

EQUAÇÃO DO 2º GRAU COM UMA INCÓGNITA

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$S = -\frac{b}{a}$$

ÉDERSON ANTÔNIO FERREIRA PEREIRA

FRANCISCO HERMES SANTOS DA SILVA

Clay Anderson Nunes Chagas
Reitor Universidade do Estado do Pará

Ilma Pastana Ferreira
Vice-Reitora Universidade do Estado do Pará

Renato da Costa Teixeira
Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação

Anderson Madson Oliveira Maia
Diretor do Centro de Ciências Sociais e Educação

Fábio José da Costa Alves
Coordenador do PPGEM

Natanael Freitas Cabral
Vice coordenador do PPGEM

Diagramação e Capa: Os autores

Revisão: Os autores

Conselho Editorial

Profa. Dra. Acylena Coelho Costa
Profa. Dra. Ana Kely Martins da Silva
Prof. Dr. Antonio José Lopes
Prof. Dr. Benedito Fialho Machado
Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha
Profa. Dra. Celsa Herminia de Melo Maranhão
Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira
Profa. Dra. Claudianny Amorim Noronha
Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz
Prof. Dr. Dorival Lobato Junior
Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira
Profa. Dra. Eliza Souza da Silva
Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves
Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva
Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo
Profa. Dra. Glaudianny Amorim Noronha
Prof. Dr. Gustavo Nogueira Dias
Prof. Dr. Heliton Ribeiro Tavares

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
Prof. Dr. José Antonio Oliveira Aquino
Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes
Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento
Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo
Prof. Dr. Marcos Monteiro Diniz
Profa. Dra. Maria de Lourdes Silva Santos
Profa. Dra. Maria Lúcia P. Chaves Rocha
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Prof. Dr. Raimundo Otoni Melo Figueiredo
Profa. Dra. Rita Sidmar Alencar Gil
Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho
Profa. Dra. Talita Carvalho da Silva de Almeida

Comitê de Avaliação

Francisco Hermes Santos da Silva

Roberto Paulo Bibas Fialho

Gilvana Bezerra de Sousa

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)

Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Pereira, Ederson Antônio Ferreira

Equação do 2º grau com uma incógnita / Éderson Antônio Pereira
Ferreira, Francisco Hermes Santos da Silva, - Belém, 2022.

ISBN : 978-65-84998-19-3

Produto educacional vinculado à dissertação “Uma sequência didática para o ensino de equação do 2º grau com uma incógnita à luz da teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud” do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Universidade do Estado do Pará. Belém, 2022.

1. Ensino de matemática. 2. Equações. 3. Resolução de problemas. 4. Sequência didática. 5. Prática de ensino. I. Silva, Francisco Hermes Santos da. II. Título.

CDD. 23º ed. 510.7

Elaborada por Regina Coeli A. Ribeiro – CRB-2/739



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: "UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE EQUAÇÃO DO 2º GRAU COM UMA INCÓGNITA À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE GÉRARD VERGNAUD".

Mestrando: **ÉDERSON ANTÔNIO FERREIRA PEREIRA**

Data da avaliação: **29/11/2022**

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado à:*

Estudantes do Ensino Fundamental

Estudantes do Ensino Médio

Professores do Ensino Fundamental

Professores do Ensino Médio

Outros: _____

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

Sequência Didática

Página na Internet

Vídeo

Texto Didático (alunos/professores)

Jogo Didático

Aplicativo

Software

Outro: _____

b) *Possui URL:* Sim, qual o URL: _____

Não

Não se aplica

c) *É coerente com a questão-foco da pesquisa?*

Sim

Não. Justifique? _____

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*

Sim

Não. Justifique? _____

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*

Sim

Não. Justifique? _____

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Possui sumário:* Sim Não Não se aplica

b) *Possui orientações ao professor:* Sim Não Não se aplica

c) *Possui orientações ao estudante:* Sim Não Não se aplica

d) *Possui objetivos/finalidades:* Sim Não Não se aplica

e) *Possui referências:* Sim Não Não se aplica

f) *Tamanho da letra acessível:* Sim Não Não se aplica

g) *Ilustrações são adequadas:* Sim Não Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) Foi aplicado?

Sim, onde: Escola Pública Municipal de Tailândia-PA

Não, justifique: _____

Não se aplica

b) Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?

Sim, onde: EM OUTRAS ESCOLAS DE NÍVEL MÉDIO

Não, justifique: _____

Não se aplica

c) O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?

Sim, onde: ESCOLA PÚBLICA MUNICIPAL DE TAILÂNDIA-PA

Não, justifique: _____

Não se aplica

d) Em qual condição o produto educacional foi aplicado?

na escola, como atividade regular de sala de aula

na escola, como um curso extra

outro: _____

e) A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):

Alunos do Ensino Fundamental

Alunos do Ensino Médio

Professores do Ensino Fundamental

Professores do Ensino Médio

outros membros da comunidade escolar, tais como _____

outros membros da comunidade, tais como _____

O produto educacional foi considerado:

APROVADO APROVADO COM MODIFICAÇÕES REPROVADO

MEMBROS DA BANCA

Prof. Francisco Hermes Santos da Silva (Presidente)
Doutor em Educação
IES de Obtenção do Título: UNICAMP

Assinaturas


Prof. Roberto Paulo Bibas Fialho (Examinador 01)
Doutor em Ciências e Matemática
IES de Obtenção do Título: UFPA



Profa. Gilvana Bezerra de Sousa (Examinador 02)
Doutora em Educação
IES de Obtenção do Título: UFPA



SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	5
1 APORTES TEÓRICOS	6
1.1 VYGOTSKY E O DESENVOLVIMENTO DA APRENDIZAGEM	6
1.2 VERGNAUD E OS CAMPOS CONCEITUAIS.....	9
1.2.3 A Teoria dos Campos Conceituais e objeto matemático da pesquisa.....	21
1.3 POLYA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA..	27
2 SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES	36
2.1 ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR.....	36
2.1.1 Atividade 1.....	37
2.2 EXPERIMENTAÇÃO	40
2.3 CRITÉRIOS DE ANÁLISE.....	47
2.4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA (PROFESSOR).....	50
2.5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA (ALUNO).....	72
2.6 QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO	79
3 ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO: Equação do 2º grau	81
3.1 ASPECTOS HISTÓRICOS DA EQUAÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU	83
3.2 MÉTODO DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU INCOMPLETAS ...	91
3.3 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÃO DO 2º GRAU COMPLETA	92
REFERÊNCIAS	103

APRESENTAÇÃO

A sequência de atividades para o ensino de equação de 2º grau foi construída dentro do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará como produto de uma pesquisa de dissertação de mestrado.

Este produto educacional é destinado a professores e estudantes da educação básica, para ensino e aprendizagem de equação de 2º grau. Trata-se de um produto didático validado experimentalmente, que apresentou potencialidades quantitativas e qualitativas para o objetivo ao qual se destina: ensinar equação de 2º grau por meio de resolução de problemas do tipo objetivo e com aporte na Teoria de Campos Conceituais do teórico Gérard Vergnaud.

Este produto foi criado para proporcionar uma aprendizagem significativa e interativa sobre equação de 2º grau, considerando-se as diferentes linguagens matemáticas que possam dar significado a este objeto matemático, bem como o desenvolvimento da língua materna e algébrica como forma de argumentação e investigação matemática.

Ao longo da pesquisa de mestrado (PEREIRA, 2022) que resultou neste produto foram identificadas as dificuldades de ensino e aprendizagem no estudo de equação de 2º grau e pudemos realizar uma intervenção científica relevante para o ensino de matemática que atendesse as indicações curriculares brasileiras. Dessa forma, o professor de matemática deve considerar, em suas aulas, o desenvolvimento da autonomia do aluno e sua construção gradual de conhecimento para o desenvolvimento cognitivo que permita alcançar uma aprendizagem matemática com o mínimo de lacunas epistemológicas, lhe dando o conforto de uma aula atrativa, interessante e compatível com sua realidade e capacidades.

Nosso constructo se trata de uma sequência didática composta de três atividades voltadas ao ensino de equação do segundo grau, que considera, dentre outros fatores, a preparação cognitiva do educando por meio da retomada de conhecimentos prévios e uma metodologia de ensino validada empiricamente, com potencialidades qualitativas e quantitativas. Por fim, apresentaremos a instrução de todo material necessário para utilização deste produto educacional, bem como sua fundamentação.

1 APORTES TEÓRICOS

Para fundamentar o percurso metodológico de nossa pesquisa, apresentamos neste primeiro capítulo, os aportes teóricos adotados tanto para os levantamentos preliminares da pesquisa quanto para a construção do produto educacional e para análise de sua experimentação.

Inicialmente, foi feita uma pesquisa de revisão de literatura, na qual foram analisadas pesquisas diagnósticas e experimentais, bem como, livros didáticos que tratam do ensino de equação do 2º grau, para que pudéssemos identificar dificuldades e objetivos de ensino e aprendizagem desse objeto matemático. Além disso, buscamos nessa fase bibliográfica, metodologias de ensino que pudessem inspirar a concepção da sequência didática para ensino de equação do 2º grau. Em seguida, fizemos um estudo do objeto matemático considerando aspectos históricos e a epistemologia de métodos resolutivos de equação do 2º grau.

Após a fase preliminar, realizamos uma pesquisa exploratória e experimental, haja vista que construímos e experimentamos uma sequência didática planejada para o ensino de equação do 2º grau. Um dos critérios de análise dos resultados foram as análises da aplicação do pré-teste e pós-teste que serviram de subsídio para a validação do produto. Consideramos também nessa validação, os aspectos qualitativos como comparação do desenvolvimento da aprendizagem e amadurecimento cognitivo dos sujeitos da pesquisa.

Para tanto, a pesquisa e o produto educacional construído foram fundamentados sob a perspectiva da teoria da aprendizagem humana segundo Vygotsky (1988; 1991; 1995), da teoria de desenvolvimento cognitivo de Vergnaud (1990; 1993; 1996; 2003; 2009; 2014; 2019; 2020), chamada Teoria dos Campos Conceituais e pela metodologia de ensino Resolução de Problemas, conforme Polya (1978; 1996) e Sá (2021). Esses teóricos agregaram valor científico necessário para esta pesquisa de mestrado em ensino de matemática e fazem parte de todo o percurso metodológico que seguimos e apresentamos nas próximas seções.

1.1 VYGOTSKY E O DESENVOLVIMENTO DA APRENDIZAGEM

Para Vygotsky (1988), o desenvolvimento da estrutura cognitiva humana é um processo que se dá na apropriação da experiência histórica e cultural e valoriza a

interação pedagógica e meio social onde o educando esteja inserido. Assim, é com interação que o sujeito aprende. Logo, o sujeito pode ser estimulado por uma interação entre sujeitos com diferentes capacidades cognitivas que ao trocarem informações e conhecimentos desenvolvem a aprendizagem. Especificamente ao adotar a teoria de Vygotsky, tivemos em mente as seguintes considerações: “[...] seria necessário mencionar, pelo menos, as seguintes: a sociabilidade do homem, interação social, signo e instrumento, cultura, história, funções mentais superiores” (IVIC, 2010, p. 15).

Consideremos como analogia que, no processo de aprendizagem em meio à interação, entendemos esta como se fosse um mapa ou até mesmo um “GPS”¹ de um celular na nossa mão. Por exemplo, se um motorista pode prever o melhor trajeto por onde pode circular com efetiva previsão e segurança, então, da mesma forma, o educando, ao socializar seu pensamento, permite que o professor tenha melhor compreensão sobre como se deu a aprendizagem e conduza de forma satisfatória, o processo de ensino, considerando o tempo cognitivo individual.

[...] é precisamente o ponto essencial da concepção vygotskyana de interação social que desempenha um papel construtivo no desenvolvimento. Isto significa, simplesmente, que certas categorias de funções mentais superiores (atenção voluntária, memória lógica, pensamento verbal e conceptual, emoções complexas, etc.) não poderiam emergir e se constituir no processo de desenvolvimento sem o aporte construtivo das interações sociais (IVIC, 2010, p. 16).

Neste sentido, o desenvolvimento individual é construído no coletivo, “ou seja, entendemos ser necessário conjugar a coletividade e a individualidade, salvaguardados espaços para resolução de problemas e atendimento ao aluno” (SARMENTO, 2006, p. 129). Assim, não basta que o educando interaja apenas com o professor. A aprendizagem por meio da interação também se dá entre os pares aluno-aluno, bem como a interação do sujeito com o próprio objeto do qual falava Piaget. Por outro lado, Vergnaud (1996b) considera que os esquemas necessariamente se referem a situações a tal ponto que dever-se-ia falar não em interação sujeito-objeto, mas sim em interação esquema-situação.

¹ O GPS é um sistema de posicionamento de abrangência global em tempo real, desenvolvido pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos, nas últimas décadas do século passado (ZANOTTA; CAPPELLETO; MATSUOKA, 2011, p.2313).

Nesse contexto, na concepção da coletividade e da individualidade, devemos ficar atentos ao objeto e aos métodos de investigação, haja vista que “toda apresentação fundamentalmente nova dos problemas científicos conduz inevitavelmente a novos métodos e técnicas de investigação. O objeto e o método de investigação mantêm uma relação muito estreita” (VYGOTSKY, 1995, p. 47). Portanto, essa relação entre o objeto de estudo e o método de ensino exige uma reflexão cuidadosa e adequação às circunstâncias e peculiaridades de cada educando e de seu meio social.

Por outro lado, durante a aplicação após a adequação dos métodos ao objeto, é importante uma mediação semiótica², ou seja, o professor deve perceber os diversos tipos de linguagem dos sujeitos no processo que percorrem os momentos da aprendizagem. Essas linguagens podem ser verbais, ou seja, linguagem falada, na qual uma comunicação seja estabelecida entre o emissor e o receptor. Por outro lado, as linguagens não verbais podem ser transmitidas por gestos, escritas, signos, sinais, imagens, fotos, códigos, comportamentos, emoções etc. O autor afirma que é necessário utilizar muito mais que palavras ao expressar cada pensamento distinto:

Se tudo que desejamos expressar estivesse contido nos significados formais das palavras empregadas, para expressar cada pensamento distinto necessitaríamos utilizar muito mais palavras do que na realidade empregamos. Falamos somente com as alusões necessárias (VYGOTSKY, 1991, p. 323).

O momento de maior significado no curso do desenvolvimento intelectual, que dá origem às formas puramente humanas de inteligência prática e abstrata, acontece quando a fala e a atividade prática, até então duas linhas completamente independentes, convergem (VYGOTSKY, 1988, p. 27).

É complexo transmitir o pensamento em palavras, pois é um processo de construção e reconstrução. Por conseguinte, não é cem por cento o que realmente queremos transmitir; muitas vezes ele pode ficar oculto, as ideias implícitas. Não obstante, um gesto ou um símbolo pode repassar uma linguagem ou mudar totalmente o próprio processo de comunicação. Isto é, “a compreensão da linguagem consiste em uma cadeia de associações, que surgem na mente sob a influência das imagens semióticas das palavras” (IVIC, 2010, p. 74).

² “Semiótica é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno de produção de significação e de sentido” (SANTAELLA, 1983, p. 13).

Em Vygotsky (1988), o maior momento de significado no desenvolvimento intelectual é quando a fala e a atividade prática seguem um ponto comum. Apesar de serem independentes e que, segundo o autor, sejam formas originárias da prática e abstração da inteligência humana, a nosso ver o sujeito começa a falar mais ao se deparar com ações de situações mais complexas. A fala e a ação do sujeito fazem parte de uma mesma função psicológica complexa (MOREIRA, 2009). Nesse contexto, “quanto mais a ação exigida pela situação e menos direta a solução, maior a importância da fala na operação como um todo” (VYGOTSKY, 1988, p. 28).

Por outro lado, não temos a pretensão de exigir que o sujeito, por exemplo, aprenda a resolver problemas sobre equação do 2º grau de imediato, pois o próprio conceito de número negativo levou séculos para ser formalizado e naquela época houve resistências. Devemos perceber se o sujeito está em nível de interagir com o objeto de maneira autônoma, como denomina Vygotsky, em Nível de Desenvolvimento Real (NDR), ou em um nível que não é possível considerar tal objeto, o Nível de Desenvolvimento Potencial (NDP).

Temos ainda a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), pela qual o sujeito pode estar entre os dois níveis supracitados, ou seja, “existe uma faixa significativa de desenvolvimento em que o sujeito apresenta possibilidades de resolver problemas com a ajuda de parceiros mais experientes” (SILVA, 2016, p. 178).

Para melhor explorarmos, em nossa sequência didática, os elementos da teoria de Vygotsky sobre o desenvolvimento da aprendizagem, agregamos à pesquisa, elementos da Teoria dos Campos Conceituais para entendermos as ações dos estudantes diante das propostas das atividades durante a aplicação da Sequência Didática.

1.2 VERGNAUD E OS CAMPOS CONCEITUAIS

O insucesso do Movimento da Matemática Moderna (MMM), que perdurou ao longo da década de 1960, retomou as discussões do processo de ensino e aprendizagem de matemática e foi observada a complexidade desse processo, e este está relacionado a diversas variáveis que influem na ação educativa. A Didática da Matemática tem sua origem na década de 1970, com maior peso na França e enfoque nos estudos e discussões no que concerne à construção do conhecimento e às práticas metodológicas (ALMOULOU, 2007).

D'Amore e Godino (2006) colocam a Didática da Matemática como uma das faces do prisma da Educação Matemática que tem por base a matemática, cujas demais faces são constituídas da semiótica, epistemologia, sociologia, educação e psicologia, dentre outras que constituem as variáveis supracitadas e que confirmam a complexidade do processo de ensino e aprendizagem.

Percebe-se que a ação educativa não se sustenta somente a partir de procedimentos de memorização, exatidão, manipulações de algoritmos e da transmissão direta do conhecimento, características de um ensino pautado em bases tradicionais. É preciso considerar as demais variáveis envolvidas no processo e as particularidades de cada aluno, e, principalmente, a epistemologia do conhecimento matemático no contexto educativo.

Justamente nesse aspecto, se destaca a Teoria dos Campos Conceituais, originada e desenvolvida por Gerard Vergnaud desde a formalização da Didática da Matemática enquanto campo de pesquisa, pois nos fornece uma melhor compreensão do que é conhecimento e como ele é constituído na dinâmica das diversas situações que envolvem a aprendizagem.

1.2.1 As bases epistemológicas da Teoria dos Campos Conceituais

Os desafios enfrentados sobre a realidade escolar, especificamente em relação à aprendizagem na sala de aula, não são recentes. No século passado, por exemplo, produziu-se um conjunto de diversas abordagens sobre essa problemática que se caracterizaram como as teorias que discutem aspectos sociais da aprendizagem e as que focalizam os elementos cognitivos da aprendizagem.

Os que discutem os aspectos cognitivistas — dentre eles Piaget, Posner, Gertzog, Strike — priorizam os processos mentais da aprendizagem, nos quais o sujeito representa o mundo em sua mente. Já os teóricos que discutem a aprendizagem na perspectiva social (Vygotsky e Freire), defendem que a interpretação do mundo é influenciada essencialmente pelo status quo (estado das coisas) da sociedade.

No cenário atual, estudiosos afirmam que os processos que favorecem a aprendizagem estão relacionados a ambas as linhas de pensamentos: as interações que são estabelecidas no cotidiano (incluindo o processo dinâmico de sala de aula)

mais as estruturas cognitivas do aluno. O teórico francês Gérard Vergnaud representa esta linha de pensamento.

Gérard Vergnaud nasceu em 08 de fevereiro de 1933 na França. É matemático, filósofo e psicólogo francês, formado em Genebra. Desenvolveu seu doutorado sob orientação do psicólogo Jean Piaget. Devido a estas referências, suas ideias dos campos conceituais possuem raízes nas teorias do desenvolvimento propostas por Piaget e Vygotsky.

A partir de Vergnaud (1990a; 1990b; 1994) percebemos que a Teoria dos Campos Conceituais relaciona e usa dos conceitos da interação social, da linguagem e da simbolização presentes na teoria sociocultural de Vygotsky e os pressupostos da equilíbrio, adaptação e esquemas apresentados por Piaget, uma vez que traz em consideração forças externas e internas envolvidas no processo do desenvolvimento cognitivo do indivíduo.

Por fazer referência ao desenvolvimento cognitivo, possui como enfoque refletir sobre o ambiente de aprendizagem em termos conceituais, de modo a promover e desenvolver o conhecimento sobre como se aprende e as situações que corroboram para tal aprendizagem. Assim, os Campos Conceituais tratam da conceitualização como essência do desenvolvimento cognitivo (VERGNAUD, 1994).

No que concerne a este último, Moreira (2002) destaca que as ideias de Vergnaud sobre o desenvolvimento cognitivo apresentam-se pertinentes sobre o papel do conhecimento prévio que, muitas vezes, estão implícitas na mente do aluno e funcionam como gatilho na construção de novos conhecimentos e que o leva a discutir sobre as continuidades e rupturas na construção do conhecimento:

[...] o conhecimento prévio é o principal fator, isolado, que influencia a aquisição de novos conhecimentos. A aprendizagem significativa se caracteriza pela interação entre o novo conhecimento e o conhecimento prévio. É nessa interação que o novo conhecimento adquire significados e o conhecimento prévio se modifica e/ou adquire novos significados (AUSUBEL, 1980, apud MOREIRA, 2002, p. 20).

Deste modo, para os Campos Conceituais, a apreensão do conhecimento se dá pelas situações e problemas deparados e solucionados, e “esse conhecimento tem, portanto, muitas características contextuais” (Ibidem, p. 19). Portanto, o cerne de muitas de nossas concepções se origina das primeiras situações com que nos deparamos ou da experiência da interação nessa situação (VERGNAUD, 1996).

Vale ressaltar que, diferentemente da aprendizagem significativa (originada especificamente para o âmbito didático), a teoria de Vergnaud, embora tenha se iniciado pelo processo de conceitualização de estruturas aditivas e multiplicativas, não se restringe a isso, pois alcança outros campos conceituais que envolvem as relações de números, espaço, álgebra, dentre outros na matemática e em outras áreas do conhecimento —nos campos conceituais da física, como termodinâmica, eletricidade etc. e campos conceituais na história, nas artes, na geografia (D'AMORE; GODINO, 2006).

1.2.2 A estrutura da Teoria dos Campos Conceituais

Conforme supracitado, os Campos Conceituais de Vergnaud possuem suas bases epistemológicas na didática da matemática, com influências das teorias do desenvolvimento cognitivo e voltados ao processo de apreensão do conhecimento. Todavia, para se compreender as ideias relacionadas aos Campos Conceituais e sua própria definição é importante realizar uma reflexão sobre a noção de conceito.

O termo conceito vem do latim *conceptus*, que pode ser entendido como “coisa concebida” ou “formada na mente”. Segundo Maculan e Lima (2017), há polissemia e ambiguidade em sua linguagem natural, pois o termo é utilizado com diferentes acepções: noção, juízo, opinião, ideia ou pensamento. No Dicionário de Filosofia, Abbagnano (1998, p.164) define conceito como:

[...] todo processo que torne possível a descrição, a classificação e a previsão dos objetos cognoscíveis. Assim entendido, esse termo tem significado generalíssimo e pode incluir qualquer espécie de sinal ou procedimento semântico, seja qual for o objeto a que se refere, abstrato ou concreto, próximo ou distante, universal ou individual etc.

Logo, enquanto objeto cognoscível, conceito caracteriza-se como “um fenômeno que é apreendido pelo sujeito e cuja função é determinada por um dado contexto” (MACULAN; LIMA, 2017, p. 57). No âmbito da matemática, um conceito nunca ocorre isolado ou sozinho. Para ele poder se materializar, faz-se necessário estudar e refletir sobre o campo conceitual a que ele pertence.

Por exemplo, nas análises de multiplicação e divisão existem muitos conceitos implícitos e que exigem, muitas vezes, os conhecimentos prévios dos sujeitos para entender tais conteúdos. Há um vasto campo conceitual desses objetos, no qual “[...]”

um conceito remete a várias situações. Porém, reciprocamente, uma situação remete a vários conceitos” (VERGNAUD 2020, p. 6). Concordamos que um conceito nunca ocorre de maneira isolada, pois existe uma grande diversidade, a saber:

A análise das situações de multiplicação e de divisão, por exemplo, faz apelo a uma grande diversidade de conceitos: proporção simples e múltipla, função linear e não linear; multiplicação e divisão; múltiplo, divisor e quociente; fração e relação; análise dimensional; espaço vetorial... há, também, uma grande variedade de simbolizações: quadros, gráficos, equações (VERGNAUD, 2020, p. 06).

Para Vergnaud (2020), seria aberrante, nessas condições, estudar o desenvolvimento ou a aprendizagem de um único conceito como, por exemplo, a divisão ou a multiplicação. Dessa forma, julgamos que as equações do 2º grau não seriam diferentes, pois se enquadram nesse contexto e pressupõem uma reflexão do quanto seria necessário analisar os assuntos implícitos que as compõem: a potenciação, a raiz quadrada, a divisão, a operação com fração, o jogo de sinal etc. Assim, não podemos entender o conceito, como também os esquemas, de modo isolado um do outro. A mesma forma pode acontecer com as equações do 2º grau, as quais contêm campos conceituais de outros objetos que podem estar implícitos.

