v. 2, n. 27, 2022

Journal of
Engineering
Research

DETERMINACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO DEL COMPORTAMIENTO DE LAS BOMBAS CENTRIFUGAS A PARTIR DEL TEOREMA DE BERNOULLI

Juan Antonio Tena Verdejo
Ingenieria Electromecánica Tecnológico Nacional de México, Campus Minatitlán; Veracruz, México

Rafael Jiménez Flores
Ingenieria Electromecánica Tecnológico Nacional de México, Campus Minatitlán; Veracruz, México

Francisco Santiago Gabino
Ingenieria Electromecánica Tecnológico Nacional de México, Campus Minatitlán; Veracruz, México

Sandra Zulema Tena Galvan
Ingenieria Electromecánica Tecnológico Nacional de México, Campus Minatitlán; Veracruz, México

Jose Salvador Oropeza Ramirez
Ingenieria Electromecánica Tecnológico Nacional de México, Campus Minatitlán; Veracruz, México

Jose Angel Torres Reyes
Campus Veracruz, Mexico

Resumen: El presente trabajo consiste en el análisis cuantitativo a partir de la cinemática involucrando a las variables que intervienen en los impulsores tipo cerrado que son utilizados en las turbos bombas para determinar en base al modelo matemático obtenido, el comportamiento mecánico energético de los impulsores pudiendo así obtener la energía de presión en el impulsor de esta maquinas
Palabras Clave: Modelo matemático de las bombas centrifugas.

INTRODUCCIÓN

Es evidente que el desarrollo actual de modelos, representa una herramienta útil, rápida y de bajo costo para el análisis de problemas ingenieriles reales. La confiabilidad y precisión de tales modelos es a la fecha un tema de interés científico. Lo anterior, debido a que se pretende que estos ofrezcan un resultado de tal manera que ya no sea necesario realizar experimentación para comparar la información obtenida numérica con respecto a la experimental. En este trabajo se tomaron los conceptos de Termodinamica y de Mecanica de los Fluidos, siendo la evaluación el balance de energía y la cinemática en los impulsores. Es importante mencionar que en las industrias de procesos químicos, petroquímicos y afines se utilizan compresores centrífugos para aire y gases de cuyo diseño y análisis están fundamentados en conceptos de Ingeniería MECANICA. En base a la ecuación fundamental de las turbo maquinas que determinó Euler a partir de la cinemática de los Impulsores, la cual determina la energía de presión (H) debido a la velocidad tangencial y a la componente axial de la velocidad absoluta. Puesto que la energía de presión es directamente proporcional al producto de las velocidades tanto axial y la componente axial.

DESARROLLO DEL SISTEMA

Ecuaciones de Euler

Consideremos ahora el punto A(x, y, z) en el centro del paralelepípedo rectangular de lados dx, dy, dz.

$$p= f(x,y,z)$$

Sea la presión en el punto A. La presión en la vertical izquierda será:

$$p + dp = p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

Y en la cara vertical derecha:

$$p + dp = p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

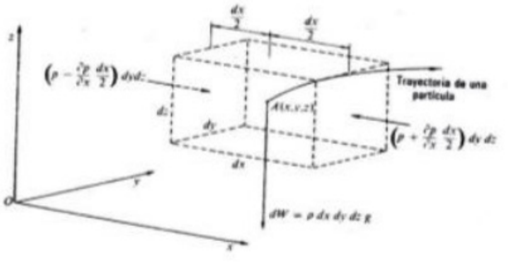

Fig.1

Sobre las seis caras del paralelepípedo actúa la fuerza debida a la presión por claridad en la fig. 1 solamente se han indicado las fuerzas debidas a la presión que actúan sobre las caras normales al eje x

El eje z se ha elegido como es costumbre en hidráulica vertical hacia arriba: por lo tanto sobre el paralelepípedo actúa la fuerza de la gravedad en la dirección negativa del eje z, como se indica en la figura siendo esta fuerza igual a la masa del paralelepipedo x la aceleración de lagravedad

$$dW = \rho\, dxdydz\, g$$

la segunda ley de newton (fuerza =masa x aceleración) según el eje x siendo la masa del paralelepípedo

