapa da pesquisa em uma experimentação do constructo com uma turma de 8º ano de uma escola pública da rede estadual de ensino. Entretanto, devido as circunstâncias ocasionadas pela pandemia da COVID – 19, foi necessário fazer um redirecionamento deste processo para uma avaliação de professores.

Com isto, houve a necessidade da elaboração de um questionário (segue no APÊNDICE D) que é composto por três etapas. A primeira, referente a avaliação individual de cada UARC; a segunda, associada a avaliação do conjunto das UARC's; e a terceira, composta por uma avaliação complementar com o foco na avaliação aplicada do processo, na promoção da interatividade entre os participantes, identificação das contribuições em relação aos elementos que compõem o triângulo didático professor-aluno-saber e a identificação das potencialidades da proposta para o ensino do objeto matemático elencado.

Tivemos como pretensão com este instrumento, subsidiar a coleta de dados para realização das análises da sequência didática. Esta coleta, foi baseada na manifestação de um grupo de 20 docentes pertencentes a uma turma do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM), vinculado a UEPA.

Antes da entrega dos questionários, com intuito de preservar a identidade dos participantes, foi realizada uma ordenação in loco, a fim de que cada professor tivesse uma representação por uma numeração de 1 a 20 para ser usada nas análises. Além disso, foi feita uma breve exposição sobre a estrutura das UARC's, de que forma seria realizado o processo (gradualmente com o término de todos frente às etapas) e a intencionalidade das atividades, assim como, o tempo que foi estipulado para cada uma, afim de que eles se ambientassem com a proposta.

Para um melhor entendimento do processo evidenciado, apresentamos a seguir os parâmetros utilizados para balizar as avaliações da sequência didática frente às três etapas mencionadas anteriormente em relação a UARC-1, UARC-2, UARC-3 e UARC-4.

• **AVALIAÇÃO INDIVIDUAL DAS UNIDADES CONCEITUAIS**

1. **A estrutura das intervenções [Inicial (Ii) - Reflexiva (Ir) - Exploratória (Ie)] conduzem a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático?**

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

2. **A formalização (F) está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?**

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa formalização?

3. **A Avaliação Restritiva (Ar) está compatível com o desenvolvido nas Intervenções (Ii – Ir – Ie) e com a Formalização (F) do objeto matemático?**

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa avaliação?

4. **A quantidade de atividades é exequível em relação ao tempo previsto?**

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar a exequibilidade?

• **AVALIAÇÃO DO CONJUNTO DAS UNIDADES CONCEITUAIS**

1. **As atividades utilizadas na Sequência Didática são atrativas e apresentam uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos?**

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)

- (c) Em parte (50%)
(d) Na maioria das vezes (75%)
(e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar esses aspectos?
2. Os recursos de apoio são atrativos e de fácil operacionalização pelo aluno e contribuem para a formalização intuitiva/empírica do conceito matemático?
(a) De nenhuma forma (0%)
(b) Pontualmente (25%)
(c) Em parte (50%)
(d) Na maioria das vezes (75%)
(e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para compatibilizá-la?
3. O número total de atividades da Sequência Didática é adequado para o ensino do objeto matemático?
(a) De nenhuma forma (0%)
(b) Pontualmente (25%)
(c) Em parte (50%)
(d) Na maioria das vezes (75%)
(e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhor adequação?
4. Na sua percepção, o conjunto de atividades que compõem a Sequência Didática está ordenado de modo a promover o ensino do objeto matemático?
(a) De nenhuma forma (0%)
(b) Pontualmente (25%)
(c) Em parte (50%)
(d) Na maioria das vezes (75%)
(e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhor ordená-la?
5. O tempo total previsto é compatível para aplicação da Sequência Didática?
(a) De nenhuma forma (0%)
(b) Pontualmente (25%)
(c) Em parte (50%)
(d) Na maioria das vezes (75%)
(e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para adequá-la ao tempo?

- **AValiação Complementar**

1. A Avaliação Aplicativa (Aa) está compatível com a Sequência Didática proposta?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para compatibilizá-la?

2. A Sequência Didática proposta promove a interação Professor-Aluno-Saber?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa interação?

3. Na sua percepção, que contribuições essa Sequência Didática apresenta:

- a) Em relação ao Professor (formação matemática e pedagógica)?
- b) Em relação ao Aluno (participação ativa e apreensão do objeto matemático)?
- c) Em relação ao Saber (constituição gradativa do conceito matemático e sua formalização)?

4. Que potencialidades você identifica nessa Sequência Didática para o ensino do objeto matemático?

Com base no questionário apresentado, foram realizadas as análises e levantadas as discussões acerca das implicações apontadas pelos professores participantes do processo. De tal modo a compreendermos, ao final, que potencialidades possuem o constructo teórico em avaliação para o ensino conteúdo de produtos notáveis.

6.1. DADOS DA AVALIAÇÃO DOS PROFESSORES

Com relação aos dados dos questionários referentes aos indicativos apresentados pelos professores, foram elaborados quadros em percentuais acerca das marcações realizadas por eles frente às perguntas objetivas e dois quadros gerais acerca de colocações que agregam as intencionalidades da pesquisa em relação as respostas subjetivas, como exemplo, as contribuições da sequência didática para o professor, para o aluno e para o saber, bem como, as potencialidades apresentadas por ela.

Conforme solicitado no instrumento de coleta, os professores que assinalassem uma das quatro primeiras alternativas deveriam sugerir melhoras nas intervenções. Neste sentido, ao tomarmos por base os apontamentos indicados pelos participantes (sejam positivos ou colaborativos), realizamos as análises por meio de corroborações ou por indicativos de contrapontos.

6.1.1. Avaliações individuais das UARC's

As avaliações individuais das UARC's constituem a primeira etapa do questionário acerca das avaliações dos professores em relação a sequência didática apresentada.

Neste sentido, em relação a UARC-1 que tem por objetivo construir com os alunos a identidade associada ao quadrado da soma de dois termos. Foi gerado o quadro 06, a fim de caracterizar as indicações, sugestões e contribuições apontadas pelos professores participantes do processo em questão com relação as quatro perguntas mencionadas.

Quadro 06: Percentual de respostas para UARC-1

Questões/ Alternativas	a	b	c	d	e
1				35%	65%
2			5%		95%
3				10%	90%
4			10%	30%	60%

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Na primeira questão do questionário, associada a condução da unidade à formalização intuitiva/empírica do objeto matemático, notamos que houveram alguns posicionamentos em relação a marcação da alternativa d (Na maioria das vezes – 75%). Neste sentido, ao fazer uma observação dos questionários, destacamos as sugestões apresentadas por quatro professores, apontadas no quadro 07, a seguir.

Quadro 07: Sugestões dos professores sobre a pergunta 1 da UARC-1

Prof. 04:	“Utilizar no material imagens de formas geométricas para a formalização e para auxiliar na relação com a atividade”
Prof. 05 e 08 respectivamente:	“Acredito que na [I _E - 04], seria interessante já indicar que a figura a ser formada será um quadrado, por uma questão de tempo” – “Na [I _E - 04] especificar que a figura é um quadrado”
Prof. 18:	“Na [I _E - 03], não indica quais letras utilizar para as dimensões, mas na [I _F] é pré-definido o uso de a e b. Caso o aluno escolha outras letras pode haver uma confusão”.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Sobre as sugestões mencionadas, entendemos como pertinente a colocação do Prof. 04, visto que torna o layout da sequência mais didático e atrativo aos alunos. Por este motivo, buscamos atender tal recomendação para a sequência didática evidenciada no produto educacional.

Os apontamentos dos Prof.05 e Prof.08, foram mencionados de forma acoplada por conta da semelhança em relação às sugestões. Neste sentido, esclarecemos que a intencionalidade da Intervenção Exploratória 04 [I_E - 04] é fazer com que os alunos reflitam sobre a construção e sob orientação do professor cheguem às próprias conclusões.

Com relação a afirmativa do Prof.18 sobre a [I_E - 03], ressaltamos que esta foi uma estratégia pensada para a formalização. Pois, embora os alunos utilizem letras diferentes para representar as dimensões das figuras geométricas o objetivo da UARC-1 é eles possam concluir a relação existente do quadrado da soma de dois termos independentemente se as letras utilizadas nas próprias construções sejam iguais ou diferentes da [I_F] da UARC-1.

Sobre a segunda e a terceira questão do questionário da UARC-1, direcionados respectivamente à formalização e a avaliação restritiva [Ar], se ambas estão em consonância com as intenções do objeto matemático. O quadro 06 aponta

quase que uma unanimidade em relação aos dois itens. Entretanto, a colocação do Prof.10 merece destaque sobre a segunda pergunta, ao considerar que houve a marcação da alternativa c (em parte – 50%) conforme evidenciamos no quadro 08.

Quadro 08: Sugestão do professor sobre a pergunta 2 da UARC-1

Prof. 10:	“Sempre revisar os assuntos anteriores”
-----------	---

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Com base na sugestão do Prof. 10, retomamos um ponto importante do processo de aplicação da SD que é a promoção de uma verificação dos conhecimentos mínimos que circundam os produtos notáveis. Tendo em vista a realização de uma oficina, ou não, a fim de proporcionar condições básicas para o ensino deste conteúdo.

Na quarta questão do questionário, identificamos um percentual considerável de professores que marcaram as letras c e d (em partes – 50% ou na maioria das vezes – 75%) a respeito da exequibilidade da atividade com o tempo previsto. Como forma de representar estas marcações ressaltamos as sugestões do Prof. 06 e do Prof 15 no quadro 09.

Quadro 09: Sugestão dos professores sobre a pergunta 4 da UARC-1

Prof. 06:	“Seria aconselhável utilizar 60 minutos para cada UARC”
Prof. 15:	“De acordo com o nivelamento da turma”

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

No que tange ao tempo a ser utilizado para a construção do conteúdo, ressaltamos que foram estimadas duas aulas de 45 minutos para as UARC-1 e UARC-2. O Prof. 06 sugere um tempo maior, enquanto o Prof. 15 se posiciona em relação ao nível que os alunos possuem.

Neste sentido, embora tenhamos estimado o tempo mencionado, corroboramos com a linha de pensamento do Prof. 15, pois quem vai nortear o tempo para o processo são os alunos, sem deixarmos de lembrar do papel do professor enquanto mediador do processo e atuante com as Intervenções Oraís de Manutenção Objetiva [I-OMO].

Com relação a UARC-2 que objetiva a construção do cubo da soma de dois termos, foi gerado o quadro 10, com intenções análogas a do quadro 06. Ou seja, com a finalidade de sintetizar as indicações apontadas pelos professores participantes do processo em questão com relação as quatro perguntas mencionadas.

