v. 3, n. 1, 2022

Journal of
Engineering
Research

EXISTENCIA DE LA SOLUCIÓN DE UN MODELO HOMOGÉNEO TIPO SCHRÖDINGER GENERALIZADO

Yolanda Silvia Santiago Ayala
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Fac. de Ciencias Matemáticas
https://orcid.org/0000-0003-2516-0871

Victor Rodolfo Candia Estrada
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Fac. de Ciencias Matemáticas
https://orcid.org/0000-0003-1163-6920

Resumen: En este artículo probamos que el problema de Cauchy asociado a un modelo ho- mogéneo tipo Schrodinger generalizado en espacios de Sobolev periódico está bien colocado cuando n es par no múltiplo de cuatro. Hacemos esto en un modo intuiti- vo usando la teoría de Fourier y en una versión elegante usando la teoría de grupos, inspirados en los trabajos de Iorio [1], Santiago and Rojas [7] y [8]. Además, estudi- amos la relación entre el dato inicial y la diferenciabilidad de la solución. Finalmente, analizamos otros casos.
Palabras clave: Teoría de grupos unitarios, ecuación tipo Schrödinger generalizado, ecuación homogénea, espacios de Sobolev periódico, Teoría de Fourier.

INTRODUCCIÓN

Motivados por la ecuación propuesto por el físico austriaco Erwin Schrödinger (1925)

$$u_t - ia^2 u_{xx} = 0 \,, \qquad (1.1)$$

con dato inicial $u(0) = \varphi$ E H^s_{per}, donde s es un nu´mero real y denotamos por H^s_{per} al espacio de Sobolev periódico de orden s.

Sabemos de [9] que la ecuación de Schrödinger homog´enea (1.1) está bien colocada para todo s real. Entonces planteamos el modelo generalizado

$$u_t - i\mu\partial_x^{\,n} u + i\alpha u = 0 \,, \qquad (1.2)$$

con dato inicial en H^s_{per}, el cual resolveremos siguiendo las ideas de [1], [7], [8] y [9]. Esto es, probaremos que posee solución y que esta es u´nica. Adem´as, demostraremos que la solución depende continuamente respecto al dato inicial.

Citamos algunos trabajos de existencia de solución v´ıa semigrupos [2], [3], [4], [10], [5] y nos apoyamos de algunos resultados de [6].

Probaremos la existencia y unicidad de solución de (1.2), así como la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial. Luego, introduciremos una familia de operadores para reescribir nuestro resultado en una versión más elegante. También, haremos el análisis de diferenciabilidad versus dato inicial del problema homogéneo (1.2). Finalmente, analizaremos otros casos.

Nuestro artículo esté organizado como sigue. En la sección 2, indicamos la metodolog´ıa usada y citamos la referencia usada para los resultados preliminares que se puedan nece- sitar. En la sección 3, probamos que el problema de Cauchy asociado a la ecuación ho- mogénea (1.2) está bien colocada. En la sección 4, introducimos una familia de operadores que forma un grupo unitario en H^s_{per}. En la sección 5, mejoramos el Teorema 3.1. En la sección 6, hacemos el an´alisis de la diferenciabilidad de la solución versus el dato inicial.

Finalmente, en la sección 7, damos las conclusiones de nuestro estudio.

METODOLOGÍA

Como marco teórico, usaremos en este trabajo los siguientes tópicos: Teoría de Fourier en espacios de Sobolev periódico, análisis armónico, teoría de grupos y semigrupos de clase C_o, y familias fuertemente continuas. Como referencia, en la revisión de algunos resultados previos que usaremos, citamos a Iorio [1], Santiago and Rojas [7] y [8].

Toda esta teoría la usamos en el análisis de existencia y buena colocación del problema de Cauchy asociada a la ecuación (1.2), realizando una serie de cálculos y aproximaciones en el desarrollo de este trabajo.

EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DEL PROBLEMA (Q_{N+1})

En esta sección, empezamos probando que existe solución del modelo homogéneo gen- eralizado (1.2) en espacios de Sobolev

Periódico, usando la teoría de Fourier.

Teorema 3.1 Sea s un número real fijo, μ > 0, α > 0, n par no múltiplo de cuatro y el problema homogéneo

$$(Q_{n+1})\left|\begin{array}{l} u \in C(I\!R, H^s_{per}) \cap C^1(I\!R, H^{s-n}_{per}) \\ \partial_t u - i\mu\partial_x^n u + i\alpha u = 0 \in H^{s-n}_{per} \\ u(0) = \phi \in H^s_{per} \end{array}\right.$$

entonces (Q_{n+1}) está globalmente bien colocado i.e. ∃!u *E* C(IR, H^s_{per}) ∩ C1*(IR,* H^{s-n}_{per}*)* satisfaciendo la ecuación (Q_{n+1}) , de modo que la aplicación : φ → u, que asigna a cada dato inicial φ la solución u del *PVI* (Q_{n+1}), es continua.

Además, la solución u satisface la regularidad:

$$u(t) \in H^r_{per}\,,\ \forall t \in I\!R\,,\ \forall r \leq s$$

con

$$\|u(t)\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi\|_{H^s_{per}}\,,\ \forall t \in I\!R\,, \forall r < s$$

$$y\ \ \|u(t)\|_{H^s_{per}} = \|\phi\|_{H^s_{per}}\,,\ \forall t \in I\!R\,.$$

También se obtiene que la aplicación: φ → ∂_tu que asigna a cada dato inicial φ, la derivada de la solución u del PVI (Qn+1): ∂_tu, es continua y satisface:

$$\begin{aligned} \|\partial_t u(t) - \partial_t \tilde{u}(t)\|_{s-n} &\leq C\|\phi - \tilde{\phi}\|_s\,, \forall t \in I\!R\,, \\ \sup_{t\in I\!R} \|\partial_t u(t) - \partial_t \tilde{u}(t)\|_{s-n} &\leq C\|\phi - \tilde{\phi}\|_s\,, \end{aligned}$$

donde C := máx{|μ|, |α|}.