Por conseguinte, com a fórmula resolutiva, mesmo criticada por alguns educadores por se revelar apenas como exercício e aplicação de algoritmo, é necessário o domínio de vários outros conceitos (a potenciação, a raiz quadrada, a divisão, a operação com fração, o jogo de sinal etc.), os quais são pouco evidenciados dos que dela criticam, conforme elenca Silva (2016, p. 73):

1. de adição, subtração, multiplicação, divisão, radiciação e potenciação de números reais;
2. de operações com números relativos;
3. de operações algébricas;
4. de expressões numéricas e algébricas e suas regras operatórias.

Sobre essas lacunas dos conhecimentos prévios, os alunos acabam sendo avaliados como não possuindo competência para resolver equações de segundo grau. Nesse sentido, o professor, no momento da aplicação dessa tarefa, já poderia explicar tais lacunas sobre o objeto à medida que surgissem as dúvidas dos alunos, sem a preocupação em cumprir com o conteúdo escolar, de modo a não correr o risco de avaliar o produto em vez do processo, como discorre o autor a seguir: “[...] é uma

realidade do cotidiano escolar revelada pelas concepções de avaliação somativa como avaliação de produto e não de processo” (SILVA, 2016, p. 78).

Outro exemplo que podemos citar para analisar as múltiplas competências é a proporção. Ao transformá-la em equação, discorreremos sobre a necessidade de observar um grande número de situações e identificar a variedade de procedimentos e simbolizações. Assim, devemos considerar as rupturas e os tratamentos analógicos que se exige em cada uma delas e considerar também os esquemas, isto é, “uma aplicação (no sentido matemático) que toma suas entradas (informações) e suas saídas (ações, comando motores) em espaços multidimensionais” (VERGNAUD, 2020, p. 9).

Por outro lado, não seria suficiente um único exemplo de atividades de deslocamento do corpo no espaço, onde o conceito de esquema nas atividades sensório-motoras não é isolado. Sobre esta temática, Vergnaud (2020, p.7) aborda sobre a representação:

[...] ‘subir uma escada em caracol cujos degraus têm 20 centímetros de altura, de costas e transportando um móvel com um parceiro’ não deixa de estar ligada à competência que consiste em ‘subir uma escada cujos degraus têm 15 centímetros’. Se essas duas competências fossem objeto de pesquisas sistemáticas, seria aberrante estudar a primeira sem fazer referência à segunda.

Segundo o referido autor, os esquemas sensório-motores também formam campos cognitivos e comportam, como os conceitos, uma parte importante de *transpossibilidade* e de generabilidade. Portanto, como toda teoria, Vergnaud tem desenvolvido e expandido seu conceito e sua constituição estrutural, como vemos a seguir em algumas definições apresentadas por ele ao longo dos anos, referentes à ideia de Campo Conceitual:

[...] um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e provavelmente interligados no processo de aquisição (VERGNAUD, 1982, p. 40, tradução nossa).

[...] o benefício principal da TCC no ensino é a informação aos docentes sobre o processo dos alunos, que serão orientados pelos erros que eles cometem. Estes erros correspondem às hipóteses incompletas que os alunos percorrem numa aprendizagem (VERGNAUD, 2017, p. 34).

A teoria dos campos conceituais é uma teoria cognitiva que se propõe a fornecer um quadro coerente e alguns princípios básicos para o estudo do desenvolvimento e aprendizagem de competências complexas, sobretudo aqueles que dizem respeito às ciências e às técnicas. Como oferece um referencial para a aprendizagem, ela interessa à didática, mas não é apenas

uma teoria didática. O seu objetivo principal consiste em fornecer um quadro que permita compreender as filiações e as rupturas entre conhecimentos nas crianças e nos adolescentes, entendendo por 'conhecimentos' tanto o saber fazer como os saberes explícitos (VERGNAUD, 1990).

“uma teoria psicológica do conceito, ou melhor, da conceitualização do real que permite situar e estudar as filiações e rupturas entre 3 conhecimentos, do ponto de vista do seu conteúdo conceitual” (VERGNAUD, 1990, p.1).

Percebemos nas palavras de Vergnaud (1990) que o conhecimento possui uma estrutura organizacional, estabelecida a partir de campos conceituais desenvolvidos em um conjunto de situações e problemas de caráter teórico ou prático, em que o sujeito age diante de uma situação. Assim, para o autor, um conceito não se forma dentro de um só tipo de situação; uma situação não pode ser analisada apenas com um conceito, além de que a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação são um processo complexo e duradouro (MAGINA, 2005).

De acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, o conhecimento possui uma estrutura organizacional estabelecida a partir de campos conceituais desenvolvidos em um conjunto de situações e problemas de caráter teórico ou prático, em que o sujeito age diante de uma situação. Nessa perspectiva, a formação de um conceito baseia-se no triplete: “S, I, R”, sendo eles:

(S) é o conjunto de situações que dão sentido (significado) ao conceito;

(I) é o conjunto de invariantes operatórios que estruturam as formas de organização da atividade (esquemas) suscetíveis de serem evocados por essas situações;

(R) é o conjunto das representações linguísticas e simbólicas que permitem representar os conceitos e suas relações, e, conseqüentemente, as situações e os esquemas que elas evocam (VERGNAUD, 2009, p.29).

Para Vergnaud (1990; 1993), situação tem o sentido de tarefa, isto é, toda situação complexa é constituída de uma combinação de tarefas para sua compreensão. Não obstante, o autor destaca a importância do conhecimento da natureza e das dificuldades na execução no desempenho como um todo: “a dificuldade de uma tarefa não é nem a soma nem o produto das dificuldades das diferentes subtarefas envolvidas, mas é claro que o desempenho em cada subtarefa afeta o desempenho global” (VERGNAUD, 1993, p. 9).

Referente à apreensão do conhecimento, na perspectiva piagetiana, o conhecimento é uma adaptação a situações nas quais são necessárias ações. Neste sentido, no âmbito do processo de ensino e aprendizagem, é essencial confrontarmos

as crianças com situações cujo foco está na realização de ações que desenvolvam conceitos, ferramentas e seus limites (VERGNAUD, 2008). Entendemos que este confronto com a criança seja mediante diferentes situações, mediante uma organização e intencionalidade, que nesse sentido, estabelece o desequilíbrio e restabelece o equilíbrio de forma a corroborar com a aprendizagem no processo descrito na teoria do desenvolvimento de Piaget.

Vergnaud (2014, p.305) destaca um dos fatos que melhor se estabelece na psicologia cognitiva: “é o de que o desenvolvimento do pensamento se faz por etapas e que certas grandes etapas são caracterizadas pela construção ou aquisição de novos invariantes operatórios”. O autor, ainda na mesma obra, ressalta que toda a história das ciências é pautada por descobertas de novas transformações e de novos invariantes e reconhece que é de Piaget o grande mérito de ter mostrado o papel de invariante na gênese da inteligência do bebê e na criança.

A noção de invariante operatório aplica-se, segundo o autor, ao próprio problema da função simbólica, isto é, à passagem da realidade à representação. Ele defende que os invariantes asseguram sua eficácia para representação. Assim, nos mostra as duas funções dos invariantes: de refletir a realidade e de prestar-se a um cálculo relacional. Nesse sentido, para ser operatória, “a representação deve aplicar-se à realidade, e isto é tão verdadeiro quanto o critério da prática é verdadeiro para as crianças, assim como para o todo saber” (VERGNAUD, 2014, p. 309).

Por outro lado, podemos nos questionar que tipo de situações devemos mostrar aos nossos alunos que são referentes a isto. Vergnaud (2019)³ destaca que as situações podem ser categorizadas considerando-se o controle de seu desenvolvimento (aleatórias, regulares ou necessárias) e as interferências de ações externas (produtivas, passivas e interativas).

Na primeira classe, o autor caracteriza as situações aleatórias como aquelas em que não é possível prever os acontecimentos singulares e as situações regulares nas quais é possível prever os acontecimentos singulares. Todavia, não detemos o conhecimento dos processos que conduzem a esta regularidade, e, por fim, as situações necessárias são as que podemos prever, além de ter acesso aos processos,

³ É de nosso interesse a abordagem das categorias de situações apresentadas em Vergnaud (2019, p. 23-24), todavia ressaltamos que os conceitos apresentados em sua obra englobam as classes de situações fechadas e abertas definidas anteriormente (VERGNAUD, 1990, p. 2), uma vez que são desenvolvimentos da teoria neste aspecto.

“mas não dispomos de todas as categorias conceituais pertinentes para capturar a informação, prever ou agir” (VERGNAUD, 2019, p. 23).

Considerando a interferência de ações externas, temos: as produtivas, onde somente a própria ação do sujeito determina os efeitos e as variações; as situações passivas cuja ação não possui qualquer efeito, isto é, as interferências se dão por influências externas e as situações interativas cujas “variações dependem de determinantes externos e também da própria ação” (Ibidem, p. 24). Vergnaud (2019) estabelece a relação entre as duas categorias segundo o quadro 1.

Quadro 1 - Relações entre as categorias de situações

	Necessárias	Regulares	Aleatórias
Produtivas	Base e começo da racionalidade		
Passivas		Estações Astronomia	
Interativas			Teoria dos Jogos

Fonte: Adaptado de Vergnaud (2019, p. 24).

Nosso intuito é justamente destacar que cada tipo de situação possui objetividades e fornece contribuições no processo de aprendizagem⁴. Vergnaud (2019) vem mostrar possibilidades de sistematização para organização da prática docente em prol da apreensão do conhecimento por parte do aluno.

No Quadro 1 podemos observar, por exemplo, que o confronto dos alunos com situações baseadas nas categorias produtivas e necessárias favorecem o desenvolvimento inicial da racionalidade. Em contrapartida, situações com características interativas e aleatórias tendem a explorar os princípios da Teoria dos Jogos, que exige um nível maior de complexidade.

Assim, concordamos com Vergnaud (2009) no sentido de que o conhecimento matemático tem sua construção e significação em âmbito conceitual a partir de situações que confrontem o aluno de modo que este desenvolva seu conhecimento segundo as ferramentas que já possui, mesmo que inicialmente realizadas de forma intuitiva: o sujeito aprimora suas competências e pressupostos no decorrer do processo, a partir de diferentes situações na escola ou em outro espaço.

Neste sentido, o conhecimento é construído a partir de conhecimentos prévios que vão se adaptando às novas situações. Compete ao professor mediar este processo de interação do aluno com a situação, cujos esquemas e ações

⁴ Para maior aprofundamento no que concerne a exemplo de situações, a obra de Vergnaud (2019) apresenta ocasiões que exploram cada uma das categorias.

estabelecidas pelo aluno, utilizando seus conhecimentos (invariantes operatórios), possuem papel fundamental. Consideramos que os esquemas estão intrinsecamente relacionados aos invariantes operatórios, ou seja, não é possível nem devemos analisá-los de forma dicotômica. Sendo assim, buscamos discuti-los, a seguir, de forma a estabelecer uma conversação entre os conceitos.

Segundo Moreira (2002), os esquemas são a organização invariante do comportamento do sujeito para uma determinada classe de situações, ou seja, a maneira com que este agrupa os seus conhecimentos já internalizados (invariantes em ação) diante de situações equivalentes. Os invariantes operatórios, assim, correspondem aos conhecimentos contidos nos esquemas e representam justamente as estratégias utilizadas pelo sujeito diante da situação. É importante ressaltar que estes esquemas variam para cada sujeito, uma vez que a organização desses conhecimentos se dá por invariantes operatórios singulares que dizem respeito aos conhecimentos prévios em cada indivíduo (VERGNAUD, 1990b; 1996a).

Piaget introduziu o conceito de esquema para refletir sobre as habilidades sensório-motoras e as habilidades intelectuais. A primeira se refere à atividade realizada pelo sujeito caracterizada pela repetição (aquilo que já se conhece); já a segunda diz respeito à atividade enfatizada pela variação (quando determinada atividade é confrontada com novas situações). A esta síntese denominamos de unidade básica invariante. Portanto, o conceito de esquema organiza e dá sentido às ações, às situações e às representações simbólicas da dinâmica do percurso realizada pelo indivíduo. Vergnaud (2019, p.7) define esquema como:

[...] uma forma de organização da atividade, destinada a uma classe de situações. Ele inclui: (1) um objetivo ou vários; (2) regras de ação; de tomada de informação e de controle; (3) invariantes operatórios: conceitos-em-ação e teoremas-em-ação; (4) possibilidades de inferência.

Embora o algoritmo configure um esquema (VERGNAUD, 1996), o esquema de forma conceitual se diferencia deste, pois “não conduz necessariamente, com um número finito de passos, a uma solução do problema proposto, se houver uma, ou para uma demonstração de que não há solução” (VERGNAUD, 2019, p. 7). O algoritmo, por sua vez, para aplicação, exige o conhecimento de um conjunto de regras que, sendo de difícil ou quase impossível explicitação para as crianças, são por elas executadas.

A análise dos esquemas é essencial, pois se configuram elementos para observar competências e dificuldades dos alunos na aprendizagem. Não obstante, a análise permite realizar o diagnóstico dos mesmos a partir de seus esquemas estabelecidos para a resolução de um problema ou diante de determinada situação que, inclusive, pode ser errado mediante a solução da situação. Todavia, Magina (2005, p. 5) destaca que as competências podem ser analisadas sob três aspectos

[...] (a) análise do acerto e erro, sendo considerado competente aquele que acerta; (b) análise do tipo de estratégia utilizada, podendo alguém ser mais competente que outro, porque sua resolução foi mais econômica ou mais rápida, ou ainda, mais elegante; e (c) análise da capacidade de escolher o melhor método para resolver um problema dentro de uma situação particular.

Logo, destacamos o papel do professor de buscar compreender a construção do pensamento dos alunos na resolução das atividades. Em caso assertivo, qual linha de raciocínio (esquemas) o aluno estabeleceu; quanto aos erros, identificar o seu cerne, isto é, se o erro foi causado por manipulação incorreta do algoritmo, se este vem de uma base conceitual, isto é, de um conhecimento prévio necessário. O erro permite identificar as barreiras do estudante para apreensão do conhecimento.

Vale ressaltar que a interação entre professor e aluno nesse processo é fundamental, visto que o professor pode indagar o sujeito acerca dos procedimentos adotados. Segundo Vergnaud (1990), este diálogo desenvolve a maturidade do aluno, além de sua capacidade de argumentação.

Além disso, o autor aponta que os esquemas possuem dois tipos de conhecimentos, sendo eles os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação, base conceitual implícita e explícita dos Campos Conceituais. Essas categorias, segundo Moreira (2002), permitem aos sujeitos relacionar teoria e prática. São também designadas pela expressão mais global, denominada de Invariantes Operatórios, indispensáveis na articulação entre situação e esquema.

O teorema-em-ação é uma proposição tida como verdadeira sobre o real (situação), articula-se por meio de proposições que podem ou não acontecer, ou seja, fornece as regras que permitirão vincular os elementos e também agir nas inúmeras situações. O conceito-em-ação representa um objeto, um predicado ou uma categoria de pensamento considerada pertinente na ação em situação e formam os teoremas-em-ação que, segundo Moreira (2002), dificilmente conseguem ser explicados pelos sujeitos envolvidos na ação (VERGNAUD, 1996b).

Em relação aos teoremas-em-ação, Magina (2005) destaca que eles não são teoremas no sentido convencional, uma vez que não são explícitos e possuem alcance local, mas são intrínsecos ao comportamento dos alunos e configuram-se como as relações matemáticas levantadas por eles para lidar com os problemas.

Para Vergnaud (1996, 1996), existe entre os elementos supracitados uma relação dialética, visto que os conceitos são ingredientes dos teoremas e os teoremas são propriedades que dão, aos conceitos, seus conteúdos. Assim, os invariantes operatórios são responsáveis pela ação do sujeito ao se defrontar sobre determinada situação, que pode ser ou não apropriada.

Sua importância no processo de desenvolvimento do conhecimento é destacada por Vergnaud (2009, p.22):

[...] os invariantes operatórios são relevantes do ponto de vista cognitivo, uma vez que os conceitos-em-ação permitem retirar do meio as informações pertinentes e selecionar os teoremas-em-ação necessários ao cálculo, ao mesmo tempo, dos objetivos suscetíveis de serem formados e de regras em ação, de tomada de informação e de controle, permitindo atingi-los (2009, p. 22).

Logo, temos que os invariantes operatórios constituem os conhecimentos em ação do aluno implícitos e explícitos, e os teoremas-em-ação são os conhecimentos em ação implícitos em uma dada situação. Percebemos das colocações acerca dos invariantes operatórios que, no âmbito do processo da aprendizagem matemática, a resolução de um determinado problema não é o fundamental, mas sim o modo pelo qual ele foi operacionalizado e também os invariantes operatórios que os sujeitos utilizaram para resolver os problemas.

Jenske (2011), em sua pesquisa, buscou pôr em prática os estudos de Gerard Vergnaud acerca da Teoria dos Campos Conceituais em relação às operações fundamentais da matemática. A autora apresenta um modelo adaptado do Campo Conceitual que nos permite ter uma melhor compreensão da referida teoria.

Figura 1 - Mapa conceitual da Teoria dos Campos Conceituais



Fonte: Jenske (2011, p. 49).

Em síntese, na perspectiva dos Campos Conceituais o aluno apreende o conhecimento a partir da interação com as situações familiares. O conhecimento “inicia-se a partir de características locais. Consequentemente, todos os conceitos têm um domínio de características locais e todos os conceitos têm um domínio de validade restrito” (MAGINA, 2005, p. 3).

Logo, na aprendizagem de um conceito, o aluno precisa de um conjunto de situações (problemas de vários tipos) no qual vai utilizar os invariantes operatórios (conhecimentos em ação) para construir as representações simbólicas (esquemas) a fim de resolver o problema. Portanto, quanto mais tipos de problemas os alunos conhecerem, mais eles ampliam a compreensão das operações e das estratégias de resolução no processo de ensino e aprendizagem.

1.2.3 A Teoria dos Campos Conceituais e objeto matemático da pesquisa

Nessa subseção, buscamos relacionar a Teoria dos Campos Conceituais com nosso objeto matemático de pesquisa, isto é, a equação do 2º grau. Vergnaud iniciou os trabalhos dos Campos Conceituais a partir do estudo de dois grandes campos: o campo conceitual das estruturas aditivas e o campo conceitual das estruturas multiplicativas.

O campo aditivo envolve relações de parte-e-todo com conceitos de adição e subtração. São conceitos que organizam as estruturas aditivas: “Medida; Estado/transformação; Comparação significado/significante; Composição binária; Operação unitária; Inversão; Número natural/número relativo e Posição/abscissa/valor algébrico” (VERGNAUD, 2019, p. 12). Já o campo multiplicativo relaciona conceitos,

procedimentos e representações simbólicas como análise dimensional, espaço vetorial, dependência e independência, funções lineares, combinatória, área e fração.

Magina et al. (2001) realizam um estudo dos campos conceituais aditivos e classificam seus problemas em três relações de base, a partir das quais são gerados os problemas de adição e subtração, alguns deles trabalhados rotineiramente em sala de aula. Assim, os problemas aditivos são classificados como composição, transformação e comparação. Em termos de complexidades, os autores destacam níveis, cada qual com suas características em termos de exigência do trabalho cognitivo do aluno, os protótipos e as extensões, conforme a Figura 2.

Figura 2 - Tipos de situações-problemas na classificação no campo aditivo

	Tipo de situação-problema		
	Composição	Transformação	Comparação
Protótipo	<p>Todo desconhecido</p>	<p>Estado Final Desconhecido</p> <p>Subtração Adição</p>	
1ª extensão	<p>Parte desconhecido (Problema com inversão)</p>	<p>com $F > I$ com $F < I$</p> <p>Subtração Adição</p>	
2ª extensão			<p>Referido Adição</p> <p>Referente</p> <p>Referido Subtração</p> <p>Referente</p> <p>Referido Desconhecido</p>
3ª extensão			<p>Referido Adição</p> <p>Referente</p> <p>Referido Subtração</p> <p>Referente</p> <p>Relação Desconhecida</p>
4ª extensão (inversão)		<p>Inicial Final Adição</p> <p>Inicial Final Subtração</p> <p>Estado Inicial Desconhecido (problema com inversão)</p>	<p>Referido Adição</p> <p>Referente</p> <p>Referido Subtração</p> <p>Referente</p> <p>Referente Desconhecido (problema com inversão)</p>

Fonte: Magina et al. (2001, p. 51).

As situações-problemas do nível protótipo são aquelas que necessitam do estudante o trabalho com o pensamento aritmético, e os problemas de extensão exigem o pensamento algébrico, uma estrutura mental mais complexa. Para resolver problemas que trabalham o pensamento aritmético somente, o aluno necessitará fazer uso das operações de forma direta. Nos problemas algébricos temos uma maior

complexidade, o que gera dificuldades por parte dos educandos, pois precisam utilizar operação inversa, associações e conversões.

Os problemas da estrutura aditiva são representados pela estrutura matemática $a + b = c$. A variação desta sentença é que vai compor os diferentes tipos de problemas aditivos. No âmbito das equações polinomiais do 2º grau, devemos abordar os tipos de questões supracitadas nesse campo e, principalmente, com enfoque nos níveis de complexidade que exigem o trabalho do pensamento algébrico.

Segundo Vergnaud (2019), as estruturas multiplicativas formam uma rede de situações e conceitos que permitem analisar o desenvolvimento e a aprendizagem dos alunos. O autor ressalta ainda que os campos aditivo e multiplicativo exigem um tempo demorado para sua apreensão. Dentro dos campos aditivos e multiplicativos, o autor destaca a importância da álgebra e o domínio do pensamento geométrico para a aprendizagem matemática. Para o autor, o aluno deve:

(1) Saber o que fazer diante de uma equação dada. Atingir um certo objetivo, respeitar as regras. (2) Saber colocar um problema em equação e extrair as relações pertinentes, controlar sua independência. (3) Identificar os objetos matemáticos novos, equação e incógnita, função e variável. (4) Reconhecer a função da álgebra, resolver problemas incômodos; provar uma relação (Ibidem, p. 21).

Tais competências envolvem níveis de conceituação muito diferentes que são desenvolvidas por meio das variadas situações com que podemos confrontar o aluno em relação a um conceito matemático. No caso das equações do 2º grau, podemos desenvolver essas competências a partir do trabalho com os diferentes tipos de equação do 2º grau mediante problemas e diversas formas de sua aplicabilidade no contexto social, tais como: as ideias de área, perímetro, valor numérico, valores máximos e mínimos, intervalos, dentre outros.

Segundo Vergnaud (2019), as competências com relação à álgebra são muito significativas na ruptura com a aritmética ao atingir diferentes níveis de conceituação. Por exemplo, os itens (1) e (2) são baseados em esquemas ao se referenciar o que disse Piaget: “o sentido são os esquemas”. Por outro lado, (3) é baseado em conceituações explícitas e, por último, o (4) é metacognitivo⁵.

⁵ “A metacognição é aspecto central na implementação de uma cultura do pensamento, uma vez que é por seu intermédio que se pode [...] adquirir autonomia na gestão das tarefas e nas aprendizagens [...]” (DAVIS; NUNES; NUNES, 2005, p. 212).

A concretização da aprendizagem requer do aluno a afinidade com uma variedade de situações que deem sentido a um conceito e com diferentes níveis de complexidade. Desse modo, os Campos Conceituais permitem que o professor faça uma análise mais profunda sobre tais situações. Nesta análise, sem dúvida, está relacionada a dificuldade do sujeito com a álgebra. O autor, em recente pesquisa, notou inicialmente uma observação interessante baseada nos conhecimentos da aritmética, na qual afirma que a álgebra representa um importante desvio formal (VERGNAUD, 2019).

Essa diferença entre a aritmética e a álgebra evidencia-se ao caracterizá-la no quadro 2.

Quadro 2 - Diferenças entre aritmética e álgebra

ARITMÉTICA	ÁLGEBRA
incógnita intermediária	extração de relações pertinentes
escolha intuitiva dos dados	expressões formais dos enunciados e das operações
operações na boa ordem	algoritmo
controladas pelo sentido	controle: regras e modelo adequado

Fonte: Vergnaud (2019, p. 20).

Destacamos o exemplo da equação a seguir na qual, segundo Vergnaud (2019), torna-se necessário um dos exemplos simples chamado de roteiro-algoritmo:

$$3x + 14 = 35$$

$$3x + 14 - 14 = 35 - 14$$

$$3x = 21$$

$$3x/3 = 21/3$$

$$x = 7$$

Esse algoritmo contém várias operações elementares aritméticas, que Vergnaud (2019) deixou voluntariamente visíveis. “Mesmo com estas operações visíveis, os alunos têm dificuldade para apreciar o significado da álgebra, problema sobre o qual tropeçam muitos alunos do ensino fundamental” (VERGNAUD, 2019, p. 21).

Nesse caso, pressupomos que existam lacunas significativas sobre os conteúdos que antecederam tal assunto e que devemos utilizar como experiência ao tratarmos sobre problemas de equações do tipo quadrática. A inspiração em Piaget e Vygotsky, o direcionamento na disciplina escolar, a matemática, contribuem para o

autor elaborar uma definição de um campo conceitual em terna de três conjuntos, que Vergnaud (2019, p.12) definiu como:

(1) O conjunto de situações cujo domínio progressivo demanda uma variedade de conceitos, esquemas e representações simbólicas em estreita conexão. (2) O conjunto dos conceitos que contribuem para o domínio dessas situações. (3) O conjunto de formas linguísticas e simbólicas que permitem expressar os objetos de pensamento e as conceituações implícitas ou explícitas nessas situações).