Quadro 10: Percentual de respostas para UARC-2

Questões/ Alternativas	a	b	c	d	e
1				35%	65%
2					100%
3				5%	95%
4			10%	30%	60%

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Sobre a primeira questão do questionário em relação a UARC-2, associada a condução da estrutura das intervenções para a formalização intuitiva do objeto matemático. Notamos que há um percentual de professores que fizeram ponderações a respeito deste item com a marcação da alternativa d. Desta maneira, selecionamos como representatividade as sugestões do Prof. 01 e do Prof. 10, conforme mencionado no quadro 11.

Quadro 11: Sugestão dos professores sobre a pergunta 1 da UARC-2

Prof. 01:	“Diferenciar cubo e paralelepípedo”
Prof. 10:	“O aluno precisa saber calcular volume”

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

De fato, os professores fizeram ponderações importantes, ao considerarmos que a UARC-2 tem por objetivo que os alunos construam a identidade do cubo da soma de dois termos. Para isto, utilizam os dois conhecimentos mencionados (a noção dos dois tipos de sólidos geométricos e o cálculo de seus respectivos volumes). Entretanto, estes também são conhecimentos considerados como mínimos para a aplicação da SD. Por este motivo, caso alguns alunos não tenham domínio, deve ser feita a oficina de nivelamento com a turma.

Com relação a segunda e a terceira pergunta do questionário respectivamente, associadas a formalização e à avaliação restritiva para o objeto

matemático da UARC-2, observamos que há um entendimento por parte dos professores quase que em totalidade acerca destes itens em vinculação à atividade.

Na quarta pergunta, com relação ao tempo previsto a ser utilizado para realização da atividade pelos alunos. Notamos que 40% dos professores sugeriram um ajuste com a marcação das alternativas c e d. Desta forma, selecionamos a colocação do Prof. 09 como forma de representatividade conforme indicado no quadro 12.

Quadro 12: Sugestão do professor sobre a pergunta 4 da UARC-2

Prof. 09:	“Como está se trabalhando com volume e com a montagem de sólidos, acredito que levaria mais tempo.”
-----------	---

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Concordamos com as considerações feitas pelo Prof. 09, ao entendemos que o grau de dificuldade aumente um pouco em relação a UARC-1. Entretanto, conforme mencionado nos comentários da questão 4 da UARC anterior, o tempo previsto é apenas uma estimativa que pode ser ajustado conforme necessidade da turma.

Com relação às respostas dos professores sobre a UARC-3 que tem por objetivo a construção do produto da soma pela diferença, foi gerado o quadro 13 como forma de esclarecer as indicações dos participantes.

Quadro 13: Percentual de respostas para UARC-3

Questões/ Alternativas	a	b	c	d	e
1			15%	25%	60%
2		5%			95%
3				5%	95%
4			30%	20%	50%

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Na primeira questão associada a condução das intervenções à formalização do objeto mencionado como objetivo da UARC-3, identificamos que uma quantidade considerável marcações vinculadas aos itens c e d (em parte – 50% e na maioria das vezes – 75%). Desta maneira, como forma de representação das sugestões de três professores, foi elaborado o quadro 14.

Quadro 14: Sugestão dos professores sobre a pergunta 1 da UARC-3

Prof. 04:	“A intervenção oral de manutenção do professor é muito importante”
Prof. 05:	“Seria interessante ter desenhos indicando os procedimentos que o aluno deve realizar”
Prof. 09:	“Devido esta UARC ser maior, os alunos precisarão da ajuda do professor”

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Sobre as colocações elencadas no quadro 14, corroboramos a afirmativa do Prof. 04, além disso, notamos que ela está diretamente associada como resposta do Prof. 09. Visto que não apenas nesta UARC em específica, mas em todas, se faz necessário a utilização das Intervenções Oraís de Manutenção Objetiva, pois com elas o professor consegue fazer um direcionamento do processo afim de se chegar aos abjetivos desejados.

Além disso, no que tange a sugestão do Prof. 05, ressaltamos que no produto educacional foram apresentadas orientações de utilização dos materiais manipuláveis, bem como, em relação a construção das UARC's frente a cada uma das intervenções apresentadas. Desta forma, o professor ao compreender os procedimentos e entrar novamente com um elemento balizador do processo construtivo do objeto matemático da SD.

De forma análoga à UARC-1 e UARC-2, na segunda e na terceira questão da UARC-3, foram abordadas como consonantes quase que em unanimidades para os professores a respeito da formalização apresentada para o objeto matemático, bem como, a avaliação restritiva associada à sua construção.

Na quarta questão desta UARC, associada ao tempo para exequibilidade da atividade também indicamos como pretensão a mesma justificativa das UARC's anteriores. Ou seja, o tempo indicado foi apenas uma estimativa que pode ser ajustado conforme necessidade da turma.

Ao considerarmos como primeira etapa do questionário a avaliação individual das UARC's feita pelos professores. Apontamos no quadro 15 as indicações realizadas por eles para a última atividade que compõe a SD (UARC-4) que tem por objetivo, construir a identidade característica do quadrado da diferença de dois termos.

Quadro 15: Percentual de respostas para UARC-4

Questões/ Alternativas	a	b	c	d	e
1			20%	20%	60%
2					100%
3				5%	95%
4			15%	20%	65%

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Na primeira questão, vinculada a construção da atividade na perspectiva da formalização do objeto matemático indicado, ressaltamos a colocação de três professores no quadro 16, a fim de representar os demais que realizaram a marcação das alternativas c e d.

Quadro 16: Sugestões dos professores sobre a pergunta 1 da UARC-4

Prof. 04:	“A turma precisa de alguns conceitos prévios, do contrário, terão atrasos”
Prof. 09:	“Explorar mais as figuras”
Prof. 10:	“Como esta atividade é um pouco mais difícil, precisa ser muito bem trabalhada”.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Sobre a sugestão do Prof. 04, retomamos um fato mencionado anteriormente associado a realização, se necessário, de uma oficina de nivelamento com a turma. Quanto ao Prof.09, também foi elucidado nas discussões das UARC's anteriores que as figuras e sólidos geométricos foram acrescentadas na SD apresentada no produto educacional.

Com relação a colocação do Prof. 10, acreditamos que o grau de dificuldade mencionado esteja associado a manipulação algébrica que consta como necessidade para se chegar à identidade do quadro da diferença de dois termos. Neste sentido, ressaltamos que esta construção também foi elucidada no produto educacional afim de orientar os professores quanto a intencionalidade e manipulação algébrica existente na UARC-4, para que desta maneira eles direcionem os alunos na utilização da atividade.

No que tange a segunda e a terceira questão, também destacamos que a maioria dos professores realizaram indicações de que a formalização e a avaliação restritiva estão em consonância com as pretensões da UARC-4. O único professor que fez a marcação na alternativa d, não apresentou sugestões.

Na quarta questão referente ao tempo a ser utilizado para construção da UARC-4, destacamos a colocação evidenciada pelo Prof. 06, visto que ele representa de um modo geral as sugestões apontadas pelo percentual de professores que marcaram as alternativas c e d em seus questionários.

Quadro 17: Sugestão do professor sobre a pergunta 4 da UARC-2

Prof. 09:	“Como a obtenção não é imediata, pode ser que o tempo para se alcançar o objetivo aumente.”
-----------	---

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Corroboramos com a indicação feita pelo professor no quadro 17. Ao entendermos que de fato na UARC-4, dependendo do nível da turma, os alunos podem levar um tempo maior. Visto que em sua precisa-se de uma maturidade em relação ao conhecimento sobre a manipulação de algumas operações algébricas.

Entretanto, como foi indicado no quadro 05, o tempo previsto para as UARC-3 e UARC-4 eram de duas aulas de 45 minutos. Ou seja, uma aula para cada UARC, ressaltamos então que este tempo pode ser ajustado conforme necessidade da turma para atingir o objetivo da atividade.

Portanto, de posse das discussões e análises supracitadas nesta etapa do questionário, elucidamos a seguir alguns pontos semelhantes e discrepantes entre as avaliações individuais das UARC's que compõem a sequência didática.

A respeito das indicações para a primeira questão do questionário para as 4 UARC's, associadas à construção das atividades de forma intuitiva à formalização. Destacamos que ora foram acatadas as sugestões dos professores (como por exemplo, a utilização das figuras e dos sólidos geométricos em conjunto com a formalização das UARC's), ora foram feitas ponderações que haviam sido consideradas na elaboração da SD (como exemplo, a importância do papel do professor no processo da utilização da SD com as IOMO's).

Na segunda e terceira questão das avaliações individuais, notamos que houve uma boa aceitação pelos participantes com base em suas experiências a respeito da formalização e das atividades avaliativas restritivas utilizadas na SD.

Por fim, na quarta questão, vinculada ao tempo a ser utilizado para cada atividade também houveram ponderações dos professores. Destacamos que, embora tenhamos apresentado uma estimativa temporal para a utilização das UARC's, entendemos que o processo educativo associado a construção dos conteúdos matemáticos por ser dinâmico, pode ser ajustado frente às necessidades das turmas que farão uso do constructo em questão.

6.1.2. Avaliação do conjunto das UARC's

A avaliação do conjunto das UARC's compõe a segunda etapa do questionário realizado para avaliação da sequência didática pelos professores. Desta maneira, buscamos caracterizar os apontamentos feitos pelos participantes no quadro 18.

Quadro 18: Percentual de respostas dos professores para o conjunto das UARC's

Questões/ Alternativas	a	b	c	d	e
1				30%	70%
2				20%	80%
3			5%	5%	90%
4			5%	5%	90%
5			5%	20%	75%

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Com relação a primeira questão desta etapa do questionário, associada a atratividade e acessibilidade da linguagem utilizada nas atividades da sequência didática. Notamos que houve um percentual considerável de professores que concordam com as temáticas utilizadas no constructo, entretanto, outros apresentaram sugestões. Neste sentido, apontamos algumas delas no quadro 19.

Quadro 19: Percepção dos professores sobre a pergunta 1 da etapa 2

Prof. 05:	“Colocar figuras de apoio nas UARC’s”
Prof. 14:	“A utilização dos materiais manipuláveis foi uma ótima estratégia pensada em relação a atratividade e a linguagem na construção dos alunos.”

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Neste sentido, corroboramos com a colocação estabelecida pelo Prof.05, acerca do uso de imagens. Por este motivo, conforme mencionado nas análises apresentadas na etapa anterior, as figuras foram incluídas na [If] na sequência didática evidenciada no produto educacional.

Sobre a percepção exposta pelo professor 14, a respeito do uso de materiais manipuláveis. Entendemos que de fato, instrumentos como estes, despertam o interesse dos alunos por serem vistos como um diferencial nas aulas de Matemática, além de tudo, juntamente com o texto da sequência didática, tornam os alunos os atores principais da construção do conteúdo sob orientação dos docentes.