Además, $\partial_t u(t) \in H^\theta_{per}, \forall t \in I\!R, \forall \theta \leq s-n$ *y* satisface:

$$\begin{aligned} \|\partial_t u(t)\|_\theta &\leq C\|\phi\|_s\,, \forall t \in I\!R\,, \forall \theta \leq s-n \\ \sup_{t\in I\!R} \|\partial_t u(t)\|_\theta &\leq C\|\phi\|_s\,, \forall \theta \leq s-n. \end{aligned}$$

Prueba.- La prueba lo hacemos del siguiente modo.

1. Primero obtenemos el candidato a solución. Para conseguir ese candidato tomamos

la transformada de Fourier a la ecuación

$$\partial_t u - i\mu\partial_x^n u + i\alpha u = 0$$

obteniendo

$$0 \ = \ \partial_t \hat{u} - i\mu(ik)^n \hat{u} + i\alpha\hat{u} \ = \ \partial_t \hat{u} + i\mu k^n \hat{u} + i\alpha\hat{u},$$

que para cada *k E Z* es una EDO con dato inicial $\hat{u}(k,0) = \hat{\phi}(k)$.

Así, planteamos un sistema no acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden homogéneo

$$(\Gamma_k)\left|\begin{array}{l} \hat{u} \in C(I\!R, l^2_s(Z)) \\ \partial_t \hat{u}(k,t) + i\mu k^n \hat{u}(k,t) + i\alpha\hat{u}(k,t) = 0 \\ \hat{u}(k,0) = \hat{\phi}(k) \text{ con } \hat{\phi} \in l^2_s(Z)\,, \end{array}\right.$$

$\forall k \in Z$ y conseguimos

$$\hat{u}(k,t) = e^{-i\mu k^n t} e^{-i\alpha t} \hat{\phi}(k)\,,$$

de donde obtenemos el candidato a solución:

$$u(t) \ = \ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k,t)\phi_k \ = \ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-i\mu k^n t} e^{-i\alpha t} \hat{\phi}(k)\phi_k\,. \tag{3.1}$$

2. En segundo lugar, probaremos que:

$$u(t) \in H^s_{per} \ \ \text{y} \ \ \|u(t)\|_s = \|\phi\|_s\,,\ \forall t \in I\!R\,. \tag{3.2}$$

En efecto, sea $t \in I\!R$ y $\phi \in H^s_{per}$

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |e^{-i\mu k^n t} e^{-i\alpha t} \hat{\phi}(k)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\hat{\phi}(k)|^2 \\ &= \|\phi\|^2_{H^s_{per}}\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

3. Ahora, probaremos que u(·) es continua en IR.

Sea t' E IR,

$$
\begin{aligned}
&\|u(t)-u(t')\|^2_{H^s_{per}}\\
&\quad = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|(e^{-i\mu k^n t}e^{-i\alpha t}-e^{-i\mu k^n t'}e^{-i\alpha t'})\hat{\phi}(k)|^2\\
&\quad = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|\hat{\phi}(k)|^2|\underbrace{e^{-i\mu k^n t}e^{-i\alpha t}-e^{-i\mu k^n t'}e^{-i\alpha t'}}_{H(t):=}|^2 .
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Se observa que $\lim_{t\to t'}$ H(t) = 0. Ahora, necesitamos de la convergencia uniforme de la serie para el intercambio de límites. Para esto, tomamos el k- ésimo término de la serie y lo mayoramos por una serie convergente, i.e.

$$
\begin{aligned}
I_{k,t}: &= 2\pi(1+k^2)^s|\hat{\phi}(k)|^2|\underbrace{e^{-i\mu k^n t}e^{-i\alpha t}-e^{-i\mu k^n t'}e^{-i\alpha t'}}_{\leq 2}|^2\\
&\leq 8\pi(1+k^2)^s|\hat{\phi}(k)|^2 ,
\end{aligned}
$$

donde hemos usado la desigualdad triangular (propiedad de la norma) y la igualdad $|e^{i\theta}|=1,\ \forall\theta\in I\!R$.

Así,

$$
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k,t} \leq 4\|\phi\|^2_{H^s_{per}} < \infty ,
$$

y usando el Teorema del M-Test de Weierstrass tenemos que la serie converge uni-formemente. Luego está permitido el intercambio de límite, esto es,

$$
0\leq \lim_{t\to t'}\|u(t)-u(t')\|^2_{H^s_{per}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\lim_{t\to t'} I_{k,t}}_{=0} = 0
$$

y de ahí concluimos

$$
\lim_{t\to t'}\|u(t)-u(t')\|_{H^s_{per}} = 0 .
$$

4. Probaremos que

$$
\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-i\mu\partial_x^n u+i\alpha u\right\|_{H^{s-n}_{per}} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } h\to 0 .
$$

En efecto,

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-i\mu\partial_x^n u+i\alpha u\right\|^2_{H^{s-n}_{per}}\\
&= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s-n}\left|\hat{\phi}(k)\right|^2\left|\frac{e^{-i\mu k^n(t+h)}e^{-i\alpha(t+h)}-e^{-i\mu k^n t}e^{-i\alpha t}}{h}\right.\\
&\qquad \left. -i\mu(ik)^n e^{-i\mu k^n t}e^{-i\alpha t}+i\alpha e^{-i\mu k^n t}e^{-i\alpha t}\right|^2\\
&= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s-n}\left|\hat{\phi}(k)\right|^2\left|e^{-i\mu k^n t}e^{-i\alpha t}\right. .\\
&\qquad \left.\underbrace{\left\{\frac{e^{-i\mu k^n h}e^{-i\alpha h}-1}{h}+i\mu k^n+i\alpha\right\}}_{M(h):=}\right|^2 .
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Usando L'Hospital tenemos que M (h) –> 0 cuando h → 0.

