O ENSINO DE MATEMÁTICA NO CEARÁ

Da formação de professores às práticas e experiências docentes

Allan Júnior da Silva Costa
Annelise Maymone
Fábio Sampaio Mariano
Francisco Odécio Sales
Wesley Liberato Freire
(Organizadores)

Quipá Editora

O ENSINO DE MATEMÁTICA NO CEARÁ: DA FORMAÇÃO DE PROFESSORES ÀS PRÁTICAS E EXPERIÊNCIAS DOCENTES

Quipá Editora

ALLAN JÚNIOR DA SILVA COSTA
ANNELISE MAYMONE
FÁBIO SAMPAIO MARIANO
FRANCISCO ODÉCIO SALES
WESLEY LIBERATO FREIRE
(ORGANIZADORES)

O ENSINO DE MATEMÁTICA NO CEARÁ: DA FORMAÇÃO DE PROFESSORES ÀS PRÁTICAS E EXPERIÊNCIAS DOCENTES

1ª Edição

Quipá Editora
2022

Copyright © dos autores e autoras. Todos os direitos reservados.

Esta obra é publicada em acesso aberto. O conteúdo dos capítulos, os dados apresentados, bem como a revisão ortográfica e gramatical, são de responsabilidade de seus autores, detentores de todos os Direitos Autorais, que permitem o download e o compartilhamento, com a devida atribuição de crédito, mas sem que seja possível alterar a obra, de nenhuma forma, ou utilizá-la para fins comerciais.

Normalização: dos autores e autoras.

Conselho Editorial: *Me. Adriano Monteiro de Oliveira, Editor-chefe, Quipá Editora / Dra. Anny Kariny Feitosa, Instituto Federal do Ceará, campus Iguatu / Dra. Francione Charapa Alves, Universidade Federal do Cariri / Me. Marília Maia Moreira, Universidade Estadual Vale do Acaraú / Dra. Mônica Maria Siqueira Damasceno, Instituto Federal do Ceará, campus Juazeiro do Norte / Esp. Ricardo Damasceno de Oliveira, Universidade Regional do Cariri*

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

E59 O ensino de matemática no Ceará : da formação de professores às práticas e experiências docentes / Organizado por Allan Júnior da Silva Costa ... [et al.]. — Iguatu, CE: Quipá Editora, 2022.
153 p.: il.

ISBN 978-65-5376-075-2
DOI 10.36599/qped-ed1.178

1. Matemática – Ensino – Ceará. 2. Formação de professores. I. Costa, Allan Júnior da Silva. II. Título.

CDD 510.07

Elaborada por Rosana de Vasconcelos Sousa — CRB-3/1409

Obra publicada pela Quipá Editora em agosto de 2022.

Quipá Editora
www.quipaeditora.com.br
@quipaeditora

APRESENTAÇÃO

O presente trabalho visa publicar a experiência docente de professores da educação básica. O e-book foi idealizado pelo grupo de ensino e pesquisa em matemática (GEPEMAC), tendo como responsáveis os professores Allan Júnior da Silva Costa, Annelise Maymone, Fábio Sampaio Mariano, Francisco Odécio Sales, Wesley Liberato Freire. O grupo é formado por licenciados, graduados, especialistas, mestres e doutores, e busca a formação continuada através de estudos e pesquisas, visando o crescimento profissional e a melhoria do ensino básico do Ceará.

O GEPEMAC surgiu da necessidade dos professores decorrida durante a pandemia da COVID 19, pois não havia naquele momento nenhuma preparação ou suporte para o que estava por vir, para tanto, ocorreram encontros virtuais durante as quartas-feiras, onde eram oferecidas palestras, oficinas e formações com diversas personalidades nacionais e internacionais de matemática. Sendo assim, para coroar o fortalecimento e amadurecimento do grupo, nasce a ideia de construir uma obra com experiências docentes dos professores participantes, que conta atualmente com 427 membros ativos em dois grupos no whatsapp, e com o instagram sendo alimentado de eventos, cursos e formações com frequência.

Nessa 1ª edição da obra O ENSINO DE MATEMÁTICA NO CEARÁ: DA FORMAÇÃO DE PROFESSORES ÀS PRÁTICAS E EXPERIÊNCIAS DOCENTES foram compilados um total de 13 artigos, onde cada artigo compõe um capítulo, e que buscam contribuir na formação continuada de professores e/ou compartilhar experiências docentes com suas turmas e/ou escolas. A obra conta com artigos que englobam: experiências em oficinas e eventos; ensino através de jogos, matemática financeira e geometria; projetos de reconstrução de aprendizagem; formação inicial do docente; estudos avançados de matemática.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

CAPÍTULO 1.....**07**

A APLICAÇÃO DE UMA AÇÃO PEDAGÓGICA DE GANHO DE APRENDIZAGEM PARA ESTUDANTES DO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO: UMA ANÁLISE APLICADA AO GANHO DE HAKE

Abner Eliabe Marques de Sousa, Fábio Sampaio Mariano, Mário Lucas Marques Vasconcelos

CAPÍTULO 2.....**20**

ENSINO DE CÔNICAS E QUADRICAS EM GEOMETRIA ANALÍTICA UTILIZANDO O GEOGEBRA

Maria Aliciane Martins Pereira, Francisco Odecio Sales

CAPÍTULO 3.....**37**

EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE GENERALIZADA

Maria Aliciane Martins Pereira da Silva, Francisca Natália Viana Silva, Francisco Odecio Sales

CAPÍTULO 4.....**46**

UM ESTUDO SOBRE EQUAÇÕES FUNCIONAIS DE CAUCHY

Miller Dias de Araújo

CAPÍTULO 5.....**61**

FEIRA ESCOLAR DE MATEMÁTICA APLICADA – FEMA UM ESTUDO DE CASO NA ESCOLA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL MONSENHOR EXPEDITO DA SILVEIRA DE SOUSA

Johnantan Pereira Gonsalves, Maria Juliane Passos

CAPÍTULO 6.....**67**

UM ESTUDO SOBRE A FUNÇÃO W DE LAMBERT!

Miller Dias de Araújo

CAPÍTULO 7.....**75**

GINCANA ONLINE DE MATEMÁTICA (GOMA)

Johnantan Pereira Gonsalves

CAPÍTULO 8.....**88**

MATEMÁTICA FINANCEIRA x EDUCAÇÃO FINANCEIRA: REFLEXÕES ACERCA DA IMPORTÂNCIA NA FORMAÇÃO DA CIDADANIA

Francisco Odecio Sales, Maria Aliciane Martins Pereira da Silva

CAPÍTULO 9.....**100**

MONITORIA DE MATEMÁTICA BÁSICA I: UMA EXPERIÊNCIA NO INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ - CAMPUS CRATEÚS

Maria Aliciane Martines Pereira da Silva, Francisco Odécio Sales

CAPÍTULO 10.....**107**

O ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS COM O USO DO TANGRAM: UMA ABORDAGEM DE GEOMETRIA PARA O ENSINO MÉDIO

Márcio de Lacerda Carvalho, Carlos Renêe Martins Maciel, João Evangelista de Oliveira Neto

CAPÍTULO 11.....**122**

OFICINA DE MATEMÁTICA: ANÁLISE E REFLEXÃO DOS SABERES E HABILIDADES PRIORITÁRIOS DE MATEMÁTICA A PARTIR DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA 2021.1

Johnantan Pereira Gonsalves, Tatiana Rodrigues Lima

CAPÍTULO 12.....**129**

UMA NOVA PERSPECTIVA: JUROS COMPOSTOS A PARTIR DA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA E DOS CONCEITOS DE FUNÇÃO EXPONENCIAL

Anderson Pereira de Oliveira, Jerry Gleison Salgueiro Findaza Vasconcelos

CAPÍTULO 13.....**141**

O USO DE JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA UMA PERSPECTIVA PIAGETIANA

Francisco Odécio Sales, Josiane Marques Duarte Almeida

ÍNDICE REMISSIVO.....**153**

CAPÍTULO 1

A APLICAÇÃO DE UMA AÇÃO PEDAGÓGICA DE GANHO DE APRENDIZAGEM PARA ESTUDANTES DO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO: UMA ANÁLISE APLICADA AO GANHO DE HAKE.

Abner Eliabe Marques de Sousa

Fábio Sampaio Mariano

Mário Lucas Marques Vasconcelos

RESUMO

Este artigo apresenta resultados quantitativos coletados e analisados com base no parâmetro Ganho de Hake acerca de um plano de ação pedagógico aplicado para estudantes do primeiro ano do Ensino Médio em uma escola da rede estadual do Ceará, com o objetivo de desenvolver competências e habilidades de cada estudante referente ao conteúdo de matemática, contornando possíveis déficits oriundos do Ensino Fundamental. Para tanto, no início do projeto foi aplicado uma avaliação diagnóstica, denominada pré-teste, para medir o nível de entendimento inicial dos discentes acerca dos conteúdos analisados. A partir dos resultados obtidos, foram realizados planejamento de aulas na tentativa de sanar as dificuldades. Ao fim do processo, foi aplicado um novo teste, denotado pós-teste, a fim de comparar os resultados pré e pós-teste e constatar um ganho de aprendizagem por parte dos discentes comprovando a eficácia do projeto.

Palavras-chave: Ganho de Hake; avaliação diagnóstica; competências e habilidades.

INTRODUÇÃO

Visto as lacunas que permanecem na transição dentro da educação básica, manifestadas pelos estudantes que saem do Ensino Fundamental e adentram o Ensino Médio, verifica-se que durante os nove anos, muitas fundamentações matemáticas são pouco desenvolvidas ou até mesmo são negligenciadas. Portanto, é necessário ter um projeto voltado a fazer o resgate da aprendizagem matemática desses estudantes, que ao não possuir uma base fundamentada, como poderá desenvolver o raciocínio matemático no Ensino Médio?

Baseado na problemática exposta, ora relatado neste texto, foi realizado durante o primeiro semestre de 2021, em todas as turmas que ingressaram no primeiro ano do Ensino Médio na Escola Estadual de Educação Profissional Juarez Távora no município de Fortaleza no estado do Ceará, um prejeto de resgsate. Inicialmente, realizou-se uma avaliação diagnóstica, fundamentada na aplicação de um instrumental com 37 problemas, onde cada problema refere-se a um dos descritores da nona série do ensino fundamental, que está dividido em: Espaço e forma; Grandezas e medidas; Números e operações / Álgebra e funções; Adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação; Sequências de números ou figuras (padrões); Tratamento da informação.

Estes descritores estão fundamentados pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Fundamental (BRASIL, 2017). De acordo com o referido documento, na "Matemática do Ensino Fundamental, as habilidades estão organizadas segundo unidades de conhecimento da própria área (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística)" (BRASIL, 2017, p.529), portanto pode-se verificar que os descritores fazem referência direta ao que deve ser tratado.

Depois da aplicação do pré-teste houve uma sistematização dos resultados adquiridos, onde foram sondados de uma amostragem de 162 estudantes que 36 fizeram de 9 a 15 questões, 39 de 16 a 21 questões, 41 de 22 a 26 e 46 fizeram de 27 a 35, classificados respectivamente como muito crítico, crítico, intermediário e adequado. Já na aplicação do pós-teste ocorreu uma amostragem de 140 estudantes, dos quais 108 realizaram o pré-teste.

De acordo com a análise dos resultados obtidos no pré-teste, os estudantes foram distribuídos nas salas em concordância com o conhecimento que fora demonstrado, e assim foi realizado um trabalho personalizado conforme a bagagem evidenciada.

De fevereiro de 2021 a junho de 2021, semanalmente de 13h40min às 14h20min, os estudantes tinham as aulas de acordo com as dificuldades apresentadas no pré-teste, sendo que na divisão de turmas ficaram, 36 estudantes na turma A, 39 estudantes na turma B, 41 estudantes na

turma C, e 46 estudantes na turma D, onde as turmas dos estudantes com maiores dificuldades tiveram uma quantidade reduzida de estudantes na sala, para um melhor acompanhamento.

O principal objetivo do projeto foi desenvolver a potencialidade de cada educando, pois com a divisão mais homogênea de cada turma pode-se planejar melhor o momento de aula, bem como métodos e avaliações, buscando assim um resgate nas lacunas da aprendizagem matemática do Ensino Fundamental de cada estudante, e assim tendo um maior ganho para quem mais precisa.

REFERENCIAL TEÓRICO

É comum os professores perceberem que os estudantes que ingressam no Ensino Médio chegam com um déficit de aprendizagem nos conteúdos básicos estudados ao longo do Ensino Fundamental, isso fica evidenciado nas avaliações externas como SPAECE[1] e SAEB[2]. Tais conteúdos são essenciais para a compreensão dos assuntos abordados ao longo dessa nova fase de aprendizado, que é o Ensino Médio. Estes estudantes que possuem esse déficit podem apresentar uma dificuldade no entendimento de novos conteúdos, contribuindo para um desempenho não satisfatório. Com isso, é importante que os educadores detectem as dificuldades e intervenham por meio de metodologias e ações pedagógicas, para que tal problemática seja contornada. Como é evidenciado por FERREIRA FILHO:

> A construção de planos e ações pedagógicas de cunho estratégico que objetivam a melhoria do processo de ensino e aprendizagem e consequentemente o sucesso acadêmico dos estudantes é uma atividade fundamental na rotina de trabalho de professores e gestores educacionais de qualquer etapa ou modalidade da educação básica e do ensino superior. (FERREIRA FILHO, 2020, p. 2).

Acerca disto foi idealizado um instrumental, denotado por pré-teste, para ser aplicado com estudantes recém-ingressos no primeiro ano do ensino médio da Escola Estadual de Educação Profissional Juarez Távora. Tal avaliação tinha como objetivo diagnósticar e, por meio de uma distribuição homogênea de acordo com suas dificuldades, potencializar a aprendizagem dos estudantes, como afirma FERREIRA FILHO:

> Dentro da rotina educacional a avaliação com caráter diagnóstico é um desses instrumentos que, se bem planejado e formulado, pode clarificar essa necessidade de entendimento inicial do panorama acadêmico dos discentes e nortear professores e gestores em intervenções pedagógicas e políticas de rede mais apropriadas e eficazes. (FERREIRA FILHO, 2020, p. 2)

1 SPAECE - Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará.

2 SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica.

Essa abordagem avaliativa norteadora foi escolhida dentre as demais devido ao seu potencial de apresentar dados que condizem com a realidade de cada estudante que é submetido a esta.

Diante destes referenciais adotados, foi aplicado este plano de ação pedagógica com os discentes e, com os resultados obtidos, foi possível aplicar o Ganho de Hake, um mecanismo quantitativo idealizado pelo professor de física da universidade de Indiana Richard R. Hake, na qual, a partir dos dados de rendimentos em pré-testes (Spré) e do rendimento no pós-teste (Spós) se obtém o que é chamado de ganho de Hake (g) que nada mais é do que a razão do ganho apurado (Spós - Spré) pelo percentual máximo de ganho na segunda avaliação (100% - Spré). Para que, com isto, seja viável verificar e concluir se a aplicação desse projeto de cunho pedagógico contempla os resultados esperados, ou seja, o ganho de apredizagem por parte dos estudantes.

MATERIAIS E MÉTODOS

O projeto de intervenção pedagógica realizado com os estudantes do primeiro ano do Ensino Médio, que visa melhorar o desempenho acadêmico dos discentes, ocorre anualmente na escola, sendo planejado pela equipe de professores de matemática da instituição. Contudo, em razão das atividades da instituição estarem sendo realizada em caráter remoto na maior parte do ano de 2021, devido à pandemia da Covid-19, que mudou completamente o dia a dia de toda a população do globo terrestre, a aplicação dessa ação teve que ser reformulada para se adequar à nova modalidade de ensino.

Para isto, foi repensada a maneira que seria realizada as avaliações, pois, além da aplicação do instrumental acontecer fora do ambiente de sala de aula, houve uma preocupação dos resultados das avaliações não corresponderem com a realidade de conhecimento dos estudantes, devido a diversos fatores que se intensificam com o livre acesso do estudante à rede de internet. Além do replanejamento das avaliações, as aulas após o primeiro teste seguiram acontecendo por meio de ensino remoto adotado pela escola, se utilizando da plataforma de videoconferência *Google Meet* e de diversas outras ferramentas educacionais digitais.

Sendo assim, o projeto foi realizado da seguinte forma: inicialmente foi feito o pré-teste com os estudantes do primeiro ano do Ensino Médio, no início do ano letivo de 2021, construída com 37 problemas, com cada questão referente a um dos 37 descritores, sendo eles:

QUADRO 1 - Descritores SAEB

Espaço e forma	
D1	Identificar a localização e movimentação de objetos em mapas, croquis e outras representações gráficas.
D2	Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais e tridimensionais, relacionando-as com suas planificações.
D3	Identificar propriedades de triângulos pela comparação de medidas de lados e ângulos.
D4	Identificar relação entre quadriláteros por meio de suas propriedades.
D5	Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas.
D6	Reconhecer ângulos como mudança de direção ou giros, identificando ângulos retos e não retos.
D7	Reconhecer que as imagens de uma figura construída por uma transformação homotética são semelhantes, identificando propriedades e/ou medidas que se modificam ou não se alteram.
D8	Resolver problemas utilizando a propriedade dos polígonos (soma de seus ângulos internos, número de diagonais, cálculo da medida de cada ângulo interno nos polígonos regulares).
D9	Interpretar informações apresentadas por meio de coordenadas cartesianas.
D10	Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos.
D11	Reconhecer círculo e circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.
Grandezas e medidas	
D12	Resolver problemas envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.
D13	Resolver problemas envolvendo o cálculo de área de figuras planas.
D14	Resolver problemas envolvendo noções de volume.
D15	Resolver problemas envolvendo relações entre diferentes unidades de medida.
Números e operações / Álgebra e funções	
D16	Identificar a localização de números inteiros na reta numérica.
D17	Identificar a localização de números racionais na reta numérica.
D18	Efetuar cálculos com números inteiros envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).
D19	Resolver problemas com números naturais envolvendo diferentes significados das operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).
D20	Resolver problemas com números inteiros envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).
D21	Reconhecer as diferentes representações de um número racional.
D22	Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.

D23	Identificar frações equivalentes.
D24	Reconhecer as representações decimais dos números racionais como uma extensão do sistema de numeração decimal, identificando a existência de "ordens", como décimos, centésimos e milésimos.
D25	Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).
D26	Resolver problemas com números racionais que envolvam as operações.
Adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação.	
D27	Efetuar cálculos simples com valores aproximados de radicais.
D28	Resolver problema que envolva porcentagem.
D29	Resolver problemas que envolvam variações proporcionais, diretas ou inversas entre grandezas.
D30	Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica.
D31	Resolver problema que envolva equação de segundo grau.
D32	Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões).
Sequências de números ou figuras (padrões)	
D33	Identificar uma equação ou uma inequação de primeiro grau que expressa um problema.
D34	Identificar um sistema de equações do primeiro grau que expressa um problema.
D35	Identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações de primeiro grau.
Tratamento da informação	
D36	Resolver problemas envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.
D37	Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

Fonte: https://download.inep.gov.br/.

Essa avaliação norteadora foi realizada através da plataforma de criação e compartilhamento de formulários *Google Forms*. Nela, foram postos os problemas referentes a cada descritor, selecionado pelos docentes de matemática da escola, além de outros dados, como nome do estudante e o curso profissionalizante[3], o que ajuda a localizá-lo melhor dentre os demais estudantes. Ela foi disponibilizada para os estudantes no dia 9 de fevereiro de 2021, através do aplicativo de mensagens *WhatsApp*. Os discicentes tiveram um espaço de tempo de 8 horas e 30 minutos (das 10 horas às 18

3 Curso Profissionalizante - Existem 122 escolas profissionalizantes no estado do Ceará, pode ser verificado no site: https://educacaoprofissional.seduc.ce.gov.br/.

horas e 30 minutos) para que o instrumental fosse respondido e encaminhado, por meio da plataforma.

Em seguida, a partir do resultado da primeira avaliação diagnóstica, os estudantes foram divididos em quatro turmas de acordo com o nível identificado na avaliação. Tais níveis são formados de acordo com o percentual de questões acertadas no pré-teste, sendo eles: nível 1 - "muito crítico" (até 40% de acerto), de 0 a 15 questões, nível 2 - "crítico" (de 40% até 60% de acerto), de 16 a 21 questões, nível 3- "intermediário" (de 60% até 70% de acerto), de 22 a 26 questões, e nível 4 - "adequado" (acima de 70% de acertos), de 27 a 37 questões.

Com a divisão dos estudantes por nível, apontada pelos resultados do pré-teste, foram planejadas e realizadas aulas, de caráter formador, no período de 13h40min às 14h20min, todas as terças-feiras, durante os meses de Fevereiro a Junho de 2021, ao longo da semana letiva. Fez-se uso do material estruturado do programa Foco na Aprendizagem[4] com os três volumes utilizados mais voltados para a Aritmética Elementar e Equações, material direcionado para às turmas dos níveis crítico, intermediário e adequado. De forma diferenciada, a turma de nível muito crítico foi direcionada para a plataforma estruturada de aprendizagem *Khan Academy*, onde eles poderiam rever conteúdos ainda mais básicos e utilizar-se da interatividade da plataforma, fazendo com que as aulas fossem mais atrativas.

Referente ao material didático trabalhado nas turmas crítico, intermediário e adequado, este foi elaborado pelo Sistema Online de Avaliação, Suporte e Acompanhamento Educacional (SISEDU) da SEDUC-CE. Denominado por Material Estruturado – Matemática, ele é dividido em pequenas apostilas sucintas e de fácil compreensão, cada uma abordando um assunto da matemática, algumas delas são: Aritmética Elementar (A e B), Equações, Raciocínio Geométrico, Álgebra, entre outras. Dentre as turmas que utilizaram este material, todas elas utilizaram o material de Aritmética e Equações, mas apenas a de nível adequado conseguiu abordar o conteúdo de geometria, deixando claro que se não tivesse ocorrido a alocação dos discentes de forma mais homogênea, nenhuma das turmas teria iniciado geometria, ficando ainda mais evidente a necessidade de um planejamento de aula mais personalizado.

Com a turma de nível muito crítico, resolveu-se empregar o uso da plataforma de aprendizagem *Khan Academy*, um site onde se pode encontrar uma vasta quantidade de recursos, sendo eles: vídeos explicativos, pequenos artigos, questionários rápidos, para que os estudantes pudessem ter um contato bem amplo e completo dos conteúdos a serem estudados.

4 Foco na Aprendizagem - Programa da Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC-CE), pode ser verificado no site: https://www.ced.seduc.ce.gov.br/ambiente-de-apoio-a-formacao-docente/cursos-de-formacao-seduc/foco-na-aprendizagem/

Os materiais supracitados foram disponibilizados no *google classroom* com antecedência para os discentes, como também videoaulas e *links* de vários sites com abordagem educativa acerca dos assuntos propostos, possibilitando-os realizar os estudos de forma mais precisa. Os estudantes eram instigados a estudarem juntos, permitindo que eles compartilhassem suas dúvidas e revisassem de forma mais eficiente os assuntos que não estivessem compreendidos por alguns, eventualmente isto viria proporcionar a eles uma abstração melhor, fortalecendo a aprendizagem do grupo. Dessa forma, eles poderiam se sentir motivados a não se limitar somente à explicação dos professores durante as aulas, garantindo uma autonomia na aprendizagem e diminuindo assim o déficit dos conhecimentos matemáticos que eles possuem.

Após as aulas e o período de férias escolares, que ocorreu no mês de Julho, os estudantes participantes do projeto foram submetidos ao pós-teste, que se tratava de uma avaliação com o mesmo formato que o pré-teste. Esta, por sua vez, teve o objetivo de catalogar dados para comparar o desempenho e identificar se houve algum progresso neste meio-tempo, especialmente na perspectiva do "ganho" dos discentes participantes, se houve uma melhora, uma piora ou permaneceram com o mesmo nível evidenciado na primeira avaliação.

A prova possuía 37 questões, cada uma pertencente a um descritor (Quadro 1). Por sua vez, também foi realizado através do *Google Forms* e foi disponibilizado no dia 6 de setembro de 2021 e teve o período de 8 horas e 30 minutos (das 10 horas às 18 horas e 30 minutos) para os estudantes enviarem as respostas.

Devido à interação que os estudantes da escola estavam tendo com os residentes do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) pertencentes ao Programa Residência Pedagógica (PRP), foi solicitado que os licenciandos auxiliassem com a elaboração do pós-teste, de modo que fizessem algumas alterações ou mesmo formulassem outras questões, com base nas listas de questões dos 37 descritores. Os residentes subdividiram os descritores e suas listas entre eles e realizou a construção das questões da avaliação, alguns de modo individual, outros em grupo, e ao final o professor responsável reuniu as questões elaboradas para colocá-las no formulário.

A partir da concretização desta etapa do projeto, foram reunidos e organizados todos os dados das avaliações pré-teste e pós-teste em planilha, para eventual análise das informações coletadas durante o processo. Para que o estudo dos dados fossem melhor embasado, foram estabelecidos alguns termos e instrumentos avaliativos, presentes no mecanismo quantitativo de Hake, sendo eles: "Spré" e "Spós", que expressam o percentual de questões acertadas pelos estudantes na primeira e segunda avaliação, respectivamente; "Spós - Spré", o ganho apurado da aplicação, também conhecido como o ganho conceitual simples; O percentual máximo de ganho "100% - Spré" e por

fim pela razão dos dados “Spós - Spré” e “100% - Spré”, denominado como ganho conceitual normalizado “< g >”. Como mostra na formulação abaixo:

$$<g> = \frac{Spós - Spré}{100\% - Spré}$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Inicialmente, com a realização do pré-teste, participaram do projeto 162 estudantes, contudo, em virtude de alguns fatores adversos como, somente 108 estudantes compôs a amostragem, visto que estes discentes são os que responderam ambas as avaliações diagnósticas aplicadas, sendo viável a comparação dos resultados.

Com os resultados obtidos, foi montada uma planilha para listar os estudantes, com suas respectivas turmas e o número de questões acertadas de cada um, além disso, foi evidenciado o rendimento percentual referente à avaliação.

Tabela 1 - Dados do pré-teste

Turmas	Média de Questões Acertadas	Média do Rendimento durante o pré-teste (Spré)
Turma muito crítica	13,12	35,46
Turma crítica	18,32	49,52
Turma intermediária	24,00	64,86
Turma adequada	30,32	81,95

Fonte: Própria dos autores.

Com o resultado colhido no pré-teste, constatou-se que realmente existia uma heterogeneidade entre os discentes, e deu-se início às aulas semanalmente de Fevereiro a Junho do mesmo ano, com o intuito de trabalhar dentro de cada nível de aprendizagem onde os estudantes estavam alocados, ou seja, fortalecer a aprendizagem daqueles que mais precisam, trabalhando de forma personalizada, e até mesmo identificar talentos na matemática. Ao fim desse período e após as férias escolares do mês de Julho, os 140 estudantes remanescentes do projeto, realizaram o pós-teste, com os mesmos moldes da primeira, contudo, com problemas diferentes, mas utilizando o mesmo descritor. Com sua conclusão, foram colhidos os seguintes resultados referentes a cada turma:

Tabela 2 - Dados do pós-teste

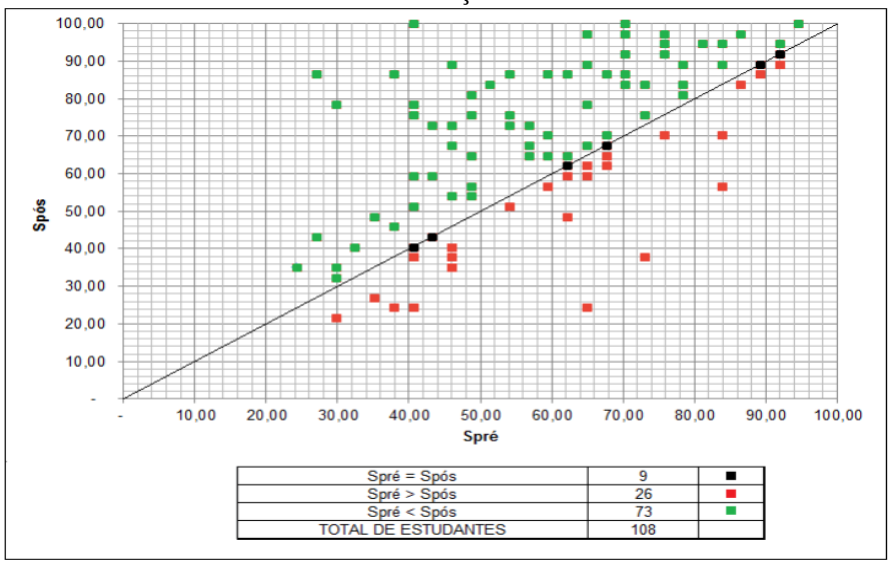
Turmas	Média de Questões Acertadas	Média do Rendimento durante o pós-teste (Spós)
Turma muito crítica	18,84	50,92
Turma crítica	23,50	63,51
Turma intermediária	26,77	72,34
Turma adequada	31,48	85,08

Fonte: Própria dos autores.

Ao analisar os dados da tabela do pré-teste (Tabela 1) com os presentes na tabela do pós-teste (Tabela 2), constata-se que, com as aulas, o estudo de cada descritor, alocando os estudantes pelo nível apurado, deixando a sala de aula mais homogênea neste quesito, os estudantes tiveram uma melhoria notável, discentes presentes no nível muito crítico, evoluiram para o nível crítico, os de nível crítico para a de nível intermediário, os de nível intermediários quase alcançaram o nível adequado e os de nível adequado permaneceram no mesmo nível, mas apresentaram uma melhora na média de questões acertadas.

Utilizando a ferramenta *Microsoft Excel*, foi possível fazer um gráfico detalhado com as seguintes informações acerca do rendimento pré-teste (Spré) e pós-teste (Spós):

Gráfico 1 - Visualização dos resultados



Fonte: Própria dos autores

Estudantes que melhoraram seu desempenho do pré-teste, ou seja, que tiveram uma pontuação melhor no pós-teste (Spré < Spós) se encontra acima da reta identidade; Estudantes que mantiveram a mesma pontuação (Spré = Spós) se encontram sobre a reta; Estudantes que

apresentaram um suposto declínio, pois suas notas na segunda avaliação foram inferiores à nota do pré-teste (Spré > Spós) abaixo da reta.

Ao analisar o gráfico, detecta-se que 73 estudantes (67,59% do total de estudantes) tiveram uma melhora significativa em relação ao seu nível registrado no pré-teste, 26 estudantes (24,07%) apresentaram uma redução em seu rendimento e 9 estudantes (8,33...%) permaneceram com a mesma nota. A partir destes dados, é notório que esta ação pedagógica apresenta resultados favoráveis, mais da metade dos estudantes demonstraram uma evolução considerável nos conhecimentos básicos presentes em cada descritor, contornando, assim, algumas lacunas de aprendizagem adquiridas ao longo do ensino fundamental, as quais dificultariam o andamento adequado do ensino médio.

Além disso, ao analisar o ganho conceitual (< g >) calculado a partir do percentual médio das turmas de cada nível, nota-se que todas as turmas obtiveram ganho.

Tabela 3 - Dados do ganho conceitual

Turmas	Ganho Conceitual (< g >)
Turma muito crítica	0,24 = 24%
Turma crítica	0,28 = 28%
Turma intermediária	0,22 = 22%
Turma adequada	0,16 = 16%

Fonte: Própria dos autores

A partir do valor do Ganho de Hake, é possível categorizar os dados de acordo com a proposição: "*alto ganho*" = ‹g› ≥ 0,70; "*médio ganho*" = 0,70 > ‹g› ≥ 0,30 e, "*baixo ganho*" = ‹g› < 0,30 (HAKE, 1998). Daí pode-se concluir que houve um baixo ganho nas turmas, porém deve-se observar que o projeto ocorreu de forma extraordinária devido à pandemia da Covid-19, logo ao se obter ganho entre 0,15 e 0,30, evidencia-se que o objetivo de desenvolver a potencialidade de cada educando foi alcançado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A aplicação da ação pedagógica, planejada para os estudantes do primeiro ano do Ensino Médio, recém-ingressados na instituição de ensino, que foi abordada ao longo deste artigo, trouxe reflexões ao ser analisada, tanto em virtude dos resultados para com os discentes quanto em relação à abordagem de tal projeto no ambiente escolar.

Assim sendo, concluídas as etapas da abordagem com as avaliações, tão como a apuração e comparação dos resultados obtidos, comprovou-se que essa metodologia obteve resultados positivos, notou-se ao comparar os dados dos estudantes nas provas, que a maioria dos estudantes obteve uma evolução no entendimento de alguns conceitos matemáticos, encontrados nos descritores utilizados para a criação do pré-teste e pós-teste.

Ademais, foi possível constatar que, através do parâmetro quantitativo de Ganho de Hake, todas as turmas que foram contempladas pelo projeto, tiveram um ganho de aprendizagem em relação às suas notas médias nas avaliações de pré-teste e pós-teste. Verificou-se com a análise dos resultados que as turmas ascenderam na classificação imposta previamente, de tal forma que turmas de um nível passaram ou ficaram próxima de serem classificadas com o nível seguinte, com exceção da turma avançada, pois, apesar de possuir um ganho, não pode avançar, visto que já se encontrava na maior classificação possível, como exposto anteriormente.

Em relação a sua relevância, verifica-se que essa ação de cunho pedagógico obteve um significativo ganho de aprendizagem dos estudantes no que diz respeito aos conteúdos presentes nos descritores, e é de presumir que eles encontrarão menos obstáculos em futuros conteúdos que serão trabalhados ao longo do Ensino Médio. Portanto, com o ingresso de novos estudantes todos os anos e sendo apresentada novamente uma defasagem matemática, considera-se importante que este projeto seja adotado como uma ação fixa na instituição escolar, tendo sua aplicação anualmente.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

FILHO, L. N. F. O projeto de avaliação diagnóstica da rede pública estadual do Ceará. Revistas UECE. 2020. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/revpemo/article/view/3622. Acesso em: 02 de nov. 2021.

Foco na Aprendizagem. **SEDUC-CE**. 2017. Disponível em: https://www.ced.seduc.ce.gov.br/ambiente-de-apoio-a-formacao-docente/cursos-de-formacao-seduc/foco-na-aprendizagem/. Acesso em: 18 de dez. de 2021.

GARLHADI, A. C. ; AZEVEDO, M. M. **O Ganho de Hake: uma técnica de avaliação de absorção de conhecimento e replanejamento de disciplina.** São Paulo. 2013. Disponível em: http://www.pos.cps.sp.gov.br/files/artigo/file/502/ab10d37dde1d7dc2b4dc710efc39e6dc.pdf. Acesso em: 17 de nov. de 2021.

Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb). **Governo Federal**. 2007. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/pesquisas-estatisticas-e-indicadores/ideb. Acesso em: 18 de dez. de 2021.

Plataforma de recursos didáticos. **Khan Academy**. 2007. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/?utm_account=Grant&utm_campaignname=Grant_Brasil_institutional&

gclid=Cj0KCQiAzfuNBhCGARIsAD1nu-8FDAYxMNVy_B8SsN1pIxCkvRQLeYblT2j8S4uiE_ajOdnIjUk96JoaAo__EALw_wcB. Acesso em: 18 de dez. de 2021.

SOBRE OS AUTORES

Abner Eliabe Marques de Sousa, graduando em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE/Fortaleza).

Fábio Sampaio Mariano, graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE); Especialista em Metodologia de Matemática e Física; e Mestrando pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat).

Mário Lucas Marques Vasconcelos, graduando em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE/Fortaleza).

CAPÍTULO 2

ENSINO DE CÔNICAS E QUADRICAS EM GEOMETRIA ANALÍTICA UTILIZANDO O GEOGEBRA

Maria Aliciane Martins Pereira

Francisco Odecio Sales

RESUMO

O estudo a seguir busca investigar os procedimentos de ensino e aprendizagem da disciplina de Geometria Analítica utilizando o *Software* GeoGebra no estudo de Cônicas e Quádricas, focando o desafio e a possibilidade da implantação do ensino utilizando o *software* livre GeoGebra. As observações visam analisar as diferenças entre o ensino utilizando instrumentos convencionais e o processo de construção do conhecimento desenvolvido por meio do computador. Ao final, pretende-se avaliar se o ensino de desenho por meio dos recursos do *software* GeoGebra, possibilita otimizar a compreensão dos conteúdos de desenho construídos de um modo ativo, favorecendo a interação e colaboração entre alunos, observando como se adaptam a essa modalidade de ensino, fazendo dela um meio de aprendizado de maneira participante, colaborativa e com autonomia.

PALAVRAS-CHAVE: Desenho, GeoGebra, Autonomia, Cônicas, Quádricas

INTRODUÇÃO

Observando jovens alunos nas diversas situações em que se encontram lidando com equipamentos de tecnologia digital, as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), a exemplo, dos telefones celulares, videogames dentre outros, percebe-se que, além de manifestarem grande interesse, demonstram facilidade em compreender as possibilidades oferecidas por tais equipamentos. Os alunos têm grande habilidade em manusear e compreender o funcionamento de tais aparelhos, superando as expectativas de seus professores. Em pouco tempo, começam a explorar as interfaces dos aparelhos e tornam-se capazes de utilizar ampla gama de recursos que oferecem com autonomia e passam a ensinar a outros colegas, pais e pessoas de gerações anteriores.

Tal afinidade se explicita por meio de exemplo convincente que encontra-se na experiência de inclusão digital, denominada "Buraco no muro", realizada em 1999 por Sugata Mitra(2006), realizada com crianças em um bairro pobre de Nova Deli, na Índia, utilizando computador ligado à Internet para possibilitar que crianças analfabetas pudessem navegar na rede, interagindo com um monitor *"Toutch screen"*. Verificou-se que eles aprenderam a lidar com vários dos recursos disponíveis de maneira autônoma, sem instrução de terceiros, e, em aproximadamente oito horas de uso, estavam ensinando e aprendendo uns com os outros sobre o que já haviam descoberto durante o manuseio e a interação com o equipamento.

Segundo Piaget (1982), a aprendizagem passa por uma interação entre o sujeito da aprendizagem e o objeto, aqui representado como objeto o todo envolvido no processo, o computador com o *software*, os colegas e o assunto.

Numa pesquisa realizada com estudantes de 7ª e 8ª séries, Vaz (2004), utilizou um *software* de geometria dinâmica, o Cabri-Géomètre, para investigar o ensino e a aprendizagem da prova e demonstração em geometria, onde os alunos eram envolvidos em atividades que favoreciam os movimentos espontâneos. Por meio das interações dos estudantes, a autora observou a importância do dinamismo do *software* para que sejam incorporadas descobertas aprendidas por meio de atividades anteriores nas provas e demonstrações geométricas construídas pelos alunos.

Outro estudo similar, utilizando o software, o Tabulæ, Mattos (2007), apresenta a viabilidade de estratégias didáticas utilizadas em modelos de interação professor - estudante e estudante - estudante, por meio das quais descreve as funcionalidades desenvolvidas no projeto com o software Tabulæ Colaborativo. Tais estratégias, que tornaram possível a interação no ensino presencial de matemática, foram aplicadas em atividades do ensino à distância. Mattos (2007) estudou estratégias

didáticas para aprendizagem colaborativa, baseadas em roteiros e apoiadas por computador, projetadas para facilitar a colaboração entre estudantes.

Pode-se perceber que os alunos participantes de tais processos tendem a desenvolver autonomia quando estão concentrados em alguma atividade que os estimulem no processo de aprendizagem.

Tais fatos reforçaram a percepção de que a tecnologia digital utilizada nesse processo oferece oportunidades convidativas, que chamam a atenção e provocam para que os usuários possam envolver-se com atividades intelectuais por meio de uma relação de uso e da exploração dos equipamentos podendo desenvolver autonomia para a aprendizagem, progredindo de acordo com os resultados obtidos a partir da própria experiência de criação.

Na visão de Castoriadis (1987), a criação é algo que só aparece no ser humano e que, a partir dela desenvolve autonomia, construindo as suas próprias significações. Por outro lado Piaget (1982) conceitua autonomia como sendo a capacidade de coordenação de diferentes perspectivas sociais com o pressuposto do respeito recíproco.

Em seu estudo, ao utilizar o GeoGebra, Freitas (2009) apresenta resultados de uma pesquisa realizada com professores de Matemática, onde se investigou a utilização do *software* educativo no ensino e aprendizagem, com enfoque nas possibilidades de representação e na interação do estudante no processo de construção do conhecimento. Ao final, a autora pode constatar que o GeoGebra possibilitou nova dimensão de contato com objetos e conceitos matemáticos não acessíveis perceptivamente ou instrumentalmente, além de possibilitar o acesso e mobilização de pelo menos duas representações de registro de um mesmo objeto matemático.

A partir das observações desse estudo pretende-se investigar o que se tornou possível para o aluno fazer a partir das novas possibilidades oferecidas por um *software* de geometria dinâmica.

Para esse estudo foi escolhido o *software* GeoGebra por ser gratuito e possuir as ferramentas tradicionais de geometria dinâmica e permitir manipular as construções mais comuns e os elementos básicos da geometria: pontos, segmentos, retas e seções cônicas, permitindo aos alunos experimentar, interpretar, visualizar, e demonstrar conteúdos de geometria, bem como para o desenvolvimento da autonomia dos alunos.

A utilização do software Geogebra no ensino e aprendizagem de geometria

Atualmente estamos cercados de novas tecnologias as quais em muitas vezes vem a facilitar e agilizar as diferentes situações a que nos deparamos no cotidiano. Neste sentido, pensamos porque

não nos utilizarmos desta tecnologia no ambiente escolar visando desta forma promover uma aprendizagem em Matemática? Principalmente no ensino de Geometria nos quais avaliações nacionais como o SAEBE e o ENEM apontam dificuldades encontradas pelos alunos em relação aos conteúdos Geométricos.

É de grande relevância para classe docente repensar suas propostas de trabalho visando contribuir para que aconteça uma aprendizagem significativa recorrendo ao uso de tecnologias para o ensino, dado que a maioria das escolas estaduais possui hoje laboratório de informática equipado com computadores.

Segundo Ferreira et al (2009 p. 03) os ambientes informatizados quando direcionados á aprendizagem da Geometria possibilitam recursos capazes de fazer com que os alunos possam superar dificuldades.

Um dos recursos a que o professor pode recorrer para suas aulas de Geometria é o software Geogebra, software livre gratuito encontrado na internet e sem dificuldade de uso que possibilita aos alunos fazer construções com pontos, vetores, segmentos e retas e no nosso caso específicos cônicas e quádricas, desenvolvendo nos mesmos um raciocínio geométrico e analítico.

Albuquerque (2004) destaca que a proposta de trabalho bem como planos de aula do professor ao utilizar o software Geogebra para desenvolver os conteúdos abordados na Geometria Plana deve contemplar:

> O conteúdo a ser abordado; os objetivos a serem atingidos; os pré-requisitos matemáticos e tecnológicos; o encaminhamento metodológico que mostra de maneira detalhada como construir os objetos e como utilizar os recursos do programa e o número de aulas necessárias para desenvolver a atividade (ALBUQUERQUE : 2004; p.21).

Desta maneira o professor fará uso consciente do software como facilitador da aprendizagem, cabe destacar que nesse processo de ensino através da utilização de tecnologia como o computador segundo Albuquerque (2004, p. 14) o professor não necessita dominar todas as ferramentas do programa, entretanto é fundamental que o mesmo tenha a "humildade de aprender com o aluno", uma vez que o aluno domina e tem mais facilidade quando se trata de tecnologia. Portanto é fundamental que a classe docente saiba lidar com essa troca de conhecimentos.

Outro fator relevante que pode decorrer da exploração do software é o aluno perder o foco devido aos recursos disponíveis no programa. Cabe ao professor fazer mediação estimulando o aluno a continuar dentro dos objetivos previstos nesta aula.

Segundo Ferreira (2009, p. 03) as ações de exploração de conteúdos geométricos com a utilização do software Geogebra possibilitam criar condições para que o aluno aprenda fazendo

investigações que podem oportunizar ao mesmo de fazer conjecturas, testes e analises para então, estar apto a realizar uma conclusão do conteúdo e conceito que está sendo explorado com o programa. Por fim, pode causar no mesmo um estímulo para que aconteça uma evolução no seu pensamento geométrico.