Na segunda questão desta etapa do questionário, sobre os recursos de apoio, se eles são atrativos e de fácil operacionalização pelos alunos afim de contribuir para a formalização intuitiva do objeto matemático. Houve uma boa aceitação dos professores participantes acerca dos materiais utilizados nas atividades. Entretanto, destacamos a fala do Prof.09, afim de representar o percentual de professores que realizaram a marcação da alternativa d apontou a seguinte colocação ao.

Quadro 20: Sugestão do professor sobre a pergunta 2 da etapa 2

Prof. 09:	“Sim, desde que sejam feitas intervenções pelo professor.”
-----------	--

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

De fato, a colocação indicada no quadro 20 foi pertinente. Visto que estas intervenções (como exemplo, temos as Intervenções Oraís de Manutenção Objetiva, mencionadas por Cabral (2017)), ressaltam a importância do papel do professor no processo de construção do conteúdo pelos alunos, enquanto mediador e orientador das atividades afim de que sejam alcançados os objetivos pretendidos por cada UARC.

Sobre a terceira e quarta questão do questionário respectivamente, acerca do número total de atividades (se está adequado para o ensino do objeto matemático) e sobre o ordenamento do conjunto das UARC's (se estão organizadas de modo a promover o ensino do objeto matemático). Observamos um percentual de respostas foram semelhantes e que grande parte dos professores coadunam com os pontos indicados.

Porém, sobre os professores que realizaram as marcações das alternativas c e d, em relação as duas questões mencionadas. Tivemos sugestões apenas para a quarta questão, com a indicação do Prof. 08, conforme apresentamos no quadro 21 a seguir.

Quadro 21: Sugestão do professor sobre a pergunta 4 da etapa 2

Prof. 09:	“A UARC-2, por apresentar volume, sendo uma evolução das áreas, poderia ser realizada ao final!”
-----------	--

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Entendemos a percepção indicada pelo Prof. 09. Entretanto, quando ordenamos a sequência didática, consideramos o fato de que a UARC-1 por estar associada ao quadrado da soma de dois termos e a UARC-2 ao cubo da soma de dois termos, ambas estão vinculadas a soma.

Por este motivo, temos a caracterização de uma sequência lógica, embora a primeira se trabalhe com áreas para a formação de um quadrado e a segunda se trabalhe com volumes para a composição de um cubo. Em ambas direcionamos as construções por meio das junções de peças e não retiradas como na UARC-3 e UARC-4.

Como questão final da segunda etapa do questionário, ressaltamos utilização do tempo total previsto para a realização da sequência didática (conforme indicação do quadro 05, foram estimadas 5 aulas de 45 minutos cada). Sobre este respeito, ressaltamos que 25% dos professores apresentaram questionamentos.

Entretanto, com base nas elucidações realizadas nas análises da primeira etapa do questionário, destacamos novamente que este tempo é apenas uma estimativa. Mas que dependendo da necessidade da turma, podem ser feitos ajustes em relação a esta temática afim de que sejam alcançados os objetivos das atividades que compõem a sequência didática.

6.1.3. Avaliação complementar da sequência didática

A avaliação complementar da sequência didática, constitui a terceira etapa do questionário. Com ela, os professores avaliaram a avaliação aplicada elaborada, a promoção da interatividade entre os participantes, a identificação das contribuições em relação aos elementos que compõem o triângulo didático (professor-aluno-saber) e as potencialidades da proposta para o ensino do objeto matemático elencado.

Quadro 22: Percentual de respostas para avaliação complementar da SD

Questões/ Alternativas	a	b	c	d	e
1					100%
2				5%	95%

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

A respeito da primeira questão, que teve como pretensão compreender se a Avaliação Aplicativa está em consonância com a Sequência Didática proposta. Coadunamos com indicação feita no quadro 22, pelo fato de que todas as questões estão correlacionadas com as UARC's que compõem a sequência didática. Exceto a última questão que foi inserida como desafio aos alunos, visto que, vincula-se ao quadro da soma de três termos (para desenvolvê-la devem ser utilizados os conhecimentos construídos na SD ao longo de sua utilização).

Na segunda questão desta etapa, em relação a promoção da interação Professor-Aluno-Saber. Apenas o Prof. 2, marcou a alternativa (na maioria das vezes) que indicava uma não totalidade em relação a este item, porém ele não apontou sugestões.

Por este motivo, de posse da resposta da maioria, compreendemos que o constructo elaborado para se trabalhar com o objeto matemático apontado promove a interligação entre os elementos compõem o triângulo didático. Visto que as atividades juntamente com o material manipulável direcionam sob orientação dos professores, os alunos para a construção dos quatro itens que envolvem os produtos notáveis, frente às suas respectivas UARC's.

Corroboramos tal afirmativa, com a terceira questão desta etapa, associada a percepção dos professores participantes sobre as contribuições da sequência didática, com descrições subjetivas em relação ao Professor, ao Aluno e ao Saber. Evidenciadas no quadro 23, apresentado adiante.

Quadro 23: Percepção dos professores sobre as contribuições da sequência didática

Professor	Prof. 04	“Nova metodologia de ensino e uma visão geométrica acerca do objeto matemático que diversas vezes passa despercebido.”
	Prof. 05	“Apresenta uma nova alternativa para a aula do professor, que foge do modelo expositivo.”
	Pro. 11	“Possibilita ao professor uma função mediadora e contribui como uma proposta de ensino diferente que pode ser usada por outros professores.”
	Prof. 18	“Maior organização na hora de ministrar o conteúdo”
	Prof. 20	“Saída do docente da zona de conforto e traz um novo desafio em sala de aula.”
Aluno	Prof.03	“Os alunos entendem a aplicabilidade da definição”
	Prof. 04	“Ele é totalmente mais ativo na relação da aprendizagem, uma vez que o mesmo constrói as figuras e comparações.”
	Prof. 16	“Ele adquire um novo conhecimento, baseado em seus conhecimentos anteriores como: área, volumes e expressões algébricas.”
	Prof. 20	“Torna a aula mais atrativa ao discente com o material manipulável e aborda a álgebra de maneira lúdica.”
Saber	Prof.03	“Com entendimento da formalização do saber não precisar decorar a fórmula para o cálculo”
	Prof. 04	“Está explorado de “melhor forma” e não somente exposto ao aluno, mas, foi construído.”
	Pro. 05	“Apresenta uma construção mais empírica e significativa do saber, sem a necessidade de apenas decorar fórmulas.”
	Prof. 19	“O estabelecimento de relação do objeto matemático com outros conteúdos matemáticos (figuras planas e sólidos), principalmente em suas representações (algébrica e geométrica).”

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Com base nas descrições das contribuições da sequência didática apresentadas pelos professores no quadro 23. Corroboramos com os apontamentos realizados para o Professor tanto em relação a formação matemática quanto na pedagógica.

Visto que de fato, neste processo o professor traz consigo um instrumento organizado matematicamente dividido em construções para se chegar à objetivos pontuais. Quanto ao a formação pedagógica, conforme mencionaram os Prof. 11 e Prof. 20, o professor sai da sua zona de conforto ao passar a desempenhar um novo papel em sala de aula, não mais expositivo como geralmente é feito, mas o de mediador do processo construtivo dos alunos em relação ao saber.

A respeito do papel do aluno neste processo, também coadunamos, com as indicações apresentadas pelos professores, tanto em relação a sua participação como mencionou o Prof. 04, quanto no entendimento do conteúdo, conforme mencionou o Prof. 16. Ou seja, o aluno durante o processo construtivo das UARC's passa a ser mais participativo (ao realizar as intervenções apresentadas) e reflexivo matematicamente (ao se apoiar em conhecimento já estabelecidos para a reconstrução de um novo).

O saber também passa a ser tratado sob uma nova perspectiva, conforme apresentou o Prof. 05. Ou seja, ele é construído de forma gradual, não apenas abordado como um conhecimento estanque e pronto. Além disso, perde o caráter de ser “decorado”, como mencionou o Prof.03, a partir da compreensão efetiva da formalização.

Portanto, conforme as discussões realizadas, fica evidente que a construção dos produtos notáveis baseados na utilização da sequência didática traz consigo um novo desafio para os atores do processo de ensino e aprendizagem (professor, aluno e saber) acerca das construções realizadas ao longo das UARC's, visto que há uma abordagem mais atrativa e reflexiva.

Neste sentido, evidenciamos a seguir os apontamentos dos professores referentes a última pergunta do questionário, sobre as potencializadas identificadas na sequência didática elaborada nesta pesquisa para o ensino do objeto matemático. Conforme elucidações expostas no quadro 23 adiante.

Quadro 24: Percepção dos professores sobre potencialidades da sequência didática

Prof. 03	Acredito que é de alto proveito, pois o aluno aprende as definições com o uso de objetos concretos, podendo perceber a origem das definições.
Prof. 07	Faz com que o aluno interaja com o professor, colegas e seja estimulado na construção do conhecimento de forma mais dinâmica.
Prof. 15	Uma nova maneira de ensinar e aprender.
Prof. 19	De (re)construir um novo conhecimento com base em conhecimentos adquiridos, permitindo reflexões por parte dos alunos.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Acerca das percepções apresentadas, notamos que os quatro professores explanaram pontos importantes sobre a sequência didática. Tanto pedagogicamente, quanto matematicamente, bem como, sobre as interfaces das participações dos atores do triângulo didático, frente ao papel do professor enquanto mediador do processo, do aluno de forma mais ativa, bem como, do saber que passa a ser construído, de forma gradativa com base na utilização dos materiais manipuláveis.

Portanto, ao retomarmos as análises e discussões dos dados supracitados a respeito das três etapas do questionário (as avaliações individuais das UARC's, a avaliação do conjunto das unidades conceituais, bem como, da avaliação complementar. Apresentamos a seguir ponderações acerca das etapas mencionadas.

Sobre as avaliações individuais das UARC's, evidenciamos que foram apresentadas sugestões relevantes acerca das quatro atividades que compõem a sequência didática. Com base nisso, foram feitas modificações pontuais na apresentação do texto afim de trazer melhoras para a sua utilização em sala de aula por outros professores. Dentre as quais, ressaltamos a inserção das figuras e sólidos geométricos na Intervenção Formalizante das quatro atividades.

Sobre a avaliação do conjunto das unidades, identificamos que houve uma boa aceitação pelos professores que realizaram as análises em relação aos itens levantados. Como exemplo, destacamos a atratividade aos alunos associada a utilização dos materiais manipuláveis no processo, bem como, o número e ordenação das atividades.

Sobre a avaliação complementar, também destacamos uma boa aceitação dos professores que avaliaram a sequência no que tange a compatibilidade da avaliação aplicada com a sequência didática proposta, bem como, na sua promoção da interação entre os elementos que compõem o triângulo didático. Fato que pode ser corroborado com as indicações realizadas no quadro 23 que mostra as contribuições da SD individualmente para o professor, para o aluno, bem como, para o saber.

