Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Fabrício da Silva Lobato
Natanael Freitas Cabral

O ENSINO DE FUNÇÃO PERIÓDICA A PARTIR DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA À LUZ DAS UNIDADES ARTICULADAS DE RECONSTRUÇÃO CONCEITUAL

PRODUTO EDUCACIONAL

BELÉM-PA
2022

Fabricio da Silva Lobato
Natanael Freitas Cabral

O ENSINO DE FUNÇÃO PERIÓDICA A PARTIR DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA À LUZ DAS UNIDADES ARTICULADAS DE RECONSTRUÇÃO CONCEITUAL.

PRODUTO EDUCACIONAL

Produto Educacional apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará.
Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.
Orientador: Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral

Belém-PA
2022

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Lobato, Fabricio da Silva

O ensino de função periódica a partir de sequência didática à luz das unidades articuladas de reconstrução conceitual: produto educacional / Fabricio da Silva Lobato, Natanael Freitas Cabral. - Belém, 2022.

Produto educacional vinculado à dissertação "Ensino de função periódica a partir de sequência didática à luz das unidades articuladas de reconstrução conceitual" do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, Belém, 2022.

ISBN: 978-65-84998-21-6

1.Matemática-Estudo e ensino. 2. Função periódica. 3.Prática de ensino I. Cabral, Natanael Freitas (orient.). II. Título.

CDD. 23º ed.510.7

Regina Coeli A. Ribeiro – CRB-2/739

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: **"O ENSINO DE FUNÇÃO PERIÓDICA A PARTIR DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA À LUZ DAS UNIDADES ARTICULADAS DE RECONSTRUÇÃO CONCEITUAL".**

Mestrando: **FABRÍCIO DA SILVA LOBATO**

Data da avaliação: **30/09/2022**

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado à:*

( ) Estudantes do Ensino Fundamental (X) Estudantes do Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental ( ) Professores do Ensino Médio

( ) Outros: ______________________________

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

(X) Sequência Didática ( ) Página na Internet ( ) Vídeo

( ) Texto Didático (alunos/professores) ( ) Jogo Didático ( ) Aplicativo

( ) Software ( ) Outro: ______________

b) *Possui URL:* (X) Sim, qual o URL: ______________________________

( ) Não ( ) Não se aplica

c) *É coerente com a questão-foco da pesquisa?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ______________________________

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ______________________________

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ______________________________

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Possui sumário:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
b) *Possui orientações ao professor:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
c) *Possui orientações ao estudante:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
d) *Possui objetivos/finalidades:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
e) *Possui referências:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
f) *Tamanho da letra acessível:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
g) *Ilustrações são adequadas:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Foi aplicado?*

(X) Sim, onde: Escola Estadual de Ensino Médio.

( ) Não, justifique:

( ) Não se aplica

b) *Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?*

(X) Sim, onde: instituições de Ensino Médio.

( ) Não, justifique:

( ) Não se aplica

c) *O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?*

(X) Sim, onde: Escola de Ensino Médio

( ) Não, justifique:

( ) Não se aplica

d) *Em qual condição o produto educacional foi aplicado?*

( ) na escola, como atividade regular de sala de aula

(X) na escola, como um curso extra

( ) outro:

e) *A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):*

( ) Alunos do Ensino Fundamental

(X) Alunos do Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental

( ) Professores do Ensino Médio

( ) outros membros da comunidade escolar, tais como

( ) outros membros da comunidade, tais como

O produto educacional foi considerado:

(X) APROVADO ( ) APROVADO COM MODIFICAÇÕES ( ) REPROVADO

MEMBROS DA BANCA Assinaturas

Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral (Presidente)
Doutor em Ciências Humanas
IES de obtenção do título: PUC/RJ

Prof. Dr. Miguel Chaquiam (Examinador 01)
Doutor em Educação
IES de obtenção do título: UFRN

Prof. Dr. Cláudio Brandenberg Quaresma (Examinador 02)
Doutor em Educação
IES de obtenção do título: UFPA

Secretaria de Estado de Educação
GOVERNO DO PARÁ

DECLARAÇÃO

Declaro para os devidos fins que o aluno **FABRICIO DA SILVA LOBATO**, CPF: 883.577.752-68, realizou o Estágio Supervisionado com a supervisão do professor José Américo Trindade Costa Junior, tendo uma avaliação positiva, e aplicou a Sequência Didática como um produto educacional intitulada "**O ENSINO DE FUNÇÃO PERIODICA A PARTIR DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA À LUZ DAS UNIDADES ARTICULADAS DE RECONSTRUÇÃO CONCEITUAL**" desenvolvido no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará - UEPA, na turma do 2º Ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Paes de Carvalho, nos meses de janeiro, março e abril de 2022, para fins de comprovação para o referido programa.

Belém(Pa), 24 de agosto de 2022.

Atenciosamente,

Alinne Castro de Sousa Santos
Diretora da EEEM Paes de Carvalho
Matrícula 57227983-2
Portaria nº 5548/2022

ALINNE CASTRO DE SOUSA SANTOS

Gestora Escolar

Sumário

1. INTRODUÇÃO

O referido Produto Educacional foi desenvolvido como resultado de uma dissertação escrita por Lobato F.S (2022) em que teve como objetivo identificar as potencialidades didáticas de uma Sequência Didática elaborada com base nas Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC's) especificamente para o ensino-aprendizagem do conceito de função periódica.

As teorias que tive como suporte para o desenvolvimento da dissertação e do produto educacional, neste sentido, apresento inicialmente uma discussão em relação a Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Brousseau (2008); as Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC's) de Cabral (2017), em relação ao uso da Análise Microgenética proposta por Goés (2000) e, por fim, a Análise do Discurso na perspectiva de Mortimer e Scott (2002).

As considerações de Brousseau (2008) corroboraram para a compreensão das contribuições do uso da sequência didática no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Cabral (2017) aborda sobre a estrutura e organização de uma sequência didática e atuou como referencial para proposta de instrumento de investigação. As explanações da análise microgenética de Goés (2000) e da análise do discurso de Mortimer e Scott (2002) referem as formas de captação e análise de dados no desenvolvimento de uma pesquisa qualitativa, que o leitor pode aprofundar quando necessário no capítulo 1 da dissertação que gerou esse produto educacional.

A estrutura desse produto educacional é composta por 5 capítulos, no qual se tem Orientação para o Professor, Orientação para o Aluno, Sequência Didática, Conteúdo Matemático, e as Considerações finais.

No capítulo 2 e 3 desse produto educacional, são orientações para o professor que pretende utilizar esse produto educacional para o ensino de função periódica, e orientações para o aluno seguir no momento da aplicação da sequência didática, respectivamente, e no capitulo 4 e 5, é feito uma explicação sucinta sobre Sequência Didática e as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual(Uarc´s), e é descrito de maneira aprofundada o conteúdo matemático, respectivamente, e por fim as considerações finais e caso seja necessário pode-se acessar a dissertação para tirar possíveis duvidas que venham a surgir na leitura desse produto educacional.

2. ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

Professor fica ao seu critério a melhor forma de aplicar esse produto educacional, conforme a organização curricular de sua escola o conteúdo matemático proposto aqui pode sofrer algumas mudanças. O conteúdo de função periódica comumente é trabalhado nos livros didáticos no 2º ano do Ensino Médio, nos tópicos referentes as funções trigonométricas.

Em geral nos livros didáticos do 2º ano do Ensino Médio não é dado muita ênfase no conceito de função periódica, sendo focado apenas nas funções seno, cosseno e tangente, e com esse produto educacional o professor tem a oportunidade de ensinas antes das funções trigonométrica, o conceito de função periódica, propriedades acerca do período e outras funções periódicas não trigonométricas.

Alguns alunos quando chegam no Ensino Médio apresentam muitas dificuldades em Matemática básica, e essas dificuldades se mantém no 1º ano do Ensino Médio, gerando assim outras dificuldades, como por exemplo nas funções em gerais, que são conhecimentos necessários para uma boa compreensão das funções periódicas.

Costa (1997) identificou que os grupos de alunos da aplicação tiveram dificuldades em estabelecer conexão entre fenômenos periódicos e a função trigonométrica. Os alunos no pré-teste e no pós-teste demonstraram dificuldades e até mesmo deixaram em branco as questões envolvendo domínio, imagem e Período de função seno e cosseno.

A Sequência Didática foi desenvolvida a partir do levantamento da revisão de literatura das 10 dissertações analisadas e as dificuldades dos alunos identificadas nas funções trigonométricas, sendo um ponto de partida para compreender as dificuldades inerentes nas Funções Periódicas. A Sequência Didática disponibilizada nesse produto educacional com a finalidade de novas aplicações por parte dos professores e assim observarem uma melhoria no processo de ensino-aprendizagem das funções periódicas e assim confirmar os resultados encontrados pela dissertação desenvolvida ou até mesmo outras contribuições não destacadas nesta pesquisa.

É importante que o docente siga as etapas da aplicação do Produto Educacional conforme a seguinte ordem: Teste de verificação de conhecimentos básicos, Oficina de conhecimentos necessários para a Sequência Didática, a Sequência Didática para o ensino do conceito de Função Periódica com 3 UARC´s e por fim, o Teste de verificação de aprendizagem. E para se ter um baixo custo nessa aplicação o professor pode imprimir em papel A4 essas atividades para aplicação.

No primeiro momento é importante aplicar o teste de verificação de conhecimentos básicos que é composto de 10 questões conforme pode ser observado no subcapitulo 4.1 deste produto educacional e tem por objetivo verificar se os alunos possuem os conhecimentos necessários para aprendizagem do conceito de funções periódicas, uma vez que, se teve por finalidade identificar as potencialidades da sequência didática e os indícios de aprendizagem.

O objetivo das questões do teste de verificação de conhecimentos básicos é verificar se o aluno ainda lembra dos conteúdos relacionados as funções, como a ideia de domínio, imagem e valor numérico das funções polinomiais do 1° e 2° grau, coordenadas cartesianas e montar a partir do gráfico fornecido na questão o modelo matemático que representa o gráfico.

Vale ressaltar que se caso as turmas tenham desempenho desfavorável é importante uma oficina de nivelamento para o ensino destes conhecimentos necessários para em seguida ser aplicada as propostas metodológicas.

A oficina de conhecimentos necessários é composta por 8 questões conforme pode ser observado no subcapitulo 4.2 e tem como objetivo relembrar noção de função como, domínio, imagem, representação cartesiana de uma função e também relembrar a ideia de valor numérico das funções polinomial do 1° e 2° grau e as características gráficas dessas funções.

No primeiro momento da oficina o docente pode revisar com os alunos, domínio, imagem, plano cartesiano, variável dependente e independente de uma função, e após essas revisões teóricas e pode-se resolver a primeira e a segunda questão da oficina de conhecimento necessários.

Já no segundo momento da oficina vale destacar a importância de ministrar de maneira geral as características gráficas e a ideia de valor numérico das funções polinomiais do 1° e 2° grau, após isso o professor pode resolver as oito questões da oficina de conhecimento necessários.

A sequência didática elaborada para aplicação foi desenvolvida com bases nas Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC) desenvolvidas por Cabral (2017) e os pressupostos da teoria das Situações Didáticas. Foram elaboradas 3 UARC’s cuja apresentação o docente pode verificar no subcapitulo 4.3.

Caso o docente ache necessário pode-se fazer um estudo de maneira aprofundada das funções periódica, como por exemplo, conceito, período, função periódica trigonométrica e não trigonométrica, sendo que no final de cada Uarc´s o professor terá que realizar as intervenções formalizantes que transformar as generalizações dos alunos em uma linguagem matemática mais formal, sendo assim recomenda-se ao professor a leitura do conteúdo matemático proposto nesse produto educacional.

Vale destacar que o professor para a aplicação da Sequência Didática, organize a turma em grupos formados por 2 ou no máximo 3 estudantes, sendo que essa maneira de organizar a sala de aula, gera um ambiente participativo e reflexivo, e assim promovendo interações verbais entre os alunos e o próprio docente, no qual o professor tem a oportunidade de observar as interações e argumentações durante a resolução das atividades. É importante frisar que caso o docente ache necessário pode realizar intervenções orais, caso note conclusões equivocadas pelos alunos, para que eles prossigam atentos às atividades propostas pela Sequência Didática.