Sendo assim, acreditamos que o professor poderá promover no aluno uma superação em relação à visualização de conceitos e propriedades geométricas na medida em que o mesmo realize as construções bem como a visualização que permite compreender com facilidade as propriedades geométricas podendo ainda fazer o uso de animações, mover e observar de vários ângulos das figuras construídas no qual podem ser vistos como materiais concretos porém virtuais.

Segundo Gravina (1998 apud Gripa et al, p. 03) O aluno não deve adquirir um caráter passivo diante das atividades propostas pelo professor e sim o mesmo deve ser capaz de realizar construções no qual darão sentido e significados ao seu conhecimento matemático, sendo assim o professor deve desta maneira oportunizar ao aluno construir, experimentar, testar, visualizar, conjecturar e generalizar com o intuito de fazer demonstração.

Segundo Duval (1995, apud Ferreira 2009, p. 05) considera que não há o conhecimento que o aluno possa mobilizar sem que haja uma atividade de representação e "compreende diferentes formas de apreensão cognitiva da figura geométrica"

a) apreensão seqüencial, a solicitada nas tarefas de construção ou nas tarefas de descrição na reprodução de uma figura;
b) apreensão perceptiva, a que corresponde à interpretação da figura em uma situação geométrica;
c) apreensão discursiva, a relacionada à interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação dos enunciados;
d) apreensão operatória, que consiste numa apreensão central sobre possíveis modificações de uma figura de partida, ou seja, manipulações no desenho visando desprender e recompor novos subcomponentes do mesmo (FERREIRA, 2009, p. 05).

Acreditamos que tais apreensões destacadas pelo autor possam proporcionar um avanço para ocorrer o processo de demonstração, que por sua vez é de suma importância na medida em que o professor pretende fazer com que o aluno seja capaz de realizar conjecturas, possibilitando desta maneira a oportunidade de evoluir os seus conhecimentos geométricos com o intuito de promover um aprendizado mais significativo ao aluno. Além disso Amorim (2003 apud Albuquerque et al, 2004, p. 03) ressalta que através do uso do software para se fazer demonstrações pode possibilitar ao aluno a ter uma visão de que "a Matemática não como uma coleção de regras formais e acabadas em

si mesmas, mas como uma ciência dinâmica e possível de manipulação". Sendo assim através da compreensão da Matemática o aluno pode enxergar a disciplina com outro olhar mais dinâmico e positivo perante a matéria, não tendo mais aquela percepção de que a Matemática é um bicho de sete cabeças.

METODOLOGIA

O planejamento a partir do uso do Geogebra foi organizado considerando que os alunos deveriam possuir dois tipos de pré-requisitos:

a) os matemáticos, ou seja o aluno para desenvolver as atividades propostas, deveria ter uma ideia em relação a que é uma cônica e diferi-la de uma quádrica, bem como as suas classificações de acordo com sua equação geral, reduzida e comportamento no plano cartesiano. Deve reconhecer e conceituar cada curva, assim como saber como nomeá-la e por fim, esboçar seu gráfico utilizando para tanto o GeoGebra.
b) os tecnológicos, ou seja, deveriam conhecer um computador bem como saber utilizar o Geogebra.

A metodologia consiste em que a aula acontece de maneira expositiva e dialogada, no qual o aluno será questionado em relação a cada conteúdo que está sendo trabalhado, ou seja, Cônicas e quádricas. Após isso serão encaminhados para a construção da figura geométrica, para então através da construção realizada no Geogebra, os mesmos poderem realizar as observações pertinentes da figura construída bem como conceituar.

Na sequência apresentamos o desenvolvimento do planejamento, ou seja, a sequência didática desenvolvida com os alunos usando as ferramentas do Geogebra. Optamos por organizar a sequência em forma de itens conforme apresentado abaixo.

ATIVIDADES

Em geometria, cônicas são as curvas geradas ou encontradas, na intersecção de um plano que atravessa um cone.

Numa superfície afunilada, existem três tipos de cortes que podem ser obtidos por esse processo e que resultam na:

- Elipse, que é a cônica definida na interseção de um plano que atravessa a superfície de um cone; Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano α, seja 2c a distância entre eles. Elipse é o conjunto dos pontos P de α cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante 2a (2a > 2c). Sua equação analítica é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- Parábola, que é a cônica também definida na intersecção de um plano que penetra a superfície de um cone. Dados um ponto F e uma reta d, pertencentes a um plano α, com F d, seja p a distância entre F e d. Parábola é o conjunto dos pontos P de α que estão a mesma distância de F e de "d". Sua equação analítica é $y^2 = 2px$

- Hipérbole, que é a cônica definida na interseção de um plano que penetra num cone em paralelo ao seu eixo. Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano α, seja 2c a distância entre eles. Hipérbole é o conjunto dos pontos P de α cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a F_1 e F_2 é a constante 2a (0<2a < 2c). Sua equação analítica é $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

O interesse pelo estudo das cônicas remonta a épocas muito recuadas. De fato, estas curvas desempenham um papel importante em vários domínios da física, incluindo a astronomia, na economia, na engenharia e em muitas outras situações, pelo que não é de estranhar que o interesse pelo seu estudo seja tão antigo. Na astronomia, Kepler mostrou que os planetas do sistema solar descrevem órbitas elípticas, as quais têm o sol num dos focos. Também os satélites artificiais enviados para o espaço percorre trajetórias elípticas. Mas nem todos os objetos que circulam no espaço têm órbitas elípticas. Existem cometas que percorrem trajetórias hiperbólicas, os quais ao passarem perto de algum planeta com grande densidade, alteram a sua trajetória para outra hipérbole com um foco situado nesse planeta. Como a parábola é um caso de equilíbrio entre a elipse e a hipérbole (lembre-se que a excentricidade da parábola é igual a um), a probabilidade de existir algum satélite com órbita parabólica é quase nula. Mas isso não impede a existência de satélites com esta trajetória.

Quádrica ou superfície quádrica é, em matemática, o conjunto dos pontos do espaço tridimensional cujas coordenadas formam um polinômio de segundo grau de no máximo três variáveis denominada de equação cartesiana da superfície. Numa visão informal, as superfícies quadráticas são as regiões formadas quando as cônicas se movimentam no espaço. A partir da equação geral do segundo grau nas três variáveis x,y,z é possível representar uma superfície

quadrática. Observemos que se a superfície quadrática formada pela equação geral for cortada por um plano, a curva de interseção será uma cônica.

- Elipsóide: O traço nos planos coordenados são elipses, como também são elipses os traços em planos paralelos aos planos coordenados, que interceptam a superfície em mais de um ponto.

- Hiperbolóide de uma folha: O traço no plano xy é uma elipse, como são os traços nos planos paralelos ao plano xy. Os traços nos planos yz e xz são hipérboles, bem como os traços nos planos paralelos a eles que não passam pelos interceptos x e y. Nestes interceptos, os traços são pares de retas concorrentes.

- Hiperbolóide de duas folhas: Não há traço no plano xy. Em planos paralelos ao plano xy que interceptam a superfície em mais que um ponto os traços são elipses. Nos planos yz, xz e nos planos paralelos a eles que interceptam a superfície em mais de um ponto, os traços são hipérboles.

- Cone Elíptico: O traço no plano xy é um ponto (a origem) e os traços em planos paralelos ao plano xy são elipses. Os traços nos planos xz e yz são pares de retas que se interceptam na origem. Os traços em planos paralelos a estes são hipérboles.

- Parabolóide elíptico: O traço no plano xy é um ponto (a origem) e os traços em planos paralelos e acima dele são elipses. Os traços nos planos xz e yz, bem como em planos paralelos a eles são parábolas.

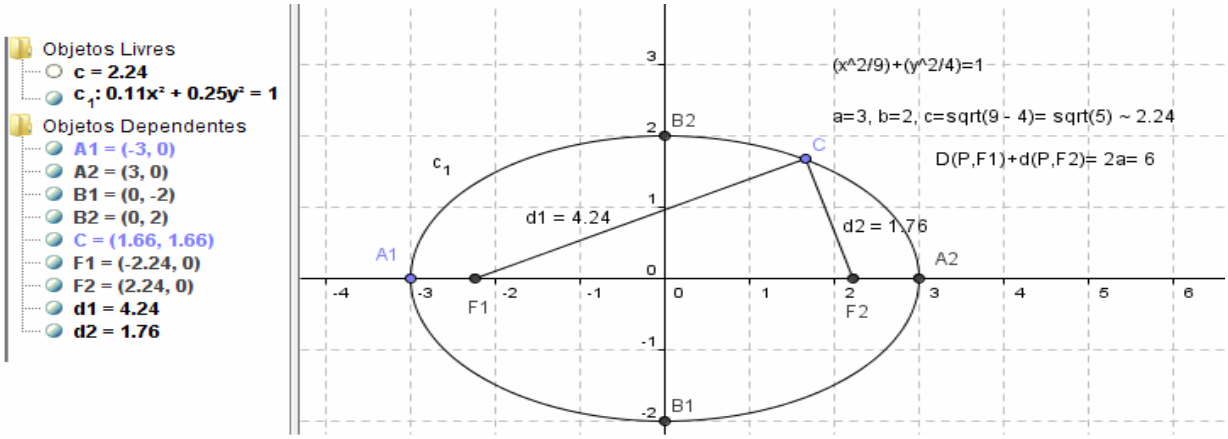
- Parabolóide Hiperbólico: O traço no plano xy é um par de retas que se cruzam na origem. Os traços em planos paralelos ao plano xy são hipérboles. As hipérboles acima do plano xy abrem se na direção de x e as abaixo na direção de y. Os traços nos planos yz e xz são parábolas, assim como os traços nos planos paralelos a estes.

***Atividade* 1:** Representar geometricamente as cônicas dadas pelas equações:

(a) reduzida: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,$ **(b)** $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

Solução:

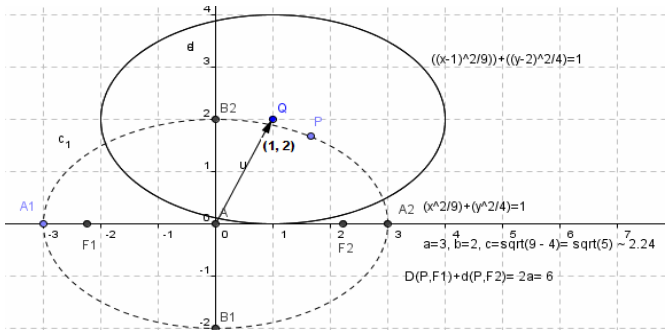
(a)



Conhecendo os *focos* e *um ponto* da elipse, podemos usar o ícone/ferramenta *Elipse* para obter a sua representação geométrica. No caso os focos são F1=(- 5 ,0) e F2=(5 ,0), e tomaremos como ponto da elipse o vértice B2=(0,2). ***Para representar os focos*** entre na *Janela Algébrica* com os pontos (-sqrt(5),0) e depois (sqrt(5),0).

Para ***renomear os pontos*** (ou ***objetos***) clique com o botão do mouse direito na letra/nomenclatura existente, selecione ***Renomear*** na caixa que irá abrir e em seguida ***digite o novo nome****/ letra* desejada. Os ***focos*** (***vértices***) podem ser ainda obtidos digitando no campo *Entrada* Foco[c] (Vértice [c]), onde c é a letra que indica/nomea a elipse na tela de trabalho.

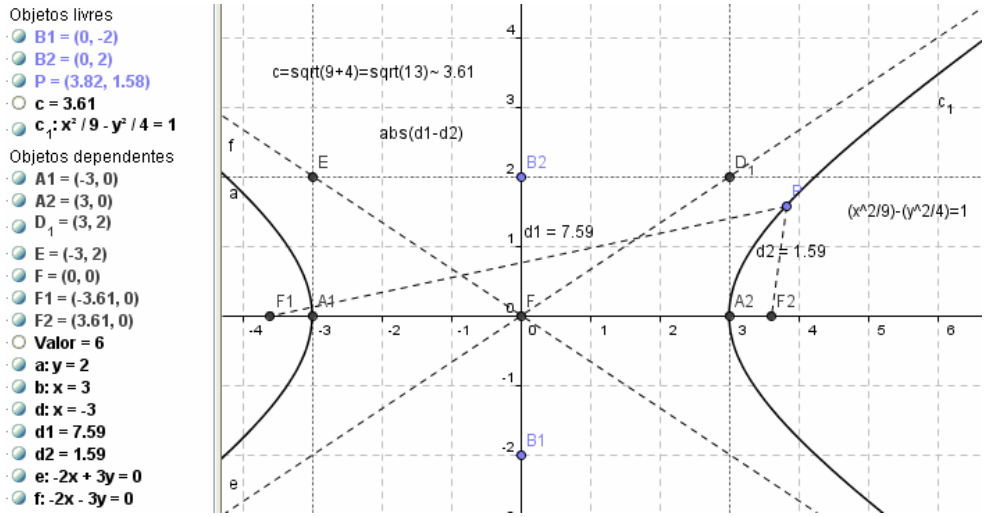
(b)



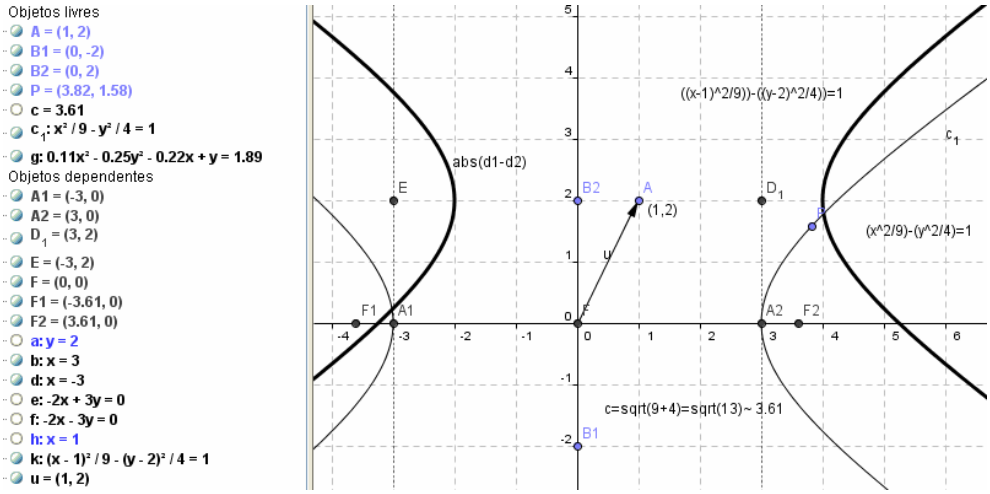
Atividade 2: Representar geometricamente as cônicas dadas pelas equações:

(a) reduzida: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2}\right) = 1$, **(b)** $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$

(a): $4 = b^2 = c^2 - a^2 = c^2 - 9 \Rightarrow c^2 = 9 + 4 = 13 \Rightarrow c \sim 3.61$

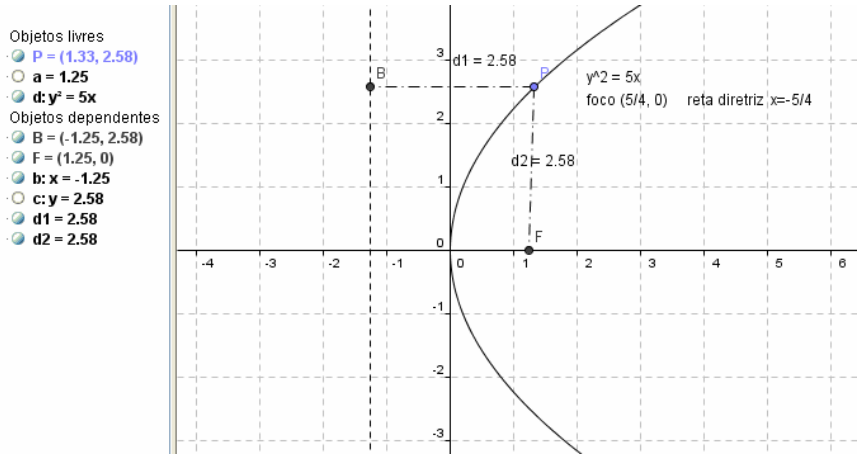


(b)

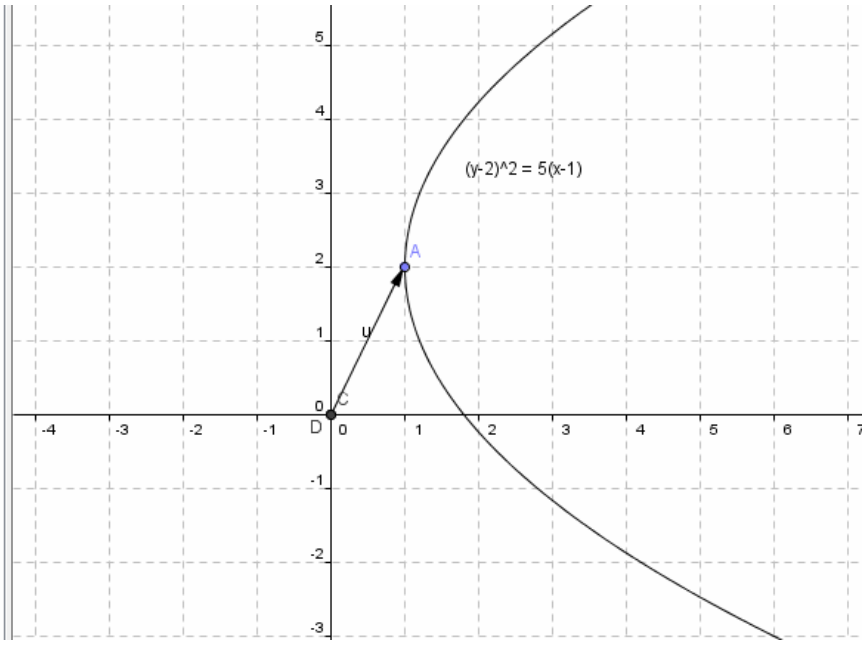


***Atividade* 3:** Representar as cônicas dadas pelas equações:

(a) reduzida: $y^2 - 5x = 0$, **(b)** $(y-2)^2 - 5(x-1) = 0$.



Note que a equação é do tipo $y^2 = 4px$, e diretriz $x = -p$. Assim o foco é F= (5/4, 0) e a reta diretriz é $x = -5/4$. Tendo o foco e vértice, a parábola pode ser então obtida usando a ferramenta Parábola na caixa de nº 7

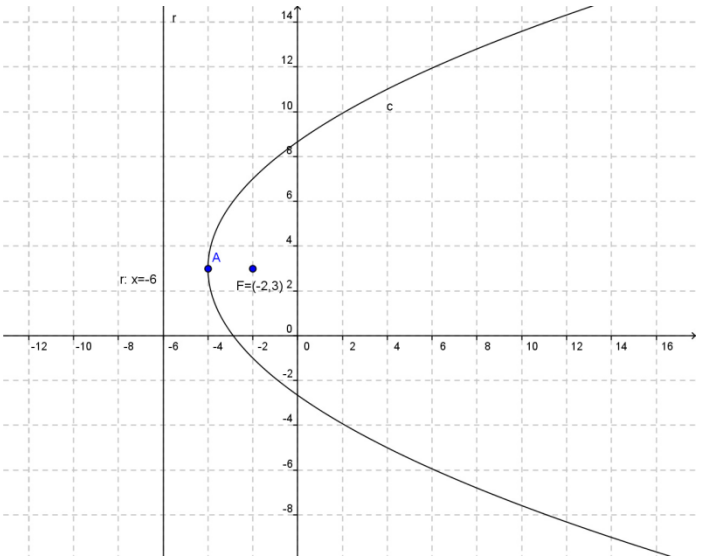


***Atividade* 4.** Dada a parábola de equação $y^2 - 8x - 6y - 23 = 0$. Represente geometricamente:

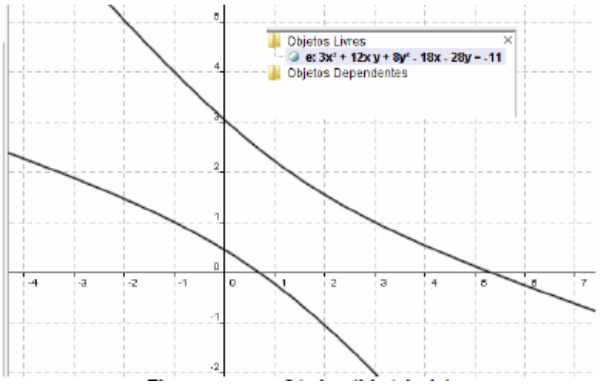
(1) usando a equação algébrica, **(2)** usando o ícone/ferramenta *Parábola*, e o *foco* e a *diretriz* (para isso complete quadrados):

Solução:

$y^2 - 8x - 6y - 23 = 0 \Rightarrow y^2 - 6y = 8x + 23 \Rightarrow y^2 - 6y + 9 = 8x+23+9 \Rightarrow (y-3)^2 = 8(x+4) \Rightarrow V= (-4, 3)$, foco $F = (-2,3) = (2,0) + (-4,3)$ e diretriz $r: x = -6 = -2 +(-4)$).



***Atividade* 5**. Representar e classificar a cônica de equação: $3x^2 + 12xy + 8y^2 – 18x – 28y + 11 = 0$.



Verificamos que tal cônica é uma hipérbole.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{2} = 15$$

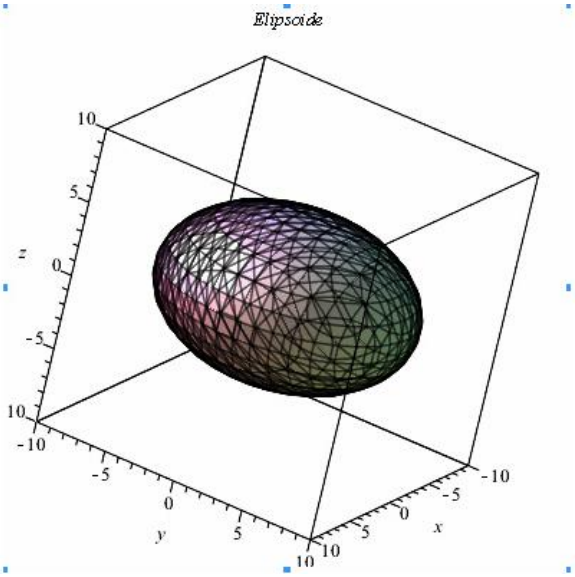
***Atividade* 6:** Representar o *elipsóide* dado pela equação

Comandos:

>**restart; with(plots): implicitplot3d(x^2/4 + y^2/5 + z^2/2 = 15, x= -10..10, y = - 10..10, z = -10..10, title = 'Elipsoide', thickness = 1, numpoints = 4000);**

ou simplesmente:

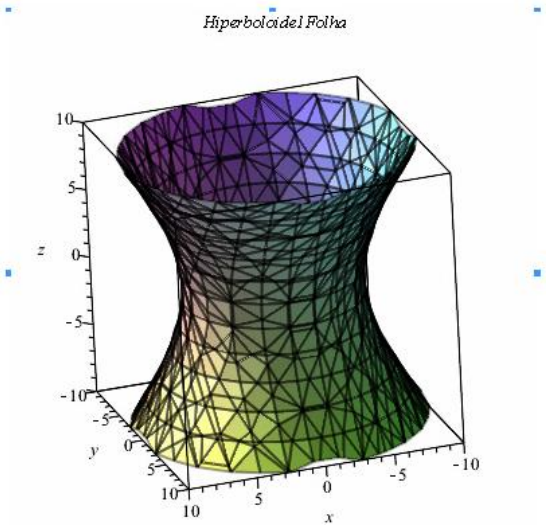
> implicitplot3d(x^2/4 + y^2/5 + z^2/2 = 15, x= -10..10, y = -10..10, z = -10..10, title = 'Elipsoide', thickness = 1, numpoints = 4000);



***Atividade* 7:** Representar o hiperboloide *de uma folha* dado pela equação $x^2/4 + y^2/5 + (z - 4)^2/2 = 15$.

Comandos:

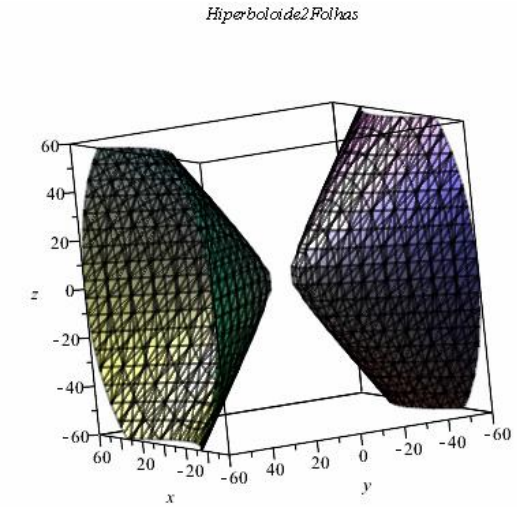
> implicitplot3d(x^2/2+y^2/2-z^2/3 = 20, x = -15..15, y = -15..15, z = -15..15, title = 'Hiperboloide1folha', thickness = 2, numpoints = 1000);



***Atividade* 8:** Representar o *hiperbolóide de duas folhas* dado pela equação $-x^2/2 + y^2/2 - z^2/3 = 20$.

Comandos:

> restart; with(plots):implicitplot3d(-x^2/2 + y^2/2 –z^2/3 = 20, x = -60..60, y = - 60..60, z = -100..100, title = 'Hiperboloide2folhas', thickness = 2, numpoints = 4000);

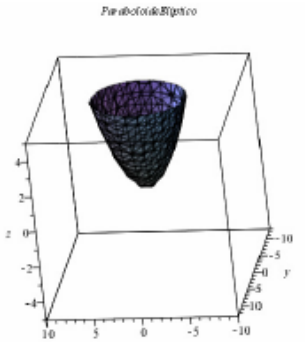


$x^2/5+y^2/6 = z$

***Atividade* 9:** Representar o *parabolóide elíptico* dado pela equação

Comandos:

> restart; with(plots):implicitplot3d(x^2/5 + y^2/6 = z, x= -10..10, y = -13..13, z = -5..5, title = 'ParaboloideEliptico', thickness = 2, numpoints = 4000);

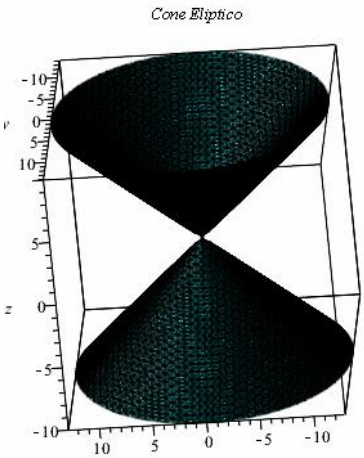


$x^2/5+y^2/6-z^2/3=0$

***Atividade* 10:** Representar o *cone elíptico* dado pela equação

Comandos:

> restart; with(plots):implicitplot3d(x^2/5 + y^2/6 – z^2/3 = 0, x = -50..50, y = - 30..30, z = -20..20, title = 'Cone', thickness = 2, numpoints = 4000);



CONCLUSÂO

Acredito que com a utilização do software matemático Geogebra como uma ferramenta de ensino pudemos promover um ensino e aprendizagem mais significativos, pois na medida em que o professor faz uso de tal ferramenta para o ensino possibilita ao mesmo fazer demonstrações que com o uso do quadro e o giz seria tanto difícil. O uso do software permite aos alunos realizarem construções, manipulação, visualização de diversas formas e ângulos, conjecturas a partir da experimentação e observado facilitando desta forma a compreensão dos conceitos geométricos em relação aos elementos da aprendizagem envolvidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBUQUERQUE, Luciane, **O uso do programa Geogebra no ensino de Geometria Plana de 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental das Escolas Publicas Estaduais do Paraná**. Curitiba, 2008 disponível em: http://www.diaadiaeducacao.br.gov.br/portals/pde/arquivos/1735-6.pdf?PHSESSID=201006241052393 acessado em 07 mai.2015.

ALBUQUERQUE, Luciane, SANTOS, Carlos Henrique dos, **O programa Geogebra: relato de experiência no ensino de geometria plana de 5ª a 8ª série e na socialização com professores da rede de ensino estadual**. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/17358.pdf?PHPSESSID=201006241052393 acessado em: 07 mai. 2015.

ARAUJO, Luis Claudio Lopes. **Explorando tópicos de Matemática do ensino fundamental e médio através do geogebra**. Disponível em: http://www.limc.ufrj.br/htem4/papers/60.pdf acessado em: 07 mai. 2015

GRIPA, Andriele et al, **Contribuições do Geogebra no ensino-aprendizagem da geometria analítica**. Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscemmaand/RE/RE_11.pdf acessado em: 07 mai. 2015.

FERREIRA, Emilia Barra et al. **As Demonstrações no Ensino da Geometria: discussões sobre a formação de professores através do uso de novas tecnologias**. Bolema, Rio Claro SP, Ano 22 nº 34, 2009, pg 185 a 2008. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/igece/matematica/bolema/site34/9%20%As%20Demonstra%C3%A7C3%B acessado em 27 abr. 2015.

BELLO, José Luiz de Paiva. **A teoria básica de Jean Piaget**. Pedagogia em Foco, Vitória, 1995. Disponível em: <http://www.pedagogiaemfoco.pro.br/per09.htm>. Acesso em: 28 abr. 2015.

BRASIL, **Lei de diretrizes e bases da educação nacional**. Brasília, DF: Gráfica do Senado, 1971.

COZZOLINO, Adriana Maria. **O ensino da perspectiva usando o Cabri 3D:** uma experiência com alunos do ensino médio. 2008. 185 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

FERREIRA, Luis de França *et al*. **A evolução dos ambientes de aprendizagem construtivistas**. Disponível em: <http://penta.ufrgs.br/~luis/Ativ1/Construt.html> Acesso em: 28 abr. 2015.

PAPERT, S. **Mindstorms:** Children, computers and powerful ideas. Brighton: Harvester Press, 1980.

PIAGET, Jean *et al*. **Educar para o futuro.** Trad. Rui B. Dias. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas, 1974.

PIAGET, Jean. **Fazer e Compreender**. Edições Melhoramentos. Editora da Universidade de São Paulo, Brasil, 1978.

PIAGET, Jean. **O desenvolvimento do pensamento**: equilibração das estruturas cognitivas. Lisboa: Dom Quixote, 1977.

PIAGET, Jean. **O nascimento da inteligência na criança.** Rio de Janeiro: Zahar, 1982.

PIAGET, J.; GARCIA, R. **Psicogênese e história das ciências**. Lisboa: Dom Quixote, 1987.

POSSANI, Rosemary Aparecida Romagnoli. **Apreensões de representações planas de objetos espaciais em um ambiente de Geometria Dinâmica**. 2002. 160 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

VIANNA, Andréa Novelino. **A utilização do computador na prática docente:** sentidos construídos por um grupo de professores de matemática de uma Instituição de Ensino Federal. 2009. 121 p. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2009.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Construções geométricas, um saber escolar novamente para todos?** In: SEMANA DA PÓS-GRADUAÇÃO DA UFMG, Belo Horizonte, 2002. ***Anais***... Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2002.

CAPÍTULO 3

EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE GENERALIZADA

Maria Aliciane Martins Pereira da Silva[*]
Francisca Natália Viana Silva[†]
Francisco Odecio Sales[‡]

INTRODUÇÃO

Esse artigo é fruto dos trabalhos de Iniciação Científica (IC) do curso de Licenciatura em Matemática do IFCE, Campus Crateús e objetiva simultaneamente pesquisar sobre problemas de otimização em Matemática e demais ciências exatas bem como a publicação e popularização do Cálculo Variacional para alunos da graduação e professores da educação básica que tenham interesse em conhecer o método.

O cálculo de variações é um problema matemático que consiste em buscar máximos e mínimos (ou, mais geralmente, extremos relativos) de funções contínuas definidas sobre algum espaço funcional. Constituem uma generalização do cálculo elementar de máximos e mínimos de funções reais de uma variável. Ao contrário deste, o cálculo das variações lida com os funcionais, enquanto o cálculo ordinário trata de funções. Funcionais podem, por exemplo, ser formados por integrais envolvendo uma função incógnita e suas derivadas. O interesse está em funções extremas - aquelas que fazem o funcional atingir um valor máximo ou Mínimo - ou de funções fixas - aquelas onde a taxa de variação do funcional é precisamente zero.

Talvez o exemplo mais simples seja o de encontrar a curva com o menor comprimento possível ligando dois pontos. Se não houver restrições, a solução é (obviamente) uma linha reta ligando estes pontos. No entanto, se as possibilidades para esta curva estiverem restritas a uma determinada suficiente no espaço, então a solução é menos obvia e, possivelmente, muitas soluções podem existir. Tais soluções são conhecidas como geodésicas. Um problema relacionado a este é representado pelo princípio de Fermat: a luz segue o caminho de menor comprimento Óptico ligando dois pontos, onde o comprimento óptico depende do material de que e composto o meio. Um conceito correspondente em mecânica é o princípio da mínima ação. Neste artigo faremos uma exposição dos principais conceitos do cálculo variacional com ênfase na equação de Euler-Lagrange, que trata-se de uma condição necessária para extremos locais de uma

determinada classe de funcionais. Nosso objetivo principal é estudar os problemas de extremidades fixas com e sem vínculos para tratar o problema de Sturm-Liouville por meio de uma abordagem variacional.

Equação de Euler-Lagrange Generalizada

Consideramos agora a Lagrangiana $L : [0, 1] \times R^n \times R^n \rightarrow R$,onde $1 \leq N$ é um número natural, $L = L(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n')$ onde novamente L possui derivadas parciais contínuas de primeira e segunda ordem em relação a todas as coordenadas. O funcional associado a tal lagrangiana é

$$J[y_1, ..., y_n] = \int_0^1 L(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n')dx$$

Calculemos então a equação de Euler-Lagrange associada a tal funcional, portanto y_1, .., y_n curvas admissíveis e $h_1, ..., h_n \in C_0^1([0,1], R)$ definindo novamente a "Perturbação".

$$\xi(t) := J[y_1 + th_1, ..., y_n + th_n]$$

Temos,

$$\xi'(t) = \int_0^1 (\sum_{i=1}^n L_{yi}h_i + \sum_{i=1}^n L'_{yi}h_i')dx =$$
$$\int_0^1 (\sum_{i=1}^n L_{yi}h_i + \sum_{i=1}^n L_{y_i'}h_i|_0^1 - \int_0^1 (\sum_{i=1}^n \frac{d}{dx}L_{y_i'}h_i dx.$$

Onde realizamos integração por partes na segunda igualdade. Usando o fato de que $h_i(1) = h_i(0) = 0$, com $i = 1, ..., N$ e fazendo $t = 0$, temos

$$\xi'(0) = \delta J[y_1, .., y_n](h_1, ..., h_n) = \sum_{i=1}^N \int_0^1 (L_{yi} - \frac{d}{dx}L_{y_i}')h_i dx$$

Daí, se $y_1, .., y_n$ forem curvas que extremizem (estacionárias) o funcional, temos $\xi'(0) = 0$ e como h_i é arbitrária, novamente segue

$$L_y - i = \frac{d}{dx} L_{y_i'} (i = 1, ..., N).$$

Tais equações são chamadas de Equações de Euler-Lagrange associadas ao funcional $J[y_1, ..., y_n]$

Problemas Isoperimétricos

Alguns dos problemas variacionais podem vir acompanhando de vínculos, ou seja, uma condição adicional a qual as curvas admissíveis devem ainda satisfazer. Um problema isoperimétrico e um problema da seguinte forma:

Encontrar a curva y = y(x) que extremiza o funcional

$$J[y] = \int_0^1 L(x, y, y')dx \ (1)$$

onde y(0) = A, y(1) = B e cujo funcional

$$K[y] = \int_0^1 M(x, y, y')dx \ (2)$$

Possua, sobre as curvas admissíveis, o valor fixo l.

Para tentar resolver tais problemas enunciemos o seguinte teorema:

Teorema 2.1 (multiplicador de Lagrange). Considere o funcional

$$J[y] = \int_0^1 L(x, y, y')dx$$

Onde, as curvas admissíveis satisfazem as condições

$$y(0) = A, y(1) = B, K[y] = \int_0^1 M(x, y, y')dx = l \ (3)$$

K[y] sendo outro funcional, e se J[y] tem um extremo para y = y(x) e y não é um extremo para K[y] então existe uma constante λ tal que y = y(x) é um extremo do funcional

$$\int_0^1 (L + \lambda M)dx$$

Isto é, y = y(x) satisfaz a equação diferencial

$$L_y - \frac{d}{dx}L'_y + \lambda(M_y - \frac{d}{dx}M'_y) = 0 \ (4)$$

Para uma demonstração de tal teorema veja I.M GeLfand S.V. Fomin, Calculus of Variations.

Prova: Seja J[y] um extremo para a curva y = y(x), sujeito a condição 3. Temos dois pontos x_1 x_2 no intervalo [a, b], onde x_1 é arbitrário e x_2 satisfaz uma condição para ser declarado abaixo, mas de outra forma é arbitrário. Então damos a y(x) um incremento $\delta_1 y(x) + \delta_2 y(x)$, onde $\delta_1 y(x)$ é diferente de zero apenas em uma vizinhança de x_2. Usando derivadas variacionais, podemos escrever o incremento correspondente ΔJ do funcional J no de

$$\Delta J = \{\frac{\delta L}{\delta y}|_{x=x_1} + \epsilon_1\}\Delta\sigma_1 + \{\frac{\delta L}{\delta y}|_{x=x_2} + \epsilon_2\}\Delta\sigma_2, \ (5)$$

Onde

$$\Delta\sigma_1 = \int_a^b \delta_1 y(x)dx, \Delta\sigma_2 = \int_a^b \delta_2 y(x)dx$$
$$\text{e } \epsilon_1, \epsilon_2 \to 0 \text{ como } \Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2 \to 0.$$

Agora, exigimos a ”variação” da curva:

$$K[y*] = K[y]$$

Escrevendo ΔK de forma similar a (5), nós obtemos:

$$\Delta K = K[y*] - K[y] = \{\frac{\delta M}{\delta y}|_{x=x_1} + \epsilon_1'\}\Delta\sigma_1 + \{\frac{\delta M}{\delta y}|_{x=x_2} + \epsilon_2'\}\Delta\sigma_1 \ (6)$$

Onde:

$$\epsilon_1', \epsilon_2' \to 0 \text{ como } \Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2 \to 0.$$

A seguir, escolhemos x_2 como um ponto para o qual:

$$\frac{\delta M}{\delta y}|_{x=x_1} \neq 0.$$

Tal ponto existe, pois por hipótese y = y(x) não é um extremo do funcional K. Com esta escolha de x2 podemos escrever a condição (6) a partir de:

$$\Delta\sigma_2 = -\{\frac{\frac{\delta M}{\delta y}|_{x=x_1}}{\frac{\delta M}{\delta y}|_{x=x_2}} + \epsilon'\}\Delta\sigma_1 \ (7)$$

, onde

$$, \epsilon' \to 0 \text{ como } \Delta\sigma_1 \to 0.$$

Reduzindo

$$\lambda = -\frac{\frac{\delta M}{\delta y}|_{x=x_1}}{\frac{\delta M}{\delta y}|_{x=x_2}},$$

E substituindo (7) na fórmula (5) para ΔJ, nós obtemos:

$$\Delta J = \{\frac{\delta l}{\delta y}|_{x=x_1} + \lambda\frac{\delta M}{\delta y}|_{x=x_1}\}\Delta\sigma_1 + \epsilon\Delta\sigma_1 \ (8)$$

Onde, $\epsilon \to 0, \Delta\sigma_1 \to 0.$

Esta expressão para ΔJ explicitamente envolvia derivação variacional apenas em x = x_1, e o incremento h(x) agora é apenas $\delta_1 y(x)$, já que o ”incremento de compensação” $\delta_2 y(x)$ foi considerado automaticamente usando a condição Δk = 0. Assim o primeiro termo do lado direito de (8) é a parte linear principal de δJ, i.e., ou seja, a variação funcional de J no ponto x_i é:

$$\delta J = \{\frac{\delta L}{\delta y}|_{x=x_1} + \lambda\frac{\delta M}{\delta y}|_{x=x_1}\}\Delta\sigma_1$$

Uma vez que uma condição necessária para um extremo é δJ = 0, e tamanho $\Delta\sigma_1$ é diferente de zero enquanto x_1 é arbitrário, finalmente temos:

$$\delta J = \frac{\delta L}{\delta y} + \lambda \frac{\delta M}{\delta y} = L_y - \frac{d}{dx} L'_y + \lambda (M_y - \frac{d}{dx} M'_y) = 0$$

Que é precisamente a equação (4). Isso completa a prova do teorema.

A catenária

Um problema variacional isoperimétrico clássico bastante famoso é o problema da catenária. Considere a determinação da forma por um cabo flexível, inextensível, com densidade uniforme ρ e de comprimento ℓ, suspenso entre dois pontos A e B, sujeito somente ao seu próprio peso. Fisicamente falando, estamos à procura dentre todas as curvas de comprimento ℓ a que possua energia potencial mínima, uma vez que a única força atuando sobre a mesma é o seu peso.

Solução: A massa pequena porção infinitesimal Δs_i do cabo é dada por $\rho \Delta s_i$. Portanto a força $\wp$ atuando sobre tal porção é, orientado o eixo y para cima, sendo g o módulo da aceleração gravitacional.

$$\wp = -\rho g \Delta s_i$$

Como tal foça atua na direção y temos que a energia potencial (gravitacional) $\Re$ de tal porção do cabo é dada por

$$\Re = \rho g y_i \Delta s_i$$

Dessa forma, energia potencial ϵ_p do cabo é dada por

$$\epsilon_p = \rho g \int_0^1 y ds = \rho g \int_0^1 y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Onde, sem perda de generalidade, as extremidades do cabo são dadas por y(0) = A, y(1) = B Logo, a curva y = y(x) que procuramos minimizar o funcional

$$J[y] = \rho g \int_0^1 y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Sujeita ao vínculo

$$K[y] = \int_0^1 y \sqrt{1 + y'^2} dx = \ell$$

Temos então as Lagrangianas

$$L(y, y') = y\sqrt{1 + y'^2} \text{ e } M(y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$$

Note que os funcionais J e K não possuem extremos em comum, uma vez que os extremos de K são retas e os extremos de J foram encontrados no problema de superfície de rotação mínima. Daí usando o teorema anterior e considerando a lagrangiana auxiliar L = L + λM, temos pelo fato de L = L(y, y′), que é a equação de Euler-Lagrange é equivalente a

$$L - y'L_{y_i'} = C(cte)$$

Ou ainda

$$(y + \lambda)\sqrt{1 + y'^2} - \frac{y'^2(y+\lambda)}{\sqrt{1+y'^2}} = C$$

Segue daí

$$\frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = C$$

Resolvendo tal EDO temos o seguinte resultado

$$y(x) = Ccosh(\frac{x+C_1}{C}) + C_2$$

Concluímos assim que a curva procurada é a catenária.

O problema isoperimétrico original

Sem dúvida nenhuma, o problema isoperimétrico mais famoso é: Considere como sendo as curvas admissíveis o conjunto das curvas fechadas, que não se auto-intersectam, com comprimento total ℓ. Qual, dentre tais curvas admissíveis encerra maior área?