Journal of Engineering Research ISSN 2764-1317 DOI 10.22533/at.ed.3172272223116

$$\rho\, dxdydz \frac{dv_x}{dt}\left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dydz$$

Proporciona la siguiente ecuación:

$$p\, dxdydz \frac{dvx}{dt} = (p - \frac{\alpha p}{\partial x}\frac{dx}{2})\, dvdz\, (p + \frac{\alpha p}{\partial x}\frac{dx}{2}) dydz$$

Dividiendo ambos miembros del parelepipedo *p dxdydz* y simplificando se tiene:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

O bien

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + vy \frac{\partial v_x}{\partial y} + vz \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

En virtud de la primera de las ecuaciones Análogamente para el eje y:

$$\frac{\partial vy}{dt} = -\frac{1}{p}\frac{dp}{dy}$$

O bien

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + vy \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x}$$

En la ecuación correspondiente eje z se ha introducido en el segundo miembro de la fuerza debida a la gravedad, indicada en la figura a saber:

$$-\rho\, \mathrm{g}\, dx\, dy\, dz$$

Con lo que se obtiene la tres ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial v_x}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$
$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial y}$$
$$\frac{\partial vz}{dt} = -\mathrm{g} - \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial y}$$

E introduciendo las ecuaciones de la aceleración:

Ecuaciones de Euler

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{dv_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{dv_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{dv_z}{\partial z} = -\mathrm{g} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

En régimen uniforme en la aceleración es igual a 0. Si suponemos en primer lugar que le línea de corriente en su horizontal y escogemos eje x en la dirección de la corriente el eje y horizontal y perpendicular a dicha dirección y en el eje *z* vertical, la ecuación se reduce a:

$$0 = -\mathrm{g} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

O sea

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \rho \mathrm{g}$$

y

$$\rho = -\rho \mathrm{g}\, z + C$$

O sea *p*+ *pg z* = cte. que la ecuación de la hidrostática. Si el régimen es uniforme y la línea de corriente no son horizontales, eligiendo de nuevo la dirección de la corriente como eje x y como eje z, dos ejes perpendiculares entre si situados en el plano transversal la integración de las dos ecuaciones correspondiente es a los ejes y, z convenientemente planteadas nos conduciría de nuevo a la misma ecuación de la hidrostática. De donde la siguiente conclusión:

Ecuacion de Bernoulli para el fluido ideal primera denunciando por integración delas ecuaciones de Euler psegún una línea de corriente, tomandola en forma sintetizada de las ecuaciones de Euler y multiplicando la primera Ecuacion por dx la segunda por *dy* y la tercera por *dz*, tendremos:

$$\frac{dv_x}{dt} dx = -\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x} dx$$

$$\frac{dv_y}{dt}dy = -\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial y}dy$$

$$\frac{dv_z}{dt}dz = -\ \mathrm{g}\ dz - \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial z}\ dz$$

Sumando miembros a miembros las tres ecuaciones tendremos

$$\frac{dv_x}{dt}dx + \frac{dv_y}{dt}dy + \frac{dv_z}{dt}dz$$
$$= -\ \mathrm{g}\ \ dz - \frac{1}{\rho}(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}\ dz)$$

Ahora bien, como

$$\frac{dx}{dt} = v_x\ , \frac{dy}{dt}v_y\ , \frac{dz}{dt}vz,$$

El primer miembro de la ecuación se transforma así

$$v_x\, dv_x + v_y\, dv_y + v_z\, dv_z = \frac{1}{2}d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2}d(v^2)$$

(en efecto, si se diferencian el segundo miembro de optiene el primer miembro, lo que demuestra que la validez del primer signo igual. Por otra parte, el cuadrado de la diagonal de un paralelo y pero es igual a la suma de los cuadrado de sus aristas, lo que demuestran la validez del segundo signo igual). Al suponer que el régimen es permanente, P no es funcional de t, Diferencial total será:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