Quadro 1: Intenção do Professor

Uarc	**Conteúdo**	**Intenção do Professor**
1	Fenômenos Periódicos	Conduzir o aluno a compreender o que são os fenômenos periódicos e não periódicos.
2	Período	Conduzir o aluno compreender o período dos fenômenos periódicos.
3	Conceito de Função Periódica	Conduzir o aluno compreender o conceito de função periódica.

Fonte: Autor (2022)

Após a aplicação da Sequência Didática é importante aplicação pelo professor do teste de verificação de aprendizagem, sendo a última etapa do processo de ensino aprendizagem, que pode ser observado no subcapitulo 4.4. O teste é composto por seis questões que tem por objetivo avaliar se o aluno conseguiu absorver o conteúdo de relacionado com a função periódica.

A primeira questão estar relacionado com os fenômenos periódicos, o aluno precisa reconhecer qual fenômeno descrito nas alternativas é periódico ou não periódico. Já a segunda questão o aluno tem que reconhecer qual o gráfico representa uma função periódica. A terceira questão do teste o aluno precisa reconhecer o período do fenômeno periódico. A quarta questão é fornece um gráfico para o aluno dizer e justificar se o gráfico representa uma função periódica e qual o período desse gráfico. A quinta questão é para o aluno dizer se o fenômeno descrito é periódico ou não e justificar a resposta. Na última questão é fornecido uma tabela com alguns valores relacionados com uma função periódica, sendo perguntado qual o valor numérico de dois valores e qual o período percebido na função periódica.

Portanto o professor pode seguir as orientações proposta nesse produto educacional para obter um bom aproveitamento no processo de ensino-aprendizagem de uma aula relacionada ao conceito de função periódica.

3. ORIENTAÇÃO AO ALUNO

Esse capitulo é direcionada para as orientações para o aluno acerca do processo de ensino-aprendizagem que pode ser realizado por meio desse produto educacional.

É importante que o aluno esteja disposto a participar e receptivo para aprendizagem, pois a interação verbal que ocorre entre aluno-aluno e aluno-professor é um momento também de aprendizagem.

No viés metodológico da Sequência Didática, o professor tem que ter uma interação com o aluno de uma forma que possa transmitir confiança para o aprendiz. Esse aluno, por sua vez, ao se sentir confiante e motivado permitirá ser conduzido pelo professor na hora da aplicação da atividade devidamente ordenada e articulada.

Na sala de aula a interação comunicativa é intensa, quando o professor expõe o conteúdo matemático, fazendo perguntas aos estudantes, liderando discussões, e até mesmo resolvendo questões propostas, o estudante começa a ter pensamentos e ideias apresentando ponto de vista sobre o conteúdo ensinado em sala e com isso gerando uma intensa comunicação entre professor-aluno e aluno-aluno.

Vivian (2006), menciona que o espaço interativo da sala de aula é um lugar onde pelo menos duas linguagens sociais diferentes se revelam, a cientifica e a de senso comum, e originam novos significados através da enunciação de argumentos e /ou opiniões.

A interação com os estudantes cria novas ideias e novos pensamentos sobre determinado assunto, muitas pesquisas enfatizam as interações comunicativas verbais que ocorrem no ambiente de sala de aula, com o intuito de ampliar os conceitos que são significativos aos alunos. Porém, a aprendizagem do aluno é vista como uma reconstrução de concepções que já estão vinculados ao seu dia a dia.

Para isso é importante que o aluno esteja ciente de cada etapa do processo de ensino-aprendizagem, como, o teste de verificação de conhecimento básico, oficina de conhecimento necessários e a Sequência Didática para o Ensino de Função Periódica, que com isso temos então um contrato didático.

De acordo com Guy Brousseau (1980, apud Almouloud, 2007) o contrato didático é o conjunto de comportamento especifico do professor esperado pelos alunos, e os comportamentos dos alunos esperado pelo professor.

Almouloud (2007) comenta que o contrato didático não é composto apenas por regras de convívio ou lista de combinados, mas também, como um contrato pedagógico. O contrato didático seria referente ao processo de ensino e de aprendizagem, geralmente não escrito, mas formado por relações que o professor espera do aluno e das atitudes que o aluno espera do professor, de um modo geral, o que é explicitado em contrato didático são questões sobre avaliações e como as atividades serão feitas.

As atividades apresentadas na Sequência Didática estar organizada em ordem crescente de dificuldades e cada uma possui objetivos de aprendizagem que deve ser seguido pelo aluno.

Quadro 2: Objetivo do Aluno

Uarc	Conteúdo	Objetivo do Aluno
1	Fenômenos Periódicos	Compreender os fenômenos periódicos e não periódicos
2	Período	Compreender o período dos fenômenos periódicos.
3	Conceito de Função Periódica	Compreender a partir do período identificado o conceito de função periódica

Fonte: Autor (2022)

É sugerido que o aluno siga a ordem das atividades apresentadas na Sequência Didática, pois as atividades estão interligadas como se fosse um elo, ou seja, o conhecimento adquirido na Uarc 1 ajuda a compreender os conhecimentos novos que surgirão na Uarc 2 e assim por diante.

Assim que necessário o aluno pode pedi auxilio ao professor, para lembrar de algum conteúdo ou até mesmo duvidas que podem surgir no momento da aplicação da Sequência Didática, além do mais é importante que o aprendiz utilize apenas como recurso didático as folhas com atividades da Sequência didática, lápis, borracha, caderno e as respostas podem ser anotadas na folha da atividade que contem as Uarc’s ou no caderno.

Recomenda-se ao aluno que a última atividade de cada Uarc, que são as Intervenções Avaliativas Aplicativas, seja respondida apenas quando o professor formalizar o conhecimento matemático referente a cada Uarc.

4.SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesse capitulo ele é importante para compreender o que vem ser uma Sequência Didática e as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual de Cabral (2017).

De acordo com Zabala (1998, p. 18), temos a Sequência Didática caracterizada como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos”, ou seja, a Sequência Didática são atividades organizadas e articuladas uma a uma, com o objetivo de alcançar a aprendizagem de um determinado conteúdo matemático.

Destacamos que o professor deve desenvolver as atividades com a intenção de elaborar um instrumento simples de aprendizagem, de modo a estabelecer comunicação entre o que quer ensinar e as possibilidades para que o aluno aprenda.

Essa aprendizagem segundo Cabral (2017) se dá por meio da percepção de padrões, regularidades e o estabelecimento de generalizações fomentadas no desenvolvimento das atividades formuladas pelo professor.

Cabral (2017) destaca em seu trabalho, referente à elaboração de Sequências Didáticas, a reconstrução de conceitos; a identificação de propriedades; a percepção de regularidades e o estabelecimento de generalização como importantes assimilações a serem realizadas pelos alunos e que o professor deve almejar em sua Sequência Didática.

As Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual – UARC’s propostas por Cabral (2017) buscam proporcionar ao professor um modelo estruturante para a construção de Sequências Didáticas. É interessante e vale ressaltar o dinamismo proporcionado por esse modelo estruturante, no sentido de que o constructo pode ser relacionado as variadas tendências da Educação Matemática e as mais diversas abordagens metodológicas.

Assim, uma UARC é uma unidade bem fundamentada e definida para a reconstrução de determinado conceito de um objeto matemático, ou seja, a UARC é um conjunto de articulações condicionadas a partir de uma intervenção inicial de ensino.

Cabral (2017) denomina UARC-1 como sendo o ponto de partida e está é chamada de UARC de primeira geração. A UARC-2(segunda geração) a escolha dela estar condicionada, não pode ser uma escolha qualquer, a UARC-2 tem que estar estritamente liga a UARC de primeira geração e assim por diante vai se construindo as UARC’s de ordem superior.

Para a construção das UARC’s serem bem compreendidas temos

> [...] seis categorias estruturantes que materializam o texto de uma SD de acordo como eu concebi em suas adaptações necessárias para o ensino-aprendizagem de Matemática nos níveis fundamental e médio, são elas: Intervenção Inicial **(I_i)**, Intervenção Reflexiva **(I_r)**, Intervenção Exploratória **(I_E)**, Intervenção Formalizante (I_F), Intervenção Avaliativa Restrita (I_{AR}) e, finalmente, as Intervenção Avaliativa Aplicativa (I_{AA}) (CABRAL, 2017, p 40).

Essas 6 categorias bem compreendias, elas irão estruturar e materializar a Sequência Didática, devemos ter o conhecimento de como funciona cada uma, sendo assim, temos primeiramente a Intervenção inicial que é o primeiro elemento de um jogo discursivo que será mediado pelo professor com intenção de estimular o aluno a perceber algum pensamento matemático.

A Intervenção reflexiva surge de um questionamento, esse questionamento refere-se a um ou mais aspectos relacionados ao conceito de reconstrução do objeto, e a intervenção reflexiva leva o aluno a levantar hipóteses, fazer conjecturas.

A Intervenção exploratória tem como objetivo aprofundar a forma que o aluno olha suas respostas que surgem a partir da intervenção reflexivas, mas a partir da solicitação a esse aluno para executar algum procedimento nesse momento serão convidados para fazerem simulações, experimentações, descrições, preencher tabelas, elaborar gráficos e observações.

Cabral (2017) explica que a combinação das Intervenções Reflexivas e Exploratórias, cria um ambiente didático estimulante de intervenções estruturantes pré-formais, geralmente esquecidas em aulas expositivas.

De acordo com o autor as generalizações empírica-intuitiva por parte do aprendiz, que surgem a partir dos estímulos das Intervenções Reflexivas e Exploratória, com isso o professor se apropria do conhecimento empírico-intuitivo do aluno e enuncia a Intervenção Formalizante.

A Intervenção Formalizante é o momento que o professor formaliza o conceito matemático a partir das percepções feitas pelos alunos, aqui explica Cabral (2017), que o professor é orientador do pensamento mediado pela Sequência Didática, e reelabora os conhecimentos sugeridos pelos alunos com o refino da formalidade matemática, sendo que, é nesse momento que as percepções feitas pelos aprendizes são revestidas pelo saber formal da disciplina, pela linguagem abstrata e axiomática, que é algo próprio da Matemática.

De acordo com Cabral (2017) após as Intervenções formalizantes, o professor pode inserir para avaliar a aprendizagem, a Intervenção Avaliativa Restrita, que é o momento que é feita a verificação da aprendizagem do aluno em dois aspectos fundamentais, que são, os sentidos e significados do objeto matemático de estudo em questão, e como se operam e justificam as propriedades e operações desse objeto matemático.

A Intervenção avaliativa aplicativa tem como finalidade a resolução de problemas de aplicação, no qual o aluno tem que ser capaz de mobilizar conhecimento associado a propriedade operacionais do objeto matemático envolvido no problema.

Cabral (2017) criou duas modalidades para materializar a Intervenção Inicial, que foram a Exploração Potencial (I_i-EP) e a Conexão Pontual (I_i-CP). O autor explica que a modalidade Exploração Potencial é iniciar uma Sequência Didática a partir de uma situação-problema, um jogo, um quebra-cabeça, ou até mesmo desafios de natureza aritmética, algébrica e geométrica.