Solução: Sejam x = x(t), y = y(t) onde $0 \leq t \leq 1$ e x(0) = x(1) = 0 e y(0) = y(1) = 0 a representação paramétrica das curvas admissíveis discutidas acima. Tais curvas devem satisfazer

$$K[y] = \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2}dx = \ell$$

e a curva admissível procurada deve ser extremo para o funcional

$$J[x, y] = \frac{1}{2}\int_0^1 (xy - yx)dt$$

pois tal expressão determina a área encerrada pela curva γ(t) = (x(t), y(t)), em virtude do teorema de Green. Temos que tais funcionais não possuem pontos extremos em comum, uma vez que os pontos extremos de K são segmentos de retas e não á difícil de verificar que os pontos extremos de J satisfazem y = C_1 e y = C_2. Introduzindo novamente a Lagrangiana auxiliar

$$L(x, y, x, y) = \frac{1}{2}(xy + yx) + \lambda\sqrt{x^2 + y^2}$$

Segue do Teorema Multiplicador de Lagrange que a curva desejada satisfaz as equações

$$\frac{dL_x}{dt} = L_x \frac{dL_y}{dt} = L_y$$

Seguindo que

$$\frac{1}{2}y = \frac{d}{dt}(-\frac{1}{2}y + \frac{\lambda x}{\sqrt{x^2+y^2}}), -\frac{1}{2}x = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}x + \frac{\lambda y}{\sqrt{x^2+y^2}})$$

E integrando com relação a t segue

$$(y + C_1) = \frac{\lambda x}{\sqrt{x^2+y^2}} - x + C_2 = \frac{\lambda y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Note que x diferete de zero, daí usando que y' = $\frac{y}{x}$ segue

$$\frac{-x+C_2}{y+C_1} = \frac{dy}{dx}$$

Separando variáveis

$$(-x + C_2)dx = (y + C_1)dy,$$

E integrando em ambos os ladoss, segue que a curva procurada é

$$(y + C_1)^2 + (x - C_2)^2 = r^2$$

Como escolhemos curvas passando pela origem, segue

$$y^2 + x^2 = C_1^2 + C_2^2$$

Portanto a curva procurada é o círculo de raio $\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \frac{\ell}{2\pi}$

CONCLUSÃO

Neste trabalho empenhamo-nos em apresentar resultados fundamentais da Teoria do Cálculo de Variações e aplicações. Embora exista uma variedade grande de problemas, nos restringimos aos problemas clássicos isoperimétricos com funcionais dependentes de mais de uma função e problemas com alguns tipos de restrições. Como optamos por estudar condições necessárias para extremos de funcionais, procuramos mostrar algebricamente, em alguns exemplos, que o candidato a extremal minimiza o funcional estudado. Condições suficientes para extremos de funcionais podem ser encontradas nas referências. Resolver problemas do Cálculo de uma variável via Cálculo de Variações, conferiu ao trabalho um caráter mais aplicado e o tornou mais prazeroso. A dedução das expressões dos funcionais de cada um dos problemas apresentados proporcionou uma melhor compreensão deles, haja vista que na maioria das bibliografias voltadas para leitores leigos o funcional é dado.

REFERÊNCIAS

BAGGETT, L. W. Functional Analysis: A Primer. [S.l.]: Dekker, 1992.

CAVALHEIRO, A. C. Minicurso: O Problema de Sturm-Liouville. [S.l.]: Departamento de Matemática Universidade Estadual de Londrina, 2012.

CORMANI, V.; RYHAM, R. Variational Techniques for Sturm-Liouville Ei- genvalue Problems. 2002.

FALSET, J. G. Análisis Funcional No Lineal. [s.n.], 2007. Disponível em: ¡http://www.uv.es/garciaf/apuntes/analv.PDF¿. Acesso em: 25 de jun. 2016.

LI, Y. Lectures on Variational Methods. [s.n.], 2012. Disponível em: ¡http: //www.math.jhu.edu/ yli/Variational20methods.pdf¿. Acesso em: 24 de jun. 2016.

NACHBIN, L. Introdução à Análise Funcional, Espaços de Banach e Cálculo Diferencial. [S.l.]: Oea, 1976.

SAGAN, H. Introduction to the Calculus of Variations. [S.l.]: Courier Cor-poration, 2012.

SOTOMAYOR, J. Lições de Equações Diferenciais Ordinárias. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979. v. 11.

TROUTMAN, J. L. Variational Calculus and Optimal Control: Optimization with Elementary Convexity. [S.l.]: Springer Science Business Media, 2012

CAPÍTULO 4

UM ESTUDO SOBRE EQUAÇÕES FUNCIONAIS DE CAUCHY

Miller Dias de Araújo

As equações funcionais de Cauchy são divididas em quatro tipos: a aditiva, a exponencial, a logarítmica e a multiplicativa. Faremos um estudo completo dessas equações funcionais, vem comigo!

- **Equação Funcional Aditiva**

Uma equação funcional da forma $f(x+y)=f(x)+f(y)$ é chamada de equação funcional aditiva de Cauchy. Então, uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é chamada de aditiva, se ela satisfaz a equação funcional de Cauchy, ou seja: $f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x, y\in\mathbb{R}$.

Propriedades da equação funcional aditiva

P1. **Se f é uma função aditiva, então** $f(0)=0$**.**

Demonstração:

Fazendo x = y = 0, na equação funcional, temos:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\ \Rightarrow\ f(0+0)=f(0)+f(0)\ \therefore\ \boxed{f(0)=0}.$$

P2. **Se f é uma função aditiva, então** $f(-x)=-f(x)$**.**

Demonstração:

Fazendo y = – x, na equação funcional, temos:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\ \Rightarrow\ f(x-x)=f(x)+f(-x)\ \Rightarrow\ 0=f(x)+f(-x)\ \therefore\ \boxed{f(-x)=-f(x)}.$$

Assim, f é uma função ímpar.

P3. **Se f é uma função aditiva, então** $f(x) = ax,\ \forall x \in \mathbb{R}$ **, onde** $a = f(1)$ **é uma solução da equação funcional.**

Demonstração:

Faremos a demonstração por indução.

Fazendo y = x = 1, na equação funcional, temos:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \ \Rightarrow\ f(1+1) = f(1) + f(1) \ \therefore\ \boxed{f(2) = 2\,f(1)}.$$

Fazendo x = 1 e y = 2, na equação funcional, temos:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \ \Rightarrow\ f(1+2) = f(1) + f(2) \ \Rightarrow\ f(3) = f(1) + 2\,f(1) \ \therefore\ \boxed{f(3) = 3\,f(1)}.$$

Suponhamos que valha para k (hipótese de indução), ou seja, $f(k) = k\,f(1)$. Provaremos que vale para k + 1. Fazendo x = 1 e y = k, na equação funcional, temos:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \ \Rightarrow\ f(1+k) = f(1) + f(k) \ \Rightarrow\ f(k+1) = f(1) + k\,f(1) \ \therefore\ \boxed{f(k+1) = (k+1)\,f(1)}.$$

Como f é ímpar (P2), temos que $f(x) = ax,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \text{com } a = f(1)$.

P4. **Se f é uma função aditiva, então** $f(x) = ax,\ \forall x \in \mathbb{R}$ **, onde** $a = f(1)$**.**

Demonstração:

Fazendo $nx = m \ \Rightarrow\ x = \dfrac{m}{n},\ \forall m, n \in \mathbb{R}$ na P3, temos:

$$f(nx) = n\,f(x) \ \Rightarrow\ f(m) = n \cdot f\left(\frac{m}{n}\right) \overset{P3}{\Rightarrow} a \cdot m = n \cdot f\left(\frac{m}{n}\right) \ \Rightarrow\ f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} \cdot a \ \therefore\ \boxed{f(x) = a \cdot x},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

P5. **Se f é uma função aditiva, então** $f(nx) = n\,f(x),\ \forall n \in \mathbb{R}$ **.**

Demonstração:

Faremos a demonstração por indução. Supomos que n > 0 (n = 0 é a P1), então:

Fazendo y = x, na equação funcional, temos:

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \;\Rightarrow\; f(x+x)=f(x)+f(x) \;\therefore\; \boxed{f(2x)=2\,f(x)}.$$

Fazendo y = 2x, na equação funcional, temos:

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \;\Rightarrow\; f(x+2x)=f(x)+f(2x) \;\Rightarrow\; f(3x)=f(x)+2f(x) \;\therefore\; \boxed{f(3x)=3\,f(x)}.$$

Suponhamos que valha para n = kx (hipótese de indução), então: $f(kx)=k\,f(x)$. Provaremos que vale para $n=k+1$. Fazendo y = kx, na equação funcional, temos:

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \;\Rightarrow\; f(x+kx)=f(x)+f(kx) \;\Rightarrow\; f\left[(k+1)x\right]=f(x)+k\,f(x) \;\therefore\; \boxed{f\left[(k+1)x\right]=(k+1)\,f(x)}.$$

Como f é ímpar (P2), o que vale para n > 0 também vale para n < 0. Portanto, $f(nx)=n\,f(x),\ \forall n\in\mathbb{Z}$.

P6. **Se f é uma função aditiva, então** $f(rx)=r\,f(x),\ \forall r\in\mathbb{Q}$.

Demonstração:

Considere $r=\frac{p}{q},\ \forall p,q\in\mathbb{Z}$. Fazendo $n=q$ e $x=\frac{px}{q}$ na P3, temos:

$$f(nx)=n\,f(x) \;\Rightarrow\; f\left(q\cdot\frac{px}{q}\right)=q\cdot f\left(\frac{px}{q}\right) \;\Rightarrow\; f(px)=q\cdot f\left(\frac{px}{q}\right) \;\Rightarrow\; p\,f(x)=q\cdot f\left(\frac{p}{q}\cdot x\right)$$

$$\Rightarrow\; f\left(\frac{p}{q}\cdot x\right)=\frac{p}{q}\cdot f(x) \;\therefore\; \boxed{f(r\cdot x)=r\cdot f(x)}.$$

Observação: Demonstra-se, usando cálculo, que vale também para o conjunto dos números reais (deixamos a cargo do leitor).

❖ **Conclusão:** Uma solução da equação funcional aditiva de Cauchy é: $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}\mid f(x)=a\cdot x,\ \forall x\in\mathbb{Q}$, com $a=f(1)$, onde f é monótona.

Exemplo Resolvido 01 (ITA 1986): Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função que satisfaz à seguinte propriedade: $f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Se $g(x)=f\left(\log_{10}\left(x^2+1\right)^2\right)$, então, podemos afirmar que:

a) o domínio de g é $\mathbb{R}$ e g(0) = f(1).

b) **g** não está definida para os reais negativos e $g(x)=2f\left(\log_{10}\left(x^2+1\right)\right)$, para $x\geq 0$.

c) g(0) = 0 e $g(x)=2f\left(\log_{10}\left(x^2+1\right)\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

d) g(0) = f(0) e **g** é injetiva.

e) g(0) = –1 e $g(x)=\left[f\left(\log_{10}\left(x^2+1\right)^{-1}\right)\right]^2$ g(x) = [f(log10(x^2 + 1)–1)]^2, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Resolução:

Note que se trata de uma equação funcional aditiva. Logo, para $x=y=0$ e $x=y=\log_{10}\left(x^2+1\right)$ temos:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\ \Rightarrow\ f(0+0)=f(0)+f(0)\ \Rightarrow\ f(0)=2f(0)\ \Rightarrow\ f(0)=0\ \Rightarrow\ g(0)=f(0)$$

$$\therefore\ \boxed{g(0)=0}.$$

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\ \Rightarrow\ f\left[\log_{10}\left(x^2+1\right)+\log_{10}\left(x^2+1\right)\right]=f\left[\log_{10}\left(x^2+1\right)\right]+f\left[\log_{10}\left(x^2+1\right)\right]$$

$$\Rightarrow\ f\left[2\cdot\log_{10}\left(x^2+1\right)\right]=2f\left[\log_{10}\left(x^2+1\right)\right]\ \Rightarrow\ f\left[\log_{10}\left(x^2+1\right)^2\right]=2f\left[\log_{10}\left(x^2+1\right)\right]$$

$$\therefore\ \boxed{g(x)=2f\left[\log_{10}\left(x^2+1\right)\right]}.$$

Resposta: Alternativa C

- **Equação Funcional Exponencial**

Uma equação funcional da forma $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ é chamada de equação funcional exponencial de Cauchy. Então, uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é chamada de função exponencial real, se ela satisfaz a equação funcional exponencial de Cauchy, ou seja: $f(x+y)=f(x)\cdot f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Propriedades da equação funcional exponencial

P1. **Se f é uma função exponencial, então** $f(0)=1$**.**
Demonstração:

Fazendo x = y = 0, na equação funcional, temos:

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \Rightarrow f(0+0)=f(0)\cdot f(0) \Rightarrow f(0)-\left[f(0)\right]^2=0 \Rightarrow f(0)\left[1-f(0)\right]=0$$

$$\therefore \boxed{f(0)=0 \text{ ou } f(0)=1}.$$

Note que, se $f(0)=0$, então $y=0 \Rightarrow f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \Rightarrow f(x+0)=f(x)\cdot f(0)$ $\therefore \boxed{f(x)=0}$, $\forall x$ e isso não nos interessa. Então $f(0)=1$.

P2. **Se f é uma função exponencial, então** $f(-x)=\left[f(x)\right]^{-1}$**.**

Demonstração:

Fazendo y = – x, na equação funcional, temos:

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \Rightarrow f(x-x)=f(x)\cdot f(-x) \Rightarrow 1=f(x)\cdot f(-x) \Rightarrow f(-x)=\frac{1}{f(x)} \therefore \boxed{f(-x)=\left[f(x)\right]^{-1}}.$$

P3. **Se f é uma função exponencial, então** $f(x)=a^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$**, onde** $a=f(1)$ **é uma solução da equação funcional** $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$**.**

Demonstração:

Faremos a demonstração por indução.

Fazendo y = x = 1, na equação funcional, temos:

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \Rightarrow f(1+1)=f(1)\cdot f(1) \therefore \boxed{f(2)=\left[f(1)\right]^2}.$$

Fazendo x = 1 e y = 2, na equação funcional, temos:

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \Rightarrow f(1+2)=f(1)\cdot f(2) \Rightarrow f(3)=f(1)\cdot\left[f(1)\right]^2 \therefore \boxed{f(3)=\left[f(1)\right]^3}.$$

Suponhamos que valha para k (hipótese de indução), então: $f(k)=\left[f(1)\right]^k$. Provaremos que vale para $k+1$. Fazendo x = 1 e y = kx, na equação funcional, temos:

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \Rightarrow f(1+k)=f(1)\cdot f(k) \Rightarrow f(k+1)=f(1)\cdot\left[f(1)\right]^k \therefore \boxed{f(k+1)=\left[f(1)\right]^{k+1}}.$$

Logo concluímos que $f(x)=a^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$, com $a=f(1)$.

Da P2, temos: $f(-x)=\left[f(x)\right]^{-1} \Rightarrow f(-x)=\left[f(1)^x\right]^{-1} \therefore \boxed{f(-x)=\left[f(1)\right]^{-x}}$.

Portanto, $f(x)=a^x,\ \forall n\in\mathbb{R}$, com $a=f(1)$.

P4. **Se f é uma função exponencial, então** $f(x)=a^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$, com $a=f(1)$**.**

Demonstração:

Fazendo $nx = m \Rightarrow x = \frac{m}{n},\ \forall m, n \in \mathbb{Z}$ na P3, temos:

$$f(m) = f(nx) \overset{P3}{\Rightarrow} a^m = a^{nx} \Rightarrow a^m = \left(a^x\right)^n \Rightarrow \left(a^m\right)^{1/n} = a^x \Rightarrow a^x = a^{\frac{m}{n}} \Rightarrow f(x) = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\therefore \boxed{f(x) = a^x},\ \forall x \in \mathbb{Q},\ \text{com } a = f(1).$$

P5. **Se f é uma função exponencial, então** $f(nx) = \left[f(x)\right]^n,\ \forall n \in \mathbb{Z}$ **.**

Demonstração:

Faremos a demonstração por indução.

Fazendo y = x, na equação funcional, temos:

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(y) \Rightarrow f(x+x) = f(x)\cdot f(x) \therefore \boxed{f(2x) = \left[f(x)\right]^2}.$$

Fazendo y = 2x, na equação funcional, temos:

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(y) \Rightarrow f(x+2x) = f(x)\cdot f(2x) \Rightarrow f(3x) = f(x)\cdot\left[f(x)\right]^2 \therefore \boxed{f(3x) = \left[f(x)\right]^3}.$$

Suponhamos que valha para n = kx (hipótese de indução), então: $f(kx) = \left[f(x)\right]^k$. Provaremos que vale para $n = k+1$. Fazendo y = kx, na equação funcional, temos:

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(y) \Rightarrow f(x+kx) = f(x)\cdot f(kx) \Rightarrow f\left[(k+1)x\right] = f(x)\cdot\left[f(x)\right]^k \therefore \boxed{f\left[(k+1)x\right] = \left[f(x)\right]^{k+1}}.$$

Da P2, temos:

$$f(-x) = \left[f(x)\right]^{-1} \Rightarrow f(-nx) = \left[f(nx)\right]^{-1} \Rightarrow f(-nx) = \left[\left[f(x)\right]^n\right]^{-1} \therefore \boxed{f(-nx) = \left[f(x)\right]^{-n}}.$$

Portanto, $f(nx) = \left[f(x)\right]^n,\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

P6. **Se f é uma função exponencial, então** $f(nx) = \left[f(x)\right]^n,\ \forall n \in \mathbb{Z}$ **.**

Demonstração:

Fazendo $r = \frac{p}{q} \Rightarrow rq = p,\ \forall p, q \in \mathbb{Z}\ \text{e}\ r \in \mathbb{Q}$, temos:

$$f(rx) = \left[f(x)\right]^r \Rightarrow \left[f(rx)\right]^q = \left[\left[f(x)\right]^r\right]^q \Rightarrow \left[f(rx)\right]^q = \left[f(x)\right]^{rq} \Rightarrow \left[f(rx)\right]^q = \left[f(x)\right]^p$$

$$\Rightarrow f(rx) = \left[f(x)\right]^{\frac{p}{q}} \Rightarrow f(rx) = \left[f(x)\right]^r \therefore \boxed{f(nx) = \left[f(x)\right]^n},\ \forall n \in \mathbb{Q}.$$

Observação: Demonstra-se, usando cálculo, que vale também para o conjunto dos números reais (deixamos a cargo do leitor).

❖ **Conclusão:** As soluções da equação funcional exponencial de Cauchy são: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ou $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+ \mid f(x)=a^x,\ \forall x\in\mathbb{R}, \text{ com } a=f(1)$.

Exemplo Resolvido 02 (ITA 1987): Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função tal que $f(x)\neq 0$, para cada $x\in\mathbb{R}$ e $f(x+y)=f(x)\cdot f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Considere (a_1, a_2, a_3, a_4), uma PA de razão r, tal que $a_1=0$. Então $\left(f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4)\right)$:

a) É uma PA de razão igual a $f(r)$ e 1º termo $f(a_1)=f(0)$.
b) É uma PA de razão igual a r.
c) É uma PG de razão igual a $f(r)$ e 1º termo $f(a_1)=1$.
d) É uma PG de razão igual a r e 1º termo $f(a_1)=f(0)$.
e) Não é necessariamente uma PA ou uma PG.

Resolução:

Note que se trata de uma equação funcional exponencial, cuja solução geral é $f(x)=a^x$, pois $f(x)\neq 0$. Logo, temos:

$$f(x)=a^x \Rightarrow f(a_1)=a^{a_1} \Rightarrow f(a_1)=a^0 \therefore \boxed{f(a_1)=1}.$$

$$f(x)=a^x \Rightarrow f(a_2)=a^{a_2} \Rightarrow f(a_2)=a^r \therefore \boxed{f(r)=a^r}.$$

$$f(x)=a^x \Rightarrow f(a_3)=a^{a_3} \Rightarrow f(a_3)=a^{2r} \Rightarrow f(a_3)=\left(a^r\right)^2 \therefore \boxed{f(a_3)=\left[f(r)\right]^2}.$$

$$f(x)=a^x \Rightarrow f(a_4)=a^{a_4} \Rightarrow f(a_4)=a^{3r} \Rightarrow f(a_4)=\left(a^r\right)^3 \therefore \boxed{f(a_4)=\left[f(r)\right]^3}.$$

Concluímos que $\left(f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4)\right)$ é uma PG de razão $f(r)$ e $f(a_1)=1$.

Resposta: Alternativa C

Exemplo Resolvido 03 (ITA 2003): Considere uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ não constante e tal que $f(x+y)=f(x)\cdot f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Das afirmações:

I. $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

II. $f(nx)=\left[f(x)\right]^n,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{R}^*$.

III. f é par.

É(são) verdadeira(s):

a) Apenas I e II. b) Apenas II e III. c) Apenas I e III.
d) Todas. e) Nenhuma.

Resolução:

I. Verdadeiro. Note que, por ser uma função exponencial, $f(x) > 0$.

II. Verdadeiro. Faremos a demonstração por indução.

Fazendo y = x, na equação funcional, temos:

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(y) \;\Rightarrow\; f(x+x) = f(x)\cdot f(x) \;\therefore\; \boxed{f(2x) = \left[f(x)\right]^2}.$$

Fazendo y = 2x, na equação funcional, temos:

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(y) \;\Rightarrow\; f(x+2x) = f(x)\cdot f(2x) \;\Rightarrow\; f(3x) = f(x)\cdot\left[f(x)\right]^2 \;\therefore\; \boxed{f(3x) = \left[f(x)\right]^3}.$$

Suponhamos que valha para k = (n – 1)x (hipótese de indução), então: $f\left[(n-1)x\right] = \left[f(x)\right]^{n-1}$. Provaremos que vale para $k = n$. Fazendo y = (n – 1)x, na equação funcional, temos:

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(y) \;\Rightarrow\; f\left[x+(n-1)x\right] = f(x)\cdot f\left[(n-1)x\right] \;\Rightarrow\; f(nx) = f(x)\cdot\left[f(x)\right]^{n-1} \;\therefore\; \boxed{f(nx) = \left[f(x)\right]^n}.$$

III. Falso. Note que, para n = – 1, temos:

$$f(nx) = \left[f(x)\right]^n \;\Rightarrow\; f(-x) = \left[f(x)\right]^{-1} \;\therefore\; \boxed{f(-x) = \frac{1}{f(x)}}.$$

Resposta: Alternativa A

Exemplo Resolvido 04 (ITA 2009): Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}-\{0\}$ uma função satisfazendo as condições: $f(x+y) = f(x)\cdot f(y),\ \forall x, y\in\mathbb{R}$ e $f(x)\neq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$. Das afirmações:

I. f pode ser ímpar.
II. $f(0) = 1$.
III. f é injetiva.
IV. f não é sobrejetiva, pois $f(x) > 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

É(são) falsa(s) apenas:

a) I e III. b) II e III. c) I e IV.
d) IV. e) I.

Resolução:

$$f(nx) = \left[f(x)\right]^n \;\Rightarrow\; f(-x) = \left[f(x)\right]^{-1} \;\therefore\; \boxed{f(-x) = \frac{1}{f(x)}}.$$

I. Falso. Note que, para n = – 1, temos:

II. Verdadeiro. Note que, para y = 0, temos:

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(y) \;\Rightarrow\; f(x+0) = f(x)\cdot f(y) \;\Rightarrow\; f(x) = f(x)\cdot f(0) \;\therefore\; \boxed{f(0) = 1}.$$

III. Verdadeiro. Note que, por ser uma função exponencial e já que $f(x) \neq 1$, temos uma função injetiva.

IV. Verdadeiro. Note que, por ser uma função exponencial, $f(x) > 0$, porém como $CDom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, a função não é sobrejetiva.

Resposta: Alternativa E

- **Equação Funcional Logarítmica**

Uma equação funcional da forma $f(xy) = f(x) + f(y)$ é chamada de equação funcional logarítmica de Cauchy. Então, uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de função logarítmica, se ela satisfaz a equação funcional logarítmica de Cauchy, ou seja: $f(xy) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

PROPRIEDADES DA EQUAÇÃO FUNCIONAL LOGARÍTMICA

P1. **Se f satisfaz a equação funcional $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$, então $f(x) = 0$.**

Demonstração:

Fazendo y = 0, na equação funcional, temos:

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \ \Rightarrow\ f(x \cdot 0) = f(x) + f(0) \ \Rightarrow\ f(0) = f(x) + f(0) \ \therefore\ \boxed{f(x) = 0}.$$

P2. **Se f satisfaz a equação funcional $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ e $f(x) \neq 0$, então $f(1) = 0$.**

Demonstração:

Fazendo y = 1, na equação funcional, temos:

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \ \Rightarrow\ f(x \cdot 1) = f(x) + f(1) \ \Rightarrow\ f(x) = f(x) + f(1) \ \therefore\ \boxed{f(1) = 0}.$$

P3. **Se f satisfaz a equação funcional $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ e $f(x) \neq 0$, então $f(x) = f(-x)$.**

Demonstração:

Fazendo y = x, na equação funcional, temos:

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \ \Rightarrow\ f(x \cdot x) = f(x) + f(x) \ \Rightarrow\ f(x^2) = f(x) + f(x) \ \therefore\ \boxed{f(x^2) = 2f(x)}. \quad (eq1)$$

Fazendo y = x = – x, na equação funcional, temos:

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \ \Rightarrow\ f[(-x) \cdot (-x)] = f(-x) + f(-x) \ \therefore\ \boxed{f(x^2) = 2f(-x)}. \quad (eq2)$$

De (eq1) e (eq2), temos que $f(x^2) = 2f(x) = 2f(-x) \ \therefore\ \boxed{f(x) = f(-x)}$.

P4. **Se** $f(x) \neq 0$**, então** $f(x) = c \cdot \log_a x,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$**, onde** $c = f(a)$ **é uma solução da equação.**

Demonstração:

Fazendo $x = a^u \Rightarrow u = \log_a x\ (*)$ e $y = a^v$, onde a é uma base qualquer, na equação funcional, temos:

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \Rightarrow f\left(a^u \cdot a^v\right) = f\left(a^u\right) + f\left(a^v\right) \therefore \boxed{f\left(a^{u+v}\right) = f\left(a^u\right) + f\left(a^v\right)}. \quad (eq1)$$

Fazendo $g(u) = f\left(a^u\right)\ (**)$, em (eq1), temos:

$$g(u+v) = f(u) + f(v) \therefore \boxed{g(u) = g(1) \cdot u}. \quad (eq2)$$

Daí:

$g(u) = f\left(a^u\right) \therefore \boxed{g(1) = f(a)}$.

$(**) = (eq2) \Rightarrow g(u) = f\left(a^u\right) = g(1) \cdot u \overset{(*)}{\Rightarrow} f(x) = f(a) \cdot \log_a x \therefore \boxed{f(x) = c \cdot \log_a x}$, com $c = f(a)$.

Consequência:

P5. **Se** $f(x) \neq 0$**, então** $f(x) = c \cdot \log_a |x|,\ \forall x \in \mathbb{R}$ **, onde** $c = f(a)$ **é uma solução da equação.**

Demonstração:

Como $f(x) = f(-x)$ e $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_+^*$, temos que modular o x para conter os valores negativos do domínio real. Assim, temos: $f(x) = c \cdot \log_a |x|,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

❖ **Conclusão:** As soluções da equação funcional logarítmica de Cauchy são: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ ou $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \mid f(x) = c \cdot \log_a x,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$, com $c = f(a)$ ou $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = c \cdot \log_a |x|,\ \forall x \in \mathbb{R}$, com $c = f(a)$.

Exemplo Resolvido 05 (ITA 2003): Mostre que toda função $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, satisfazendo $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ em todo seu domínio é par.

Resolução:

Fazendo y = x, na equação funcional, temos:

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \Rightarrow f(x \cdot x) = f(x) + f(x) \Rightarrow f\left(x^2\right) = f(x) + f(x) \therefore \boxed{f\left(x^2\right) = 2f(x)}. \quad (eq1)$$

Fazendo y = x = – x, na equação funcional, temos:

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \Rightarrow f\left[(-x) \cdot (-x)\right] = f(-x) + f(-x) \therefore \boxed{f\left(x^2\right) = 2f(-x)}. \quad (eq2)$$

De (eq1) e (eq2), temos que $f\left(x^2\right) = 2f(x) = 2f(-x) \ \therefore \ \boxed{f(x) = f(-x)}$, ou seja, f é par.

- **Equação Funcional Multiplicativa**

Uma equação funcional da forma $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$ é chamada de equação funcional multiplicativa de Cauchy. Então, uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de função multiplicativa, se ela satisfaz a equação funcional multiplicativa de Cauchy, ou seja: $f(xy) = f(x) \cdot f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Antes de irmos para as propriedades, faremos a definição da função sinal (signal), denotada por

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x > 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ -1, \text{ se } x < 0 \end{cases}.$$

Propriedades da equação funcional multiplicativa

P1. **Se f é uma função multiplicativa, então** $f(0) = 0 \text{ ou } f(0) = 1$ **e** $f(1) = 0 \text{ ou } f(1) = 1$**.**

Demonstração:

Fazendo x = y = 0, na equação funcional, temos:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \ \Rightarrow \ f(0 \cdot 0) = f(0) \cdot f(0) \ \Rightarrow \ f(0) - \left[f(0)\right]^2 = 0 \ \Rightarrow \ f(0)\left[1 - f(0)\right] = 0$$

$$\therefore \ \boxed{f(0) = 0 \text{ ou } f(0) = 1}.$$

Analogamente, fazendo x = y = 1, na equação funcional, temos:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \ \Rightarrow \ f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) \ \Rightarrow \ f(1) - \left[f(1)\right]^2 = 0 \ \Rightarrow \ f(1)\left[1 - f(1)\right] = 0$$

$$\therefore \ \boxed{f(1) = 0 \text{ ou } f(1) = 1}.$$

P2. **Se f é uma função multiplicativa, então** $f(x) = 0 \text{ ou } f(x) = 1$**.**

Demonstração:

Suponha que exista um $y \neq 0$, tal que $f(y) = 0 \text{ e } x \in \mathbb{R}$. Daí, temos:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) \ \Rightarrow \ f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) \cdot f(y) \ \Rightarrow \ f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) \cdot 0 \ \therefore \ \boxed{f(x) = 0}.$$

Agora suponha que $f(x) \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Então, para $y = 0$:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \ \Rightarrow \ f(x \cdot 0) = f(x) \cdot f(0) \ \Rightarrow \ f(0) = f(x) \cdot f(0) \ \therefore \ \boxed{f(x) = 1}.$$

P3. **Se f é uma equação multiplicativa, então** $f(x) = c^{\log_a x},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$**, onde** $c = f(a)$**, é uma solução da equação.**

Demonstração:

Fazendo $x = a^u \Rightarrow u = \log_a x\ (*)$ e $y = a^v$, onde a é uma base qualquer, na equação funcional, temos:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \Rightarrow f\left(a^u \cdot a^v\right) = f\left(a^u\right) \cdot f\left(a^v\right) \therefore \boxed{f\left(a^{u+v}\right) = f\left(a^u\right) \cdot f\left(a^v\right)}.$$

Note que $f(x) > 0$, pois: $f\left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}\right) = f\left(\sqrt{x}\right) \cdot f\left(\sqrt{x}\right) \Rightarrow f(x) = \left[f\left(\sqrt{x}\right)\right]^2 > 0$ e $f(x) \neq 0$. Então podemos aplicar logaritmo nos dois membros:

$$f\left(a^{u+v}\right) = f\left(a^u\right) \cdot f\left(a^v\right) \Rightarrow \ell n\left[f\left(a^u \cdot a^v\right)\right] = \ell n\left[f\left(a^u\right)\right] \cdot \ell n\left[f\left(a^v\right)\right]$$

$$\therefore \boxed{\ell n\left[f\left(a^{u+v}\right)\right] = \ell n\left[f\left(a^u\right)\right] \cdot \ell n\left[f\left(a^v\right)\right]}. \quad (eq1)$$

Fazendo $g(u) = \ell n\left[f\left(a^u\right)\right]\ (**)$, em (eq1), temos:

$$g(u+v) = f(u) + f(v) \therefore \boxed{g(u) = g(1) \cdot u}. \quad (eq2)$$

Daí:

$$g(u) = \ell n\left[f\left(a^u\right)\right] \Rightarrow g(1) = \ell n\left[f(a)\right] \therefore \boxed{f(a) = e^{g(1)}}.$$

$$(**) = (eq2) \Rightarrow g(u) = \ell n\left[f\left(a^u\right)\right] = g(1) \cdot u \Rightarrow f\left(a^u\right) = e^{g(1) \cdot u} \overset{(*)}{\Rightarrow} f(x) = \left(e^{g(1)}\right)^u$$

$$\Rightarrow f(x) = \left[f(a)\right]^{\log_a x} \therefore \boxed{f(x) = c^{\log_a x}}.$$

Com $c = f(a)$ e a uma base qualquer.

P4. **Se f é uma função multiplicativa, então** $f(-1) = \pm 1$**.**

Demonstração:

Fazendo x = y = – 1, e tomando $f(1) = 1$ na equação funcional, temos:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \Rightarrow f\left[(-1) \cdot (-1)\right] = f(-1) \cdot f(-1) \Rightarrow \left[f(-1)\right]^2 = f(1) \Rightarrow \left[f(-1)\right]^2 = 1$$

$$\therefore \boxed{f(-1) = \pm 1}.$$

P5. **Se f é uma função multiplicativa, então** $f(-x) = \pm f(x)$**.**

Demonstração:

Do resultado anterior e fazendo y = – 1, na equação funcional, temos:

$$f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y) \;\Rightarrow\; f\left[x\cdot(-1)\right] = f(x)\cdot f(-1) \;\Rightarrow\; f(-x) = f(-1)\cdot f(x) \;\therefore\; \boxed{f(-x) = \pm f(x)}.$$

P6. **Se f é uma função multiplicativa, tal que** $f(-1) = 1$ **e** $f(0) = 0$**, então a função é par e** $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} c^{\log_a|x|}, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}.$$

Demonstração:

Se $f(-1) = 1$ e $f(0) = 0$, temos:

$$f(-x) = f(x) \text{ e } f(x) = \begin{cases} c^{\log_a|x|}, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases} \text{ ou } f(x) = \begin{cases} c^{\log_a|x|}\cdot\left|\operatorname{sgn}(x)\right|, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}.$$

Com $c = f(a)$ e a uma base qualquer.

P7. **Se f é uma função multiplicativa, tal que** $f(-1) = -1$ **e** $f(0) = 0$**, então a função é ímpar e**

$$f(x) = c^{\log_a|x|}\cdot\operatorname{sgn}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração:

Se $f(-1) = -1$ e $f(0) = 0$, temos:

$$f(-x) = -f(x) \text{ e } f(x) = \begin{cases} c^{\log_a|x|}, \text{ se } x > 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ -c^{\log_a|x|}, \text{ se } x < 0 \end{cases} \text{ ou } f(x) = c^{\log_a|x|}\cdot\operatorname{sgn}(x)\cdot$$

Com $c = f(a)$ e a uma base qualquer.

❖ **Conclusão 01:** As soluções da equação funcional multiplicativa de Cauchy são:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ 1, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ c^{\log_a|x|}\cdot\left|\operatorname{sgn}(x)\right|, \ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ e } f(-x) = f(x) \\ f(x) = c^{\log_a|x|}\cdot\operatorname{sgn}(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Com $c = f(a)$ e a uma base qualquer.

Podemos escrever a função multiplicativa de outra forma, veja!

P8. **Se f é uma equação multiplicativa, então** $f(x) = x^c,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$**, onde** $c = \log_a f(a)$**, é uma solução da equação.**

Demonstração:

Fazendo $x = a^u \Rightarrow u = \log_a x\ (*)$ e $y = a^v$, onde a é uma base qualquer, na equação funcional, temos:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \Rightarrow f\left(a^u \cdot a^v\right) = f\left(a^u\right) \cdot f\left(a^v\right) \therefore \boxed{f\left(a^{u+v}\right) = f\left(a^u\right) \cdot f\left(a^v\right)}.$$

Note que $f(x) > 0$, pois: $f\left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}\right) = f\left(\sqrt{x}\right) \cdot f\left(\sqrt{x}\right) \Rightarrow f(x) = \left[f\left(\sqrt{x}\right)\right]^2 > 0$ e $f(x) \neq 0$. Então podemos aplicar logaritmo de base a nos dois membros:

$$f\left(a^{u+v}\right) = f\left(a^u\right) \cdot f\left(a^v\right) \Rightarrow \log_a\left[f\left(a^u \cdot a^v\right)\right] = \log_a\left[f\left(a^u\right)\right] \cdot \log_a\left[f\left(a^v\right)\right]$$

$$\therefore \boxed{\log_a\left[f\left(a^{u+v}\right)\right] = \log_a\left[f\left(a^u\right)\right] \cdot \log_a\left[f\left(a^v\right)\right]}. \quad (eq1)$$

Fazendo $g(u) = \log_a\left[f\left(a^u\right)\right]\ (**)$, em (eq1), temos:

$$g(u+v) = f(u) + f(v) \therefore \boxed{g(u) = g(1) \cdot u}. \quad (eq2)$$

Daí:

$g(u) = \log_a\left[f\left(a^u\right)\right] \therefore \boxed{g(1) = \log_a\left[f(a)\right]}$.

$(**) = (eq2) \Rightarrow g(u) = \log_a\left[f\left(a^u\right)\right] = g(1) \cdot u \Rightarrow f\left(a^u\right) = a^{g(1) \cdot u} \Rightarrow f\left(a^u\right) = \left(a^u\right)^{g(1)}$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} f(x) = (x)^{\log_a f(a)} \therefore \boxed{f(x) = x^c}$.

Com $c = \log_a f(a)$ e a uma base qualquer.

P9. **Se f é uma função multiplicativa, tal que** $f(-1) = 1$ **e** $f(0) = 0$**, então a função é par e** $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} |x|^c, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}.$$

Demonstração:

Se $f(-1) = 1$ e $f(0) = 0$, temos:

$$f(-x) = f(x) \text{ e } f(x) = \begin{cases} |x|^c, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases} \text{ ou } f(x) = \begin{cases} |x|^c \cdot |\text{sgn}(x)|, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}.$$

Com $c = \log_a f(a)$ e a uma base qualquer.

P10. **Se f é uma função multiplicativa, tal que $f(-1)=-1$ e $f(0)=0$, então a função é ímpar e**

$$f(x)=|x|^{c}\cdot \operatorname{sgn}(x),\ \forall x\in \mathbb{R}.$$

Demonstração:

Se $f(-1)=-1$ e $f(0)=0$, temos:

$$f(-x)=-f(x) \text{ e } f(x)=\begin{cases} |x|^{c}, \text{ se } x>0 \\ 0, \text{ se } x=0 \\ -|x|^{c}, \text{ se } x<0 \end{cases} \text{ ou } f(x)=|x|^{c}\cdot \operatorname{sgn}(x)\cdot$$

Com $c=\log_a f(a)$ e a uma base qualquer.

❖ **Conclusão 02:** As soluções da equação funcional multiplicativa de Cauchy são:

$$f(x)=\begin{cases} 0,\ \forall x\in \mathbb{R} \\ 1,\ \forall x\in \mathbb{R} \\ |x|^{c}\cdot |\operatorname{sgn}(x)|,\ \forall x\in \mathbb{R}-\{0\} \text{ e } f(-x)=f(x) \\ f(x)=|x|^{c}\cdot \operatorname{sgn}(x),\ \forall x\in \mathbb{R} \text{ e } f(-x)=-f(x) \end{cases}$$

Com $c=\log_a f(a)$ e a uma base qualquer.

CAPÍTULO 5

FEIRA ESCOLAR DE MATEMÁTICA APLICADA – FEMA UM ESTUDO DE CASO NA ESCOLA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL MONSENHOR EXPEDITO DA SILVEIRA DE SOUSA

Johnantan Pereira Gonsalves[5]

Maria Juliane Passos[6]

RESUMO

O presente artigo consiste em fomentar nos educandos o gosto pela disciplina de Matemática, através da montagem de uma Feira de Matemática anual na escola, bem como realizar uma análise sobre quais perspectivas alunos e professores motivaram-se com esses tipos de eventos e como essa motivação influenciou de maneira direta ou indireta no processo de ensino-aprendizagem de matemática nas feiras que aconteceram ao longo dos anos de 2016 a 2019. Ademais, a presente pesquisa é parte integrante de um projeto desenvolvido na Escola Estadual de Educação Profissional Monsenhor Expedito da Silveira de Sousa – EEEP MESS, no ano de 2019, e tem como tema IV Feira Escolar de Matemática Aplicada (FEMA).

Palavras-Chave: Feira de Matemática; Motivação; Ensino e Aprendizagem.

5 Graduado em Matemática pelo Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará, mestrando em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Ceará – PROFMAT-UFC, professor de Matemática da EEEP Monsenhor Expedito da Silveira de Sousa (Camocim) e formador regional do Programa de Formação de professores para o fortalecimento da aprendizagem em Matemática – Foco na Aprendizagem (CREDE 04).

6 Doutora em Biotecnologia pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Professora de Biologia da Escola Estadual de Educação Profissional Monsenhor Expedito da Silveira de Sousa (Camocim).

INTRODUÇÃO

O estudo teórico de muitos conteúdos ensinados nos níveis básico da vida escolar dos educandos é de suma importância para que eles possam desenvolver suas habilidades e competências adequadas para sua carreira escolar. Contudo, tão prazeroso quanto saber a teoria sobre uma disciplina, pesquisar e estudar muito é importante para entender e assimilar os conteúdos, é demonstrar na prática o funcionamento de tal aprendizado, ou seja, quando o discente passa a "experimentar" essa teoria, fica mais fácil para realmente aprender uma matéria escolar.

Validando as palavras de Boruchovitch e Bzuneck "os professores de todos os níveis escolares queixam-se de alunos desmotivados" (2001, p. 14), apresentando por diversas vezes uma falta de vontade na busca de novos conhecimentos, sobretudo na disciplina de Matemática, pois muitos a tem como uma disciplina tenebrosa, porém ressalta que muitos alunos motivam-se quando são propostas atividades práticas de diferentes contextos.

Por outro lado, se para dar motivação aos educandos se faz necessário ressignificar o trabalho docente, uma Feira de Matemática torna-se um instrumento de fundamental importância para que os alunos possam mostrar esse novo significado a diversos conteúdos e temas.

Boruchovitch e Bzuneck nos trazem a origem etimológica da palavra "motivação", dizendo que "vem do verbo latino *movere*, cujo tempo supino *motum* e o substantivo *motivum*, do latim tardio, deram origem ao nosso termo semanticamente apropriado, que é motivo" (2001, p.9). Afirmando ainda, na mesma página, que "a motivação, ou o motivo, é aquilo que move uma pessoa ou que a põe em ação ou a faz mudar de curso". Então o motivo pelo qual o aluno escolhe determinado tema para estudar pode levá-lo a interessar-se por este assunto, logo, deve motivá-lo para aprender matemática.

Seguindo essa mesma linha de raciocínio e com os objetivos de despertar o interesse pelo ensino e pela aprendizagem da Matemática e proporcionar aos discentes e docentes, oportunidade de socializar resultados de atividades/projetos desenvolvidos em sala da aula, atendimento educacional especial ou extraclasse, deu-se inicio no ano de 2019 a IV Feira Escolar de Matemática Aplicada (FEMA) na Escola Estadual de Educação Profissional Monsenhor Expedito da Silveira de Sousa, cujo objetivo principal é a socialização das participações ativas, práticas e conceituais dos estudantes da 1ª e 2ª séries do Ensino Médio, desta Instituição Escolar, sob a orientação e apoio de seus professores e respectivos orientadores.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Comumente, nota-se que as Feiras de Ciências são descritas como as atuais metodologias ativas, que remete aos estudantes alternativas de se expressarem cientificamente mostrando ao público suas pesquisas e projetos desenvolvidos. Com o advento das tecnologias, os instrumentos de pesquisas tornam-se mais acessíveis às crianças e adolescentes, onde estes fomentam suas curiosidades, incentivando e motivando outros indivíduos, através da iniciação científica.

De acordo com Lima (2008), as Feiras de Ciências compreendem instrumentos que despertam a curiosidade e o interesse dos alunos, permitindo troca e amplificação de aprendizagem. Afirma que as Feiras são fundamentais como mobilizadoras de produção científica por parte do discente, uma vez que a expectativa em expor um trabalho de sua autoria, promove nos alunos um compromisso com a qualidade do conhecimento trabalhado.