Por fim, a respeito da última questão que compõe o questionário de avaliação dos professores. Notamos, conforme mencionado no quadro 24, que a sequência didática desenvolvida nesta pesquisa apresenta potencialidades ao ensino do objeto matemático em destaque por vários motivos apontados pelos professores. Dentre os quais, destacamos a atratividade vinculada ao uso dos materiais manipuláveis, bem como, as influências em relação ao papel de mediador para o professor, de ser mais ativo para o aluno e no re(descobrimento) do saber de forma gradual.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desta pesquisa teve como pretensão responder a questão norteadora evidenciada, por meio identificação das potencialidades de uma sequência didática direcionada ao ensino de produtos notáveis, estruturada segundo as UARC's, a partir dos registros de sua aplicação e análises dos resultados astepado na microgenética e na análise do discurso. Desta maneira elucidamos a seguir as etapas da pesquisa que direcionaram sua constituição.

Ressaltamos inicialmente que a construção deste objetivo, perpassou pelo embasamento do aporte teórico evidenciado na pesquisa. Onde elucidamos a Didática da Matemática, enquanto campo teórico de investigação da Educação Matemática que se preocupa e propõem uma série de conceitos frente ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática.

Neste aspecto, destacamos também a Teoria das Situações Didáticas, enquanto fundamentação das relações estabelecidas no triângulo didático (professor–aluno–saber). Assim como, os apontamentos acerca da sequência didática que no possibilitaram compreender sua definição, e por consequência a utilização das concepções entorno da UARC que serviram como parâmetro de orientação em conjunto com os materiais manipuláveis para elaboração da sequência didática.

Além disso, tendo em vista a necessidade de um instrumento com a capacidade de investigar, selecionar e analisar dados obtidos a partir de interações verbais formadas na relação entre professor, aluno e saber constituídas ao longo da aplicação da sequência didática. Foram elucidados definições e apontamentos acerca da Análise Microgenética e da Análise do discurso.

De posse deste cabedal teórico, realizamos uma revisão de estudos a respeito do conteúdo de produtos notáveis com intuito de compreender de que forma este objeto de foi abordado em outras pesquisas científicas. Nesta etapa foram catalogados 33 trabalhos, no período de 2008 a 2018, que passaram por uma seleção frente aos critérios estabelecidos. Com isso, foram elaboradas três categorias, a fim de agrupar os trabalhos de mesma natureza e a diversidades de suas abordagens (estudos teóricos, os empíricos e os diagnósticos).

Também foram feitas análises em quatro livros didáticos em relação ao nível das abordagens do tema. Onde buscamos compreender as metodologias utilizadas,

assim como, as definições empregadas e os exercícios ou atividades vinculadas ao conteúdo. Observamos com isso, que há uma lacuna existente entre as abordagens estabelecidas com os níveis e tipos de questões trabalhadas nos exercícios. Desse modo, intuimos que o livro é uma ferramenta didático-pedagógica importante para o processo de ensino e aprendizado. Entretanto, não deve ser utilizado como único instrumento direcionador para o trabalho do professor, por conta de suas limitações.

No mais, buscamos compreender a perspectiva de alunos egressos, bem como, a perspectiva dos professores que atuam neste nível de ensino. Com as quais, obtemos um entendimento global acerca dos obstáculos didáticos retratados pelos alunos. Assim como, na pesquisa com os professores, levamos em consideração estratégias indicadas por eles como relevantes, como por exemplo a associação entre a Álgebra com a Geometria.

O tratamento matemático, foi um outro ponto que trouxe contribuição para a pesquisa, visto que, transcendeu as abordagens apresentadas pelos livros didáticos utilizados na Educação Básica, como foram retratados na identificação dos livros do PNLD. Pois, evidenciou o estabelecimento de relações do conteúdo com os três níveis de ensino (no Fundamental II, com a fatoração e o completamento de quadrado; no Médio, com o Binômio de Newton e Triângulo de Pascal e suas restrições; e no Superior, em questões de limite, derivada, integral). Com isso, possibilitou a formação matemática continuada aos professores, bem como, subsidiou uma base matemática sólida para a construção da sequência didática.

De posse de todas estas interfaces, foi estabelecida para o estudo dos produtos notáveis com os alunos do 8º ano do Ensino Fundamental II, uma sequência didática com 4 atividades. As quais abordam os seguintes conteúdos em suas respectivas UARC's: Quadrado da soma de dois termos; Cubo da soma de dois termos; Produto da soma pela diferença de dois termos e Quadrado da diferença de dois termos. Seguida de uma avaliação aplicada a ser utilizada com os alunos após a construção do conhecimento em destaque.

Na etapa aplicação da sequência didática, conforme mencionado anteriormente, havíamos pensado inicialmente neste processo associado a uma turma de alunos de 8º ano de uma escola pública do estado. Entretanto, devido as circunstâncias ocasionadas pela pandemia da COVID-19, tivemos dificuldades de

acesso às instituições, bem como, no encontro de uma turma com um número representativo de alunos.

Neste sentido, realizamos um redirecionamento do processo de aplicação da sequência didática com uma turma de professores do Programa de Pós-Graduação de Ensino de Matemática vinculado à UEPA. Por meio da avaliação dos professores baseada em questões de um questionário, composto por três etapas: a primeira, acerca de avaliações individuais das UARC's; a segunda, em relação ao conjunto das unidades; e a terceira, por uma avaliação complementar.

Sobre as avaliações realizadas pelos professores em relação a sequência didática. Destacamos que na primeira etapa, foram feitas contribuições pertinentes que foram consideradas na sequência didática do produto educacional, como o uso das figuras e sólidos geométricos nas intervenções formalizantes. Além disso, notamos que na segunda e na terceira etapa do questionário que de um modo geral houve uma boa aceitação das atividades pelos professores em relação a diversos aspectos que a compõem.

Dentre os quais, destacamos a atratividade aos alunos associada a utilização dos materiais manipuláveis no processo, bem como, o número e ordenação das atividades. Além disso, os professores corroboraram a compatibilidade da avaliação aplicada com a sequência didática proposta, bem como, na sua promoção da interação entre os elementos que compõem o triângulo didático. Abordaram também de forma subjetiva as contribuições da sequência didática para os elementos que compõem o triângulo didático (professor-aluno-saber).

Assim, ao tomarmos por base o objetivo da pesquisa, bem como, a resposta dos professores sobre a última questão que compõe o questionário. Notamos, que a sequência didática desenvolvida apresenta potencialidades ao ensino do objeto matemático em destaque por vários motivos apontados pelos professores. Dentre os quais, destacamos: a atratividade vinculada ao uso dos materiais manipuláveis, bem como, as influências em relação ao papel de mediador para o professor, de um ser mais ativo para o aluno e no re(descobrimiento) do saber de forma gradual. Por este motivo, embora, tenha existido um redirecionamento do processo de aplicação da sequência, entendemos que o objetivo elencado foi respondido.

De posse dos argumentos indicados, ressaltamos que esta pesquisa trouxe consigo além das contribuições acadêmicas supracitas para o ensino de produtos

notáveis, diversas outras contribuições. Dentre elas, destacamos a mudança de perfil profissional em relação a forma de se trabalhar com a Matemática, com base em um novo olhar sobre o leque de possibilidades que a Educação Matemática propicia para utilização dos professores acerca da construção dos conteúdos matemáticos, um novo olhar para as atribuições dos alunos enquanto elementos mais participativos do processo de ensino e aprendizagem, assim como, para a construção gradativa do saber.

Ressaltamos também a relevância do Grupo de Pesquisa em História e Educação Matemática na Amazônia para a elaboração desta pesquisa. Quanto às inúmeras orientações e discussões realizadas no espaço do grupo, com seus integrantes, acerca da construção da sequência didática. Bem como, no crescimento enquanto pesquisadores, com as publicações de artigo em periódicos, de capítulos de livros, realização de exposições, entre outras interfaces ao longo dos anos.

Por fim, destacamos os possíveis desdobramentos desta pesquisa, baseados em suas reflexões, análises e indicações. Dentre eles, elucidamos a possibilidade de uma reaplicação da sequência didática com uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental II, com a realização das análises baseadas na microgenética e análise do discurso. Assim como, a possibilidade de trabalhos análogos, com utilização da sequência didática associada a outros conteúdos, bem como, o uso de outros recursos didáticos apontados como válidos por autores que trabalham com a Educação Matemática.

Além destes desdobramentos, destacamos que surgiu como fruto desta pesquisa, um produto educacional. O qual, apresenta como diferencial uma sequência didática modificada em relação a elucidada nesta dissertação (para a versão dos alunos) a partir das sugestões apontadas pelos dos professores participantes da avaliação. Bem como, traz em seu escopo orientações de sua utilização pelos professores frente a cada uma das UARC's que a compõem e o tratamento matemático que subsidiou sua elaboração.

REFERÊNCIAS

- ANDRINI, Álvaro; VASCONCELOS, Maria José. **Praticando Matemática**. 4 ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.
- ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise matemática para licenciatura**. São Paulo: Editora Blücher, 2006.
- BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**. 8 ed. São Paulo: Moderna, 2015.
- BOULOS, Paulo. **Pré-cálculo**. Pearson Makron Books, 2006.
- BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.
- BARBOSA, Pedro Lucio. Interações entre professor e aluno: caminhos para aprendizagem matemática? In: ONOFRE, Gomes Eduardo. Et. Al. **Ensino de Ciências e Educação Matemática**: diálogos interdisciplinares. Curitiba: CVR, 2017.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular**. Brasília, DF: 2018.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5º a 8º séries)** Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BORGATO, Keyla Cristina. **O ensino de produtos notáveis e fatoração de polinômios**: uma articulação entre álgebra e geometria. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.
- BRUM, Lauren Darold. **Análise de erros cometidos por alunos de 8º do ensino fundamental em conteúdo de álgebra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Física e Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Rio Grande do Sul, 2013.
- CABRAL, Natanael Freitas. **O papel das interações professor-aluno na construção da solução lógico-aritmética otimizada de um jogo com regras**. 2004. 151 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - UFPA.
- CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências Didáticas**: estrutura e elaboração. Belém: SBEM-PA, 2017.
- CHAQUIAM, M. Um diagrama, um texto. In: MENDES, I. A. & CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática**: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016, p. 77 - 125.
- COSTA, Amanda Silva da. Et al. Investigando as dificuldades apresentadas em álgebra por alunos do oitavo ano do ensino fundamental **Destaques Acadêmicos**, Lajeado, v. 8, n. 4, p. 159-176, 2016.

CHOPPIN, Alain. **História dos livros e das edições didáticas**: sobre o estado da arte. Educação e Pesquisa, São Paulo, v.30, n.3, p. 549-566, set./dez. 2004.