Ahora, necesitamos la convergencia uniforme de la serie para habilitar el intercambio de límites. Para ello procedemos mayorando el k-ésimo término de la serie. Previamente observamos para h > 0:

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{-i\mu k^n h}e^{-i\alpha h}-1}{h} &= \int_0^h \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s}\left\{e^{-i^n s}e^{-i\alpha s}\right\}ds\\
&= \int_0^h \frac{1}{h}\left[-i\mu k^n-i\alpha\right]e^{-i\mu k^n s}e^{-i\alpha s}ds
\end{aligned}
$$

y tomando norma tenemos

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{e^{-i\mu k^n h}e^{-i\alpha h}-1}{h}\right| &\leq \frac{1}{h}|-i\mu k^n-i\alpha|\int_0^h\left|e^{-i\mu k^n s}e^{-i\alpha s}\right|ds\\
&= \frac{1}{h}|\mu k^n+\alpha|\cdot h\\
&= |\mu|k^2+|\alpha|\\
&\leq \underbrace{\max\{|\mu|,|\alpha|\}}_{C:=}\{1+k^n\} .
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Considerando h < 0 para el caso t ≠ 0, tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{-i\mu k^n h}e^{-i\alpha h}-1}{h} &= -\int_h^0 \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s}\left\{e^{-i\mu k^n s}e^{-i\alpha s}\right\}ds\\
&= -\int_h^0 \frac{1}{h}\left[-i\mu k^n-i\alpha\right]e^{-i\mu k^n s}e^{-i\alpha s}ds ,
\end{aligned}
$$

tomando norma y usando que $|e^{i\vartheta}| = 1, \forall \vartheta \in I\!R$ tenemos

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{-i\mu k^n h}e^{-i\alpha h}-1}{h}\right| &\leq \frac{1}{|h|}|i\mu k^n + i\alpha|\int_h^0 ds \\ &\leq \frac{1}{|h|}\{|\mu|k^n+|\alpha|\}\cdot|h| \\ &= \{|\mu|k^n+|\alpha|\} \\ &\leq \underbrace{\text{máx}\{|\mu|,|\alpha|\}}_{C=}\{k^n+1\}\,.\end{aligned} \tag{3.7}$$

También, como $1 \leq (k^n+1) = (k^{2\frac{n}{2}}+1) \leq (k^2+1)^{\frac{n}{2}}$ obtenemos

$$(k^n+1)^2 \leq (k^2+1)^n \tag{3.8}$$

Usando las desigualdades (3.6), (3.7) y (3.8) procedemos a mayorar $|M(h)|^2$ como sigue

$$|M(h)|^2 \leq \{2C(k^n+1)\}^2 = 4C^2(k^n+1)^2 = C_5\left[1+k^2\right]^n . \tag{3.9}$$

Esto también es válido para el caso t = 0, donde hemos usado (3.6) para el caso h > 0 y (3.7) para el caso h < 0.

Ahora, pasamos a mayorar el k-´esimo término de la serie, donde usamos la estimativa (3.9)

$$\begin{aligned}(1+k^2)^{s-n}\left|\hat\phi(k)\right|^2|M(h)|^2 &\leq (1+k^2)^{s-n}\left|\hat\phi(k)\right|^2 C_5(1+|k|^2)^n \\ &= C_5(1+k^2)^s\left|\hat\phi(k)\right|^2\end{aligned}$$

y como la serie $2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s\left|\hat\phi(k)\right|^2 = \|\phi\|^2_{H^s_{per}} < \infty$ desde que $\phi \in H^s_{per}$, entonces usando el Teorema M-Test de Weierstrass tenemos que la serie (3.5) converge uniformemente y por lo tanto es posible intercambiar límites y obtener

$$\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - i\mu\partial_x^n u + i\alpha u\right\|^2_{H^{s-n}_{per}} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } h \to 0\,.$$

5. Probaremos la dependencia continua de la solución respecto a los datos iniciales, i.e. sean ϕ y $\widetilde\phi$ datos próximos en H^s_{per}, entonces sus correspondientes soluciones u y $\widetilde u$, respectivamente, también están próximos en el espacio solución. Sea $t \in I\!R$,

$$\begin{aligned}\|u(t)-\widetilde u(t)\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|e^{-i\mu k^n t}e^{-i\alpha t}(\widehat\phi(k)-\widehat{\widetilde\phi}(k))\right|^2(1+k^2)^s \\ &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s\left|\widehat\phi(k)-\widehat{\widetilde\phi}(k)\right|^2 \\ &= \|\phi-\widetilde\phi\|^2_{H^s_{per}}\,.\end{aligned}$$

Tomando supremo sobre IR tenemos

$$\sup_{t\in I\!R}\|u(t)-\widetilde u(t)\|_{H^s_{per}} = \|\phi-\widetilde\phi\|_{H^s_{per}}\,. \tag{3.10}$$

De aquí tenemos que si $\phi \to \widetilde\phi$ entonces $u \to \widetilde u$.

6. Ahora, probaremos la unicidad de solución. La igualdad (3.10) nos permitirá mostrar que la solución es única. En efecto, sea $\phi \in H^s_{per}$ y supongamos que existan u y $\widetilde u$ dos soluciones, entonces usando (3.10) tenemos,

$$\|u(\tau)-\widetilde u(\tau)\|_{H^s_{per}} \leq \sup_{t\in I\!R}\|u(t)-\widetilde u(t)\|_{H^s_{per}} = \|\phi-\widetilde\phi\|_{H^s_{per}} = 0\,,\ \forall\tau\in I\!R,$$

de donde concluimos que $u = \widetilde u$.