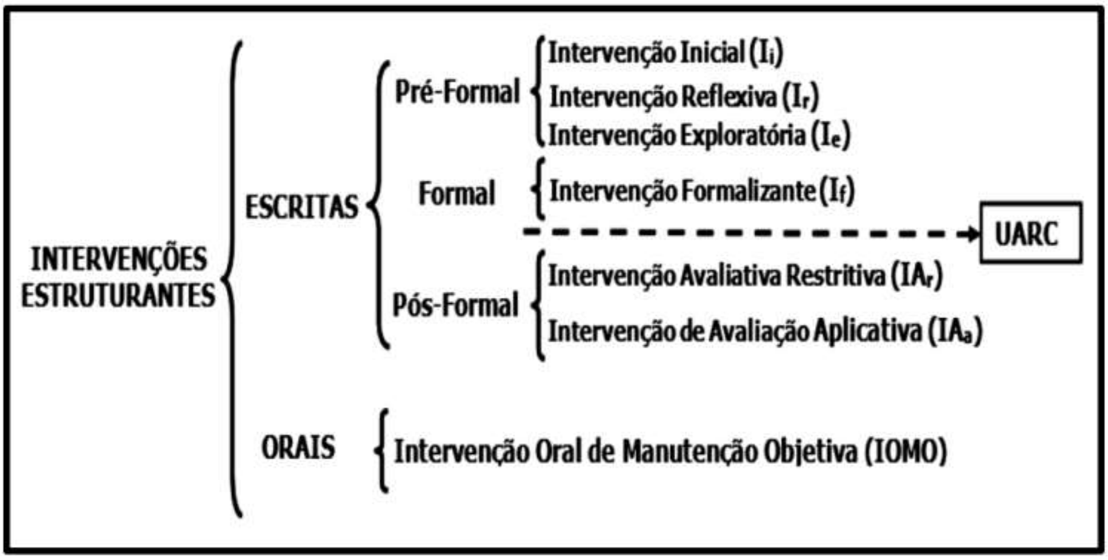
Segundo Cabral (2017) a modalidade Conexão Pontual é um conjunto finito de comandos procedimentais pontuais interligados como um elo de uma corrente, sendo que cada procedimento operacional solicitado ao aluno deve estar ligado ao procedimento anterior e essas ações pontuais conectadas se potencializam.

De acordo com Cabral (2017) além das seis categorias de intervenções escritas existe uma sétima intervenção de natureza oral denominada Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (I-OMO) cuja intenção é manter o foco da reconstrução pretendida pela Sequência Didática e a objetividade planejada.

A Sequência Didática vai ser um instrumento que vai provocar o aluno, e essa provocação ocorre pelas intervenções estruturantes que surgem na forma escrita na Sequência Didática, e um tipo de intervenção que não é visível, denominado de Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (I-OMO), com isso vai ocorrer um envolvimento do aluno no processo de ensino e aprendizagem, acontecendo um “toque de bola comunicativo” entre professor-aluno. (Cabral, 2017)

Conforme o autor essas sete categorias, sendo seis escritas e uma oral, são suficientes para consolidar uma estrutura funcional mínima para as sequencias didáticas voltada para o ensino de matemática, sendo que as seis intervenções escritas são classificadas em pré-formais, formais e pós-formais.

Figura 1: Intervenções Estruturantes para uma sequência didática



Fonte: Cabral (2017, p. 97).

Portanto, caso se queira aprofundar um pouco mais sobre sequência didática e as Uarc´s, pode ser feita uma leitura da dissertação que gerou esse produto educacional, sendo assim já compreendido o que vem ser uma sequência didática e as Uarc´s, a seguir são apresentado o teste de conhecimentos básicos e a Oficina de conhecimento necessários, que são etapas que antecedem a Sequência Didática.

4.1. TESTE DE CONHECIMENTOS BÁSICOS

Nesse subcapitulo é detalhado os procedimentos e objetivos do teste de verificação de conhecimentos básicos, que são necessários para que o aluno possa adquirir os novos conhecimentos que se pretende ensinar sobre o Conceito de Função Periódica.

Para que se possa obter um excelente aproveitamento no processor de ensino-aprendizagem na aplicação da Sequência Didática, alguns conhecimentos básicos são essenciais serem verificados, como os conteúdos relacionados as funções, como a ideia de domínio, imagem e valor numérico das funções polinomiais do 1° e 2° grau, coordenadas cartesianas e montar a partir do gráfico fornecido na questão o modelo matemático que representa o gráfico.

O professor deve partir do conhecimento prévio do aluno, sendo que na aplicação de determinada atividade ordenada e bem planejada, ou seja, aplicação de uma Sequência Didática, o conhecimento que o aluno já traz com ele vai influenciar esse estudante em qual caminho irá toma e fará suposições para resolver determinada atividade da sequência.

Como o aluno já traz um conhecimento consigo, quando este aluno for desenvolver as atividades que serão propostas a ele, o aluno, para tentar validar o pensamento que estar utilizando para resolver determinada atividade, de alguma forma vai interagir com os colegas de sala e com o professor.

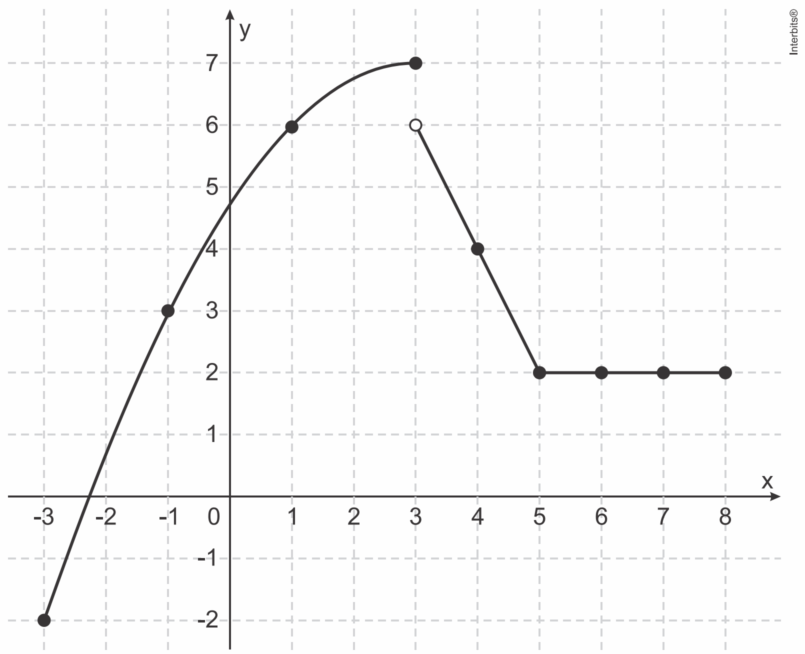
Por tanto, é sugerido aos docentes que forem utilizar esse Produto Educacional verificar antecipadamente se os alunos conhecem os conteúdos básicos necessários para um bom desempenho na Sequência Didática.

O teste de verificação consiste em 10 questões que tem como intenção averiguar os conteúdos prévios que aluno precisa conhecer como, as noções de função, domínio, imagem, valor numérico das funções polinomial do 1º e 2º grau, gráfico cartesiano, e montagem do modelo matemático por meio da análise de gráfico.

A seguir apresento as atividades do teste que pode ser impresso como uma folha de atividade.

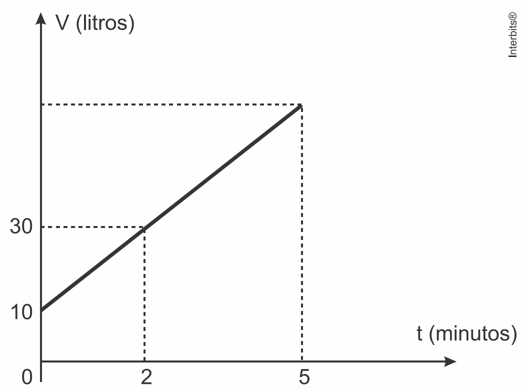
ATIVIDADE

1. (Ufjf-pism 1 2019) No plano cartesiano abaixo está representado o gráfico da função $f:[-3, 8] \rightarrow [-2, 7]$, no qual os pontos pretos destacados são os pontos em que o gráfico passa sobre os cruzamentos da malha.



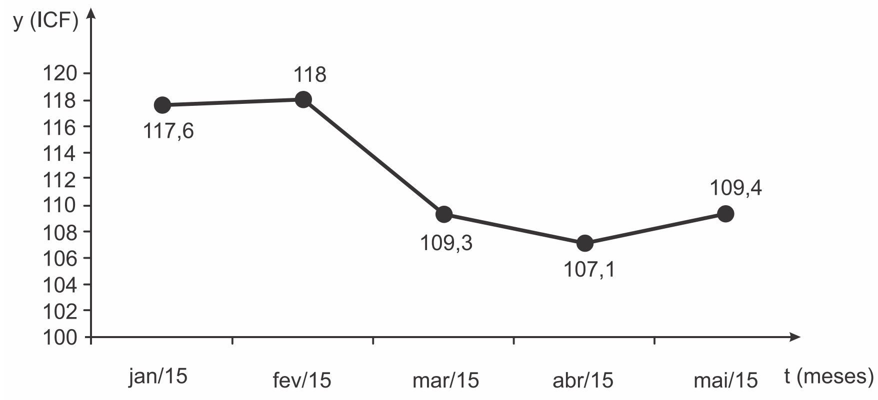
Seja $k = f(-3) + f(-1) + f(3) - f(4) + f(5)$. O valor de x para o qual $f(x) = k$ é

2. (G1 - cftrj 2016) Uma pequena piscina de plástico estava com 10 litros de água. Num dado instante, abriu-se uma torneira e, em 5 minutos, a piscina atingiu a sua capacidade máxima. Suponha que a água que alimentou a piscina manteve uma vazão constante durante todo o tempo. A figura abaixo fornece, pelo segmento de reta, o gráfico que representa o volume (em litros) de água na piscina em função do tempo (em minutos).



Com base nessas informações, determine a capacidade máxima da piscina em litros.

3. (G1 - cftmg 2016) O gráfico abaixo mostra a Intenção de Consumo das Famílias (ICF) de Janeiro a Maio de 2015.



Disponível em: <http://www.dm.com.br/economia/2015/05/comercio-esperafaturar-mais-no-mes-dos-namorados-revela-presidente-da-fecomercio.html>
(Adaptado. Acesso em: 28 ago. 2015.)

Se este gráfico representa uma função f que mostra o valor da ICF em função do tempo, de janeiro a maio, então seu conjunto imagem é

---

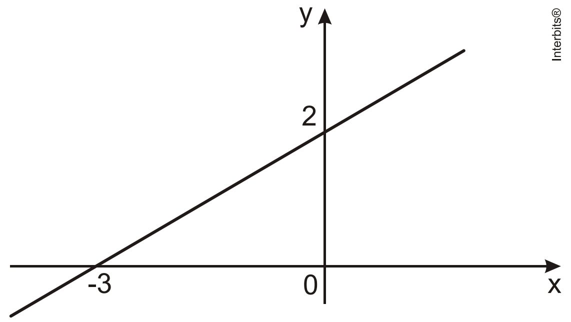
4. (Pucrj 2017) Considere a função real da forma $f(x) = ax + b.$ Sabendo que $f(1) = -1$ e $f(0) = 2,$ qual é o valor do produto $a \cdot b$?

---

5. (G1 - ifal 2016) Os pontos de um plano cartesiano de coordenadas $(2, 2)$ e $(4, -2)$ pertencem ao gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$ definida por $f(x) = ax + b.$ Qual o valor de $a + b$?

---

6. Considere a função real f(x), cujo gráfico está representado na figura, e a função real g(x), definida por $g(x) = f(x - 1) + 1.$



O valor de $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ é

____

____

7. (Eear 2019) Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + 1.$ Se $f(1) = 0$ e $f(-1) = 6,$ então o valor de a é

____

____

8. (Unicamp 2019) Sabendo que c é um número real, considere a função quadrática $f(x) = 2x^2 - 3x + c,$ definida para todo número real $x.$ .Determine todos os valores de c para os quais $f(-1)f(1) = f(-1) + f(1).$

____

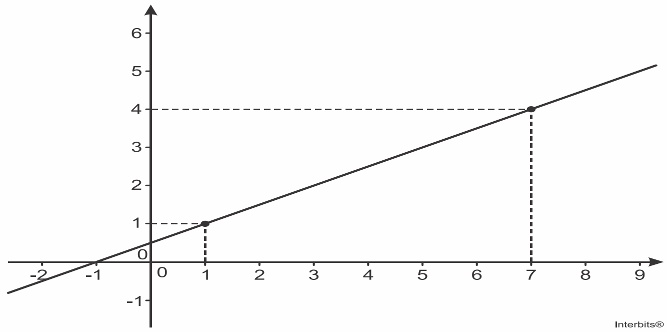
____

9. (G1 - ifsul 2015) Seja $f(x) = 2x^2 - 2x + 2$ uma função real de variável real.
Um valor da variável independente para a qual a variável dependente assume o valor dois, é

____

____

10. (G1 - ifsul 2017) Uma função do 1º grau $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui o gráfico abaixo.