Con lo cual la ecuaciones se transforma en

$$\frac{dp}{\rho} + \mathrm{g}\ dz + \frac{d(v^2)}{2} = 0$$

Integrando esta última ecuación, entre: cualesquiera 1 y 2, situada en una misma línea de corriente, que en régimen permanente coincide con la trayectoria del movimiento y siguiendo con hipótesis de un fluido incomprensible (p=c), se tienen

$$\frac{p_1}{\rho} + \mathrm{g}\ z_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \mathrm{g}\ z_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

Que nos dicen que la suma $(\frac{p}{p} + \mathrm{g}\ \ z + \frac{v^2}{2})$ es constante a lo largo de misma línea de corriente, ya que los puntos1 y 2 son sólo son dos. Cualesquiera de esta línea, o sea

$$\frac{p}{\rho} + \mathrm{g}\ z + \frac{v^2}{2} = c$$

Dividiendo los dos miembros de esta última ecuación por g se tiene

$$\frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} = c$$

O bien

$$\frac{p}{pg} + z1 + \frac{v^2 1}{2g} = \frac{p2}{pg} + z2 + \frac{v^2 2}{2g} = C$$

Ecuación de Bernoulli generalizada

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} - \Sigma H_{r1-2} + \Sigma H_b = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

Donde:

$p_1/p_g, p_2/pg$	Alturas de presión
z_1, z_2	Alturas geodésicas
$v_1^2/2g, v_2^2/2g$	Alturas en velocidades
ΣH_{r1-2}	Suma de todas las perdidas hidráulicas entre 1 y 2
ΣH_b	Suma de los incrementos de altura proporcionados por las bombas instaladas entre 1 y 2

A partir de la ecuación de Bernoulli generalizada en donde el punto 1 será la succión y el punto 2 la descarga en las bombas centrifugas fig. 2

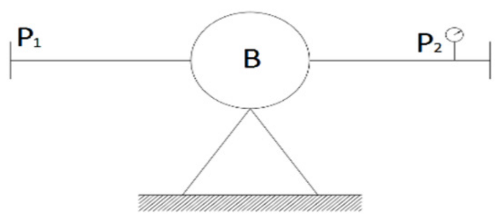

Fig. 2

Journal of Engineering Research ISSN 2764-1317 DOI 10.22533/at.ed.3172272223116

En una bomba no hay perdidas hidráulicas entre 1 y 2: $\Sigma H_{r1-2} = 0$ La ecuación queda de la siguiente manera:

$$H_b = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + z_2 - z_1$$

Donde:

$\frac{p_2 - p_1}{\rho g} = \frac{p_d}{\rho g}$ Presión de descarga de la bomba/ Energía de presión.

$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{v_d^2}{2g}$ Velocidad de salida/Energía Cinética.

$z_2 - z_1 = z_d$ Altura geodésica/Energía Potencial.

Sustituyendo las ecuaciones obtenemos la ecuación de Bernoulli para una bomba centrifuga:

$$H_b = \frac{p_d}{\rho g} + \frac{v_d^2}{2g} + z_d$$

A continuación los términos de la ecuación de Bernoulli los pondremos en función del caudal, a excepción de la energía de potencial (z_d) siendo este el termino independiente "C"

El término que representa la Energía cinética se trabajará con el principio de Continuidad:

Q=SV

Donde:

Q= Caudal

S= Área

V= Velocidad

Despejando la velocidad de la ecuación (42) $V=\frac{Q}{A}$

Y sustituyendo en el término de la energía cinética: $\frac{v_d^2}{2g} = \frac{\left(\frac{Q}{S}\right)^2}{2g} = \frac{Q^2}{2gS^2}$

El coeficiente: $\frac{1}{2gS^2}$ en virtud de tener los valores de gravedad y área constantes, su coeficiente será "A", por lo que se tendrá el siguiente término:

AQ^2 = Energía cinética expresada en función del caudal.