Así, el problema (Q_{n+1}) est´a bien colocado y su única solución que depende continuamente del dato inicial es

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-i\mu k^n t}e^{-i\alpha t}\hat\phi(k)\phi_k\,.$$

7. Sea r < s entonces $H^s_{per} \subset H^r_{per}$ y desde que el dato inicial $\phi \in H^s_{per}$, tenemos que $\phi \in H^r_{per}$ y satisface

$$\|\phi\|_r \leq \|\phi\|_s\,. \tag{3.11}$$

De (3.3) y usando (3.11) tenemos que

$$\|u(t)\|^2_r = \|\phi\|^2_r \leq \|\phi\|^2_s < \infty\,.$$

Es decir,

$$u(t) \in H^r_{per}, \forall r \in (-\infty, s)\,. \tag{3.12}$$

8. Así, de (3.2) y (3.12) concluimos que para $t \in I\!R$

$$u(t) \in H^r_{per}\,, \ \forall r \in (-\infty, s]\,.$$

9. Probaremos que $\partial_t u(\cdot)$ es continua en *IR*. En efecto, sea $t \in I\!R$,

$$\begin{aligned}
&\|\partial_t u(t) - \partial_t u(t')\|^2_{s-n} \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-n} |\widehat{\partial_t u(t)}(k) - \widehat{\partial_t u(t')}(k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-n} |(i\mu k^n + i\alpha) \left\{ e^{-i\mu k^n t} e^{-i\alpha t} - e^{-i\mu k^n t'} e^{-i\alpha t'} \right\} \widehat{\phi}(k)|^2 \\
&\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-n} (|\mu| k^n + |\alpha|)^2 \underbrace{\left| e^{-i(\mu k^2+\alpha)t} - e^{-i(\mu k^n+\alpha)t'} \right|^2}_{H(t):=} |\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&\leq 2\pi (\underbrace{\text{máx}\{|\mu|, |\alpha|\}}_{=C})^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-n} (k^n+1)^2 H(t) |\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&\leq C^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{2\pi (1+k^2)^s H(t) |\widehat{\phi}(k)|^2}_{I_{k,t}:=},
\end{aligned} \tag{3.13}$$

desde que vale la desigualdad (3.8).

Por otro lado, se observa que $\text{lím}_{t->t'} H(t) = 0$.

Ahora, necesitamos de la convergencia uniforme de la serie para el intercambio de límites. Para esto, tomamos el k-ésimo término de la serie y lo mayoramos por una serie convergente, i.e.

$$\begin{aligned}
I_{k,t} &\leq 2\pi (1+k^2)^s 4 |\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&\leq 8\pi (1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2\,,
\end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad triangular (propiedad de la norma) y la igualdad $|e^{i\theta}| = 1,\ \forall \theta \in I\!R$.

Así,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k,t} \leq 4\|\phi\|^2_s < \infty\,,$$

y usando el Teorema del M-Test de Weierstras tenemos que la serie converge uniformemente. Luego está permitido el intercambio de límite, esto es,

$$0 \leq \text{lím}_{t\to t'} \|\partial_t u(t) - \partial_t u(t')\|^2_{s-n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\text{lím}_{t\to t'} I_{k,t}}_{=0} = 0$$

y de ahí concluimos

$$\text{lím}_{t\to t'} \|\partial_t u(t) - \partial_t u(t')\|^2_{s-n} = 0\,.$$

Esto es,

$$\text{lím}_{t\to t'} \|\partial_t u(t) - \partial_t u(t')\|_{s-n} = 0\,.|$$

10. Probaremos la dependencia continua de $\partial_t u$ respecto a los datos iniciales, i.e sean ϕ y $\widetilde{\phi}$ próximos en H^s_{per}, entonces sus correspondientes derivadas de las soluciones u y $\widetilde{u}$, esto es $\partial_t u$ y $\partial_t \widetilde{u}$, respectivamente, también están próximos. Sea $t \in I\!R$,

$$\begin{aligned}
&\|\partial_t u(t) - \partial_t \widetilde{u}(t)\|^2_{s-n} \\
&\quad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-n} |(-i\mu k^n - i\alpha) e^{-i\mu k^n t} e^{-i\alpha t} \{\widehat{\phi}(k) - \widehat{\widetilde{\phi}}(k)\}|^2 \\
&\quad \leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-n} (|\mu| k^2 + |\alpha|)^2 |\widehat{\phi}(k) - \widehat{\widetilde{\phi}}(k)|^2 \\
&\quad \leq C^2 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k) - \widehat{\widetilde{\phi}}(k)|^2 \\
&\quad = C^2 \|\phi - \widetilde{\phi}\|^2_s\,,
\end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad (3.8). Así, hemos probado que

$$\|\partial_t u(t) - \partial_t \widetilde{u}(t)\|^2_{s-n} \leq C^2 \|\phi - \widetilde{\phi}\|^2_s\,.$$

Esto, es,

$$\|\partial_t u(t) - \partial_t \widetilde{u}(t)\|_{s-n} \leq C \|\phi - \widetilde{\phi}\|_s\,.$$

Tomando supremo sobre *IR* tenemos:

$$\sup_{t\in I\!R} \|\partial_t u(t) - \partial_t \widetilde{u}(t)\|_{s-n} \leq C \|\phi - \phi\|_s\,.$$

11. Del item anterior tenemos que vale:

$$\|\partial_t u(t)\|_{s-n} \leq C\|\phi\|_s \,.$$

Además, usando inmersion continua de espacios de Sobolev periódico, tenemos que

$$\|\partial_t u(t)\|_{r-n} \leq C\|\phi\|_r \leq C\|\phi\|_s \,,\ \forall r < s.$$

Así, $\partial_t u(t) \in H^{\theta}_{per}$, $\forall \theta \in (-\infty, s-n]$.

En consecuencia tenemos el siguiente resultado

Corolario 3.1 *La única solución de* (Q_{n+1}) *es*

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-i\mu k^n t} e^{-i\alpha t} \hat{\phi}(k)\, \phi_k \,.$$

donde $\phi_k(x) := e^{ikx}$ para $x \in I\!R$.

GRUPO DE OPERADORES UNITARIOS EN H^s_{per}

Ahora, introduciremos una familia de operadores que verificaran las condiciones de ser un grupo unitario de clase C_0 en H^s_{per}.

Teorema 4.1 Sea $s \in I\!R$ y la aplicación

$$\begin{aligned} T : I\!R &\rightarrow L(H^s_{per}) \\ t &\rightarrow T(t) \end{aligned}$$

tal que $T(t) = e^{i(\mu\partial_x^n - \alpha I)t}$, i.e. aplica $T(\phi) = \left[\left(e^{-i\mu k^n t} e^{-i\alpha t}\hat{\phi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee}$, $\forall \phi \in H^s_{per}$.