Para definir esquema elementar, Vergnaud (2019) tomou como exemplo simples o da enumeração, onde crianças de 5 ou 6 anos enumeram objetos em cima da mesa a sua frente. Por outro lado, em outro exemplo o professor faz a contagem das crianças presentes em um ônibus para garantir que ele não se esqueceu de nenhum. Dessa forma, o autor organizou suficientemente para caracterizar a atividade em dois conceitos-em-ação, que são: o de cardinal, ou seja, medida do conjunto enumerado, o qual é discreto; e o de correspondência biunívoca, ou seja, entre os objetos de um lado (ou as crianças no ônibus) e os números pronunciados de outro lado (eventualmente evocados em voz alta ou em voz baixa).

Outro exemplo do mesmo autor, nessa mesma obra, é a atividade que agrega geometria plana relacionada ao retângulo. Chama a atenção também o fato de que a atividade de que trataremos a seguir, relacionada, por exemplo, à soma e que envolve também a geometria, não pode ser reduzida ao esquema elementar visto anteriormente aos dois conceitos, de cardinal e de correspondência biunívoca.

Tal atividade consiste em saber o número de torcedores que cabiam dentro de um estádio de futebol na Copa do Mundo de 1998, na França. “*Quantos lugares há em seu estádio?*”. Como havia dúvida se os lugares eram suficientes, o diretor do estádio resolveu contratar duas pessoas para contar, durante dois dias, o número de lugares (VERGNAUD, 2019, p. 6, grifo do autor).

Vergnaud (2019) afirma que, como há duas pessoas na contagem desse processo e havia uma partilha de atividade, supôs a estrutura do teorema da adição, ou seja, como cada um assume um papel de contagem com objetivo de encontrar o resultado esperado, no qual evidencia o conceito de numeração posicional ao indicar a soma das unidades, depois das dezenas e então os milhares. Assim, conclui que deve ser aplicado o algoritmo da adição, descrito pelo autor, conforme a seguir:

$$\mathit{Card}(A \cup B) = \mathit{Card}(A) + \mathit{Card}(B)$$

O autor comenta um caminho para descobrir o número de lugares relacionado à questão do problema: “[sobre] as partes retangulares do estádio, basta multiplicar o número de lugares por linha pelo número de linhas” (VERGNAUD, 2019, p. 6). A seguir, ele nos mostra a estrutura do algoritmo multiplicativo:

$$\mathit{Card}(R \times S) = \mathit{card}(R) * \mathit{Card}(S)$$

Ainda sobre a atividade relacionada ao estádio, nos chamou atenção a conexão do assunto com a geometria plana, especificamente relacionada ao cálculo da área do trapézio mediante a aritmética. Vergnaud (2019) observa que, para o canto angular do estádio, o problema é mais delicado. O autor então descreve os caminhos para se chegar a uma estrutura algorítmica que pressupomos ser semelhante à fórmula do trapézio.

$$\mathbf{SMédia} = ((\mathbf{Smax} + \mathbf{Smin})) / 2$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{SmédiamultiplicadaporR}$$

Para o canto do estádio, o problema é mais delicado; mas o mais velho dos dois propõe ao seu colega: “Você vai até a parte mais alta e conta a linha mais longa. Eu conto embaixo a linha mais curta; fazemos a média das duas e multiplicamos pelo número de linhas” (VERGNAUD, 2019, p. 7).

Para Vergnaud (2019), o mais velho seria o mais experiente cujo repertório de conhecimento sobre o assunto está muito além do mais jovem. Concordamos com o autor ao observar que, na análise dessa atividade, existem competências e formas conceituais distintas, e que, “graças a esta conceituação implícita, atividade e esquema permitem ir muito longe do que somente a ideia de competência, que não é muito analítica” (2019, p. 7). A atividade citada exige conhecimentos que pressupõem uma organização de esquema, a qual o autor define:

Um esquema é uma forma de organização de atividade, destinada a uma classe de situações. Ele inclui: (1) um objetivo ou vários. (2) regras de ação; de tomada de informações e de controle. (3) invariantes operatórios; conceitos-em-ação e teoremas-em-ação. (4) possibilidades de inferência (VERGNAUD, 2019, p. 7).

Devemos observar quando o autor afirma que tais características dos esquemas não conduzem necessariamente a uma solução do problema com um número finito de passos, mas reconhece que há proximidades com os algoritmos. Vergnaud (2019) afirma também que os algoritmos são esquemas, mas nem todos os esquemas são algoritmos.

Para entender mais sobre as características desses esquemas de modo a servir de análise às propriedades numeradas de um (1) a quatro (4) que ditamos anteriormente, Vergnaud (2019, p.7) diz que:

A primeira concerne à intenção, a segunda ao desenvolvimento temporal da atividade (ações e coleta de informação), a terceira às conceituações (frequentemente implícitas, eventualmente explícitas) que organizam esse desenvolvimento, a quarta aos cálculos que tomam lugar durante o percurso (subobjetivos e expectativas, lições obtidas).

Dessa forma, indicamos a relevância em compreender esses conceitos para compormos um arcabouço de conhecimentos necessários ao qual podemos ampliar nosso campo conceitual para uma aplicação em sala de aula e, assim, construirmos uma base teórica eficaz no processo de ensino e aprendizagem. Entendemos que aulas de matemática planejadas segundo a Teoria dos Campos Conceituais podem contribuir para a aprendizagem e para o ensino de um determinado conteúdo.

Contudo, podemos partir de alguma metodologia de ensino que o professor tenha domínio ou interesse. Portanto, apreciamos a apresentação do conhecimento teórico dessa metodologia, a qual poderá servir como proposta de uma possível formação continuada para docentes que ainda a desconhecem. Nesta pesquisa, adotamos a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, que apresentamos na seção a seguir.

1.3 POLYA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Na construção de nossa sequência didática, além de considerarmos as teorias de desenvolvimento da aprendizagem e dos Campos Conceituais, agregamos ao ensino de equação do 2º grau a metodologia Resolução de Problemas, a qual consiste em uma alternativa de ensino que estimula no educando o desenvolvimento da investigação e da autonomia, valorizando uma postura mais construtiva no

desenvolvimento do pensamento matemático, além do exercício da linguagem matemática e da língua materna.

No que concerne ao processo de ensino e aprendizagem de matemática, a resolução de problemas sempre teve seu espaço no desenvolvimento do conhecimento, como indicado na BNCC do Ensino Fundamental.

O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas (BRASIL, 2016, p. 266).

Considerando esta orientação curricular, em nossa sequência didática tivemos que adotar uma linguagem compatível com a dificuldade do aluno sobre o conhecimento da equação do 2º grau. Essa linguagem compatível a qual nos referimos são a potenciação, a raiz quadrada, operações com números racionais, ou seja, o Campo Conceitual mínimo necessário para o desenvolvimento da aprendizagem sobre equação do 2º grau. Por exemplo, na conversão da linguagem materna para linguagem algébrica, utilizamos as sentenças matemáticas como: o número, o dobro do número, o triplo, o quociente, a soma, a diferença entre um número e dois, ou seja, sentenças que envolviam a aritmética, as quais, em nossa concepção, eram adequadas à faixa etária dos educandos e poderiam facilitar o desenvolvimento da linguagem matemática por meio de Resolução de Problemas.

Segundo Sá (2021), a resolução de problemas como metodologia de ensino está dividida em três tipos: como um objetivo, como um processo e como um ponto de partida. Nesta pesquisa, adotamos a Resolução de Problemas como objetivo cujo modo de pensar resolução de problemas segundo o autor “implica ser suficiente no processo de ensino de Matemática expor a teoria e em seguida propor problemas mais ou menos engenhosos” (SÁ, 2021, p. 35).

Na resolução de problemas em uma sequência didática, nos moldes adotados nesta pesquisa, é necessário considerar os conhecimentos prévios dos sujeitos para que os problemas propostos sejam cognitivamente acessíveis a eles. É importante que o professor tenha em mente que um problema exige uma atividade mental nova e reflexiva para o educando, haja vista que “Exercício: é uma questão que você sabe como resolver imediatamente. • Problema: é uma questão que demanda muito

pensamento e desembaraço antes do caminho ser encontrado” (SÁ, 2021, p. 12). Embora, em nossa concepção a primeira afirmação sobre exercício, nem sempre isso ocorre.

Krulik (1997) estabelece os tipos de problemas. Conforme seu entendimento, temos a ideia de problema e exercício aproximadas; suas diferenciações estão em cada categoria pelas características já definidas. Para Krulik (1997, p.23):

Exercícios de reconhecimento: são todos aqueles que no enunciado pedem para identificar algo que já foi estudado; Exercícios algorítmicos: são aqueles que não exigem uma interpretação do enunciado, eles são mais diretos; Problemas de aplicação: estão relacionados aos cálculos de resultados mais práticos com aqueles enunciados tradicionais; Problemas de pesquisa aberta: são aqueles que não sugerem a forma de como se deve resolver o problema, esses tipos de problemas são mais complexos, exigindo um conhecimento que não cabe às séries iniciais; Situação-problema: são facilmente identificados pela forma do seu enunciado, exigindo do leitor uma análise minuciosa dos seus dados e verificando a solução.

No processo de ensino e aprendizagem é importante que um problema apresente uma situação próxima à realidade do aluno e que mostre em sua elaboração um nível de dificuldade desafiador, porém acessível, no sentido de exigir-lhe trabalho cognitivo e interessante, para que ele tenha gosto e vontade para buscar a resolução e não se restrinja à aplicação de fórmulas e realização de procedimentos determinados (DANTE, 1995).

Segundo Dante (1995), são objetivos da resolução de problemas: fazer o aluno pensar de forma produtiva, desenvolver seu raciocínio, ensiná-lo a enfrentar diferentes situações, dar oportunidade deste aplicar seus conhecimentos matemáticos, muni-lo com estratégias para resolver problemas e, por fim, dar-lhe uma boa base matemática. Por outro lado, por objetivo, “a resolução de problemas significa que se ensina matemática para resolver problemas (SÁ, 2021, p. 35).

Estudos apontam que, dentre as principais dificuldades na resolução de problemas, está a falta de hábito com a linguagem matemática, como nas conclusões do autor a seguir: “[...] dificuldade na aprendizagem de conteúdos básicos da matemática, a falta de interpretação e leitura de enunciados das questões, a falta de hábito com a linguagem matemática e o hábito com questões repetitivas e decorativas” (SILVA, 2017, p. 45). Desse modo, a resolução de problemas foi adotada nesta pesquisa como alternativa que possa minimizar tais problemáticas.

Além dessas questões repetitivas e mnemônicas virem acompanhadas, muitas vezes, por questões que não exigem muito esforço cognitivo, que trata-se apenas de uma aplicação mecanizada de conhecimentos, não evidenciam possíveis lacunas na aprendizagem do objeto matemático de estudo, de modo que o professor possa intervir e valorizar uma postura mais construtiva e investigativa nos sujeitos ao longo do desenvolvimento do pensamento matemático, e da capacidade de transformar a linguagem materna⁶ para a linguagem matemática ou vice-versa.

Os documentos oficiais, como os PCN, apontam que os instrumentos de avaliação, trabalhos, provas etc. devem considerar os registros escritos dos alunos como referência para as análises no processo de ensino aprendizagem. A resolução de problemas requer o registro dos procedimentos adotados, sejam eles procedimentos aritméticos ou algébricos, com ou sem apoio visual gráfico ou geométrico. Desse modo, o professor obtém indícios das competências e habilidades desenvolvidas por cada estudante ao analisar a maneira como ele se expressa em linguagem matemática, isto é, ao “[...] utilizar a linguagem matemática adequadamente para comunicar suas ideias, em desenvolver raciocínios e análises e em integrar todos esses aspectos no seu conhecimento matemático” (BRASIL, 1998, p. 55).

Ressaltamos que a linguagem matemática se manifesta de diferentes formas: linguagem gráfica, linguagem estatística, linguagem tabular, linguagem matricial, geométrica, algébrica etc. Neste trabalho, especificamente, demos ênfase à linguagem materna e à linguagem algébrica. Embora seja importante explorar o desenvolvimento de diversas linguagens matemáticas, pesquisas apontam a necessidade de curso de formação de alfabetização e o letramento para minimizar suas dificuldades didáticas, inclusive quanto ao uso da língua materna.

Por meio dos dados apresentados é possível inferir que o professor trava uma luta diária entre a situação ideal para o ensino de língua materna e o contexto de sua sala de aula. As dificuldades que mencionam são reflexo de uma realidade complexa: formação inicial deficiente que não os preparou para a reflexão sobre oralidade, variação linguística, ensino de leitura e de produção textual; salas com muitos alunos, material didático muitas vezes ruim, problemas relacionados à indisciplina, dentre outros fatores (PARISOTTO; RINALDI, 2016, p. 274).

⁶ Linguagem materna, aqui no Brasil, quer dizer a linguagem escrita na nossa língua portuguesa.

Por muito tempo, a utilização da Resolução de Problemas restringiu-se à prática, fixação e aprofundamento de conteúdo. Essa possibilidade da Educação Matemática desempenha papel muito além de uma aplicação dos conhecimentos matemáticos: deve-se considerar os conhecimentos prévios do sujeito, o ensino e aprendizagem e a avaliação. Por outro lado, “o problema deve ser acessível ao revolvedor e, para tal, é necessário: que ele tenha um conhecimento prévio de conteúdos matemáticos necessários para chegar a solução” (NUNES, 2010, p. 77).

A resolução de problemas caracteriza uma forma de atividade mental que exige inventividade e reflexão cujos objetivos na matemática escolar contemplam tanto os fins do currículo da matemática quanto os meios para os objetivos de desenvolvimento de conceitos e habilidades. Historicamente, e até hoje, se formou “a crença que predominou e que, possivelmente, ainda exista [que] é a de que só se aprende a resolver problemas por imitação, ou seja, vendo resolver problemas e imitando as atividades e procedimentos, de quem os resolve” (NUNES, 2010, p. 75).

Tal método tem servido no âmbito escolar, sua reprodução até hoje se justifica, todavia corresponde a uma abordagem que alcança apenas alguns alunos. Devemos ter em mente que a escola precisa ter como foco a aprendizagem de todos os alunos e deve buscar diferentes abordagens a serem trabalhadas em sala.

As primeiras investigações da resolução de problemas foram realizadas por Polya (1978), em sua obra intitulada “How to solve it”. Nela, o autor descreve maneiras de se planejar e resolver situações via resolução de problemas e destaca que, para se resolver um problema:

[...] primeiro, temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a idéia da resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a (POLYA, 1978, p. 3-4).

Podemos sistematizar o passo a passo em quatro elementos: familiarização, compreensão da ideia central, planejamento e retrospecto; entretanto, cada etapa não ocorre isoladamente e é essencial a mediação do professor, pois a interação possui papel fundamental. Segundo Flemming, Luz e Mello (2005), é por meio da interação entre aluno, problema e professor que aquele desenvolve cada um dos estágios para a resolução de problemas de tal modo que apreenda novos conhecimentos que, por

sua vez, acontecem em todas as etapas da resolução. Mas o que se constitui um problema?

Qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta (RAIVA; MORAES; GUERRA, 2015, p. 42).

Deste modo, se não há nada memorizado, ocorre o estímulo do raciocínio e da criatividade. Polya (1978) descreve uma resolução de problemas como uma busca consciente de alguma ação apropriada para atingir um objetivo definido, cujo percurso não se dá de forma imediata. Especificamente em relação a um problema matemático, trata-se de “qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la” (DANTE, 1995, p. 10). Não obstante, os Parâmetros Curriculares Nacionais apontam que:

[...] um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma seqüência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la (BRASIL, 2001, p. 44).

Em cada definição apresentada, podemos observar o destaque ao conhecimento perceptivo e intuitivo do educando e a promoção de um ambiente propício à criatividade. Com estas condições favoráveis, é possível se obter indícios de aprendizagem por meio da análise das estratégias adotadas na resolução de um determinado problema matemático.

Nessas condições, devemos refletir sobre o que seria um problema no ensino de matemática, visto que não há o conhecimento da sua solução, mas é possível ter-se acesso aos mecanismos de resolução. É neste ponto que temos a diferenciação de problema e exercício. O primeiro caracteriza uma situação em que o aluno apresentará dificuldades; e o segundo, por sua vez, constitui o desenvolvimento e o aprofundamento de conhecimentos que o aluno tem em situações já familiarizadas e o resolve de imediato.

Dessa forma, as definições são explícitas; todavia, sua caracterização em cada situação é relativa aos conhecimentos de cada indivíduo. Esses objetivos podem ser contemplados ou não, de acordo com a abordagem dada à resolução de problemas

no processo de ensino e aprendizagem. Como apresentado inicialmente, ela possui diversas funcionalidades.

Em síntese, ensinar sobre resolução de problemas corresponde a abordar o tema como um assunto para discussão e realça, quase sempre, modelos de resolução como os descritos por Polya (1978) ou algum modelo variante. Temos um enfoque nas formas pelas quais a matemática ensinada pode ser aplicada na resolução de problemas comuns (ou não) e, nesse sentido, o propósito principal está em se saber utilizar a matemática.

Quanto ao ensino via resolução de problemas, temos a problematização do ensino tradicional e o papel da resolução de problemas passa a ser discutido em uma perspectiva didático-pedagógica e considerado como uma forma de abordagem para a aprendizagem de um conhecimento. É importante saber o surgimento da Resolução de Problemas por meio da formação continuada de professores do grupo de trabalho e estudos.

Baseamo-nos em Andrade e Onuchic (2017) e Onuchic e Allevato (2011) ao adotarmos um roteiro que pudesse auxiliar no planejamento de nosso produto educacional e na análise de sua experimentação. Esse roteiro possui 9 (nove) etapas: preparação do problema; leitura individual; leitura em conjunto; resolução do problema; observar e incentivar; registro das resoluções na lousa; plenária; busca do consenso; e formalização do conteúdo. O detalhamento de cada uma dessas etapas é apresentado no Quadro 3.

Quadro 3 – Roteiro de resolução de problemas

ETAPA	DETALHAMENTO
1. Preparação do problema	O professor escolhe o problema que servirá para introduzir um novo assunto.
2. Leitura individual	Uma cópia do problema é entregue ao aluno e este faz sua leitura.
3. Leitura em conjunto	Formam-se grupos e estes releem e interpretam o problema. O professor pode esclarecer dúvidas tanto referentes a palavras não compreendidas como eventuais dúvidas do que se pede no problema.
4. Resolução do problema	O grupo usa seus conhecimentos anteriores na busca pela solução.
5. Observar e incentivar	O professor monitora os trabalhos e atua como mediador das dúvidas. Entretanto, deve tomar cuidado para não dar as respostas prontas aos alunos. Por meio de questionamentos, o professor deve intervir e/ou estimular o desenvolvimento do trabalho.
6. Registro das resoluções na lousa	Representantes dos grupos são convidados a registrar suas resoluções na lousa.
7. Plenária	Promove-se uma discussão coletiva das resoluções apresentadas. O professor atua como guia e mediador das discussões.
8. Busca do consenso	A partir da análise conjunta das resoluções, busca-se chegar à conclusão sobre os resultados corretos.
9. Formalização do conteúdo	O professor formaliza o conteúdo, apresentando linguagem e notação matemática adequadas.

Fonte: Adaptado de Onuchic e Allevato (2011, p. 83–85).

As versões mais atuais dos roteiros, segundo as autoras, acrescentam na terceira edição o décimo item, que consiste em propor novos problemas referentes ao problema gerador, o que possibilita “consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem como aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo ou tópico matemático” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 46). A versão mais recente desse roteiro possui 11 etapas, dentre as quais a primeira etapa passou a ser “formar grupos” (ANDRADE; ONUCHIC, 2017).

Percebemos, nas conclusões das pesquisas recentes, que o roteiro poderá se adequar às necessidades: “entendemos que adequações no roteiro podem ser feitas conforme as necessidades, desde que não se deixe de fazer o essencial, que é realizar a discussão coletiva (plenária) e a formalização do conteúdo” (AZEVEDO; FIGUEIREDO; PALHARES, 2020, p. 7). Neste sentido, embora haja um roteiro que facilita a adoção de resolução de problemas em aulas de matemática, não há formas rígidas.

[...] ao considerar o ensino-aprendizagem-avaliação, isto é, ao [se] ter em mente um trabalho em que estes três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que, enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81).

Nesse contexto, os alunos analisam os seus próprios métodos e as soluções do problema. Verificam o seu pensar matemático para dar sentido ao que fazem. Por outro lado, o professor reorienta quando necessário, avalia o que está ocorrendo para dar suporte aos resultados pretendidos. Para isso, “[...] tarefas ou problemas podem e devem ser colocados de forma a engajar os estudantes em pensar e desenvolver a matemática importante que precisam aprender” (RAIVA; MORAES; GUERRA, 2015, p.3).

Percebemos que a resolução é parte fundamental de toda a aprendizagem matemática. “Quando os professores ensinam matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão” (ONUCHIC 1999, p. 208). Além disso,

[...] a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática, e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e

métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las (BRASIL, 1998, p. 40-41).

Considera-se, assim, a resolução de problemas como um caminho para fazer matemática em sala de aula, na qual o problema é o ponto de partida do estudo da matemática e o trabalho de conceitos, ideias e métodos devem ser abordados por meio de problemas. No entanto, no uso desta tendência é importante que o professor trace um caminho para trabalhar as tarefas que serão selecionadas e planejadas a cada dia, levando em consideração o conhecimento prévio dos sujeitos.

Entendemos que a resolução de problemas detém grande importância na ação educativa do aluno, na prática docente e no processo de avaliação da aprendizagem. Identificamos também a importância da interação professor X aluno, aluno X aluno e, principalmente, a interação aluno X situação. Percebemos nisto, uma estreita relação da resolução de problemas e os pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais. Nesse ponto, foi que optamos por utilizar esses princípios numa forma organizada, a Sequência Didática, para o ensino das equações polinomiais do 2º grau.

2 SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Nesta seção, temos a materialização de nossa sequência de atividades, que se apropriou das fundamentações dos estudos apresentados na íntegra em nossa dissertação disponível em: https://ccse.uepa.br/pmpem/?page_id=23.

2.1 ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

A sequência didática que construímos para o ensino de equação do 2º grau foi embasada nos aportes teóricos apresentados no Capítulo 1, em pesquisas sobre o tema e o ensino desse conteúdo escolar, além das experiências formativas e de orientação ao longo do curso de Mestrado profissional em ensino de matemática.

Trata-se de uma sequência de atividades planejadas para construção gradual de conhecimentos e habilidades relativas à equação do 2º grau a nível da educação básica brasileira, considerando-se as orientações curriculares para o ensino desse conteúdo de matemática, normalmente ministrado ao final do ensino fundamental. O Quadro 4 apresenta a estrutura da Sequência Didática.

Quadro 4 - Organização das atividades

ATIVIDADE	OBJETIVO	RECURSO
1 Composição algébrica da equação do 2º grau	Reconhecer as operações que envolvem a composição da equação do 2º grau e os coeficientes dos termos por meio da conversão de registros da linguagem materna (escrita) para a linguagem algébrica (simbólica).	- Retomada de conhecimentos prévios. - Roteiro impresso da atividade, caneta.
2 Resolvendo equação do 2º grau	Resolver equações do 2º grau e estabelecer características das soluções por meio de um método de resolução apresentado por meio de dado histórico.	- Texto de história da matemática. - Roteiro impresso da atividade, caneta.
3 Resolvendo problemas de equação do 2º grau	Resolução de problemas que envolvam aplicação da resolução de equações do 2º grau.	- Resolução de problemas. - Roteiro impresso da atividade, caneta.

Fonte: O autor (2021).

Todas as atividades foram desenvolvidas para aplicação preferencialmente em grupos, favorecendo a interação e troca de ideias. Além disso, é necessário acompanhar o andamento das execuções, tendo o professor que intervir de forma a mediar a superação de zonas de tensão, sem ferir a autonomia dos estudantes e respeitando o tempo cognitivo de cada um, bem como incentivando a troca de ideias entre os educandos e sua socialização com a turma.

2.1.1 Atividade 1

A Atividade 1 foi pensada com o objetivo de promover o reconhecimento das operações que envolvem a composição da equação do 2º grau e os coeficientes de cada termo por meio da conversão de registros da linguagem materna (escrita) para a linguagem algébrica (simbólica). Na questão 1, os alunos devem preencher 3 quadros de modo gradativo, com a finalidade de desenvolver a linguagem algébrica necessária para aprender a resolver problemas sobre equação do 2º grau com uma incógnita.

No Quadro 1 utilizamos sentenças através de um número desconhecido, cujo objetivo foi apresentar a linguagem materna sem a indicação simbólica da igualdade e do quadrado (grau dois), e, logo em seguida, nas colunas, escrevemos as representações algébricas e os valores dos coeficientes de cada termo. Para tanto, resolvemos as duas primeiras linhas, de modo que os alunos pudessem descrever sozinhos as conversões.

Nesse sentido, devemos propor aos sujeitos percepções das situações aditivas, ou seja, quais palavras remetem à adição e à subtração, bem como, a influência do sinal de subtração nos conceitos dos parênteses. Por fim, devemos chamar atenção para o termo independente. Dessa forma, associamos a ideia sequencial das operações aritméticas e algébricas, como a soma, subtração, produto, quociente, fração, seriação ou sequência, com o objetivo de converter gradualmente a linguagem materna para a linguagem algébrica.