É de suma importância que as Escolas adotem dentro de seu projeto político pedagógico a inserção de eventos, como exposições artísticas culturais e feiras de ciências, uma vez que bem executadas, passam a ter um papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem de seus discentes, pois fomenta a curiosidade e a motivação na descoberta do novo, onde passam a contribuir com seu aprendizado de maneira lúdica, mostrando sua inquietude, seu senso crítico de argumentação e demonstram uma maior participação nesse processo de aprendizagem. Por gerar inquietação, a curiosidade é a “chave-mestra” no caminho investigativo.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, no seu artigo 36, inciso II, propõe a adoção de metodologias de ensino e avaliação que estimulem a iniciativa e autonomia intelectual dos estudantes (PEREIRA, 2003). Porém, mesmo contribuindo para o futuro acadêmico do estudante, muito docentes ainda apresentam resistências no que concerne a execução de eventos desse tipo, sobretudo aos que fazem parte da rede pública de ensino, por ainda demonstrarem metodologias tradicionalistas, por se acomodarem apenas em sala de aula, ou por fazerem parte de quadro docente de mais de uma Instituição de Ensino. Contundo, visando reduzir significativamente essa resistência, muitos gestores estão conseguindo, por meio de formações e incentivo aos docentes, o apoio necessário para ressignificar o número de participantes nesses tipos de eventos.

Conforme Mancuso (2000), as Feiras de Ciências como produções científicas escolares podem ser constituídas por trabalhos de montagem, trabalhos informativos e trabalhos de investigação. A construção de aparatos tecnológicos visando à especificação de determinado projeto cientifico constitui um trabalho de montagem. Dentro dos trabalhos informativos, os discentes podem realizar alerta ou denúncias mediante demonstração de conhecimento acadêmico. Ademais,

no que se refere aos trabalhos de cunho investigativos, os alunos constroem conhecimentos mediante elaboração e execução de projetos científicos.

Enfim, assim como qualquer outra atividade escola, para a execução de uma Feira Escolar é digna de um bom planejamento na sua natureza, pois demanda diversos fatores que precisam ser programados com antecedência.

METODOLOGIA

A Feira Escolar de Matemática Aplicada (FEMA) é um evento anual que, desde o ano de 2016, visa realizar uma exposição de projetos científicos envolvendo a disciplina de Matemática, de autoria dos próprios alunos. Como objetivos tal feira busca despertar o interesse pelo ensino e pela aprendizagem da Matemática, proporcionando aos discentes e docentes, oportunidade de socializar resultados de atividades/projetos desenvolvidos em sala da aula, atendimento educacional especial ou extraclasse, onde o aluno age como pesquisador-expositor e torna-se protagonista de sua aprendizagem, mostrando à comunidade escolar sua pesquisa.

O pontapé da inicial das montagens do projeto, no ano de 2019, da IV Feira Escolar de Matemática Aplicada (FEMA) na EEEPMESS, foi lançado a seguinte temática "*Os jogos matemáticos e materiais manipuláveis na construção dos conceitos elementares no ensino de matemática*". A Feira foi dividida em duas fases: produção cientifica e exposição dos projetos. A produção fora realizada com as oito turmas das 1ª e 2ª séries do Ensino Médio, dos cursos técnicos integrados de Administração, Contabilidade, Eletromecânica, Enfermagem e Finanças, um projeto por turma, sendo eles: ADMat Play, Geometrix, Recalcule, Pirâmide, Financeiramente, AcessMath, Vêduca II e Play Math.

Durante o período de produção científica, de fevereiro a maio de 2019, os debates em sala de aula foram importantes para a escolha do que seria desenvolvido pela turma. Após escolha e posterior pesquisa, os discentes elaboraram um resumo simples do trabalho que continha título, expositores, professor orientador, contextualização da problemática, objetivos geral e específicos, metodologia, relevância e impactos do projeto e referências, apresentando este a um professor orientador, que guiou cientificamente o aluno e o ajudou na confecção do trabalho, e um caderno de bordo/campo, onde registraram todos os passos do desenvolvimento de seu projeto/pesquisa.

A exposição dos trabalhos, culminância da feira aconteceu no dia 06 de maio de 2019, em alusão ao dia Internacional da Matemática, onde os alunos apresentaram as pesquisas em forma de pôster e oral para toda a comunidade escolar. Logo, os dois melhores projetos de cada série seriam

beneficiados com uma credencial para o Ceará Cientifico Etapa Escolar, ou seja, a Feira Escolar de Ciências que ocorre anualmente na Instituição de Ensino proponente da FEMA. Ademais, durante todo o desenvolvimento da feira foi verificada a participação dos alunos bem como dos professores na elaboração, execução e avaliação do evento, assim como o comportamento dos mesmos na FEMA.

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Com a execução e aplicação da FEMA, foi possível afirmar que a Feira de Matemática segue propondo descobertas aos educandos, além de proporciona um estímulo maior pelo aprender, visto que o interesse pela pesquisa aumentou consideravelmente a busca pelo conhecimento, não apenas porque valeria no final um prêmio ou uma nota.

Foi observada ainda a grande participação dos alunos de 1ª e 2ª séries, o que foi bastante produtivo para o desenvolvimento da feira, sempre promovendo debates e discussões relevantes para o bom andamento dos projetos. Com isso, mostra-se necessário o trabalho realizado dentro de sala de aluno por todos os professores e alunos, mostrando valores, argumentando os benefícios do trabalho em equipe, o respeito pela opinião dos colegas e a responsabilidade frente a grandes eventos.

Contudo, a partir da análise positiva dos resultados obtidos pela apresentação dos projetos, observa-se a importância desse tipo de ação no ensino e aprendizagem, além de ser considerada como uma atividade enriquecedora para o desenvolvimento da pesquisa científica do educando e do seu saber matemático e científico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Corroborando com o discurso do Deputado Bruno Covas[7] (2010), pelo ato solene no dia da matemática em homenagem ao Kumon, logo ao nascer o ser humano carrega consigo uma herança genética, que determina suas características físicas e por vezes também emocionais. Além disso, possui potencial e inteligência inatos que serão desenvolvidos e trabalhados ao longo de sua vida. Assim, o indivíduo explora, descobre, vai a fundo para entender suas origens, sua realidade, seu futuro e também da própria sociedade em que vive. Pois bem, é por meio da educação que ele presencia e cria instrumentos para compreender, construir e modificar sua nova história. Torna-se

7 Advogado, economista e político brasileiro. Filiado ao Partido da Social Democracia Brasileira, é o atual prefeito da cidade de São Paulo.

efetivamente um protagonista de sua própria vida, um agente transformador, deixando de ser apenas um espectador passivo aos acontecimentos que até então o acompanhavam. E a Matemática tem um papel imprescindível no desenvolvimento do ser humano. Com efeito, em todas as áreas do conhecimento, a todo tempo e lugar, a matemática está presente. Conhecida como a ciência das ciências, a matemática possibilita ao ser humano entender logicamente o porquê de tudo o que circunda a nossa existência.

Diante disso, a Feira Escolar de Matemática Aplicada (FEMA) despertou nos alunos uma motivação intrínseca, desenvolvendo junto à comunidade escolar um evento atrativo para todos os que se interessam pela busca de conhecimento, assim como teceu alguns elogios e recompensa a todos os envolvidos direta e indiretamente no desenvolvimento ou apresentação dos projetos.

REFERÊNCIAS

ABREU, Maria Auxiliadora M. de. **Compromisso Político Pedagógico do Educador Matemático**. Revista da SBEM/SC, Blumenau, v.1, n.1, p.19 – 20 1996.

BORUCHOVITCH, Evely; BZUNECK, José Aloyseo. **A Motivação do Aluno**. Petrópolis: Vozes, 2001. 183p.

FREIRE, **Pedagogia da autonomia: Saberes necessários a prática educativa**. 12ªed. São Paulo: Paz e Terra, 1999.

LIMA, M. E. C. Feiras de ciências: o prazer de produzir e comunicar. In: PAVÃO, A. C.; FREITAS, D. **Quanta ciência há no ensino de ciências**. São Carlos: EduFSCar, 2008.

MANCUSO, R. Feiras de ciências: produção estudantil, avaliação, consequências. **Contexto Educativo**. Revista digital de Educación y Nuevas Tecnologias, n. 6, abr. 2000. Disponível em: < http://contexto-educativo.com.ar/2000/4/nota-7.htm> Acesso em: 20 nov. 2019.

PEREIRA A. R. S., **Competências, conhecimentos e valores na concepção curricular no ensino médio**. In: Matos C., Ciência e Arte: imaginário e descobertas. São Paula: Terceira Margem, 2003.

CAPÍTULO 6

UM ESTUDO SOBRE A FUNÇÃO W DE LAMBERT!

Miller Dias de Araújo

Vamos iniciar o capítulo com duas perguntas:

1) Qual o valor de x, sabendo que $x^x = 2$?

2) Quantas soluções tem a equação $x^2 = 2^x$?

Para resolver esse tipo de questões, considere a equação: $y = x \cdot e^x$. Note que essa equação é **transcendental**, ou seja, não há uma maneira simples de isolar a variável x. Para tal tarefa, vamos encontrar uma função, tal que $f(x) = x \cdot e^x$. Daí, teremos como função inversa $ye^y = x = f^{-1}(x)$. Essa função inversa é o que chamamos de função W de Lambert.

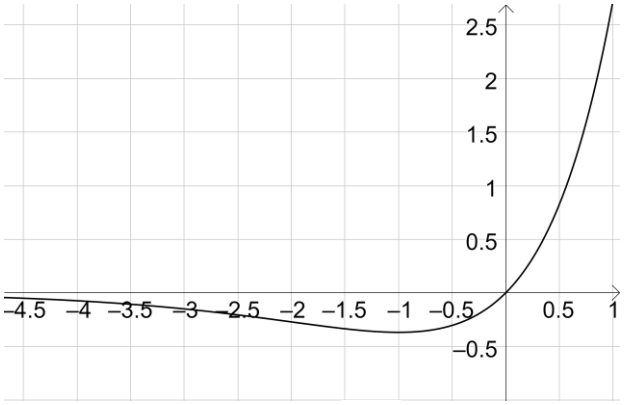


Gráfico de $f(x)$

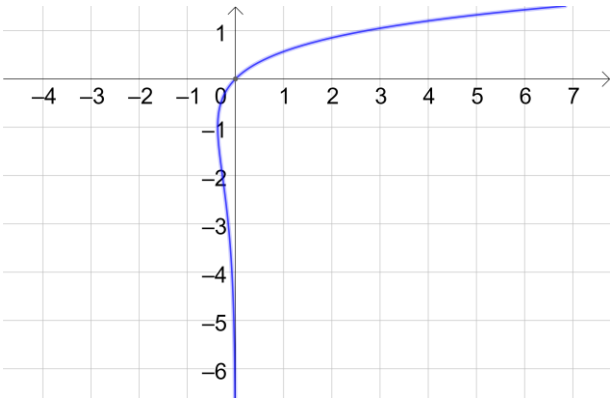
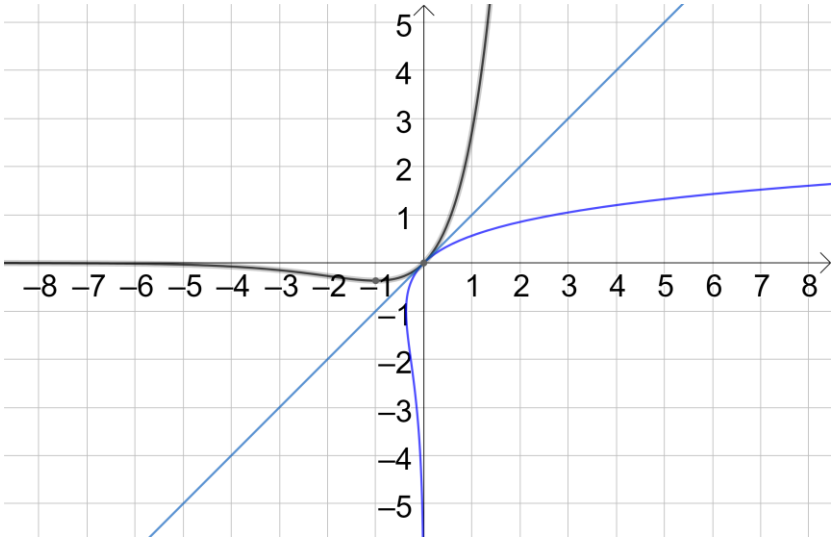


Gráfico de $W(x)$



Gráficos de $f(x)$ e $W(x)$

Vamos nos atentar ao domínio de $W(x) = f^{-1}(x)$.

Note que f tem um mínimo local, para achar esse mínimo, recorreremos à derivada:

$$f(x) = x \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = 0 \Rightarrow x \cdot e^x = -e^x \Rightarrow x = -\frac{e^x}{e^x} \Rightarrow \boxed{x = -1}.$$

Assim, o valor mínimo de f é: $f(x) = x \cdot e^x \Rightarrow f(-1) = (-1) \cdot e^{-1} \therefore \boxed{f(-1) = -\frac{1}{e}}$. Daí, o domínio de W é $\left[-\frac{1}{e}, \infty\right)$.

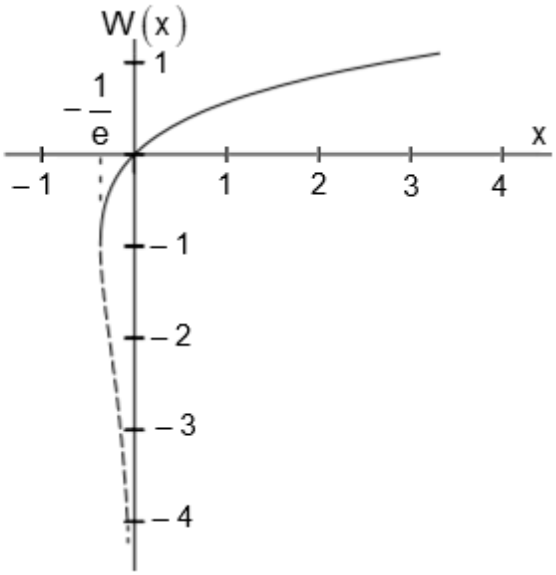


Gráfico de $W(x)$

Propriedades da função w de lambert

A seguir, vamos mostrar duas propriedades importantes da função W de Lambert:

P1) Se $f(x) = x \cdot e^x$, então $w\left(x \cdot e^x\right) = x$.

Demonstração:

$$w(x) = f^{-1}(x) \text{ e } f(x) = x \cdot e^x;$$
$$w\left[f(x)\right] = w\left(x \cdot e^x\right) \Rightarrow f^{-1}\left[f(x)\right] = w\left(x \cdot e^x\right) \therefore \boxed{x = w\left(x \cdot e^x\right)}.$$

P2) Se $f(x) = x \cdot e^x$, então $w\left[x \cdot \ell n(x)\right] = \ell n(x)$.

Demonstração:

$$y = e^x \Rightarrow x = \ell n(y);$$
$$w\left(x \cdot e^x\right) = x \Rightarrow w\left[\ell n(y) \cdot y\right] = \ell n(y) \therefore \boxed{w\left[x \cdot \ell n(x)\right] = \ell n(x)}.$$

Agora, vamos aplicar essas propriedades nas perguntas feitas no início? Vamos!

1) Qual o valor de x, sabendo que $x^x = 2$?

Resolução:

Note que: $x = x \Rightarrow \ell n(x) = \ell n(x) \therefore \boxed{x = e^{\ell n x}}$ $(*)$. Daí, temos:

$$x^x = 2 \Rightarrow \ell n\left(x^x\right) = \ell n(2) \Rightarrow x \cdot \ell n(x) = \ell n(2) \overset{(*)}{\Rightarrow} e^{\ell n x} \cdot \ell n(x) = \ell n(2) \Rightarrow w\left[e^{\ell n x} \cdot \ell n(x)\right] = w\left[\ell n(2)\right]$$
$$\overset{P_1}{\Rightarrow} \ell n(x) = w\left[\ell n(2)\right] \therefore \boxed{x = e^{w\left[\ell n(2)\right]}}.$$

2) Quantas soluções tem a equação $x^2 = 2^x$?

Resolução:

Note que: $x = x \Rightarrow \ell n(x) = \ell n(x) \therefore \boxed{x = e^{\ell n x}}$. Daí, temos:

$$2 = e^{\ell n(2)} \Rightarrow x^2 = 2^x \Rightarrow x^2 = e^{x \cdot \ell n(2)} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{e^{x \cdot \ell n(2)}} \Rightarrow x = e^{\frac{x \cdot \ell n(2)}{2}} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{e^{\frac{x \cdot \ell n(2)}{2}}}$$
$$\Rightarrow 1 = x \cdot e^{-\frac{x \cdot \ell n(2)}{2}} \Rightarrow -\frac{\ell n(2)}{2} = -\frac{x \cdot \ell n(2)}{2} \cdot e^{-\frac{x \cdot \ell n(2)}{2}} \Rightarrow w\left[-\frac{x \cdot \ell n(2)}{2} \cdot e^{-\frac{x \cdot \ell n(2)}{2}}\right] = w\left[-\frac{\ell n(2)}{2}\right]$$
$$\overset{P_1}{\Rightarrow} -\frac{x \cdot \ell n(2)}{2} = w\left[-\frac{\ell n(2)}{2}\right] \therefore \boxed{x = -\frac{2 \cdot w\left[-\frac{\ell n(2)}{2}\right]}{\ell n(2)}}.$$

Com o auxílio de uma calculadora, encontramos a raiz negativa $x \cong -0{,}76$. Fazendo algumas manipulações, vamos encontrar as outras raízes:

$$x = -\frac{2\cdot w\left[-\frac{\ell n(2)}{2}\right]}{\ell n(2)} \Rightarrow x = -\frac{2\cdot w\left[\frac{1}{2}\cdot \ell n\left(2^{-1}\right)\right]}{\ln(2)} \Rightarrow x = -\frac{2\cdot w\left[2^{-1}\cdot \ell n\left(2^{-1}\right)\right]}{\ell n(2)} \overset{P_2}{\Rightarrow} x = -\frac{2\cdot \ell n\left(2^{-1}\right)}{\ell n(2)}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{2\cdot(-1)\cdot \ell n(2)}{\ell n(2)} \therefore \boxed{x = 2}.$$

Note também que:

$$x = -\frac{2\cdot w\left[-\frac{\ell n(2)}{2}\right]}{\ell n(2)} \Rightarrow x = -\frac{2\cdot w\left[-\frac{2}{2}\cdot\frac{\ell n(2)}{2}\right]}{\frac{2}{2}\cdot \ell n(2)} \Rightarrow x = -\frac{2\cdot 2\cdot w\left[\frac{1}{4}\cdot \ell n\left(2^{-2}\right)\right]}{\ell n\left(2^2\right)}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{4\cdot w\left[4^{-1}\cdot \ell n\left(4^{-1}\right)\right]}{\ell n(4)} \overset{P_2}{\Rightarrow} x = -\frac{4\cdot \ell n\left(4^{-1}\right)}{\ell n(4)} \Rightarrow x = -\frac{4\cdot(-1)\cdot \ell n(4)}{\ell n(4)} \therefore \boxed{x = 4}.$$

Assim, temos 3 soluções.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Questão 01

Qual o valor de x, sabendo que $x^x = 16$?

Resolução:

Note que:

$$x^x = 16 \Rightarrow \ell n\left(x^x\right) = \ell n(16) \Rightarrow x\cdot \ell n(x) = \ell n(16) \overset{(*)}{\Rightarrow} e^{\ell n x}\cdot \ell n(x) = \ell n(16)$$

$$\Rightarrow w\left[e^{\ell n x}\cdot \ell n(x)\right] = w\left[\ell n(16)\right] \overset{P_1}{\Rightarrow} \ell n(x) = w\left[\ell n(16)\right] \therefore \boxed{x = e^{w\left[\ell n(16)\right]}}.$$

Questão 02

Qual o valor de x, sabendo que $x + e^x = 2$?

Resolução:

Note que:

$$x + e^x = 2 \Rightarrow e^x = 2 - x \Rightarrow \frac{1}{e^x} = \frac{1}{2-x} \Rightarrow (2-x)\cdot e^{-x} = 1 \Rightarrow (2-x)\cdot e^{-x}\cdot e^2 = 1\cdot e^2$$

$$\Rightarrow (2-x)\cdot e^{2-x} = e^2 \Rightarrow w\left[(2-x)\cdot e^{2-x}\right] = w\left(e^2\right) \overset{P_1}{\Rightarrow} 2 - x = w\left(e^2\right) \therefore \boxed{x = 2 - w\left(e^2\right)}.$$

Questão 03

Qual o valor de x, sabendo que $2x + 3e^x = 7$?

Resolução:

Note que:

$$2x + 3e^x = 7 \Rightarrow 3e^x = 7 - 2x \Rightarrow e^x = \frac{7-2x}{3} \Rightarrow \frac{1}{e^x} = \frac{3}{7-2x} \Rightarrow (7-2x)\cdot e^{-x} = 3$$

$$\Rightarrow (7-2x)\cdot e^{-x}\cdot e^{7/2} = 3\cdot e^{7/2} \Rightarrow \left(\frac{7}{2}-x\right)\cdot e^{\frac{7}{2}-x} = \frac{3}{2}\cdot e^{\frac{7}{2}} \Rightarrow w\left[\left(\frac{7}{2}-x\right)\cdot e^{\frac{7}{2}-x}\right] = w\left(\frac{3}{2}\cdot e^{\frac{7}{2}}\right)$$

$$\overset{P_1}{\Rightarrow} \frac{7}{2} - x = w\left(\frac{3}{2}\cdot e^{\frac{7}{2}}\right) \therefore \boxed{x = \frac{7}{2} - w\left(\frac{3}{2}\cdot e^{\frac{7}{2}}\right)}.$$

Questão 04

Qual o valor positivo de x, sabendo que $x^2e^x = 2$?

Resolução:

Note que:

$$x^2e^x = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2e^x} = \sqrt{2} \Rightarrow x\cdot e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)\cdot e^{\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow w\left[\left(\frac{x}{2}\right)\cdot e^{\left(\frac{x}{2}\right)}\right] = w\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\overset{P_1}{\Rightarrow} \frac{x}{2} = w\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \therefore \boxed{x = 2\cdot w\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.$$

Questão 05

Determine a solução geral de $x^y = y^x$ e mostre que x = y é também solução.

Resolução:

Note que:

$$x^y = y^x \Rightarrow \left(x^y\right)^{\frac{1}{x}} = \left(y^x\right)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow x^{\frac{y}{x}} = y \Rightarrow \left(e^{\ell n(x)}\right)^{\frac{y}{x}} = y \Rightarrow e^{\left(\frac{\ell n(x)}{x}\right)\cdot y} = y$$

$$\Rightarrow e^{-\left(\frac{\ell n(x)}{x}\right)\cdot y} = y^{-1} \Rightarrow y\cdot e^{-\left(\frac{\ell n(x)}{x}\right)\cdot y} = 1 \Rightarrow -\left(\frac{\ell n(x)}{x}\right)\cdot y\cdot e^{-\left(\frac{\ell n(x)}{x}\right)\cdot y} = -\left(\frac{\ell n(x)}{x}\right)$$

$$\Rightarrow w\left[-\left(\frac{\ell n(x)}{x}\right)\cdot y\cdot e^{-\left(\frac{\ell n(x)}{x}\right)\cdot y}\right] = w\left[-\left(\frac{\ell n(x)}{x}\right)\right] \overset{P_1}{\Rightarrow} -\left(\frac{\ell n(x)}{x}\right)\cdot y = w\left[-\left(\frac{\ell n(x)}{x}\right)\right]$$

$$\therefore \boxed{y = -\frac{x\cdot w\left[-\left(\frac{\ell n(x)}{x}\right)\right]}{\ell n(x)}}.$$

Fazendo algumas manipulações, temos:

$$y = -\frac{x\cdot w\left[-\left(\frac{\ell n(x)}{x}\right)\right]}{\ell n(x)} \Rightarrow y = -\frac{x\cdot w\left[\frac{1}{x}\cdot \ell n\left(x^{-1}\right)\right]}{\ell n(x)} \Rightarrow y = -\frac{x\cdot w\left[x^{-1}\cdot \ell n\left(x^{-1}\right)\right]}{\ell n(x)}$$

$$\overset{P_2}{\Rightarrow} y = -\frac{x\cdot \ell n\left(x^{-1}\right)}{\ell n(x)} \Rightarrow y = -\frac{x\cdot(-1)\cdot \ell n(x)}{\ell n(x)} \therefore \boxed{y = x}.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Questão 01

Qual o valor de x, sabendo que $x^{3x} = 64$?

Questão 02

Qual o valor de x, sabendo que $x^x = \sqrt[7]{81}$?

Questão 03

Qual o valor de x, sabendo que $x^x = 256$?

Questão 04

Qual o valor de x, sabendo que $3x + 2e^x = \frac{5}{4}$?

Questão 05

Qual o valor positivo de x, sabendo que $x^3 e^{4x} = 5$?

Questão 06

Quantas soluções tem a equação $x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{x}$?

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Questão 01

Resolução:

Note que:

$$x^{3x} = 64 \Rightarrow \ell n\left(x^{3x}\right) = \ell n(64) \Rightarrow 3x \cdot \ell n(x) = \ell n(64) \overset{(*)}{\Rightarrow} e^{\ln x} \cdot \ell n(x) = \frac{\ell n(64)}{3}$$

$$\Rightarrow w\left[e^{\ell n x} \cdot \ell n(x)\right] = w\left[\frac{\ell n(64)}{3}\right] \overset{P_1}{\Rightarrow} \ell n(x) = w\left[\frac{\ell n(64)}{3}\right] \therefore \boxed{x = e^{w\left[\frac{\ell n(64)}{3}\right]}}.$$

Questão 02

Resolução:

Note que:

$$x^{x} = \sqrt[7]{81} \Rightarrow \ell n\left(x^{x}\right) = \ell n\left(\sqrt[7]{81}\right) \Rightarrow x \cdot \ell n(x) = \ell n\left(3^{\frac{4}{7}}\right) \overset{(*)}{\Rightarrow} e^{\ell n x} \cdot \ell n(x) = \frac{4\ell n(3)}{7}$$

$$\Rightarrow w\left[e^{\ell n x} \cdot \ell n(x)\right] = w\left[\frac{4\ell n(3)}{7}\right] \overset{P_1}{\Rightarrow} \ell n(x) = w\left[\frac{4\ell n(3)}{7}\right] \therefore \boxed{x = e^{w\left[\frac{4\ell n(3)}{7}\right]}}.$$

Questão 03

Resolução:

Note que:

$$x^{x} = 256 \Rightarrow \ell n\left(x^{x}\right) = \ell n(256) \Rightarrow x \cdot \ell n(x) = \ell n(256) \overset{(*)}{\Rightarrow} e^{\ell n x} \cdot \ell n(x) = \ell n(256)$$

$$\Rightarrow w\left[e^{\ell n x} \cdot \ell n(x)\right] = w\left[\ell n(256)\right] \overset{P_1}{\Rightarrow} \ell n(x) = w\left[\ell n(256)\right] \therefore \boxed{x = e^{w\left[\ell n(256)\right]}}.$$

Fazendo algumas manipulações, temos:

$$x = e^{w\left[\ell n(256)\right]} \Rightarrow x = e^{w\left[\ell n\left(4^4\right)\right]} \Rightarrow x = e^{w\left[4\ell n(4)\right]} \Rightarrow x = e^{w\left[e^{\ell n(4)} \cdot \ell n(4)\right]} \overset{P_2}{\Rightarrow} x = e^{\ell n(4)}$$

$$\therefore \boxed{x = 4}.$$

Questão 04

Resolução:

Note que:

$$3x+2e^{x}=\frac{5}{4}\ \Rightarrow\ 12x+8e^{x}=5\ \Rightarrow\ 8e^{x}=5-12x\ \Rightarrow\ e^{x}=\frac{5-12x}{8}\ \Rightarrow\ \frac{1}{e^{x}}=\frac{8}{5-12x}$$

$$\Rightarrow\ (5-12x)\cdot e^{-x}=8\ \Rightarrow\ (5-12x)\cdot e^{-x}\cdot e^{5/12}=8\cdot e^{5/12}\ \Rightarrow\ \left(\frac{5}{12}-x\right)\cdot e^{\frac{5}{12}-x}=\frac{8}{12}\cdot e^{\frac{5}{12}}$$

$$\Rightarrow\ \left(\frac{5}{12}-x\right)\cdot e^{\frac{5}{12}-x}=\frac{2}{3}\cdot e^{\frac{5}{12}}\ \Rightarrow\ w\left[\left(\frac{5}{12}-x\right)\cdot e^{\frac{5}{12}-x}\right]=w\left(\frac{2}{3}\cdot e^{\frac{5}{12}}\right)\overset{P_1}{\Rightarrow}\frac{5}{12}-x=w\left(\frac{2}{3}\cdot e^{\frac{5}{12}}\right)$$

$$\therefore\ \boxed{x=\frac{5}{12}-w\left(\frac{2}{3}\cdot e^{\frac{5}{12}}\right)}.$$

Questão 05

Resolução:

Note que:

$$x^{3}e^{4x}=5\ \Rightarrow\ \sqrt[3]{x^{3}e^{4x}}=\sqrt[3]{5}\ \Rightarrow\ x\cdot e^{\frac{4x}{3}}=\sqrt[3]{5}\ \Rightarrow\ \left(\frac{4x}{3}\right)\cdot e^{\left(\frac{4x}{3}\right)}=\frac{4\sqrt[3]{5}}{3}$$

$$\Rightarrow\ w\left[\left(\frac{4x}{3}\right)\cdot e^{\left(\frac{4x}{3}\right)}\right]=w\left(\frac{4\sqrt[3]{5}}{3}\right)\overset{P_1}{\Rightarrow}\frac{4x}{3}=w\left(\frac{4\sqrt[3]{5}}{3}\right)\ \therefore\ \boxed{x=\frac{3}{4}\cdot w\left(\frac{4\sqrt[3]{5}}{3}\right)}.$$

Questão 06

Resolução:

Note que:

$$x^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{x}\ \Rightarrow\ \sqrt{2}\cdot\ell n(x)=x\cdot\ell n\left(\sqrt{2}\right)\ \Rightarrow\ -\ell n(x)=-x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\ell n\left(\sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow\ \ell n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\ell n\left(\sqrt{2}\right)\ \Rightarrow\ w\left[\ell n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\right]=w\left(-\frac{\ell n\left(\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\overset{P_2}{\Rightarrow}\ell n\left(\frac{1}{x}\right)=w\left(-\frac{\ell n\left(\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}\right)\ \Rightarrow\ \ell n(x)=-w\left(-\frac{\ell n\left(\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}\right)\ \therefore\ \boxed{x=e^{-w\left(-\frac{\ell n\left(\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}\right)}}.$$

Com a ajuda de uma calculadora, encontramos $x\cong 1{,}41421$ e $x\cong 8{,}93744$ e, portanto 2 soluções.

CAPÍTULO 7

GINCANA ONLINE DE MATEMÁTICA (GOMA)

Johnantan Pereira Gonsalves

RESUMO

O presente artigo objetiva em socializar as experiências vivenciadas pelos alunos das 1ª e 2ª séries da Escola Estadual de Educação Profissional Monsenhor Expedito da Silveira de Sousa desenvolvidas através do projeto intitulado Gincana Online de Matemática (GOMA) que ocorreu no primeiro semestre de 2021, cujo objetivo principal era recuperar as aprendizagens que foram defasadas no ano de 2020 devido à proliferação do COVID-19 da disciplina de Matemática. Durante o desenvolvimento da gincana, as atividades promoveram o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem para além da sala de aula. Tal atividade é de suma importância para o desenvolvimento dessas aprendizagens, pois a mesma tem como motivar.

Palavras-chave: Gincana Online; Recuperação de Aprendizagens; Currículo Continuum; Metodologias Ativas; Ensino-aprendizagem de Matemática.

INTRODUÇÃO

A Gincana Online de Matemática – GOMA é um projeto voltado para a área da Matemática e suas tecnologias com auxilio das Ferramentas tecnológicas em educação e Aplicação das TIC, criado pelos professores de matemática da Escola Estadual de Ensino Profissional Monsenhor Expedito da Silveira Sousa (EEEPMESS) e desenvolvido pelos alunos das 1ª e 2ª séries desta Instituição de Ensino. A GOMA é uma estratégia diversificada e totalmente didática que veio com o objetivo de resgatar o *Currículo Continuum* da disciplina de Matemática favorecendo a retomada dos conhecimentos que foram defasados no ano de 2020.

A constituição de Currículo Continuum envolve entender que a ideia de priorização não significa retirada de direitos de aprendizagem. Por isso, se os alunos não tiverem a equipe técnica e os professores como parceiros nesse processo, construindo juntos, essa priorização pode ser entendida como redução curricular. Nessa perspectiva, a GOMA é de suma importância para a complementação na aprendizagem dos alunos, que precisam constantemente revisar conteúdos para avaliações internas, externas e até mesmo vestibulares, reforçando bastante o desempenho acadêmico nesse período remoto de Ensino Médio. Por consequência da pandemia, muitos alunos encontraram-se desamparados ou desmotivados para o estudo. Portanto, o projeto foi uma forma de assegurar que eles teriam um meio de estudar seguro e com acesso facilitado.

Primeiramente, foram realizadas pesquisas entre os alunos da turma para que se identificassem suas fragilidades em determinados conteúdos da matemática. Dessa maneira, cada conteúdo que não havia sido fixado anteriormente, voltaria a ser trabalhado através da criação de uma página no Instagram, onde tanto os professores quanto os alunos das respectivas turmas criadoras do projeto elaboravam temas e publicavam cards interativos, com resumos complexos, acompanhados de questões e vídeos para sanar essas dúvidas.

JUSTIFICATIVA E CONTEXTUALIZAÇÃO

A Gincana Online de Matemática (GOMA) é um projeto escolar especifico para os discentes das 1ª e 2ª series da Escola Estadual de Educação Profissional Monsenhor Expedito da Silveira de Sousa, realizada pelos professores de Matemática, com o apoio da Gestão Escolar, tendo como objetivo desenvolver e resgatar as aprendizagens dos educandos, além de recuperá-las durante o período de apoio ao ensino Híbrido/Remoto, com auxílio ao Continuum Curricular (2020/2021). Este

citado é uma das grandes apostas para diminuir as defasagens deixadas pelo ano da Covid-2019, por ofertar as habilidades necessárias para os alunos em 2021.

Falando sobre a importância das gincanas online, a motivação e a diversidade de recursos trazem aulas diferentes e enriquecedoras possibilitando facilmente a aprendizagem. Professor que interage com o aluno garante maior apreensão do conteúdo a ser ministrado. E, consequentemente há uma quebra da rotina das aulas remotas padronizadas com a leitura do livro, uso de slides, horários demarcados, onde os alunos se mantêm presos frente ao professor sendo meros expectadores, assimilando o conteúdo ministrado de forma quase tradicional. Todo dia, praticamente a mesma coisa, leitura, escrita, correção, assim, não há interesse que perdure.

De fato, todos são de acordo que a Matemática é tida como uma disciplina que é capaz de despertar ódio em muitos alunos no decorrer de sua vida acadêmica. Assim, muitos destes alunos não têm interesse em aprender e gostar da disciplina por falta de estímulo de diversos agentes escolares, inclusive de professores, que por falta de tempo hábil e às vezes por um currículo defasado, acabam realizando um ensino tradicional e cheio de macetes e fórmulas decoradas, o que acarreta em um baixo estímulo para o aluno e pouco atraente.

Sobre o olhar de que, a Escola, na atualidade requer um professor crítico, reflexivo e imbuído de consciência profissional (DEMO, 2002) e às frente às exigências necessárias para uma aprendizagem matemática eficaz, e as dificuldades encontradas no ensino da Matemática, foi proposta a realização da GOMA, com atividades voltadas para Recuperação das Aprendizagens defasadas no ano de 2020, através do usos das ferramentas tecnológicas que os discentes disponham e sobre o olha da implementação do Currículo Continuum. A gincana é um instrumento dinâmico no processo ensino/aprendizagem. Para Rosa (2012):

> A aprendizagem tanto em aulas realizadas em sala de aula, quanto em aulas diferenciadas, depende de muitos fatores, como motivação, afetividade, estímulo, criatividade, entre vários outros. Por estes motivos, aulas diferenciadas podem ser consideradas uma ótima ferramenta de ensino.

Sobre a implementação do Currículo Continuum nas escolas de Ensino Médio, Maria Helena presidente do CNE e relatora da resolução comenta sobre a proposta: “Países da Europa e alguns estados americanos, por exemplo, estão organizando o calendário escolar considerando o Currículo Continuum já que, em geral, o problema (Covid-2019) afetou todas as escolas”.

Para Adriana, o benefício trazido pelo modelo é que ela tira a ideia de que o ano educativo deve acabar junto do ano civil. “O Continuum é a possibilidade de aprofundar conhecimentos (que não foram trabalhados de forma necessária em 2020)”, diz a gestora. “Não há um rompimento de aprendizagem de um ano para o outro completa”.

Objetivo geral

Desenvolver uma Gincana Online de Matemática, habituando os alunos ao uso das novas tecnologias (Competências Digitais) como ferramentas de interação entre discentes e docentes, associando esse uso ao ensino da Matemática, priorizando o Currículo Continuum e focalizando nas recuperações de Aprendizagem que foram defasadas no ano de 2020, devido à pandemia da Covid-19.

Objetivos específicos

- Retomar e socializar os conhecimentos acerca dos conteúdos contemplados nas redes sociais, citados como de maior dificuldade pelos alunos;
- Recuperar as aprendizagens defasadas no ano de 2020, com o uso das novas tecnologias de interação, bem como as redes sociais, priorizando o Currículo Continuum;
- Desenvolver as competências e habilidades adquiridas durante todo o processo de realização da GOMA no 1° semestre de 2021;

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Novos paradigmas entram em cena como uma nova visão da mente humana, reformando a escola convencional. O educador deve criar e se desafiar a novas atividades, tornando as aulas mais dinâmicas enriquecedoras. Deste modo, é fundamental elaborar diferentes atividades durante o ano letivo como gincana escolar, para que os alunos se envolvam, fazendo parte de uma equipe e que podem fazer a diferença no grupo, desenvolvendo assim a cooperação, socialização e aprendizagem. (ANTUNES, 2001).

A utilização de novos recursos didáticos corrobora para o processo de ensino-aprendizagem dos alunos. Assim, de acordo com Souza (2007), a definição de recurso didático é todo material utilizado como auxílio no ensino-aprendizagem do conteúdo proposto para ser aplicado, pelo professor, a seus alunos.

Ainda, segundo ANTUNES (2001), utilizar jogos que despertem o interesse e reforçam os progressos expressivos dos envolvidos (discentes) é de suma importância para construção desse processo. Para Rau (2011) os jogos facilitam a aprendizagem uma vez que são capazes de relacionar

o sujeito com seu cotidiano, introduzem regras e trabalham com uma diversidade de linguagens envolvidas em suas práticas.

Portanto, corroborando com CAVALLARI; ZACHARIAS (2008), as gincanas desenvolvidas em um ambiente escolar, utilizando jogos e/ou atividades lúdicas além de visarem condições de sociabilidade entre os participam, fomentam o processo de ensino-aprendizagem dos alunos quando desenvolvidas em diversos ambientes disponíveis na escola, trazendo dessa forma resultados significativos não somente aos educandos, mas para toda a Comunidade Escolar.