D'AMBRÓSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. SBEM. Vol. 2. N 2. Brasília. 1989. P 15 – 19.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 7 ed. Campinas: Papirus, 2000, 120p.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação pra uma sociedade em transição**. 2 ed. Campinas: Papirus, 2001, 197p.

D'AMORE, Bruno. **Elementos de didática da matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DANTE, L.R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 2ªed. São Paulo: Ática, 2000.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris**. 2 ed. São Paulo: Ática, 2015.

DARIO, Érica Maria Rennó Villela. **Produtos Notáveis no 8º ano do Ensino Fundamental II**: contribuições da utilização de diferentes recursos didáticos. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.

SILVA, Edna Machado da. **O conceito de função e suas linguagens**. 215 f. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino da Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2020.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**, tradução: Hygino H. Domingues, Campinas-SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FERREIRA, Lucinete Maria Sousa. **Retratos da avaliação**: conflitos, desvirtuamentos e caminhos para a superação. 3 ed. Porto Alegre: Mediação, 2009.

FERNANDES, Domingos. **Avaliar para aprender**: fundamentos, práticas e políticas. São Paulo: Unesp, 2009.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas – SP, 2006. - (Coleção Formação de Professores) – p. 10.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. Boletim SBEM-SP, ano 4, n 7.1990.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A**. Pearson Educación, 2007.

FREITAS, José Luiz Magalhães de. Teoria das Situações Didáticas. In: FRANTI, Anna. et al. **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3 ed. São Paulo: EDUC, 2010.

GIL, Katia Henn. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra**. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2008.

GOÉS, Maria Cecília Rafael de. **A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural**: Uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. Cadernos Cedes. Ano XX, nº 50, Abril/ 2000.

GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um curso de cálculo**. 2002.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar** – vol 5. 7 ed. São Paulo: Atual Editora, 2004.

LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

LUIZ, Elisete Adriana José; COL, Lidianne de. **Alternativas metodológicas para o ensino de matemática visando uma aprendizagem significativa**. Rio Grande do Sul, 2013.

LUCKESI, Cipriano C. **Avaliação da Aprendizagem Escolar**. 17ª ed. São Paulo, SP: Cortez, 2005.

MORAN, J.M. **Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica**. Ed. Papirus, 12 ed. 2006.

MORTIMER, Eduardo F. SCOTT, Phil. **Atividade discursiva nas salas de aula de ciências**: uma ferramenta sócio cultural para analisar e planejar ensino. Investigações em Ensino de Ciências. v. 7. n. 3. p. 283-306. 2002.

NUNES, Roberto da Silva; NUNES, José Messildo Viana. Modelos constitutivos de sequências didáticas: enfoque na Teoria das Situações Didáticas. **Revista Exitus**, Santarém/PA, Vol. 9, Nº 1, p. 148 - 174, jan./mar. 2019.

PIMENTA, Selma Garrido. **Saberes pedagógicos e atividade docente**. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

PARÁ (Estado). Secretaria de Educação. **Sistema Paraense de Avaliação - (SisPae)**. Pará: SEDUC, 2015.

POLYA, G.A. **Arte de Resolver Problemas**: Um Novo Aspecto de Método Matemático. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1987.

QUINET, J. **Matemática Superior**. Tradução da Editora Globo S.A. Rio Grande do Sul, 1970.

RODRIGUES, Salete. **Uma análise da aprendizagem de produtos notáveis com auxílio do programa Aplusix**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

SARMENTO, Alan. **A utilização dos materiais manipulativos nas aulas de matemática**. Universidade Federal do Piauí: VI Encontro, 2010.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática compreensão e prática**. 3 ed. São Paulo: Moderna, 2015.

SOARES, Tamiri Pinto. **Produtos Notáveis: aplicação da atividade orientadora de ensino a partir da resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual De Santa Cruz, Bahia, 2018.

VASCONCELLOS, Celso dos Santos. **Avaliação: Concepção Dialética –libertadora do processo de avaliação escolar**. 16 ed. São Paulo: Libertad, 2006.

VENTURA, Angélica Rodrigues; LAUDARES, João Bosco. **Ressignificação dos Produtos Notáveis Utilizando Material Concreto**. Abakós, Belo Horizonte,v. 5, n. 1, p. 34-47, nov. 2016.

VIGINHESKI, Lúcia Virginia Mamcasz. **Uma abordagem para o ensino de Produtos Notáveis em uma classe inclusiva: o caso de uma aluna com deficiência visual**. Dissertação (Mestrado em Ensino em Ciência e Tecnologia) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Paraná, 2013.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ZORZAN, A. S. L. **Ensino-Aprendizagem: Algumas tendências na Educação Matemática**. Revista de Ciências Humanas: v.8, n.1, jun. 2007.

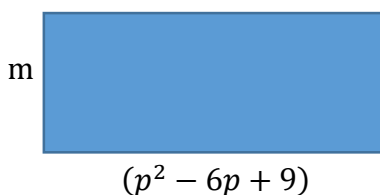
APÊNDICES

APÊNDICE A: TESTE DE VERIFICAÇÃO DOS ALUNOS EGRESSOS

Questão 1: Dada expressão na forma $5a^4 - 2b^3 + 7a$. Identifique quem são os seus coeficientes e expoentes.

Questão 2 (adptada da Revista do SISPAE – 2015. p. 41): A soma de $(x^2 - 4x + 3)$ com $(2x + 6)$ é igual a:

Questão 3: Considere a figura a seguir



Sabendo que para determinar sua área deve-se multiplicar os lados, $m \cdot (p^2 - 6p + 9)$. Efetue este produto para determinar a área deste retângulo.

Questão 4 (adaptada, livro do Álvaro Andrini, p.105): calcule o quadrado de 103 como Renata calculou: $103^2 = (100 + 3)^2$

Questão 5 (adaptada, livro do Álvaro Andrini, p. 103): É correto afirmar que a seguinte $(a - b)^2 = a^2 - b^2$? Justifique sua resposta.

Questão 6 (adaptada do livro do Bianchini, p.121): sabendo que $25^2 = 625$, calcule $(25 + 1) \cdot (25 - 1)$ e assinale a alternativa correta.

- a) 627
- b) 628
- c) 623
- d) 624

Questão 7: Desenvolva $(b + 1)^3$ e marque a alternativa correta.

- a) b^3
- b) $b^3 + 3b^2 + 3b + 1$
- c) $b^3 + 1$
- d) $3b^3 + 3b^2 + 3b + 1$

Questão 8: Desenvolva $(1 - b)^3$ e marque a alternativa correta.

- a) $b^3 - 1$
- b) $1 - b^3$
- c) $3 - 3b^2 + 3b + 1$
- d) $1 - 3b + 3b^2 - b^3$

Questão 9: Com base na identidade: $b^3 + 5^3$, marque a alternativa correta.

- a) b^3
- b) $5 - b + 5b^2 - b^3$
- c) $(b + 5) \cdot (b^2 - 5b - 25)$
- d) $(b + 5) \cdot (b^2 - 5b + 25)$

Questão 10: Com base na identidade: $b^3 - 3^3$, marque a alternativa correta.

- a) $(b + 3) \cdot (b^2 - b - 9)$
- b) $(b - 3) \cdot (b^2 + 3b + 9)$
- c) $3 - 3b^2 + 3b + 1$
- d) $1 - 3b + 3b^2 - b^3$

APÊNDICE B: SEQUÊNCIA DIDÁTICA

UARC 1

Objetivo: Identificar a relação existente entre o quadrado da soma de dois termos e a soma do quadrado do primeiro termo, com o dobro do produto entre o primeiro e o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

Material: Papel, lápis ou caneta, borracha e material didático manipulável (Kit Geométrico), régua graduada e o roteiro da atividade.

Procedimento:

[I₁ – EP] Com uso do material do kit Geométrico, construa um quadrado de acordo com as recomendações fornecidas. Num segundo momento determine a área do quadrado. Para isso, responda as seguintes perguntas.

[I_R – 01] Que tipo de figuras planas podem ser identificadas no conjunto de peças fornecidas?

[I_E – 02] Determine as dimensões (Largura e Comprimento) e as áreas correspondentes de cada uma das figuras identificadas.

[I_E – 03] Represente por meio de letras as dimensões de cada uma das peças (verde-laranja-azul), tendo em vista as medidas obtidas. Num segundo momento, calcule a área de cada uma das figuras utilizando as letras atribuídas.

[I_E – 04] Faça uma composição utilizando todas as peças fornecidas de modo a obter uma das figuras planas identificadas anteriormente. Num segundo momento, identifique as dimensões e calcule a área da figura construída.

[I_E – 05] Estabeleça uma relação entre a área da figura formada e as anteriores.

[I_F] Dados a e b , com a e $b \in \mathbb{Q}$

Representação algébrica:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ ou } a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Representação na Língua Materna:

O quadrado da soma de dois termos é numericamente igual a soma do quadrado do primeiro termo, com o dobro do produto entre o primeiro e o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

[I_{AR}] Utilize a definição acima para completar os itens abaixo.

c) $(x + y)^2 =$

c) $(5x + y)^2 =$

d) $(x + 3)^2 =$

d) $m^2 + 2.m.n + n^2$

UARC 2

Objetivo: Identificar a relação existente entre o cubo da soma de dois termos e a soma do cubo do primeiro termo, com o triplo do produto do quadrado do primeiro com o segundo termo, mais o triplo do produto do primeiro com o quadrado do segundo termo, mais o cubo do segundo termo.

Material: Papel, lápis ou caneta, borracha e material didático manipulável (Kit Geométrico), régua graduada e o roteiro da atividade

Procedimentos:

[I₁ – EP] Com uso do material do kit Geométrico, construa um cubo de acordo com as recomendações fornecidas. Num segundo momento determine o seu volume. Para isso, responda as seguintes perguntas.

[I_R – 01] Que tipos de sólidos geométricos podem ser identificados no conjunto de peças fornecidas?

[I_R – 02] Determine as dimensões (Largura, Comprimento e Altura) e os volumes correspondentes de cada um dos sólidos identificados.

[I_R – 03] Represente por meio de letras as dimensões de cada uma das peças (verde-laranja-azul), tendo em vista as medidas obtidas. Num segundo momento, calcule o volume de cada um dos sólidos utilizando as letras atribuídas.

[I_R – 04] Faça uma composição utilizando todas as peças fornecidas de modo a obter um dos sólidos geométricos identificados anteriormente. Num segundo momento, identifique as dimensões e calcule o volume do sólido construído.

[I_R – 05] Estabeleça uma relação entre o volume do sólido formado e os anteriores.

[I_F] Dados a e b , com a e $b \in \mathbb{Q}$.

Representação algébrica:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3 \text{ ou } a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3 = (a + b)^3$$

Representação na Língua Materna:

O cubo da soma de dois termos é numericamente igual a soma do cubo do primeiro termo, com o triplo do produto do quadrado do primeiro com o segundo termo, mais o triplo do produto do primeiro com o quadrado do segundo termo, mais o cubo do segundo termo.