A lei da função f é

____

____

Feito a aplicação do teste de conhecimento básico, o docente precisa fazer uma análise para saber o rendimento dos alunos, para saber qual será a próxima etapa a ser cumprida, caso os alunos venham a ter um bom rendimento, a próxima etapa é aplicação da Sequência Didática para o Ensino de Função Periódica, caso contrário é importante realizar uma oficina de conhecimentos necessários para a Sequência Didática, sendo tal oficina descrita a seguir.

4.2. OFICINA DE CONHECIMENTOS NECESSÁRIOS.

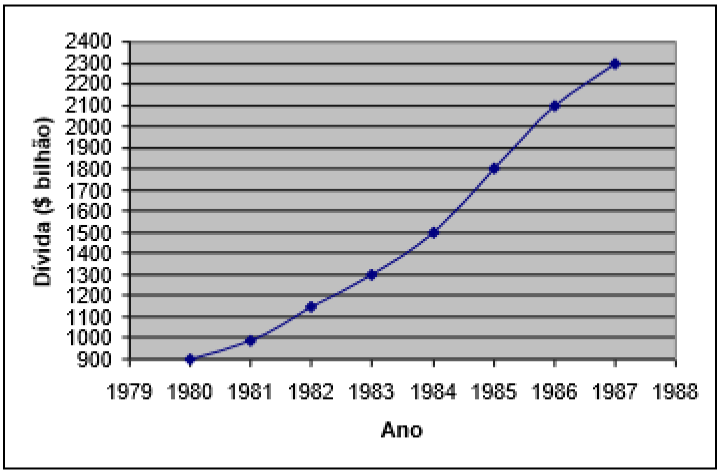
A Oficina de conhecimentos necessários, é um momento de nivelamento que o professor vai promover em sala de aula, que só se faz necessário apenas no caso de baixo rendimento dos alunos no teste de verificação de conhecimentos básicos

Nesta Oficina foram propostas 8 atividades em que se pretende que os estudantes adquiram conhecimento acerca das noções de função, domínio, imagem, gráfico cartesiano, valor numérico da função polinomial do 1º e 2º grau.

Em seguida apresento as atividades para a oficina, sendo sugerido ao professor revisar o conteúdo matemático de forma teórica e em seguida resolver as atividades da oficina.

ATIVIDADE

1. A dívida pública dos EUA (em bilhões de dólares) para alguns anos encontra-se no gráfico abaixo



Determine:

a) Variáveis envolvidas

R:____

b) Variável dependente

R:____

c) Variável independente

R:____

d) Domínio da função

R:____

e) Conjunto imagem

R:____

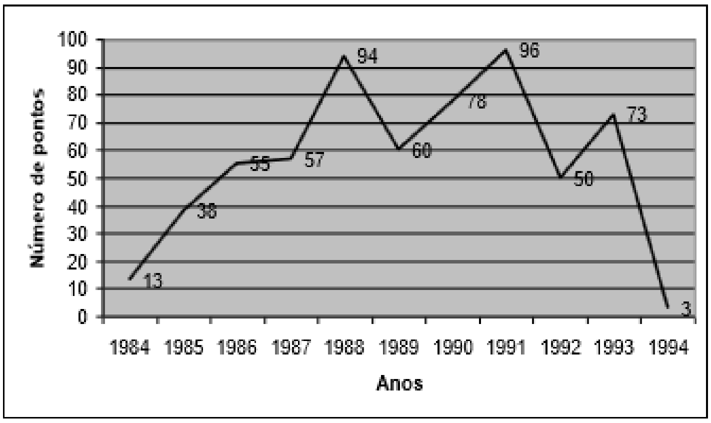
f) A variação da dívida entre os anos de 1985 e 1987.

R:____

g) A dívida permaneceu constante em algum período?

R:____

2. O gráfico a seguir mostra a quantidade de pontos obtidos por Ayrton Senna na fórmula 1



Determine:

a) Variáveis envolvidas

R:____

b) Variável dependente

R:____

c) Variável independente

R:____

d) Domínio da função

R:____

e) Conjunto imagem

R:____

f) Quando foi obtido o maior número de pontos?

R:____

g) E o menor número de pontos?

R:____

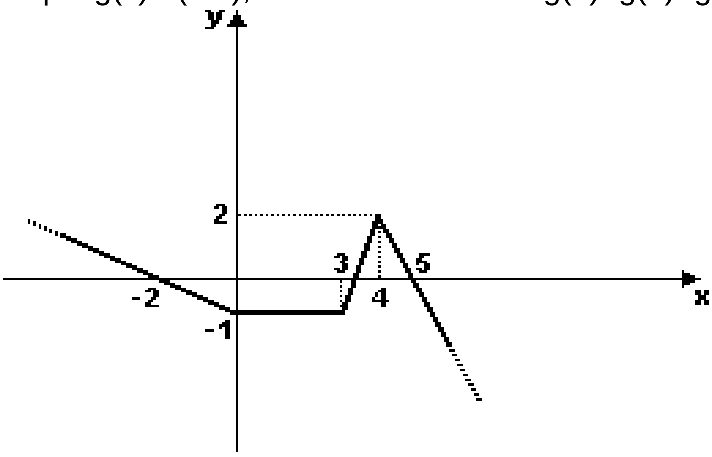
h) Em qual intervalo de tempo houve aumento no número de pontos?

R:____

i) Em qual intervalo de tempo houve redução no número de pontos?

R:____

3. (Ufu 2001) A figura a seguir representa o gráfico de uma função real a valores reais, y=f(x). Sabendo-se que g(x)=f(x-3), encontre o valor de g(1)+g(4)+g(10).

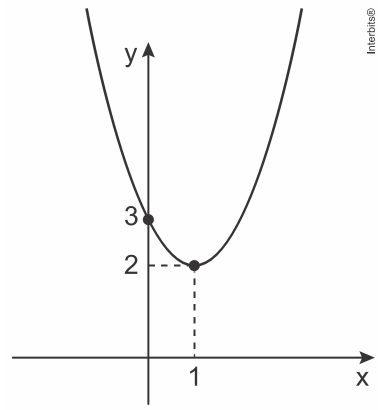


4. (Pucpr 2015) Seja a uma função afim $f(x),$ cuja forma é $f(x)=ax+b,$ com a e b números reais. Se $f(-3)=3$ e $f(3)=-1,$ os valores de a e $b,$ são respectivamente:

5. (G1 - cftmg 2005) A função f: IR → IR é definida por f(x) = ax - b. Se f(-2) = - 7 e f(1) = 2, então a^2 - b^2 é igual a

6. (Mackenzie 2018) Se $f(x)=ax^2+bx+c$ é tal que $f(2)=8, f(3)=15$ e $f(4)=26,$ então $a+b+c$ é igual a

7. (Espm 2018) O gráfico abaixo representa uma função quadrática $y=f(x).$



O valor de $f(-6)$ é:

___

___

8. (Eear 2016) Na função $f(x) = mx - 2(m - n)$, m e $n \in \mathbb{R}$. Sabendo que $f(3) = 4$ e $f(2) = -2$, os valores de m e n são, respectivamente

___

___

___

Após a realização da oficina a próxima etapa é a aplicação da Sequência Didática para o Ensino de Função Periódica, que é descrita de maneira detalhada a seguir.

4.3. SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO PERIÓDICA.

Nesse subcapitulo é descrito a Sequência Didática para o Ensino de Função Periódica no 2º ano do Ensino Médio. Sendo que a Sequência Didática foi desenvolvida para o ensino do Conceito de Função Periódica.

O desenvolvimento desse produto educacional é resultado de longas pesquisas e aprofundamento do conteúdo Matemático, e com a base dos aportes teóricos, metodológicos e revisão da literatura, com isso a seguir descrevo as Uarc's que compõem a Sequência Didática.

UARC 1

A UARC 1 tem como tópico a abordagem de fenômenos periódicos e não periódicos, tenho por objetivo nesta atividade conceituar estes fenômenos aos alunos. Os materiais utilizados foram lápis, caneta e o roteiro da sequência didática. A modalidade utilizada para o início desta UARC é o tipo conexão pontual.

$[I_i - CP]$. Analise cada fenômeno e determine-os quanto ao seu período de repetição.

SITUAÇÃO (Fenômeno)	Repete em intervalo de tempo aproximadamente igual?	
	SIM	NÃO
Seu aniversario		
Batimento cardíaco		
Passagem do cometa Harlley		
O movimento de translação (aquele que a Terra realiza ao redor do Sol)		
O ponteiro dos segundos de um relógio		
O movimento de rotação da Terra (Dia e Noite)		
Ciclo menstrual		
Maré (Maré alta e Maré baixa)		
A entrega de cartas pelo carteiro		
Férias escolares		
O valor da conta de energia a cada mês		
A ocorrência de chuva no dia a dia		
As 4 estações do ano (Verão, Inverno, Outono e Primavera)		

$[I_r]$. Dentre os fenômenos observado na tabela há àqueles possuem um mesmo intervalo de tempo para realizar-se? Cite exemplos com base na tabela.

____

____

____

$[I_f]$Se um fenômeno mantém um padrão temporal de repetição então este é chamado de fenômeno periódico.

$[IA_a]$. Observe os fenômenos a seguir e classifique estes como periódico ou não periódico.

Fenômeno	**Classificação**
Ciclo menstrual	
Maré (Maré alta e Maré baixa)	
O valor da conta de energia a cada mês	
O movimento de rotação da Terra (Dia e Noite)	
A entrega de cartas pelo carteiro	

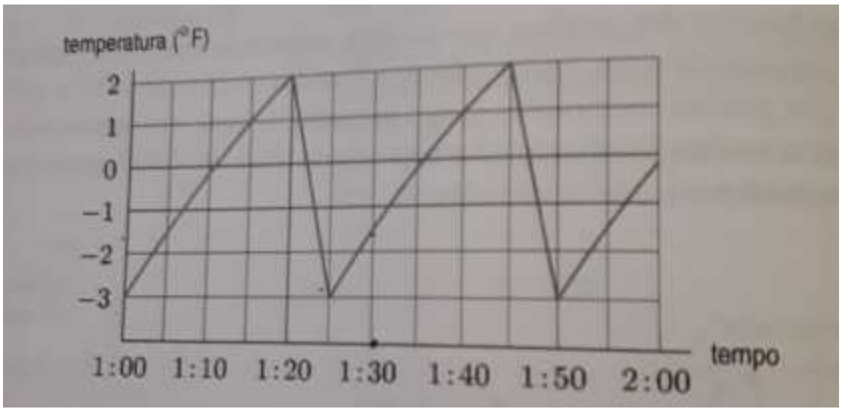
UARC 2

A UARC 2 tem como tópico o período de fenômenos periódicos, tive como objetivo nesta atividade trabalhar o conceito de período. Os materiais utilizados foram lápis, caneta e o roteiro da sequência didática e para início foi utilizado o modelo de conexão pontual.

$[I_i - CP]$. O quadro a seguir apresenta os fenômenos periódicos descritos na atividade anterior. Identifique em cada fenômeno o intervalo de repetição.

Fenômeno	**Intervalo de repetição**
Seu aniversario	
Férias escolares	
O ponteiro dos segundos de um relógio	
Passagem do cometa Harlley	
O movimento de translação é aquele que a Terra realiza ao redor do Sol	

$[I_r]$. A figura a seguir mostra um fenômeno periódico da variação da temperatura dentro de um congelador fechado, com a temperatura em Fahrenheit (ºF) e a o tempo em minutos (min).



Analisando o gráfico no eixo referente ao tempo, quanto vale (em minutos) a distância entre cada lado do quadrado?

____

____

$[I_e]$. Agora complete o quadro identificando o horário localizado entre:

Tempos	$1:00$ min $1:10$	$1:10$ $1:20$	$1:20$ $1:30$	$1:30$ $1:40$	$1:40$ $1:50$	$1:50$ $2:00$
Horário						

$[I_e]$. Identifique a temperatura nos horários descritos a seguir.

Horário	**Temperatura**
$1:00$ min	
$1:25$ min	
$1:50$ min	

$[I_r]$. O que você observa em relação ao comportamento do gráfico entre os horários descritos?

____

____

$[I_r]$. Você consegue perceber alguma outra repetição envolvendo tempo e Temperatura?

$[I_r]$. De quanto em quanto tempo o comportamento do gráfico se repete?