No quadro 2, durante a discussão entre os estudantes, é necessário verificar se eles percebem que as situações deste mesmo quadro são do tipo multiplicativas, que envolvem coeficientes decimais e fracionários, quais palavras remetem à multiplicação e à divisão, além das características do quadro anterior.

No quadro 2, tivemos como objetivo evidenciar linguagens de números multiplicativos, inversos, sucessores, fracionários etc., por entendermos que muitos alunos, além de não conhecer tais tipos de números, podem apresentar dificuldades na hora de efetuar a multiplicação. Logo em seguida, nas colunas escrevemos as representações algébricas na forma simplificada da linguagem e os valores dos coeficientes de cada termo. Para tanto, associamos a ideia sequencial por meio das

operações aritméticas e algébricas ditas anteriormente, além de resolvermos dois exemplos, sem visar a simbologia da igualdade e do quadrado.

No quadro 3, durante a discussão entre os estudantes, o professor deve verificar se eles percebem que as situações envolvem termos com potenciação e que reúnem características dos quadros anteriores.

No quadro 3, temos agora como objetivo evidenciar a presença da linguagem “quadrado”, para apontar indícios iniciais referente ao nosso objeto. Nessa etapa, escrevemos nas colunas as representações algébricas na forma simplificada da linguagem e os valores dos coeficientes de cada termo. Julgamos ainda necessária a última conversão da linguagem materna para a linguagem algébrica. Na questão 2, por meio de um dos quadros 1, 2, 3, solicitamos que identificassem qual seria o maior grau da potência da incógnita e qual era esse grau. Por fim, perguntamos o que aconteceria se o coeficiente dos termos do 2º grau fosse zero.

Finalmente, no quadro 4, temos como objetivo completar as expressões indicadas na primeira linha do quadro, expressões de grau 2 com apenas um termo, depois expressões com grau 2 com dois termos, e, por fim, as expressões com grau dois com três termos. Dessa forma, deve-se evidenciar que tais expressões, quando indicadas pelo sinal de igualdade, correspondem a uma equação do 2º grau.

Na questão 2, as intervenções do professor, se necessárias, devem mediar a compreensão do que seja uma expressão algébrica do 2º grau e a restrição de existência para o coeficiente do termo de 2º grau. Após as socializações e conclusões dos alunos, o professor deve apresentar a forma algébrica da equação do 2º grau com sua definição formal.

2.1.2 Atividade 2

A atividade 2 foi elaborada com o objetivo de desenvolver a resolução de equações do 2º grau e estabelecer características das soluções de um método de resolução apresentado por meio de um recorte de texto histórico.

Na questão 1, o texto histórico pode ser lido pelo professor ou pelos alunos. O professor pode acrescentar outras informações ou dados; é possível que os estudantes fiquem curiosos por mais informações ou não saibam o significado de algumas palavras. É importante instigar uma explicação da ocorrência do símbolo de \pm na fórmula resolutiva apresentada.

Na questão 2, deve-se aplicar a fórmula apresentada no recorte do texto de história para se resolver as equações propostas. Possivelmente, há uma mediação do professor em situações nas quais seja preciso recorrer a manipulações para se chegar à forma algébrica da equação do segundo grau apresentada na atividade 1, a forma geral da equação.

Na questão 3, ao preencher o quadro, os estudantes devem observar e concluir a influência do $b^2 - 4ac$ na existência e quantidade de soluções. Após as discussões e conclusões, o professor deve formalizar o método de resolução da equação do segundo grau, abordando sobre o discriminante e as possíveis soluções.

A segunda atividade objetivou resolver equações do 2º grau por meio da fórmula resolutive e estabelecer características das soluções com o recurso da história da matemática, utilizando-se um recorte de um texto histórico. Nesse sentido, apresentamos a fórmula resolutive da equação do 2 grau, da qual Sridhara foi um dos pioneiros a estabelecer uma regra para resolvê-la. Para tanto, apresentamos oito equações identificadas com os respectivos itens (a, b, c, d, f, g, h), onde é solicitado que se complete o quadro com o valor de $b^2 - 4ac$, a condição de existência das respectivas equações dos itens já supracitados. Essas condições são para: Δ maior que zero, em que a equação possui duas raízes reais e diferentes; para menor que zero, a equação não possui raízes reais; por fim, para Δ igual a zero, quando a equação possui uma única solução.

2.1.3 Atividade 3

A última atividade de nosso constructo foi elaborada para desenvolver a resolução de problemas que envolvam aplicação da resolução de equações do 2º grau. Nessa etapa, elaboramos 6 problemas, do item (a) até o item (f), dos quais se deveria traduzir da linguagem materna para a algébrica, e depois se aplicar a fórmula resolutive.

Como indicamos na seção 1.3 da dissertação que originou esta Sequência Didática (PEREIRA, 2022), a resolução de problemas como recurso metodológico de ensino de matemática foi adotada na modalidade “objetivo”, isto é, nas atividades anteriores foi desenvolvida a teoria de resolução de equação do 2º grau que agora está sendo aplicada na resolução de problemas.

Assim, as questões são todas aplicações e problemas que envolvem resolução de equação do segundo grau. Devemos estar atentos se não falta algum conhecimento prévio ao estudante que o impeça de resolver as questões — nesse caso, deve-se intervir para que ele tenha condições de prosseguir.

Considerando pressupostos apresentados na seção 1.3, os educandos devem seguir o seguinte roteiro de resolução:

- ✓ Fazer um esquema ou desenho do que compreendeu;
- ✓ Identificar e organizar os dados e a incógnita;
- ✓ Formar a equação;
- ✓ Resolver a equação;
- ✓ Interpretar as soluções da equação no contexto do problema.

Essa atividade não é uma formalização de conhecimentos, mas o momento em que o professor percebe se, de fato, os conhecimentos foram desenvolvidos de forma satisfatória pelos educandos mediante o nível de sofisticação e da linguagem adotada por eles, considerando-se os pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais no desenvolvimento da aprendizagem dos sujeitos.

A seguir apresentamos a experimentação da nossa pesquisa com a amostra de 9 alunos do ensino fundamental.

2.2 EXPERIMENTAÇÃO

Para esta fase de nossa pesquisa, inicialmente tínhamos o planejamento de experimentar nossa sequência didática em uma turma regular do nono ano do ensino fundamental, presencialmente, na expectativa de alcançar um quantitativo entre 30 e 40 estudantes. Porém, devido ao cenário pandêmico da COVID-19 no ano de 2020 foram suspensas as aulas presenciais na rede pública municipal. Inicialmente, fizemos a tentativa de realizar nossa experimentação de forma remota, entretanto no município em que atuamos, essa modalidade se tornou inviável por conta do difícil acesso à internet e condições financeiras dos familiares dos educandos para proporcionar equipamentos como celular e computador.

Dessa forma, as sessões ocorreram, de modo presencial, no turno da manhã, sempre às segundas, terças e quartas-feiras, no horário de 10h às 11h, logo após às

aulas dos professores colaboradores que na ocasião, ministravam aulas de Português e Matemática para alunos do 9º ano, como forma de preparação para a prova Brasil.

Sendo assim, selecionamos uma amostra de 9 estudantes. Tivemos que repensar a estratégia de experimentação sem alterar o material construído, inclusive adequar as distâncias de 1,5 m entre as cadeiras dos alunos como medida de segurança sanitária. Dessa forma, com o apoio da gestão escolar e a colaboração do colega professor de Matemática, construímos o desenho da sala para apresentar aos pais e responsáveis, que aprovaram a quantidade de 12 alunos, bem como a distribuição deles na sala, porém, foi decidido, por medida de segurança, a amostra já mencionada. A proposta inicial ilustra a disposição dos alunos conforme a configuração da sala a seguir (Figura 3).

Figura 3 - Configuração da sala de aula



Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Em 2021, quando se flexibilizou o retorno gradual das aulas presenciais sob medidas sanitárias de distanciamento, higienização e uso de máscara, foi possível a realização de nossa experimentação. Desse modo, o apoio da gestão escolar na escola que atuamos foi fundamental, por entender a relevância dessa pesquisa para o desenvolvimento dos sujeitos participantes, que retornaram à escola com diversas lacunas cognitivas. Além disso, os pais/responsáveis dos sujeitos apoiaram e autorizaram a participação dos sujeitos por meio do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE).

Assim a experimentação aconteceu no segundo semestre de 2021 e o lócus de sua realização foi o município de Tailândia – PA, onde este pesquisador é professor efetivo de uma escola da rede pública municipal de ensino fundamental que possui 34

turmas, distribuídas nos turnos da manhã e da tarde, no total de 1006⁷ alunos, do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, além de alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA) da 3ª Etapa e 4ª Etapa.

A realização do nosso experimento contou com uma amostra de 9 (nove) alunos do 9º ano do ensino fundamental. As sessões ocorreram, no turno da manhã, sempre às segundas, terças e quartas-feiras, no horário de 10h às 11h.

Foram realizados 5 encontros, sendo que cada encontro foi contemplado com 1 hora de aula (60 minutos), totalizando 5 horas que foram utilizadas não só na aplicação, mas também organização, instrução e tempo dos alunos se concentrarem para iniciar as atividades. Utilizamos um diário de campo, gravações de áudio e coleta das atividades dos participantes da pesquisa. Os encontros aconteceram no dia e horário pré-estabelecidos em reunião com a gestão escolar, pais e responsáveis e o professor pesquisador, Éderson Antônio Ferreira Pereira, sendo que, para a dinâmica das atividades, os alunos foram divididos em grupos com três componentes.

Vale ressaltar que a aplicação da atividade 3 não foi realizada no dia 29 de outubro, em razão do Projeto Biblioteca Itinerante que ocorreu na escola, razão sobre a qual os alunos da pesquisa foram convidados a participar. Dessa forma, nossa atividade 3 foi aplicada no dia 05/10/21. Por fim, houve o pós-teste, que foi possível aplicar oito dias depois, conforme o cronograma descrito no Quadro 5.

Quadro 5 - Cronograma de experimentação e aplicação de testes

Atividade	Data	Tempo	Configuração dos Sujeitos
Pré-teste	20/09/21	1h	Individual
Atividade 1	23/09/21	1h	Grupo
Atividade 2	28/09/2021	1h	Grupo
Atividade 3	05/10/2021	1h	Grupo
Pós-teste	13/10/2021	1h	Individual

Fonte: Os autores (2022)

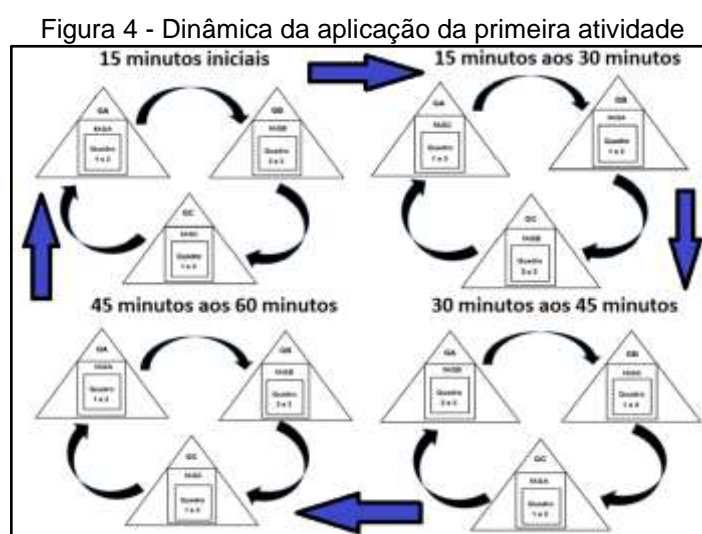
Foram formados 3 grupos com 3 componentes cada, os quais foram identificados por meio de crachás com o código que adotamos para preservar o anonimato dos sujeitos participantes da pesquisa. Assim no grupo A haviam os sujeitos A1, A2 e A3; no Grupo B os sujeitos B1, B2 e B3; no grupo C os sujeitos C1, C2 e C3.

⁷ Dado segundo o censo escolar do ano 2021 fornecido pela equipe gestora da escola.

2. 2.1 Atividade 1

O modo de aplicação de nossa sequência didática foi diferente em cada atividade. Nesta subseção, apresentamos a dinâmica da experimentação da atividade 1, que se desenvolveu considerando os quadros a serem preenchidos pelos educandos. Reunimos os estudantes de cada grupo nas cadeiras, a 1,5 m afastados uns dos outros, para garantir os protocolos de segurança sanitária.

Adotamos uma maneira que permitiu que os sujeitos de cada grupo fizessem um quadro e depois alternassem os grupos. Cada triângulo na ilustração representa três alunos de cada grupo e as setas, em negrito, indicam o sentido da dinâmica na troca das folhas de atividades. As setas coloridas representam os 15 minutos que cada grupo tem para realizar as atividades, de modo que todos os grupos preenchiam os quadros de forma alternada, conforme ilustrado na Figura 4:



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Coletamos os dados por grupo, e não individualmente. Antes de designarmos a divisão das tarefas dos quadros da Primeira Atividade (os quais serão mostrados adiante no texto) que têm como objetivo reconhecer as operações que envolvem a composição da equação do 2º grau e os coeficientes de cada termo por meio da conversão de registros da linguagem materna (escrita) para a linguagem algébrica (simbólica), ressaltamos que, ao final de cada 15 minutos, os quadros de cada grupo teriam que ser alternados, simultaneamente, com os respectivos blocos de atividades de cada grupo. Os quadros seriam intercalados a cada 15 minutos,

concomitantemente, com o bloco de cada atividade de cada grupo, de tal modo que todos tivessem oportunidade de interagir com as atividades em si.

Os primeiros 15 minutos:

Entregamos para o Grupo A, as folhas de Atividades do Grupo A (fAGA) e solicitamos que resolvessem apenas os quadros 1 e 2. Em seguida, os integrantes completariam em uma das colunas, os registros da linguagem algébrica e na outra coluna, os coeficientes de cada termo. As respostas solicitadas nessas colunas, eram a partir da linguagem materna propostas na primeira coluna nas quais, indicavam, o sucessor, o antecessor, o oposto, a terça parte, o produto, etc., para se relacionar com o número desconhecido, como parte de conteúdos mínimos necessários para resolver problemas do 2º Grau.

Percebemos logo nessa Primeira Atividade, dificuldades dos alunos para interpretar algebricamente, situações como “o dobro de um número” e “o quadrado de um número”, havia lacunas desses conhecimentos que dificultavam a conclusão durante o desenvolvimento da atividade. Nesse sentido, tiveram que completá-los no tempo de 15 minutos.

Para o Grupo B, entregamos as folhas de Atividades do Grupo B (fAGB) e solicitamos que resolvessem apenas os Quadros 2 e 3, que trataram das operações sobre os conteúdos ditos no parágrafo anterior por meio da linguagem materna. Por fim, no Quadro 3 havia a introdução da linguagem “quadrado” associada às operações e outras linguagens descritas nos quadros que antecederam o Quadro 3. Nesse sentido, tiveram que completá-los no tempo de 15 minutos.

Por fim, entregamos as folhas de Atividades do Grupo C (fAGC) e solicitamos que resolvessem apenas os Quadros 1 e 3 da Sequência Didática, onde os 15 minutos foram igualmente atribuídos. Nessa etapa, finalizaram-se os 15 minutos para todos os grupos. A partir desse momento, dos 15 aos 30 minutos, iniciou-se o processo de troca das folhas dessa primeira atividade, referente aos quadros preenchidos pelos grupos A, B e C, conforme descrevemos a seguir.

Dos 15 minutos aos 30 minutos.

Iniciamos as alternâncias simultâneas das folhas de atividades dos respectivos grupos juntamente com os quadros identificados. Ao fim dos 15 minutos iniciais, recolhemos as atividades de cada grupo e entregamos, desta vez, ao Grupo A as folhas de Atividades do Grupo C (fAGC), solicitando que resolvessem apenas os Quadros 1 e 3, que tratavam da linguagem materna de número desconhecido ao

oposto do antecessor de um número do Quadro 1, e, por fim, o Quadro 3, que mostra desde o quadrado do número desconhecido ao número acrescido do sucessor do quadrado desse número. Nesses Quadros 1 e 3, os alunos tinham que completar a representação algébrica e os coeficientes de cada termo.

Entregamos ao grupo B as folhas de Atividades do Grupo A (fAGA) e solicitamos que resolvessem apenas os Quadros 1 e 2. Em seguida, os integrantes completariam, em uma das colunas, os registros da linguagem algébrica e, na outra coluna, os coeficientes de cada termo. As respostas solicitadas nessas colunas eram, a partir da linguagem materna, propostas na primeira coluna, onde indicavam o sucessor, o antecessor, o oposto, a terça parte, o produto etc., para se relacionar com o número desconhecido, como parte de conteúdos mínimos necessários para resolver problemas do 2º grau.

Por fim, ao Grupo C entregamos as folhas de Atividades do Grupo B (fAGB) e solicitamos que resolvessem apenas os Quadros 2 e 3, que tratavam das linguagens — dentre elas, destacamos o produto de um número por menos três décimos, a terça parte do oposto de um número, ou seja, operações sobre os conteúdos em que pudéssemos identificar lacunas de conhecimentos nas colunas que indicavam a representação algébrica e os coeficientes de cada termo. No Quadro 3, com a introdução da linguagem “quadrado” associada às operações e outras como: “dois somado ao quadrado do sucessor de um número” e “um número adicionado ao quadrado do triplo desse número”, os alunos tinham que transformar linguagens que representassem na forma algébrica numa coluna e, na outra coluna, os respectivos coeficientes de cada termo.

Dos 30 minutos aos 45 minutos:

Nesse momento, solicitamos que os alunos parassem de fazer as atividades, recolhemos as folhas de cada grupo novamente e entregamos, dessa vez, ao Grupo A as folhas de Atividades do Grupo B (fAGB), solicitando que resolvessem apenas os Quadros 2 e 3, que tratavam das linguagens — dentre elas, destacamos o produto de um número por menos três décimos, a terça parte do oposto de um número, ou seja operações sobre os conteúdos em que pudéssemos identificar lacunas de conhecimentos nas colunas que indicavam representação algébrica e os coeficientes de cada termo. No Quadro 3, com a introdução da linguagem “quadrado” associada às operações, e outras como “dois somado ao quadrado do sucessor de um número” e “um número adicionado ao quadrado do triplo desse número”, os alunos tinham que

transformar em linguagem algébrica numa coluna e, na outra coluna, os respectivos coeficientes de cada termo.

Ao Grupo B, solicitamos que resolvessem apenas os Quadros 1 e 3, que tratavam da linguagem materna de número desconhecido ao oposto do antecessor de um número do Quadro 1, e, por fim, o Quadro 3, que mostra desde o quadrado do número desconhecido ao número acrescido do sucessor do quadrado desse número. Nesses Quadros 1 e 3, os alunos tinham que completar a representação algébrica simplificada e os coeficientes de cada termo.

Nessa etapa, ao Grupo C, entregamos as folhas de Atividades do Grupo A (fAGA) e solicitamos que resolvessem apenas os Quadros 1 e 2; em seguida, os integrantes completariam, em uma das colunas, os registros da linguagem algébrica e, na outra coluna, os coeficientes de cada termo. As respostas solicitadas nessas colunas eram, a partir da linguagem materna, propostas na primeira coluna, que indicavam o sucessor, o antecessor, o oposto, a terça parte, o produto etc., para se relacionar com o número desconhecido, como parte de conteúdos mínimos necessários para resolver problemas do 2º grau.

Dos 45 minutos até os 60 minutos:

Nessa etapa, todos os integrantes dos grupos A, B e C deveriam responder os itens a e b da questão 2. Dessa forma, tiveram que retornar aos Quadros 1, 2 e 3, para responderem em qual dos quadros está o maior grau da potência da incógnita e qual era esse grau. Já no item b, os alunos precisaram responder se mudariam o grau da expressão algébrica, caso o coeficiente do termo do 2º grau fosse nulo (igual a zero). Solicitamos que eles justificassem a resposta.

Assim, ressaltamos o objetivo da atividade 1, que era reconhecer as operações que envolvessem a composição da equação do 2º grau e os coeficientes dos termos por meio da conversão de registros da linguagem materna (escrita) para a linguagem algébrica (simbólica). Dessa forma, formalizamos que toda equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, onde os coeficientes $a \neq 0$, e b, c sejam números reais, é uma equação do 2º grau com uma incógnita.

2.2.2 Atividade 2

Antes de iniciarmos a experimentação da atividade 2, apresentamos um cartaz em papel do tipo 40 quilos para que os alunos visualizassem o recorte da

demonstração da fórmula resolvente da equação do 2º grau proposta por Sridhara, para facilitar o nosso trabalho, uma vez que só tínhamos 1 hora de aplicação da atividade. Foi feita a distribuição das folhas de atividades individualmente e da folha representativa de cada grupo, a qual devolveram no final, junto com as folhas individuais.

Mantendo-se a mesma configuração dos grupos, iniciamos a leitura do título, o objetivo e os procedimentos decorridos durante a aplicação. Logo em seguida, foi feita a leitura colaborativa do recorte da história da fórmula resolvente desenvolvida por Sridhara. O referido recorte foi retirado do artigo apresentado no Congresso em Fortaleza por Siqueira, Gama e Silva (2019). Durante a leitura, os alunos acompanhavam o nosso cartaz exposto como forma de dinamizar e facilitar a nossa aplicação.

Aos 10 minutos do final da atividade, fizemos a formalização da segunda atividade na qual, para resolver uma equação do 2º grau, utilizamos a fórmula resolvente. Explicamos as três condições do delta (Δ): quando ele for maior que zero, a equação possui duas raízes reais e diferentes; quando o delta for menor que zero, a equação não possui raízes reais; quando o delta for igual a zero, a equação possui uma única solução.

2.2.3 Atividade 3

Na experimentação da atividade 3, mantivemos a configuração grupal e cuidados sanitários de distanciamento. Cada grupo desenvolveu os problemas propostos a sua maneira e, sempre que necessário, havia a mediação do professor-pesquisador.

Ao final, formalizamos com as sugestões teóricas de Polya (1978) de resolução de problemas: estabelecer um plano; executar o plano; fazer um retrospecto da resolução completa, rever e discutir a solução.

2.3 CRITÉRIOS DE ANÁLISE

Esta pesquisa é um estudo de caso. Segundo Gil (2002, p.54), esse tipo de estudo “consiste no estudo profundo e exaustivo de um ou poucos objetos, de maneira que permita seu amplo e detalhado conhecimento, tarefa praticamente impossível

mediante outros delineamentos [...]”. Ponte (2006, p.2) diz que “Um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social.”

Neste sentido, a nossa experimentação foi realizada com uma amostra de 9 sujeitos. Decidimos por fazer uma análise de dados com cruzamento de critérios, a fim de levantarmos informações necessárias para o objetivo de nossa pesquisa: analisar as potencialidades didáticas e os indícios de aprendizagem na aplicação de uma sequência didática elaborada com base na Teoria dos Campos Conceituais e com resolução de problemas, do tipo objetivo, aplicada ao ensino de equação polinomial do 2º grau.

Assim, além da comparação quantitativa e qualitativa entre o pré-teste e pós teste, também analisamos o processo de ensino e aprendizagem por meio de nossa sequência didática sob a perspectiva dos Campos Conceituais em todas as atividades e da Resolução de problemas para a atividade 3.

Os critérios de análise estão no Quadro 6.

Quadro 6 – Critérios de análise

CRITÉRIO	ATIVIDADES	FOCO DA INVESTIGAÇÃO	TIPO DE ANÁLISE
Campos Conceituais	-Pré e Pós-teste -Todas as atividades da SD	Invariantes operatórios e representações linguísticas e simbólicas adotados.	Qualitativa
Resolução de Problemas	-Pré e Pós-teste -Atividade 3	Compreensão textual, capacidade de aplicar conhecimentos desenvolvidos nas atividades anteriores, capacidade de discutir, negociar ideias e socializar suas resoluções.	Qualitativa
Comparação de Pré-Teste e Pós-Teste	-Pré e Pós-teste	Estratégias de resolução, linguagens e invariantes adotados, quantitativo de acertos e erros.	Qualitativa e quantitativa

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Logo, os aportes teóricos adotados nesta pesquisa e apresentados no capítulo 1, são retomados aqui para fundamentar a análise de resultados que é apresentada a seguir. Para a comparação de pré-teste e pós-teste adotamos mesma metodologia de Branco (2020) exemplificada a seguir. A figura 5 ilustra o quadro recortado de Branco (2020) criado para análise comparativa da resolução de questões antes e após a experimentação da sequência didática, a fim de verificar indícios de aprendizagem promovidos pelo constructo por meio da análise de avanços ou regressões.

Figura 5 - Desempenho: Avanço e regressão

CLASSIFICAÇÃO	PRE-TESTE	PÓS-TESTE
AVANÇO	Sem resposta	Incorreto
		Parcialmente correto
		Correto
	Resposta sem sentido	Incorreto
		Parcialmente correto
		Correto
	Incorreto	Parcialmente correto
Parcialmente correto	Correto	
REGRESSÃO	Incorreto	Sem resposta
		Resposta sem sentido
	Parcialmente correto	Sem resposta
		Resposta sem sentido
		Incorreto
	Correto	Sem resposta
		Resposta sem sentido
Incorreto		
		Parcialmente correto

Fonte: Branco (2020, p. 82)

A seguir temos as Sequências Didáticas do professor e do aluno como proposta de atividade e desenvolvimentos em sala de aula.