[I_{AR}] Utilize a definição acima para completar os itens abaixo.

a) $(x + y)^3 =$

c) $(x + 5y)^3 =$

b) $(x + 1)^3 =$

d) $z^3 + 3.z^2.w + 3.z.w^2 + w^3$

UARC 3

Objetivo: Identificar a relação existente entre o produto a soma e a diferença de dois termos com a diferença entre o quadrado do primeiro termo com o quadrado do segundo termo.

Material: Papel, lápis ou caneta, borracha e material didático manipulável (Kit Geométrico), régua graduada e o roteiro da atividade.

Procedimentos:

[II – EP] Com uso do material do kit Geométrico, construa um retângulo de acordo com as recomendações fornecidas. Num segundo momento determine sua área. Para isso, responda as seguintes perguntas.

[IR – 01] Que tipo de figuras planas podem ser identificadas no conjunto de peças fornecidas (azul e amarelo)?

[IE – 02] Determine as dimensões (Largura e Comprimento) e as áreas correspondentes de cada uma das figuras identificadas.

[IE – 03] Represente por meio de letras as dimensões de cada uma das peças, tendo em vista as medidas obtidas. Num segundo momento, calcule a área de cada uma das figuras utilizando as letras atribuídas.

[IE – 04] Com o uso da tesoura, recorte um quadrado num dos cantos de uma das figuras de cor azul e calcule a área do quadrado obtido. Num segundo momento atribua letra as dimensões do quadrado recortado e calcule a área utilizando a letra atribuída.

[IE – 05] Calcule a área da figura resultante, após a retirada do quadrado, a partir das áreas dos quadrados azuis anteriores, tanto numericamente quanto com as letras.

[IE – 06] Repita o recorte nos cantos das peças de cor amarela com mesmas dimensões do quadrado azul recortado. Num segundo momento identifique as dimensões com as letras utilizadas inicialmente nas peças resultantes de cor amarela.

[IE – 07] Faça apenas um recorte numa das peças amarelas resultantes de modo que as duas peças formem um retângulo. Num segundo momento, calcule a área desse novo retângulo, tanto numericamente quanto com uso das letras.

[IE – 08] Estabeleça comparação, tanto numérica quanto com letras, entre a figura azul após a retirada do quadrado e a figura retângulo amarelo obtido após o recorte.

[IF] Dados a e b , com a e $b \in \mathbb{Q}$.

Representação algébrica:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2 \text{ ou } a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Representação na Língua Materna:

O produto entre a soma e a diferença de dois termos é numericamente igual a diferença entre o quadrado do primeiro termo com o quadrado do segundo termo.

[IAR] A partir do que foi trabalhado, complete as igualdades frente as seguintes alternativas.

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| a) $(x + y) \cdot (x - y) =$ | b) $(x - 3) \cdot (x + 3) =$ |
| c) $(2 + y) \cdot (2 - y) =$ | d) $m^2 - n^2 =$ |

UARC 4

Objetivo: Identificar a relação existente entre o quadrado da diferença de dois termos com a diferença do quadrado do primeiro termo e o dobro do produto entre o primeiro e o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

Material: Papel, lápis ou caneta, borracha e material didático manipulável (Kit Geométrico), régua graduada e o roteiro da atividade.

Procedimentos:

[Ii – EP] Com uso do material do kit Geométrico, construa um quadrado de acordo com as recomendações fornecidas. Num segundo momento determine a área deste quadrado. Para isso, responda as seguintes perguntas.

[Ir – 01] Que tipo de figuras planas podem ser identificadas no conjunto de peças fornecidas (azul e amarelo)?

[Ie – 02] Determine as dimensões (Largura e Comprimento) e as áreas correspondentes de cada uma das figuras identificadas.

[Ie – 03] Atribua letras aos lados dos quadrados de maior área e menor área.

[Ie – 04] Faça uma composição das figuras de modo a obter uma figura equivalente ao quadrado de maior área.

[Ie – 05] A partir das letras atribuídas acima, represente as dimensões das demais figuras e calcule suas respectivas áreas.

[Ie – 06] Como obter a área do quadrado intermediário a partir de retiradas de áreas do quadrado grande.

[Ie – 07] Represente algebricamente a situação anterior.

[IF] Dados a e b , com a e $b \in \mathbb{Q}$.

Representação algébrica:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ ou } a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Representação na Língua Materna:

O quadrado da diferença de dois termos é numericamente igual a diferença do quadrado do primeiro termo e o dobro do produto entre o primeiro e o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

[LAR] Utilize a definição acima para completar os itens abaixo.

a) $(x - y)^2 =$

b) $(x - 5y)^2 =$

c) $(x - 1)^2 =$

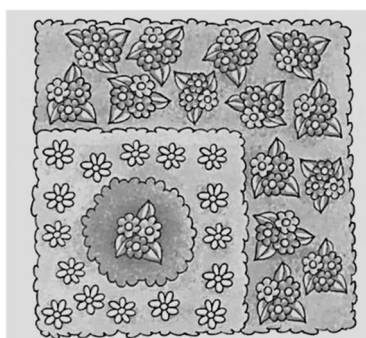
d) $a^2 - 2.a.b + b^2$

APÊNDICE C: AVALIAÇÃO APLICATIVA

AVALIAÇÃO APLICATIVA

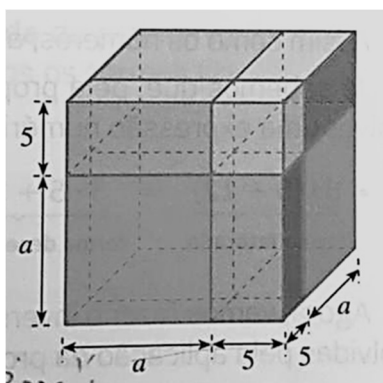
1) Renata iniciou o cálculo do quadrado de 103, como $103^2 = (100 + 3)^2$. Desenvolva o segundo membro da igualdade e indique o valor encontrado.

2) Os lados de um jardim quadrado foram aumentados em 3 metros. Considerando x a medida do lado do jardim antes do aumento. Apresente a expressão que representa a área total do jardim.



3) Desenvolva o produto $(x + y)^3$

4) Marque a alternativa que representa a expressão do volume do cubo de aresta $(a + 5)$:



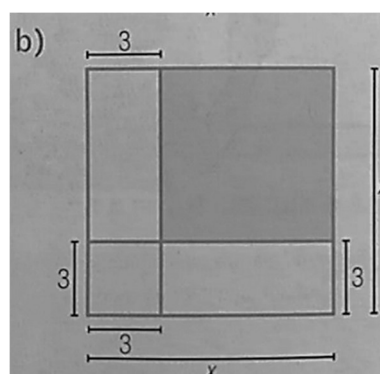
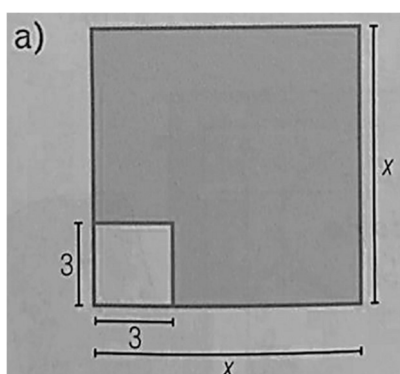
- a) $a^3 + 15a + 45a + 25$
- b) $a^3 + 15a^2 + 75a + 125$
- c) $a^2 + 10a + 25$
- d) $a^3 + 15a^2 + 125$

5) Helen escreveu em seu caderno:

$$(x + 13)(x - 13) = x^2 + 169$$

Ela acertou ? Por quê?

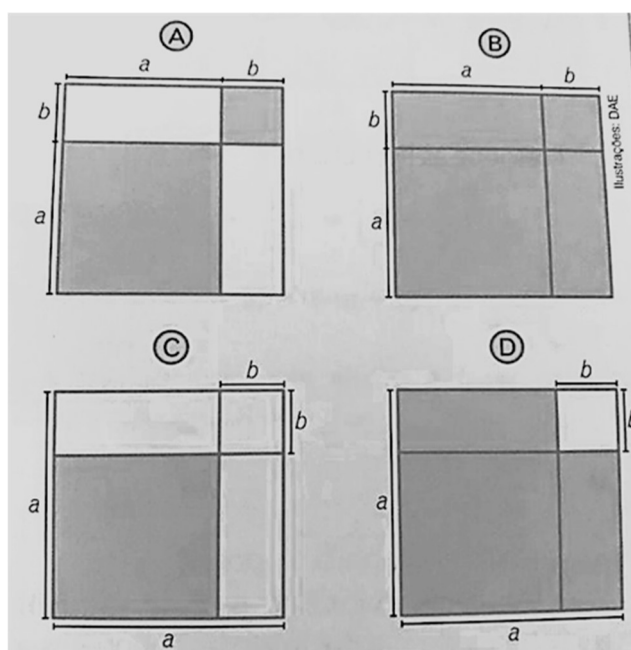
6) Determine a área da parte escura dos quadrados



7) Marque a alternativa correta para o produto $(2x - y) \cdot (2x - y)$.

- a) $2x^2 + 2xy + y^2$
- b) $2x^2 - 2xy + y^2$
- c) $4x^2 - 4xy + y^2$
- d) $4x^2 + 4xy + y^2$

8) Relacione as letras de cada figuras com as expressões correspondentes às partes escuras de cada quadrado.



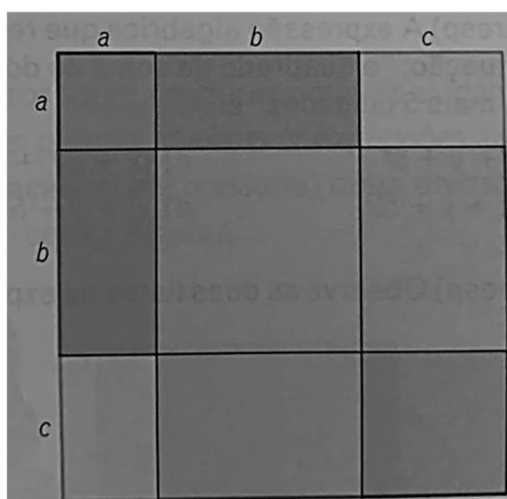
() $(a + b)^2$

() $(a - b)^2$

() $a^2 - b^2$

() $a^2 + b^2$

9) O jogo da construção é utilizado para a montagem de figuras geométricas maiores a partir das peças disponibilizadas. Com isso, ao utilizar os seus conhecimentos em geometria, Maria formou a figura adiante. Agora, encontre a expressão que representa a nova área formada.