Entonces $\{T(t)\}_{t\in I\!R}$ es un grupo unitario de clase C_0 en H^s_{per}.

Además, se verifican los siguientes enunciados:

1. $T(\cdot)\phi \in C(I\!R, H^s_{per})$, $\forall \phi \in H^s_{per}$.

2. La aplicación $\phi \rightarrow T(\cdot)\phi$ es continua y $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in H^s_{per}$ se satisface:

$$\begin{aligned} \|T(t)\varphi_1 - T(t)\varphi_2\|_{H^s_{per}} &= \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H^s_{per}},\ \forall t \in I\!R, \\ \sup_{t\in I\!R}\|T(t)\varphi_1 - T(t)\varphi_2\|_{H^s_{per}} &= \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H^s_{per}}. \end{aligned}$$

Prueba.- Primero observamos que $T(0)\phi = \phi$, $\forall \phi \in H^s_{per}$, así T(0) = I.

Afirmamos que T(t) es lineal pues la transformada de Fourier y su inversa son lineales. En efecto, sea $a \in I\!\!C$ y $(\phi, \psi) \in H^s_{per} \times H^s_{per}$ entonces

$$\begin{aligned} T(t)(a\phi + \psi) &= \left[\left(e^{-i\mu k^n t} e^{-i\alpha t}[a\phi + \psi]^{\wedge}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\ &= \left[\left(e^{-i\mu k^n t} e^{-i\alpha t}[a\hat{\phi}(k) + \hat{\psi}(k)]\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\ &= \left[a\left(e^{-i\mu k^n t} e^{-i\alpha t}\hat{\phi}(k)\right)_{k\in Z} + \left(e^{-i\mu k^n t} e^{-i\alpha t}\hat{\psi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\ &= a\left[\left(e^{-i\mu k^n t} e^{-i\alpha t}\hat{\phi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} + \left[\left(e^{-i\mu k^n t} e^{-i\alpha t}\hat{\psi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\ &= aT(t)\phi + T(t)\psi\,. \end{aligned}$$

Probaremos que $T(t)\phi \in H^s_{per}$ y $\|T(t)\phi\|_s = \|\phi\|_s$; i.e. $\|T(t)\| = 1$, $\forall t \in I\!R$. En efecto, sea $\phi \in H^s_{per}$ y $t \in I\!R$, análogo a (3.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \|T(t)\phi\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |e^{-i\mu k^n t} e^{-i\alpha t}\hat{\phi}(k)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\hat{\phi}(k)|^2 \\ &= \|\phi\|^2_{H^s_{per}} \quad < \infty\,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Luego,

$$\|T(t)\phi\|_s = |\phi\|_s\,,\ \forall t \in I\!R\,, \forall \phi \in H^s_{per}\,, \tag{4.2}$$

es decir $T(t) \in L(H^s_{per})$ con $\|T(t)\| = 1$, $\forall t \in I\!R$.

Ahora, probaremos que *T(t + r) = T(t)* o *T(r)*, $\forall t, r \in I\!R$. En efecto, sea $\phi \in H^s_{per}$ y *t; r* $\in$ *IR* - {0}, tenemos

$$\begin{aligned} T(t+r)\phi &= \left[\left(e^{-i\mu k^n (t+r)} e^{-i\alpha(t+r)}\hat{\phi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\ &= \left[\left(e^{-i\mu k^n t} e^{-i\alpha t} \cdot e^{-i\mu k^n r} e^{-i\alpha r}\hat{\phi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Sabemos que si $\phi \in H^s_{per}$ entonces $\widehat{\phi} \in l^2_s$, esto es

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 \ < \ \infty \,. \tag{4.4}$$

Afirmamos que

$$\left(e^{-i\mu k^n r} e^{-i\alpha r} \widehat{\phi}(k)\right)_{k \in Z} \in l^2_s \,, \ \ \forall r \in I\!R \,. \tag{4.5}$$

En efecto, cuando r = 0 es evidente que se cumple la afirmación. Así, probaremos el caso r > 0. Para esto, basta observar que

$$\begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |e^{-i\mu k^n r} e^{-i\alpha r} \widehat{\phi}(k)|^2 \\ = &\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \underbrace{|e^{-i\mu k^n r} e^{-i\alpha r}|^2}_{=1} |\widehat{\phi}(k)|^2 \\ = &\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 \ < \ \infty \end{aligned}$$

desde que vale (4.4).

Luego, de (4.5) y tomando la transformada inversa de Fourier tenemos:

$$\left[\left(e^{-i\mu k^n r} e^{-i\alpha r} \widehat{\phi}(k)\right)_{k \in Z}\right]^{\vee} \in H^s_{per} \,, \ \ \forall r \in I\!R \,.$$

Así, definimos:

$$g := \left[\left(e^{-i\mu k^n r} e^{-i\alpha r} \widehat{\phi}(k)\right)_{k \in Z}\right]^{\vee} \in H^s_{per} \,.$$

Esto es,

$$g = T(r)\phi. \tag{4.6}$$

También, tomando la transformada de Fourier a g obtenemos:

$$\widehat{g} = \left(e^{-i\mu k^n r} e^{-i\alpha r} \widehat{\phi}(k)\right)_{k \in Z} \,,$$

i.e.

$$\widehat{g}(k) = e^{-i\mu k^n r} e^{-i\alpha r} \widehat{\phi}(k) \,, \ \ \forall k \in Z \,. \tag{4.7}$$

Usando (4.7) en (4.3) y de (4.6) tenemos

$$\begin{aligned} T(t+r)\phi &= \left[\left(e^{-i\mu k^n t} e^{-i\alpha t} \widehat{g}(k)\right)_{k \in Z}\right]^{\vee} \\ &= T(t)g \\ &= T(t)(T(r)\phi) \\ &= [T(t) \circ T(r)]\phi \,, \ \ \forall t, r \in I\!R - \{0\} \,. \end{aligned}$$

Así,

$$T(t+r) = T(t) \circ T(r) \,, \ \ \forall t, r \in I\!R - \{0\} \,. \tag{4.8}$$

Si $t = 0$ o $r = 0$, entonces la igualdad de (4.8) tambi´en es verdad, con esto concluimos con la prueba de

$$T(t+r) = T(t) \circ T(r), \forall t, r \in I\!R \,. \tag{4.9}$$

Ahora, probaremos que el operador *T(t)* es unitario $\forall t \in I\!R$.