2.4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA (PROFESSOR)

ESCOLA: _____

PROFESSOR: _____

ESTUDANTE: _____

DATA: _____

DISCIPLINA: _____ ANO/SÉRIE: _____

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE EQUAÇÃO DO 2º GRAU PRIMEIRA ATIVIDADE

TÍTULO: Composição algébrica da equação do 2º grau.

OBJETIVO: Reconhecer as operações que envolvem a composição da equação do 2º grau e os coeficientes dos termos por meio da conversão de registros da linguagem materna (escrita) para a linguagem algébrica (simbólica).

MATERIAL: Roteiro impresso da atividade e caneta.

PROCEDIMENTO:

- Formação de grupos de 3 a 4 estudantes;
- Cada integrante dos grupos irá receber uma folha com as atividades propostas nesta seção;
- Socialização das ideias e observações percebidas durante o procedimento;
- Após chegar a um consenso das observações, fazer uma síntese de ideias escrevendo as conclusões.

INSTRUÇÕES AO PROFESSOR: A atividade deverá ser desenvolvida preferencialmente em grupo para que haja interação entre os pares e não apenas entre professor e aluno.

Durante a discussão entre os estudantes, o professor deve verificar se eles percebem:

- a) No quadro ,1 a identificação da incógnita, ou seja, o número desconhecido, bem como as situações do quadro, as quais são do tipo aditivas e a influência do sinal negativo, diferenciando-o do sinal de subtração. Deve-se chamar atenção para o termo independente.

- b) No quadro 2 que as situações do quadro são do tipo multiplicativas, envolvem coeficientes decimais e fracionários, quais palavras remetem à multiplicação e à divisão, além das características do quadro anterior.
- c) No quadro 3 que as situações do quadro envolvem termos com potenciação e que reúnem características dos quadros anteriores.

Na questão 2, as intervenções do professor, se necessárias, devem ser para mediar a compreensão do que seja uma expressão algébrica do 2º grau e a restrição de existência para o coeficiente do termo de 2º grau.

Após as socializações e conclusões dos alunos, o professor deve apresentar a forma algébrica da equação do 2º grau com sua definição formal.

- 1) Complete os quadros a seguir com a representação algébrica (simbólica) correspondente e com o valor dos coeficientes das incógnitas de cada termo.

QUADRO 1

Linguagem materna	Representação algébrica	Valor dos coeficientes de cada termo
Um número qualquer	x	1
Um número mais sete	$x + 7$	+1; +7
O oposto do número	$-x$	-1
O oposto da soma entre um número e dez	$-(x + 10)$ $-x - 10$	-1; -10
	$-(x + 10)$ $+x + 10$	+1; +10
A diferença entre um número e dois décimos	$x - 0,2$ ou $\frac{x}{2}$ $x - \frac{10}{100}$	1; -0,2 ou $\frac{1}{2}$ 1; $-\frac{10}{100}$
A soma de um número com vinte	$x + 20$	1; 20
Dois inteiros e cinquenta centésimos menos um número	$2,50 - x$ ou $\frac{50}{100} - x$	2,50; -1 ou $\frac{50}{100}$; -1
Um número negativo adicionado a dez	$-x + 10$	-1; +10
Um número acrescido de cinco	$x + 5$	+1; +5
O sucessor de um número	$x + 1$	+1; +1
O antecessor de um número	$x - 5$	+1; -5
O oposto do sucessor de um número	$-(x + 1) = -x - 1$	-1; -1
	$-(x + 1)$ $+x + 1$	+1; +1
O oposto do antecessor de um número	$-(x - 1)$ $-x + 1$	-1; +1
	$-(x - 1)$ $+x - 1$	+1; -1

No Quadro 1, temos como objetivo apresentar a linguagem materna sem a indicação simbólica da igualdade e do quadrado (grau dois), e logo em seguida, nas colunas escrevemos as representações algébricas na forma simplificada, a linguagem e os valores dos coeficientes de cada termo. Para tanto, resolvemos as duas primeiras linhas de modo que os alunos possam descrever sozinhos as conversões. Utilizamos sentenças por meio de um número qualquer desconhecido. Dessa forma, associamos a ideia sequencial das operações aritméticas e algébricas, como a soma, subtração, produto, quociente, fração, seriação ou sequência, com intuito de converter gradualmente a linguagem materna para a algébrica.

Chamamos atenção à 4ª linha e às duas últimas linhas no quadro supracitado, onde as representações com parênteses, em especial as que estão corretas, da coluna que indica a linguagem materna, dividimos cada uma em duas partes na coluna do título: “Representação algébrica” simplificada e no “Valor dos coeficientes de cada termo”. Pelo fato de que, no enunciado da questão, pedimos somente a representação simbólica, bem como para se completar o valor dos coeficientes das incógnitas de cada termo, se o aluno respondesse ambas as formas, concluiríamos que ele cumpriu com o objetivo proposto da tarefa.

Ressaltamos que a partir da 4ª linha, as quais foram subdivididas, por exemplo, na coluna da linguagem materna: “O oposto da soma entre um número e dez”, observamos que a coluna do título “representação algébrica” foi subdividida para considerarmos as respostas dos alunos dos coeficientes de cada termo tanto dos alunos que sabiam adotar os conceitos dos parênteses quanto dos que não sabiam adotar. Desse modo, avaliaremos como correta e parcialmente correta, para valorizar e ampliar todas as movimentações cognitivas dos sujeitos.

Observações:

Conclusões:

QUADRO 2

Linguagem materna	Representação algébrica	Valor dos coeficientes de cada termo
Um número qualquer	x	1
O dobro de um número	$2x$	2
Cinco, acrescido do triplo de um número	$5 + 3x$	5; +3
O oposto do quádruplo de um número	$-4x$	-4

O produto de um número por menos três décimos	$x \cdot -0,3$ $-0,3x$	$-0,3$
O quociente de um número por menos seis	$\frac{x}{-6}$	$-\frac{1}{6}$
A metade de um número	$\frac{x}{2}$	$\frac{1}{2}$
A terça parte do oposto de um número	$\frac{-x}{3}$	$-\frac{1}{3}$
A quarta parte do sucessor de um número	$\frac{(x+1)}{4} = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$	$+\frac{1}{4}; +\frac{1}{4}$
	$\frac{(x+1)}{4}$	$+1; +1$
A metade do antecessor de um número	$\frac{(x-1)}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$
	$\frac{(x-1)}{2} =$	$+1; -1$
O sucessor do dobro de um número	$2x + 1$	$2; +1$
O dobro do sucessor de um número	$\frac{2(x+1)}{2x+2}$	$+2; +2$
	$2(x+1)$	$+1; +1$
O antecessor do triplo de um número	$3x - 1$	$3; -1$
O inverso de um número	$\frac{1}{x}$ Onde $x \neq 0$	1
O inverso da metade de um número	$\frac{2}{x}$ onde $x \neq 0$	1

No Quadro 2, tivemos como objetivo evidenciar linguagens de números multiplicativos, inversos, sucessores, fracionários etc., por entendermos que muitos alunos, além de não conhecerem esses tipos de números, podem apresentar dificuldades na hora de efetuar a multiplicação. Logo em seguida, nas colunas escrevemos as representações algébricas na forma simplificada, a linguagem e os valores dos coeficientes de cada termo. Associamos a ideia sequencial por meio das operações aritméticas e algébricas ditas anteriormente. Resolvemos também dois exemplos, sem visar a simbologia da igualdade e do quadrado.

Chamamos atenção para a 9ª, 10ª e 12ª linhas do quadro supracitado, em que as representações com parênteses, em especial as quais estão corretas, da coluna que indica a linguagem materna, dividimos cada uma em duas partes na coluna do título: “Representação algébrica” simplificada e na do “Valor dos coeficientes de cada termo”. Pelo fato de que, no enunciado da questão, pedimos somente a representação

simbólica, bem como para completar o valor dos coeficientes das incógnitas de cada termo, se o aluno respondesse ambas as formas, concluiríamos que ele cumpriu com o objetivo proposto da tarefa.

Observações:

Conclusões:

QUADRO 3

Linguagem materna	Representação algébrica	Valor dos coeficientes de cada termo
Um número qualquer	x	1
O quadrado de um número	x^2	1
O triplo do quadrado de um número	$3x^2$	+3
O quadrado do sucessor de um número	$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$	1; +2; +1
	$(x + 1)^2 =$	+1; +1
O quadrado do antecessor de um número	$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$	1; -2; +1
	$(x - 1)^2 =$	+1; -1
Dois somado ao quadrado do sucessor de um número	$2 + (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 3$	+1; +2; +3
	$2 + (x + 1)^2 =$	+2; +1; +1
Menos dois, acrescido ao triplo do quadrado de um número	$-2 + 3x^2$	-2; +3
O dobro do quadrado de um número menos esse número	$2x^2 - x$	2; -1
Um número adicionado ao quadrado do triplo desse número	$x + (3x)^2 = x + 9x^2 = 9x^2 + x$	+9; +1
	$x + (3x)^2$	+1; +3
Um número acrescido do quadrado de seu sucessor	$x + (x + 1)^2 = x^2 + 3x + 1$	+1; +3; +1
	$x + (x + 1)^2 =$	+1; +1; +1
O produto entre a soma de um número com sete e a diferença desse número com dois	$(x + 7)(x - 2) = x^2 - 2x + 7x - 14 = x^2 + 5x - 14$	+1; +5; -14
	$(x + 7)(x - 2) =$	+1; +7; +1; -2

O produto entre a diferença de um número com dois e o antecessor desse número	$\begin{aligned} (x-2)(x-1) &= \\ x^2 - x - 2x + 1 &= \\ x^2 - 3x + 1 & \end{aligned}$	+1; -3; +1
	$(x-2)(x-1) =$	+1; -2; +1; -1
Um número acrescido do sucessor do quadrado desse número	$\begin{aligned} x + (x^2 + 1) &= \\ x^2 + x + 1 & \end{aligned}$	+1; +1; +1
	$x + (x^2 + 1) =$	+1; +1; +1

No quadro 3, evidenciamos agora a presença da linguagem “quadrado” para apontar indícios iniciais referente ao nosso objeto. Nessa etapa, escrevemos nas colunas as representações algébricas na forma simplificada, a linguagem e os valores dos coeficientes de cada termo. Julgamos ainda necessária a última conversão da linguagem materna para linguagem algébrica. Na questão 2, a seguir, por meio de um dos quadros 1, 2 ou 3, solicitamos que o estudante identificasse qual o maior grau da potência da incógnita. Por fim, perguntamos o que aconteceria se o coeficiente do termo do 2º grau fosse zero.

Chamamos atenção para o fato de que da 4ª linha até a última do quadro supracitado, as representações com parênteses, em especial as que estão corretas, da coluna que indica linguagem materna, dividimos cada uma em duas partes na coluna do título “Representação algébrica” simplificada e na do “Valor dos coeficientes de cada termo”. Como no enunciado da questão pedimos somente a representação simbólica, bem como para completar o valor dos coeficientes das incógnitas de cada termo, se o aluno respondesse ambas as formas, concluiríamos que ele cumpriu com o objetivo proposto da tarefa.

Observações:

Conclusões:

2) Com relação aos quadros 1, 2 e 3, responda:

a) Em qual dos quadros está o maior grau da potência da incógnita. Qual é esse grau?

R: Quadro 3; grau dois.

b) Mudaria o grau da expressão algébrica se o coeficiente do termo 2º grau fosse nulo (igual a zero)? Explique.

R: Mudaria e se tornaria uma equação do 1º grau.

SEGUNDA ATIVIDADE

TÍTULO: Resolvendo equação do 2º grau.

OBJETIVO: Resolver equações do 2º grau e estabelecer características das soluções por meio de um método de resolução apresentado através de dado histórico.

RECURSO DIDÁTICO: Texto de história da matemática.

MATERIAL: Roteiro impresso da atividade e caneta.

PROCEDIMENTO:

- Formação de grupos de 3 a 4 estudantes;
- Cada integrante dos grupos irá receber uma folha com as atividades propostas nesta seção;
- A leitura do texto apresentado irá auxiliar nas atividades que seguem;
- Socialização das ideias e observações percebidas durante o procedimento;
- Após chegar a um consenso das observações, fazer uma síntese de ideias escrevendo as conclusões.

INSTRUÇÕES AO PROFESSOR: A atividade deverá ser desenvolvida preferencialmente com os mesmos grupos da atividade anterior, para que se possa acompanhar a evolução individual e grupal.

Na questão 1, o texto histórico pode ser lido pelo professor ou pelos alunos. O professor pode acrescentar outras informações ou dados. É preciso explicar ou instigar uma explicação da ocorrência do símbolo de \pm na fórmula resolutive apresentada.

Na questão 2, os estudantes deverão aplicar a fórmula apresentada no texto de História para resolver as equações propostas. O professor deve mediar as situações que precisem recorrer a manipulações para se chegar à forma algébrica da equação do segundo grau apresentada na atividade 1.

Na questão 3, ao preencher o quadro, os estudantes devem observar e concluir a influência do $b^2 - 4ac$ na existência e quantidade de soluções.

Após as discussões e conclusões, o professor deve formalizar o método de resolução da equação do segundo grau, falando do discriminante e das possíveis soluções.

1) Considerando a definição de função do 2º grau apresentada na primeira atividade, leia o texto a seguir:

Você sabia que o método mais comum de resolução da equação do 2º foi criado por um matemático indiano chamado Sridhara, no século 8 d.C.?

Sridhara nasceu em Bhurishrestī, aldeia no Sul Radha, na Índia, no século 8 d.C., e foi também sânscrito comentarista e filósofo. Sua maior obra foi nomeada Patiganitasara Trisatika porque foi escrita em trezentos versos. O livro discute a contagem de números, medidas, número natural, multiplicação, divisão, zero, quadrados, cubos, fração, regra de três, juros de cálculo, associação ou parceria e mensuração.

No que diz respeito à resolução de equações do segundo grau, Sridhara foi um dos primeiros matemáticos a estabelecer uma regra para resolvê-las, deixando contribuições importantes para que, posteriormente, Bhaskara continuasse esses estudos, porém, no Brasil, a conhecemos equivocadamente por “fórmula de Bhaskara”, o principal recurso para resolução de equações do segundo grau.

Infelizmente, as obras originais dos escritos de Sridhara foram perdidas. O que se tem a respeito delas encontra-se em citações de Bhaskara. Talvez esse seja o motivo de atribuírem erroneamente à Bhaskara a fórmula de resolução da equação do segundo grau.

Para entendermos melhor o que significa essa fórmula, consideremos a equação:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Logo: $ax^2 + bx = -c$

Multiplicando ambos os lados por 4a, temos:

$$4ax^2 + 4abx = -4ac$$

Adicionando b^2 a ambos os lados, obtemos:

$$4ax^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

Usando a propriedade do quadrado da soma no primeiro membro e trocando a posição dos termos no segundo membro, simplificamos assim:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Tomando a raiz quadrada:

$$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Com isso, observa-se que o seguinte método de resolução de equação do segundo grau, na verdade, tinha surgido na história por meio do matemático Sridhara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sridhara apresentou uma grande variedade de aplicações dessa resolução em suas obras, incluindo problemas que envolvem relações, permutações, juros simples, taxas de viagem, salários e enchimento das cisternas.

(Fonte: Adaptado de SIQUEIRA, Arielly Cecília; GAMA, Paulo Ferreira da; SILVA, Edna Machado da. Sridhara e a equação do segundo grau. Anais do XIII Seminário Nacional de História da Matemática. Fortaleza, p. 951-964, 2019. Disponível em:

[https://www.sbhmat.org/download/download?ID_DOWNLOAD=7&fbclid=IwAR1MIQvqPZXguG9-eW8iWaXYhDFhXm9m74RC-tokUEh2KBRaimO_ZwwmXWw.\)](https://www.sbhmat.org/download/download?ID_DOWNLOAD=7&fbclid=IwAR1MIQvqPZXguG9-eW8iWaXYhDFhXm9m74RC-tokUEh2KBRaimO_ZwwmXWw.)

2) Agora que você conheceu um método para encontrar a solução de uma equação do segundo grau e sua importância para a resolução de problemas do dia a dia desde a antiguidade, aplique este método para resolver as seguintes equações e discuta com seus colegas.

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$

Solução:

Identificação dos coeficientes de cada termo da equação

$$a = 1; b = +6; c = +9$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (+6)^2 - 4.1.+9 = 36 - 36 = 0$$

$$\Delta = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} =$$

$$x_1 = \frac{-(+6) + \sqrt{0}}{2.1} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-(+6) - \sqrt{0}}{2.1} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$S = \{-3; -3\}$$

Podemos verificar a solução como verdadeira ao substituirmos as raízes iguais/ou única na equação inicial, como mostramos a seguir:

$$x^2 + 6x + 9 = 0; \text{ para } x = -3; (-3)^2 + 6.(-3) + 9 = 0;$$

$$9 - 18 + 9 = 0$$

$$0 = 0$$

Por outro lado, é interessante, nesse momento, lembrarmos aos alunos que essa verificação nada mais é do que determinar o valor numérico de uma expressão algébrica. Dessa forma, concluímos que as raízes são verdadeiras, uma vez que tornam verdadeira a igualdade.

$\Delta = 0$; Como o valor do delta igual é a zero, a condição de existência das raízes possui uma única raiz real, que, no caso, é -3 .

b) $x^2 - x - 12 = 0$

Solução:

Identificação dos coeficientes de cada termo da equação

$$a = 1 ; b = -1; c = -12$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-12)}}{2.1}$$

$$x = \frac{+1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{+1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{+1 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{+1 + 7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{+1 - 7}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$S = \{-3; +4\}$$

Podemos verificar a solução como verdadeira ao substituirmos as raízes iguais/ou única na equação inicial, como mostramos a seguir:

$$x^2 - x - 12 = 0; \text{ para } x = -3; (-3)^2 - (-3) - 12 = 0;$$

$$9 + 3 - 12 = 0$$

$$0 = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0; \text{ para } x = +4; (+4)^2 - (+4) - 12 = 0;$$

$$16 - 4 - 12 = 0$$

$$0 = 0$$

Devemos lembrar aos alunos que essa verificação nada mais é do que determinar o valor numérico de uma expressão algébrica. Dessa forma, concluímos que as raízes são verdadeiras, uma vez que tornam verdadeira a igualdade.

$\Delta = 49$; o valor do delta é maior que zero, $\Delta > 0$, a condição de existência da equação possui duas raízes reais e diferentes, que, no caso, são -3 e 4 .

c) $2x^2 - 8 = 0$

Solução:**Identificação dos coeficientes de cada termo da equação**

$$a = 2; b = 0; \quad c = -8$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0 + 64}}{4} = \frac{\pm \sqrt{64}}{4} =$$

$$x_1 = \frac{+8}{4} = +2$$

$$x_2 = \frac{-8}{4} = -2$$

$$S = \{-2; +2\}$$

Podemos verificar a solução como verdadeira ao substituirmos as raízes iguais/ou única na equação inicial, como mostramos a seguir:

$$2x^2 - 8 = 0; \text{ para } x = -2; 2(-2)^2 - 8 = 0;$$

$$2 \cdot 4 - 8 = 0$$

$$2x^2 - 8 = 0; \text{ para } x = +2; 2(+2)^2 - 8 = 0;$$

$$2 \cdot 4 - 8 = 0$$

$$0 = 0$$

Novamente, devemos lembrar aos alunos que essa verificação nada mais é do que determinar o valor numérico de uma expressão algébrica. Dessa forma, concluímos que as raízes são verdadeiras, uma vez que tornam verdadeira a igualdade.

$\Delta = 64$; o valor do delta é maior que zero, $\Delta > 0$, a condição de existência da equação possui duas raízes reais e diferentes, no caso é $-2e2$.

d) $2x^2 = -8$

Solução:

Antes, devemos utilizar o princípio aditivo, ou seja, adicionamos +8 em ambos os membros da igualdade para evidenciarmos na forma $ax^2 + c = 0$.

$$2x^2 + 8 = 0$$

Identificação dos coeficientes de cada termo da equação

$$a = 2; b = 0; \quad c = +8$$

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 2 \cdot (+8)}}{2a} = x = \frac{0 \pm \sqrt{-4 \cdot 2 \cdot (+8)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{-64}}{4} =$$

$$S = \emptyset$$

Como obtemos no desenvolvimento da resolução a raiz $\sqrt{-64}$, o valor do delta é negativo, $\Delta < 0$. Não existe raiz quadrada de número negativo no conjunto dos reais. Logo, a equação não possui raízes reais.

e) $-x^2 + \frac{1}{4} = 0$

Solução:

Identificação dos coeficientes de cada termo da equação

$$a = -1; \quad b = 0; \quad c = \frac{+1}{4}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2(-1)} = x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \left(\frac{+1}{4}\right)}}{-2}$$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0+1}}{-2} = \frac{\pm 1}{-2} =$$

$$x_1 = \frac{+1}{-2} = \frac{-1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1}{-2} = \frac{+1}{2}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}; +\frac{1}{2} \right\}$$

Podemos verificar a solução como verdadeira ao substituirmos as raízes iguais/ou única na equação inicial, como mostramos a seguir:

$$-x^2 + \frac{1}{4} = 0; \text{ para } x = \frac{-1}{2}; -\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0;$$

$$\frac{-1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

$$-x^2 + \frac{1}{4} = 0; \text{ para } x = \frac{+1}{2}; -\left(\frac{+1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0;$$

$$\frac{-1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

Relembre aos alunos que essa verificação nada mais é do que determinar o valor numérico de uma expressão algébrica. Dessa forma, concluímos que as raízes são verdadeiras, uma vez que tornam verdadeira a igualdade.

$\Delta = 1$; o valor do delta é maior que zero, $\Delta > 0$, a condição de existência da equação possui duas raízes reais e diferentes, que, no caso, são $\frac{-1}{2}$ e $\frac{1}{2}$.

f) $-x^2 - x + 20 = 0$

Solução:

Identificação dos coeficientes de cada termo da equação

$$a = -1; \quad b = -1; \quad c = +20$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2(-1)} = x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (+20)}}{-2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2(-1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{(-2)} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{-2} = \frac{1 \pm 9}{-2}$$

$$x_1 = \frac{+1 + 9}{-2} = \frac{10}{-2} = -5$$

$$x_2 = \frac{+1 - 9}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$S = \{-5; +4\}$$

Podemos verificar a solução como verdadeira ao substituirmos as raízes iguais/ou única na equação inicial, conforme a seguir:

$$-x^2 - x + 20 = 0$$

$$-x^2 - x + 20 = 0; \text{ para } x = -5; -(-5)^2 - (-5) + 20 = 0;$$

$$-25 + 5 + 20 = 0$$

$$0 = 0$$

$$-x^2 - x + 20 = 0; \text{ para } x = +4; -(+4)^2 - (+4) + 20 = 0;$$

$$-16 - 4 + 20 = 0$$

$$0 = 0$$

g) $(x - 1)(x + 3) = 5$

Solução:

Efetuamos, primeiramente, o produto dos termos do polinômio.

$$x^2 + 3x - x - 3 = 5$$

$$x^2 + 2x - 3 = 5$$

Com objetivo de escrevermos na forma geral, pelo princípio aditivo, adicionamos +3 em ambos os membros da equação.

$$x^2 + 2x - 3 + 3 = 5 + 3$$

$$x^2 + 2x = 8,$$

E, de modo análogo, adicionamos -8 a ambos os membros e eliminamos o 8.

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Identificação dos coeficientes de cada termo da equação

$$a = 1; \quad b = +2; \quad c = -8$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-(+2) \pm \sqrt{(+2)^2 - 4 \cdot (+1) \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = \frac{+2 + 6}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{+2 - 6}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$S = \{-2; +4\}$$

Podemos verificar a solução como verdadeira ao substituirmos as raízes iguais/ou única na equação inicial, conforme a seguir:

$$x^2 + 2x - 8 = 0; \text{ para } x = -2; -(+2)^2 - (-2) - 8 = 0;$$

$$-25 + 5 + 20 = 0$$

$$0 = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0; \text{ para } x = +4; (+4)^2 - 2(+4) + 4 = 0;$$

$$16 - 8 - 8 = 0$$

$$0 = 0$$

h) $x^2 + 2x + 2 = 0$

Solução:

Identificação dos coeficientes de cada termo da equação

$$a = 1; \quad b = +2; \quad c = +2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2(1)} = x = \frac{-(+2) \pm \sqrt{(+2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (+2)}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} =$$

$$S = \emptyset$$

Como obtemos no desenvolvimento da resolução a raiz $\sqrt{-4}$, o valor do delta é negativo, $\Delta < 0$. Não existe raiz quadrada de número negativo no conjunto dos reais. Logo, a equação não possui raízes reais.

Ao verificar no final as raízes, é interessante fazer o aluno notar que tal operação corresponde a determinar o valor numérico de uma expressão algébrica.