El término que representa la energía de presión se trabajara bajo la 2ª ley de Newton (Impulso)

F=mv

$$\frac{P_d}{\rho g} = \frac{\frac{F}{S}}{\rho g} = \frac{\frac{mv}{S}}{\rho g} = \frac{\frac{m}{S}\frac{Q}{S}}{\rho g} = \frac{\frac{m}{S^2}Q}{\rho g} = \frac{m}{S^2 \rho g}Q$$

El coeficiente $\frac{m}{S^2 \rho g}$ y tener los valores de masa, área y peso específico como valores constantes, su coeficiente será "B", por lo que se tendrá el siguiente término.

BQ= energía de presión expresada en función del caudal.

El término que representa la energía potencial será el término independiente C.

Sustituyendo los términos anteriores en la ecuación de Bernoulli obtendremos:

$$H_B = AQ^2 + BQ + C$$

Siendo esta ecuación el modelo matemático y cuya grafica es una parábola conocida como "CURVA CARACTERÍSTICA DE OPERACIÓN DE LAS BOMBAS CENTRIFUGAS"

CONCLUSIONES

El modelo matemático desarrollado, determina la curva de operaciones que se caracteriza como una parábola; determinada por sus variables hidráulicas tanto presión y caudales.

A partir de la ecuación de Bernoulli donde se refleja el comportamiento cinemático de los impulsores, que son parte importante de las variable que intervienen para obtener de manera analítica el análisis para la aplicación en la industria y que por conceptos de mecánica de fluidos es obtener una herramienta que determina la eficiencia energetica.

$$H_B = AQ^2 + BQ + C$$

Q	H
Q_0	H_{max}
Q_1	H_1
Q_2	H_2
Q_n	H_n

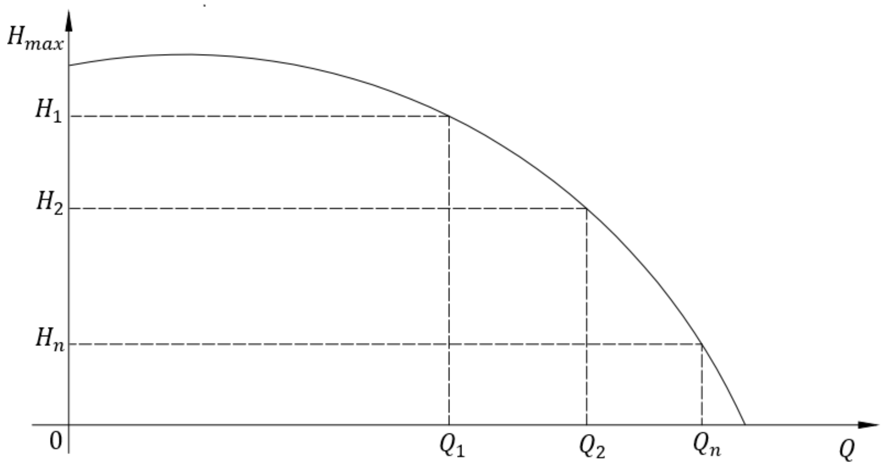

Figura. 3.

REFERENCIAS

Libros:

Cherkasski, V.M. "Bombas, ventiladores y compresores". Ed. Mir, Moscú, 1986.

Durnov, P.I. "Bombas, ventiladores y compresores". Ed. Vicha Chkola, Kiev, Odesa, 1985.

Pfleiderer, K. "Bombas centrifugas y turbocompresores". Ed. Labor S.A., España, 1960.

Néstor Ramos Páez, Jorge L. Jiménez H., Rafael Quesada P. "Erosión de los anillos de desgaste delanteros de las bombas de cachaza BSA 140-25". Ingeniería energética, Vol. Vlll, Ciudad de la Habana, 1987.

Claudio Mataix. "Mecánica de fluidos y maquinas hidráulicas". Ed. Alfa omega, segunda edición, 13° impresión, octubre 2005.

Viejo Zubicaray, Álvarez Fernández. "Bombas teoría, diseño y aplicaciones". Ed. Limusa, 3° edición, 2003.

Igor J. Karassik, Roy Carter. "Bombas centrifugas Selección, operación y mantenimiento". Ed. Cecsa, 14° impresión, mayo de 1987.