De la identidad (4.2) tenemos que *T(t)* es isométrico para todo $t \in I\!R$.

De (4.9) tenemos

$$T(t) \circ T(-t) \ = \ T(t-t) = T(0) \ = I \,, \ \ \forall t \in I\!R \,, \tag{4.10}$$

$$T(-t) \circ T(t) \ = \ T(-t+t) = T(0) \ = I \,, \ \ \forall t \in I\!R \,. \tag{4.11}$$

Obviamente se observa que (4.10) implica la sobreyectividad de T(t) y que (4.11) implica la inyectividad de T(t). Por lo tanto, T(t) es biyectivo y

$$\exists\, T(t)^{-1} = T(-t) \,, \ \ \forall t \in I\!R \,. \tag{4.12}$$

Siendo $T(t)$ isométrico y sobreyectivo obtenemos que $T(t)$ es unitario $\forall t \in I\!R$ (i.e. T(t)* ± T(t) = T(t) ± T(t) o = I). Además, de (4.12) tenemos T(t)* = T(-t), $\forall t \in I\!R$. Ahora probaremos la continuidad de t → T(t)ϕ, esto es

$$\|T(t+h)\phi - T(t)\phi\|_{H^s_{per}} \to 0 \text{ cuando } h \to 0\,. \tag{4.13}$$

En efecto, usando el item 3 de la prueba del teorema anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
&\|T(t+h)\phi - T(t)\phi\|^2_{H^s_{per}} \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |(e^{-i\mu k^n (t+h)} e^{-i\alpha(t+h)} - e^{-i\mu k^n t} e^{-i\alpha t})\hat{\phi}(k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\hat{\phi}(k)|^2 |\underbrace{e^{-i\mu k^n (t+h)} e^{-i\alpha(t+h)} - e^{-i\mu k^n t} e^{-i\alpha t}}_{H(t+h)=}|^2\,.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Observamos que $lím_{h\to 0}\, H(t+h) = 0$.

Ahora, necesitamos de la convergencia uniforme de la serie para el intercambio de límites.

Para eso, tomamos el k-ésimo término de la serie y lo mayoramos por una serie convergente, i.e.

$I_{k,t,h}$:

$$\begin{aligned}
&= \quad 2\pi(1+k^2)^s |\hat{\phi}(k)|^2 \underbrace{|e^{-i\mu k^n (t+h)} e^{-i\alpha(t+h)} - e^{-i\mu k^n t} e^{-i\alpha t}|^2}_{\leq 4} \\
&\leq \quad 8\pi(1+k^2)^s |\hat{\phi}(k)|^2\,,
\end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad triangular (propiedad de la norma) y la igualdad $|e^{i\theta}| = \forall \theta \in I\!R$.

Así,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k,t,h} \leq 4\|\phi\|^2_{H^s_{per}} < \infty\,, \tag{4.15}$$

y usando el Teorema del M-Test de Weierstrass tenemos que la serie en (4.15) converge uniformemente. Luego está permitido el intercambio de límite, esto es

$$\lim_{h\to 0} \|T(t+h)\phi - T(t)\phi\|^2_{H^s_{per}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\lim_{h\to 0} I_{k,t,h}}_{=0} = 0\,.$$

Observación 4.1 Se verifica rápidamente que

$$\lim_{t\to 0} \|T(t)\phi - \phi\|_{H^s_{per}} = 0\ ,\ \forall \phi \in H^s_{per}\ .$$

Observación 4.2 Si $\{T(t)\}_{t\in I\!R}$ es un grupo de clase C_0 entonces satisface

$$\lim_{t\to r} \|T(t)\phi - T(r)\phi\|_{H^s_{per}} = 0\,,\ \forall r \in I\!R, \forall \phi \in H^s_{per}$$

Observación 4.3 Con la observación 4.1 tendriamos que $\{T(t)\}_{t\in I\!R}$ es un grupo de clase C_0. Así, por la observación (4.2) se tendría (4.13).

Por lo tanto, $\{T(t)\}_{t\in I\!R}$ es un grupo unitario de clase C_o en H^s_{per}.

Sean φ_1 y φ_2 datos próximos en H^s_{per}, entonces probaremos que sus correspondientes $T(\cdot)\varphi_1$ y $T(\cdot)\varphi_2$, respectivamente, también están próximos. Como $\{T(t)\}_{t\in I\!R}$ es unitario, para $t \in I\!R$ tenemos

$$\|T(t)\varphi_1 - T(t)\varphi_2\|_{H^s_{per}} = \|T(t)[\varphi_1 - \varphi_2]\|_{H^s_{per}} = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H^s_{per}}\,.$$

Tomando supremo sobre *IR* tenemos

$$\sup_{t\in I\!R} \|T(t)\varphi_1 - T(t)\varphi_2\|_{H^s_{per}} = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H^s_{per}}\,. \tag{4.16}$$

De aquí tenemos que si $\varphi_1 \to \varphi_2$ entonces $T(\cdot)\varphi_1 \to T(\cdot)\varphi_2$.