3) Complete o quadro a partir das resoluções que você realizou:

Equação	Valor de $b^2 - 4ac$	Existência e quantidade de soluções
a) $x^2 + 6x + 9 = 0$	$\Delta = 0$	$\Delta = 0$
b) $x^2 - x - 12 = 0$	$\Delta = 49$	$\Delta > 0$
c) $2x^2 - 8 = 0$	$\Delta = 64$	$\Delta > 0$
d) $2x^2 = -8$	$\Delta = -64$	$\Delta < 0$
e) $-x^2 + \frac{1}{4} = 0$	$\Delta = 1$	$\Delta > 0$
f) $-x^2 - x + 20 = 0$	$\Delta = 81$	$\Delta > 0$
g) $(x - 1)(x + 3) = 5$	$\Delta = 36$	$\Delta > 0$
h) $x^2 + 2x + 2 = 0$	$\Delta = -4$	$\Delta < 0$

A segunda atividade teve como objetivo resolver equações do 2º grau por meio da fórmula resolvente e estabelecer características das soluções com o recurso da história da matemática utilizando um texto. Nesse sentido, apresentamos a fórmula resolvente da equação do 2º grau, da qual Sridhara foi um dos pioneiros a estabelecer uma regra para resolvê-la. Para tanto, apresentamos oito equações identificadas com os respectivos itens: a, b, c, d, e, f, g, h, onde é solicitado que se complete o quadro com o valor de $b^2 - 4ac$ e a condição de existência das respectivas equações dos itens supracitados. Essas condições são para o Δ maior que zero, quando a equação possui duas soluções reais e diferentes. Para o delta menor que zero, a equação não possui raízes reais. Por fim, para o delta igual a zero, a equação possui uma única solução.

Observações:

Conclusões:

TERCEIRA ATIVIDADE

TÍTULO: Resolvendo problemas de equação do 2º grau.

OBJETIVO: Resolver problemas sobre equação do 2º grau por meio da fórmula resolvente.

MATERIAL: Roteiro impresso da atividade e caneta.

PROCEDIMENTO:

- Formação de grupos de 3 a 4 estudantes;
- Cada integrante das equipes irá receber uma folha com as atividades propostas nesta seção;
- Socialização das ideias e observações percebidas durante o procedimento;
- Após chegar a um consenso das observações, fazer uma síntese de ideias escrevendo as conclusões.

INSTRUÇÕES AO PROFESSOR: A atividade deverá ser desenvolvida preferencialmente com os mesmos grupos da atividade anterior, para que se possa acompanhar a evolução individual e grupal.

As questões são problemas que envolvem resolução de equação do segundo grau. Nesta etapa, espera-se que o aluno tenha habilidade de conversão da linguagem materna para a linguagem algébrica, bem como consiga resolver a equação por meio da fórmula resolvente.

O professor deve estar atento se não falta algum conhecimento prévio ao estudante que o impeça de resolver as questões, devendo intervir para que ele possua condições de prosseguir.

1) Considerando que o método de resolução proposto pelo matemático Sridhara ajudou a resolver variados tipos de problemas, aplique os conhecimentos que você adquiriu nas atividades anteriores resolvendo os problemas propostos com os seguintes passos:

- ✓ Fazer um esquema ou desenho do que compreendeu;
 - ✓ Identificar e organizar os dados e a incógnita;
 - ✓ Formar a equação;
 - ✓ Resolver a equação;
 - ✓ Interpretar as soluções da equação no contexto do problema.
- a) O triplo do quadrado de um número é igual a quinze vezes esse número. Quais as possíveis soluções para esse problema?

Solução:

O número é x

$3x^2 = 15x$; aplicando o princípio multiplicativo, dividimos por 3 em ambos os membros.

$$(\div 3)3x^2 = 15x)$$

Temos que $x^2 = 5x$; e pelo princípio aditivo, subtraímos $-5x$ em ambos os membros.

$$x^2 - 5x = 0$$

Solução:

Identificação dos coeficientes de cada termo da equação.

$$a = 1; b = -5; c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot (+1) \cdot 0}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{+5 \pm \sqrt{25}}{2(1)} = \frac{+5 \pm 5}{2} =$$

$$x_1 = \frac{+2 + 5}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{+5 - 5}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$S = \{0; +5\}$$

R: o número é o 5.

Podemos verificar a solução como verdadeira ao substituirmos as raízes iguais/ou única na equação inicial, conforme a seguir:

$$3x^2 = 15x$$

para $x = 0$ temos que $3x^2 = 15x$

$$3(0)^2 = 15 \cdot 0$$

$$0 = 0$$

$$3x^2 = 15x;$$

para $x = +5$; $3(5)^2 = 15 \cdot 5$

;

$$75 = 75$$

$$0 = 0$$

b) Qual o valor de m para que a equação $x^2 - 10x + m = 0$ tenha duas soluções reais?

Solução:

Neste problema, temos a condição de existência da equação para que as raízes sejam reais e diferentes.

$$\Delta > 0$$

$$b^2 - 4ac > 0$$

Identificação dos coeficientes de cada termo da equação:

$$a = 1 ; b = -10; c = +m$$

$$(-10)^2 - 4.1.m > 0$$

$100 - 4m > 0$; temos uma inequação do 1º grau. Para isolarmos o valor de m , pelo princípio aditivo, subtraímos -100 em ambos os membros:

$$100 - 100 - 4m > 0 - 100$$

$$-4m > -100.$$

Agora, pelo princípio multiplicativo, dividimos ambos os membros por -4 .

$m < 25$, note-se que, ao dividirmos por -4 , invertemos o sinal da desigualdade da inequação. Logo, o valor de m é menor que 25.

c) Pedro é 5 anos mais velho que Paulo. O produto da idade de Pedro pela idade de Paulo é igual a 84. Quantos anos tem cada um deles?

Solução:

Pedro tem x anos.

Se Pedro tem x anos, então Paulo é 5 anos mais novo, ou seja, $x - 5$.

$$x(x - 5) = 84$$

$$x^2 - 5x = 84;$$

Com objetivo de escrevermos na forma geral, pelo princípio aditivo, subtraímos

-84 de ambos os membros.

$$x^2 - 5x - 84 = 84 - 84$$

$$x^2 - 5x - 84 = 0$$

Solução:

Identificação dos coeficientes de cada termo da equação:

$$a = 1; b = -5; c = -84$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.(+1).(-84)}}{2.1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 336}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{361}}{2} = \frac{5 \pm 19}{2} =$$

$$x_1 = \frac{5 + 19}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$x_2 = \frac{5 - 19}{2} \times = \frac{-14}{2} = -7$$

Como não existe idade negativa, consideramos a raiz positiva 12.

R: Logo a idade x de Pedro é 12 anos. E a idade de Paulo é 7 anos, ou seja,
 $x - 5 = 12 - 5 =$

Podemos verificar a solução como verdadeira ao substituirmos as raízes, conforme a seguir:

$$x^2 - 5x - 84 = 0; \text{ para } x = -7; (-7)^2 - 5(-7) - 84 = 0;$$

$$49 + 35 - 84 = 0$$

$$84 - 84 = 0$$

$$0 = 0$$

$$x^2 - 5x - 84 = 0; \text{ para } x = 12; (+12)^2 - 5(12) - 84 = 0;$$

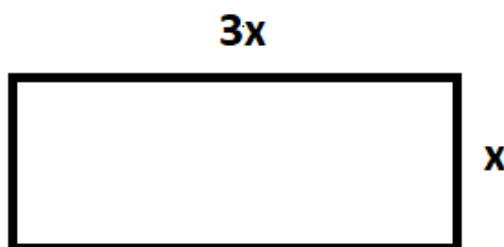
$$144 - 60 - 84 = 0$$

$$144 - 144 = 0$$

$$0 = 0$$

Note que apesar de -7 ser uma das raízes da equação quadrática, não é a solução do problema.

d) Uma tela retangular possui a medida de seu lado maior igual ao triplo do seu lado menor e área medindo 108 cm^2 . Quais as medidas dos lados desta tela?



Solução:

No problema, temos que a área do retângulo é o produto da medida do lado maior pelo lado menor, daí que: $3x \cdot x = 108$. Pelo princípio multiplicativo, dividimos ambos os membros por 3.

$x^2 = 36$; por fim, pelo princípio aditivo, subtraímos ambos os membros da equação por -36 , e temos que:

$$x^2 - 36 = 36 - 36$$

$$x^2 - 36 = 0$$

Solução:

Identificação dos coeficientes de cada termo da equação:

$$a = 1; b = 0; c = -36$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-(0) \pm \sqrt{0^2 - 4.1.(-36)}}{2.1}$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{144}}{2(1)} = \frac{\pm 12}{2} =$$

$$x_1 = \frac{+12}{2} = 6$$

$$x_2 = \frac{-12}{2} = -6$$

$$S = \{-6; +6\}$$

Como não existe medida negativa, a resposta do problema é 6.

Podemos verificar a solução como verdadeira ao substituirmos as raízes, na equação original, conforme a seguir:

$$3x^2 = 108, \text{ para } x = -6$$

$$3(-6)^2 = 108$$

$$3.36 = 108$$

$$108 = 108$$

$$3x^2 = 108, \text{ para } x = 6$$

$$3(+6)^2 = 108$$

$$3.36 = 108$$

$$108 = 108$$

e) Numa sala de aula havia 10 pessoas entre mulheres e homens. Descubra quantas mulheres e quantos homens estavam presentes, sabendo que o produto das quantidades dos dois grupos é igual 24, e que a quantidade de mulheres é maior do que a quantidade de homens.

Solução:

Consideramos x para o número de homens, e o número de mulheres como $10 - x$.

$$x \cdot (10 - x) = 24$$

$$10x - x^2 = 24$$

$-x^2 + 10x = 24$; pelo princípio aditivo, subtraímos -24 de ambos os membros.

$$-x^2 + 10x - 24 = 24 - 24$$

$$-x^2 + 10x - 24 = 0$$

Solução:

Identificação dos coeficientes de cada termo da equação

$$a = -1 \quad ; \quad b = +10; \quad c = -24$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(+10) \pm \sqrt{(+10)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-24)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 96}}{-2} = \frac{-10 \pm \sqrt{4}}{-2} = \frac{-10 \pm 2}{-2} =$$

$$x_1 = \frac{-10 + 2}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-10 - 2}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6$$

Se considerarmos $x = 4$ como o número de homens, então o número de mulheres é 6, ou seja, $10 - x$.

Podemos verificar a solução como verdadeira ao substituímos as raízes, conforme a seguir:

$$-x^2 + 10x - 24 = 0; \text{ para } x = 4; -(4)^2 + 10(4) - 24 = 0;$$

$$-16 + 40 - 24 = 0$$

$$24 - 24 = 0$$

$$0 = 0$$

$$-x^2 + 10x - 24 = 0; \text{ para } x = 6; -(+6)^2 + 10(6) - 24 = 0;$$

$$-36 + 60 - 24 = 0$$

$$24 - 24 = 0$$

$$0 = 0$$

Identificação dos coeficientes de cada termo da equação

$$a = -1 \quad ; \quad b = +10; \quad c = -24$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(+10) \pm \sqrt{(+10)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-24)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 96}}{-2} = \frac{-10 \pm \sqrt{4}}{-2} = \frac{-10 \pm 2}{-2} =$$

$$x_1 = \frac{-10 + 2}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-10 - 2}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6$$

Se considerarmos $x = 4$ como o número de homens, então o número de mulheres é 6, ou seja, $10 - x$.

f) O quadrado da quantia que Carlos possui, adicionado do quádruplo da mesma quantia é igual a R\$ 36,00. Quanto Carlos possui?

Solução:

A quantia que Carlos possui é x .

$x^2 + 5x = 36$; pelo princípio aditivo, subtraímos -36 de ambos os membros da equação.

$$x^2 + 5x - 36 = 36 - 36$$

$$x^2 + 5x - 36 = 0$$

Identificação dos coeficientes de cada termo da equação:

$$a = 1 ; b = +5; c = -36$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(+5) \pm \sqrt{(+5)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-36)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{-5 \pm 13}{2} =$$

$$x_1 = \frac{-5 + 13}{2} = \frac{+8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-5 - 13}{2} = \frac{-18}{2} = -9$$

$$S = \{-4, 9\}$$

$$x^2 + 5x = 36$$

Mas a resposta do problema é 9 reais.

Podemos verificar a solução como verdadeira ao substituirmos as raízes na equação original, conforme a seguir:

Para $x = -9$

$$x^2 + 5x = 36$$

$$(-9)^2 + 5(-9) = 36$$

$$81 - 45 = 36$$

$$36 = 36$$

Para $x = 4$

$$x^2 + 5x = 36$$

$$(+4)^2 + 5(+4) = 36$$

$$16 + 20 = 36$$

$$36 = 36$$

A terceira atividade teve como objetivo resolver problemas que envolvam aplicação da resolução de equações do 2º grau. Nesta etapa, elaboramos 6 problemas, do item (a) até o item (f), os quais os alunos teriam que traduzir da linguagem materna para a linguagem algébrica e depois aplicar a fórmula resolutive.

Observações gerais sobre as resoluções:

Conclusões sobre organização e planejamento da resolução.

2.5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA (ALUNO)

ESCOLA: _____

PROFESSOR: _____

ESTUDANTE: _____

DATA: _____

DISCIPLINA: _____ ANO/SÉRIE: _____

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE EQUAÇÃO DO 2º GRAU PRIMEIRA ATIVIDADE

TÍTULO: Composição algébrica da equação do 2º grau.

OBJETIVO: Reconhecer as operações que envolvem a composição da equação do 2º grau e os coeficientes dos termos, por meio da conversão de registros da linguagem materna (escrita) para a linguagem algébrica (simbólica).

MATERIAL: Roteiro impresso da atividade e caneta.

PROCEDIMENTO:

- Formação de grupos de 3 a 4 estudantes;
- Cada integrante dos grupos irá receber uma folha com as atividades propostas nesta seção;
- Socialização das ideias e observações percebidas durante o procedimento;
- Após se chegar a um consenso das observações, fazer uma síntese de ideias escrevendo as conclusões.

- 1) Complete os quadros a seguir com a representação algébrica (simbólica) correspondente e com o valor dos coeficientes das incógnitas de cada termo.

QUADRO 1

Linguagem materna	Representação algébrica	Valor dos coeficientes das incógnitas de cada termo
Um número qualquer	x	Coeficiente de x é 1
Um número mais sete	$x + 7$	
O oposto do número		
O oposto da soma entre um número e dez		
A diferença entre um número e dois décimos		
A soma de um número com vinte		
Dois inteiros e cinquenta centésimos menos um número		
Um número negativo adicionado a dez		
Um número acrescido de cinco		
O sucessor de um número		
O antecessor de um número		
O oposto do sucessor de um número		
O oposto do antecessor de um número		

OBSERVAÇÕES:

CONCLUSÕES:

QUADRO 2

Linguagem materna	Representação algébrica	Valor dos coeficientes das incógnitas de cada termo
Um número qualquer		
O dobro de um número		
Cinco, acrescido do triplo de um número		
O oposto do quádruplo de um número		
O produto de um número por menos três décimos		
O quociente de um número por menos seis		
A metade de um número		
A terça parte do oposto de um número		
A quarta parte do sucessor de um número		
A metade do antecessor de um número		
O sucessor do dobro de um número		
O dobro do sucessor de um número		
O antecessor do triplo de um número		
O inverso de um número		
O inverso da metade de um número		

OBSERVAÇÕES:

CONCLUSÕES:

QUADRO 3

Linguagem materna	Representação algébrica	Valor dos coeficientes das incógnitas de cada termo
Um número qualquer		
O quadrado de um número		
O triplo do quadrado de um número		
O quadrado do sucessor de um número		
O quadrado do antecessor de um número		
Dois, somado ao quadrado do sucessor de um número		
O dobro do quadrado de um número menos esse número		
Menos dois, adicionado ao triplo do quadrado de um número		
Um número adicionado ao quadrado do triplo desse número		
Um número acrescido do quadrado de seu sucessor		
O produto entre a soma de um número com sete e a diferença desse número com dois		
O produto entre a diferença de um número, como dois, e o antecessor desse número		
Um número acrescido do sucessor do quadrado desse número		

OBSERVAÇÕES:**CONCLUSÕES:**

2) Com relação aos quadros 1, 2 e 3, responda:

- a) Em qual dos quadros está o maior grau da potência da incógnita? Qual é esse grau?
- b) Mudaria o grau da expressão algébrica se o coeficiente do termo de 2º grau fosse nulo (igual a zero)? Explique.

ESCOLA: _____

PROFESSOR: _____

ESTUDANTE: _____

DATA: _____

DISCIPLINA: _____ ANO/SÉRIE: _____

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE EQUAÇÃO DO 2º GRAU

SEGUNDA ATIVIDADE

TÍTULO: Resolvendo equação do 2º grau.

OBJETIVO: Resolver equações do 2º grau e estabelecer características das soluções de um método de resolução apresentado pelo recorte de um texto histórico.

RECURSO DIDÁTICO: Texto de história da matemática.

MATERIAL: Roteiro impresso da atividade, caneta.

PROCEDIMENTO:

- Formação de grupos de 3 a 4 estudantes;
- Cada integrante dos grupos irá receber uma folha com as atividades propostas nesta seção;
- A leitura do texto apresentado irá auxiliar nas atividades que seguem;
- Socialização das ideias e observações percebidas durante o procedimento;
- Após se chegar a um consenso das observações, fazer uma síntese de ideias escrevendo as conclusões.

4) Considerando a definição de equação do 2º grau apresentada na primeira atividade, leia o texto a seguir:

Você sabia que o método mais comum de resolução da equação do 2º grau foi criado por um matemático indiano chamado Sridhara, no século 8 d.C.?

Sridhara nasceu em Bhurishrestī, aldeia no Sul Radha, na Índia, no século 8 d.C., e foi também sânscrito comentarista e filósofo. Sua maior obra foi nomeada Patiganitasara Trisatika porque foi escrita em trezentos versos. O livro discute a contagem de números, medidas, número natural, multiplicação, divisão, zero, quadrados, cubos, fração, regra de três, juros de cálculo, associação ou parceria e mensuração.

No que diz respeito à resolução de equações do segundo grau, Sridhara foi um dos primeiros matemáticos a estabelecer uma regra para resolvê-las, deixando contribuições importantes para que, posteriormente, Bhaskara continuasse esses

estudos, porém, no Brasil, a conhecemos equivocadamente por “fórmula de Bhaskara”, o principal recurso para resolução de equações do segundo grau.

Infelizmente, as obras originais dos escritos de Sridhara foram perdidas. O que se tem a respeito delas encontra-se em citações de Bhaskara. Talvez esse seja o motivo de atribuírem erroneamente à Bhaskara a fórmula de resolução da equação do segundo grau.

Para entendermos melhor o que significa essa fórmula, consideremos a equação:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Logo:

$$ax^2 + bx = -c$$

Multiplicando ambos os lados por $4a$, temos:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Adicionando b^2 a ambos os lados, obtemos:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

Usando a propriedade do quadrado da soma no primeiro membro e trocando a posição dos termos no segundo membro, simplificamos assim:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Tomando a raiz quadrada:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Com isso, observa-se que o seguinte método de resolução de equação do segundo grau, na verdade, tinha surgido na história por meio do matemático Sridhara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sridhara apresentou grande variedade de aplicações dessa resolução em suas obras, incluindo problemas que envolvem relações, permutações, juros simples, taxas de viagem, salários, e enchimento das cisternas.

(Fonte: Adaptado de SIQUEIRA, Arielly Cecília; GAMA, Lima Paulo Ferreira da; SILVA, Edna Machado da. Sridhara e a equação do segundo grau. **Anais do XIII Seminário Nacional de História da Matemática**. Fortaleza, 2019, p. 951-964. Disponível em: https://www.sbhmat.org/download/download?ID_DOWNLOAD=7&fbclid=IwAR1MIQvqPZXguG9-eW8iWaXYhDFhXm9m74RC-tokUEh2KBRaimO_ZwwmXWw).

5) Agora que você conheceu um método para encontrar a solução de uma equação do segundo grau e sua importância para a resolução de problemas do dia a

dia desde a antiguidade, aplique esse método para resolver as seguintes equações e discuta com seus colegas.

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$

b) $x^2 - x - 12 = 0$

c) $2x^2 - 8 = 0$

d) $2x^2 = -8$

e) $-x^2 + \frac{1}{4} = 0$

f) $-x^2 - x + 20 = 0$

g) $(x - 1)(x + 3) = 5$

h) $x^2 + 2x + 2 = 0$

6) Complete o quadro a partir das resoluções que você realizou:

Equação	Valor de $b^2 - 4ac$	Existência e quantidade de soluções
a) $ax^2 + 6x + 9 = 0$		
b) $x^2 - x - 12 = 0$		
c) $2x^2 - 8 = 0$		
d) $2x^2 = -8$		
e) $-x^2 + \frac{1}{4} = 0$		
f) $-x^2 - x + 20 = 0$		
g) $(x - 1)(x + 3) = 5$		
h) $x^2 + 2x + 2 = 0$		

OBSERVAÇÕES:

CONCLUSÕES:

ESCOLA: _____

PROFESSOR: _____

ESTUDANTE: _____

DATA: _____

DISCIPLINA: _____ ANO/SÉRIE: _____

TERCEIRA ATIVIDADE

TÍTULO: Resolvendo problemas de equação do 2º grau.

OBJETIVO: Resolver problemas sobre equação do 2º grau por meio da fórmula resolutive.

MATERIAL: Roteiro impresso da atividade e caneta.

PROCEDIMENTO:

- Formação de grupos de 3 a 4 estudantes;
- Cada integrante das equipes irá receber uma folha com as atividades propostas nesta seção;
- Socialização das ideias e observações percebidas durante o procedimento.
- Após se chegar a um consenso das observações, fazer uma síntese de ideias escrevendo as conclusões.

1) Considerando que o método de resolução proposto pelo matemático Sridhara ajudou a resolver variados tipos de problemas, aplique os conhecimentos que você adquiriu nas atividades anteriores, resolvendo os problemas propostos com os seguintes passos:

- ✓ Fazer um esquema ou desenho do que compreendeu;
- ✓ Identificar e organizar os dados e a incógnita;
- ✓ Formar a equação;
- ✓ Resolver a equação;
- ✓ Interpretar as soluções da equação no contexto do problema.

a) O triplo do quadrado de um número é igual a quinze vezes esse número. Quais as possíveis soluções para esse problema?

b) Qual o valor de m para que a equação $x^2 - 10x + m = 0$ tenha duas soluções reais?

c) Pedro é 5 anos mais velho que Paulo. O produto da idade de Pedro pela idade de Paulo é igual a 84. Quantos anos tem cada um deles?

d) Uma tela retangular possui a medida de seu lado maior igual ao triplo do seu lado menor, e área medindo 108 cm^2 . Quais as medidas dos lados desta tela?

e) Numa sala de aula havia 10 pessoas entre mulheres e homens. Descubra quantas mulheres e quantos homens estavam presentes, sabendo que o produto das quantidades dos dois grupos é igual 24 e que a quantidade de mulheres é maior do que a quantidade de homens.

f) O quadrado da quantia que Carlos possui, adicionado do quádruplo da mesma quantia é igual a R\$ 36,00. Quanto Carlos possui?

OBSERVAÇÕES GERAIS SOBRE AS RESOLUÇÕES:**CONCLUSÕES SOBRE ORGANIZAÇÃO E PLANEJAMENTO DA RESOLUÇÃO:****2.6 QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO**

ESCOLA: _____

PROFESSOR: _____

ESTUDANTE: _____

DATA: _____

DISCIPLINA: _____ ANO/SÉRIE: _____

ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO SOBRE EQUAÇÃO DO 2º GRAU

1) (ULBRAS-RS) O(s) valor(es) de b na equação $x^2 - bx + 4 = 0$, para que o discriminante seja igual a 65, é (são):

- a) 0 b) 9 c) -9 d) -9 ou 9 e) 16

2) O quadrado de um número, aumentado de 25 é igual a dez vezes esse número. Calcule esse número.

3) Pai e filho têm hoje 45 e 15 anos, respectivamente. Há quantos anos a idade do pai era igual ao quadrado da idade do filho?

4) Em certa cidade há um terreno de formato retangular de 80 m^2 de área, em que um lado tem 2 m a mais que o outro. O prefeito da cidade pretende construir uma praça nesse terreno e mais duas passarelas perpendiculares, que dividirão a praça em quatro retângulos congruentes. Qual será a área ocupada pelas passarelas se elas tiverem 2 m de largura?

5) A diferença entre o quadrado de um número com o seu quádruplo é menos seis. Qual o valor desse número?

6) Determine a área de um quadrado cujo perímetro é igual ao perímetro de um retângulo cuja base excede em 3 cm a altura, sendo 66 cm a soma do dobro da base com o triplo da altura.

7) Explique porque a equação $(3x - 1)^2 = -4$ não possui raízes reais.

3 ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO: Equação do 2º grau

Neste capítulo, apresentamos um estudo sobre o objeto matemático “equação do 2º grau”. Para isso, nos embasamos nos autores Gay e Silva (2018), Vale (2013), Silva (2009) e Pitombeira (2004). A relevância deste estudo é para melhor capacitar quem queira adotar nosso produto educacional em sua aula de matemática, de modo a utilizá-lo eficazmente com as características epistemológicas devidas ao professor.

Para tanto, apresentamos algumas formas de resoluções sobre equações do segundo grau na visão dos mapas conceituais de Ausubel (1968 apud SILVA, 2009) e nos estudos de Silva (2009) na linha do ensino e aprendizagem. Abordamos também a história da matemática como forma de destacar os principais indícios da origem no tratamento da equação do 2º grau.

Esse recurso metodológico pode possibilitar um estímulo para o sujeito da aprendizagem à curiosidade dessa época, de como os povos tratavam o assunto. Até o fim do século XVI “não se usava uma fórmula para os valores das raízes, simplesmente porque não se representava por letras os coeficientes de uma equação” (LIMA *et al.*, 1997, p. 120). Logo, entendemos que a construção do pensamento algébrico não foi uma tarefa fácil para os grandes matemáticos, mas é possível mediar essa construção com nossos educandos por meio das experiências vivenciadas na história da matemática.