___

$[I_f]$. Em um fenômeno periódico, o intervalo requerido para se completar um ciclo é chamado de período. Em matemática considera-se período como o menor valor para completar o ciclo de repetição.

$[IA_a]$. Analise o quadro a seguir que descreve a posição (S) de um móvel, em metros, em função do tempo t, em minutos num circuito fechado e em seguida complete a tabela.

t (min)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18						
S (t)	0	5	10	15	20	0	5	10	15	20						

Qual o período para que o móvel retorne a sua posição inicial (0 metros)?

___

___

UARC 3

A UARC 3 tem como tópico a função periódica, tive como objetivo nesta atividade trabalhar o conceito de função periódica. Os materiais utilizados foram lápis, caneta e o roteiro da sequência didática e para início utilizei o modelo de conexão pontual.

$[I_i - CP]$. Analise o quadro a seguir que descreve uma função $F(t) \rightarrow t$ em seguida complete-o.

t	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70					
f(t)	1,8	1,4	1,7	2,3	2,0	1,8	1,4	1,7	2,3	2,0	1,8					

$[I_r]$. Qual o período que você observou?

___

$[I_e]$. Determine o valor de f(20)?

$[I_e]$. Determine o valor de f(45)?

$[I_e]$. Determine o valor de f(70)?

$[I_e]$. Apresente uma relação envolvendo o f(20) ; f(45) ; f(70).

$[I_r]$. De que forma podemos escrever $f(45)$ a partir do período identificado?

$[I_r]$. De que forma podemos escrever $f(70)$ a partir do período identificado?

$[I_e]$. Determine o valor de $f(25)$?

$[I_e]$ Determine o valor de $f(50)$?

$[I_e]$Determine o valor de $f(75)$?

$[I_e]$Apresente uma relação envolvendo o f(25) ; f(50) ; f(75).

$[I_r]$De que forma podemos escrever $f(50)$ a partir do período identificado?

$[I_r]$ De que forma podemos escrever $f(75)$ a partir do período identificado?

$[I_f]$. Uma função f de domínio $A \subset \mathbb{R}$ se diz periódica se existe um real T não nulo, tal que $f(x+T) = f(x)\ \forall\ x \in A$. Em que o período da função periódica f é o menor T positivo que satisfaz a condição acima.

$[IA_r]$. Analise a função f(x) descrita no quadro a seguir

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
f(x)	5	0	-5	0	5	0	-5	0	5	0	-5	0	5	0

$[I_r]$. Qual o período que você observou?

$[I_e]$. Determine o valor de f(0)?

$[I_e]$. Determine o valor de f(8)?

$[I_e]$. Determine o valor de f(16)?

$[I_e]$. Apresente uma relação envolvendo o f(0) ; f(8) ; f(16).

$[I_r]$. De que forma podemos escrever $f(8)$ a partir do período identificado?

$[I_r]$. De que forma podemos escrever $f(16)$ a partir do período identificado?

$[I_e]$. Determine o valor de $f(2)$?

$[I_e]$ Determine o valor de $f(10)$?

$[I_e]$Determine o valor de $f(18)$?

$[I_e]$Apresente uma relação envolvendo o f(2) ; f(10) ; f(18).

$[I_r]$De que forma podemos escrever $f(10)$ a partir do período identificado?

$[I_r]$ De que forma podemos escrever $f(18)$ a partir do período identificado?

É importante o leitor notar que as siglas ao lado de cada atividade, são as que compõem a estrutura proposta por Cabral(2017) para criar uma Sequência didática nos moldes da Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual(Uarc´s), ainda é importante notar que no texto das Uarc's mantive em destaque o texto referente ao momento de formalização$[I_f]$ do professor, que é para o docente saber em qual momento pode fazer a formalização do conhecimento$[I_f]$,e que após a formalização do conhecimento matemático o aluno pode resolver a atividade referente a Intervenção Avaliativa Aplicativa$[IA_r]$ que compõem cada Uarc, e vale ressalta a importância do aprofundamento Matemático pelo docente que pode ser feito no capitulo a seguir.

5. CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

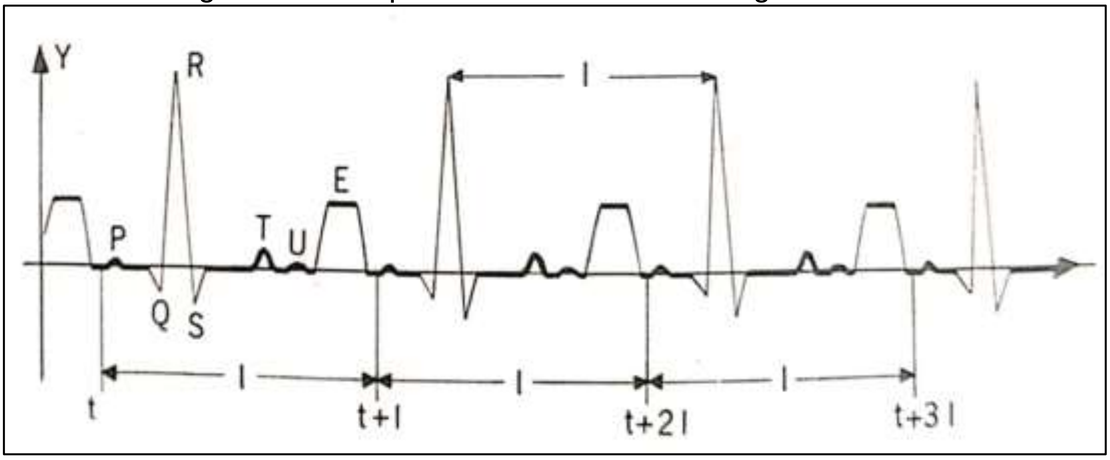
Nesse Capítulo apresento o conteúdo matemático relacionado com a Função Periódica, destacando definições, propriedades e demonstrações, para isso temos como apoio o trabalho do grupo de pesquisa de Lisboa, Aubyn et al (2004), o livro de Batschelet (1978) e de Lima (2006).

Para se ter uma boa compreensão do tema, importante entender os fenômenos periódicos, que são bastante comuns no dia a dia. De acordo com Batschelet (1978) a Matemática possui ferramentas que são requeridas para estudar alguns fenômenos, como por exemplo, os ritmos biológicos, e os mais conhecidos são as variações estacionais, menstruação, ciclos diários, respiração e batimentos cardíacos.

É típico dos ritmos que haja repetição do mesmo, ou quase o mesmo padrão de ciclo para ciclo, fenômenos deste tipo são também chamados periódicos. (BATSCHELET 1978, pg 101).

O eletrocardiograma real, explica Batschelet (1978), apesar de não ser exatamente periódico, mais mostra um comportamento bem próximo dos fenômenos periódicos, a figura 4 mostra esse comportamento idealizado do eletrocardiograma, sendo que a curva se repete em intervalos de tempo consecutivos e de igual comprimento.

Figura 1: O Esquema de um Eletrocardiograma



Fonte: Batschelet (1978, pg 101)

O intervalo constante é chamado de período, sendo representado por l, a ideia de periodicidade traduz-se matematicamente pela constância dos valores para determinados intervalos (tempo), e na Matemática a palavra "período" ela é exclusivamente utilizada no sentido de um intervalo requerido para completar um ciclo. (BATSCHELET 1978, pg 101).

De acordo com Batschelet (1978, pg 101), a figura 3 que representa um eletrocardiograma com vários ciclos, e a curva pode ser interpretada como gráfico da função $y = f(t)$, com o tempo t como variável independente e a voltagem y plotada perpendicularmente ao eixo do tempo, sendo que essa Função Periódica é definida a seguir. Sendo que nos subcapítulos 5.1 e 5.1.1, utilizei o Artigo do grupo de pesquisa de Lisboa, Aubyn et al (2004, pg 53-55) para obter base teórica para desenvolver o texto a seguir.

5.1. DEFINIÇÃO GERAL

Uma função $f : R \rightarrow R$ é **periódica,** se existe um real não nulo α tal que $f(x + \alpha) = f(x)$ para todo $x \in R$. O menor número positivo α que satisfaz a relação à cima é denominado **período fundamental** da função f.

Voltando para a figura 4 que representa o esquema de um Eletrocardiograma, pode ser bem definida como uma Função Periódica da seguinte forma: seja t qualquer valor para o qual a função $y = f(t)$ é determinada, isto é, t pertence ao domínio da função. Seja l um número positivo constante. Suponhamos que $t + l$, $t + 2l$, $t + 3l$........ também pertençam ao domínio. Os valores de y nesses pontos do eixo t são dados por $f(t)$, $f(t + l)$, $f(t + 2l)$ etc. Então a função $y = f(t)$ é chamada de Função

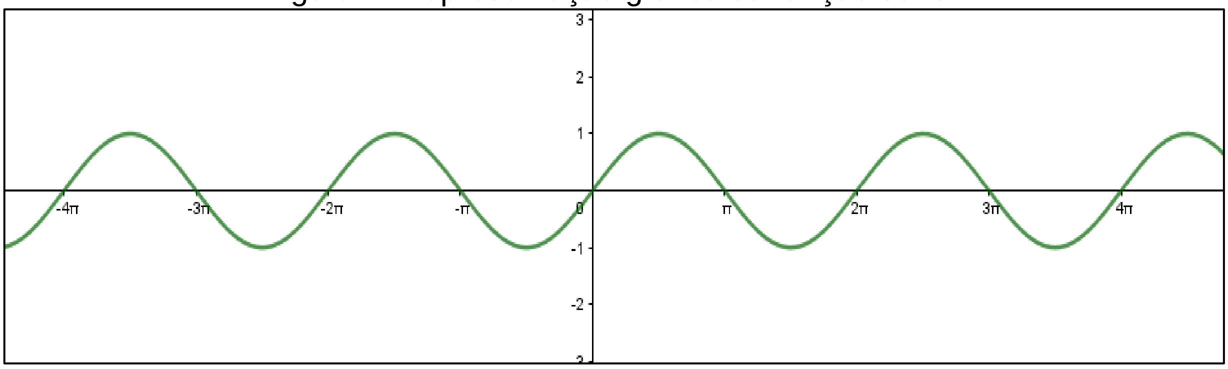
Periódica com período l se $f(t) = f(t + l) = f(t + 2l) = \cdots$., for valido para todos os valores possíveis de t.

5.1.1. Função Periódica- Trigonométrica e Não-Trigonométrica

Para aprofundar sobre a definição de Função Periódica, exemplifico dois casos – um trigonométrico e outro não-trigonométrico. No primeiro caso: seja $f : R \rightarrow R$ definiremos f por $f(x) = senx$. Isso significa dizer que para valor de x pertencente ao domínio (D) da função f, temos um valor correspondente $f(x)$ pertencente à imagem (Im) de f.

Nesse caso, Df (leia-se domínio de f) é o conjunto dos reais (R) e a Imf (leia-se imagem de f) pertence ao intervalo $[-1,1]$. Assim, a figura 5 é a representação gráfica da Função Seno.