METODOLOGIA

O procedimento metodológico do desenvolvimento da GOMA se deu dentre o planejamento do Plano de Ação do primeiro semestre letivo de 2021 dos professores de Matemática da EEEP MESS, como segue no cronograma de ações da 1ª e 2ª séries Enfermagem, respectivamente, haja vista que as demais turmas seguiram o mesmo cronograma de ações:

EEEP Monsenhor Expedito da Silveira de Sousa
4ª Coordenadoria Regional de Desenvolvimento da Educação
Governo do Estado do Ceará
Secretaria da Educação

PROFESSOR: Johnantan Pereira Gonsalves							
PÚBLICO-ALVO: 1º Ano Enfermagem							
ATIVIDADE	**DESDOBRAMENTO DA ATIVIDADE**	**FORMATO**	**OBJETIVOS**	**METODOLOGIA**	**PERÍODO**	**RESULTADO ESPERADO**	**AVALIAÇÃO**
B e G	*Apresentação da Gincana Online de Matemática (GOMA) para os alunos da 1ª série do Ensino Médio durante a acolhida de Matemática.*	REMOTO (x) HÍBRIDO ( )	*Conhecer a estrutura da GOMA, suas fases e suas competências e habilidades a serem desenvolvidas durante sua aplicação.*	*Apresentação em Slide sobre a GOMA via Google Meet e realização de levantamento de insumos com os alunos, via Google Forms.*	*De 01/02 a 12/02.*	*Compreensão dos objetivos da GOMA, na reconstrução dos conhecimentos básicos da Matemática.*	*Engajamento dos alunos na apresentação da GOMA, bem como o acompanhamento as respostas, dos mesmos, no Google Forms.*
B e G	*1ª Tarefa – Criação de um perfil na rede social Instagram para divulgação das tarefas referentes à GOMA: divulgação de 3 conteúdos que os alunos aprenderam com facilidade no 9º Ano e 2 conteúdos que tiveram dificuldade.*	REMOTO (x) HÍBRIDO ( )	*Habituar os alunos ao uso das novas tecnologias (rede social) como ferramentas de interação entre os discentes, associando esse uso aos conteúdos da Matemática.*	*Divulgação nos grupos de WhatsApp na segunda-feira da tarefa semanal.*	*De 15/02 a 26/02.*	*Criação dos perfis na rede social como ferramenta para divulgação e realização das atividades da GOMA, bem como a interação entre os alunos.*	*Verificação do perfil na rede social e dos posts criados pelos alunos como base para a construção do acompanhamento aos alunos na GOMA.*
B e G	*Momento de explicação dos conteúdos do 9º Ano que foram expressos por eles nas redes sociais como de maior dificuldade.*	REMOTO (x) HÍBRIDO ( )	*Retomar os conhecimentos acerca dos conteúdos contemplados nas redes sociais, citados como de maior dificuldade pelos alunos.*	*Explicação dialogada e expositiva dos conteúdos através de Slide via Google Meet, seguida de verificação da compreensão dos alunos sobre os mesmos, via Google Forms.*	*De 01/03 a 12/03*	*Uma melhor compreensão acerca dos conteúdos retomados.*	*Frequência e participação durante a exposição dos conteúdos e verificação dos resultados do formulário.*

B	*Homenagem aos Matemáticos relevantes para a construção histórica dos conceitos Matemáticos.*	REMOTO (x) HÍBRIDO ( )	*Divulgar para a comunidade escolar o Dia Internacional da Matemática, bem como pesquisar sobre os importantes matemáticos e suas contribuições para a área.*	*Criação e divulgação, no perfil do instagram, uma homenagem aos Matemáticos que durante a história da Matemática, contribuíram de maneira significativa para construção dos conceitos, teoremas, dentre outras contribuições matemáticas. Ressaltando aqui a importância dos professores desta disciplina que fazem parte do quadro de funcionários da EEEP MESS.*	*De 15/03 a 19/03.*	*Criação de Cards, utilizando-se da competência socioemocional "Interesse Artístico", bem como do seu protagonismo estudantil.*	*Verificação do perfil na rede social, acerca dos cards postados pelos alunos como base para a construção do acompanhamento aos alunos na GOMA.*
B e G	*2ª Tarefa – Criação e divulgação de Cards contemplando os conteúdos explanados na semana anterior, contendo:* *- Breve Resumo;* *- Atividade Verificadora.*	REMOTO (x) HÍBRIDO ( )	*Socializar os conhecimentos obtidos acerca dos conteúdos ora deficitários que foram explanados na semana anterior.*	*Divulgação nos grupos de Whatsapp na segunda-feira da tarefa semanal.*	*De 22/03 a 31/03.*	*Criação de Cards, utilizando-se da competência socioemocional "Interesse Artístico", bem como do seu protagonismo estudantil.*	*Verificação do perfil na rede social, acerca dos cards postados pelos alunos como base para a construção do acompanhamento aos alunos na GOMA.*
B e G	*"O fantástico mundo dos triângulos"*	REMOTO (x) HÍBRIDO ( )	*Compreender a definição e propriedades de uma das figuras planas mais importantes: o triângulo.*	*Aula expositiva e dialogada reforçando o conteúdo sobre o Triângulo, definição e propriedades, por meio do Google Meet, sendo repassada na Semana 02 uma lista de atividades para serem desenvolvida na próxima etapa.* *Os alunos deverão socializar com todos os colegas e demais alunos (ou não) da EEEP MESS as questões da lista de atividades passadas na etapa anterior no perfil do Instagram de cada equipe. Logo após a interação dos internautas, os alunos deverão utilizar a imaginação e postar a resolução de cada questão disponibilizada. (Mínimo de questões para postagem: 04)*	*05/04 à 16/04*	*Uma melhor compreensão acerca dos conteúdos retomados.*	*Frequência e participação durante a exposição dos conteúdos e verificação dos resultados do formulário.*
B e G	*"O fantástico mundo dos triângulos"*	REMOTO (x) HÍBRIDO ( )	*Socializar os conhecimentos obtidos acerca dos conteúdos ora deficitários que foram explanados na semana anterior.*		*19/04 à 30/04*	*Criação de Cards, utilizando-se da competência socioemocional "Interesse Artístico", bem como do seu protagonismo estudantil.*	*Verificação do perfil na rede social, acerca dos cards postados pelos alunos como base para a construção do acompanhamento aos alunos na GOMA.*
B e G	*Dia Nacional da Matemática*	REMOTO (x) HÍBRIDO ( )	*Divulgar para a comunidade escolar o Dia Nacional da Matemática, através de homenagens feita à disciplina.*	*Os professores irão, durante suas aulas na, falar sobre o Dia Nacional da Matemática (06/05), logo após os alunos deverão usar a imaginação e no dia em questão fazer uma homenagem à Matemática. (Dica: paródia, poesia, cordel, imagens, etc.).*	*03/05 à 08/05*	*Criação de Cards, utilizando-se da competência socioemocional "Interesse Artístico", bem como do seu protagonismo estudantil.*	*Verificação do perfil na rede social, acerca dos cards postados pelos alunos como base para a construção do acompanhamento aos alunos na GOMA.*
B e G	*Projeto Geometria*	REMOTO (x) HÍBRIDO ( )	*Desenvolver as competências e habilidades acerca dos conteúdos da Geometria Plana e Espacial.*	Cada turma participará de uma oficina em que serão trabalhados os conteúdos de geometria (planificações, maquetes, plantas, sólidos geométricos, medidas, desenhos, quadros, e outros). A atividade será desenvolvida em grupos organizados pelo professor. (Até segunda ordem pelo Google Meet)	*10/05 à 21/05*	*Uma melhor compreensão acerca dos conteúdos retomados.*	*Frequência e participação durante a exposição dos conteúdos e verificação dos resultados do formulário.*

B e G	*Projeto Geometria*	REMOTO (x) HÍBRIDO ( )	*Desenvolver as competências e habilidades acerca dos conteúdos da Geometria Plana e Espacial.*	*Os alunos deverão ao término da oficina disponibilizar fotos e/ou vídeos de suas construções, bem como o passo a passo de como realiza-las no perfil de cada turma.*	*24/05 à 28/05*	*Criação de Cards, utilizando-se da competência socioemocional "Interesse Artístico", bem como do seu protagonismo estudantil.*	*Verificação do perfil na rede social, acerca dos cards postados pelos alunos como base para a construção do acompanhamento aos alunos na GOMA.*
B e G	*Bhaskara Akaria* *Tales de Mileto* *Pitágoras de Samos*	REMOTO (x) HÍBRIDO ( )	*Retomar os estudos de alguns matemáticos importantes para os conteúdos finais do Fundamental II e iniciais do Ensino Médio.*	*Os alunos irão retomar com auxílio dos professores (em horário a ser definido) os principais teoremas e fórmulas de Matemáticos conhecidos e de grande importância para a Matemática. Lembrando que a cada revisada, os alunos deverão postar suas contribuições e aprendizados no perfil da turma.*	*31/05 à 04/06.* *07/06 à 11/06* *14/06 à 18/06*	*Uma melhor compreensão acerca dos conteúdos retomados.*	*Frequência e participação durante a exposição dos conteúdos e verificação dos resultados do formulário.*
B e G	*Os Matemáticos*	REMOTO (x) HÍBRIDO ( )	*Socializar os conhecimentos obtidos acerca dos conteúdos ora deficitários que foram explanados na semana anterior.*	*Os alunos deverão, agora com mais prioridade, divulgar os conteúdos dos Matemáticos estudados de maneira lúdica para a comunidade escolar.*	*21/06 à 25/06.*	*Criação de Cards, utilizando-se da competência socioemocional "Interesse Artístico", bem como do seu protagonismo estudantil.*	*Verificação do perfil na rede social, acerca dos cards postados pelos alunos como base para a construção do acompanhamento aos alunos na GOMA.*
B e G	*Relatório Final*	REMOTO (x) HÍBRIDO ( )	*Desenvolver as competências e habilidade s adquiridas durante todo o processo de realização da GOMA no 1° semestre de 2021*	*Os alunos, após as etapas a Parte 1 da GOMA, deverão produzir um relatório final sobre todo o desenvolvimento da GOMA, bem como os depoimentos de todos os alunos sobre a importância do projeto no processo de Ensino e Aprendizagem da disciplina de Matemática durante o 1° período.*	*28/06 à 01/07.*	*Uma melhor compreensão acerca dos conteúdos retomados.*	*Entrega do relatório.*

Atividades de apoio aos estudantes para o ensino remoto/híbrido e recuperação de aprendizagens:
a. orientação a estudos remotos e durante o atendimento presencial;
b. elaboração de atividades de reforço para recuperação das aprendizagens relacionadas ao continuum curricular;
c. apoio ao processo de avaliação remota e/ou presencial;
d. acompanhamento aos alunos em progressão;
e. realização de atividades de recuperação paralela para alcance dos objetivos de aprendizagem durante o ano letivo;
f. realização de atividades de preparação para o ENEM e demais avaliações externas;
g. desenvolvimento de atividades de acolhimento, engajamento e recuperação das aprendizagens com foco nos estudantes que ingressaram, especificamente, na 1ª série do ensino médio e alunos novatos na rede pública estadual;
h. articulação e mobilização dos estudantes e suas famílias, adotando estratégias de busca ativa e manutenção de vínculo com os estabelecimentos de ensino da rede pública estadual.

OBS.: Cada semana as aulas serão ministradas dentro da carga horário do professor de Matemática, contudo devido à flexibilidade do horário por turma, a data exata de cada aula do Plano de Ação será feita de acordo com a necessidade de cada turma e do cronograma da EEEP MESS.

EEEP Monsenhor Expedito da Silveira de Sousa
4ª Coordenadoria Regional de Desenvolvimento da Educação
Governo do Estado do Ceará
Secretaria da Educação

PROFESSOR: Johnantan Pereira Gonsalves							
PUBLICO-ALVO: 2º Anos Enfermagem							
ATIVIDADE	DESDOBRAMENTO DA ATIVIDADE	FORMATO	OBJETIVOS	METODOLOGIA	PERIODO	RESULTADO ESPERADO	AVALIAÇAO
B e G	Apresentação da Gincana Online de Matemática (GOMA) para os alunos da 2ª série do Ensino Médio durante a acolhida de Matemática.	REMOTO (x) HIBRIDO ( )	Conhecer a estrutura da GOMA, suas fases e suas competências e habilidades a serem desenvolvidas durante sua aplicação.	Apresentação em Slide sobre a GOMA via Google Meet e realização de levantamento de insumos com os alunos, via Google Forms.	De 01/02 a 12/02.	Compreensão dos objetivos da GOMA, na reconstrução dos conhecimentos básicos da Matemática.	Engajamento dos alunos na apresentação da GOMA, bem como o acompanhamento as respostas, dos mesmos, no Google Forms.
B e G	1ª Tarefa – Criação de um perfil na rede social Instagram para divulgação das tarefas referentes à GOMA: divulgação de 3 conteúdos que os alunos aprenderam com facilidade no 1º Ano do Ensino Médio e 2 conteúdos que tiveram dificuldade. Marcar a Escola @eeepmess e o professor @mrgonsalves_ ou o @talessousa	REMOTO (x) HIBRIDO ( )	Habituar os alunos ao uso das novas tecnologias (rede social) como ferramentas de interação entre os discentes, associando esse uso aos conteúdos da Matemática.	Divulgação nos grupos de WhatsApp na segunda-feira da tarefa semanal.	De 15/02 a 26/02.	Criação dos perfis na rede social como ferramenta para divulgação e realização das atividades da GOMA, bem como a interação entre os alunos.	Verificação do perfil na rede social e dos posts criados pelos alunos como base para a construção do acompanhamento aos alunos na GOMA.
B e G	Momento de explicação dos conteúdos do 1º Ano do Ensino Médio que foram expressos por eles nas redes sociais como de maior dificuldade.	REMOTO (x) HIBRIDO ( )	Retomar os conhecimentos acerca dos conteúdos contemplados nas redes sociais, citados como de maior dificuldade pelos alunos.	Explicação dialogada e expositiva dos conteúdos através de Slide via Google Meet, seguida de verificação da compreensão dos alunos sobre os mesmos, via Google Forms.	De 01/03 a 12/03	Uma melhor compreensão acerca dos conteúdos retomados.	Frequência e participação durante a exposição dos conteúdos e verificação dos resultados do formulário.
B e G	Homenagem aos Matemáticos relevantes para a construção histórica dos conceitos Matemáticos.	REMOTO (x) HIBRIDO ( )	Divulgar para a comunidade escolar o Dia Internacional da Matemática, bem como pesquisar sobre os importantes matemáticos e suas contribuições para a área.	Criação e divulgação, no perfil do instagram, uma homenagem aos Matemáticos que durante a história da Matemática, contribuíram de maneira significativa para construção dos conceitos, teoremas, dentre outras contribuições matemáticas. Ressaltando aqui a importância dos professores desta disciplina que fazem parte do quadro de funcionários da EEEP MESS.	De 15/03 a 19/03.	Criação de Cards, utilizando-se da competência socioemocional "Interesse Artístico", bem como do seu protagonismo estudantil.	Verificação do perfil na rede social, acerca dos cards postados pelos alunos como base para a construção do acompanhamento aos alunos na GOMA.
B	2ª Tarefa – Criação e divulgação de Cards contemplando os conteúdos explanados na semana anterior, contendo: - Breve Resumo; - Atividade Verificadora.	REMOTO (x) HIBRIDO ( )	Socializar os conhecimentos obtidos acerca dos conteúdos ora deficitários que foram explanados na semana anterior.	Divulgação nos grupos de WhatsApp na segunda-feira da tarefa semanal.	De 22/03 a 31/03.	Criação de Cards, utilizando-se da competência socioemocional "Interesse Artístico", bem como do seu protagonismo estudantil.	Verificação do perfil na rede social, acerca dos cards postados pelos alunos como base para a construção do acompanhamento aos alunos na GOMA.
B	"Entre retas e parábolas: o fantástico mundo das Funções Afim e Quadrática"	REMOTO (x) HIBRIDO ( )	Retomar os conteúdos de Funções Afim e Quadráticas, compreendendo seus conceitos, definições, gráficos e aplicações em situações-problemas.	Aula expositiva e dialogada reforçando o conteúdo sobre as funções afim e quadrática, definição e propriedades, por meio do Google Meet, sendo repassado na Semana 02 uma lista de	05/04 à 16/04	Uma melhor compreensão acerca dos conteúdos retomados.	Frequência e participação durante a exposição dos conteúdos e verificação dos resultados do formulário.

			compreendendo seus conceitos, definições, gráficos e aplicações em situações-problemas.	Logaritmica, definição e propriedades, por meio do Google Meet, sendo repassado na Semana 02 uma lista de atividades para serem desenvolvida na próxima etapa.			formulário.
B	"Entre retas e parábolas: o fantástico mundo das Funções Afim e Quadrática"	REMOTO (x) HIBRIDO ( )	Socializar os conhecimentos obtidos acerca dos conteúdos ora deficitários que foram explanados na semana anterior.	Os alunos deverão socializar com todos os colegas e demais alunos (ou não) da EEEP MESS as questões da lista de atividades passadas na etapa anterior no perfil do Instagram de cada equipe. Logo após a interação dos internautas, os alunos deverão utilizar a imaginação e postar a resolução de cada questão disponibilizada (Mínimo de questões para postagem: 04)	24/05 à 28/05	Criação de Cards, utilizando-se da competência socioemocional "Interesse Artístico", bem como do seu protagonismo estudantil.	Verificação do perfil na rede social, acerca dos cards postados pelos alunos como base para a construção do acompanhamento aos alunos na GOMA.
B	Bhaskara Akaria Tales de Mileto Pitágoras de Samos	REMOTO (x) HIBRIDO ( )	Retomar o estudos de alguns matemáticos importantes para os conteúdos finais do Fundamental II e iniciais do Ensino Médio.	Os alunos irão retomar com auxilio dos professores (em horário a ser definido) os principais teoremas e fórmulas de Matemáticos conhecidos e de grande importância para a Matemática. Lembrando que a cada atividades para serem desenvolvida na próxima etapa.	31/05 à 04/04. 07/06 à 18/06 14/06 à 18/06	Uma melhor compreensão acerca dos conteúdos retomados.	Frequência e participação durante a exposição dos conteúdos e verificação dos resultados do formulário.
B	"Entre retas e parábolas: o fantástico mundo das Funções Afim e Quadrática"	REMOTO (x) HIBRIDO ( )	Socializar os conhecimentos obtidos acerca dos conteúdos ora deficitários que foram explanados na semana anterior.	Os alunos deverão socializar com todos os colegas e demais alunos (ou não) da EEEP MESS as questões da lista de atividades passadas na etapa anterior no perfil do Instagram de cada equipe. Logo após a interação dos internautas, os alunos deverão utilizar a imaginação e postar a resolução de cada questão disponibilizada (Mínimo de questões para postagem: 04)	19/04 à 30/04	Criação de Cards, utilizando-se da competência socioemocional "Interesse Artístico", bem como do seu protagonismo estudantil.	Verificação do perfil na rede social, acerca dos cards postados pelos alunos como base para a construção do acompanhamento aos alunos na GOMA.
B e G	Dia Nacional da Matemática	REMOTO (x) HIBRIDO ( )	Divulgar para a comunidade escolar o Dia Nacional da Matemática, através de homenagens feita à disciplina.	Os professores irão, durante suas aulas na, falar sobre o Dia Nacional da Matemática (06/05), logo após os alunos deverão usar a imaginação e no dia em questão fazer uma homenagem à Matemática. (Dica: paródia, poesia, cordel, imagens, etc.).	03/05 à 08/05	Criação de Cards, utilizando-se da competência socioemocional "Interesse Artístico", bem como do seu protagonismo estudantil.	Verificação do perfil na rede social, acerca dos cards postados pelos alunos como base para a construção do acompanhamento aos alunos na GOMA.
B	"Potencializando e Racionalizando: descobrindo mais aplicações das Funções Exponencial e Logaritmica"	REMOTO (x) HIBRIDO ( )	Retomar os conteúdos de Funções Exponencial e Logaritmica,	Aula expositiva e dialogada reforçando o conteúdo sobre o Funções Exponencial e	10/05 à 21/05	Uma melhor compreensão acerca dos conteúdos retomados.	Frequência e participação durante a exposição dos conteúdos e verificação dos resultados do

				revisada, os alunos deverão postar suas contribuições e aprendizados no perfil da turma.			
B	Os Matemáticos	REMOTO (x) HIBRIDO ( )	Socializar os conhecimentos obtidos acerca dos conteúdos ora deficitários que foram explanados na semana anterior.	Os alunos deverão, agora com mais prioridade, divulgar os conteúdos dos Matemáticos estudados de maneira lúdica para a comunidade escolar.	21/06 à 25/06.	Criação de Cards, utilizando-se da competência socioemocional "Interesse Artístico", bem como do seu protagonismo estudantil.	Verificação do perfil na rede social, acerca dos cards postados pelos alunos como base para a construção do acompanhamento aos alunos na GOMA.
B	Relatório Final	REMOTO (x) HIBRIDO ( )	Desenvolver as competências e habilidade s adquiridas durante todo o processo de realização da GOMA no 1° semestre de 2021	Os alunos, após as etapas a Parte 1 da GOMA, deverão produzir um relatório final sobre todo o desenvolvimento da GOMA, bem como os depoimentos de todos os alunos sobre a importância do projeto no processo de Ensino e Aprendizagem da disciplina de Matemática durante o 1° período.	28/06 à 01/07.	Uma melhor compreensão acerca dos conteúdos retomados.	Entrega do relatório.

Atividades de apoio aos estudantes para o ensino remoto/híbrido e recuperação de aprendizagens:
a. orientação a estudos remotos e durante o atendimento presencial;
b. elaboração de atividades de reforço para recuperação das aprendizagens relacionadas ao continuum curricular;
c. apoio ao processo de avaliação remota e/ou presencial;
d. acompanhamento aos alunos em progressão;
e. realização de atividades de recuperação paralela para alcance dos objetivos de aprendizagem durante o ano letivo;
f. realização de atividades de preparação para o ENEM e demais avaliações externas;
g. desenvolvimento de atividades de acolhimento, engajamento e recuperação das aprendizagens com foco nos estudantes que ingressaram, especificamente, na 1ª série do ensino médio e alunos novatos na rede pública estadual;
h. articulação e mobilização dos estudantes e suas famílias, adotando estratégias de busca ativa e manutenção de vínculo com os estabelecimentos de ensino da rede pública estadual.

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O projeto se deu no inicio do 1° semestre e até o momento conseguiu ótimos resultados, aumentando consideravelmente o índice de participação da turma e contribuído para o repasse de conhecimento a alunos que se encontravam em situação de desamparo quanto aos estudos. Com as diversas formas de tecnologia de informação e comunicação (redes sociais como exemplo), todas as publicações obtiveram um bom alcance e houve participação considerável da turma quanto às atividades propostas em cada semana. Grupos foram divididos e receberam suas respectivas atribuições, no mais podemos concluir com certeza que o projeto foi bem elaborado e repassado para os alunos de forma clara e dinâmica.

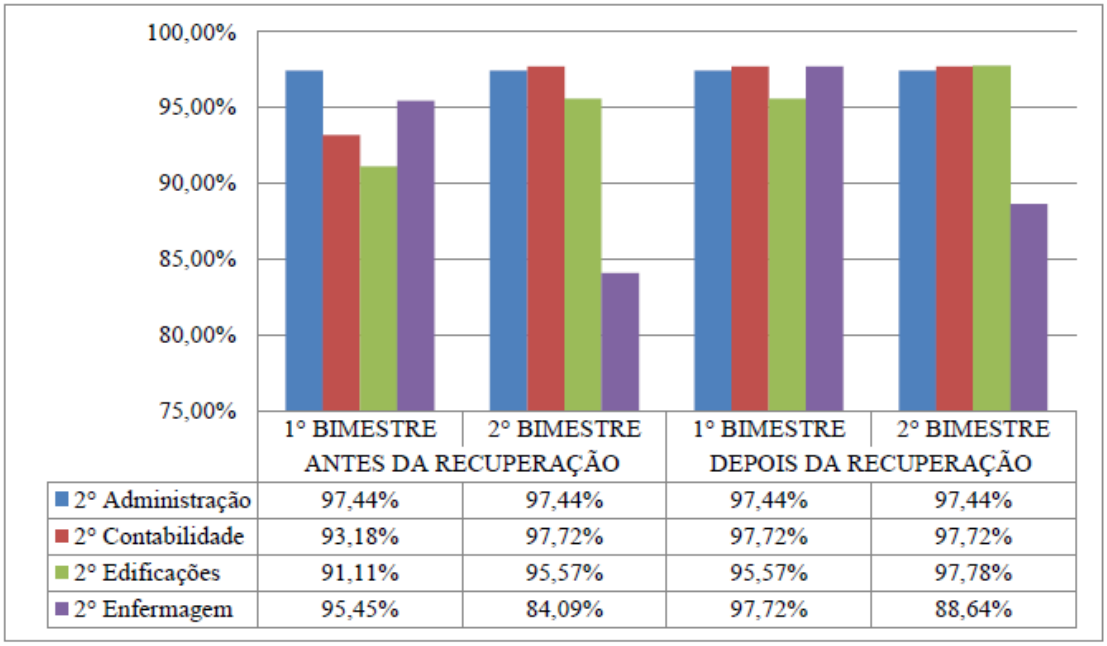
O projeto conseguiu ir bastante a fundo e trouxe ótimos resultados, inclusive da turma que quis deixar seus relatos sobre o quão proveitoso é participar dele:

- "Gostei, pois, pude rever conteúdos na qual precisava de reforços e isso colaborou mais em minha aprendizagem, consegui relembrar e aprender vários conteúdos passados"
- "Foi uma ótima experiência, pois trouxe benefícios para a nossa turma, tais como: melhor fixação dos conteúdos abordados, engajamento com os outros, criatividade, etc."

- “Foi uma experiência bem legal e interessante; e trouxe benefícios sim, como, por exemplo, poder revisitar alguns conteúdos passados e até aprender coisas que não sabíamos tanto, como alguns aspectos sobre a história da matemática, seus principais nomes e outros mais”
- “Ajudou-me a ser mais comunicativa com meus colegas. Minha experiência foi muito boa, um benefício também foi à nota, e a interação entre a turma também foi ótima a meu ver”.
- “Foi super legal e informativa essa experiência. Os benefícios foram vários, interação entre os colegas e as turmas, trocas de conhecimentos e etc.”

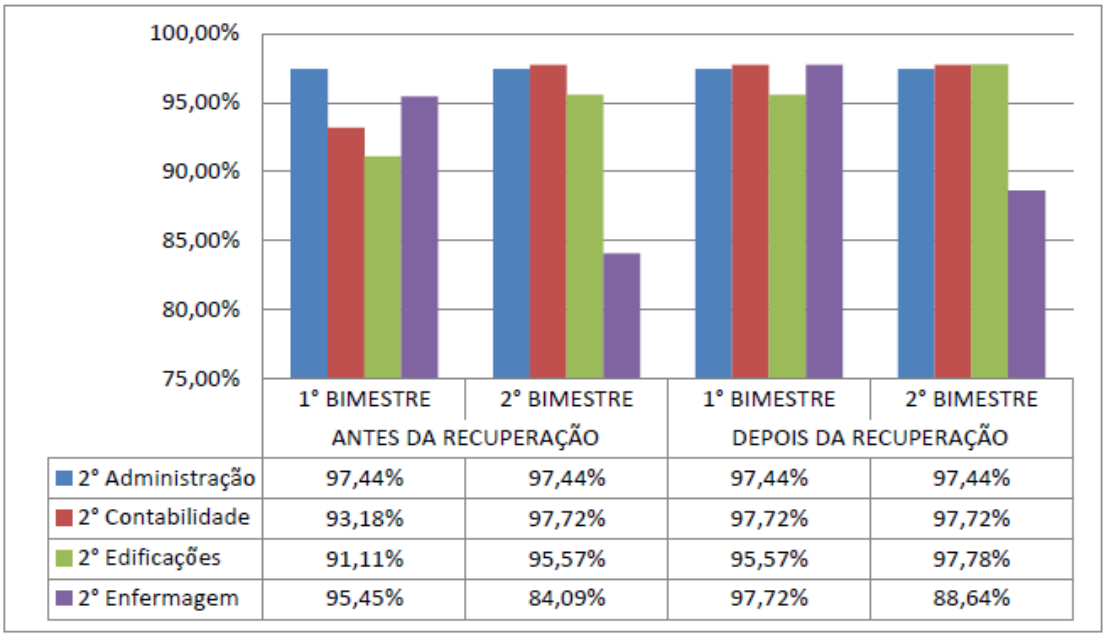
Segue abaixo os resultados das turmas de 1ª e 2ª séries da EEEP MESS, resultados antes e depois da recuperação, como após a aplicação do projeto GOMA:

1ª Série:



	1° BIMESTRE ANTES DA RECUPERAÇÃO	2° BIMESTRE ANTES DA RECUPERAÇÃO	1° BIMESTRE DEPOIS DA RECUPERAÇÃO	2° BIMESTRE DEPOIS DA RECUPERAÇÃO
2° Administração	97,44%	97,44%	97,44%	97,44%
2° Contabilidade	93,18%	97,72%	97,72%	97,72%
2° Edificações	91,11%	95,57%	95,57%	97,78%
2° Enfermagem	95,45%	84,09%	97,72%	88,64%

2ª Série:



	1° BIMESTRE	2° BIMESTRE	1° BIMESTRE	2° BIMESTRE
	ANTES DA RECUPERAÇÃO		DEPOIS DA RECUPERAÇÃO	
2° Administração	97,44%	97,44%	97,44%	97,44%
2° Contabilidade	93,18%	97,72%	97,72%	97,72%
2° Edificações	91,11%	95,57%	95,57%	97,78%
2° Enfermagem	95,45%	84,09%	97,72%	88,64%

CONCLUSÃO

O projeto Gincana Online de Matemática (GOMA) como metodologia inovadora e com o objetivo de recuperar as aprendizagens defasadas devido a proliferação da COVID-19 foi uma experiencia exitosa e positiva para os alunos que participaram, inclusive solicitando a continuação da mesma nos anos seguites.

De fatoa, entende-se que tal metoodologia é possivel pra apresentar a Matemática de uma forma lúdica, com uma abordageem de fácil compreensão, além de aproximar os discentes as novas formas de ensino acometidas pela pandemia, das quais envolvem todos os alunos, o raciocínio lógico e a resolução de problemas contextualizados da Matemática.

Ademais, em virtue dos resultados apresentados, o projeto GOMA conseguiu atingir seus objetivos propostos no início de sua execução. Afinal, tais as atividades que foram realizadas no decorrer do projeto despertaram os alunos para uam reavaliação dos conceitos aprendidos e para uma nova forma de enxergar a disciplina de Matemática, bem como a maneira de aprender seus conceitos e conteúdos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTUNES, Celso. **Jogos para a estimulação das múltiplas inteligências**. Petrópolis: Vozes, 2001.

CAVALLARI, Vinícius Ricardo; ZACHARIAS, Vany. **Trabalhando com recreação.** 10. ed. São Paulo: Ícone, 2008.

RAU, M.C.T.D. A ludicidade na educação: uma atitude pedagógica. Curitiba: Ibpex, 2011

ROSA, A.B. Aula diferenciada e seus efeitos na aprendizagem dos alunos: o que os professores de Biologia têm a dizer sobre isso? - Porto Alegre, 2012. Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/72356/000872151.pdf?sequence=1

SOUZA, S. E. **O uso de recursos didáticos no ensino escolar**. In: I Encontro de Pesquisa em Educação, IV Jornada de Prática de Ensino, XIII Semana de Pedagogia da UEM: "Infância e Praticas Educativas". Maringá, PR, 2007. Disponível em: Acesso em: 12 outubro de 2018.

CAPÍTULO 8

MATEMÁTICA FINANCEIRA x EDUCAÇÃO FINANCEIRA: REFLEXÕES ACERCA DAIMPORTÂNCIA NA FORMAÇÃO DA CIDADANIA

Francisco Odecio Sales

Maria Aliciane Martins Pereira da Silva

RESUMO

No presente trabalho apresentam-se os resultados de um estudo que visa o emprego e trabalho da Matemática Financeira incorporada ao currículo e as práticas escolares, refletindo acerca da relevância do tema e de que forma o mesmo é delineado no ensino médio. Através de uma análise crítica e reflexiva, alicerçada em documentos oficiais e estudos científicos, o presente trabalho objetiva identificar e compreender o modo com o qual a matemática Financeira é trabalhada no cotidiano escolar e de que forma os professores a contextualiza com o cotidiano dos alunos, visando criar um elo entre os assuntos abordados em sala de aula com o seu dia a dia, enfatizando também a necessidade de trabalhar a cidadania (tema transversal da educação) através da matemática financeira.

Palavras-chave: Matemática financeira; Cidadania; Educação Financeira.

INTRODUÇÃO

O artigo 2.º da LBD (Lei de Diretrizes e Bases da Educação) - nº 9394/96, destaca que uma nova educação:

> Almeja criar ambientes que possam preparar e educar cidadãos críticos, atuantes e livres, que liberem energia em atividades em grupo; no pensar e no fazer modernos, que sejam questionadores, que participem de uma educação mais humana e fraterna com o emotivo e o artístico presente; enfim, que os futuros cidadãos sejam atuantes e reflexivos em nossa sociedade. (p. 15)

Nessa perspectiva, ciente de que todas as áreas do conhecimento humano somam esforços para a formação humana e integral do sujeito, o presente estudo restringirar-se a componente curricular de Matemática e, mais especificamente, a Matemática Financeira, por considerá-la uma vertente ampla e consistente para o qual convergem conceitos matemáticos de cunho mais curriculares, a saber: funções afins, exponenciais e logarítmicas, proporcionalidade, razão, números decimais, etc., além de dialogar com as novas tecnologias (planilhas, calculadoras e demais ferramentas computacionais), propiciando um trabalho mais próximo do mundo do aluno (DIAS; TASSOTE; VIANA, 2011).

Ainda em se tratando das Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM):

> O tratamento contextualizado do conhecimento é o recurso que a escola tem para retirar o aluno da condição de espectador passivo. A contextualização evoca por isto áreas, âmbitos ou dimensões presentes na vida pessoal, social e cultural, e mobiliza competências cognitivas já adquiridas (BRASIL, 1998, p.79)

Sobre a perspectiva do aprendizado do aluno, é fundamental que na trajetória de seu o aprendizado sempre haja estreita relação entre o conhecimento escolar e a prática, permitindo ao mesmo resolver situações-problema do seu cotidiano, sendo também capaz de tratar criticamente informações, ajudando-o na tomada de decisões. “Quando esta capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado” (PCN, 2000, p. 37).

Todavia, contrariamente aos que defendem e praticam técnicas e modelos pedagógicos modernas, a Matemática ainda vem sendo trabalhada de forma mecânica, pautada em excessivas e cansativas repetições de procedimentos e algoritmos, que acaba por desencadear o fracasso em sua aprendizagem. Segundo os PCN (2000, p. 27):

> Esse processo de transformação do saber cientifico em saber escolar não passa apenas por mudanças de natureza epistemológica, mas é influenciado por condições de ordem social e cultural que resultam na elaboração dos saberes intermediários, com aproximações provisórias, necessárias e intelectualmente formadoras. É o que se pode chamar de contextualização do saber.

A escolha do assunto proposto nesse estudo motiva-se dessa reflexão, aliando a Matemática Financeira ao exercício da cidadania, sendo de suma importância na busca de reverter o quadro relatado no que diz respeito relação ao ensino da Matemática Financeira, lançando ideias na busca por um ensino mais contextualizado e comprometido com a formação integral do cidadão (DIAS; TASSOTE; VIANA, 2011).

Mediante o exposto, questiona-se: Como a Matemática Financeira está sendo trabalhada pelos professores de Matemática da Educação Básica na perspectiva de formar para cidadania?

Conceitos Teóricos

Os desafios apresentados aos profissionais da educação nesse século são das mais diversas naturezas e despontam fortemente como empecilhos para se alcançar o sucesso no processo educacional. Diante da situação que educadores veem enfrentando, é necessário estar preparado para enfrentar e superar os diversos problemas que surgem durante o processo, e isso depende das oportunidades, do conhecimento e, indiscutivelmente, de trato refinada (a clássica "paciência") com os alunos, já que a educação na vida do aluno é de importância extrema para o seu futuro. Justifica-se assim um olhar mais humano e cidadão sobre a Matemática Financeira, esta por sua vez bem presente em cotidiano: calculando o valor das parcelas de um financiamento de imóvel ou avaliando pelo pagamento á vista ou parcelado mediante o contexto, usam-se as competências e habilidades desenvolvidas com o estudo da Matemática. Observadas essas e tantas outras situações corriqueiras no cotidiano das pessoas, é importante que se tenham noções básicas de Matemática Financeira (DIAS; TASSOTE; VIANA, 2011).

A LDB (9394/96), em seu artigo 2.º, enfatiza que a educação tem como finalidade "o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho". Os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) preconizam que:

> O ensino da matemática deve ser desenvolvido de tal maneira que permita ao aluno compreender a realidade em que está inserido, desenvolver suas capacidades cognitivas e sua confiança para enfrentar desafios, de modo a ampliar os recursos necessários para o exercício da cidadania, ao longo de seu processo de aprendizagem.

Na Educação Básica, os conhecimentos de Matemática Comercial e Financeira constituem importante fator de promoção e consolidação da cidadania e compreensão do contexto econômico nacional e mundial (ROSSETI JÚNIOR; SCHIMIGUEL, 2011, p. 01).

Observa-se que a Matemática Financeira (às vezes confundida com Educação Financeira) deve ser trabalhada com os alunos de modo que os mesmos sejam capazes de estabelecer relações com o cotidiano, tamanha é sua importância na preparação do jovem para o mundo de trabalho.

Lima e Sá (2010) afirmam que, dada sua importância na formação do aluno, a matemática Financeira deveriam constar no currículo escolar desde os anos iniciais, enfatizando:

> [...] que os conteúdos dessas disciplinas sejam iniciados desde as primeiras series do Ensino Fundamental. É claro que tais informações devem ser iniciadas adequadamente, explorando o lúdico, simulação de compras e vendas, preenchimento de cheques, historias em quadrinhos, teatralizações, etc.

Rosseti Junior e Schimiguel (2009) colocam-se nessa discussão destacando que:

> [...] a introdução ao estudo da Matemática Comercial e Financeira é importante a partir do Ensino Fundamental, no Ensino Médio e no Ensino Técnico, para promover no aluno as habilidades e competências de analisar e avaliar, criticamente, as situações financeiras que se apresentam em sua vida (p.5).

Os princípios conceituais empregados pela Matemática Financeira estão conectados com várias problemáticas do cotidiano do cidadão, desde uma compra simples no supermercado até situações de maior complexidade, como na tomada de decisão na busca por melhores resultados em transações financeiras. Considerando tais circunstancias nota-se que é na sala de aula que tais aprendizados não são melhor amadurecidos, ou por não serem trabalhados ou por centrarem-se tão somente em mera aplicação de fórmulas. Segundo Gouveia (2006),

> A Matemática financeira nem sempre é trabalhada nas escolas de Ensino Fundamental e Médio, e quando é oferecida muitas das vezes, fica longe do contexto em que o aluno está inserido. Os conteúdos são oferecidos, na maioria das vezes, de forma a levar o aluno à memorização de fórmulas, que são utilizadas sem saber o porquê sem uma ligação com o seu dia-a-dia.

A Matemática Financeira é transmitida aos alunos de forma que os assuntos e temáticas propostas distanciam-se do cotidiano onde o mesmo está imerso. Dessa forma, o aluno acaba por não entender onde utilizar aquele conhecimento, tornando-o às vezes inútil e implicando assim em falta de atenção, tanto por parte dos docentes como dos discentes (GOUVEIA, 2006). E quando o próprio aluno questiona-se onde utilizará/aplicará aqueles conceitos e indaga o professor, em boa parte dos casos a resposta é: cai nos vestibulares/concursos/ENEM, tornando-o assim a matemática Financeira meramente curricular e desconexa da realidade.

Desenhado esse panorama, a formação do professor, tanto em caráter inicial como continuado, torna-se indispensável.

> Para que o docente em formação esteja preparado para orientar seus alunos para um bom uso e entendimento da Matemática Financeira, é importante que ele vivencie, durante sua formação, como trabalhar com esse tema. (ALMEIDA, 2004, p.13).

Torna-se evidente a reformulação a maneira com a qual se trabalha a Matemática Financeira em sala, tendo em vista que o cidadão despreparado reflete na sociedade na qual está imerso,

trazendo consigo comportamentos prejudiciais, visto que hoje se gira em torno de um mundo capitalista onde o que se visa é o lucro (DIAS; TASSOTE; VIANA, 2011).

O mercado de trabalho atualmente busca profissionais capacitados para o crescimento de seu negócio. A percepção financeira, sem dúvida, é basilar para todo o processo e, quando o profissional não é portador de uma visão analítica, o desenvolvimento do negócio pode ser interrompido, como mencionam Rosseti Junior e Schimiguel (2011):

> Conhecer as operações com o dinheiro tem sido um obstáculo enfrentado pelos jovens ao ingressar do mercado de trabalho. Essas dificuldades educacionais criam barreiras para a plena inserção da juventude no mundo do trabalho, diante das exigências de empresas por nome limpo nos cadastros de créditos e devedores.

Para além da vida profissional e do mercado de trabalho, evidencia-se os problemas startados na vida particular de cada individuo, que muitas vezes em sua formação humana e cidadã não teve acesso ao aprendizado em Matemática Financeira. A base de tudo é o orçamento financeiro (ou doméstico) que, se porventura abalado, causa grande transtorno na vida de todos (DIAS; TASSOTE; VIANA, 2011).

Muniz Junior (2010) afirma que "a população brasileira lida com o dinheiro de maneira catastrófica, onde a falta de conhecimento matemático, sem o menor foco na tomada de decisões, tem refletido como principal motivo para essa realidade".

As reflexões supracitadas disparam o entendimento que a Matemática Financeira está intimamente relacionada com a formação do cidadão, tornando-se fundamental para que as pessoas desenvolvam uma visão analítica e por consequência uma vida financeira controlada.

A ausência de um bom entendimento acerca desses conceitos e primícias torna-se difícil educar o cidadão financeiramente, pois, ao deparar-se com uma situação na qual seja instigado a usar tais conceitos, ele não possuirá ferramentas e estratégias para chegar a uma dada conclusão. "O desconhecimento desse leque de ferramentas pode acarretar grandes e irreparáveis perdas financeiras" (ROSSETI JUNIOR ; SHIMIGUEL, 2009). Aprender solidamente os conceitos da Matemática Financeira é o pontapé inicial para um bom desenvolvimento da Educação Financeira, com criticidade. A esse respeito, Rosseti Junior e Shimiguel (2009) questionam:

> Como discernir qual a forma mais apropriada de efetuar os pagamentos: em parcelas ou de uma só vez? Responder essa indagação depende de diversos fatores: as taxas de juros e correções cobradas o prazo de pagamentos, a quantidade de prestações, data dos pagamentos assim como a taxa de atratividade, ou seja, a taxa com a qual o dinheiro apresentará melhor rendimento. (p. 5)

Puccini (2011) complementa:

> A matemática financeira é um corpo de conhecimento que estuda a mudança de valor do dinheiro com o decurso de tempo [...], para iniciar o seu estudo é necessário que se estabeleça uma linguagem própria para designar os diversos elementos que serão estudados e que esses elementos sejam contextualizados com precisão.

Conceitos de Matemática financeira

Alinhado ideologicamente com as considerações supracitadas, fica bem delineado que, para um bom domínio e compreensão da Matemática Financeira, alguns conceitos fundamentais devem ser assimilados, tais como razão, proporção e regra de três simples.

Definimos como razão o quociente entre dois números reais, no qual o descendente da fração (denominador) é diferente de zero. Exemplificando, se o salário de Ângelo é o quadruplo do de Yasmin pode-se afirmar o quociente (ou razão) entre o salário de Ângelo e o de Yasmin é 4, onde é possível observar-se que o quociente entre dois números é útil para compará-los (LAUREANO; LEITE, 1987). Tais comparativos são representados matematicamente pelo quociente, aplicado sobre a forma de razão e proporção (que é a igualdade entre duas ou mais razões). (SPINELLI; SOUZA, 1998).

A regra de três (seja ela simples, composta ou inversa) é uma ferramenta importante para a resolução de problemas que envolvem valores relacionáveis de correspondência linear dos quais não se conhece a todos. Através da regra de três (que de fato é tão somente estabelecer uma proporção entre as grandezas) pode-se encontrar o dado sob investigação.

Segundo DANTE (2000), o juro pode ser entendido como o ônus gerado pelo uso do capital de terceiros, isto é, o aluguel que se paga pelo uso do dinheiro “emprestado”.

Investindo determinada quantia (aqui chamado de capital) na poupança por um dado intervalo de tempo, tal aplicação articula-se de forma como se o investidor estivesse emprestando dinheiro ao próprio banco. Ao final da aplicação, o investidor receberá uma quantia (conhecida como juros) como compensação.

Nos sistemas de capitalização, coexistem dois tipos de juros: simples e compostos. Quando o capital é aplicado em regime de juros simples, os juros ocorrem sempre sobre o capital inicial, gerando assim valor constante a cada unidade de tempo. Já quando se trata de juros compostos os juros são calculados não somente sobre o capital inicial, mas também sobre os acréscimos dos juros já vencidos, isto é, a taxa do terceiro mês é calculada sobre o valor corrigido do segundo mês e não mais do primeiro, e assim sucessivamente. (GONÇALVES, 2011).

A compreensão desse conceito é capaz de formar um cidadão financeiramente educado e responsável, preparado para se deparar com situações onde será necessário para tomar decisões pautadas na análise de elementos de Matemática Financeira.

Para Laureano e Leite (1987), capital:

> [...] é uma riqueza capaz de produzir renda sem a intervenção do trabalho. Associamos a este conceito a ideia de juro, que é a remuneração da locação de um capital ou, em outras palavras, o custo do uso do crédito. Assim, o juro corresponde simultaneamente ao preço do tempo de utilização de um capital e ao preço do risco que corre o credor.

Define-se por capital (ou principal) o valor disponível para um investimento inicial. Já o montante refere-se ao capital acrescido dos juros obtido em um determinado período de tempo. Equacionando, teríamos M = C + J, onde M é montante, C é o capital e J é o juros.

O termo porcentagem vem do latim *per centum*, que significa por cento. Esse conceito é extremamente comum em situações do cotidiano, em jornais, revistas e afins.

Laureano e Leite (1987) definem taxa como um valor combinado em um empréstimo, ou seja, refere ao custo do dinheiro.

No âmbito da prática, pode-se afirmar que sempre há uma relação sutil com o cotidiano e a falta desses conhecimentos pode ocasionar perdas (DIAS; TASSOTE; VIANA, 2011).

Os conceitos de Matemática Financeira são extremamente importantes para a formação do cidadão financeiramente preparado. Muniz Junior (2010) adverte que:

> [...] a educação financeira está inexoravelmente relacionada à construção dessas competências, principalmente ao processo de construção da cidadania, pois na medida que aumenta a capacidade de análise em situações financeiras, como decidir entre comprar à vista ou a prazo, identificar descontos em sistemas de financiamento, estimar o crescimento do capital investido, dentre outros, o consumidor, tem condições mais efetivas de exercer seus direitos por saber a matemática envolvida nessas situações.

O conhecimento da Matemática Financeira permite o bom uso dos conceitos da Administração Financeira, pois o indivíduo demonstrará segurança e iniciativa na tomada de decisões referente a investimentos. Tais competências e habilidades devem ser desenvolvidas por todos os cidadãos em qualquer situação em que uma decisão financeira eloquente se fizer necessária.

A Matemática financeira e a sua relação com a cidadania

Discute-se frequentemente a Educação Financeira nos mais diversos setores da sociedade civil, no entanto muitas pessoas ainda não apresentam a compreensão adequada do significado dos temas e termos relacionados com esse viés da educação, pois erroneamente consideram que a educação financeira relaciona-se somente com aprender a investir no mercado financeiro.

Theodoro (2011) vislumbra que:

> [...] a Educação Financeira é o processo pelo qual os indivíduos e a sociedade melhoram a sua compreensão em relação aos conceitos sobre os produtos financeiros de maneira que com informação, formação e orientação clara possam desenvolver os valores e as competências necessárias para se tornarem mais conscientes das oportunidades e riscos neles envolvidos, e então poderem fazer escolhas bem informadas (p. 26).