Só a partir de François Viète, as notações por meio de letras passaram a ser adotadas na matemática. Nos registros do Papiro de Moscou⁸ “é oportuno ressaltar, neste ponto, que os documentos matemáticos daquela época não empregavam a alta dose de simbologia à qual estamos atualmente acostumados” (GARBI, 2007, p. 12), e os desenvolvimentos eram, em sua quase totalidade, expressos por palavras.

Ressaltamos o uso da história da matemática como ferramenta mediadora da aprendizagem entre o sujeito e o objeto matemático. Porém, antes de destacar este construto histórico sobre a equação do 2º grau, é fundamental observarmos os propósitos da continuidade das relações dos conteúdos que foram abordados no mesmo ano ou em anos anteriores e ainda sem apontar o objetivo prático sem

⁸ “Dentre todos os antigos documentos matemáticos que chegaram aos dias de hoje, talvez os mais famosos [...]” (GARBI, 2007, p. 11).

relações com o cotidiano. Desse modo, já preparamos o aluno para os próximos assuntos, que os mesmos não estão providos de seriação⁹.

Podemos dizer que “o conhecimento se dá numa espiral, onde as estruturas mais simples se integram às estruturas mais complexas, mas conservando sua identidade de totalidade” (SILVA, 2009, p. 92). Isto é como no conceito de equação do segundo grau, que no currículo oficial engloba outros conceitos, inferiores e superiores, os quais apresentamos a seguir.

As equações polinomiais do 2º grau possuem uma estrutura polinomial que, diferenciando das equações do 1º grau, possuem como principal característica a presença do expoente 2 na incógnita. Para se ter uma ideia melhor sobre este tipo de equação, tem-se a seguir a definição que a distingue.

Definição: são todas as equações que podem ser escritas como equação equivalente à forma $ax^2 + bx + c = 0$, com a , b e c pertencentes a R e $a \neq 0$, o que nos permite escrevê-la como sendo $x^2 + px + q = 0$, que é um polinômio do 2º grau, e podemos imaginá-la como um produto de polinômios de 1º grau $x^2 + px + q = (x - \alpha).(x - \beta)$. Porém, $(x - \alpha).(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$, que acompanha a expressão $x^2 + px + q$, e obtém-se:

$$\begin{cases} -(\alpha + \beta) = p \\ \alpha.\beta = q \end{cases}$$

Isto é, $-(\alpha + \beta)x$ é igual ao termo do primeiro grau px e o termo constante $(\alpha\beta)$ é igual ao termo constante q .

A resolução, portanto, da equação $(x - \alpha).(x - \beta) = 0$ tem solução, observando-se que o produto de números reais $AB = 0$ é nulo quando pelo menos um dos fatores for nulo ($A = 0$ ou $B = 0$). Ou seja, $x - \alpha = 0$ ou $x - \beta = 0$, obtendo-se $x = \alpha$ ou $x = \beta$. Tudo se resume a fatorar um polinômio do 2º grau em um produto de fatores do primeiro grau:

$x^2 + px + q = (x - \alpha).(x - \beta)$, como, por exemplo, $x^2 - 7x + 12 = 0$, onde temos $(x - 3).(x - 4) = 0$, pois $-(3 + 4) = -7$ e $3.4 = 12$.

Após vários exercícios, resolvemos o caso geral e obtemos a fórmula da resolução do 2º grau.

⁹ C.f. nas referências deste trabalho. “A seriação, por sua vez, consiste na ordenação em sequência conforme critério específico. Assim sendo, a criança pode seriar em função do tamanho (do menor para o maior ou vice-versa), da espessura, do peso, entre outras características” (SANTOS; OLIVEIRA; MALUSÁ, 2017, p. 6-7).

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Podemos observar, também, que na equação $ax^2 + bx + c = 0$ os elementos a , b e c são chamados de coeficientes da equação do 2º grau. Assim, tem-se como exemplo $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujos coeficientes são $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$.

Nesses exemplos supracitados foi feita a utilização de vários conteúdos que se interligam de forma natural no moldes dos mapas conceituais de Ausubel (1968 apud SILVA, 2009, p. 96), como, por exemplo:

Equação do Primeiro Grau (6ª e 7ª série), Produtos de Polinômios (7ª série), Sistema de Equação do Primeiro Grau (6ª série), Valor Numérico (7ª série), Identidade de Polinômios (3º ano do EM), Fatoração e Produtos Notáveis (7ª série). Além disso, outros conteúdos estão de forma implícita nesses conteúdos abordados explicitamente, como é o caso de expressões numéricas (no conteúdo Valor Numérico), iniciada na 4ª série do EF; Operações Fundamentais, etc.” (AUSUBEL, 1968, apud SILVA, 2009, p. 96).

Nesse sentido, devemos observar a referida ligação conceitual que nos permite contextualizar a matemática aplicada à própria Matemática. O conjunto solução de uma equação são todos os valores que o x pode assumir para que a igualdade $ax^2 + bx + c = 0$ seja verdadeira. Por outro lado, existem vários métodos de resolução para equações desse tipo, os quais trataremos de forma detalhada mais à frente.

Assim, conhecemos a equação polinomial do segundo grau comumente pela sua definição, isto é, a famosa preposição, a de toda equação polinomial do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, onde devemos ter, necessariamente, $a \neq 0$. Quando a equação do segundo grau possuir somente um b , ou apenas um c , ou ainda ambos iguais a zero, dizemos que a equação está em sua forma incompleta.

3.1 ASPECTOS HISTÓRICOS DA EQUAÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU

Nesta subseção serão apresentadas informações históricas sobre a concepção de equação do 2º grau para se conhecer aspectos históricos que corroboraram ou não para o desenvolvimento deste conhecimento em meio à história da humanidade. Para a construção deste estudo histórico, tomamos como base os autores Miranda (2003), Vale (2013) e Pitombeira (2004).

Em tempos remotos, com o desenvolvimento da agricultura e da engenharia, a concepção de equação do 2º grau começou a se desenvolver, bem como as formas de solucioná-la para resolver situações-problemas.

O primeiro registro de uso de equações do 2º grau de que se tem notícia foi feito pelos babilônios em cerca de 1700 a.C., a partir de uma tábua de argila por meio de palavras. Essa evidência descreve métodos de resolução advindos da civilização babilônica, em especial quando trata do seguinte problema:

“Qual é o lado de um quadrado se a área menos o lado dá 14:30?” Já que o sistema de numeração dos babilônicos é o sexagesimal (base 60), então o número 14:30 significa 870 na base decimal. Reinterpretando este problema, a solução seria para uma equação do 2º grau indicada como $x^2 - x = 870$.

O método para solucionar esse problema foi, primeiramente, interpretar o problema a partir do modelo $x^2 - px = q$ cuja solução utilizada era:

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2} \quad (1)$$

Essa fórmula é totalmente válida, pois é uma conclusão obtida da equação modelo $x^2 - px = q$, a partir da técnica de completar quadrado.

$$\begin{aligned} x^2 - px &= q \\ x^2 - px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\ \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 &= q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\ x - \frac{p}{2} &= \pm \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \\ x &= \pm \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} + \frac{p}{2} \end{aligned}$$

Assim, percebemos que a forma com que os babilônios resolviam equações do tipo $x^2 - px = q$ ocorria a partir de uma fórmula advinda do método de completar quadrado, mas que fornecia apenas uma solução.

Um tratamento mais geral para as equações do 2º grau surge, pela primeira vez, na matemática hindu com os sulvasutras (livros que reúnem conhecimentos matemáticos e religiosos ligados à construção de altares hindus), nos formatos $ax^2 = c$ e $ax^2 + bx = c$, sem a presença de métodos para resolução.

Um dos primeiros indícios que se tem hoje sobre a existência de uma regra geral para se achar as raízes da equação do 2º grau foi encontrado em um trabalho, que não foi preservado, de Sridhara, matemático hindu que viveu entre 850 e 950 d.C. Báskara II e outros citam a regra proposta por Sridhara da seguinte forma:

Multiplique ambos os lados da [equação] por uma quantidade conhecida igual a quatro vezes o coeficiente do quadrado da incógnita; adicione a ambos os lados uma quantidade igual ao quadrado do coeficiente da incógnita; então [extraia] a raiz quadrada (PITOMBEIRA, 2004, p. 25).

Para Vale (2013), essa técnica é a de completar o quadrado. Se multiplicarmos a equação $ax^2 + bx + c = 0$ por $4a$, obteremos:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Observe que só teremos um trinômio quadrado perfeito se adicionarmos um termo igual ab^2 aos dois lados da equação. Então:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$$

Ou seja,

$$(2ax + b)^2 + 4ac = b^2$$

Portanto,

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Isolando a incógnita, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2},$$

A fórmula acima é a resolvente de equação do 2º grau. Por volta de 850 a 950 a.C., “havia plena consciência de que números negativos não são quadrados, e de que o número de raízes de uma equação do 2º grau pode ser 0, 1 ou 2” (VALE, 2013, p. 26).

Mais tarde, no manuscrito Bhaskara, é descrito um método de solução para equações $ax^2 + bx + c = 0$, e que aqui no Brasil é conhecida como “fórmula de Bháskara”, que no ensino brasileiro se estabeleceu por volta da década de 1960. Vale (2013, p.27) destaca:

Na literatura internacional não se encontra o nome de Bhaskara para essa fórmula, porque não é adequado, já que problemas que recaem numa equação do segundo grau já apareciam, há quase quatro mil anos atrás, em textos escritos pelos babilônios).

Portanto, corroboramos isto para a adequação como fórmula resolutive da equação do segundo grau. Por outro lado, outro matemático indiano que fez contribuições para a concepção de equação do 2º grau foi Bramagupta, que nasceu em 598 d.C. e morreu após 665 d.C. Ele ensinava como resolver equações do tipo $ax^2 + bx = c$, com a , b e c positivos. Seu procedimento corresponde exatamente à fórmula:

$$x = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}{a} \quad (2)$$

Sobre o conhecimento dos árabes da concepção de equação do 2º grau, destacou-se o matemático Muhammad ben Musa Al-Khowarizmi (780-850). Al-Khowarizmi foi descrito por um de seus biógrafos como o primeiro matemático muçulmano a escrever sobre a solução de problemas usando al-jabr e al-muqabala.

Os termos al-jabr e al-muqabala referem-se a métodos de tratamento de equações, onde jabr significava adicionar termos iguais a ambos os membros de uma equação, a fim de se eliminar termos negativos. Outro significado ligado a esse termo era multiplicar ambos os lados de uma equação pelo mesmo número, a fim de se eliminar frações. Já o termo muqabala significava a redução de termos positivos por meio da subtração de quantidades iguais de ambos os membros da equação. No entanto, outros matemáticos usavam-na no sentido de igualar ou, pelo sentido literal da palavra, comparar.

Em um de seus livros, Al-Khowarizmi descreveu como resolver equações do tipo $x^2 + bx = c$, $x^2 + c = bx$ e $bx + c = x^2$, com coeficientes positivos, sendo a forma de resolver descrita a partir de uma álgebra retórica ao invés de simbólica.

Para formas como $x^2 + bx = c$, ele utilizava um método ligado à fórmula:

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}, \quad (3)$$

a qual se assemelha ao método babilônico apresentado em (1).

Já em formas como $x^2 + c = bx$, é indicada como solução uma descrição que equivale a:

$$x = \frac{-b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}, \quad \text{para quando } x > \frac{b}{2} \quad (4)$$

Nesse caso, ele mostrou ter compreensão da impossibilidade de encontrar solução quando temos $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < c$ do encontro de somente uma solução quando $x = \frac{b}{2}$.

Para casos do tipo $bx + c = x^2$, ele apresentou um caminho que pode ser interpretado da seguinte forma:

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

As equações argumentadas por Al-Khowarizmi foram tratadas por vários matemáticos árabes posteriores, conectando as mesmas ideias ou similaridades que indicam o reflexo das contribuições árabe para a concepção de equação do 2º grau.

Muito desse conhecimento algébrico de Al-Khowarizmi foi difundido pela Europa. Alguns dos nomes que ficaram marcados por emancipar esse conhecimento foram Abraão bar Hija (? - 1136), com o livro *Líber embadorum*; Platão de Tívoli, que viveu de 1134 a 1145, em Barcelona, e traduziu para o latim obras do árabe e do hebraico; e Leonardo de Pisa, também chamado de Fibonacci, que viveu aproximadamente de 1170 a 1240, e destacou-se por ter ajudado a difundir a matemática árabe no ocidente com o seu livro *Líber Abbaci* (1202).

As equações estão presentes na realidade do ser humano desde os tempos antigos, quando não havia a ideia de números, ou símbolos matemáticos, como os que estão presentes na atualidade. Na antiguidade, o homem, ainda que intuitivamente, tinha uma concepção da relação de equivalência, por exemplo, o pastor de ovelhas separava cada pedrinha para contar cada ovelha, para que no final do dia controlasse a quantidade de ovelhas do rebanho. Mesmo sem perceber, toda relação de equivalência reproduzida remete à ideia de equação. Segundo Garbi (2007), a palavra equação possui uma raiz latina que originou as palavras igual e igualdade. Na Ciência, é pelo estabelecimento de correlações entre fatos, conceitos e ideias que se descobrem equivalências por associações que utilizam equações como linguagem.

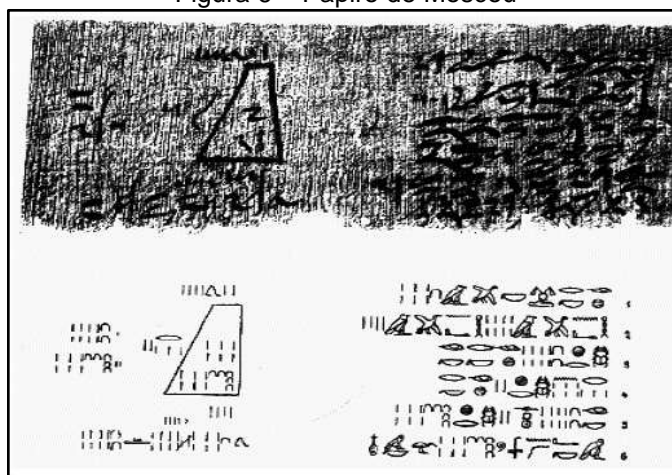
As equações algébricas, exponenciais, diferenciais, trigonométricas ou de qualquer outra natureza, constituem, pelo menos do ponto de vista prático, a parte mais importante da matemática. Os problemas, de maneira geral solucionados através de números direta ou indiretamente, são cuidados por meio de equações. Por isso, é importante também entender como surgiu o pensamento algébrico das equações nessa percepção histórica de relevância ao tema (GARBI, 2007).

A equação é uma proposta para resolução de situações e problemas na qual surgem valores desconhecidos quando se tem uma igualdade. Equacionar pode ser

considerado um mesmo valor para igualar, pesar, igualar em peso, que significa “ser igual a”, de novo lembrando-se a ideia de igualdade. Em outras palavras, equação é uma igualdade que contém pelo menos uma letra do alfabeto, a incógnita, representando o número desconhecido.

Neste constructo, a mais antiga evidência de textos matemáticos escritos que dialogam com este preceito de “equação” aparece na civilização egípcia do final do quarto milênio antes da Era Comum. Esses textos já apresentavam o mesmo sistema de numeração utilizado nos últimos tempos do Egito. Um sistema decimal, não posicional, que apresentava um novo símbolo a cada nova potência de 10, como foi localizado no Papiro de Moscou (Figura 6) que contém 25 exemplos, quase todos da vida prática (BOYER, 1974). “O Papiro de Moscou tem quase o comprimento do Rhind mas só um quarto da largura” (BOYER, 1974, p. 14). Nesse papiro se revela o conhecimento matemático do antigo Egito.

Figura 6 – Papiro de Moscou



Fonte: Boyer (1974, p.7).

Nesta perspectiva, além deste acervo histórico, outros documentos do Egito antigo trouxeram à luz alguns escritos de problemas matemáticos, bem como suas soluções àquela época. Destacam-se os papiros de Kahun, de Berlim e o Papiro Rhind (ou de Ahmes). Dessa forma, Boyer (2001) destaca que, em relação ao conhecimento matemático presentes nos papiros,

[...] há um limite para a quantidade de informação matemática que se pode retirar de calendários e pedras tumulares, e nossas ideias sobre a contribuição egípcia seriam muito imprecisas se dependêssemos somente de material de origem cerimonial e astronômica. A matemática é muito mais do que contar e medir os aspectos que são tratados em inscrições hieroglíficas.

Os desenhos registrados nesses papiros, como muitos dos problemas, eram originados de situações aritméticas e geométricas nas quais se caracterizavam determinações de quantidades de alimentos associadas às ideias de equações de 1º grau. Por outro lado, geometricamente, os problemas representavam situações com cálculo de volumes e áreas de figuras planas. No caso das equações do 2º grau, destacamos as áreas das figuras planas do quadrado e do retângulo, uma vez que as mesmas estão bastante presentes no dia a dia. Para Garbi (2007, p.11), os matemáticos e astrônomos babilônicos do segundo milênio a.C. realizaram feitos surpreendentes:

[...] eles conheciam a propriedade geral dos triângulos retângulos (o hoje chamado teorema de Pitágoras, também já conhecido pelos chineses no séc XII a.C.), resolviam equações do primeiro grau e do segundo grau, calculavam áreas e volumes de certas figuras geométricas, determinavam a raiz 2 com grande precisão, etc.

Para resolver os problemas matemáticos, os egípcios desenvolveram métodos para obter uma solução, o que os pesquisadores apontaram como sendo situações que se modelavam como equações do 1º grau, e, para poder encontrar respostas corretas, utilizavam-se de um “método de falsa posição”, encontrados mais precisamente, no Papiro de Rhind.

Por outro lado, o Papiro de Moscou, de 1850 a.C., identifica 25 problemas de aritmética e de geometria que mostram bem que, naquela época, não se utilizavam símbolos ou fórmulas matemáticas, e sim uma linguagem verbal “e contém uma descrição verbal (desconhecia-se o conceito de “fórmulas” gerais) de como fazer-se o cálculo correto do volume de um tronco de pirâmide, o que demonstra um conhecimento notável para a época” (GARBI, 2007, p. 11). Nesse sentido, a linguagem verbal, muitas vezes, é pouco apreciada por grande parte dos alunos ao resolverem problemas sobre equações do 2º grau. Isto nos faz observar o quanto é importante resgatar previamente o ensino da tradução da linguagem algébrica para a linguagem matemática.

Assim, nos estudos das equações do 2º grau, a História da Matemática poderá servir de recurso metodológico no processo de ensino e aprendizagem, onde os sujeitos serão conduzidos ao cenário de curiosidade. Dessa forma, a aprendizagem

naturalmente será mais significativa e mais humana, e não tanto formal e abstrata, pouco atrativa, onde:

[...] pesquisas atuais indicam que a inserção de fatos do passado pode ser uma dinâmica bastante interessante para introduzir um determinado conteúdo matemático em sala de aula, tendo em vista que o aluno pode reconhecer a Matemática como uma criação humana que surgiu a partir da busca de soluções para resolver problemas do cotidiano (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 79).

Nesse cenário de reflexão e curiosidade do passado, os documentos oficiais corroboram que “é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática” (BRASIL, 2017, p. 296). Concordamos com os autores supracitados sobre introduzir determinado conteúdo matemático com o recurso da história da matemática, em que o aluno possa reconhecer e se interessar pela matemática, e, mediante essa forma, possamos contribuir na sistematização e formalização dos conceitos matemáticos.

Por exemplo, a utilização do diagrama-modelo: envolver tópicos de história da matemática associada a personagens/matemáticos e com temas/conteúdos pré-estabelecidos são alternativas metodológicas que poderão ser ministradas em sala de aula. Ao construir o referido diagrama, o sujeito deve notar que precisa ser “observado o formalismo e o rigor matemático para esclarecer terminologias, o uso correto das nomenclaturas e [portanto] impedir a ocorrência de eventuais induções ao erro ou equívocos conceituais e históricos” (CHAQUIAM, 2017, p. 28). O diagrama poderá servir também como ferramenta para esclarecer terminologias e erros conceituais e históricos que, muitas vezes, acontecem em sala de aula.

Segundo Nunes e Silva (2006), não faltam argumentos das potencialidades pedagógicas na utilização da história da matemática e não apreciamos uma frequência necessária do uso dessa tendência em sala de aula. Dentre os fatores que impedem a frequência desse recurso, há:

[...] a necessidade de mais leituras, pesquisas e busca de aperfeiçoamento em nível de pós-graduação, por parte dos docentes; [e também] autores que demonstrem a sensibilidade de relacionar a história que abordam (geralmente para introduzir capítulos) (NUNES; SILVA, 2006, p. 3).

A história da matemática, em muitos casos, como no diagrama-modelo, pode contribuir para o aluno se localizar no tempo e no espaço, além de favorecê-lo na compreensão das linguagens algébricas. Ademais, “[...] pode contribuir para a compreensão das linguagens simbólica e algébrica associadas à matemática” (CHAQUIAM, 2017, p. 234). Esse recurso possivelmente se adequa, em grande parte, aos assuntos da matemática e contempla as necessidades do professor e do sujeito da aprendizagem em sala de aula como, por exemplo, a valorização das linguagens simbólica e algébrica.

3.2 MÉTODO DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU INCOMPLETAS

No caso de $b = c = 0$, temos a equação $ax^2 = 0$. Este tipo de equação é analisada pela propriedade do produto nulo: para que tenhamos a sentença acima como verdadeira, devemos ter $a = 0$ ou $x^2 = 0$, e para todo caso, a solução é $x' = x'' = 0$. Tal equação não detém grande valor prático, mas sua expressão permite levantamentos pertinentes em sala de aula, inclusive por ser o mesmo princípio para o caso $c = 0$ — na equação $ax^2 + bx = 0$, utilizamos a mesma propriedade, uma vez que podemos fatorar a expressão:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

Logo, temos duas sentenças que nos levam às duas soluções deste tipo de equação, $x = 0$ e $ax + b = 0$. Assim, temos $x' = 0$ e $x'' = \frac{-b}{a}$. O terceiro caso de equação incompleta corresponde ao tipo $ax^2 + c = 0$, em que $b = 0$. Nesse caso temos como solução raízes simétricas:

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

$$x = \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Portanto, as raízes são:

$$x' = -\sqrt{\frac{-c}{a}} \text{ e } x'' = \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Os dois últimos modelos podem ser explorados em diversas situações, onde é possível relacioná-los com a realidade em contextos que envolvam ideias de áreas, valor numérico, casos de restrições etc. Assim, temos alguns exemplos de equações incompletas do 2º grau:

$$x^2 - 4x = 0 \quad x^2 + 3x = 0 \quad -2x^2 + 9 = 0 \quad x^2 - 4 = 0$$

3.3 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÃO DO 2º GRAU COMPLETA

O nosso trabalho visa contribuir para a melhoria do ensino e aprendizagem das equações polinomiais do 2º grau no âmbito escolar. Assim, em relação às equações completas, detemo-nos em algumas formas de resolução. Existem variadas maneiras e de espécies diferentes (por espécies nos referimos à natureza matemática, algébrica, geométrica, figural etc.).

3.3.1 Fórmula resolutive da equação polinomial do 2º grau

O primeiro método que apresentamos é o dito convencional ou fórmula resolutive, mencionado em textos hindus e obtido pelo desenvolvimento da equação em sua forma completa, $ax^2 + bx + c = 0$, a partir do completamento de quadrado, todavia sendo reduzida a uma expressão com coeficiente do termo quadrático igual a 1, como vemos o passo-a-passo apresentado a seguir:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para se chegar à fórmula acima, pode-se proceder da seguinte maneira: primeiro, divide-se $ax^2 + bx + c = 0$ por a .

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

Agora, subtraindo o termo independente em ambos os lados da equação, temos que:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = \frac{-c}{a}$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = \frac{-c}{a}$$

Somando o termo $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ em ambos os membros para completar o quadrado, temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Obtemos, então, duas soluções possíveis para x , que são as seguintes:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ou podemos simplesmente escrever:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Em ambos os casos, atualmente indicamos por Δ (delta) o discriminante da equação representado pela expressão $b^2 - 4ac$, pelo fato de que, a partir do valor

desse discriminante, é possível prever a quantidade de raízes reais que a equação deverá possuir.

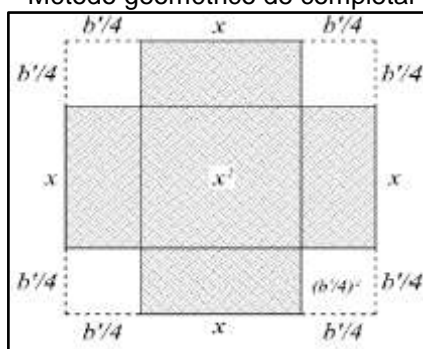
Assim, temos três possibilidades: se $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais distintas; se $\Delta = 0$, a equação possui uma única raiz real; se $\Delta < 0$, a equação polinomial não possui raízes no campo dos reais, R . Dessa forma, temos alguns dos exemplos de tipos de equações completas do 2º grau:

$$2x^2 - 10x + 12 = 0 \quad x^2 + 6x + 8 = 0 \quad -x^2 + x - 1 = 0$$

3.3.2 Método do completamento de quadrado

O princípio do completamento de quadrado, por si só, configura uma forma de resolução para as equações do tipo $x^2 + b'x = c$, com $c > 0$. Nesse modelo, devemos relacionar a expressão a um somatório de áreas, sendo x^2 a área de um quadrado de lado x e $b'x$ os lados da área de um retângulo de dimensões b e x , conforme o esquema apresentado por Vale (2013), na Figura 7.