Figura 2: Representação gráfica da função seno



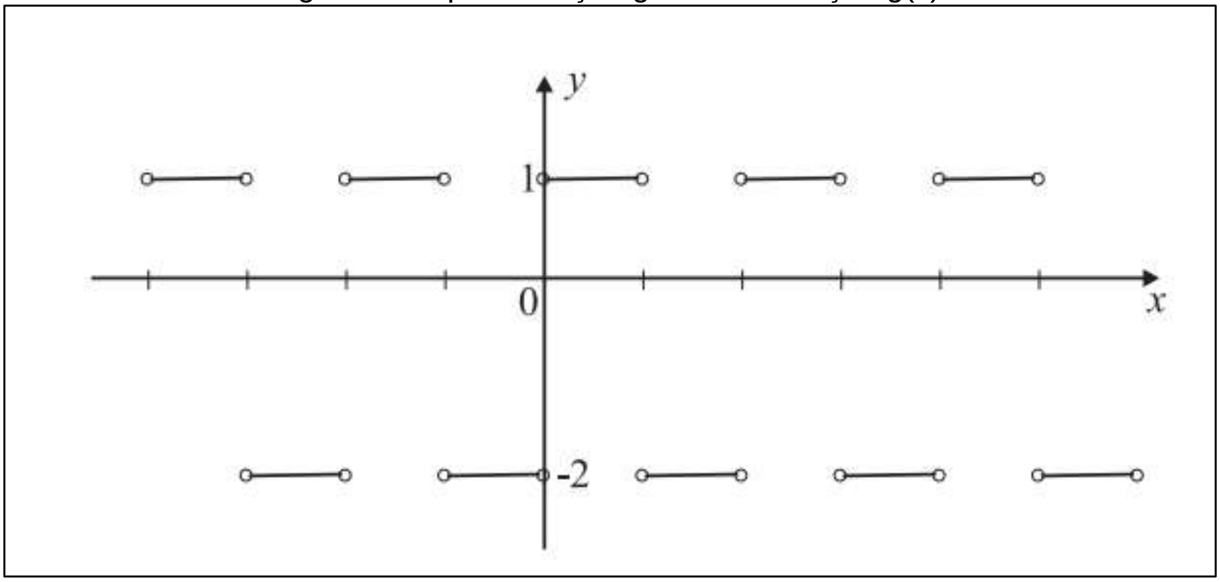
Fonte: Autor (2022)

No segundo caso, temos uma função na qual os números inteiros não pertencem ao seu domínio. Isto é, seja $g : R \setminus Z \rightarrow R$, definiremos g por

$$g(x) = \begin{cases} 1 \; se \; \exists \text{p} \in \text{Z tal que x} \in]2\text{p}; 2\text{p} + 1[\\ -2 \; se \; \exists \text{p} \in \text{Z tal que x} \in]2\text{p} + 1{,}2\text{p} + 2[\end{cases}$$

Observe que a Img oscila entre 1 e -2 a depender de x. Se o menor valor inteiro de x é par, então $Img = 1$. Da mesma forma, se o menor valor inteiro de x é ímpar, então $Img = -2$. Assim, as representações algébricas e gráfica de g são dadas a seguir.

Figura 3: Representação gráfica da função g(x)



Fonte: Aubyn et al. (2004, pg 55).

Do ponto de vista intuitivo e de forma muito pouco rigorosa, diríamos que o gráfico $f(x)$ se repete de 2π em 2π, e o gráfico $g(x)$ se repete de 2 unidades em 2 unidades.

Observe que em ambos os casos, as funções f e g têm um comportamento repetitivo. Isto é, a cada subintervalo específico do domínio (D) das funções, suas Im apresentam os mesmos valores.

No primeiro caso, para cada valor de $x \in Df$, um intervalo absoluto de 2π é necessário para que f tenha a mesma imagem. Matematicamente, temos $\forall x \in Df$ $f(x) = f(x + 2\pi) = f(x - 2\pi)$

No segundo caso, para cada valor $x \in Dg$, um intervalo absoluto de 2 é necessário para que g tenha a mesma imagem. Matematicamente, temos $\forall x \in Dg$ $g(x) = g(x + 2) = g(x - 2)$.

Em ambos os casos, tomando $\alpha = 2\pi$ e $\beta = 2$, temos que α e β são, respectivamente, os períodos de f e g. Assim, ambas as seguintes condições devem ser satisfeitas

$$(\forall x \in Df \Rightarrow x + \alpha \in Df) \quad \wedge \quad (\forall x \in Df \Rightarrow x - \alpha \in Df) \qquad (1)$$

$$(\forall x \in Dg \Rightarrow x + \beta \in Dg) \quad \wedge \quad (\forall x \in Dg \Rightarrow x - \beta \in Dg) \qquad (2)$$

Satisfazendo (1) e (2) é equivalente dizer que

$$\forall x \in Df \qquad f(x) = f(x + \alpha) \qquad (3)$$

$$\forall x \in Df \qquad f(x) = f(x - \alpha) \qquad (4)$$

Ainda,

$$\forall x \in Dg \qquad f(x) = f(x + \beta) \qquad (5)$$

$$\forall x \in Dg \qquad f(x) = f(x - \beta) \qquad (6)$$

As proposições (3) e (5) nos dizem que f e g são periódicas com período α e β, respectivamente. De forma análoga, de acordo com (4) e (6), f e g são periódicas com período $-\alpha$ e $-\beta$, respectivamente. Portanto, $|\alpha|$ e $|\beta|$ são, respectivamente, os períodos de f e g. Essa análise nos permite associar o período de uma função sempre a um valor positivo.

Por fim, faço uma última análise. Observe que ambas as funções f e g se repetem após um determinado período, assim como todos os múltiplos desse período. Isto é, de forma geral, $\forall n \in N$, portanto $\forall x \in Df \Rightarrow x + \alpha \in Df \Rightarrow x + 2\alpha \in Df$ ... $\Rightarrow x + n\alpha \in Df$, sendo assim temos que $f(x) = f(x + \alpha) = f(x + 2\alpha) = \cdots = f(x + n\alpha)$.Ainda,$\forall x \in Dg \Rightarrow x + \beta \in Dg \Rightarrow x + 2\beta \in Dg$ ... $\Rightarrow x + n\beta \in Dg$,portanto temos que $f(x) = f(x + \beta) = f(x + 2\beta) = \cdots = f(x + n\beta)$

Logo, seja $f : R \to R$, f é dita periódica com período $\alpha > 0$ se, e somente se, $\forall n \in N$., portanto $\forall x \in R \quad f(x) = f(x + \alpha) = f(x + n\alpha)$.

De antemão temos bem fundamentada a definição de Função Periódica e é importante também para termos um aporte teórico bem aprofundado conhecendo as propriedades por traz dessas Funções.

5.2. PROPRIEDADES

Apresento algumas propriedades envolvendo o período das Funções Periódicas, para que obter um conhecimento teórico aprofundado do objeto matemático estudado, e com isso mantenho como base teórica o texto desenvolvido por Aubyn et al (2004)

5.2.1. Uma função periódica não possui um único período.

De acordo com Aubyn et al (2004), seja $f : R \to R$ periódica com período $\alpha > 0$. Então, por definição, temos que $\forall x \in R$, $f(x) = f(x + \alpha)$. Como $x \in R$, então $(x + \alpha) \in R$. Logo, $\forall x \in R$, sendo assim temos $f(x) = f(x + \alpha) = f\big((x + \alpha) + \alpha\big) = f(x + 2\alpha)$.

Como $(x + \alpha) \in R$, então $(x + 2\alpha) \in R$. Logo, $\forall x \in R$ podemos obter $f(x) = f(x + 2\alpha) = f\big((x + 2\alpha) + \alpha\big) = f(x + 3\alpha)$.

Portanto, por indução matemática, $\forall n \in N$, $(x + n\alpha) \in R$, o que nos permite concluir que $\forall x \in R$,$f(x) = f(x + n\alpha)$.

Perceba que, por essa definição, uma função periódica não apresenta um único período, mas um conjunto de períodos dos quais existe um período (α), seguido de seus múltiplos ($n\alpha$). Assim, definiremos o menor desses elementos (α) como sendo o *período principal*, que é *único*.

5.2.2. Toda função periódica tem período $\alpha \neq 0$.

Para Aubyn et al (2004) seja $f : R \to R$ periódica com período $\alpha = 0$. Então, por definição, $\forall n \in N$, temos $\forall x \in R$, $f(x) = f(x + n\alpha)$, com isso podemos fazer uma substituição na função $f(x)$ no qual o $\alpha = 0.$, logo temos $f(x) = f(x + n\alpha) \ = f(x + nO) \ = f(x + O) \ = f(x)$

O que significa dizer que, quando $\alpha = 0$, toda função de variável real seria dita periódica. Nesse sentido, o estudo de funções periódicas seria irrelevante. Portanto, toda função periódica tem período $\alpha \neq 0$.

5.2.3. Toda função constante é uma função periódica $\forall \alpha > 0$ arbitrário.

Aubyn et al (2004) explica que a função constante intuitivamente ela é mais repetitiva do que qualquer outra função, mais mantendo o rigor matemático. Seja $f : R \to R$, uma função constante, e $c \in R$. Então, temos que $\forall x \in R$ segue que $f(x) = c$.

Agora, $\forall \alpha > 0$, temos que $\forall x \in R$, logo podemos obter $f(x) = c = f(x + \alpha) = f(x + n\alpha)$. Portanto, a função f é periódica $\forall \alpha > 0$ arbitrário, com período α.

Podemos também verificar que seja $f : R \to R$ uma função periódica com período arbitrário $\alpha > 0$. Por definição, temos que $\forall x \in R$ $f(x) = f(x + n\alpha) \Rightarrow f(0) = f(0 + n\alpha) = f(n\alpha)$

Por outro lado, se f tem período arbitrário $\alpha < 0$, então $\forall x \in R$,então obtemos $f(x) = f(x + (-n\alpha)) \ \Rightarrow f(0) = f(0 + (-n\alpha)) = f(-n\alpha) = f(n\alpha)$. Ainda, se $\alpha = 0$, então $\forall x \in R$ temos $f(x) = f(x + n\alpha) \ \Rightarrow \ f(0) = f(n\alpha)$.Portanto, a função f é constante e igual a $f(0)$.

5.2.4. Se α e β são períodos de f, então $|\alpha - \beta|$ também é um período de f

De acordo com Aubyn et al (2004) a função $f : R \rightarrow R$ é uma função periódica com períodos α e β e $0 < \beta < \alpha$. Por definição, temos $\forall x \in R$, $f(x) = f(x + \alpha)$, logo temos por (4) e (6), com isso obtemos $f(x) = f(x + \alpha) = f\big((x + \alpha) - \beta\big) = f(x + (\alpha - \beta))$.

Por outro lado, se $0 < \alpha < \beta$, então $\forall x \in R$, $f(x) = f(x + \beta)$, ainda por (4) e (6)) ,sendo assim podemos obter, $f(x) = f(x + \beta) = f\big((x + \beta) - \alpha\big) = f(x + (\beta - \alpha))$

Portanto, $|\alpha - \beta|$ também é um período de f.

5.3. ALGUNS CASOS DE FUNÇÃO PERIÓDICA

Neste subcapitulo, apresento alguns casos de funções periódicas trigonométricas e não trigonométricas, focando e aprofundando na definição de Função Periódica e no período dessas funções.

5.3.1. A Função de Euler

De acordo com Lima(2006) a função de Euler é uma função que gera as funções seno e cosseno, sendo que é uma forma natural de definir as funções trigonométricas, tomando como ponto de partida a função de Euler $E : R \rightarrow C$, sendo que o C denotamos com sendo a circunferência unitária com origem no plano cartesiano R^2 ,com isso podemos obter $C = \{(x, y) \in R^2; x^2 + y^2 = 1$.

Com isso Lima(2006) explica que para todo $(x, y) \in C$, tem-se um intervalo fechado em $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$, sendo assim temos se $E(t) = (x, y)$ no qual podemos adotar $x = \cos(t)$ e $y = \text{sen}(t)$, sendo respectivamente a abscissa e a ordenada do ponto $E(t)$ na circunferência unitária C ,que com isso temos $E(t) = (\cos(t), sen(t))$.

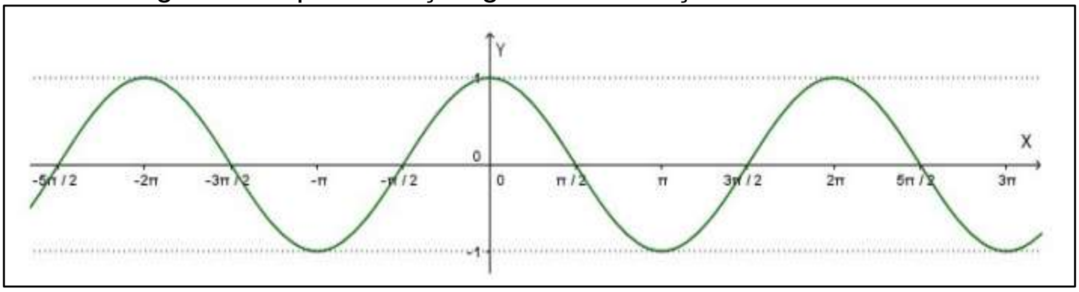
O autor deixa bem claro que a circunferência unitária C tem comprimento igual a 2π, sendo assim quando o ponto t descreve um intervalo de comprimento de 2π , sua imagem $E(t)$ dá uma volta completa sobre a circunferência unitária, retornando ao ponto de partida, descrevendo assim um padrão de repetição periódico, que podemos descrever da seguinte forma, para todo $k \in Z$ temos que $E(t + 2k\pi) = E(t)$ para todo $t \in R$.