Savoia, Saito e Santana (2007) reforçam o exposto, dizendo que:

> A educação financeira tornou-se uma preocupação crescente em diversos países, gerando um aprofundamento nos estudos sobre o tema. Embora haja criticas quanto à abrangência dos programas e seus resultados, principalmente entre a população adulta, é inegável a importância do desenvolvimento de ações planejadas de habilitação da população (p. 3)

Estudos publicados por André Saito apontam que o "letramento em educação financeira" vem se desenvolvendo mais intensamente em países Japão, Estados Unidos, Austrália, Nova Zelândia e Coreia do Sul. Já em países da América do Sul e Leste da Europa, o mesmo processo ocorre mais lentamente, o que reflete de certa forma na situação do pais. (SAITO *apud* MUNIZ JUNIOR 2010)

Mesmo o Brasil desenvolvendo-se a passos mais lentos no que diz respeito ao movimento da Educação Financeira quando comparado a outros países há grupos e movimentos que tratam do tema com preocupação. Diante desse panorama, MACHADO (2011) traz que "desde 2007, o [3]COREMEC formou um grupo de trabalho que pesquisa e debate procedimentos para ampliar o nível de compreensão do brasileiro em relação à administração do dinheiro".

Recorrendo novamente a Machado (2011), o autor cita o decreto publicado no Brasil versando sobre a educação financeira, nos seguintes termos:

> Em 23 de Dezembro de 2010, o presidente Luis Inácio "Lula" da Silva promulga o decreto m. 7.397, instituindo a Estratégia Nacional de Educação Financeira – ENEF, para promover a Educação Financeira, envolvendo BACEN, Ministério da Fazenda, Educação, Justiça, Previdência Social o CONEF, que representa 4 entidades da iniciativa privada (p. 3).

Em março de 2011, foi inaugurada a primeira escola de Educação Financeira no estado do Rio de Janeiro, a primeira desse gênero no país, oferecendo cursos e palestras tratando de finanças pessoais, mercado dentre outros assuntos envolvendo temas pertinentes de Educação Financeira.

A Educação Financeira, muito além de suas características correlatas a Matemática, apresenta íntimo e relevante envolvimento com o exercício da cidadania e formação do cidadão, oportunizando ao aluno aprendizados que o trarão uma melhor qualidade de vida, consciência social e econômica e, sobretudo, um adequado preparo para o exercício da cidadania.

Portanto, o ensino de Matemática não pode desconsiderar a relevância dessa temática. Os PCNs do Ensino Médio relatam que:

> Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos necessários tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional, (PCN, 1999, p.40)

Somando ainda a esse contexto macro, não se deve ignorar alguns episódios evidentes, tais como o agravamento da crise financeira mundial, que respingou de forma direta e indireta em toda a sociedade, provocada pela especulação imobiliária e pelo descontrole de muitas instituições financeiras americanas, causando graves e muitas vezes irreparáveis transtornos financeiros e orçamentários, além de sociais ao longo de todo planeta. As notícias veiculadas na mídia de forma exaustiva demonstram oscilações nos índices da inflação, das bolsas de valores, das taxas de juros, da taxa de câmbio, risco Brasil e demais indicadores financeiros e sociais. Quando o ensino de Matemática não busca preparar adequadamente o aluno para a análise dessa e outras situações similares do cotidiano, acaba por restringir ou até mesmo privar o direito do exercício da cidadania de forma sólida e integra.

É de suma importância ressaltar que uma das necessidades da educação básica é o atendimento a prioridades sociais. O ensino da Matemática também deverá convergir para nesse sentido. Duarte (2010) alerta para o fenômeno disparado pelo mercado de trabalho, que cada vez mais exige profissionais melhor preparados e dispostos a sair de sua zona de conforto, questionadoras e que sempre busquem alternativas.

Enfatiza-se a contradição no que diz respeito a falta de vínculo entre o ensino da Matemática e a cotidiano do aluno, observa-se que crianças que trabalham corretamente noções de unidade monetária no comércio, que fabricam pipas e demais brinquedos usando conceitos de geometria e demarcam corretamente o campo de futebol para brincar, são as mesmas que fracassam na Matemática escolar formal todos os dias.

Faz-se necessária então a reflexão se a prática pedagógica contribui de forma construtiva para a inclusão social, prática da cidadania e questionando se a escola está contribuindo para o processo educacional nessa perspectiva. (DUARTE, 2010).

Observando sob a perspectiva delineada nesse texto, a Educação Financeira é capaz de dar substancial contribuição à formação do cidadão e para o exercício da cidadania, pois corrolabora na formação da autonomia precedida da confiança em sua capacidade individual, sendo assim capaz de enfrentar desafios e demonstrar confiança ao tomar decisões.

Segundo Frankeberg (2006):

> O que mais almejamos na vida é felicidade, saúde, e tranquilidade financeira. Felicidade é apenas um estado de espírito, que depende unicamente de nós mesmos. Saúde, infelizmente, em algumas vezes independe da nossa vontade. Tranquilidade financeira não depende da

> sorte, mas quase que exclusivamente de um bom planejamento financeiro. Entramos aqui em um fator realmente importante. Eu não sou de filosofar. Sou um homem pratico. Acho que o nosso país necessita, além da educação formal, da educação financeira, porque muita coisa da nossa vida depende dela. (p. 25)

A deficiência ou até mesmo carência em Educação Financeira expõe todos a riscos, acarretando danos não somente ao indivíduo em si, mas também à sociedade como um todo. A Educação Financeira colabora para formação de um cidadão com controle de seus gastos e vida controlada financeiramente.

Segundo Theodoro (2011):

> A falta de planejamento financeiro, seja para um estado, empresa ou individuo, leva à vulnerabilidade, insegurança e a falta de autonomia que, no nível familiar, pode ocasionar instabilidade conjugal, degradação dos valores éticos, e ainda doenças psicossomáticas como o estresse, por exemplo, comprometendo a qualidade de vida significativamente.

Posto isso, a Educação Financeira é capaz de auxiliar crianças e jovens na compreensão do valor do dinheiro e no entendimento de uma vida financeira "saudável", desenvolvendo importantes competências para viver de forma mais independente. Para adultos, ela auxilia no planejamento de grandes projetos de vida, como o sonho da casa própria, despesas fixas com a família, o planejamento para estudos e/ou férias dos filhos e a preparação para uma aposentadoria tranquila. (MACHADO 2011)

CONCLUSÃO

A Matemática Financeira é uma ferramenta de extrema relevância para o exercício da cidadania, pois, na falta de conhecimento e/ou domínio da mesma, o cidadão fica a mercê e pode vir a sofrer grandes e graves transtornos. Essa afirmação toma forma e ganha sentido quando se faz uma leitura mais abrangente das atuais condições da sociedade e o número de pessoas desinformadas e desnudas de mecanismos necessários para a condução de seus estudos e práticas econômicas, mantendo um planejamento financeiro adequado.

O trabalho que se seguiu até aqui tentou apresentar a Matemática Financeira uma perspectiva diferenciada, ressaltando sua relevância e necessidade de inserção na vida dos cidadãos para que os mesmos exercerem de forma plena sua cidadania.

A Matemática pode e deve ser compreendida em sua plenitude, como uma construção humana e mediada por necessidades da civilização aos transcorrer de sua história, possibilitando assim a criação de uma ponte que venha a servir de início aos interessados no desenvolvimento de uma prática de ensino mais consciente e significativa, bem como para aqueles que tenham interesse na área e queriam conhecer um pouco mais.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. C.. **Trabalhando matemática financeira em uma sala de aula do ensino médio da escola publica.** 2004. Dissertação (Mestrado em Educação), Campinas.

BICUDO, M.A V. **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2010

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília: MEC/SEF, 1996

BRASIL, Ministério da Educação e Desporto. DCNEM. Brasília: MEC/SEF, 1998

BRASIL, Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros curriculares nacionais.** Brasília: MEC/SEF, 2000.

DANTE, L. R.. **Didática da resolução de problemas de matemática**. São Paulo: Ática, 12º ed., 2002.

DIAS, M.V, TASSOTE, E.M, VIANA, **A matemática financeira:** um alicerce para o exercício da cidadania. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática).: Universidade do Vale do Sapucaí. Pouso Alegre.

DUARTE, P. C. X.. **Desenvolvendo cidadãos atuantes por meio do ensino aprendizagem de matemática.** Porto de Ideias, São Paulo, 2010.

FEIJÓ, A. B.. **O ensino de matemática financeira na graduação com a utilização da Planilha e da calculadora:** uma investigação comparativa. Disertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática), Porto Alegre, 2007.

FRANKENERG, L.. **Planejamento financeiro:** o caminho para transformar sonhos em realizações. São Paulo, 2006. Disponível em: http://www.akatu.org.br/Content/Akatu/Arquivos/file/OConsumoConscienteDinheiroeCredito.pdf . Acesso em: 14 set 2015.

GONÇALVES, A. R.. **Matemática para o ensino de pedagogia.** Disponível em: www.reisdofaroeste.com.br/documentos.Data de acesso: 13 de set 2011.

GOUVEIA, S. A. S.. **Novos caminhos para o ensino e aprendizagem de matemática financeira:** construção e aplicação de webquest**.** 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Rio Claro.

LAUREANO, J. L.; LEITE, O. V.. **Os segredos da matemática financeira.** São Paulo: Ática, 1987.

LIMA, C. B.. SA, L. P.. **Matemática financeira no ensino fundamental**, Revista TECCEN – Vol 3, n. 1, abril de 2010. Disponível em: http://www.uss.br/web/revista_informativo5/artigo03.pdf Acesso em: 21 ago. 2015.

MACHADO, L. H. M.. **Educação financeira, perspectivas, antecedentes e visão global.** Disponivel em: http://www.ihmachado.com/avisos/artigo . Acesso em: 12 set 2015.

MUNIZ JUNIOR, I.. **Educação financeira:** Conceitos e contextos para o ensino médio. X Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador, 2010.

NASCIMENTO, P. L.. **A Formação do aluno e a visão do professor do ensino médio em relação à matemática financeira.** 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Financeira), São Paulo.

OLIVEIRA, R. S. º. **Educação financeira em sala de aula na perspectiva da etnomatematica**. 2007. Dissertação (graduação em Pedagogia), Bauru.

PUCCINI, E. C.. **Matemática Financeira.** Disponível em: http://www.proativams.com.br/files_aberto/Livro%20de%20MForiginal.pdf Data de acesso: 13 set 2015.

ROSETTI JUNIOR, H.; SHIMIGUEL, J.. Educação Matemática Financeira: conhecimentos financeiros para a cidadania e inclusão. **Revista Cientifica Internacional**, ano 2, n. 8, out 2009.

ROSETTI JUNIOR, H.; SCHIMIGUEL, J.. **A História do dinheiro e a Educação Matemática Financeira.** Disponível em: <http://www.administradores.com.br> Acesso em: 19 de março de 2015.

ROSETTI JUNIOR, H. R.; SCHIMIGUEL, J.. **Endividamento de jovens, educação financeira e cidadania.** Disponível em: http://www.administradores.com.br Acesso: 19 mar. 2011.

SANTALÓ, L.. **Didática da matemática:** reflexões psicopedagógicas. 35. ed., São Paulo: Cortez, 1997.

THEODORO, F. R. F.. **A educação econômico-financeira na formação profissional**: uma analise diagnostico: produtiva. Dissertação (Mestrado em Tecnologia), São Paulo, 2011.

CAPÍTULO 9

MONITORIA DE MATEMATICA BASICA I: UMA EXPERIÊNCIA NO INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ - CAMPUS CRATEÚS

Maria Aliciane Martines Pereira da Silva[8]

Francisco Odécio Sales[9]

RESUMO

O programa de monitoria é um dos artifícios contribuintes para a formação docente durante o período da graduação, aprimorando de forma prática os conhecimentos sobre o ser docente e propiciando uma relação direta com a realidade do ensino-aprendizagem, ou seja, oportuniza ao acadêmico um conhecimento das competências e habilidades a serem desenvolvidas pela futura profissão. Nesse sentido a monitoria vem a ser um incentivo para a carreira docente, por meio da atuação em atividades voltada ao ensino, possibilitando experiência para a vida acadêmica. Desse modo, o presente artigo tem como objetivo expor relatos de experiências vivenciadas e apresentar a importância da monitória de Matemática Básica I para a formação docente dos estudantes do curso de licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE campus Crateús. Com bases nas vivências meio ao programa desenvolvido, será apresentado as contribuições do programa para o corpo discente, abordando os principais desafios e falhas encontradas, além disso será exposto subsídio importantes para a formação docente. Possibilitando, assim, uma conclusão satisfatória a respeito da monitoria, onde não só favorece para o ensino em si, mas também abre porta para formação de pessoas e profissionais da educação.

8 Discente do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará. E-mail: maria.aliciane.martines61@aluno.ifce.edu.br

9 Docente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará. E-mail: odecio.sales@ifcel.edu.br

INTRODUÇÃO

A monitoria acadêmica consiste em um apoio pedagógico oferecido pela instituição de ensino. Que apresenta atividades desenvolvidas pelo aluno-monitor, com auxílio de um professor orientador, pois este auxilia o educando para que obtenha um melhor avanço com suas tarefas. A monitoria favorece ao monitorando uma melhor desenvoltura e estímulo para a realidade docente, ou seja, propicia um leque de oportunidades e experiências para o futuro espaço de trabalho. Além disso, oportuniza aos demais grupos de discentes com dificuldades existentes em determinada disciplina, no qual contribui fortemente para o rompimento de evasão do curso, que por vez vem a desmotivar ao aluno quando não compreende a cadeira, vindo a reprovar e consequentemente a desistência acadêmica, o programa colabora também para o aprofundamento de conteúdo, e fortalece um maior desempenho para o processo de ensino-aprendizagem, melhor dizendo, vem a fortalecer o ensino mútuo e colaborativo no meio educacional.

A monitoria do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE campus Crateús, visa propiciar habilidades preditas à disciplina de Matemática Básica I, ofertada tanto para o curso de Matemática como para o curso de Licenciatura em Matemática no 1º semestre da grade curricular de ambas. A componente curricular de Matemática Básica I, tem como objetivos a compreensão de conjuntos e funções, junto a isso a aplicação em diversas áreas, como na ciência e na tecnologia.

O aluno-monitor ou mais conhecido por monitor é o estudante interessado pelo autodesenvolvimento dentro do meio acadêmico, onde busca por uma disciplina ou área do conhecimento para desenvolver e auxiliar em atividades que venha a ser eficaz e resultante de positividade ao ensino.

A seleção do monitorando remunerado para a disciplina de Matemática Básica I do IFCE acontece por meio de alguns pré-requisitos, como já ter cursado a disciplina, ter uma média igual ou superior a 8 na componente curricular em que irá monitorar, requer uma disponibilidade de até 16 horas semanais, e a classificação para o programa ocorre por meio de uma avaliação específica onde torna-se classificável com nota acima 7, na qual em caso de empate ocorre uma avaliação do IRA (Índice De Rendimento Acadêmico), entre outros requisitos.

Visando que o programa de monitoria acadêmica, tem como intuito discernir benefícios tanto para o monitorando quanto para os demais alunos, este artigo tem como objetivo apresentar a importância da monitoria para o aluno e para a formação docente do monitor da disciplina de Matemática Básica I do IFCE - Campus Crateús.

A partir do exposto, na organização e desenvolvimento deste escrito, está dividido em três seções. Na primeira seção está a apresentação da experiência de ser monitor, em seguida está abordado a importância do programa para a formação docente do aluno-monitor, e por fim, na última seção vem exibindo as conclusões e considerações deste artigo.

A experiência de ser monitor

O monitor antes de um conquistador de experiências docentes, é um facilitador de conteúdos e aprendizados. Onde um de seus maiores focos está em procurar maneiras para tornar o ensino mais flexível e compreensível, e assim intensificar a interligação entre aluno-professor-instituição. No qual, muitas vezes se torna um papel difícil para o docente, pelo fato de lidar com muitos alunos e consequentemente diversas dificuldades, além do curto tempo com os discentes. Visando isso, o monitor por já ter passado por situações semelhantes consegue sanar com mais facilidade os obstáculos vivenciados pelos alunos, onde assim possibilita uma melhor eficácia com o aprendizado.

Com isso temos que a monitoria essencialmente:

> [...] Pretende contribuir com o desenvolvimento da competência pedagógica e auxiliar os acadêmicos na apreensão e produção do conhecimento, normalmente ocorre em Instituições de Ensino Superior (IES) com normas fixadas pelos seus respectivos conselhos de Ensino, Pesquisa e Extensão. Apesar de algumas peculiaridades encontradas aqui e ali, o trabalho de monitoria é compreendido como uma atividade formativa de ensino que entre outros objetivos, pretende: a) contribuir para o desenvolvimento da competência pedagógica; b) auxiliar os acadêmicos na apreensão e produção do conhecimento; c) possibilitar ao acadêmico-monitor certa experiência com a orientação do processo de ensino-aprendizagem [...] (SCHNEIDER, 2006, p.65)

Partindo desse entendimento sobre ser monitor, me despertou o interesse pela monitoria de Matemática Básica I. No sexto semestre da graduação de licenciatura em Matemática, com a abertura do edital me oportunizou a participar do programa, onde foi avaliada a nota da disciplina referente à monitoria e feito uma prova específica, elaborada pelo professor orientador. Atendendo aos requisitos propostos pelo edital, consegui me enfatizar como bolsista.

A familiarização dos alunos do IFCE- campus Crateús com a disciplina se dá desde o terceiro semestre. Como acadêmica de Matemática e a exemplo da disciplina, posso relatar que foi uma oportunidade de obter grande conhecimento, apesar das diversas dificuldades vividas na época, em virtude da imatura bagagem de saberes. Essa disciplina para a graduação do curso de Licenciatura em Matemática é de suma importância, pois é praticamente uma das maiores bases para os diversos desenvolvimentos de problemas físicos e para o melhor entendimento das disciplinas de cálculo diferencial e integral, pois ambas requerem um conhecimento prévio de Matemática Básica I,

ou seja, é um curso que requer muito da interdisciplinaridade dos conceitos físicos e do saber sobre essa disciplina.

A docência conceitua-se pela prática do ensinar, educar, formar, qualificar, entre outras diversas características, que se resume em preparar indivíduos para a sociedade. Independente da área de atuação, à docência carrega consigo muita significância e responsabilidade, onde requer uma infinidade de habilidades desde o saber dos conteúdos ao saber ensinar.

O ensinar cobra por vários complementos como a pesquisa incessante, compreensão aos conhecimentos dos educandos, estéticas, ética, acolhimento à novos ideais e a aceitação de críticas construtiva para a prática docente (FREIRE, 1996)

Assim, podemos perceber o importante papel do professor, o monitorando não deixa de ser um docente, mesmo ainda não oficializado. Na execução da monitoria, foi possível sentir na pele a auto cobrança para desempenhar um papel promissor. Onde o contato com os conteúdos foram precisos diariamente, a revisão de assuntos ainda do ensino médio, a preparação para as possíveis dúvidas e a procurar pela melhor forma de orientar aos discentes, onde se tornou um dos maiores desafios, pelo fato de lidar com os distintos ideais e consequentemente pessoas com formas de aprender diferente, ou seja, uma vez que um aprende pelo método da repetição, outro já acha eficaz por meio de exemplos ao alcance dos olhos e por ai vai as infinitas formas.

No papel docente é preciso se reinventar sem ensaios, sendo esse outro fortíssimo ponto na experiência como monitora. Como mencionado anteriormente existe um preparo para os eventuais questionamentos feitos pelos discentes, no entanto, nem sempre funciona, pois em sua maioria as inquietações dos discentes vai além das perspectivas. Em meio aos interrogatórios feitos pelos alunos da monitoria, foi possível perceber a dificuldade em conteúdos básicos, como entende a equação da reta na prática, produto interno entre vetores e o significado de seus resultados, resolução de matriz e principalmente a interpretação de questões, onde era notório perceber que os cálculos eram desenvolvidos, porém a interpretação dos resultados obtidos deixava a desejar. Por se tratar de dúvidas simples muitas vezes os estudantes deixam de questionar em sala de aula por vergonha dos colegas, do professor e até mesmo medo de ser rejeitado frente aos amigos. Dessa forma, a monitoria vem a ser novamente uma ponte para a relação aluno-professor, onde por uma afinidade maior, por serem todos alunos e aos ver dos discentes um mesmo nível, se torna mais confortável, sendo mais acessível para expor suas dificuldades.

Com o programa, foi possível vivenciar uma das frases de Paulo Freire, quando o pedagogo menciona “Quem ensina aprende ao ensinar”. De fato, isso acontece, ao se dá conta de um compromisso com a aprendizagem, ao perceber que naquele meio você não só pode ensinar, como também está apto a aprender. Nas aulas de monitoria, esse ensino mútuo esteve muito presente, ao se

deparar com as próprias dúvidas dos discentes, onde juntos era aberto uma discussão e procurávamos a solução. Além disso, a aquisição de conhecimentos foi mais eficaz, pelo fato de a dedicação ser maior. Dessa forma, pude perceber o quanto foi enriquecedor para a minha aprendizagem e até mesmo para a construção como profissional na área da educação.

Como já mencionado precedentemente, a monitoria requisita de uma carga horária de 16 horas semanais, onde 4 horas por semana é disponibilizada para os encontros presenciais com os discentes, em que juntamente com eles foi determinado horários que favorecesse a maioria, sendo aos dias de terça e quarta de 14:00 às 16:00. Quanto ao restante do tempo foi direcionado para planejamento, no qual aconteciam as preparações e resoluções de listas, estudo dos conteúdos a serem abordados e as organizações das aulas. Mesmo com os horários bem compartilhados, foi notado que não era suficiente para conter a necessidade dos estudantes. Diante disso, o horário foi ampliado, porém com atendimentos virtuais, tendo uma maior procura em período de avaliações.

Contribuições da monitoria acadêmica na formação docente

Partindo do entendimento sobre a formação docente, a monitoria é tida como uma ferramenta de conciliação entre as teorias analisadas em sala de aula e a prática obtida por meio das experiências. O tempo destinado à monitoria, similar ao estágio supervisionado, é uma oportunidade do licenciando revisar as falhas e evitar de levar adiante para a vida profissional. Desse modo, o programa vem a ser um dispositivo de aperfeiçoamento profissional, pois determina novas concepções para o monitorando sobre a futura atuação no espaço de trabalho:

> Atualmente os programas de monitoria têm se firmado no ensino universitário como uma possibilidade de aprendizagem e de prática didático-pedagógico que contribui para a formação do discente do ensino superior, possibilitando ao estudante desenvolver atividades ligadas a área de conhecimento de seu curso (Nascimento, Silva & Souza, 2010).

Como aluna do curso de licenciatura em Matemática e bolsista do programa, posso relatar que o desenvolvimento do programa se mostra como uma ótima ferramenta para o processo de ensino-aprendizagem, cabe ressaltar também a contribuição para a desenvoltura das competências didático-pedagógicas.

Com o intuito de ajudar aos estudantes da disciplina de Matemática Básica I, é possível perceber o rendimento conquistado, por meio das preparações de aula, onde requer não só a sequência com que se dará a aula, mas também a procura por quais conteúdos levar como revisão, ou seja, é preciso ser um bom observador e tentar sentir de onde vem a falha maior dos estudantes.

Além disso, a busca por metodologias e práticas pedagógicas mais eficiente foi bem marcante, pois apesar dos desafios encarados, gerou uma grande experiência para a formação.

> Além de promover o enriquecimento da vida acadêmica do educando, a atividade de monitoria possibilita, por meio da relação de cooperação existente entre docente e monitor, o aprimoramento da qualidade de ensino da disciplina, uma vez que favorece a adoção de novas metodologias de ensino, bem como impulsiona o exercício da pesquisa acadêmica, permitindo uma contínua associação entre teoria e prática. (LINS, 2008 apud SOARES e SANTOS, 2008, p.2).

A interação com o professor orientador, abriu novos horizontes para o monitor, de forma a contribuir para a desenvolvimento intelectual e profissional, por meio das orientações de como lidar com os académicos, dicas sobre os conteúdos e até mesmo pelo esclarecimento de alguns assuntos, assim a monitoria passa a ser vista além de uma atividade curricular, mas também uma ação incentivadora à docência, visto que a relação teórico-prática caminha paralelamente. Esta oportunidade favorece ao aluno uma chave para encontrar-se com a docência, de forma a se descobrir se realmente é aquele ramo que almeja ter para sua vida, gerando assim novas perspectivas para o mundo acadêmico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A monitoria acadêmica é considerada como um momento de conviver com o futuro espaço de trabalho ainda no período de formação. Dessa forma, o programa vem a proporcionar um encontro com desafios, deficiências, problemas e satisfações que a profissão docente dispõe, propiciando um melhor preparamento para enfrentar a sua profissão. Com isso, o presente artigo tinha como objetivo, relatar as experiências vivenciadas no período da monitoria de geometria analítica destacando as contribuições para a formação docente e a eficiência do programa para o ensino.

A partir da experiência vivenciada na monitoria, conclui-se que contribui significativamente para a formação docente do aluno-monitor, subsidiada pelo aparato pedagógico vivido nas atividades concretizadas no programa. Onde possibilitou um grande enriquecimento para a vida acadêmica do monitorando, promovendo um aprimoramento para a relação ensino-aprendizagem.

É importante ressaltar a notável contribuição para a aprendizagem dos alunos monitorados, vindo a trazer bons resultados para o desenvolvimento da disciplina monitorada. Além disso, os compartilhamentos de saberes, a relação com o professor orientador e os discentes participantes das aulas, integraram o desenvolver intelectual e social do bolsista, onde forneceu uma ampliação dos conhecimentos específicos da área, novos horizontes e perspectivas na academia.

Desse modo, percebemos que o programa de monitoria vem unir as teorias com as práticas pedagógicas, tornando o aluno graduando mais próximo da execução profissional. É entendido que a docência requer atenção e bastante estudo, onde a cada dia aparecem novos desafios e aprendizados, que venha a possibilitar novos caminhos e diferencial no meio formativo. Portanto, a orientação docente de significativa relevância, possibilitou desenvolver com sucesso as atividades previstas, a fim de contribuir para a disciplina de Matemática Básica I, onde resultou de grande estímulo e enriquecimento ao interesse pela docência.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

TROMBETTA, M.; MARTINS ALVARENGA, A. **MONITORIA DE MATEMÁTICA BÁSICA I E ÁLGEBRA LÍNEAR: UMA EXPERIÊNCIA NO CAMPUS DE CAÇAPAVA DO SUL** - aluna autora: Mariane Cristina trombeta - orientador: André Martins alvarenga.

LÍNEAR: **Acadêmica.** Disponível em:<https://www.educamaisbrasil.com.br/educacao/noticias/monitoria-academica-o-que-e-e-por-que-e-tao-importante> acesso em: 10/04/2020

NASCIMENTO, C. R., SILVA, M. L., &SOUZA, P. X. (2010). **Possíveis Contribuições das atividades de monitoria na formação dos estudantes-monitores do curso de L., & Universidade Federal de Pernambuco -UFPE. Pernambuco: UFPE.**

SCHNEIDER, M. S. P. dá S. **Revista espaço acadêmico. Monitoria: instrumento para trabalhar com a diversidade de conhecimento em sala de aula.** Brasil, 2006.

SOARES, M. A. A.; SANTOS, K. F. **A monitoria como subsídio ao processo de ensino-aprendizagem**: **Ocaso da disciplina Administração Financeira no CCHSA-UFPB.2008.** p. 2. Disponível em: <http://www.prac.ufpb.br/anais/xenex_xienid/xi_enid/monitoriapet/ANAIS/Area4/4CCHSADCSAMT04.pdf>. Acesso em: 08 maio. 2020.

CAPÍTULO 10

O ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS COM O USO DO TANGRAM: UMA ABORDAGEM DE GEOMETRIA PARA O ENSINO MÉDIO

Márcio de Lacerda Carvalho

Carlos Renêe Martins Maciel

João Evangelista de Oliveira Neto

RESUMO

O ensino de geometria muitas vezes não é desenvolvido de maneira adequada, ou nem mesmo é contemplado em algumas salas de aulas, ficando estes conteúdos, em segundo plano, em detrimento ao ensino da álgebra. Neste cenário, percebemos um *déficit*, no ensino de geometria de forma significativa e com materiais lúdicos, pois, por vezes, essa linha de percepção do ensino pode demandar bastante tempo do professor e de suas aulas. Assim, o objetivo deste trabalho é propor uma sequência didática em que a aprendizagem do conhecimento geométrico seja facilitada através de diferentes abordagens didáticas, tais como integrar as tecnologias digitais e recursos pedagógicos lúdicos, a fim de tornar as aulas de Matemática, em especial, de geometria, mais interessantes e atrativas, dentro de um contexto cotidiano dos estudantes. Nesta perspectiva, para efeito da pesquisa, replicamos dois módulos, com recortes, que tratam do raciocínio geométrico e do ensino do Teorema de Pitágoras, desenvolvidos durante um curso de formação continuada para professores de Matemática no estado do Ceará, configurando nosso trabalho como qualitativo e epistêmico, isto é, metodologicamente, nossa pesquisa é de caráter bibliográfica, do ponto de vista dos procedimentos técnicos e, explicativa, do ponto de vista dos objetivos (PRODANOV; FREITAS, 2013). Portanto, podemos afirmar que, é possível construir o conhecimento através de um processo contínuo de aperfeiçoamento do ensino com todos os envolvidos nas práticas pedagógicas, ao utilizarmos o lúdico, no processo educativo de forma planejada e por meio de um ensino reflexivo da Matemática durante todas as fases do processo pedagógico.

Palavras-chave: Ensino de Geometria. Tangram. Teorema de Pitágoras.

INTRODUÇÃO

Falar de processos de ensino, em especial do ensino de geometria, não é algo tão singelo, pois o professor deve considerar um leque de metodologias de ensino que tem à sua disposição, os diversos níveis cognitivos dos seus alunos e o tempo de execução das atividades que o mesmo dispõe para desenvolver sua sessão didática, ou aula, dentre outros fatores.

Nesta perspectiva, por vezes, o ensino de geometria é omitido dos currículos desenvolvidos em sala de aula, ou praticados de maneira indevida, dando-se pouca importância a este ramo da Matemática e à construção do pensamento geométrico dos estudantes, em especial, ao conceito e aplicação do Teorema de Pitágoras, o que determina nossa pergunta norteadora de pesquisa, ou seja, como desenvolver uma sequência didática sobre o Teorema de Pitágoras com o material concreto "tangram", de modo que gere reflexão crítica e aprendizagem significativa?

Corroborando com nosso pensamento inicial, D'Ambrósio (1989, p. 18), afirma que "[...] são diversas as linhas metodológicas enfatizando a construção de conceitos matemáticos pelos alunos, onde eles se tornam ativos na sua aprendizagem. [...] A melhoria do ensino de matemática envolve assim, um processo de diversificação metodológica [...]".

Em outros termos, as tecnologias da informação e comunicação, a História da Matemática, o uso do material concreto e de vídeos, o trabalho em grupo, a resolução de problemas e as demais tendências e metodologias dentro da Educação Matemática, propõem auxiliar professores e estudantes no processo pedagógico, de modo que, a distância entre o ensino e a aprendizagem significativa de Matemática seja cada vez menor, bem como a participação ativa do aluno na construção do seu conhecimento, em especial, na construção do pensamento geométrico.

No percurso metodológico deste trabalho serão desenvolvidas e aplicadas atividades onde faz-se uso de algumas das linhas metodológicas acima citadas, que servirão de suporte, na constituição do conhecimento geométrico a ser desenvolvido pelo aluno.

O principal objetivo deste trabalho é, propor uma sequência didática em que a aprendizagem do conhecimento geométrico seja facilitada através de diferentes abordagens didáticas, estimulando a construção desse conhecimento a partir de uma vivência prática por meio da manipulação de material concreto, do uso de ferramentas digitais e da resolução de situações problemas, para que conheçam, compreendam e apliquem o Teorema de Pitágoras nas mais diversas situações, contribuindo, dessa forma, para uma busca constante da melhoria do desempenho dos alunos, através de um ensino reflexivo da Matemática que gere um aumento de proficiência em Matemática, nestes.

Nesse viés, trataremos sobre o desenvolvimento do curso de Especialização em Qualificação do Ensino de Matemática do Estado do Ceará, ofertado pela Secretaria de Educação de Estado do Ceará (SEDUC-CE), em parceria com a Universidade Federal do Ceará (UFC), as trocas de experiências entre pares, as competências e habilidades que o professor de Matemática deve dispor, a formação do professor de Matemática, a busca constante pela melhoria do desempenho dos alunos e da proficiência em Matemática, e o estudo e aplicação dos módulos e dos componentes curriculares abordados no referido curso de formação continuada.

REFERENCIAL TEÓRICO

O papel do professor no processo de ensino e aprendizagem

Pensamos que, a melhor forma de iniciar o processo de ensino é saber fazer a pergunta certa para que se possa encontrar a resposta correta, ou a melhor resposta, e sempre trazendo para a realidade do aluno, para o seu cotidiano.

Toledo e Toledo (2009), afirmam que a geometria, por exemplo, é um campo de estudo muito propício ao desenvolvimento de diversas formas de raciocínio, e na resolução de problemas que precisam ser visualizados e modelados através de figuras geométricas, melhorando o desempenho nas atividades geométricas mais do que nas numéricas.

No momento em que o aluno se apropriar deste conhecimento, facilmente ele terá como acelerar nos conhecimentos anteriormente citados, havendo uma diminuição do desinteresse pela Matemática, como também das dificuldades que, porventura surjam, obtendo, desta forma, uma melhor compreensão do conteúdo ministrado. E é com base no que foi exposto que entendemos que o professor deve propor atividades desafiadoras ao aluno, estimulando-o a ir mais longe, a interagir com os colegas e o docente, a crescer no conhecimento matemático, a se desenvolver como educando e como ser social.

Neste contexto, desafiar o aluno é apresentar-lhe situações complexas que não sejam impossíveis de resolvê-las, e ao mesmo tempo, provocar-lhe uma certa tensão que o auxilie a ousar, a pensar, a explorar os conhecimentos que possui, adquiridos em outros contextos de aprendizagem, a testar a sua capacidade de execução de tarefas avançadas, a interagir com os seus colegas, e a fazer perguntas que o ajude a avançar (SADOVSKY, 2007), sempre acreditando que ele possui o conhecimento necessário para refletir sobre qual a estratégia inicial a ser adotada e prosseguir até a solução final.

É emergente e urgente, que a aprendizagem da Matemática seja significativa, sendo atraente para os estudantes de Matemática da educação básica. Para isso, será necessário ela se integrar aos novos tempos e fazer uso das tecnologias e das demais metodologias já existentes no mundo globalizado fora dos muros da escola, na qual, também devem ser admitidas dentro delas. Ou seja, o professor não dispor de uma única metodologia de ensino, pois a globalização não concebe mais este tipo de ensino, isto é, "é difícil, num trabalho escolar, desenvolver a Matemática de forma rica para todos os alunos se enfatizarmos apenas uma linha metodológica única" (D'AMBRÓSIO, 1989, p. 18).

Com a grande quantidade de informações existentes na internet, é papel do professor, mostrar aos alunos as possibilidades de aprendizagem que eles possuem ao fazerem pesquisas, afinal, nos dias atuais, a aprendizagem não ocorre somente dentro da sala de aula ou da escola. A aprendizagem pode ser concedida em diversos contextos e ambientes, sejam eles formais ou informais.

O uso da informática é um suporte para as aulas de Matemática, pois, existem diversos sites e *softwares* que facilitam o processo de aprendizagem, além de vídeos, reportagens, textos e outros recursos didáticos que podem ser usados para concretizar algo que por vezes fica apenas no mundo das ideias e da abstração matemática.

Nesse sentido, pensamos que o professor tem que exercer o papel de orientador, mediador e monitor das atividades propostas aos alunos, para que estas, sejam realizadas de forma interativa e cooperativa a qualquer momento, de forma contínua, e durante todo o processo de ensino-aprendizagem, contribuindo significativamente, entre outros aspectos, na sua formação social. O uso das tecnologias é primordial para a melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática, como também de outras disciplinas escolares.

Durante o processo em sala de aula, tem-se demonstrado que não existe, essa ou aquela, única maneira de ensinar e/ou aprender Matemática; pelo contrário, quanto mais formas utilizarmos, maior será a quantidade de alunos que aprenderão com mais qualidade.

Para o universo diversificado de alunos existentes, faz-se necessário diversificar também as metodologias usadas no processo de ensino. D'Ambrósio relata que "a melhoria do ensino de matemática envolve, assim, um processo de diversificação metodológica, porém, tendo uma coerência no que se refere a fundamentação psicológica das diversas linhas abordadas" (D'AMBRÓSIO, 1989, p. 18).

A função do professor de Matemática vai muito além do que ensinar fórmulas, regras, dicas ou qualquer outra forma dos alunos se saírem bem em vestibulares, concursos, ou até mesmo nas avaliações escolares. No lugar de mostrar como se faz, pensamos que é devido ao professor, ensinar

como raciocinar, para que os estudantes deixem de ser meros repetidores e passem a ser construtores do conhecimento, compartilhando o que lhes foi ensinado.

Segundo Vasconcelos (1995, p. 53), as “novas ideias abrem possibilidades de mudança, mas não mudam. O que muda a realidade é a prática. [...] A mudança de mentalidade se dá pela mudança de prática”.

A aprendizagem com significado para o aluno, ocorrerá, desde que, o professor coloque o discente como o centro do processo educacional, sendo ele o construtor de seu conhecimento, de forma ativa e contínua (FINO, 2016).

Perspectivas sobre o ensino e aprendizagem do Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é um assunto base ao estudo da trigonometria, tanto nas séries finais do Ensino Fundamental como ao Ensino Médio. Nos eixos temáticos grandezas e medidas, e espaço e forma, encontrados na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), é importante a compreensão dos conceitos geométricos, pois tais conceitos são de fundamental relevância para o ensino da Matemática.

E é através desta compreensão, que o aluno irá desenvolver outra forma de pensar, refletir e sintetizar, construindo conhecimentos e compartilhando significados, como também a construção do conteúdo de aprendizagem por meio da ação do professor.

O uso do Teorema de Pitágoras na geometria plana, espacial e analítica é de grande importância e aplicabilidade. Por se tratar de algo presente no cotidiano do estudante, esperamos que ele possa mostrar um grande interesse em aprender, além de se familiarizar com o tema, e ver a sua utilidade e aplicabilidade: nos telhados das casas, no esquadrejamento de uma sala, nos apoios triangulares de uma prateleira de madeira (também conhecidos como “mão francesa”), nas escadas rolantes ou não, dentre outros locais.

O uso de diferentes estratégias de ensino, recursos e metodologias são fundamentais para a aprendizagem da Matemática, pois é através da interação do aluno com os recursos disponibilizados pelo professor, com seus colegas e com o próprio professor, que ele desenvolverá um processo de aprendizagem cooperativa, colaborativa, com a contribuição de seus pares, tornando o seu aprendizado prazeroso e significativo.

Na História da Matemática, constatou-se que o Teorema de Pitágoras era de conhecimento dos babilônios desde o tempo de Hamurabi, sendo que ele não fora demonstrado pelos mesmos. A sua primeira demonstração pode ter sido dada por Pitágoras, segundo Eves (2011).

Muitas das descobertas matemáticas surgiram como respostas às perguntas motivadas por problemas de origem prática (divisão de terras, cálculos de impostos, etc.), problemas envolvendo outras ciências (Física e Astronomia) e problemas relacionados à própria Matemática (BRASIL, 1998).

Nesse viés, percebemos que o Teorema de Pitágoras serve de alicerce para diversas outras áreas da Matemática e da Física, tais como: Trigonometria; Geometria Plana, Analítica e Espacial; Estudo de Vetores (na Física), e de outras Ciências. Além, de estar presente nas provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), vestibulares e concursos.

Em contrapartida, percebemos que há um *déficit* de aprendizagem sobre esta temática nas salas de aulas, bem como um determinado nível de desinteresse dos alunos pela Matemática, em geral. Talvez, a menor parcela de uma turma é que realmente se preocupe com a aprendizagem de Matemática, em preparar-se para entrar numa faculdade ou num emprego público, consciente de que este último exige uma aprovação satisfatória em um concurso.

A partir desta problemática sobre o ensino e aprendizagem do Teorema de Pitágoras, mostraremos, a seguir, uma maneira sugestiva, de como o professor pode desenvolver uma sessão didática, ou seja, uma aula, sobre esse conceito em sala de aula, a partir da utilização de um material concreto e lúdico, doravante denominado de tangram.

O Tangram no ensino de Matemática

Tangram é uma palavra chinesa que significa “sete peças de habilidade”. O tangram é um jogo de quebra-cabeças chinês, formado por 7 (sete) figuras planas: 2 (dois) triângulos grandes, 1 (um) triângulo médio, 2 (dois) triângulos pequenos, 1 (um) quadrado e 1 (um) paralelogramo. Justapostas, essas peças formam um quadrado. Porém, pode-se construir diversas figuras usando as 7 (sete) peças.

No contexto do uso do tangram como ferramenta lúdica e didática para a aprendizagem de Matemática, Benevenut e Santos (2016, p. 6), afirmam que este artefato “[...] estimula o espírito de investigação, o interesse, a criatividade e o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas”, fatores estes, que consideramos cruciais para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, no qual se espera resultar numa aprendizagem que disponha de signos cognitivos para cada estudante.

Diante disto, quanto mais os estudantes manipulam o tangram e desenvolvem interesse investigativo matemático a partir do uso do referido jogo chinês, maiores distâncias os estudantes desenvolvem nas zonas cognitivas que separam o que o aprendiz sabe do que ele é capaz de fazer

(VYGOTSKY, 1991), aumentando, em consequência, a sua proficiência e diminuindo as barreiras com o saber matemático.

Na perspectiva da proposta em que a aprendizagem de geometria, utilizando o tangram como recurso lúdico manipulável, seja motivo de reflexão e pensamento crítico entre os estudantes, Pereira e Morais (2019), corroboram conosco ao afirmarem que, com o tangram

> [...] conseguimos proporcionar aos alunos o debate e a exposição de suas ideias a partir da observação e manipulação. Conseguimos também estimular a criatividade, o desenvolvimento do raciocínio e comunicação de forma satisfatória, despertando ações inovadoras e criativas. (PEREIRA; MORAIS, 2019, p. 130)

Na sessão seguinte, veremos como o uso do tangram foi utilizado como ferramenta didática favorável à aprendizagem do Teorema de Pitágoras para os estudantes da 3ª série do ensino médio de uma escola pública da cidade de Fortaleza-CE.

MATERIAIS E MÉTODOS

Após a etapa do levantamento de dados bibliográficos utilizados para fundamentar nossa pesquisa, aplicamos a metodologia proposta para fins pedagógicos e metodológicos, em sessões didáticas com alunos de três turmas de 3ª série do Ensino Médio de uma escola pública estadual localizada na cidade de Fortaleza, capital do estado do Ceará.

Acerca do procedimento técnico, ou seja, como obtivemos os dados necessários para a pesquisa, utilizamos o levantamento bibliográfico, ou seja, material já publicado (PRODANOV; FREITAS, 2013) e, a partir de então, desenvolvemos uma pesquisa exploratória, ou seja, com o objetivo de "[...] proporcionar mais informações sobre o assunto que vamos investigar [...]" (PRODANOV; FREITAS, 2013, pp. 51-52).

O Teorema de Pitágoras com o uso do tangram

A partir das discussões fomentadas no curso de formação continuada da Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC-CE), em parceria com a Universidade Federal do Ceará (UFC), no biênio 2018-2019, e do material didático utilizado neste processo formativo, dividimos a sessão didática sobre o Teorema de Pitágoras em 4 (quatro) etapas, para ser desenvolvida, em sala de aula, sob a ótica de ser uma maneira diferenciada das abordagens corriqueiras com as quais os estudantes estão, possivelmente, acostumados. Cada etapa se deu no decurso de 1 (uma) aula de 50

(cinquenta) minutos, ou seja, para se completar o ciclo didático, usamos 4 (quatro) aulas sequenciais de cinquenta minutos.

1ª Etapa: Exposição, debate e resolução de exercícios

Nesta etapa inicial, foi informado aos estudantes que se faria uma revisão sobre o Teorema de Pitágoras. Para isso, foi desenhado um triângulo retângulo no quadro branco e indagado aos discentes: *"Alguém pode dizer que figura é essa que acabamos de desenhar?"*. Alguns estudantes respondem, simplesmente, que se tratava de um triângulo, e outros, responderam que era um triângulo retângulo.