5. VERSIÓN DEL TEOREMA 3.1 USANDO $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$

A seguir enunciamos el Teorema 3.1 en función del grupo $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Teorema 5.1 Sea s $\in\mathbb{R}$, n un número par no múltiplo de cuatro y $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ el grupo unitario de clase C_0 del Teorema 4.1 entonces $T(\cdot)\phi$ es la única solución de

$$\left|\begin{array}{l} u\in C(\mathbb{R},H^s_{per})\cap C^1(\mathbb{R},H^{s-n}_{per}) \\ u_t = A_{n-1}u \;\; en \;\; H^{s-n}_{per} \\ u(0)=\phi\in H^s_{per} \end{array}\right.$$

en el sentido que

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{T(t+h)\phi-T(t)\phi}{h}-A_{n-1}T(t)\phi\right\|_{H^{s-n}_{per}}=0 \tag{5.1}$$

donde $A_{n-1} := i\mu\partial_x^n - i\alpha I$, *y si* $\varphi_1\sim\varphi_2$ entonces $T(\cdot)\varphi_1\sim T(\cdot)\varphi_2$.

Además, se satisface la siguiente regularidad: *Si* $\phi\in H^s_{per}$ entonces T(t) $\phi\in H^r_{per}$ $\forall t\in\mathbb{R}$, $\forall r\leq$ s y satisface que $\|T(t)\phi\|_{H^r_{per}}\leq\|\phi\|_{H^s_{per}}$, $\forall t\in\mathbb{R}$, $\forall r<$ s y $\|T(t)\phi\|_{H^s_{per}}=\|\phi\|_{H^s_{per}}$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

También, se obtiene que la aplicación: $\phi\to A_{n-1}T(\cdot)\phi$ que a cada dato $\phi\in H^s_{per}$ le asigna $A_{n-1}T(\cdot)\phi$, es continua. Esto es,

$$\|A_{n-1}T(t)\phi-A_{n-1}T(t)\tilde{\phi}\|_{s-n} \leq C\|\phi-\tilde{\phi}\|_s\,,\ \forall t\in\mathbb{R}\,,$$

donde C = máx $\{|\mu|,|\alpha|\}$.

Así,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|A_{n-1}T(t)\phi-A_{n-1}T(t)\tilde{\phi}\|_{s-n}\leq C\|\phi-\tilde{\phi}\|_s\,.$$

Además, $A_{n-1}T(t)\phi\in H^\theta_{per}$, $\forall t\in\mathbb{R}$, $\forall\theta\leq$ s - n, con $\|A_{n-1}T(t)\phi\|_\theta\leq C\|\phi\|_s$, $\forall t\in\mathbb{R}$, $\forall\theta\leq$ s - n.

Así,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|A_{n-1}T(t)\phi\|_\theta\leq C\|\phi\|_s\,,\ \forall\theta\leq s-n\,.$$

Prueba.- La prueba de (5.1) es análoga al del item 4 de la prueba del Teorema 3.1. Y la prueba del resto del enunciado también se sigue como la prueba del Teorema 3.1 y como consecuencia del Teorema 4.1.

ANÁLISIS DE LA DIFERENCIABILIDAD VERSUS DATOS INICIALES

Con la finalidad de enriquecer nuestro estudio, buscaremos el espacio infinito dimensional donde ocurre la diferenciabilidad y su conexión con el dato inicial.

Teorema 6.1 Sea s $\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-i\mu\partial_x^n u(t)+i\alpha u(t)\right\|_{H^{s-n}_{per}}=0\,,\quad \forall t\in\mathbb{R}$$

si y solamente si $\phi\in H^s_{per}$.

Prueba.- Sea $\phi\in H^s_{pe}$, la prueba lo hacemos análoga a la prueba de diferenciabilidad del teorema 3.1. Sea s $\in\mathbb{R}$, si $\phi\in H^s_{per}$ entonces u(t) = $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-i\mu k^n t}e^{-i\alpha t}\hat{\phi}(k)\,\phi_k$ y u es solución de (Q±).

Recuerde obtenemos

$$\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-i\mu\partial_x^n u(t)+i\alpha u(t)\right\|^2_{H^{s-n}_{per}}$$

$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s-n}|e^{-i\mu k^n t}e^{-i\alpha t}|^2\left|\frac{e^{-i\mu k^n h}e^{-i\alpha h}-1}{h}+i\mu k^n+i\alpha\right|^2|\hat{\phi}(k)|^2$$

$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s-n}\left|\underbrace{\frac{e^{-i\mu k^n h}e^{-i\alpha h}-1}{h}+i\mu k^n+i\alpha}_{M(h):=}\right|^2|\hat{\phi}(k)|^2\,. \tag{6.1}$$

Usando L'Hospital tenemos que M(h) → 0 cuando h → 0. Ahora, necesitamos la convergencia uniforme de la serie para habilitar el intercambio de límites. Para ello procederemos mayorando el k-ésimo término de la serie. Para h > 0 tenemos

$$\frac{e^{-i\mu k^n h}e^{-i\alpha h}-1}{h}=\frac{1}{h}\int_0^h(e^{-i\mu k^n s}e^{-i\alpha s})_s\,ds\,,$$

luego

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{-i\mu k^n h}e^{-i\alpha h}-1}{h}\right| &\leq \frac{1}{|h|}\int_0^h \left|e^{-i\mu k^n s}e^{-i\alpha s}\right| |-i\mu k^n - i\alpha|\, ds\\ &= \frac{1}{|h|}|\mu k^n+\alpha||h|\\ &\leq |\mu|k^n+|\alpha|\\ &\leq \underbrace{\text{máx}\{|\mu|,|\alpha|\}}_{C=}(k^n+1)\,.\end{aligned} \tag{6.2}$$

Usando la desigualdad (6.2) y (3.8) procedemos a mayorar $|M(h)|^2$ como sigue

$$|M(h)|^2 \leq \{2C(k^n+1)\}^2 \leq 4C^2\{1+k^2\}^n\,. \tag{6.3}$$

Pasamos a mayorar el k-ésimo término de la serie, donde usamos la estimativa (6.3)

$$\begin{aligned} I_{k,t,s} &:= (1+k^2)^{s-n}|M(h)|^2|\widehat{\phi}(k)|^2\\ &\leq (1+k^2)^{s-n}4C^2(1+k^2)^n|\widehat{\phi}(k)|^2\\ &= (1+k^2)^s 4C^2|\widehat{\phi}(k)|^2\end{aligned}$$

y como $\|\phi\|_s^2<\infty$ entonces la serie es convergente.