Como a função de Euler é uma função periódica com período 2π ,e conforme Lima(2006) a função de Euler pode ser escrita forma $E(t) = E(t + 2\pi) = E(t - 2\pi)$, diante disso as funções seno e cosseno também são periódicas na forma $sen(t) = sen(t + 2k\pi)$ e $\cos(t) = \cos(t + 2k\pi)$, e que a partir delas podemos também obter as funções periódicas tangente, cotangente, secante e cossecante.

5.3.2 A Função Cosseno

Para Aubyn et al(2004) a função cosseno é definida da seguinte maneira, seja $g : R \rightarrow R$ denomina-se g de função cosseno para tal temos $g(x) = cosx$, no qual para cada número real x associa-se a um número $y = cosx$, isso significa dizer que para valor de x pertencente ao domínio (D) da função g, temos um valor correspondente $g(x)$ pertencente à imagem (Im) de g. Nesse caso, Dg (leia-se domínio de g) é o conjunto dos reais (R) e a Img (leia-se imagem de g) pertence ao intervalo $[-1,1]$,e que possui a seguinte representação gráfica.

Figura 4:Representação gráfica da função cosseno



Fonte: Autor (2022)

Pelo gráfico da função cosseno pode-se observar que se trata de função periódica, e seu período é 2π. Observe que a função $g(x)$ têm um comportamento repetitivo. Isto é, a cada subintervalo específico do domínio (D) da função cosseno, suas Im apresentam os mesmos valores.

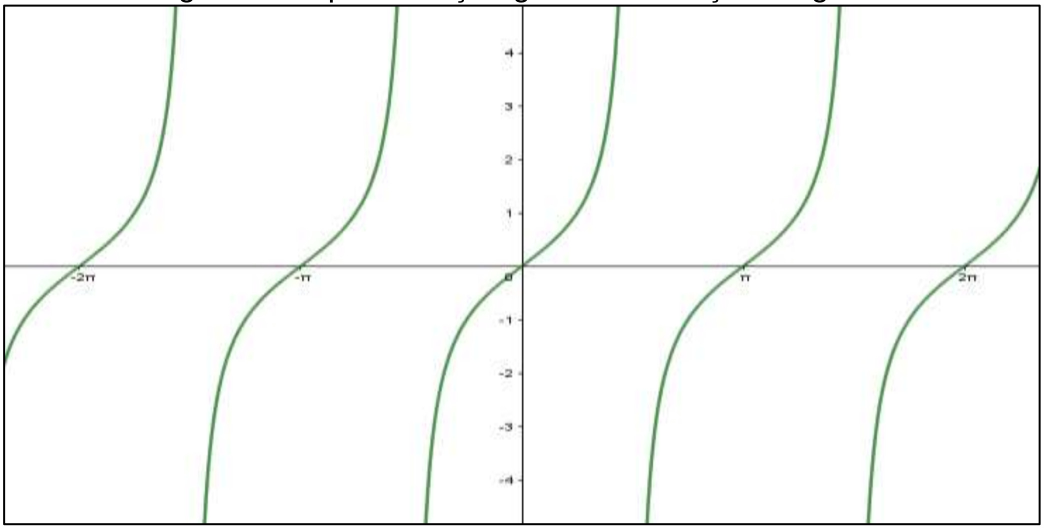
Na função cosseno, para cada valor de $x \in Dg$, um intervalo absoluto de 2π é necessário para que g tenha a mesma imagem. Matematicamente, temos $\forall x \in Dg$ $g(x) = g(x + 2\pi) = g(x - 2\pi)$, sendo assim podemos escrever para todo $k \in Z$ $cos(x) = cos(x + 2k\pi)$

5.3.3. A Função Tangente

Aubyn et al (2004) explica que a função tangente é uma função racional das funções seno e cossenos, tal que seja $t : Dt \rightarrow R$ $\quad Dt = \{x \in R \ tal \ que \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$

com $k \in Z$. Denominaremos t de função tangente, que possui as seguintes representações gráfica.

Figura 5: Representação gráfica da função tangente



Fonte: Autor (2022).

Daqui, sabe-se que 2π é o *período principal* das funções seno e cosseno. Com efeito, $\forall x \in Dt$ a Função Tangente $t(x) = \frac{senx}{cosx}$, obtemos $\forall x \in Dt$ o seguinte $t(x + 2\pi) = \frac{sen(x+2\pi)}{\cos(x+2\pi)} = \frac{senx}{cosx} = t(x)$.

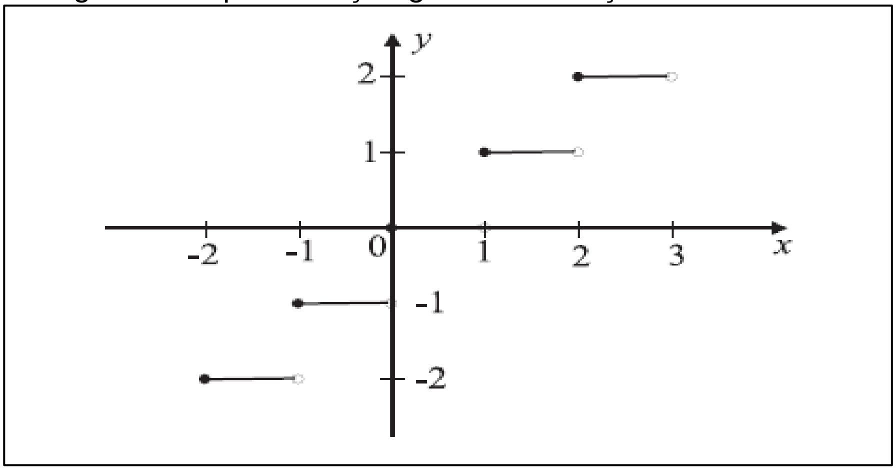
Logo, $t(x)$ é periódica e 2π é um de seus períodos. Mas será se 2π o *período principal* da Função Tangente $t(x)$.? Assim, analisaremos se π também é um período de $t(x)$. O gráfico sugere que a função $t(x)$, que é periódica, tenha um período igual a π , logo analiticamente tem-se que $x \in D$ o que implica $x + \pi \in D$ e $\forall x \in Dt$, temo que $t(x + \pi) = \frac{sen(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-senx}{-cosx} = \frac{senx}{cosx} = t(x)$.

Portanto, como π também é um período de t e ainda é o menor elemento do conjunto de períodos, então π é o *período principal* de t.

5.3.4. A Função Característica.

A Função Característica é uma função periódica não trigonométrica que Aubyn et al (2004) explica que, seja $C : R \rightarrow R$ uma função na qual sua imagem $C(x)$, para cada $x \in R$, é o maior inteiro menor que x. Denominaremos C de Função Característic*a*, que possui as seguintes representações gráfica.

Figura 6: Representação gráfica da função característica



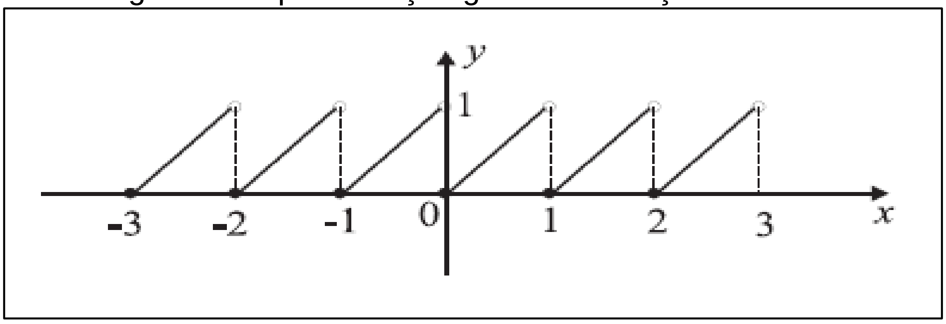
Fonte: Aubyn et al. (2004).

Do gráfico nota-se que C satisfaz a seguinte propriedade, que $\forall x \in R$ $C(x) = \{p \in Z \text{ tal que } p \leq x\}$, portanto da análise do gráfico conclui-se a definição da função característica é, $\forall x \in R$, $C(x+1) = 1 + C(x)$, no qual o período da função é 1.

5.3.5. A Função Mantissa.

Agora Aubyn et al (2004) mostra que a função ¥: $R \rightarrow R$ uma função na qual sua imagem $0 \leq ¥(x) < 1$, a depender de x e $C(x)$. Denominando ¥ de *Função Mantissa*, que possui as seguintes representações gráfica.

Figura 7: Representação gráfica da função Mantissa



Fonte: Aubyn et al. (2004).

Aubyn et al (2004) descreve a Função Mantissa da seguinte maneira, $\forall x \in R$, $¥(x) = x - C(x)$,observe que, para cada 1 unidade inteira é adicionada a cada x real de $¥(x)$, temos que $¥(x+1) = x + 1 - C(x+1) \Rightarrow ¥(x+1) = x + 1 - (1 + C(x)) = x - C(x) \Rightarrow ¥(x+1) = ¥(x)$.Portanto, a Função Mantissa é definida $¥(x+1) = ¥(x)$, no qual a função ¥ é uma função periódica com período igual a 1.

5.3.6. A Função de Dirichlet[1]

Uma outra função periódica não trigonométrica é destacada por Aubyn et al (2004), com isso, seja $D : R \to R$, definimos a função de Dirichlet da seguinte forma

$$\forall \mathrm{x} \in \mathrm{R} \qquad D(x) = \begin{cases} 0 & se \quad \mathrm{x} \in \mathrm{Q} \\ 1 & se\ x \in \mathrm{R} \backslash \mathrm{Q} \end{cases}$$

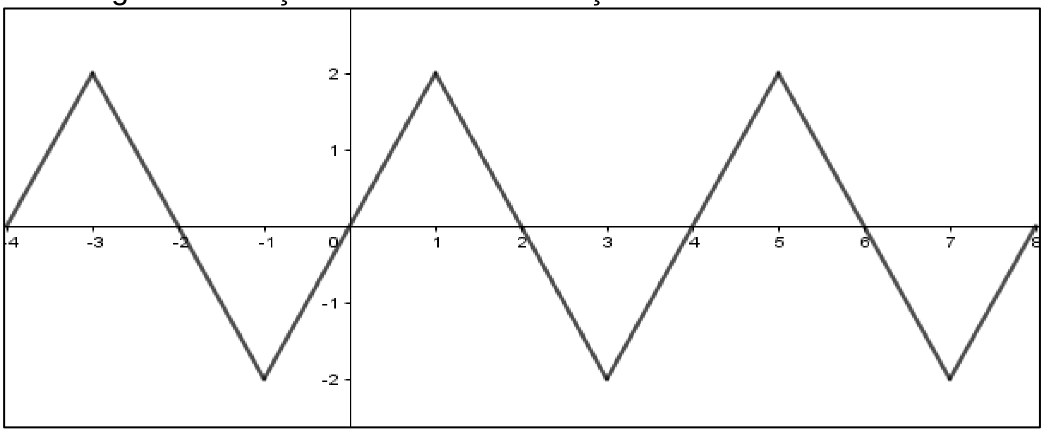
Tomando r racional positivo $(\mathrm{r} \in Q^{+})$ e sabendo que Q é fechado na adição, temos $\mathrm{x} \in \mathrm{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{x} + \mathrm{r} \in \mathrm{Q}$. De forma análoga, temos que $\mathrm{x} \in \mathrm{R} \backslash \mathrm{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{x} + \mathrm{r} \in \mathrm{R} \backslash \mathrm{Q}$. Logo, $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{R}$, $D(x) = D(x + r)$.

Portanto, $D(x)$ é uma Função Periódica com período igual a qualquer racional positivo r, ou seja, o conjunto Q^{+}.

5.3.7. Função com taxa de variação instantânea constante.

Uma função descrita por Aubyn et al (2004) é a função Taxa de Variação Instantânea Constante, seja $f : R \to R$ que é uma função com $Imf = [-2,2]$ e sua taxa de variação instantânea entre seus máximos e mínimos seja constante. A representação gráfica de f é dada a seguir.