A partir desta provocação inicial, seguimos para mais questionamentos *a priori*: *"Quais são as características que identificam esse triângulo como retângulo?"*. A maioria dos alunos responderam que é por possuir um ângulo de 90°, ou seja, um ângulo reto.

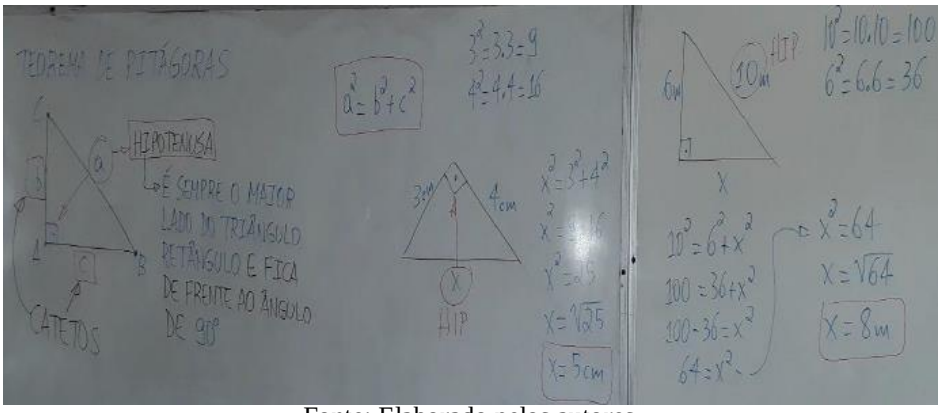
Salientamos que, para este questionamento, alguns estudantes ficaram calados, o que nos leva a pressupor que estes não consolidaram tais noções geométricas em séries anteriores.

Fizemos uma nova pergunta provocativa: *"Como são chamados os seus lados?"*. Alguns alunos permanecem calados, mas a grande maioria responde que se trata de cateto e hipotenusa.

Após esse debate inicial, identificamos no triângulo desenhado no quadro branco, a hipotenusa. A partir daí, comentamos que a mesma, é o lado que está sempre de frente (lado oposto) ao ângulo reto, e que é sempre o maior lado do triângulo retângulo. Os outros dois lados, são os catetos.

Em seguida, escrevemos e explicamos o Teorema de Pitágoras, em caráter de revisão de conteúdo; resolvemos 2 (dois) exercícios como exemplos (figura 1); e, entregamos aos alunos, um texto feito de recortes dos módulos "Raciocínio Geométrico" (MEDEIROS, 2019) e "Senos, cossenos e o Teorema de Pitágoras" (PIMENTEL, 2019), sobre a história do Teorema de Pitágoras. Desse texto, foi feito a leitura e explanação do mesmo, por parte do docente.

Figura 1 – Exemplos do Teorema de Pitágoras



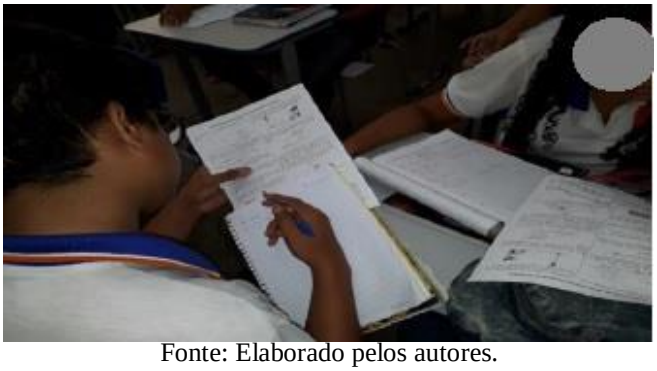
Fonte: Elaborado pelos autores.

2ª Etapa: Leitura e discussão de texto, lista de exercícios e resolução da lista

Na segunda aula, na qual estamos chamando de 2ª etapa, iniciamos a sessão didática com um diálogo acerca de tentar verificar o que os alunos acharam do texto, se compreenderam o assunto abordado, quais as principais dificuldades encontradas e o que eles aprenderam sobre o Teorema de Pitágoras.

Em sequência, disponibilizamos aos estudantes uma lista com 10 (dez) exercícios, de modo que fossem resolvidos por alunos dispostos em grupos de dois em dois, ou seja, em duplas, e que as soluções fossem apresentadas ao professor para as devidas averiguações e intervenções pedagógicas.

Figura 2 – Dupla de alunos resolvendo a Lista de Exercícios

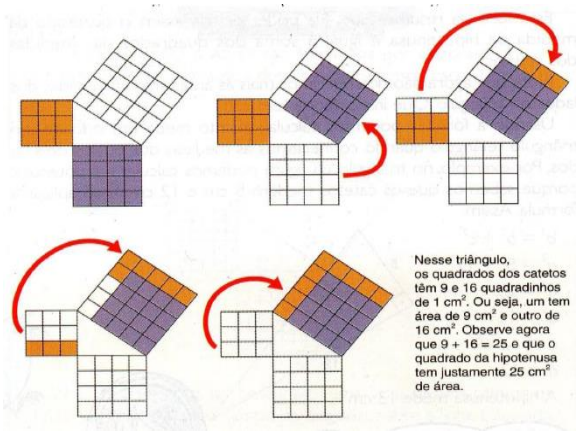


Fonte: Elaborado pelos autores.

3ª Etapa: Vídeo de demonstração do Teorema de Pitágoras

Nesta terceira etapa do processo didático, iniciamos com a apresentação do vídeo "Matemática em 3D - Teorema de Pitágoras", disponível em https://www.youtube.com/watch?v=9R-ZGdKqxJ8, sobre a demonstração do Teorema de Pitágoras usando a ideia de quadrados e suas respectivas áreas. Este vídeo, mostra com detalhes, a demonstração abaixo (Figura 3):

Figura 3 – Demonstração do Teorema de Pitágoras usando a noção de área preenchida com quadradinhos



Fonte: Imenes; Lelis, 2008, p. 15.

Após a exibição do vídeo, e esclarecimentos por parte do professor, os alunos afirmaram que o vídeo foi *"bastante esclarecedor"* e que *"ajudou a entender o assunto"*. Estes, verificaram como a Matemática pode ser aprendida de uma forma divertida e bem diferente do modelo bancário de educação (FREIRE, 1979), doravante tradicional, e ainda muito presente nas escolas brasileiras.

Para finalizar esta etapa, reforçamos às explicações apresentada no vídeo, usando um triângulo retângulo com lados 3 cm, 4 cm e 5 cm, tomado como exemplo particular.

Observemos que os múltiplos de 3, 4 e 5, tomados como exemplo, também satisfazem o Teorema de Pitágoras. Temos que:

- Se a = 5·2 = 10 cm, b = 4 ·2 = 8 cm e c = 3 ·2= 6 cm, então, $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 10^2 = 8^2 + 6^2$;
- Se a = 5 ·3 = 15 cm, b = 4·3 = 12 cm e c = 3 ·3 = 9 cm, então, $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 15^2 = 12^2 + 9^2$;
- Se a = 5 ·4 = 20 cm, b = 4 ·4 = 16 cm e c = 3 ·4 = 12 cm, então, $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 20^2 = 16^2 + 12^2$.

4ª Etapa: Demonstração do Teorema de Pitágoras usando o tangram

Nesta quarta sessão didática, ou quarta aula da sequência, entregamos 4 (quatro) tangrans de acrílico, em que cada um é formado por um quadrado de 20 cm de lado, para uma dupla de alunos e solicitamos que usassem dois deles como os catetos do triângulo retângulo. Em seguida, usando os outros dois tangrans, eles deveriam formar um quadrado sobre a hipotenusa.

Para este momento da 4ª etapa, determinamos um tempo de 5 (cinco) minutos, para que a dupla conseguisse concluir a tarefa proposta. Na condição em que a dupla atual não conseguisse realizar a tarefa dentro do tempo estipulado, outra dupla tentaria resolver o desafio lançado.

Através do método da tentativa e erro, várias duplas tentaram e duas delas conseguiram concluir com êxito o problema em questão, obtendo as soluções 1 e 2 (Figura 4). Dessa forma, ficou provado o Teorema de Pitágoras a partir do uso de um material concreto, o tangram, pelos próprios estudantes.

Figura 4 – Soluções apresentadas pelos estudantes

Solução 1	Solução 2

Fonte: Elaborado pelos autores.

A seguir, faremos uma breve discussão dos resultados alcançados com esta atividade de geometria, a partir de uma ferramenta lúdica, para explicar a demonstração do Teorema de Pitágoras, diferenciando-se do método tradicional de explanação e demonstração usando quadro-branco, pincel e abstração matemática.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Durante as etapas de demonstração do Teorema de Pitágoras, a partir das atividades desenvolvidas pelos alunos, foi possível diagnosticar deficiências, estratégias e habilidades destes estudantes. Foram observadas as metodologias utilizadas para tentarem resolver os exercícios, bem como o problema da demonstração do Teorema de Pitágoras usando o tangram, e os diversos recursos utilizados, além da atuação dos alunos participantes.

Os discentes partícipes das atividades, tiveram um pouco de dificuldade na confecção do quadrado usando os dois tangrans, pois nunca tinham trabalhado com investigações matemáticas com a manipulação de material concreto e de forma contextualizada.

Apresentaram dificuldade para destacar, nas figuras, aqueles elementos importantes para a resolução das atividades propostas. Além disso, surgiu a necessidade de se interpretar texto e de se ter uma visão abstrata, e isso, foi outro problema a ser superado.

Entretanto, no decorrer sessões didáticas, eles procuraram discutir as suas dúvidas com os colegas no grupo, ou com os colegas de outros grupos, pois perceberam que deveriam traçar estratégias para resolverem as atividades sem a necessidade da intervenção do professor.

A partir desse envolvimento nas atividades, e com a interação entre os pares, aqueles alunos que se mostraram mais aptos, tomaram a iniciativa de auxiliar na aprendizagem dos que apresentavam maiores dificuldades sobre o conteúdo matemático em questão (Teorema de Pitágoras), ocasionando a construção do conhecimento de forma cooperativa, contínua e, estabelecendo um processo de monitoria.

Mesmo assim, em alguns momentos, fez-se necessária a mediação do docente com a finalidade de sanar as dúvidas, dar dicas e incentivar os estudantes a chegarem às suas próprias conclusões. Nessa concepção, os discentes não receberam o conhecimento pronto, eles o construíram ao longo das etapas didáticas.

Pensamos que, cabe ao professor, ter a criatividade aguçada, juntamente com um bom planejamento, e saber usar as novas metodologias do ensino da Matemática a seu favor, para tornar mais dinâmica e atraente a sua prática pedagógica.

O grande estímulo é tornar a Matemática mais atrativa e interessante, no qual os educandos e o professor possam trocar experiências e informações a fim de aprenderem juntos, tornando a terna (aluno, professor, saber matemático) (BORGES NETO et al., 2001), uma prática constante de sala de aula.

Para encerrar esta sessão, apresentamos o quadro 1, que mostra a proficiência em Matemática dos estudantes da 3ª série da escola que foi desenvolvida a pesquisa, com base nos resultados da avaliação em larga escala do Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE), entre os anos 2017 e 2019, período que compreende a realização do curso de formação continuada e desenvolvimento da pesquisa.

Quadro 1: Proficiência em Matemática (SPAECE) entre os anos 2017 à 2019.

2017	2018	2019
260,8	248,2	246,0

Fonte: Caed/UFJF. Acesso em 08.09.21.

Após o período de desenvolvimento e aplicação da pesquisa, não tivemos como mensurar os resultados alcançados, tendo em vista que no ano de 2020 não houve aplicação do SPAECE, em virtude da pandemia do Coronavírus e da realização de aulas remotas na rede estadual de ensino

cearense. Logo, temos estes dados, como dados parciais frente ao objetivo proposto, que é o de aumentar a proficiência em Matemática dos alunos partícipes da investigação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, buscamos perceber, através de uma aplicação prática, que ao utilizarmos o lúdico no processo educativo de forma planejada, e através de um ensino reflexivo da Matemática durante todas as fases desse trabalho, constrói-se o conhecimento que desejamos aos estudantes, através de um processo contínuo de aperfeiçoamento do ensino com todos os envolvidos nessas práticas pedagógicas, perpassando por uma aprendizagem significativa da Matemática.

Com isso, observamos que o uso das tecnologias e do lúdico, é primordial para a melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática, em especial, ao ensino de Geometria, pois a visualização e o objeto concreto são cruciais ao entendimento e consolidação do conhecimento matemático (ALVES, 2013).

Com o auxílio dos recursos pedagógicos usados, e com o envolvimento dos alunos, ficou notório como o uso da História da Matemática e das situações-problemas encontradas na lista de exercícios, facilitaram a aprendizagem do tema proposto. As aulas tornaram-se bastante interessantes, na concepção dos discentes. Eles se engajaram com muita dedicação, participação ativa e curiosidade.

Em nosso conceito, pensamos que todo processo de aprendizagem deve ser reflexivo. Acompanhar e observar o aluno, ajudar o professor a saber a individualidade de cada um e as diversas possibilidades de aprendizagem a que dispõe, a fim de atender a todos, ou seja, realizar um acompanhamento adequado qualifica o ensino do professor, a aprendizagem do aluno e estabelece uma relação de parceria entre ambos na construção do conhecimento, construindo significados e modificando a prática destes.

Dessa forma, o aluno irá desenvolver as habilidades e competências necessárias para aplicar na sua vida diária, estudantil e profissional, principalmente a aprendizagem de competências socioemocionais, pois todas as atividades serão feitas de maneira cooperativa, tornando a aprendizagem significativa.

Todavia, ficamos com uma lacuna com relação aos resultados esperados, pois como dito, em 2020 não houve avaliação do SPAECE. Portanto, deixamos como perspectiva futura que, outros autores que se interessem pela proposta pesquisada, ou até mesmo nós, possamos dar continuidade a análise dos dados que norteiam nosso trabalho.

REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V. Discussão do ensino de integrais impróprias com amparo da tecnologia. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11., 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba: SBEM, 2013. p. 1-8. Disponível em: https://www.academia.edu/38060540/Anais_do_XI_Encontro_Nacional_de_Educa%C3%A7%C3%A3o_Matem%C3%A1tica_ISSN_2178_034X_P%C3%A1gina_1_XI_Encontro_Nacional_de_Educa%C3%A7%C3%A3o_Matem%C3%A1tica_DISCUSS%C3%83O_DO_ENSINO_DE_INTEGRAIS_IMPR%C3%93PRIAS_COM_AMPARO_DA_TECNOLOGIA. Acesso em: 28.04.21.

BENEVENUTI, L. C.; SANTOS, R. C. O uso do tangram como material lúdico pedagógico na construção da aprendizagem de matemática. In: Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 10., 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-11. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6458_3698_ID.pdf. Acesso em: 08.09.21.

BORGES NETO, H. *et al*. A Sequência de Fedathi como proposta metodológica no ensino-aprendizagem de matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas. In: Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste. Educação – EPENN, 15, **Anais...** São Luís, 2001. Disponível em: http://www.multimeios.ufc.br/arquivos/pc/fedathi/fedathi-a-sequencia-de-fedathi-como-proposta.pdf. Acesso em: 28.04.21.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais (5ª a 8ª séries):** Matemática**.** Brasília: MEC, 1998.

_____. **Base nacional comum curricular – BNCC.** Brasília: MEC, 2018.

D'AMBRÓSIO, B. S. Como ensinar Matemática Hoje? **Temas e debates**, v. 1, n. 2. Brasília: SBEM, 1989. p. 15 – 19. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/td/article/view/2651/1846. Acesso em: 19.04.21.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

FINO, C. N. Matética e inovação pedagógica: o centro e a periferia. In: GOUVEIA, F.; PEREIRA, G. (Orgs.). **Didática e matética.** Funchal: CIE-UMa, 2016. p. 251 – 257.

FREIRE, P. **Educação e mudança.** 12 ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1979.

IMENES, M. L; LELIS, M. **Descobrindo o Teorema de Pitágoras.** São Paulo: Scipione, 2008.

MEDEIROS, E. **Raciocínio geométrico.** Fortaleza: UFC, 2019.

PEREIRA, J; MORAIS, A. C. L. O tangram como material manipulativo no ensino da matemática dos anos finais do ensino fundamental. **Horizontes**, v. 7, n. 13, p. 111 – 131. Dourados: FAED, 2019. Jan./jun. 2019. Disponível em: file:///C:/Users/55859/Downloads/9844-32032-1-PB.pdf. Acesso em: 08.09.21.

PIMENTEL, F. A. A. **Senos, cossenos e o Teorema de Pitágoras.** Fortaleza: UFC, 2019.

PRODANOV, C. C; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico:** métodos e técnicas de pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hambrugo: Feevale, 2013.

SADOVSKY, P. **O ensino de matemática hoje:** enfoques, sentidos e desafios. São Paulo: Ática, 2007.

TOLEDO, M. B. A.; TOLEDO, M. de A. **Teoria e prática de Matemática: como dois e dois.** São Paulo: FTD, 2010.

VASCONCELOS, C. S. **Avaliação:** concepção Dialética-Libertadora do processo de avaliação escolar**.** 7ª Edição. São Paulo: Libertad, 1995.

VYGOTYSKY, L. S. **A formação social da mente.** 4 ed. São Paulo: Martins Filho, 1991.

SOBRE OS AUTORES

Márcio de Lacerda Carvalho. Mestrando em Matemática pela Universidade de Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB) – BR. Professor da Secretaria de Educação do Estado do Ceará e da Secretaria Municipal de Educação de Fortaleza.

Carlos Renêe Martins Maciel. Mestre em Educação pela Universidade da Madeira (UMa) – PT. Professor da Secretaria de Educação do Estado do Ceará e da Secretaria Municipal de Educação de Fortaleza.

João Evangelista de Oliveira Neto. Doutorando em Ensino pela Universidade Federal do Ceará (UFC) – BR. Professor da Secretaria de Educação do Estado do Ceará.

CAPÍTULO 11

OFICINA DE MATEMÁTICA: ANÁLISE E REFLEXÃO DOS SABERES E HABILIDADES PRIORITÁRIOS DE MATEMÁTICA A PARTIR DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA 2021.1

Johnantan Pereira Gonsalves[10]

Tatiana Rodrigues Lima[11]

RESUMO

O presente artigo tem por objetivo relatar as experiências vivenciadas na Oficina de Matemática no âmbito do Programa Foco na Aprendizagem, demonstrando a análise e reflexão dos saberes e habilidades prioritárias de Matemática a partir da Avaliação Diagnóstica 2021.1 da CREDE 04. Com o desenvolvimento dessa oficina foi perceptível, que embora um pouco resistentes inicialmente, os professores se mostraram participativos e com mais interesse nas aulas de matemática. Através da oficina e das atividades que serão descritas nesse relato verificou-se um resultado positivo diante dos depoimentos coletados dos mesmos. Por fim, é possível afirmar que esse tipo de metodologia é bastante importante dentro das formações continuadas dos professores, além de contribuir significativamente para a aprendizagem do discente.

Palavras-chave: Oficina de Matemática. Foco na Aprendizagem. Estratégias Diversificadas. Metodologias Ativas. Formação Continuada.

10 Graduado em Matemática pelo Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará, mestrando em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Ceará – PROFMAT-UFC, professor de Matemática da EEEP Monsenhor Expedito da Silveira de Sousa (Camocim) e formador regional do Programa de Formação de professores para o fortalecimento da aprendizagem em Matemática – Foco na Aprendizagem (CREDE 04).

11 Licenciada em Química pela Universidade Estadual Vale do Acaraú, Especialista em Bioquímica pela UNINTA e em Gestão Escolar pela Universidade Cândido Mendes. É professora efetiva da rede estadual desde 2010. Mestranda em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Atualmente ocupa o cargo de Articuladora de Gestão na Coordenadoria Regional de Desenvolvimento da Educação- CREDE 4

INTRODUÇÃO

O presente relato refere-se a um trabalho realizado no âmbito do Programa de Formação de professores para o fortalecimento da aprendizagem em Matemática, por meio de um encontro de professores de Matemática da Regional CREDE 04 da rede estadual. O momento intitulado "Oficina de Matemática" teve como objetivo a análise e reflexão dos resultados obtidos da aplicação da Avaliação Diagnóstica 2021.1, aplicada no inicio do ano letivo, com foco nas 3ª séries do Ensino Médio, bem como desenvolver juntos aos docentes estratégias e metodologias diferenciadas para trabalhar os saberes e habilidades prioritários da Regional no âmbito da disciplina de Matemática dentro de sala de aula com os discentes.

As oficinas de Matemática têm grande relevância para a formação de professores porque visa à troca de experiência dos docentes, aprimorando o ensino de matemática, além de desenvolver novas estratégias e metodologias e atividades que corroboram com o mesmo. Nessa perspectiva, acredita-se que a formação continuada seja uma estratégia para mudar o cenário de dificuldades no processo ensino-aprendizagem da matemática. Manter o professor atualizado no mundo contemporâneo frente às exigências é uma busca que envolve políticas públicas, incentivo ao docente para pesquisa, estratégia de prática pedagógica e o desempenho profissional (SILVA et al, 2013).

Ademais, como formador regional do Programa Foco na Aprendizagem, ministrei a Oficina de Matemática, junto com a Articuladora de Gestão da Regional CREDE 04, para um público-alvo de 72 professores de Matemática que atuam diretamente nas séries finais do ensino básico. Desta forma, desenvolvemos algumas tarefas como análise de resultados da Avaliação Diagnóstica 2021.1, reflexão dos saberes e habilidades prioritárias da regional, estudo acerca do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVACED) no que diz respeito ao curso de formação de professores, além de uma oficina direcionada com o uso do Material Estruturado (ME) desenvolvido pela equipe de professores do programa Cientista Chefe, material que corrobora com a metodologia dos docentes e aprendizagem dos discentes.

O presente estudo objetiva detalhar o desenvolvimento da oficina supracitada bem como sua metodologia e resultados obtidos.

METODOLOGIA

A Oficina de Matemática foi articulada a partir da iniciativa do Programa de Formação de professores para o fortalecimento da aprendizagem em Matemática a convite da Articuladora de Gestão da Regional CREDE 04 a qual estendeu a todos os professores de Matemática da mesma. Dessa forma, foi realizado um planejamento pedagógico para traçar os métodos e objetivos da oficina, bem como definição da agenda do encontro, que contou com a participação da Coordenadora Regional, a professora Elvira Veras.

A priori foi mandada uma convocatória para todas as Escolas da regional, convidando os professores de Matemática para participarem da oficina que foi realizada no dia 01 de setembro, quarta-feira, além da participação dos ministrantes Johnantan Gonsalves (formador regional) e Tatiana Lima (articuladora de gestão da regional). A oficina foi iniciada com a fala de boas-vindas da Coordenadora Regional professora Elvira Veras seguida da acolhida pelo professor formador. Em seguida, deu-se início as atividades propostas para o dia, tais como descriminadas a seguir:

Avaliação diagnóstica 2021.1 – retrato regional dos saberes e habilidades prioritários na ad 2021.1 – referencial teórico:

Nesse primeiro momento, foi apresentado aos professores participantes um retrato regional dos saberes e habilidades da matriz dos saberes de Matemática que tiveram os menores percentuais de acertos, a partir da análise dos resultados inferidos da aplicação da Avaliação Diagnóstica 2021.1, sendo eles os saberes:

- S02 – Efetuar operações e resolver problemas envolvendo números inteiros;
- S03 – Efetuar operações e resolver problemas envolvendo números racionais;
- S04 – Identificar e utilizar relações de proporcionalidade entre grandezas numéricas;
- S05 – Identificar relações de congruência e semelhança entre figuras geométricas.

E as habilidades:

- H19 – Utilizar estimativas e arredondamentos para determinar o resultado de operações aritméticas entre números naturais ou inteiros;
- H22 – Compreender a noção de potências naturais de números inteiros;
- H05 – Determinar o resultado da soma ou da diferença entre dois números racionais representados na forma decimal;
- H06 – Associar as representações de números racionais - escrita (por extenso), na forma fracionária e na forma decimal - em diferentes contextos e problemas;

- H06 - Resolver problema que envolva porcentagens;
- H08 - Resolver problemas fazendo uso de semelhança de triângulos (com apoio de figuras).

Finalizado o primeiro momento, foi realizada uma atividade na qual foram apresentadas algumas questões da Avaliação Diagnóstica, priorizando os saberes e habilidades citados acima. Em interação com os cursistas, foram apresentadas as resoluções comentadas das questões, mostrando estratégias e metodologias de ensino diferentes para cada questão apresentada.

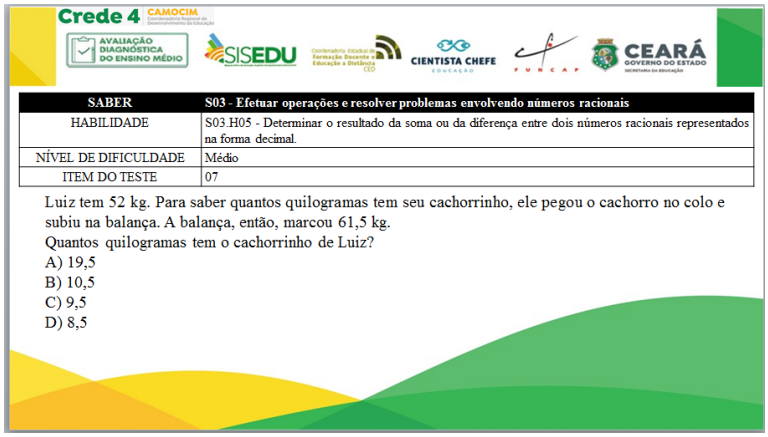


Figura 1 Questão 07 - AD 2021.1 - S03H05

Avaced – curso foco na aprendizagem:

Dando continuidade à oficina, nesse momento foi realizado um estudo acerca do Ambiente Virtual de Aprendizagem, ressaltando a importância de acessar o ambiente e participar das atividades remotas do curso Formação de professores para o fortalecimento da aprendizagem em Matemática, bem como responder ao fórum disponível no Ciclo I, sobretudo por conta do debate que aconteceu durante o estudo.

Oficina do material estruturado

Esse momento foi dedicado à apresentação do Material Estruturado 2021, com ênfase no Caderno do Aluno que foi entregue em formato impresso a todos os discentes das 3ª series. O formador preocupou-se em detalhar minuciosamente o caderno e em seguida propôs estratégias e metodologias para uso do material dentro de sala de aula e remotamente com seus discentes.

Metodologias para o uso do me a partir dos grupos de acesso e interação

Nesse momento, o professor formador apresentou aos cursistas três grupos de alunos classificados de acordo com o acesso e interação às aulas durante o período de pandemia – **Grupo 1**: alunos com acesso à internet e com interação síncrona; **Grupo 2**: alunos com acesso à internet e com interação assíncrona/acesso à internet e com interação apenas por aplicativos de mensagens instantâneas; **Grupo 3**: alunos sem acesso à internet, mas acompanham por meio de atividades impressas/Sem acesso à internet e não acompanhados pela escolas no momento.

Ademais, foi apresentada outra questão da Avaliação Diagnóstica que compreendia a um dos saberes prioritário e a partir dela, o professor formador apresentou aos cursistas estratégias diversificadas e metodologias ativas, tais como o uso do Material Estruturado (caderno do aluno) impresso, criação de cards com questões e dicas para resolução, além de outros materiais impressos para que os alunos não fiquem sem acompanhamento, para ajudar os professores dentro de sala de aula, uma para cada grupo descrito acima.

Figura 2 Material Estruturado 2021 – Caderno do Aluno

Agora é sua vez professor!

Nessa parte da oficina, os professores cursistas foram divididos em dois grupos em salas redirecionadas pelo Google Meet. Cada grupo ficou com uma questão direcionada da Avaliação Diagnóstica conforme os saberes apresentados pelo formador. Em seguida, foi solicitado a cada grupo uma análise da questão e que os mesmos apresentassem no final suas percepções sobre a mesma, bem como construíssem estratégias e metodologias diversificas e ativas para serem desenvolvidas dentro de sala de aula com os discentes dos 3 grupos citados anteriormente, de maneira que os professores assumissem o papel de mediador do conhecimento e o aluno o

protagonista do raciocínio lógico-matemático. Tal tarefa rendeu discussões bastante relevantes sobre o papel do professor perante os desafios enfrentados na pandemia.

Figura 4. Recorte dos resultados apresentados pelos professores cursistas

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com base no exposto, verificou-se uma participação relevante dos professores na construção da oficina através das discussões levantadas pelos mesmos, bem como através da avaliação da oficina feita por eles ao final do encontro, atribuindo notas de 1 (péssimo) a 5 (excelente) para as seguintes indagações: “Sobre a contribuição do encontro para aquisição de novos conhecimentos”, “A contribuição do Encontro para você refletir sobre sua prática profissional” e “A clareza e a organização das apresentações dos convidados”, conforme os resultados abaixo:

Portanto, é perceptível com os resultados apontados acima que a formação continuada de professores é muito importante para a formação dos mesmos, bem como a troca de experiências exitosas entre pares, contribuindo ainda mais para seu desempenho em sala de aula.

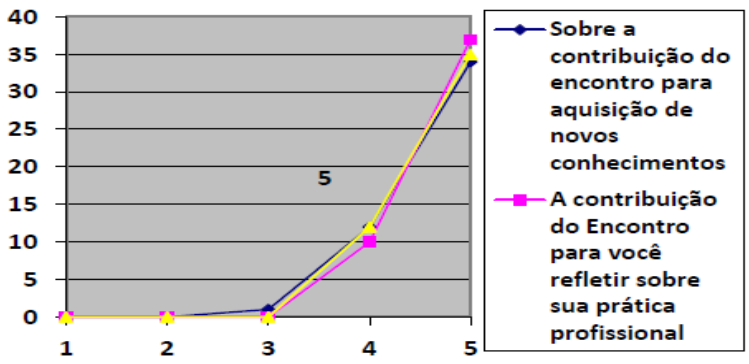


Gráfico 1 Resultado da avaliação da Oficina de Matemática

CONSIDERAÇÕES

No ano de 2020, participar do programa Foco na Aprendizagem como cursista foi de suma importância para minha formação quanto professor de Matemática, além de proporcionar novos conhecimentos, como a construção dos materiais e métodos para contribuir de maneira assertiva na aprendizagem dos alunos. No ano de 2021, como formador do programa, puder contribuir com a formação docente de cada professor foi bastante importante, pois sabemos que ser professor não é somente ensinar o aluno, mas aprender com ele e com outros professores. É muito gratificante ver que os professores também tem esse olhar diante das formações que lhes são ofertadas e do programa que fomenta o desenvolvimento da aprendizagem dos educandos.

É importante frisar que as oficinas desenvolvidas dentro das formações não trazem benefícios apenas para os professores e alunos, como o aprimoramento das competências e habilidades adquiridas, mas a comunidade escolar também é beneficiada no que se refere a contribuir para formação de sujeitos capazes de pensar, questionar e criar, munidos de um conhecimento gerado por profissionais imbuídos de saberes, competências e habilidades que possibilitam a formação do aluno como ser consciente, competente e capaz de desenvolver habilidades suficientes para resolver situações-problemas advindas do cotidiano, os quais perpassam a sala de aula.

REFERÊNCIAS

PROGRAMA CIENTISTA-CHEFE. **Material Estruturado Matemática**. Fortaleza: UFC/FUNCAP/SEDUC/CED, 2020.

SILVA, Silvia Maria de Aguiar. **Formação docente e Trajetórias**. In: MOROSINI, M. C. (Ed.). Enciclopédia de Pedagogia Universitária. Glossário. Brasília: INEP/RIES, 2013, V.2. p.367-379

CAPÍTULO 12

UMA NOVA PERSPECTIVA: JUROS COMPOSTOS A PARTIR DA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA E DOS CONCEITOS DE FUNÇÃO EXPONENCIAL

Anderson Pereira de Oliveira

Jerry Gleison Salgueiro Findaza Vasconcelos

RESUMO

A maioria dos professores apresentam aos alunos os conteúdos de Matemática de forma desconectada, ou seja, cada conteúdo em sua caixinha. Ao contrário do que se pensa, eles estão completamente interligados. Isto posto, o projeto visa resolver problemas que envolvem juros compostos utilizando as fórmulas da progressão geométrica e os conceitos de função exponencial. Para isso, é necessário pesquisar, estudar, historiar e conceituar os assuntos, aplicar as fórmulas da progressão geométrica para resolver problemas de juros compostos e utilizar o gráfico da função exponencial para esboçar esses problemas. Após a conclusão das etapas referentes a metodologia, foi possível estabelecer, por meio de exemplos práticos, a relação de problemas de juros compostos com os conceitos da progressão geométrica e o gráfico da função exponencial. Dessa forma, essa harmonização demonstra uma conexão e melhora o entendimento acerca desses temas, contribuindo para o processo de ensino e aprendizagem de professores e alunos.

Palavras-chave: Ensino. Conexão. Matemática.

INTRODUÇÃO

Normalmente, os professores de matemática, em suas salas de aula, apresentam aos seus alunos os conteúdos de forma isolada, cada conteúdo em sua caixinha. No entanto, é comum que questionamentos não sejam levantados, como por exemplo, os conteúdos podem se relacionar? É possível correlacionar problemáticas de temas distintos?

Dessa forma, se faz necessário um aprofundamento acerca dessa questão, pois, de acordo com os Parâmetros Nacionais Curriculares, "o critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático" (Brasil, 2000, p. 43).

Às vezes, quando resolvemos um problema de juros compostos, usamos as fórmulas que nos são dadas e não nos indagamos se podemos utilizar outros conceitos para entender e resolver. Como por exemplo, abordar, convenientemente, a mesma questão utilizando as progressões geométricas ou até mesmo a função exponencial.

Considerando minha experiência no percurso acadêmico e matemático, tenho a intenção de buscar soluções para os questionamentos levantados anteriormente. Pretendo neste trabalho, estabelecer vínculos entre os juros compostos, a progressão geométrica e a função exponencial, de forma a contribuir significativamente para o ensino da matemática e, consequentemente, para a interdisciplinaridade.

Dessa forma, tendo como objetivo central a resolução de problemas de juros compostos com a aplicação de fórmulas da progressão geométrica e conceitos de função exponencial. Para isso, é necessário pesquisar, estudar, historiar e conceituar os assuntos.

REFERENCIAL TEÓRICO

A matemática financeira faz parte das relações cotidianas, por esse motivo os professores devem implementar cada vez mais o seu estudo. Como podemos verificar no trecho Diretrizes Curriculares para a Educação Básica do Paraná:

> É importante que o aluno do Ensino Médio compreenda a Matemática Financeira aplicada aos diversos ramos da atividade humana e sua influência nas decisões de ordem pessoal e social. Tal importância relaciona-se ao trato com dívidas, com crediários, à interpretação de descontos, à compreensão dos reajustes salariais, à escolha de aplicações financeiras, entre outras. (DCE - MATEMÁTICA, 2008, p. 61).

Neste contexto devemos salientar que os conteúdos de matemática financeira podem ser abordados por meio das progressões ou das funções e o contrário também é validado,

> No Ensino Médio, no estudo dos conteúdos função afim e progressão geométrica, ambos vinculados ao conteúdo estruturante Funções, o professor pode buscar na matemática financeira, mais precisamente nos conceitos de juros simples, elementos para abordá-los. Para os conteúdos função exponencial e progressão geométrica, os conceitos de juros compostos. (DCE - MATEMÁTICA, 2008, p. 62).

Assim os conteúdos específicos articulam-se entre si e os conteúdos estruturantes transitam em outros conteúdos estruturantes, de modo que nenhum deles deve ser abordado isoladamente.

Segundo Santos, 2008, a Matemática Financeira é contextual por excelência, é atual e necessária para a formação de um indivíduo crítico, pois ela dá subsídios necessários para a tomada de decisões importantes para a vida. Atualmente, para obter um cartão de crédito ou realizar um empréstimo está cada vez mais fácil. Os principais alvos são os pensionistas, funcionários públicos e as pessoas idosas que recebem algum tipo de benefício do governo. O que vem aumentando vertiginosamente a quantidade de devedores.

Vivemos em um país capitalista com a economia em fase de crescimento, não temos como escapar das operações que envolvem taxas, impostos ou juros e para isso precisamos estar alinhados com o mercado financeiro. O estudo da matemática financeira permite aumentar o poder de decisão na ora de efetuar operações financeiras, minimizando muitas vezes os prejuízos de uma negociação "malfeita".

Ainda segundo santos, 2008, conhecer os conteúdos matemáticos que estão envolvidos nas atividades financeiras tais como os cálculos dos juros simples e compostos, os descontos, as capitalizações e amortizações de dívidas é, sem dúvida, uma forma agradável de dar significado a diversos conteúdos importantes da matemática do ensino Fundamental e Médio, tais como: Razões, Proporções, Porcentagem, Funções, Logaritmos, Progressões Aritméticas e Geométricas, entre outros. Portanto utilizaremos para a fundamentação dos conteúdos juros compostos, progressão geométrica e função exponencial, seja a parte histórica, conceitual ou aplicacional, as obras dos autores citados na referência: Assaf Neto, Barroso, Dante, Faro, Diretrizes Curriculares para Educação básica do Paraná e os parâmetros nacionais curriculares nacionais.

MATERIAIS E MÉTODOS

A pesquisa explicativa, metodologia adotada neste trabalho, tem como objetivo estabelecer vínculos entre temas distintos da matemática, em específico, os juros compostos, a progressão geométrica e a função exponencial. Assim, podemos entender um problema de juros composto sob o ponto de vista da progressão geométrica e, ainda, utilizar o gráfico da função exponencial para esboçar a questão abordada. Para tal realização, o trabalho foi dividido em cinco etapas.

A primeira etapa consistiu no levantamento bibliográfico, onde obras já produzidas sobre o assunto, com autoria de Alexandre Goulart Arruda e Raimundo do Socorro Coelho Barra, ambos com dissertações de mestrado e autores como: Assaf Neto, Dante e os Parâmetros nacionais curriculares do ensino médio foram usados para a análise e embasamento do projeto.

Em um segundo momento, foi abordado a historicidade, em específico, dos juros compostos, progressão geométrica e da função exponencial. Foram levantadas pesquisas quanto ao processo de evolução de tais temas ao longo do tempo.

Neste terceiro estágio, o objetivo foi a conceituação dos três temas já citados, onde é levantado e construído, o que é, e como se dá os juros compostos, a progressão geométrica e a função exponencial e seus principais elementos e propriedades.

Posteriormente, os três temas foram aplicados em questões do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM -, para uma melhor assimilação dos assuntos por parte do autor.

Em um último momento, foi estabelecida uma correlação entre os temas estudados, por meio da resolução de problemas que envolvessem o conteúdo de juros compostos, a partir da utilização de conceitos da progressão geométrica e, ainda, a utilização do gráfico da função exponencial para elucidar uma melhor visualização e, assim, evidenciar que tais assuntos já mencionados possuem uma conexão.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Primeiramente, é preciso definir, de forma sintetizada, e conceituar os três temas que serão abordados. Em um segundo momento, problemas que envolvem juros compostos serão resolvidos com os conceitos da progressão geométrica e esboçados no gráfico da função exponencial.

Os juros compostos, do qual difere dos juros simples, por possuir um regime de capitalização que considera que os juros formados em cada período são acrescidos ao capital formando o montante do período. Este montante, por sua vez, passará a render juros no período seguinte formando um novo montante e, assim por diante. Em síntese, os juros compostos representam o juro sobre o juro. A expressão mais utilizada nos juros composto é dada por $M = C \cdot (1 + i)^t$, onde “M” representa o valor do montante após o certo espaço de tempo, a variável “c” consiste na quantidade do capital, ou seja, do valor aplicado, o “i” nada mais é do que a taxa, que é dada em porcentagem e, por fim, a letra “t” descreve a quantidade de tempo.

O matemático Dante defini progressão geométrica como,

> Toda sequência de números não nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado razão (q) da progressão. Ou seja, uma progressão geométrica é uma sequência na qual a taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é sempre a mesma (DANTE, 2009, p. 142).

Esse tema possui várias expressões matemáticas, porém, podemos destacar a fórmula que fornece o termo geral de qualquer progressão geométrica: $a_n = a_1 \cdot q^n - 1$, em que "a_n" é o termo geral (termo desejado), "a_1" é o primeiro termo e, por fim, temos o "q" sendo a razão.

A função exponencial é caracterizada pelo crescimento ou decrescimento acelerado, daí a expressão popular: "cresceu exponencialmente". A lei de formação dessa função é dada por: $f(x) = b \cdot a^x$, onde o "b" é um número real diferente de zero, o "a" é chamado de base e tem que ser maior que zero e diferente de um. Já a variável, está no expoente, ou seja, multiplicando a base por ela mesma na quantidade de vezes do valor do x.

Após a conclusão das etapas que foram mencionadas na metodologia, foi possível estabelecer, por meio de exemplos práticos, a relação de problemas de juros compostos com os conceitos da progressão geométrica e o gráfico da função exponencial. A relação será demonstrada através de dois problemas, o primeiro deles, com uma solução dispensando o uso das fórmulas e tendo uma abordagem mais intuitiva, onde os conceitos da progressão geométrica são explorados para solucionar a questão. Já o segundo problema, conta com a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica finita para a resolução.

Questão 1. Francisco Alferes, empresário no ramo de eletrônicos do estado do Ceará, deseja fazer uma viagem com a sua família. Pensando em seus gastos, resolveu aplicar R$ 5 000,00 em uma poupança com juros de 5% ao mês. Ele pretende viajar em setembro, seu período de férias. Quanto Francisco terá na poupança em setembro de 2020, para a viagem, sabendo que o mesmo depositou seu dinheiro em janeiro de 2020 e não vai fazer nenhuma retirada neste período de aplicação?

Para resolvermos este problema usaremos a tabela a seguir, para demonstrar mês a mês a movimentação financeira na aplicação do regime de juros compostos.

Tabela 1 – Exemplificação dos rendimentos de juros

Mês	Capital (R$)	Juros %	Montante (R$) (Capital + Juros)
0	5 000	-	-
1	5 000	5% de 5 000 = 250	5 000 + 250 = 5 250
2	5 250	262,5	5 512,5
3	5 512,5	275,625	5 788,125
4	5 788,125	289,40625	6 077,53125
5	6 077,53125	303,8765625	6 381,4078125
6	6 381,4078125	319,070390625	6 700,478203125
7	6 700,478203125	335,02391015625	7 035,50211328125
8	7 035,50211328125	351,7751056640625	7 387,277218945313

Fonte: elaboração própria

A tabela acima mostra como ocorre o processo de incidência de juros sobre o valor do capital ao longo dos meses. Onde a primeira coluna representa o mês, começando por janeiro, que é indicado pelo número "0'' e terminando em setembro, indicado pelo número "8''. Na segunda coluna temos o "capital" que é o valor inicial de cada mês. A coluna dos "juros" representa o valor dos juros sobre o capital em questão. O Montante, por fim, tem seu lugar já na última coluna, pois, é obtido como a soma do capital com o juros.