APÊNDICE D: VALIDAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

QUESTIONÁRIO PARA AVALIAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA POR PROFESSORES

UARC 1

Objetivo: Identificar a relação existente entre o quadrado da soma de dois termos e a soma do quadrado do primeiro termo, com o dobro do produto entre o primeiro e o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

Material: Papel, lápis ou caneta, borracha e material didático manipulável (Kit Geométrico), régua graduada e o roteiro da atividade.

Procedimento:

[I₁ – EP] Com uso do material do kit Geométrico, construa um quadrado de acordo com as recomendações fornecidas. Num segundo momento determine a área do quadrado. Para isso, responda as seguintes perguntas.

[I_R – 01] Que tipo de figuras planas podem ser identificadas no conjunto de peças fornecidas?

[I_E – 02] Determine as dimensões (Largura e Comprimento) e as áreas correspondentes de cada uma das figuras identificadas.

[I_E – 03] Represente por meio de letras as dimensões de cada uma das peças (verde-laranja-azul), tendo em vista as medidas obtidas. Num segundo momento, calcule a área de cada uma das figuras utilizando as letras atribuídas.

[I_E – 04] Faça uma composição utilizando todas as peças fornecidas de modo a obter uma das figuras planas identificadas anteriormente. Num segundo momento, identifique as dimensões e calcule a área da figura construída.

[I_E – 05] Estabeleça uma relação entre a área da figura formada e as anteriores.

[I_F] Dados a e b , com a e $b \in \mathbb{Q}$

Representação algébrica:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ ou } a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Representação na Língua Materna:

O quadrado da soma de dois termos é numericamente igual a soma do quadrado do primeiro termo, com o dobro do produto entre o primeiro e o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

[I_{AR}] Utilize a definição acima para completar os itens abaixo.

a) $(x + y)^2 =$

c) $(5x + y)^2 =$

b) $(x + 3)^2 =$

d) $m^2 + 2.m.n + n^2 =$

AVALIAÇÃO DA UARC 1

1. A estrutura das Intervenções [Inicial (li) - Reflexiva (lr) - Exploratória (le)] conduzem a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

2. A formalização (F) está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

3. A Avaliação Restritiva (Ar) está compatível com o desenvolvido nas Intervenções (li–lr–le) e com a Formalização (F) do objeto matemático?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

4. A quantidade de atividades é exequível em relação ao tempo previsto?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

UARC 2

Objetivo: Identificar a relação existente entre o cubo da soma de dois termos e a soma do cubo do primeiro termo, com o triplo do produto do quadrado do primeiro com o segundo termo, mais o triplo do produto do primeiro com o quadrado do segundo termo, mais o cubo do segundo termo.

Material: Papel, lápis ou caneta, borracha e material didático manipulável (Kit Geométrico), régua graduada e o roteiro da atividade

Procedimentos:

[I₁ – EP] Com uso do material do kit Geométrico, construa um cubo de acordo com as recomendações fornecidas. Num segundo momento determine o seu volume. Para isso, responda as seguintes perguntas.

[I_R – 01] Que tipos de sólidos geométricos podem ser identificados no conjunto de peças fornecidas?

[I_R – 02] Determine as dimensões (Largura, Comprimento e Altura) e os volumes correspondentes de cada um dos sólidos identificados.

[I_R – 03] Represente por meio de letras as dimensões de cada uma das peças (verde-laranja-azul), tendo em vista as medidas obtidas. Num segundo momento, calcule o volume de cada um dos sólidos utilizando as letras atribuídas.

[I_R – 04] Faça uma composição utilizando todas as peças fornecidas de modo a obter um dos sólidos geométricos identificados anteriormente. Num segundo momento, identifique as dimensões e calcule o volume do sólido construído.

[I_R – 05] Estabeleça uma relação entre o volume do sólido formado e os anteriores.

[I_F] Dados a e b , com a e $b \in \mathbb{Q}$.

Representação algébrica:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3 \text{ ou } a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3 = (a + b)^3$$

Representação na Língua Materna:

O cubo da soma de dois termos é numericamente igual a soma do cubo do primeiro termo, com o triplo do produto do quadrado do primeiro com o segundo termo, mais o triplo do produto do primeiro com o quadrado do segundo termo, mais o cubo do segundo termo.

[I_{AR}] Utilize a definição acima para completar os itens abaixo.

a) $(x + y)^3 =$

c) $(x + 5y)^3 =$

b) $(x + 1)^3 =$

d) $z^3 + 3.z^2.w + 3.z.w^2 + w^3$

AVALIAÇÃO DA UARC 2

1. A estrutura das Intervenções [Inicial (Ii) - Reflexiva (Ir) - Exploratória (Ie)] conduzem a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

2. A formalização (F) está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

3. A Avaliação Restritiva (Ar) está compatível com o desenvolvido nas Intervenções (Ii-Ir-Ie) e com a Formalização (F) do objeto matemático?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

4. A quantidade de atividades é exequível em relação ao tempo previsto?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

UARC 3

Objetivo: Identificar a relação existente entre o produto a soma e a diferença de dois termos com a diferença entre o quadrado do primeiro termo com o quadrado do segundo termo.

Material: Papel, lápis ou caneta, borracha e material didático manipulável (Kit Geométrico), régua graduada e o roteiro da atividade.

Procedimentos:

[IR – 01] Que tipo de figuras planas podem ser identificadas no conjunto de peças fornecidas (azul e amarelo)?

[IE – 02] Determine as dimensões (Largura e Comprimento) e as áreas correspondentes de cada uma das figuras identificadas.

[IE – 03] Represente por meio de letras as dimensões de cada uma das peças, tendo em vista as medidas obtidas. Num segundo momento, calcule a área de cada uma das figuras utilizando as letras atribuídas.

[IE – 04] Com o uso da tesoura, recorte um quadrado num dos cantos de uma das figuras de cor azul e calcule a área do quadrado obtido. Num segundo momento atribua letra as dimensões do quadrado recortado e calcule a área utilizando a letra atribuída.

[IE – 05] Calcule a área da figura resultante, após a retirada do quadrado, a partir das áreas dos quadrados azuis anteriores, tanto numericamente quanto com as letras.

[IE – 06] Repita o recorte nos cantos das peças de cor amarela com mesmas dimensões do quadrado azul recortado. Num segundo momento identifique as dimensões com as letras utilizadas inicialmente nas peças resultantes de cor amarela.

[IE – 07] Faça apenas um recorte numa das peças amarelas resultantes de modo que as duas peças formem um retângulo. Num segundo momento, calcule a área desse novo retângulo, tanto numericamente quanto com uso das letras.

[IE – 08] Estabeleça comparação, tanto numérica quanto com letras, entre a figura azul após a retirada do quadrado e a figura retângulo amarelo obtido após o recorte.

[IF] Dados a e b , com a e $b \in \mathbb{Q}$.

Representação algébrica:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2 \text{ ou } (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Representação na Língua Materna:

O produto entre a soma e a diferença de dois termos é numericamente igual a diferença entre o quadrado do primeiro termo com o quadrado do segundo termo.

UARC 4

Objetivo: Identificar a relação existente entre o quadrado da diferença de dois termos com a diferença do quadrado do primeiro termo e o dobro do produto entre o primeiro e o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

Material: Papel, lápis ou caneta, borracha e material didático manipulável (Kit Geométrico), régua graduada e o roteiro da atividade.

Procedimentos:

[I₁ – EP] Com uso do material do kit Geométrico, construa um quadrado de acordo com as recomendações fornecidas. Num segundo momento determine a área deste quadrado. Para isso, responda as seguintes perguntas.

[I_R – 01] Que tipo de figuras planas podem ser identificadas no conjunto de peças fornecidas (azul e amarelo)?

[I_E – 02] Determine as dimensões (Largura e Comprimento) e as áreas correspondentes de cada uma das figuras identificadas.

[I_R – 03] Atribua letras aos lados dos quadrados de maior área e menor área.

[I_R – 04] Faça uma composição das figuras de modo a obter uma figura equivalente ao quadrado de maior área.

[I_R – 05] A partir das letras atribuídas acima, represente as dimensões das demais figuras e calcule suas respectivas áreas.

[I_R – 06] Como obter a área do quadrado intermediário a partir de retiradas de áreas do quadrado grande.

[I_R – 07] Represente algebricamente a situação anterior.

[I_F] Dados a e b , com a e $b \in \mathbb{Q}$.

Representação algébrica:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ ou } a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Representação na Língua Materna:

O quadrado da diferença de dois termos é numericamente igual a diferença do quadrado do primeiro termo e o dobro do produto entre o primeiro e o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

[I_{AR}] Utilize a definição acima para completar os itens abaixo.

a) $(x - y)^2 =$

b) $(x - 5y)^2 =$

c) $(x - 1)^2 =$

d) $a^2 - 2.a.b + b^2 =$

AVALIAÇÃO DA UARC 4

1. A estrutura das Intervenções [Inicial (Ii) - Reflexiva (Ir) - Exploratória (Ie)] conduzem a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

2. A formalização (F) está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

3. A Avaliação Restritiva (Ar) está compatível com o desenvolvido nas Intervenções (Ii-Ir-Ie) e com a Formalização (F) do objeto matemático?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

4. A quantidade de atividades é exequível em relação ao tempo previsto?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

AVALIAÇÃO DO CONJUNTO DAS UNIDADES CONCEITUAIS

1. As atividades utilizadas na Sequência Didática são atrativas e apresentam uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

2. Os recursos de apoio são atrativos e de fácil operacionalização pelo aluno e contribuem para a formalização intuitiva/empírica do conceito matemático?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

3. O número total de atividades da Sequência Didática é adequado para o ensino do objeto matemático?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

4. Na sua percepção, o conjunto de atividades que compõem a Sequência Didática está ordenado de modo a promover o ensino do objeto matemático?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

5. O tempo total previsto é compatível para aplicação da Sequência Didática?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

AVALIAÇÃO COMPLEMENTAR**1. A Avaliação Aplicativa (Aa) está compatível com a Sequência Didática proposta?**

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

2. A Sequência Didática proposta promove a interação Professor-Aluno-Saber?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

3. Na sua percepção, que contribuições essa Sequência Didática apresenta:

a) Em relação ao Professor (formação matemática e pedagógica)?

b) Em relação ao Aluno (participação ativa e apreensão do objeto matemático)?

c) Em relação ao Saber (constituição gradativa do conceito matemático e sua formalização)?

4. Que potencialidades você identifica nessa Sequência Didática para o ensino do objeto matemático?

ANEXOS

ANEXO A - TCLE PARA OS PAIS DOS ALUNOS

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Senhor (a) responsável você está sendo consultado sobre a possibilidade de seu filho (a), para participar da pesquisa intitulada: um diagnóstico do **Ensino de Produtos Notáveis** sob a responsabilidade dos pesquisadores **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kelly Martins da Silva, Miguel Chaquiam e Lucas Antonio Mendes de Lima** vinculados à Universidade do Estado do Pará.