Así, usando el Teorema M-Test de Weierstrass tenemos que la serie converge uniformemente y por lo tanto es posible intercambiar los límites y obtener:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-i\mu\partial_x^n u(t)+i\alpha u(t)\right\|^2_{H^{s-n}_{per}} &= \\ \lim_{h\to 0} 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k,t,s} & \\ = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\lim_{h\to 0} I_{k,t,s}}_{=0} & \\ = 0\,. &\end{aligned}$$

Recíprocamente, si $\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-i\mu\partial_x^n u(t)+i\alpha u(t)\right\|_{H^{s-n}_{per}}=0$, $\forall t\in I\!R$, probaremos que $\phi\in H^s_{per}$. En efecto, como en H^{s-n}_{per} vale $\partial_t u(t)=i\mu\partial_x^n u(t)-i\alpha u(t)$, $\forall t\in I\!R$, en particular es válido para t = 0:

$$H^{s-n}_{per}\ni\partial_t u(0)=i\mu\partial_x^n u(0)-i\alpha u(0)= i\mu\partial_x^n\phi-i\alpha\phi=i(\mu\partial_x^n-\alpha I)\phi,$$

luego $\phi\in H^s_{per}$.

Así, se cumple el siguiente resultado, para t = 0.

Corolario 6.1 Sea s $\in H^s_{per}$

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(h)-\phi}{h}-i\mu\partial_x^n\phi+i\alpha\phi\right\|_{H^{s-n}_{per}}=0\,,$$

si y solamente si $\phi\in H^s_{per}$.

Ahora, en términos del grupo unitario $\{T(t)\}_{t\in I\!R}$, obtenemos los dos siguientes resultados cuyas pruebas son análogas a las pruebas del teorema 6.1 y corolario 6.1 respectivamente.

Teorema 6.2 Sea s $\in I\!R$,

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{T(t+h)\phi-T(t)\phi}{h}-A_1T(t)\phi\right\|_{H^{s-n}_{per}}=0\,,\quad \forall t\in I\!R$$

si y solamente si $\phi\in H^s_{per}$.

También se cumple el siguiente resultado,

Corolario 6.2 Sea s $\in I\!R$

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{T(h)\phi-\phi}{h}-A_1\phi\right\|_{H^{s-n}_{per}}=0\,,$$

si y solamente si $\phi\in H^s_{per}$.

Ahora, daremos las siguientes observaciones.

Observación 6.1 Resultado análogo al Teorema 3.1 es obtenido cuando n es par múltiplo de cuatro, donde la solución sería

$$V(t)=\left[\left(e^{i\mu k^{n}t}e^{-i\alpha t}\widehat{\varphi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee}$$

para el dato inicial $\varphi \in H^{s}_{per}$.

Observación 6.2 Resultado análogo al Teorema 4.1 es también obtenida cuando n es par múltiplo de cuatro, donde la familia de operadores introducida sería

$$U(t)\varphi=\left[\left(e^{i\mu k^{n}t}e^{-i\alpha t}\widehat{\varphi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee},\ \forall\varphi\in H^{s}_{per}.$$

Por lo tanto, la versión análoga al Teorema 5.1 es válido.

Finalmente,

Observación 6.3 Cuando n es impar, el problema (Q_{n+1}) no tiene solución.

CONCLUSIONES

En nuestro estudio de la ecuación tipo Schrödinger generalizada en espacios de Sobolev periódico hemos obtenido importantes resultados, entre los cuales destacamos:

1. Cuando n es par no múltiplo de cuatro, usando la teoría de Fourier, demostramos la existencia y unicidad de solución del modelo (Q_{n+1}), así como la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial.

2. Introduciendo una familia de operadores, la cual forma un C_0-Grupo unitario, reescribimos la solución del problema (Q_{n+1}), obteniendo resultados más elegantes.

3. En el análisis de diferenciabilidad de la solución versus el dato inicial obtenemos resultados como el saber en que espacio H^{r}_{per} existe la derivada $\partial_t u(t)=i\mu\partial_x^n u(t)-i\alpha u(t)$ y que esto depende mucho del espacio donde se tome el dato inicial.

4. Además, teóricamente hemos conseguido familias de operadores que forman Grupos unitarios de clase C_o.

5. Finalmente, también se analizó la existencia de solución para los otros casos de n.

REFERENCIAS

1. Iorio R, Iorio V. Fourier Analysis and partial Differential Equations. Cambridge Uni- versity; 2001.

2. Liu Z, Zheng S. Semigroups associated with dissipative system. Chapman Hall/CRC; 1999.

3. Mun˜oz Rivera, J.E. Semigrupos e equa¸c˜oes Diferenciais Parciais. Petropolis-LNCC; 2007.

4. Pazy A. Semigroups of linear operator and applications to partial differential equa- tions. Applied Mathematical Sciences. 44 Springer Verlag. Berl´ın; 1983.

5. Santiago Ayala Y. Global existence and exponential stability for a coupled wave system- Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications. 2012; 16(1- 2):29-46.

6. Santiago Ayala Y. Tópicos de An´alisis Funcional. Fundamentos y Aplicaciones. Ale- mania. Editorial Acad´emica Espan˜ola; 2014.

7. Santiago Y, Rojas S. Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit. Bulletin of the Allahabad Mathematical Society. 2017; 32(02):207-230.

8. Santiago Y, Rojas S. Existencia y regularidad de solución de la ecuación del calor en espacios de Sobolev Periódico. Journal Selecciones Matem´atica. 2019; 06(01): 49-65.

9. Santiago Y, Rojas S. Existencia y Regularidad de Solución de la Ecuación de Schr¨odinger No Homog´enea en Espacios de Sobolev Periódico. Journal Selecciones Matem´atica. 2021; 08(01):37-51.

10. Santiago Ayala Y. Existence of solution of a distributional problem for a generalized Schr¨odinger equation. Journal Selecciones Matem´atica. 2022; 09(01):91-101.