Dessa forma, analisando os dados da tabela acima, Francisco terá para a sua viagem de férias a importância de R$ 7 387,3. Entretanto, não precisaríamos calcular o rendimento de mês em mês. Como já vimos anteriormente, existe uma expressão matemática utilizada no cálculo dos juros compostos:

$$M = C\,(1+i)^t$$

Diante disso, podemos responder a questão 1 usando a fórmula, onde: M seria o rendimento após 8 meses, c seria o capital de R$ 5 000 investido, i seria a taxa de juros e, por fim, t seria o tempo (vale ressaltar que a taxa e o tempo estão na mesma unidade, em mês). Com isso, teríamos:

$$M = 5000(1 + 5\%)^8$$
$$M = 5000(1 + 0{,}05)^8$$
$$M = 5000(1{,}05)^8$$
$$M = 7387{,}3$$

Ao analisarmos o montante da tabela 3 ao decorrer dos meses, podemos estabelecer uma ordem em que o termo posterior é encontrado a partir do anterior multiplicado por uma variável, ou seja, se trata de uma progressão geométrica. Para acharmos a razão (q), dividiremos o termo posterior pelo anterior:

$$\frac{5250}{5000} = 1{,}05 \frac{5512{,}5}{5250} = 1{,}05 \frac{5788{,}125}{5512{,}5} = 1{,}05$$

Se observarmos a fórmula do juros composto e a fórmula do termo geral da Progressão Geométrica, podemos compará-las, termo a termo.

$$M = C \cdot (1+i)^t$$
$$a_n = a_0 \cdot q^n$$

Logo, $M = a_n$, $c = a_0$, $(1 + i) = q$ e, por fim, $t = n$. Poderíamos, então, através da fórmula do termo geral da PG encontrar quanto Francisco terá após 8 meses na poupança

$$a_8 = 5000(1{,}05)^8$$

$$a_8 \approx 7387$$

Seguindo para a continuação da relação de conteúdos, agora vamos tratar a questão 1 com os conceitos de função exponencial. Observando a fórmula do termo geral da PG, $a_n a_0 . q^n$, podemos perceber que ela nos lembra a lei de formação da função exponencial, $f(x) = b \cdot a^x$. Ao compararmos as duas fórmulas, temos que $f(x) = a_n$, $b = a_o$, $a = q$ e, por fim, $n = x$. Logo, podemos esboçar o gráfico correspondente a situação do rendimento do dinheiro do Francisco, atribuindo, convenientemente, valores para "x" e substituindo na função $f(x) = 5000 \cdot (1{,}05)^x$:

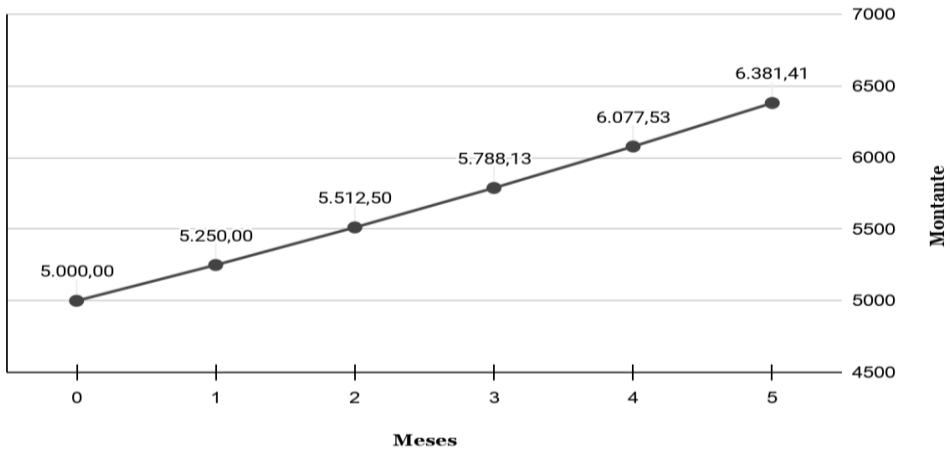
Tabela 2 – Par ordenado

x	f(x)
0	5 000
1	5 250
2	5 512,5
3	5 788,125
4	6 077,531
5	6 381,407

Fonte: elaboração própria

Após a escolha dos pares ordenados (x,y), podemos esboçar o gráfico da função.

Gráfico 1 – Rendimento de juros (em reais)



Fonte: elaboração própria

O valor inicial é representado pelo mês de janeiro, já que o depósito foi feito neste mês. Em fevereiro, notamos que já há um crescimento no gráfico, isso quer dizer que o dinheiro rendeu e foi para R$ 5 250,00, E assim por diante. Representando o eixo das abscissas temos os meses. O eixo das ordenadas corresponde ao montante. Dessa forma, são formados pares ordenados e cada par ordenado representa um ponto no plano cartesiano e esses pontos quando ligados determinam um

gráfico. Como o valor de “a’’ é maior que 1, o gráfico da função exponencial será crescente. Em virtude disso, o gráfico obtido é o de uma função exponencial.

Questão 2. (Enem - 2000) João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os descontos possíveis, é de R$ 21.000,00, e esse valor não será reajustado nos próximos meses. Ele tem R$ 20.000,00, que podem ser aplicados a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro. Para ter o carro, João deverá esperar:

a) dois meses, e terá a quantia exata.
b) três meses, e terá a quantia exata.
c) três meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 225,00.
d) quatro meses, e terá a quantia exata.
e) quatro meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 430,00

Para a solução deste problema, precisaremos analisar qual é a quantidade de tempo necessário que João deve aplicar seu dinheiro para que se tenha um montante suficiente para realizar a compra do carro de forma a aproveitar todos os descontos possíveis. Tendo em vista isso, usaremos uma tabela para exemplificar o rendimento de seu capital.

Tabela 3 – Exemplificação dos rendimentos de juros

Mês	Capital (R$)	Juros	Montante (R$) (Capital + Juros)
0	20 000	-	20 000
1	20 000	2% de 20 000 = 400	20 000 + 400 = 20 400
2	20 400	408	20 808
3	20 808	416,16	21 224,16
4	21 224,16	424,4832	21 648,6432

Fonte: elaboração própria

A tabela acima mostra como ocorre o rendimento do capital aplicado por João ao longo do tempo. Na primeira coluna temos os meses e, logo em seguida, o capital naquele período, que se inicia com o valor de R$ 20 000,00. A terceira coluna nos fornece a atuação dos juros de 2% sobre o capital, que no primeiro mês é de 400,00. Por último, o montante, ou seja, o capital daquele período adicionado dos juros do mesmo momento.

Podemos perceber, através dos dados que a tabela nos fornece, que o mais vantajoso para o João é fazer com que o dinheiro fique aplicado em, pelo menos, três meses e, assim, tendo o capital suficiente para a compra do automóvel e, sobrando ainda, o valor de R$ 224,16. Para que João não precisasse fazer a tabela passo a passo, poderia usar a fórmula dos juros composto,

$$M = C\,(1+i)^t$$

Onde o capital inicial seria os R$ 20 000, a taxa de 2% e o tempo de 3 meses, ou seja,

$$M = 20\,000\,(1+2\%)^3$$
$$M = 20\,000\,(1{,}02)^3$$
$$M = 21\,224{,}16.$$

Observando o problema de outro ponto de vista, podemos ordenar o valor dos montantes em uma ordem crescente:

20 000; 20 400; 20 808; 21,224,16; 21 648,6432

percebendo que existe um padrão, onde o termo posterior (a partir do segundo) dividido pelo anterior tem sempre o mesmo quociente de 1,02:

$$\frac{20400}{20000} = 1{,}02$$
$$\frac{20808}{20400} = 1{,}02$$
$$\frac{21224{,}16}{20808} = 1{,}02$$
$$\frac{21648{,}6432}{21224{,}16} = 1{,}02$$

Logo, a sequência que se refere aos montantes ao longo dos meses se trata de uma progressão geométrica de razão 1,02. Desta forma, podemos estabelecer relações, como no problema 1, entre a fórmula dos juros compostos com a da progressão geométrica, onde o seu termo geral seria o montante, o capital dado pelos R$ 20 000,00 seria o primeiro termo, a razão de 1,02 e, por fim, o tempo de três meses, ou seja:

$$a_n = a_0 \cdot q^n$$
$$a_n = 20\,000 \cdot (1{,}02)^3$$
$$a_n = 21\,224{,}16$$

Em outra perspectiva, podemos visualizar essa questão por meio de um gráfico, o da função exponencial, onde a sua lei de formação seria dada por: $f(x) = 20000 \cdot (1{,}02)^x$, sendo a $f(x)$o

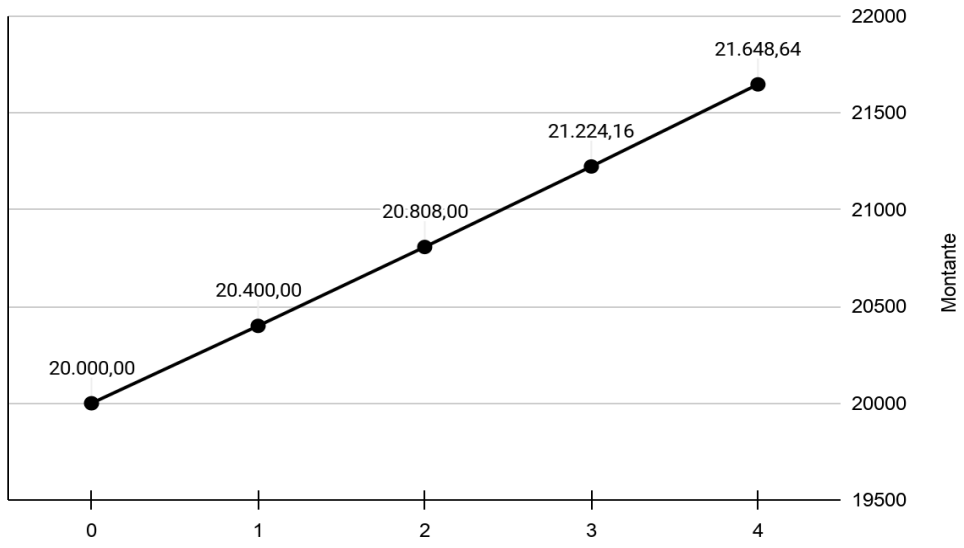
valor responsável pelo montante e a variável xo tempo. Logo, podemos esboçar o seu gráfico escolhendo valores para a incógnita e encontrando o seus correspondentes em y:

Tabela 4 – par ordenado

x	f(x)
0	20 000
1	20 400
2	20 808
3	21 224,16
4	21 648,6432

Fonte: elaboração própria

Gráfico 2 – Montante da aplicação do João



Fonte: elaboração própria

O gráfico acima descreve a evolução do rendimento dos juros ao longo dos meses, se iniciando no ponto (0, 20 000), onde é o ponto de intersecção dos dois eixos, ou seja, o eixo horizontal corresponde ao mês e o eixo vertical representa o montante. Dessa forma, fica claro que João deverá aplicar seu dinheiro por pelo menos três meses para poder efetuar a compra do seu automóvel. Logo, a resposta da questão é o item C.

Portanto, como pôde ser observado, as duas questões de juros compostos que foram resolvidas utilizando os conceitos de progressão geométrica e o gráfico da função exponencial,

serviram de base para que se pudesse ser evidenciado, de forma prática, a correlação dos assuntos deste trabalho.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a explanação dos conteúdos presentes nesse trabalho, entrelaçando e criando conexões, de forma prática, através de problemas, entre os Juros compostos, Progressão Geométrica e a função exponencial, fica evidente, portanto, que esses temas podem ser anunciados pelos professores de matemática, de forma conjunta, fazendo com que o processo de ensino e aprendizagem seja mais bem fundamentado e munido de ferramentas inovadoras.

Com a relação de problemáticas de temas distintos, é evidente que estes conteúdos estão intimamente interligados e que a matemática não é um fim por si só. Dessa forma, os conceitos da progressão geométrica podem ser utilizados para resolver problemas que envolvam os Juros compostos, e, ainda, serem abordados através do gráfico da função exponencial.

REFERÊNCIAS

ARRUDA, A. G. **Ensino de juros compostos, progressão geométrica e função exponencial.** 2013. 135 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2013.

AYRES JR., F. **Matemática financeira**. São Paulo: McGraw-Hill, 1963. (Coleção Schaum).

BARRA, R. D. S. C. **Uma proposta de ensino envolvendo os temas juros compostos, função exponencial e progressão geométrica**. 2017. 80 f. Programa mestrado profissional em matemática em rede nacional - Universidade federal do Pará, instituto de ciências exatas e naturais, Belém, 2017.

BARROSO, J. M. **Conexões com matemática**. São Paulo: Moderna, 2010. v. 3.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares para Educação Básica do Paraná** - Matemática (acessado em 10 de setembro de 2008).

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEMTEC, 2000.

DANTE, L. R. **Matemática, contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2011.

FARO, C. **Fundamentos da matemática financeira**. São Paulo: Saraiva, 2006.

HAZZAN, S.; POMPEO, J. N. **Matemática financeira**. São Paulo: Saraiva, 2006.

História das porcentagens. Brasil Escola. Disponível em:

Matemática financeira para educadores críticos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2011.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; ZANI, S. **Progressões e matemática financeira**. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção do professor de Matemática)

MORGADO, A.; CESAR, B. **Matemática financeira**. São Paulo: Campus, 2005.

NETO, A. A. **Matemática financeira e suas aplicações**. São Paulo: Atlas, 2006.

RIBEIRO, J. **Matemática, ciência, linguagem e tecnologia**. São Paulo: Scipione, 2011. SÁ, I. P. <http://www.brasilescola.com/história-das-porcentagens.htm>. Acesso em: abr. 2019.

SOBRE OS AUTORES

Jerry Gleison Salgueiro Fidanza Vasconcelos. Mestre em matemática pela Universidade Federal do Amazonas (UFAM). Graduado em Licenciatura plena em Matemática pela Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA). Docente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE).

Anderson Pereira de Oliveira. Graduado em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE).

CAPÍTULO 13

O USO DE JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: UMA PERSPECTIVA PIAGETIANA

Francisco Odécio Sales

Josiane Marques Duarte Almeida

RESUMO

Neste trabalho serão apresentados os resultados de uma pesquisa bibliográfica realizada com o intuito de investigar e identificar o que tem sido discutido sobre o uso de jogos no ensino de matemática em uma perspectiva piagetiana. Para isso foi realizado um levantamento sobre os principais textos que versam sobre o uso de jogos e as teorias de Piaget. Após a leitura e discussão dos autores embasados na literatura disponível, foi possível observar que ainda existe uma grande lacuna quanto à apropriação da teoria piagetiana por parte dos professores que ensinam Matemática no âmbito escolar bem como uma relutância e falta de o preparo dos docentes para utilizar os jogos como ferramentas educacionais de forma efetiva e significativa tornando clara a necessidade de se explorar de forma mais direta a temática, compreendendo e lançando luz sobre os fatores que ainda impedem os professores de se apropriarem da teoria Psicogenética e dos jogos para o desenvolvimento de uma matemática mais próxima e significativa para os alunos.

INTRODUÇÃO

Falar sobre o ensino de Matemática nos leva a um debate interessante acerca dos paradigmas que ainda permeiam a educação matemática escolar, uma vez que, frequentemente, a disciplina é vista como incompreensível e motivo de desgosto por parte dos alunos, pois o que predomina em muitas salas de aula é, ainda, um ensino de matemática fragmentado e desconectado da vida cotidiana dos alunos, que prioriza a mecanização e a memorização, distanciando-se de um aprendizado significativo.

Segundo dados do Indicador de Alfabetismo Funcional (INAF 2018), parte das pessoas entre 14 e 60 anos não dominam as habilidades matemáticas básicas, ou seja, mesmo depois de anos na educação básica, as pessoas ainda enfrentam dificuldades em fazer uso social da matemática aprendida na escola.

Essas habilidades são definidas por Fonseca (2004, p.13) como:

> [...] a capacidade de mobilização de conhecimentos associados à quantificação, à ordenação, à orientação e as suas relações, operações e representações na realização de tarefas ou na resolução de situações-problema, tendo como referências tarefas e situações com as quais a maior parte da população brasileira se depara cotidianamente.

Os dados apresentados nos deixam alarmados, uma vez que, muito mais do que uma matéria escolar, a Matemática se configura como uma ferramenta social (D'AMBRÓSIO, 2004), uma vez que nosso cotidiano está imerso em aplicações dos conceitos matemáticos desde aqueles mais simples como a manipulação de calendários e relógios, a leitura dos números presentes em placas, o troco na compra de uma mercadoria até o entendimento de como funcionam os juros compostos do cartão de crédito e financiamentos.

É cada vez mais urgente, no ensino de Matemática, compreender a necessidade do respeito ao nível cognitivo da criança além de se considerar o conhecimento prévio dela, bem como a importância de que o aluno seja sujeito de sua própria aprendizagem e, para que isso aconteça, é essencial uma reconfiguração do fazer pedagógico dos professores que ensinam essa disciplina.

Levando em consideração que a ação do sujeito sobre os objetos é indispensável para a compreensão das relações aritméticas e geométricas da matemática e compreendendo que, para um professor de Matemática, cujo "espírito é abstrato por definição" (PIAGET, 1986) é difícil entender a necessidade de um desenvolvimento progressivo baseado em experiências concretas, pensamos neste artigo como uma forma de apresentar as possibilidades do uso dos jogos no ensino de matemática.

Neste sentido, surgiu à ideia deste estudo onde buscamos compreender a importância e as contribuições dos jogos para o processo de aprendizagem em matemática numa perspectiva

piagetinana. Destacamos ainda a relevância desse trabalho, pois existe a necessidade de aproximar a teoria psicogenética de Piaget do ensino de matemática com o intuito de aproximá-la da realidade cotidiana dos educandos da educação básica uma vez que, a ao se apropriar dos conceitos desenvolvidos por Piaget, acreditamos que o professor será capaz de contribuir de forma significativa com a aprendizagem de seus alunos dando-lhes novas possibilidades de aprender e agregar o saber matemático.

Para desenvolver e fundamentar teoricamente o estudo, lançamos mão dos conceitos trabalhados por Piaget (1986), D'Ambrósio (2004), Fonseca (2004), PCN (1997), Grando (2000; 2005), Taille (2019), Kamii e Housman (2002) dentre outros.

Assim, a pesquisa por nós apresentada neste artigo que teve como intuito refletir e analisar as contribuições dos jogos numa perspectiva piagetiana para o processo de aprendizagem em matemática e, levando em consideração o que as obras dos autores escolhidos versam sobre o tema, tem natureza qualitativa (BODGAN; BIKLEN, 1994), sendo do tipo exploratória (GIL, 2008), visto que está baseada numa perspectiva interpretativa tendo como principal técnica de coleta de dados empregada foi à pesquisa bibliográfica, segundo as ideias de Lakatos e Marconi (1992).

Para apresentarmos esta discussão, primeiramente, no tópico dois, faremos uma revisão da literatura sobre o ensino de matemática no decorrer dos anos e as contribuições de Piaget, enquanto no tópico três apresentaremos as perspectivas do uso dos jogos de regra no ensino de Matemática no tópico quatro, abordaremos o percurso metodológico e as etapas em que se desenvolveu o processo de levantamento de dados, busca pela bibliografia e discussões para a elaboração do texto aqui apresentado. O quinto e último tópico trará as considerações finais e as conclusões que chegamos ao desenvolver a presente pesquisa.

Ensino da matemática e as contribuições de piaget

A Matemática não se trata de uma ciência desconectada da vida humana, os alicerces do que hoje conhecemos como Matemática foram se constituindo ao longo de muitos anos, desde os primórdios da sociedade organizada até a contemporaneidade. Evoluiu juntamente com as necessidades que foram sendo impostas a humanidade e se modificou a cada novo problema cotidiano que os homens enfrentavam, crescendo em rigor e complexidade, como nos é apresentado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)

> A Matemática, surgida na Antiguidade por necessidades da vida cotidiana, converteu-se em um imenso sistema de variadas e extensas disciplinas. Como as demais ciências, reflete as leis sociais e serve de poderoso instrumento para o conhecimento do mundo e domínio da natureza. (BRASIL, 1997, p.19).

Ou seja, reconhecer esse processo histórico da Matemática é imprescindível uma vez que nos ajuda a observar e compreender os aspectos humanos do desenvolvimento matemático além de nos permitir conhecer os homens que contribuíram nesse processo evolutivo da ciência e as circunstâncias em que os conceitos foram desenvolvidos. Como afirma D'Ambrósio (1999, p.97), "um dos maiores erros que se pratica em educação, em particular, é desvincular a Matemática das outras atividades humanas". Em outras palavras, quando os alunos tem contato com a construção histórica dos conhecimentos matemáticos esse saber se torna mais significativo aproximando-a do aluno.

Por outro lado, historicamente, o ensino de Matemática foi baseado em uma abordagem tradicionalista em que o conhecimento é transmitido de forma bancária (FREIRE 1974) e mecanicista, sem que o aluno tenha a possibilidade de refletir e fazer parte da construção daquele conhecimento, o que termina colocando o educando em uma situação de aprendizagem não efetiva e que, segundo Fonseca (1997, p. 19), "[...] dá ênfase ao aspecto formal, isto é, apresenta-se como um produto pronto e acabado. O aluno é treinado a adotar certos procedimentos, os quais o levarão à resposta esperada pelo professor".

Nesta forma de conceber o ensino, o conhecimento Matemático encontra-se completo e preparado para ser meramente transmitido e reproduzido, nenhuma alteração por parte do aluno é aceita e quando o educando não acompanha o que é ensinado ele é visto como o culpado pelo seu fracasso. É nesse sentido que, buscamos em Piaget embasamento para discutir o ensino de matemática, uma vez que como afirma Moreira (1999), para Piaget

> [...] o conhecimento não pode ser concebido como algo predeterminado desde o nascimento (inatismo), nem como resultado do simples registro de percepções e informações (empirismo): o conhecimento resulta das ações e interações do sujeito no ambiente em que vive. Todo conhecimento é uma construção que vai sendo elaborada desde a infância, por meio de interações do sujeito com os objetos que procura conhecer, sejam eles do mundo físico ou do mundo cultural. O conhecimento resulta de uma inter-relação do sujeito que conhece com objeto a ser conhecido. (MOREIRA, 1999, p.75)

Assim, compreendemos que o fazer pedagógico pautado apenas na exposição e na caracterização da Matemática como um conhecimento pronto em que os alunos nada tem a acrescentar tornou-se insuficiente para abarcar as transformações sociais em que estamos inseridos por isso nossa pesquisa se debruçou sobre a necessidade de se repensar o fazer pedagógico em uma perspectiva piagetiana do uso de jogos como auxiliar no ensino de matemática.

Piaget em seu artigo, "Observaciones sobre la educacion matematica" (PIAGET,1986) apresentou a necessidade de estudar o desenvolvimento espontâneo das operações lógico-

matemáticas de crianças e adolescentes e fez importantes considerações sobre o quão prejudicial seria desconsiderá-los.

O autor defende a necessidade de um ensino de matemática que seja gradativo e que respeite as etapas do desenvolvimento cognitivo dos alunos em que a matemática fosse pautada em uma construção através da interação do sujeito com os objetos de estudos da Matemática. Para ele, os educando constantemente, operam matematicamente, mas nem sempre estão conscientes, e é nesse sentido que defende que, a apropriação do saber matemático está diretamente relacionada à gradação, construção partindo de estruturas mais concretas.

Sabe-se que todo conhecimento implica, necessariamente, uma relação entre dois polos, em um deles está o sujeito que busca conhecer algo e no outro, o objeto a ser conhecido. Baseadas nisso, estão algumas concepções que divergem quanto a um ou outro polo. As concepções psicológicas que valorizam os processos de desenvolvimento em detrimento da aprendizagem são aquelas em que o sujeito é priorizado, e levam em consideração de forma majoritária à organização interna inerente ao sujeito diminuindo a importância do meio físico e social bem como do objeto. O inverso acontece quando o privilegiado passa a ser a aprendizagem.

O modelo teórico que Piaget propôs pode ser definido como interacionista uma vez que, o teórico não se deteve a um dos polos em específico, pois para ele o conhecimento não é intrínseco nem ao sujeito nem ao objeto, sendo construído na interação entre dois. Piaget defende a ideia de que o processo de construção de conhecimento é desencadeado pela ação do sujeito através de seus mecanismos de adaptação e organização.

É nesse contexto onde, o ensino de matemática continua mantendo-se descontextualizado da vida dos educandos e produzindo resultados abaixo do esperado que, nos últimos anos, foram surgindo novas tendências e abordagens relacionadas ao ensino de Matemática, dentre elas a Etnomatemática e a Modelagem, a Resolução de Problemas, o uso de Materiais e Jogos Didáticos bem como os novos softwares que buscam implementar as Tecnologias de Informação e Comunicação no ensino.

Neste trabalho, focaremos no uso de jogos como metodologia que favoreça o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática levando em consideração os postulados piagetianos sobre ser a interação entre sujeito e objeto como ponto principal no processo de aprendizagem. Essa interação é justamente o que vai trazer o aluno para o centro do processo de aprendizagem, onde, em conjunto com o professor ele pode construir o conhecimento. Os jogos mostram-se importantes no favorecimento dessa interação como ressalta Grando (2000, p.15), pois

> A busca por um ensino que considere o aluno como sujeito do processo, que seja significativo para o aluno, que lhe proporcione um ambiente favorável à imaginação, à

> criação, à reflexão, enfim, à construção e que lhe possibilite um prazer em aprender, não pelo utilitarismo, mas pela investigação, ação e participação coletiva de um "todo" que constitui uma sociedade crítica e atuante, leva-nos a propor a inserção do jogo no ambiente educacional, de forma a conferir a esse ensino espaços lúdicos de aprendizagem.

Na sequência trataremos sobre o uso dos jogos dentro da perspectiva de Piaget e sua importância para a aprendizagem da matemática pelas crianças.

Jogos de regras e o ensino de matemática

Piaget (1998) em sua obra explicita que os jogos são essenciais na vida da criança uma vez que é através dos jogos que as crianças terão uma "simulação" de situações reais de interação e resolução de problemas inclusive na perspectiva moral. Como afirma Taille (2019), Para Piaget,

> [...] os jogos coletivos de regras são paradigmáticos para a moralidade humana. E isso por três razões, pelo menos. Em primeiro lugar, representam uma atividade interindividual necessariamente regulada por certas normas que, embora geralmente herdadas das gerações anteriores, podem ser modifica das pelos membros de cada grupo de jogadores, fato esse que explicita a condição de "legislador" de cada um deles. Em segundo lugar, embora tais normas não tenham em si caráter moral, o respeito a elas devido é, ele sim, moral (e envolve questões de justiça e honestidade). Por fim, tal respeito provém de mútuos acordos entre os jogadores, e não da mera aceitação de normas impostas por autoridades estranhas à comunidade de jogadores. (2019, p.75).

Uma das competências importantes a serem desenvolvidas no ensino da Matemática refere-se à capacidade de raciocinar e resolver problemas, conforme enfatiza a segunda versão da Base Nacional Curricular Comum (BNCC) ressaltando que "[...] o conceito em foco deve ser trabalhado por meio da resolução de problemas [...]" (BRASIL, 2016a, p.131).

Nessa perspectiva, Piaget traz uma excelente colaboração quanto ao uso dos jogos para o desenvolvimento dessas capacidades de resolução de problemas, pois o autor defende que os jogos são ferramentas potencialmente importantes para a aprendizagem das crianças levando em consideração que "[...] em todo lugar onde se consegue transformar em jogo a iniciação à leitura, ao cálculo, ou à ortografia, observa-se que as crianças se apaixonam por essas ocupações comumente tidas como maçantes." (PIAGET 1976, p. 158-159).

Os jogos apresentam inúmeras possibilidades de aprendizagem para as crianças, e para Piaget tiveram um lugar de destaque em sua teoria. O teórico associou-os às fases do desenvolvimento, classificando os jogos em três classes: os jogos de exercício, próprios do período sensório-motor etapa denominada por Piaget de *Anomia*, em que as crianças não seguem regras morais coletivas e jogam para satisfazer seus interesses motores, já os jogos simbólicos característicos do estágio pré-operatório, configuram a etapa de *Heteronomia* em que, as crianças

apresentam maior interesse em participar de atividades coletivas onde as regras são estabelecidas e vistas como imutáveis, porém elas ainda não concebem as regras como reguladora das ações dos participantes. Por último os jogos de regra, que são característicos do período operatório tanto do concreto como do formal em que se apresenta o respeito às regras característica próprias da etapa de *Autonomia* tratando-se já da "concepção adulta das regras" (TAILE, 2019, P. 76).

Diante disso, compreendemos que os problemas matemáticos podem ser propostos de diversas formas no contexto escolar, extrapolando a forma tradicional de caderno e lápis para encontrar a solução. É nessa perspectiva que se apresenta o trabalho de situações-problema através de jogos, pois neles as situações mudam constantemente, exigindo dos alunos atitudes reflexivas de acordo com o andamento da partida.

Dessa forma, a cada novo desafio apresentado na partida, exige dos alunos uma nova avaliação da situação e uma busca pela estratégia mais adequada para solução do problema proposto situação análoga ao que nos é apresentada quando encaramos alguma questão matemática que foge do nosso entendimento genérico da resolução de problemas exigindo de nós formas alternativas e criativas para resolução da problemática apresentada.

Essa perspectiva do uso dos jogos não é recente, embora venha apresentando novas roupagens no decorrer dos anos, os PCNs já trouxeram a perspectiva do uso dos jogos como uma forma de propor problemas, vejamos o trecho abaixo:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações. (BRASIL, 1998, p.46)

No jogo de regras, como o xadrez, por exemplo, a resolução de problemas é utilizada pela própria necessidade de execução das jogadas, onde é necessário elaborar e testar estratégias, levantar hipóteses e refletir sobre as ações do jogador bem como de seu oponente assim, pensando no contexto da sala de aula, o processo de aprendizagem se dá com a mediação do professor que pode se apropriar das observações feitas durante a execução percebendo a forma como seus alunos operam logicamente durante os jogos, para mediar e compreender onde estão os pontos de dificuldades de seus alunos com relação aos conteúdos vistos em sala, pois o jogo "representa uma situação problema determinada por regras, em que o indivíduo busca a todo o momento, elaborando estratégias, procedimentos e reestruturando-os, vencer o jogo, ou seja, resolver o problema" (GRANDO, 2015, p. 400).

Assim, consideramos que os jogos são uma importante alternativa para possibilitar a elaboração de estratégias e planejamento de ações, pois a sua correta utilização no contexto de

sala de aula, pode levar os estudantes a desenvolver a habilidade de pensar em diversas possibilidades para a resolução de uma determinada situação o que é imprescindível quanto ao bom desempenho no que tange a Matemática.

Em nosso levantamento bibliográfico, foi possível constatar que muitos autores versam sobre a importância desses jogos para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos, como por exemplo, Kamii e Housman (2002) que abordam os benefícios da utilização dos jogos em detrimento das tradicionais folhas de exercícios na aprendizagem da aritmética. É importante ressaltar que, o uso dos jogos não exclui o uso das atividades mais diretivas, como as folhas de exercício, mas sim as complementam possibilitando aos alunos novas perspectivas sobre o conteúdo estudado.

As autoras elencam algumas razões pelas quais os jogos são favoráveis ao desenvolvimento matemático, como: a interação entre os sujeitos (educandos) que apontam instantaneamente erros e acertos umas das outras no que tange as estratégias de resolução dos problemas propostos, o trabalho das funções executivas uma vez que, a criança precisa lembrar-se das estratégias e/ou cálculos utilizadas anteriormente para conseguir desenvolver as próximas jogadas, não há uma forma fechada de se chegar a uma resposta o que alavanca a criatividade das crianças dando possibilidade de criação de várias soluções para um mesmo problema e, por fim, proporciona às crianças a possibilidade de desenvolver suas relações interpessoais, pois estará "treinando" as capacidades de resolução de problemas em conjunto com seus pares.

METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO

A pesquisa por nós desenvolvida neste artigo tem natureza qualitativa (BODGAN; BIKLEN, 1994), sendo do tipo exploratório (GIL, 2008), visto que está baseada numa perspectiva interpretativa e busca empreender um entendimento mais amplo do fenômeno investigado, que, neste caso, refere-se as contribuições de Piaget e o uso de jogos no ensino de matemática numa perspectiva piagetiana.

A principal técnica de coleta de dados empregada neste trabalho foi pesquisa bibliográfica, na perspectiva de Lakatos e Marconi (1992). Para os autores, este tipo de investigação é possível quando a principal fonte de dados consiste em textos já escritos por demais autores sobre o assunto investigado, de modo que o pesquisador se torne familiar com a temática.

Lakatos e Marconi (1992) expõem que a pesquisa bibliográfica apresenta um conjunto de quatro fases distintas, as quais serão apresentadas e descritas, contextualizando-as conforme a problemática que esta investigação apresentou: 1 - identificação, momento em que o pesquisador

reconhece a relevância do assunto, delimita-o e descobre que a pesquisa pode ser executada por meio de consultas a catálogos de bibliotecas físicas ou virtuais, 2 - localização, consiste na fase em que pesquisador identifica onde e quais as fontes de consulta que tem relação com o assunto delimitado serão consultadas, 3 - compilação, corresponde a reunir sistematicamente as referências e demais informações do assunto em investigação, 4 - fichamento, que corresponde a fazer o registro das informações coletadas durante a fase de compilação em fichas, organizando os dados obtidos por meio de critérios.

Dessa forma, buscamos textos de maior relevância sobre as contribuições de Piaget para o ensino de matemática, bem como sobre sua teoria dos jogos de regras e as possibilidades de uso destes no ensino. O levantamento dos textos foi realizado tanto em bibliotecas virtuais que disponibilizam os escritos de Piaget como em bibliotecas físicas onde foi possível encontrar tanto os livros do próprio autor, como estudos que versam sobre a temática aqui explorada.

As etapas 3 e 4 da pesquisa bibliográfica se deu de forma conjunta entre os autores deste estudo onde foram feitas discussões sobre os textos, bem como a análise de sua coerência com o assunto por nós abordado realizando a seleção e confrontamento das ideias expostas pelos autores selecionados e nossa concepção da importância do uso dos jogos de regras para o ensino de matemática.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Levando em consideração o levantamento bibliográfico realizado pelos autores podemos inferir que, quanto as contribuições do uso dos jogos no ensino de matemática a luz da teoria de Jean Piaget, propor jogos em sala de aula, pode oportunizar ao professor de avaliar os níveis de raciocínio numérico em que as crianças se encontram levando em consideração as etapas explicitadas por Piaget em seus estudos.

Conhecendo e se apropriando dos princípios teóricos de Piaget sobre a aquisição do conhecimento lógico-matemático, e como se dão as relações entre essa aquisição e os jogos o professor poderá atuar de forma coerente com eles proporcionando aos seus alunos situações didáticas diversas de aprendizagem.

Para que isso seja possível, faz-se necessária também uma mudança na postura do professor que ensina matemática ao passo que, o professor assuma um papel de mediador o estudante passe a assumir um papel no centro do processo educativo onde será proporcionando ao aluno “um espaço para pensar” (PALERMO BRENELLI, 1993, p. 296), verificando, na prática, o que Piaget estruturou

em seus estudos, quando aborda a aquisição de um novo saber, onde “a aquisição de um método que lhe será útil por toda a vida e aumentará permanentemente sua curiosidade, sem o risco de estancá-la” (PIAGET, 1948/1988, p. 54).

Ressaltamos também que é indispensável que o professor conheça as características do desenvolvimento cognitivo de seus alunos compreendendo que, assim como afirma Piaget (1948/1988, p. 15), “o educador continua indispensável”, tanto na perspectiva de propor aos alunos situações de aprendizagem significativas quanto na mediação da diminuição dos obstáculos que se apresentem em sala de aula estimulando a pesquisa e a reflexão através do uso de jogos com seus alunos.

Frisamos que, ao propor o uso dos jogos à luz da teoria piagetiana, não estamos propondo o fim do rigor ou da sistematização do saber matemático, ao contrário propomos que os professores busquem nas ideias de Piaget um fundamento para dispor de mais uma ferramenta a favor do ensino de matemática de forma que as dificuldades sejam vistam como ponto de partida para adequação do que os alunos estão ou não aptos a aprender de acordo com seu nível cognitivo.

Foi possível observar que ainda existe uma grande lacuna quanto à apropriação da teoria piagetiana por parte dos professores que ensinam Matemática no âmbito escolar bem como uma relutância e falta de o preparo dos docentes para utilizar metodologias que se apresentam mais abertas à participação do aluno expondo a necessidade de uma mudança de visão sobre ser a matemática um saber engessado e fechado à participação dos alunos em seu desenvolvimento.

Foi possível perceber que, apesar um uma significativa literatura sobre o uso dos jogos como ferramentas educacionais e das contribuições das categorizações das etapas do desenvolvimento cognitivo propostas por Piaget ainda são poucos os trabalhos que apresentam relatos de experiência abordando a aplicação desses jogos de forma efetiva e significativa tornando clara a necessidade de se explorar de forma mais direta a temática, compreendendo e lançando luz sobre os fatores que ainda impedem os professores de se apropriarem da teoria Psicogenética e dos jogos para o desenvolvimento de uma matemática mais próxima e significativa para os alunos.

A categorização que Piaget propôs no desenvolvimento no raciocínio lógico tem grande valia ao se buscar uma nova possibilidade de ensino de matemática mais próximo e significativo, uma vez que, estando os alunos envolvidos no processo de aprendizagem, podendo contribuir e construir seu conhecimento, a matemática passará a fazer parte, de fato, do arcabouço intelectual dessas crianças ajudando-as a se constituir como cidadãs.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL, Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: introdução. 3ed. Brasília: MEC, vol.: 1, 1997.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação.** Tradução: Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

D'AMBRÓSIO, B. S. **Como ensinar Matemática hoje? Temas e Debates.** SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15-19.

D'AMBROSIO, U. **A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática.** São Paulo, 1999.

D'AMBRÓSIO, U. **A relevância do projeto Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional – INAF – como critério de avaliação da qualidade do ensino de matemática.** In: FONSECA, M. C. F. R. (org.). Letramento no Brasil; habilidades matemáticas. São Paulo: Global, 2004. P. 31-46.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. Estudos Avançados**, v. 2, n. 94, 2018. Disponivel em :<https://www.scielo.br/j/ea/a/FTmggx54SrNPL4FW9Mw8wqy/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 24 de maio de 2022.

FONSECA, M. C. F. R. (org.). **Letramento no Brasil; habilidades matemáticas**. São Paulo: Global, 2004. P. 31-46.

FONSECA, S. **Metodologia do Ensino da Matemática**. Belo Horizonte, MG: Lê, 1997.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido.** 1.ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra 1974.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GRANDO, R.C.O **Conhecimento Matemático e o Uso de Jogos na Sala de Aula.** 2000. 239f. Tese (Doutorado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

_____ **O jogo suas Possibilidades Metodológicas no Processo Ensino Aprendizagem na Matemática.** 1995. 194 f. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

_____**Recursos didáticos na Educação Matemática: jogos e materiais manipulativos.** Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica, Vitória, v. 5, n. 2, p.393-416, out. 2015. Disponível em: https://ojs.ifes.edu.br/index.php/dect/article/view/117 Acesso em: 01/07/2022.

INDICADOR, Nacional de Alfabetismo Funcional. INAF 2001: INAF 2001 Relatório disponibilizado para a imprensa.

_____. INAF 2001: INAF 2001 Relatório disponibilizado para a imprensa. 2003.

KAMII, Constance; HOUSMAN, Leslie Baker. Crianças pequenas reinventam a aritmética: implicações da teoria de Piaget. Tradução Cristina Monteiro. 2.ed. Porto Alegre: Artmed, 2002.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Metodologia do trabalho científico**. São Paulo: Atlas, 1992.

PALERMO BRENELLI, R. Intervenção pedagógica, via jogos Quilles e Cilada, para favorecer a construção de estruturas operatórias e noções aritméticas em crianças com dificuldades de aprendizagem. Tese de Doutorado. UNICAMP, Faculdade de Educação, Campinas SP, 1993. Disponível em: < https://repositorioslatinoamericanos.uchile.cl/handle/2250/1344690>. Acesso: 08/06/2022.

PIAGET, J; INHELDER, B. **Gênese das estruturas lógicas elementares**. 2 ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1975. 356p.

_____. **La iniciacion Matemática, Las Matemáticas Modernas y La psicologia del nino.** In: PIAGET, J. y otros. La ensenanza de las matemáticas modernas. HERNÁNDEZ, J. (org). 3 ed. Madrid: Alianza Editorial, 1986a, p. 182-186.

_____. **Observaciones sobre la educacion matematica.** In: PIAGET, J. y otros. La ensenanza de las matemáticas modernas. HERNÁNDEZ, J. (org). 3 ed. Madrid: Alianza Editorial, 1986b, p. 219-227.

_____. **Para onde vai a educação?** Rio de Janeiro: José Olympio, 1948/1988.

TAILLE, Y. d. L. **Piaget, Vigotski, Wallon: teorias psicogenéticas em discussão** / Yves de La Taille, Marta Kohl de Oliveira, Heloysa Dantas. - São Paulo: Summus, 2019.

ÍNDICE REMISSIVO

Ação pedagógica.....4, 7, 10, 17, 111

Aprendizagem. 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 35, 36, 57, 58, 59, 60, 61, 68, 69, 70, 71, 72, 75, 78, 80, 81, 89, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 109, 110, 111, 113, 114, 115, 116, 119, 120

Avaliação Diagnóstica.....5, 7, 8, 13, 18, 113, 114, 115, 116, 117

Educação financeira.....5, 79, 81, 83, 85, 86, 87, 88, 89, 90

Ensino Médio. .4, 5, 7, 8, 9, 10, 17, 18, 35, 58, 60, 62, 69, 70, 79, 80, 82, 86, 89, 90, 94, 98, 102, 103, 104, 114, 121, 122, 123

Equações de Euler-Lagrange.....4, 37, 39

Equações funcionais de Cauchy.....4, 46

Função W de Lambert.....4, 63, 64

Ganho de Hake.....4, 7, 10, 17, 18

Geogebra.....4, 20, 22, 23, 25, 35

Geometria.....4, 5, 6, 8, 13, 20, 21, 22, 23, 25, 35, 36, 87, 96, 98, 99, 100, 102, 103, 104, 108, 110

Geometria analítica.....4, 20, 35, 96

Jogos.....5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 60, 71, 72, 78

Matemática Aplicada.....4, 57, 58, 60, 62

Matemática básica.....5, 91, 92, 93, 95, 97

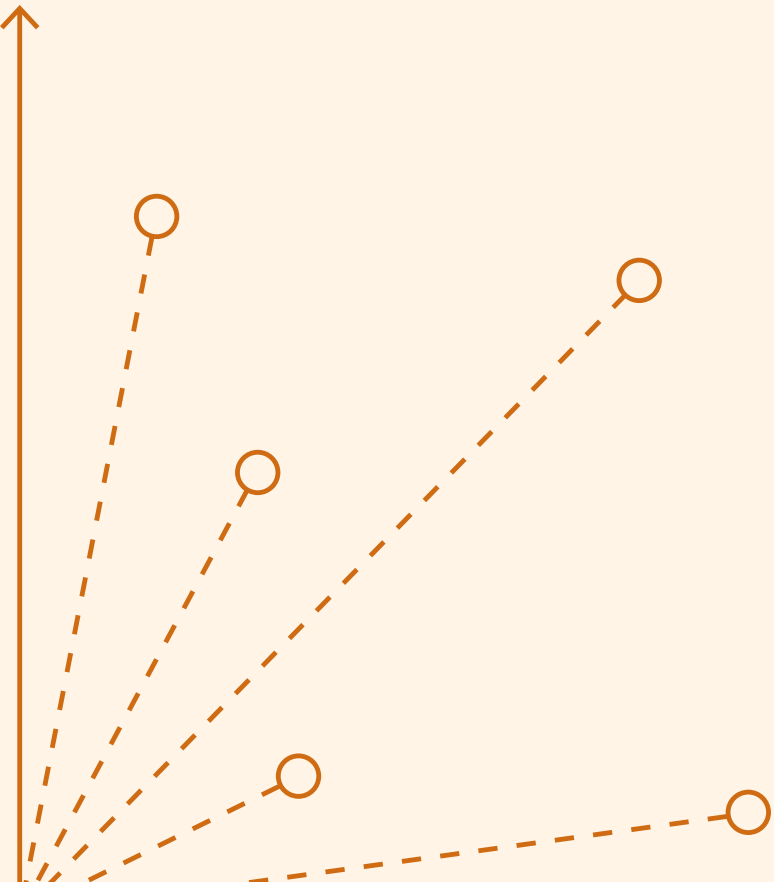
Matemática financeira.....4, 5, 6, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 88, 89, 90, 121, 122

Perspectiva piagetiana.....5, 6, 8, 9, 13

Progressão geométrica.....2, 3, 4, 5, 120, 121, 122, 123, 124, 125

Tangram.....5, 98, 99, 103, 104, 107, 108, 111

Teorema de Pitágoras.....5, 98, 99, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 111



ISBN 978-655376075-2