Figura 7 – Método geométrico de completar quadrado.



Fonte: Vale (2013, p. 54).

Segundo Vale (2013), a área hachurada da Figura 4 é igual a c . Para completarmos o quadrado, devemos formar quatro quadrados menores, de lados $b/4$ e área $\left(\frac{b'}{4}\right)^2$; logo, devemos acrescentar $4\left(\frac{b'}{4}\right)^2$ à equação.

$$x^2 + b'x + 4\left(\frac{b'}{4}\right)^2 = c + 4\left(\frac{b'}{4}\right)^2$$

Desse modo, temos que $4\left(\frac{b'}{4}\right)^2 = \left(\frac{b'}{2}\right)^2$, que corresponde à área dos quatro quadrados menores.

Podemos formar o quadrado da soma no primeiro termo e desenvolver a expressão para obter o valor de x .

$$x^2 + b'x + \left(\frac{b'}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b'}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b'}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b'}{2}\right)^2$$

$$x + \frac{b'}{2} = \sqrt{c + \left(\frac{b'}{2}\right)^2}$$

$$x = \frac{-b'}{2} \pm \sqrt{c + \left(\frac{b'}{2}\right)^2}$$

Portanto, o valor procurado corresponde ao lado do quadrado maior, subtraído duas vezes do valor do lado dos quadrados menores formados. Esse método possui grande valor didático, uma vez que relaciona formas diferentes de representação da equação polinomial do 2º grau, além de explorar os conhecimentos dos alunos acerca da fatoração e dos produtos notáveis, bem como da geometria.

3.3.3 Método da soma e produto

Não obstante, temos também o método da soma e produto. Dadas as raízes de uma equação polinomial do 2º grau, temos $x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. A partir disto, podemos determinar a soma ($x' + x''$) e o produto ($x' \cdot x''$) das raízes.

A soma seria dada por:

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x' + x'' = \frac{-2b}{2a}$$

$$x' + x'' = \frac{-b}{a}$$

Quanto ao produto das raízes:

$$x' \cdot x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{b^2 - b\sqrt{b^2 - 4ac} + b\sqrt{b^2 - 4ac} - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$

Da equação geral podemos desenvolver a expressão colocando o a em evidência, conforme a seguir:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0$$

Como $x' + x'' = \frac{-b}{a}$ e $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$, temos:

$$a(x^2 - (x' + x'')x + (x' \cdot x'')) = 0$$

Chamemos s a soma das raízes, e p o produto das mesmas, então obtemos

$$a(x^2 - sx + p) = 0$$

Em caso particular para $a = 1$, tem-se $x^2 - sx + p = 0$. Podemos determinar os valores das raízes apenas por este método analítico da soma e produto. Por fim, o método da fatoração pode ser identificado a partir do desenvolvimento da expressão geral.

O Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A.) afirma que toda equação polinomial $P(x) = 0$ de grau $n \geq 1$, isto é, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ admite pelo menos uma raiz complexa. A partir desse teorema, podemos colocar a expressão na forma: $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n) = 0$, onde r_1, r_2, \dots, r_n são todas as raízes de $P(x)$ (IEZZI, 2005, p. 106). Assim, podemos escrever a equação geral na forma descrita abaixo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Colocando a em evidência, temos que:

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0$$

Segundo as expressões da soma e produto das raízes, obtemos

$$a(x^2 - (x' + x'')x + (x' \cdot x'')) = 0$$

$$a(x^2 - x'x + x''x + x'.x'') = 0$$

Fazendo x e x'' em evidência e, em seguida, $x - x'$, isto resulta que

$$a(x(x - x') + x''(x + x')) = 0$$

$$a(x - x')(x - x'') = 0,$$

em que x' e x'' são as raízes da equação polinomial do 2º grau completa.

3.3.4 Método da semissoma e do produto

Outro método que se pode usar para encontrar as soluções de uma equação do 2º grau é o da Semissoma e do Produto. Para entender como ele é estruturado, segue o desenvolvimento abaixo.

Primeiramente, dividimos a equação $ax^2 + bx + c = 0$ por a , obtendo, com isso, a expressão $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Considerando também que $s = \frac{-b}{2a}$ e $p = \frac{c}{a}$, sendo s a soma e p o produto das raízes, então $x^2 - 2sx + p = 0$ e a solução pelo método convencional de resolução de equação do 2º grau é dada por:

$$x = s \pm \sqrt{s^2 - p}$$

Assim, há uma forma de se encontrar as soluções de uma equação do 2º grau em função da soma e do produto. Esse método também foi utilizado pelos babilônios para resolver equações do tipo $x^2 - px = q$, cuja solução utilizada era:

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{q}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$$

Tem-se como exemplo a equação:

$$2x^2 + 10x + 12 = 0$$

Para resolvê-la, devemos perceber a expressão $x^2 - 2sx + p = 0$; assim, temos:

$$2x^2 + 10x + 12 = 0$$

$$\frac{2}{2}x^2 + \frac{10}{2}x + \frac{12}{2} = \frac{0}{2}$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

A partir da forma $x^2 - 2sx + p = 0$, temos que $-2s = 5$ e $p = 6$, então $s = \frac{-5}{2}$ e $p = 6$. Com isso, podemos aplicar a fórmula $x = s \pm \sqrt{s^2 - p}$ e teremos:

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6}$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6}$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25 - 24}{4}}$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$x' = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \quad \text{e} \quad x'' = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$$

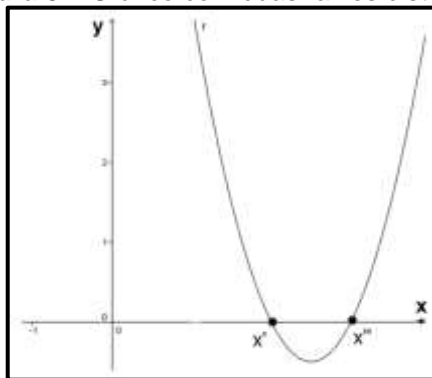
As soluções serão 2 e 3. O Método da Semissoma e do Produto apresentado, que faz referência a um tipo de resolução tratada pelos babilônios, também pode ser concebido a partir de outra interpretação, que será tratada na próxima subseção: o “Método de Po-Shen Loh”.

3.3.5 Método de Po-Shen Loh

O método de resolução convencional certamente possui uma problemática, que é o fato de ser um pouco trabalhoso quando o aplica em uma equação do 2º grau. No entanto, o professor Po-Shen Loh, da Universidade de Carnegie Mellon, propôs um método de resolução, por meio de um de seus artigos de 2019, que indica uma reinterpretação do Método da Semissoma e do Produto (TROCADO, 2019).

O método partiu de objetivos educacionais, para tornar a resolução de equações do 2º grau mais intuitiva e menos trabalhosa para os alunos. Trocado (2019) descreve que o método de Po-Shen Loh se baseia no entendimento gráfico da função polinomial do 2º grau, onde os zeros desse tipo de função, ou seja, os elementos do domínio que possuem imagem 0, certamente são as soluções da equação que indica sua relação. Por exemplo, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui, como zeros da função, as duas soluções x' e x'' da equação $0 = ax^2 + bx + c$. Pode-se visualizar melhor este entendimento a partir da figura 8 que apresenta um exemplo de representação gráfica da função $f(x)$.

Figura 8 – Gráfico com duas raízes distintas.

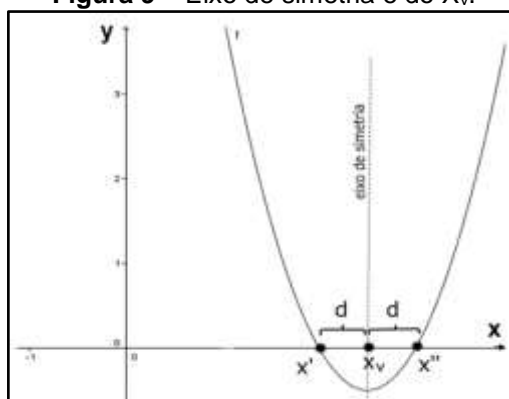


Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Convém perceber que, ao se passar um eixo de simetria vertical, de modo a se dividir a representação gráfica em partes iguais, o elemento do domínio situado nessa linha é o chamado x do vértice ($x_v = \frac{-b}{2a}$), que possui distância d para x' e para x'' .

Assim, a partir de x_v é possível obter os zeros da função, que serão $x_v - d$ e $x_v + d$ (Figura 9).

Figura 9 – Eixo de simetria e do X_v .



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Podemos observar, na Figura 9, que temos dois valores iguais (d) da distância, os quais subtraídos e adicionados ao x_v permite encontrarmos, respectivamente, os valores de x' e x'' . Salientamos ser possível determinar o x_v a partir da relação $\frac{-b}{2a}$.

Mas, sabe-se, por exemplo, que $x' + x'' = \frac{-b}{a}$ e $x' \times x'' = \frac{c}{a}$. Diante disso, temos duas possibilidades de encontrar o d .

$$(x_v - d) + (x_v + d) \frac{-b}{a} \quad (x_v - d) \times (x_v + d) = \frac{c}{a}$$

A primeira expressão não permite encontrar o d , pois:

$$\begin{aligned} (x_v - d) + (x_v + d) \frac{-b}{a} \\ \left(\frac{-b}{2a} - d\right) + \left(\frac{-b}{2a} + d\right) \frac{-b}{a} \\ \frac{-b}{a} = \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

Já a segunda expressão permite:

$$\begin{aligned} (x_v - d) \times (x_v + d) &= \frac{c}{a} \\ x_v^2 - d^2 &= \frac{c}{a} \\ d^2 &= x_v^2 - \frac{c}{a} \end{aligned}$$

$$d = \sqrt{x_v^2 - \frac{c}{a}} \text{ (consideremos } d \text{ em módulo)}$$

Assim, é possível encontrar x' e x'' , já que eles são respectivamente:

$$(x_v - d) \text{ e } (x_v + d), \text{ onde } x_v = \frac{-b}{2a} \text{ e } d = \sqrt{x_v^2 - \frac{c}{a}}.$$

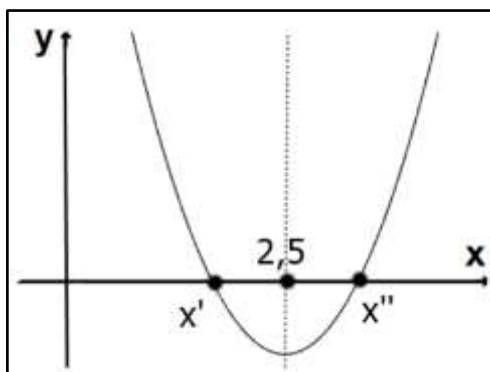
Ao unir ambos, teremos que os zeros da função f , ou as soluções da equação do 2º grau ligadas a ela, serão $x' = x_v + \sqrt{x_v^2 - \frac{c}{a}}$ e $x'' = x_v - \sqrt{x_v^2 - \frac{c}{a}}$

Ou simplesmente:

$$x = x_v \pm \sqrt{x_v^2 - \frac{c}{a}}.$$

Aplicando o método de Po-Shen Loh à equação $2x^2 - 10x + 12 = 0$ como exemplo, cujas soluções são os zeros da função $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$, e onde o x do vértice será $x_v = \frac{-(-10)}{4} = 2,5$, teremos (Figura 10):

Figura 10 – Valor do X_v .



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Então, $x' = 2,5 - d$ e $x'' = 2,5 + d$ serão os zeros da função f .

Agora basta determinar o d a partir da relação $(2,5 - d)(2,5 + d) = \frac{c}{a}$, onde, ao observar $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$, nota-se que $(2,5 - d)(2,5 + d) = \frac{12}{2}$, e assim:

$$(2,5 - d)(2,5 + d) = \frac{12}{2}$$

$$(2,5)^2 - d^2 = 6$$

$$d^2 = (2,5)^2 - 6 = 6,25 - 6$$

$$d = \sqrt{0,25} = 0,5$$

Portanto, os zeros da função f serão:

$$x' = 2,5 - d \text{ e } x'' = 2,5 + d$$

$$x' = 2,5 - 0,5 \text{ e } x'' = 2,5 + 0,5$$

$$x' = 2 \text{ e } x'' = 3$$

Esses valores são as soluções da equação inicial.

O método Po-Shen Loh possibilita maior intuição para a resolução de uma equação do 2º grau, pois se conecta com a ideia de gráfico de uma função polinomial do 2º grau, bem como, algumas de suas relações. Entretanto, pode-se dizer que ele também é outra forma de representar o Método da Semissoma e do Produto. Esse fato fica claro quando comparamos a fórmula dos dois métodos: Método Po-Shen Loh

$$— x = x_v \pm \sqrt{x_v^2 - \frac{c}{a}}, \text{ com } x_v = \frac{-b}{2a};$$

Método da Semissoma e do Produto — $x = s \pm \sqrt{s^2 - p}$, sendo $p = \frac{c}{a}$ e $s = \frac{-b}{a}$ da equação $x^2 - 2sx + p = 0$.

Nosso objetivo neste capítulo foi apresentar informações de alguns métodos de resolução de equações polinomiais do 2º grau. Além disso, realizamos uma breve discussão dos aspectos históricos, o que nos permite confirmar como a equação do

2º grau já estava em posse de povos antigos, mesmo que com um rigor menor do que o que possuímos hoje.

Ressaltamos a importância de o aluno conhecer diferentes métodos que explorem diferentes formas do conhecimento matemático. Buscamos contemplar métodos algébricos, numéricos e geométricos no estudo deste capítulo, e enalteçemos suas contribuições junto às discussões do objeto no âmbito didático para a elaboração da nossa proposta de sequência didática.

REFERÊNCIAS

- ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 1998.
- ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: por que através da resolução de problemas? *In: ONUCHIC, L. R. et al. (Orgs.). Resolução de problemas: teoria e prática*. Jundiaí: Paco, 2014.
- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.
- ANDRADE, C. P.; ONUCHIC, L. R. Perspectivas para a resolução de problemas no GTERP. *In: ONUCHIC, L. R.; LEAL JR., L. C.; PIRONEL, M. (Orgs.). Perspectivas para a resolução de problemas*. São Paulo: Livraria da Física, 2017.
- AZEVEDO, E. B.; FIGUEIREDO, E. B.; PALHARES, P. M. B. Adaptação no roteiro da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática do GTERP para ensinar cálculo diferencial e integral através da resolução de problemas. **Rev. Educ. Matemática**, São Paulo, v. 17, e020012, p. 01-22, 2020.
- BOYER, C. B. **História da matemática**. 3. imp. São Paulo: Edgard Blucher, 2001.
- BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blucher; Ed. Universidade de São Paulo, 1974.
- BRANCO, M. N. **Uma sequência didática para o ensino de inequações quadráticas à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud**. 2020, 135 f. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino da Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2020.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wpcontent/uploads/2018/04/BNCC_19mar2018_-versaofinal.pdf. Acesso em: 13 abr. 2019.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática – 3º e 4º ciclos**. Brasília: MEC, 2001.
- BRASIL. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: SEF/MEC, 1998.
- BRIM, J. F. H. **O ensino de funções do 2º grau para alunos com deficiência visual: uma abordagem para a educação matemática inclusiva**. 2018.147 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2018.
- CHAQUIAM, M. **Ensaio temáticos: história e matemática em sala de aula**. Belém: SBEM/SBEM-PA, 2017.

D'AMORE, B.; GODINO, D. J. Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in didattica della matematica. **La matematica e la sua didattica**, Bologna, v. 1, p. 9-38, 2006.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 6. ed. São Paulo: Ática, 1995.

DAVIS, C.; NUNES, M. M. R.; NUNES, C. A. A. Metacognição e sucesso escolar: articulando teoria e prática. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, v. 35, n. 125, p. 205-230, mai./ago. 2005.

FLEMMING, D. M.; LUZ, E. F.; MELLO, A. C. C. **Tendências em educação matemática**. 2 ed. Palhoça: Unisul Virtual, 2005.

GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. 2. ed. rev. ampl. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

GAY, M. R. G.; SILVA, W. R. S. **Araribá: mais matemática – 9º ano**. v. 3. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2018.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4ª ed. São Paulo: Atlas, 2002.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar: complexos, polinômios, equações**. v. 6. 7. ed. São Paulo: Atual, 2005.

IVIC, I. **Lev Semionovich Vygotsky**. Tradução José Eustáquio Romão. Recife: Massangana, 2010. (Coleção Educadores).

JENSKE, G. **A teoria de Gérard Vergnaud como aporte para a superação da defasagem de aprendizagem de conteúdo básicos da matemática: um estudo de caso**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

KRULIK, S.; REYS, R. **A resolução de problemas na matemática escolar**. 5. reimpr. São Paulo: Atual, 1997.

LIMA, E. L. *et al.* **A matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: IMPA/Sociedade Brasileira de Matemática, 1997. (Coleção do Professor de Matemática, v.1).

MACULAN, B. C. M. S.; LIMA, G. A. B. O. Buscando uma definição para o conceito de “conceito”. **Perspectivas em Ciência da Informação**, Belo Horizonte, v. 22, n. 2, p. 54-87, abr./jun. 2017.

MAGINA, S. A teoria dos campos conceituais: contribuições da psicologia para a prática docente. *In*: ENCONTRO REGIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, 18., 2005, Campinas. **Anais [...]**, Campinas: Unicamp, 2005.

MAGINA, S. *et al.* **Repensando adição e subtração: contribuições da teoria dos campos conceituais**. São Paulo: PROEM, 2001.

MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas aulas de matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores.** Belém: SBHMat, 2016.

MIRANDA, C. B. de. **Equação do 2º grau e técnicas de resolução: um estudo didático da classe 8ª série.** 2003. 76 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 7, n. 1, p. 7-29, 2002.

MOREIRA, M. A. O que é aprender? *In*: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (orgs.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais.** Curitiba: CRV, 2009.

NUNES, C. B. **O processo ensino-aprendizagem-avaliação de geometria através da resolução de problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática.** 2010. 430 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

NUNES, J. M. V.; SILVA, F.H.S. História da matemática na educação matemática: uma tendência necessária. *In*: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2006, Recife. **Anais [...]**. Recife: UFPE/UFRPE, 2006.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática.** São Paulo: Ed. UNESP, 1999.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos de educação matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

PARISOTTO, A. L. V.; RINALDI, R. P. Ensino de língua materna: dificuldades e necessidades formativas apontadas por professores na educação fundamental. **Educar em Revista**, Curitiba, n. 60, p. 261-276, abr./jun. 2016.

PEREIRA, Éderson Antônio Ferreira. **Uma sequência didática para o ensino de equação do 2º grau com uma incógnita à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud.** 2022. 291 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2022.

PITOMBEIRA, J. B. Revisitando uma velha conhecida. *In*: BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2., 2004, Salvador. **Anais [...]**. Salvador: SBM/UFBA, 2004.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência. 1978.

PONTE J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, p.105-132. 2006. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3007/1/06-Ponte%28BOLEMA-Estudo%20de%20caso%29.pdf>. Acesso em: 22 out. 2022.

RAIVA, V. N. P.; MORAES, M. E. L.; GUERRA, R. B. **Resolução de problemas na formação do professor de matemática: desafios e possibilidades**. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2015, Chiapas. **Anais [...]**. Chiapas: CIAEM, 2015.

SÁ, P. F. **Possibilidades da resolução de problemas em aulas de matemática**. Belém: IFPA, 2021. 121 p. (Coleção II SINEPEM; v.2).

SANTOS, J. A.; OLIVEIRA, G. S.; MALUSÁ, S. Conceitos matemáticos na educação infantil: contribuições dos estudos de Jean Piaget. **Cadernos da Fucamp**, Monte Carmelo, v. 16, p. 01-11, 2017.

SARMENTO, D. F. **A teoria histórico-cultural de L. S. Vigotsky**. 2006. 211 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

SILVA, F. H. S. da. **Educação matemática: caminhos necessários**. Belém: Palheta, 2016.

SILVA, F. H. S. **Formação de professores: mitos do processo**. Belém: EDUFPA, 2009.

SILVA, S. M. **As dificuldades da aprendizagem dos alunos em equações do 2º grau com uma incógnita**. 2017. 52 f. Monografia (Graduação em Licenciatura em Matemática). – Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto, 2017.

TROCADO, A. **Novo método para resolução de equações do 2º grau completas**. [S.l.]: [s. n.], 2019. Disponível em: [https://clube.spm.pt/files/AdeusFormulaResolvente%20\(1\).pdf](https://clube.spm.pt/files/AdeusFormulaResolvente%20(1).pdf). Acesso em: 13 nov. 2020.

VALE, A. F. A. do. **As diferentes estratégias de resolução da equação do segundo grau**. 2013. 76 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semiárido, Mossoró, 2013.

VERGNAUD, G. A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thought Involved in Addition and Subtraction Problems. In: CARPENTER, T.; Romberg, T.; Moser, J. (Eds.). **Addition and Subtraction: a cognitive Perspective**. New Jersey: Lawrence Erlbaum, 1982. p. 39–59.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Tradução de Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: Ed. UFPR, 2014. 322. p.

VERGNAUD, G. A Didática é uma Provocação: Ela é um desafio. *In*: GROSSI, E. P.(org.). **Piaget e Vygotsky em Gérard Vergnaud**. Porto Alegre: GEEMPA, 2017.(Coleção Teoria dos Campos Conceituais).

VERGNAUD, G. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. **Rev. GEMPA**, Porto Alegre, n. 4, p. 9-19, 1996.

VERGNAUD, G. Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. **Perspectivas**, Florianópolis, v. 26, n. 10, p. 195-207, 1996.

VERGNAUD, G. Coletânea de textos traduzidos. *In*: RICHBIETER, L.; SPINILLO, A. C.; MORO, M. L. F.; SOARES, M. T. C. (orgs.). **Site Vergnaud Brasil**. [S.l.]: [s.n.], 2020. Disponível em: <https://www.vergnaudbrasil.com/textos/>. Acesso em: 04 jan. 2021.

VERGNAUD, G. Epistemology and psychology of mathematics education. *In*: NESHER, P.; KILPATRICK, J. (Eds.). **Mathematics and cognition: a research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 10, n. 2-3, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. Le rôle de l'enseignant á la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. *In*: ARTIGUE M.; GRAS R.; LABORDE, C. TAVIGNOT, P. (Eds.). **Vingt ans de didactique des mathématiques em France**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1994.

VERGNAUD, G. O que é aprender? *In*: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (orgs.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. Curitiba: CRV, 2009.

VERGNAUD, G. Quais questões a teoria dos campos conceituais busca responder? **Caminhos da Educação em Revista**, Aracaju, v. 9, n. 1, 2019. Disponível em: https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/296/1988. Acesso em: 27 set. 2020.

VERGNAUD, G. **Teoria dos campos conceituais**. *In*: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 1993, Rio de Janeiro. **Anais** [...]. Rio de Janeiro, 1993, p. 1-26.

VERGNAUD, G. The theory of conceptual fields. **Human Development**, [S.l.], v. 52, n. 2, p. 83–94, abr. 2009.

VERGNAUD, G. Todos perdem quando a pesquisa não é colocada em prática: depoimento. Entrevista concedida a Gabriel Pillar Grossi. **Revista Nova Escola**, São Paulo, 01 set. 2008. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/960/gerard-vergnaud-todos-perdem-quando-a-pesquisa-nao-e-colocada-em-pratica>. Acesso em: 18 ago. 2019.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1988.

VYGOTSKY, L. S. **Problemas de psicología general**. Madrid: Visor, 1991.((Obras Escogidas, v. 2).

VYGOTSKY, L. S. **Problemas del desarrollo de la psique**. Madrid: Visor, 1995. (Obras Escogidas: v. 3).

ZANOTTA, D. C.; CAPPELLETO, E.; MATSUOKA, M. T. O GPS: unindo ciência e tecnologia em aulas de física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 33, n. 2, p.2313, 2011.

SOBRE OS AUTORES



ÉDERSON ANTÔNIO FERREIRA PEREIRA

Possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal do Pará (2004), Especialização em Fundamentos da Matemática Elementar pela Universidade Federal do Pará - Campus Universitário de Breves (2007), Curso Superior em Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (2013), Mestrado em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática PPGEM/UEPA (2022).



FRANCISCO HERMES SANTOS DA SILVA

Doutor em Educação na área de Educação Matemática pela UNICAMP (1999), Mestre em Educação na área de Psicologia Educacional pela Universidade Estadual de Campinas (1995). Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1993). Atualmente é docente sem vínculo empregatício da Universidade Estadual do Pará no Programa de pós-graduação em Mestrado profissional em Ensino de matemática; tem vínculo como docente da Universidade Federal de Mato Grosso do Programa de Pós-Graduação em educação em Ciências e Matemática - PPGECEM, pólo UFPA do programa em REDE de Formação da Amazônia - REAMEC. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Métodos e Técnicas de Ensino, Teorias de Aprendizagem, atuando principalmente nos temas: educação matemática, aprendizagem significativa e obstáculos didáticos.



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
TRAVESSA DJALMA DUTRA, S/N - TELÉGRAFO
66113-200 BELÉM-PA
WWW.UEPA.BR/PPGEM