Com esse trabalho estamos buscando diagnosticar o ensino de Produtos Notáveis a partir da opinião dos estudantes. A colaboração do aluno (a) será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da pesquisa e essa atividade ocorrerá nas dependências da escola sob a supervisão de um professor.

Em nenhum momento o aluno (a) identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a identidade do discente será preservada.

Você e o aluno não terão gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa.

Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica gerando um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o ensino de Produtos Notáveis.

Você é livre para decidir se seu filho (a) colaborará com a pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kelly Martins da Silva e Lucas Antonio Mendes de Lima** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação(CCSE) da Universidade do Estado do Pará(UEPA) : Tv. Djalma Dutra s/n.Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542

_____, ____ de _____ de 2019.

Assinatura dos pesquisadores

Eu, _____ autorizo
que meu/minha filho(a) _____ a participar do
projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

Assinatura do responsável

ANEXO B - TCLE PROFESSORES

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) Professor(a), você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada inicialmente: **produtos notáveis com materiais manipuláveis** sob a responsabilidade dos pesquisadores **Lucas Antonio Mendes de Lima e Miguel Chaquiam**, vinculados à Universidade do Estado do Pará (UEPA).

A sua colaboração será de permitir que as atividades sejam realizadas em sua turma e auxiliar os pesquisadores durante a execução das atividades, dentre outras.

Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa poderão ser publicados e ainda assim a sua identidade será preservada.

O professor não terá nenhum gasto ou ganho financeiro pela participação na pesquisa. Os benefícios serão de cunho acadêmico objetivando melhorias no processo de ensino aprendizagem de matemática na educação básica.

Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação. Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você, contendo a sua assinatura e a assinatura de seu responsável.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores: **Lucas Antonio Mendes de Lima** (lucasamlima@outlook.com) ou **Miguel Chaquiam** (miguelchaquiam@gmail.com). Você poderá também entrar em contato com a Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Bairro: Telégrafo. Fone: 4009-9542 e **informar o nome dos pesquisadores a instituição a qual estão vinculados** Belém - Pará - CEP: 66113 - 010.

Belém, ____ de _____ de 2018.

Assinatura dos pesquisadores

Eu, professor(a) _____, aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

Assinatura do professor participante da pesquisa

ANEXO C - QUESTIONÁRIO DOS ALUNOS



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE
MATEMÁTICA

Prezado(a) aluno (a),

Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1- **Idade:** _____ anos 2- **Gênero:** ☐ Masculino ☐ Feminino 3- **Série/Ano**-----

4- **Tipo de escola que estuda?** ☐Municipal ☐Estadual ☐Conveniada ☐ outra

5- **Você já ficou em dependência?** ☐Não ☐Sim. Em quais disciplinas? _____

6- **Você gosta de Matemática?** ☐ Não gosto ☐Suporto ☐Gosto um pouco ☐Adoro

7- **Qual a escolaridade do seu responsável masculino?**

☐Superior ☐Médio ☐Fundamental ☐Fundamental incompleto ☐Não estudou

8- **Qual a escolaridade da sua responsável feminina?**

☐Superior ☐Médio ☐Fundamental ☐Fundamental incompleto ☐ Não estudou

9- **Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?**

☐Professor particular ☐Família ☐Ninguém ☐Outros. Quem? _____

10- **Com que frequência você estuda matemática fora da escola?**

☐Todo dia ☐ Somente nos finais de semana ☐No período de prova ☐Só na véspera da prova ☐Não estudo fora da escola.

11- **Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?**

☐Sempre ☐Quase sempre ☐Às vezes ☐Poucas vezes ☐Nunca

12- **As aulas de Matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?**

☐sim ☐não ☐às vezes

13- **Você consegue relacionar os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula com seu dia a dia?** ☐Sim ☐Não ☐Às vezes

14- **Como você se sente quando está diante de uma avaliação em matemática?**

☐Contente ☐ Tranquilo ☐com Medo ☐Preocupado ☐com Raiva ☐ com Calafrios

15- **Quais formas de atividades e/ou trabalho que seu Professor (a) de matemática mais utiliza para a avaliação da aprendizagem?**

☐Provas/simulado ☐Testes semanais ☐Seminários ☐Pesquisas ☐Projetos ☐Outros. Quais?

16- **Você já estudou Produtos Notáveis?** ☐Sim ☐Não

17- **Se você na questão acima respondeu sim, diga em qual ano/ série?** _____

18- **Seu professor de matemática demonstra domínio do conteúdo: Produtos Notáveis?**

☐Sim ☐Não

19. **Como você avalia as explicações do seu professor de matemática?**

☐Ruim ☐Regular ☐Boa ☐Excelente

20- Quando você estudou Produtos Notáveis, a maioria das aulas:

- ☐ Iniciaram pela definição seguida de exemplos e exercícios;
- ☐ Iniciaram com a história do assunto para depois explorar os conceitos;
- ☐ Iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto;
- ☐ Iniciaram com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo;
- ☐ Iniciaram com jogos para depois sistematizar os conceitos.

21- Para praticar o conteúdo de Produtos Notáveis seu professor costumava:

- ☐ Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos;
- ☐ Apresentar jogos envolvendo o assunto;
- ☐ Solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático;
- ☐ Não propunha questões de fixação;
- ☐ Solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.

22 - Com base na sua experiência quando você estudou Produtos Notáveis preencha o quadro de dificuldades a seguir.

(MF: Muito Fácil; F: Fácil; R: Regular; D: Difícil; MD: Muito difícil)

Conteúdo	Você lembra de ter estudado?		Qual grau de dificuldade que você teve para aprender?				
	Sim	Não	MF	F	R	D	MD
Identificação de coeficientes de termos algébricos $2x^3y^2$							
Identificação de expoentes de termos algébricos $2x^3y^2$							
Soma (adição) de termos algébricos $5x^3 + 20x^3 + x^3$							
Diferença (subtração) de termos algébricos $20x^3 - 5x^3 - x^3$							
Propriedade distributiva do produto em relação a adição e subtração de termos algébricos $2x^3y^2(2xy + 3x^2y^3 - xy^2 + 3)$							
Quadrado da soma de dois termos $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$							
Quadrado da diferença de dois termos $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$							
Produto da soma pela diferença de dois termos $(x + y).(x - y) = x^2 - y^2$							
Cubo da soma de dois termos $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$							
Cubo da diferença de dois termos $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$							
Soma de dois cubos $x^3 + y^3 = (x + y).(x^2 - xy + y^2)$							
Diferença de dois cubos $x^3 - y^3 = (x - y).(x^2 + xy + y^2)$							

ANEXO D- QUESTIONÁRIO DOS PROFESSORES



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE
MATEMÁTICA

Caro(a) Professor(a),

Este instrumento tem como objetivo obter informações para um estudo que pretende contribuir para superação dos obstáculos de ensino e aprendizagem de matemática, encontrados por professores e alunos durante as atividades em sala de aula. Nesse sentido, é de grande importância sua colaboração, respondendo este questionário, para o bom êxito do estudo em questão. As informações obtidas terão um caráter confidencial e sua identidade será preservada. Agradecemos a sua colaboração com o nosso trabalho. Muito obrigado!

01. Qual seu nível de formação acadêmica?

- ☐ Graduação;
☐ Especialização (em andamento); ☐ Mestrado;
☐ Especialização; ☐ Doutorado (em andamento);
☐ Mestrado (em andamento); ☐ Doutorado.

02. Tempo de magistério como professor (a) de matemática:

- ☐ até 5 anos ☐ de 6 a 10 anos ☐ de 11 a 15 anos
☐ de 16 a 20 anos ☐ Há mais de 20 anos

03. Tipo de escola que trabalha?

- ☐ Pública Municipal ☐ Pública Estadual ☐ Pública Federal ☐ Privada

04. Durante sua formação inicial (graduação) você participou de alguma disciplina que abordou os produtos notáveis?

- ☐ Sim ☐ Não

05. Sobre ao ensino de produtos notáveis, você participou de alguma formação continuada nos últimos 2 anos que abordou esse conteúdo?

- ☐ Sim ☐ Não

06. Quando você ensina o assunto de produtos notáveis, as aulas iniciam:

- ☐ Pela definição, seguida de exemplos e exercícios;
☐ Pela história, para depois explorar seus conceitos;
☐ Por situação problema para depois iniciar os conceitos;
☐ Por meio da utilização de materiais concretos;
☐ Por jogos para depois sistematizar os conceitos.

07. Você considera importante associar a Geometria e a Álgebra para o ensino de produtos notáveis?

- ☐ Sim ☐ Não

08. Quais as principais formas de avaliar seus alunos que você usa? (Marque mais de uma opção se necessário).

- ☐ Prova oral ☐ Prova escrita ☐ Auto avaliação ☐ Fichas de observação
☐ Produções no caderno ☐ Trabalhos

09. Como você se sente ao aplicar uma avaliação de matemática?

- ☐ Confiante ☐ Inseguro(a) ☐ Vingativo(a)

10. Você costuma investigar os conhecimentos básicos dos alunos, para iniciar o conteúdo de produtos notáveis?

- ☐ Sim, através de um teste
☐ Sim, no início de aula através de diálogos com a turma

☐ Não costumo fazer esse tipo de investigação

11. Para consolidar os estudos sobre produtos notáveis, você utiliza:

- ☐ Listas de exercícios
☐ Jogos envolvendo o assunto
☐ Exercícios do livro didático
☐ Questões pesquisadas pelo aluno sobre o assunto
☐ Outros meios

12. Quantas aulas normalmente você utiliza para trabalhar o assunto de Produtos Notáveis? (Responda em números). __ aulas

13. Com base em sua experiência no ensino de Produtos Notáveis preencha a seguir ao grau de dificuldades dos alunos em aprender o assunto:

(**MF**: Muito Fácil; **F**: Fácil; **R**: Regular; **D**: Difícil; **MD**: Muito difícil)

Conteúdo	Você lembra de ter ensinado?		Qual grau de dificuldade dos alunos em aprender?				
	Sim	Não	MF	F	R	D	MD
Identificação de coeficientes de termos algébricos							
Identificação de expoentes de termos algébricos							
Soma (adição) de termos algébricos							
Diferença (subtração) de termos algébricos							
Propriedade distributiva do produto em relação a adição e subtração de termos algébricos							
Quadrado da soma de dois termos							
Quadrado da diferença de dois termos							
Produto da soma pela diferença de dois termos							
Cubo da soma de dois termos							
Cubo da diferença de dois termos							
Soma de dois cubos							
Diferença de dois cubos							

(*) Caso tenha marcado **NÃO** quando questionado se ensinou determinado conteúdo, não marque o grau de dificuldades.



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Trav. Djalma Dutra, s/nº – Telégrafo
66113-010 Belém-PA
www.uepa.br