Figura 8: Função com taxa de variação instantânea constante



Fonte: Aubyn et al. (2004).

Observe que a representação algébrica de f é desconhecida. No entanto, isso não nos impede de determinar o período de f. Por definição, sabemos que, $\forall x \in R$, se $f(x) = f(x + \alpha) = f(x + n\alpha)$, então f é periódica e α é o seu período $\forall n \in N$.

Agora, tome $x = -4$, temos que $f(-4) = 0$,e de forma análoga, $f(-2) = f(-4 + 2) = 0$ com isso temos que $f(0) = f(-4 + 4) = f(-4 + 2x2) = 0$, e assim concluímos que $f(2) = f(-4 + 6) = f(-4 + 3x2) = 0$.

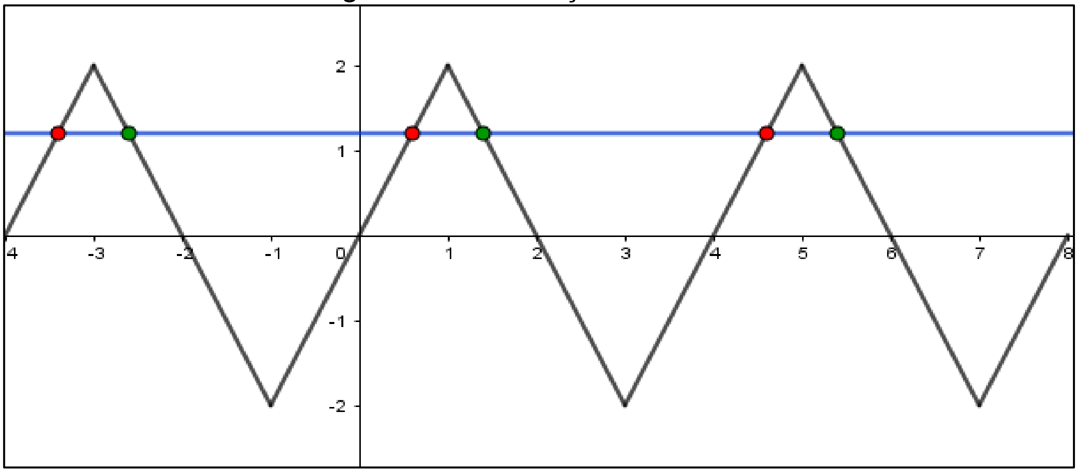
---

[1]. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (Düren, 13 de fevereiro de 1805 — Göttingen, 5 de maio de 1859) foi um matemático alemão.

Generalizando, temos que $f(p) = f(-4 + nx2) = 0$,sendo assim temos que $p = 2(n-2)\ \forall n \in N$,isso nos levaria a inferir que $\alpha = 2$ é um período de f.

No entanto, tomando $x =]-4, -2[$, podemos observar que $f(x)$ não admite o mesmo valor para cada intervalo de duas unidades ($\alpha = 2$) de seu domínio – basta traçar uma reta paralela (t) ao eixo OX e notar os pontos de intersecção de t com f. Logo, $\alpha = 2$ não é um período de f.

Figura 9: Intersecção de t com f



Fonte: Aubyn et al. (2004).

Agora, tomando $x = [-4, -2]$, podemos observar que f admite os mesmos valores a cada intervalo mínimo e constante de 4 unidades de seu domínio – note os pontos vermelhos e verdes de intersecção entre t e f na figura 10.

A análise é análoga para o intervalo $x =]-2{,}0[$. Logo, de forma geral, $\forall x \in R$, temos $f(x) = f(x+\alpha) = f(x+n\alpha)$, com $\alpha = 4\ \forall n \in N$, satisfazendo a definição de periodicidade. Portanto, conclui-se que f é periódica com período principal $\alpha = 4$.

Esse exemplo permite refletir que nem sempre teremos a nossa disposição a representação algébrica de uma função para que uma análise analítica seja feita, além disso, em muitos casos, não há ferramentas matemáticas para fazermos análise analíticas. Assim, é importante lembrar que, muitas vezes, uma interpretação gráfica é um recurso importante para o objeto matemático que nos propomos a analisar, e com esse aporte teórico do conteúdo matemático sobre Função Periódica obtemos base matemática para construção da Sequência didática desta pesquisa.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa pesquisa suje mediante a minha aceitação de um sorteio do tema de pesquisa sobre função periódica pelo programa pós-graduação em ensino de Matematica, até então com 12 anos de docência em escolas particulares sempre ensinei em turmas do 2º ano do Ensino Médio as funções trigonométricas seno e cosseno, mas nunca me atentei em ensinar o conceito de função periódica em minhas aulas, sendo que ainda como aluno meus professores ensinavam apenas as funções seno e cosseno.

Quando aceitei o desafio de desenvolver uma sequência didática para o ensino do conceito de função periódica, confesso que tiver bastante dificuldade em buscar por pesquisa sobre função periódica, sendo assim encontrei dissertações teóricas e experimentais sobre as funções trigonométricas, e os trabalhos do grupo de pesquisa de Lisboa Aubyn et al (2004), o livro de Batschelet (1978), para fundamentar e aprofundar sobre o tema de função periódica.

Com a revisão de literatura entendi como se dava o ensino das funções trigonométricas para assim compreender as possíveis dificuldades dos alunos relacionado com as funções periódicas, já que as funções senos e cossenos são modelos matemáticos que estudam determinados fenômenos periódicos.

Não obstante, percebo que a cada ano que passa o aluno possui cada vez mais dificuldades em matemática, assuntos dos anos anteriores o aluno não consegue lembrar no ano seguinte, sendo que, esses assuntos tornam-se conhecimentos essências para entender conteúdos matemáticos mais avançados.

Sendo assim, desenvolvi o teste diagnostico e a oficina de conhecimentos necessários para a sequência a partir das dificuldades dos estudantes elencadas na revisão de literatura, o que foi de uma grande importância para os estudantes, pois de forma cirúrgica sanamos duvidas e dificuldades dos alunos em relação a conhecimentos de plano cartesiano, domínio, imagem e valor numérico de função.

A sequência didática elaborada é propicia ao ensino de maneira organizada e fácil de compreender possibilitando ao aprendiz o entendimento de conceitos e propriedades relacionados a Função Periódica, para quando o aluno entrar em contato com as funções trigonométricas possa assim estar receptivo, pois o aprendiz já possui uma boa base matemática para enfrentar novos desafios dentro da Matemática.

Em minha análise, observo os benefícios que a sequência didática traz na perspectiva do aluno, do professor e do saber relacionado ao aspecto conceitual, procedimental e atitudinal.

De modo geral, as potencialidades da sequência didática para o ensino do conceito de Função Periódica aplicada na lógica das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual no que tange o professor, o saber construído e o aluno, é apresentado no quadro a seguir, que evidência de forma clara e sucinta as potencialidades e benefícios da sequência didática relacionado aos aspectos conceituais, procedimentais e atitudinais.

Quadro *3*:Potencialidades e Benefícios da Sequência Didática

Aspectos	Professor	Aluno	Saber
Conceituais	-Valoriza a organização sistemática do conteúdo -Propicia aprofundamento do saber Matemático. -Estimula um ambiente propicio para mobilização de conhecimento.	-Valoriza o saber já adquirido no meio social. -Permite que o aluno generalizações, conjeturas e reflexões acerca do saber.	-O saber surge, das interações verbais entre os atores em sala de aula. -Estimula a criação e manutenção da ZDP. -Propicia a criação de novos conceitos por meio da percepção de regularidade. -Propicia a construção e valorização do saber mediante as interações verbais.
Procedimentais	-Cria questionamentos que conduz o aluno em refletir sobre as atividades. -Permiti a participação do aluno. -Procedimentos tradicionais são deixados de lado, dando espaço para um ambiente de construção de conhecimento. -Procede de uma maneira para propiciar a criação e manutenção da ZDP.	-Ganha autonomia na aprendizagem. -Desenvolve habilidades comunicativas com a interação seus pares. -Desenvolve as atividades de forma reflexiva, e com levantamento de ideias e hipóteses e não como um algoritmo decorado.	-O saber é (re)construído mediante as intervenções estruturantes da sequência. -Estimula em sala os procedimentos dinâmicos e interativos. -Valoriza o saber intuitivo do aluno para a construção do saber. -O Saber emerge dos padrões das atividades da sequência, totalmente diferente do modelo tradicional
Atitudinais	-Orientado no processo de ensino-aprendizagem -Estimula o pensamento reflexivo em sala. -Estimula atitudes de melhoria em relação aos recursos didáticos. -Atitudes mais eficazes no processo de ensino.	-Passa a desenvolver atitude na construção do conhecimento por parte do discente. - Passa a ter uma atitude ativa e comunicativa no processo de aprendizagem -Desenvolve atitude no levantamento de dúvidas e	-Estimula as atitudes colaborativas entre os pares para a construção do saber. -Estimula atitudes do aluno, como levantamento de hipóteses. -Estimula atitudes comunicativas para compreensão do saber.

		pensamentos incorretos, permitindo discursões em sala de aula.	

Fonte: Autor (2022)

Dessa forma, comprovo mediante a pesquisa que a sequência didática é um recurso-didático favorável para o ensino-aprendizagem das funções periódicas, no qual o professor antes de ministrar aula sobre as funções trigonométricas, pode utilizar nossa sequência de didática para iniciar a aula com o ensino dos fenômenos periódicos, período e o conceito de função periódica.

Portanto, um desdobramento para novas pesquisas seria uma sequência didática para o ensino de funções periódicas não trigonométricas, como por exemplo, as Funções Constante, Característica, Mantissa e Dirichlet, e de uma maneira que comtemple na sequencia didática todas as propriedades acerca do período das Funções Periódicas.

E sugiro o desenvolvimento de uma sequência didática que comtemple de maneira geral as Funções Periódicas Trigonométricas e Não-Trigonométricas, para que possibilite a (re)construção desse conteúdo e oportunidade da criação de um ambiente dinâmico para aprendizagem superando a mesmice das aulas tradicionais.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, A. S. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba-PR: Editora - UFPR, 2007.

AUBYN, A. S.; et al. **Funções reais de variável real**. Grupo de Matemática da Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2004.

BATSCHELET, E. **Introdução à Matemática para Biocientistas**. São Paulo: Interciência, 1978.

BROUSSEAU, G. **Etude des situations (théorie des situations didactiques)**. Bordeaux: IREM de Bordeaux, 1979.

BROUSSEAU, G. **Introdução a teorias das Situações Didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CABRAL, N. F. **O papel das interações professor-aluno na construção da solução lógico-aritmética otimizada de um jogo com regras**. 2004. 151 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2004.

CABRAL, N. F. **Sequências Didáticas**: estrutura e elaboração/ Natanael Freitas Cabral. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

DRIVER, R. **Um Enfoque Construtivista para el Desarrolo Del Currículo em Ciencias**. Enseñanza de Las Ciencias. 1988, v.6, n.2, p. 109-120.Disponivel em: <https://ensciencias.uab.cat/article/view/v6-n2-driver/2922>.Acesso em: 24 de julho de 2022.

GAMA, P. F da. **Uma sequência didática para o ensino da função seno**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2020.

GÓES, M. C. R. de. A Abordagem Microgenética na Matriz Histórico-Cultural: Uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. **Cadernos Cedes**, ano XX, n. 50. abril, p. 9-25, 2000, ISSN 1678-7110

LIMA, E. L.; et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Sociedade Brasileira de Matemática, vol. 1, 5ª ed. Rio de Janeiro, Brasil, 2006. 237 p. ISBN: 85-85818-11-5

MEIRA, L. **Análise microgenética e videografia: Ferramentas de pesquisa em psicologia cognitiva.** Temas em Psicologia 3,1994,p.59-71

MORTIMER, E. F.; SCOTT, P. Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino. **Investigações em ensino de ciências**, v. 7, n. 3, p. 283–306, 2002.

VIVIAN, Nancí Miksza. **Análise dos Padrões Discursivos de um Professor de Ciências do Ensino Fundamental**. 193 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) – Universidade Estadual de Londrina. Londrina. 2006.

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, 350 – Telégrafo
66.113-010 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem