Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática a Distância

Fundamentos da Matemática Elementar 1

Lúcio Borges de Araújo

Segunda Edição
Revista e Atualizada

UFU

2017

1ª edição 2013
2ª edição 2017

Araújo, Lúcio Borges de

Fundamentos da Matemática Elementar 1 / Lúcio Borges de Araújo.- 2ª ed. - Uberlândia, MG : UFU, 2017 - 99p.

Licenciatura em Matemática.

ISBN: 978.85.99765.33-3

1. Fundamentos da Matemática Elementar 1

Edição
Centro de Educação a Distância
Comissão Editorial - CEAD/UFU

Diagramação
Equipe CEAD/UFU

SUMÁRIO

SUMÁRIO

INFORMAÇÕES

Prezado(a) aluno(a),

Ao longo deste guia impresso você encontrará alguns “ícones” que lhe ajudará a identificar as atividades.

Fique atento ao significado de cada um deles, isso facilitará a sua leitura e seus estudos.

Destacamos alguns termos no texto do Guia cujos sentidos serão importantes para sua compreensão. Para permitir sua iniciativa e pesquisa não criamos um glossário, mas se houver dificuldade interaja no *Fórum de Dúvidas*.

PARA COMEÇO DE CONVERSA

Seja bem-vindo!

Este material de Fundamentos da Matemática Elementar 1 foi elaborado para estudantes de Matemática, seja sua participação presencial, em sala de aula, ou a distância, interagindo com o computador. O único requisito para a aprendizagem deste material é boa vontade de adquirir novos conhecimentos e persistência na solução dos exercícios.

Sabemos que em todo livro de Matemática é imprescindível não colocar as demonstrações de teoremas importantes. Este material não seria diferente e, por isso, não desanime ao encontrar-se com alguns deles. Muitas vezes, as demonstrações seguem um caminho muito técnico, porém o autor tem pensado nisso e de alguma forma facilitará o entendimento.

Este material está divido em cinco capítulos, que iniciam com os conceitos de Trigonometria, seguido dos Números Complexos, Equações Polinomiais, Logaritmos e Progressões e Matemática Financeira.

Bons estudos!

Lúcio Borges de Araújo

CRONOGRAMA

1ª Semana, 2ª Semana e 3ª Semana	4ª Semana e 5ª Semana	6ª Semana	7ª Semana	8ª Semana
Capitulo 1 Trigonometria	Capitulo 2 Números complexos	Capitulo 3 Equações polinomiais	Capitulo 4 Logaritmo	Capitulo 5 Progressões e Matemática Financeira
20 horas	16 horas	8 horas	8 horas	8 horas

AGENDA DOS CAPÍTULOS

Capitulo	CARGA-HORÁRIA	Atividades
01	20 HORAS	1) Participação no fórum de discussão registrando o que sabe sobre trigonometria – Atividade 1; 2) Leitura do texto de apoio – Atividade 2; 3) Realização da Atividade 3 (listas de exercícios) disponibilizados no AVA em 15/02/2013; 4) Web-conferências com os alunos nos dias: 19/02/2013 e 26/02/2013 das 21h00min as 22h00min; 5) Assistir vídeos indicados no AVA;

02	16 HORAS	1) Participação no fórum de discussão registrando o que sabe sobre Números Complexos – Atividade 1 2) Leitura do texto de apoio – Atividade 2 3) Realização da Atividade 3 (listas de exercícios) disponibilizados no AVA em 04/03/2013 4) Web-conferências com os alunos nos dias: 05/03/2013 e 12/03/2013 das 21h00min as 22h00min; 5) Assistir vídeos indicados no AVA. 6) Pesquisar na internet: Aplicações de números complexos (Entrega dia 15/03/2013)
03	8 HORAS	1) Participação no fórum de discussão registrando o que sabe sobre equações polinomiais – Atividade 1 2) Leitura do texto de apoio – Atividade 2 3) Realização da Atividade 3 (listas de exercícios) disponibilizados no AVA em 18/03/2013 das 21h00min as 22h00min; 4) Web-conferências com os alunos nos dias: 19/03/2013 5) Assistir vídeos indicados no AVA.
04	8 HORAS	1) Participação no fórum de discussão registrando o que sabe sobre Logaritmo – Atividade 1 2) Leitura do texto de apoio – Atividade 2 3) Realização da Atividade 3 (listas de exercícios) disponibilizados no AVA em 25/03/2013 das 21h00min as 22h00min; 4) Web-conferências com os alunos nos dias: 26/03/2013 5) Assistir vídeos indicados no AVA.
05	8 HORAS	1) Participação no fórum de discussão registrando o que sabe sobre Progressões e Matemática Financeira – Atividade 1 2) Leitura do texto de apoio – Atividade 2 3) Realização da Atividade 3 (listas de exercícios) disponibilizados no AVA em 01/04/2013 das 21h00min as 22h00min; 4) Web-conferências com os alunos nos dias: 05/04/2013 5) Assistir vídeos indicados no AVA. 6) Pesquisar na internet: Aplicações de: Progressão Aritmética, Progressão Geométrica e Matemática Financeira. (Entrega dia 05/04/2013)

As listas de exercícios que serão disponibilizadas no AVA deverão ser entregues em datas especificadas posteriormente no AVA para que os tutores possam corrigir.

Desejamos a todos os alunos um ótimo curso.

Bons estudos

Lúcio Borges de Araújo

Capítulo 1

Trigonometria

1.1 Introdução

Prezado aluno

Começamos a partir de agora uma viagem interessante e o nosso primeiro ponto de parada é a trigonometria. “A palavra trigonometria é uma combinação de duas palavras gregas, *trigonon*, que significa “triângulo” e *metron*, que significa “medir”. A palavra apareceu na imprensa em finais do século XVI quando foi usada como título de um trabalho de Bartholomaeus Pitiscus, publicado pela primeira vez em 1595 como suplemento de um livro sobre esferas. A palavra grega para “ângulo” é *gonia*, e antes falava-se de *goniometria* como sendo a ciência da medida dos ângulos. (In: Tom Apostol, Os Primórdios da História da Humanidade, Boletim da SPM-no 47).

Inicialmente vamos ter que passar por algumas definições, que são de extrema importância para nosso curso.

1.1.1 O conceito de ângulo

A noção de ângulo encontra-se rigorosamente caracterizada na obra de Euclides, matemático e geômetra da antiguidade, chamada Elementos. Essa obra encontra-se dividida em treze livros. Nesse trabalho de Euclides, encontramos a seguinte definição de ângulo:

Definição: Um ângulo plano é a inclinação mútua de duas retas que se cruzam num mesmo plano.

Por esta definição podemos observar que o conceito de ângulo mede, basicamente, a inclinação relativa de duas retas que se cruzam.

Além disso, a rotação plana de uma reta em torno de um ponto descreve um **ângulo positivo** se a rotação ocorrer no sentido anti-horário (ângulo α, na figura 1). Se a rotação acontecer no sentido horário o ângulo descrito **diz-se negativo** (ângulo β, na figura 1).

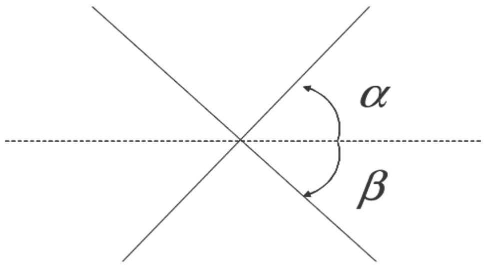


Figura 1

Como os ângulos são medidas, precisamos ter alguma unidade de medida para descrever essa quantidade. Assim, existem três unidades de medidas, a saber: graus, radianos ou grados. Quando, através de uma rotação plana, em sentido anti-horário, de uma reta orientada em torno de um ponto pertencente a esta reta, retorna pela primeira vez à posição inicial, o ângulo descrito é igual a 360º (trezentos e sessenta graus). Veja Figura 2, 2π radianos (ou 2π rad) ou 400 grados.

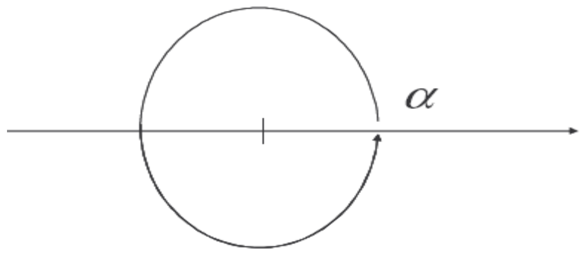


Figura 2

Se a rotação plana da reta anterior descrever apenas *180º*, *π* radianos ou *200* grados, a reta fica disposta na mesma direção embora com uma orientação oposta (Figura 3). Este ângulo é chamado **ângulo raso**.

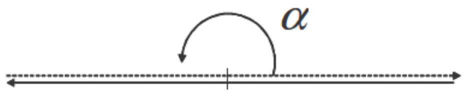


Figura 3

Se a rotação plana da reta em questão descrever *90º*, *π/2* rad ou *100* grados, diz-se que o ângulo descrito é um ângulo reto (Figura 4).

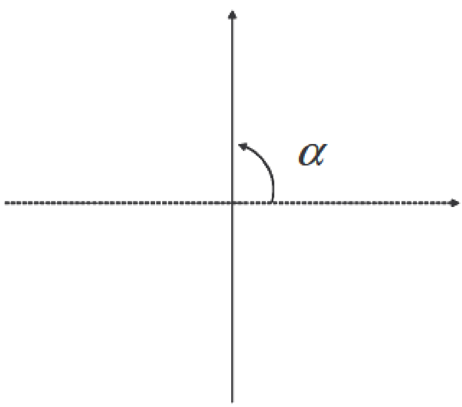


Figura 4

O sistema de medida de ângulos em graus é designado pelo sistema sexagesimal, no qual as frações de grau são expressas por minutos (angulares) e segundos (angulares). Como se sabe, nos sistemas sexagesimais, 60 minutos (ou 60’) correspondem a 1º e 60 segundos (ou 60’’) correspondem à 1 minuto.

Exemplo: Expresse em graus e radianos, 50 grados.

Para resolver esta situação b, fazer uma regra de três, ou seja

$$\begin{array}{ccc} 90^{o} & & 100 \text{ grados} \\ x^{\,o} & & 50 \text{ grados} \end{array}$$

assim,

$$\frac{x}{50 \text{ grados}} = \frac{90^{o}}{100 \text{ grados}}.$$

$$x \cdot 100 = 90^{o} \cdot 50$$

$$x = \frac{90^{o} \cdot 50}{100}$$

$$x = 45^{o}$$

e

$$\begin{array}{ccc} \pi/2 & & 100 \text{ grados} \\ x^{\,o} & & 50 \text{ grados} \end{array}$$

$$\frac{x}{50 \text{ grados}} = \frac{\pi/2}{100 \text{ grados}}.$$

$$x \cdot 100 = \frac{\pi}{2} \cdot 50$$

$$x = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 50}{100}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \cdot 50 \cdot \frac{1}{100}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

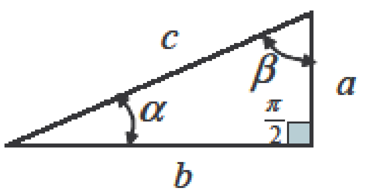
$$x = \frac{\pi}{4} \text{rad}$$

1.2 Funções trigonométricas

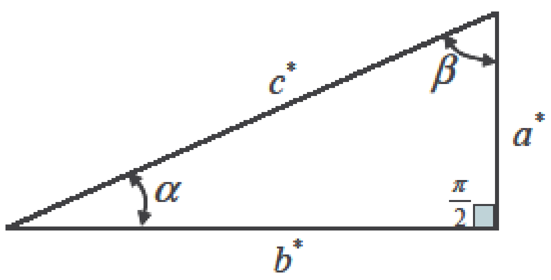
Muitos fenômenos da natureza podem ser estudados por meio de uma função de ângulos. As funções que estudaremos são: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante.

1.2.1 Funções seno e cosseno para ângulo agudo

Para começar a conversar sobre as funções trigonométricas considere dois triângulos retângulos semelhantes, quaisquer:



e



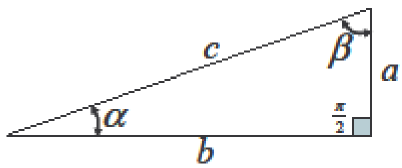
da geometria plana, que estudamos no ensino médio, podemos retirar as seguintes relações:

$$\frac{a^*}{c^*} = \frac{a}{c}, \frac{b^*}{c^*} = \frac{b}{c} \text{ e } \frac{a^*}{b^*} = \frac{a}{b}$$

Observação: uma vez que os triângulos são semelhantes, eles partilham entre si a igualdade dos quocientes dos comprimentos dos lados.

Dessa forma, torna-se possível associar a cada ângulo *α* ou *β* de um triângulo desse tipo, qualquer um daqueles quocientes. Assim, as funções Seno, Cosseno e outras funções trigonométricas podem ser definidas.

Seja o triângulo retângulo tal que *α* é o ângulo definido pela hipotenusa e um dos catetos:



Feitas as suposições, temos as seguintes definições:

Definição: A função seno é definida como sendo o quociente entre o comprimento do cateto oposto (que tem comprimento *a*) ao ângulo *α* e o comprimento da hipotenusa (que tem comprimento *c*):

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\mathrm{a}}{c}$$

Definição: A função cosseno é definida como sendo o quociente entre o comprimento do cateto adjacente (que tem comprimento *b*) ao ângulo *α,* e o comprimento da hipotenusa (que tem comprimento *c*):

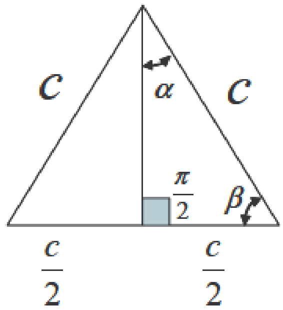
$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\mathrm{b}}{c}$$

Exemplo: Determine o valor da função seno de *α* supondo que *α* tenha o valor de 0, π/6, π/4, π/3 e π/2 radianos.

Comecemos por observar que quando α tem o valor de 0 radianos o seu cateto oposto tem um comprimento nulo. Dessa forma:

$$\text{sen } 0 = \frac{0}{c} = 0.$$

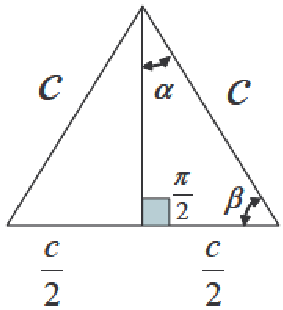
Quanto ao valor da função seno, quando α tem o valor de π/6 radianos, consideremos o triângulo equilátero a seguir:



Como já sabemos, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a π radianos. Assim, se em um triângulo isósceles, os ângulos internos *β* são iguais a *β* = π/3, logo, no triângulo da figura, *α* = π/6. Se utilizarmos a definição de Seno,

$$sen\frac{\pi}{6}=\frac{\frac{c}{2}}{c}=\frac{1}{2}$$

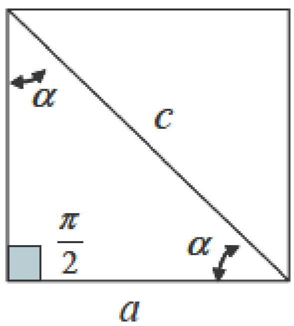
para determinar seno de π/3, primeiramente precisamos calcular a altura do triângulo.



Pelo teorema de Pitágoras temos que essa altura é $h=\sqrt{c^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}$. Assim,

$$sen\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{c^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}}{c}=\frac{\sqrt{\frac{3c^2}{4}}}{c}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Consideremos, agora, o quadrado de lado a, seguinte:



temos assim que $\alpha = \pi/4$ e $c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$. Logo,

$$sen\frac{\pi}{4} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Finalmente, observemos que quando $\alpha = \pi/2$, o comprimento do cateto oposto torna-se igual ao comprimento da hipotenusa. Assim,

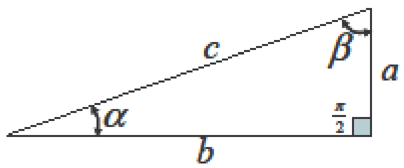
$$sen\ \pi/2 = 1$$

Vamos, então, colocar esses resultados na seguinte tabela:

Ângulo	Seno
0	0
$\pi/6$	$1/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/2$	1

1.2.2 Relações entre o seno e cosseno

As funções seno e cosseno relacionam-se diretamente e para entender essa relação, consideremos novamente a seguinte figura de triângulo retângulo:



Por definição,

$$sen\ \alpha = a/c \quad \text{e} \quad cos\ \beta = b/c.$$

Por outro lado, se α e β representam os ângulos internos adjacentes à hipotenusa temos que:

$$\beta = (\pi/2) - \alpha,$$

assim,

$$sen\ \alpha = a/b = cos\ \beta = cos(\pi/2 - \alpha),$$

isto é,

$$sen\ \alpha = cos(\pi/2 - \alpha).$$

Por outro lado, se na expressão anterior fizermos

$$\beta = \pi/2 - \alpha$$

então,

$$\alpha = \pi/2 - \beta.$$

Isso nos permite obter a expressão equivalente

$$sen(\pi/2 - \beta) = cos\ \beta.$$

Essas importantes expressões permitem-nos obter o seno ou o cosseno de um ângulo α se conhecermos, respectivamente, o cosseno ou o seno do ângulo $\pi/2 - \alpha$.

Observação: o ângulo $\pi/2 - \alpha$ é chamado de **ângulo complementar** de α para $\pi/2$.

Exemplo: Determine o valor da função cosseno de β, para β igual $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ e $\pi/2$ rad.

Sabemos que

$$0 = \pi/2 - \alpha, \quad \text{para } \alpha = \pi/2,$$

$$\pi/6 = \pi/2 - \alpha, \quad \text{para } \alpha = \pi/3,$$

$$\pi/4 = \pi/2 - \alpha, \quad \text{para } \alpha = \pi/4,$$

$$\pi/3 = \pi/2 - \alpha, \quad \text{para } \alpha = \pi/6,$$

$$\pi/2 = \pi/2 - \alpha, \quad \text{para } \alpha = 0.$$

Por outro lado,

$$sen\ \alpha = cos(\pi/2 - \alpha).$$

Como base, no exemplo anterior temos:

$$cos\ 0 = cos(\pi/2 - \pi/2) = sen(\pi/2) = 1,$$

$$cos\ \pi/6 = cos(\pi/2 - \pi/3) = sen\ \pi/3 = \sqrt{3}/2$$

$$\cos \pi/4 = \cos(\pi/2 - \pi/4) = sen(\pi/4) = \sqrt{2}/2$$

$$\cos \pi/3 = \cos(\pi/2 - \pi/6) = sen\ \pi/6 = 1/2$$

$$\cos \pi/2 = \cos(\pi/2 - 0) = sen\ 0 = 0.$$

Assim, podemos resumir os resultados de senos e cossenos, na seguinte tabela:

Ângulo	Seno	cosseno
0	0	1
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	1	0

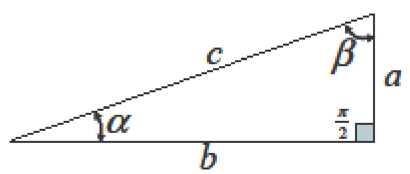
1.2.3 As funções secantes e cossecantes para ângulo agudo

De acordo com as funções cosseno e seno, definidas anteriormente, podemos obter outras funções denominadas de secante e cossecante, que são definidas para ângulos entre 0 e π/2 rad.

Definição: As funções secante e cossecante são definidas como:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{e} \quad \operatorname{cossec} x = \frac{1}{sen\ x}$$

Supondo as definições anteriores e o seguinte triângulo retângulo



temos que:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{b/c} = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{cossec} \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha} = \frac{1}{a/c} = \frac{c}{a}$$

Exemplo: Determine o valor da secante e cossecante quando α assume os valores 0, π/6, π/4 , π/3 e π/2 rad.

Tendo como base a tabela de valores para funções seno e cosseno para os ângulos referidos, obtidos no exemplo anterior, e as definições das funções secante e cossecante, temos que:

Ângulo	sen x	Cossec x = 1/sen x	cos x	Sec x = 1/cos x
0	0	*Não definida*	1	1
$\pi/6$	$1/2$	2	$\sqrt{3}/2$	$2\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$2\sqrt{3}/3$	$1/2$	2
$\pi/2$	1	1	0	*Não definida*

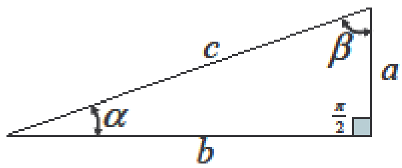
1.2.4 As funções tangentes e cotangentes para ângulo agudo

Temos ainda outras duas funções, a saber, tangente e cotangente, que são importantes. Essas funções também podem ser definidas, para ângulos entre 0 e π/2 radianos, recorrendo às funções seno e cosseno.

Definição: As funções tangente e cotangente são as funções definidas, respectivamente, como:

$$tg\ \alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\ \alpha} \quad \text{e} \quad \cot g\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha} = \frac{\cos\alpha}{sen\ \alpha}$$

Supondo as definições anteriores e o seguinte triângulo retângulo



temos que:

$$tg\ \alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\ \alpha} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$cotg\ \alpha = \frac{\cos\ \alpha}{sen\,\alpha} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}$$

Exemplo: Determine o valor da tangente e cotangente quando α assume os valores 0, π/6, π/4, π/3 e π/2 rad.

Considerando os valores das funções seno e cosseno para esses ângulos e as definições tangente e cotangente, temos:

Ângulo	sen x	cos x	tg x = sen x/cos x	cotg x = cos x/sen x
0	*0*	*1*	*0*	*Não definida*
π/6	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
π/4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	*1*	*1*
π/3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
π/2	*1*	*0*	*Não definida*	*0*

1.2.5 O Círculo trigonométrico

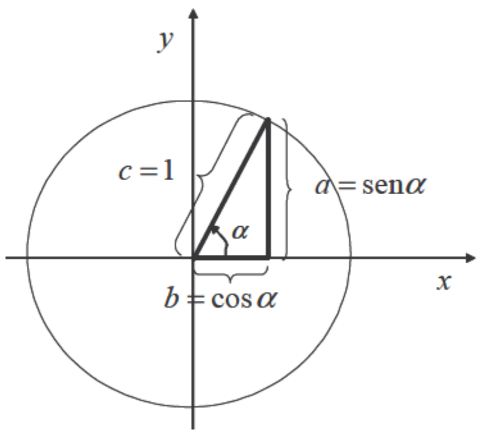
O círculo trigonométrico é um círculo de raio unitário, centrado na origem de um referencial cartesiano. Os ângulos são medidos entre o semi-eixo positivo dos x e um vetor apropriado que se inicia na origem do plano cartesiano. Se a medição for efetuada no sentido anti-horário o ângulo é positivo. Caso contrário é negativo.

Adicionalmente o círculo trigonométrico permite-nos generalizar as funções trigonométricas anteriormente definidas para argumentos entre 0 e π/2 radianos a outros ângulos.

1.2.6 As funções trigonométricas no círculo trigonométrico

A figura abaixo representa um círculo trigonométrico com um triângulo retângulo cuja hipotenusa constitui um raio com inicio na origem e comprimento unitário.

Seja α o ângulo medido no sentido anti-horário entre o semi-eixo positivo x e a hipotenusa do triângulo retângulo representado, sejam também, *a* e *b* os comprimentos dos catetos do triângulo retângulo.



Como a hipotenusa do triângulo representado tem o comprimento c = 1, então por definição é imediato concluir que para um ângulo entre 0 e π/2 rad

$$sen\ \alpha = a/c = a/1 = a$$

e

$$\cos \alpha = b/c = b/1 = b.$$

ou seja, o comprimento a e b dos catetos representados na figura anterior corresponde exatamente aos valores das funções seno e cosseno do ângulo α.

Para outros ângulos, as funções seno e coseno, são definidas de forma análoga, ou seja, como:

$$sen\ \alpha = a$$

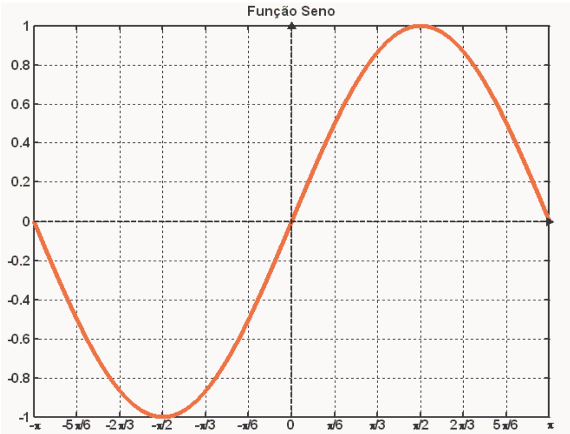
e

$$cos\ \alpha = b$$

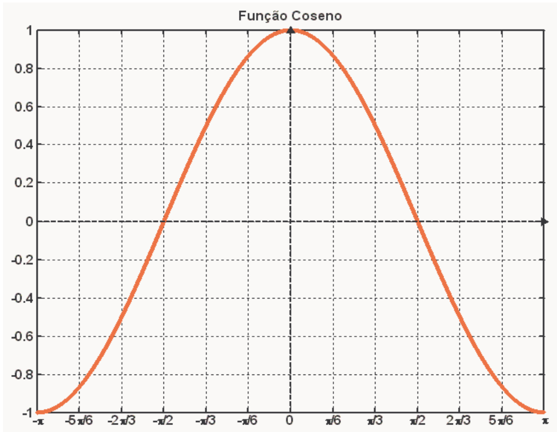
em que os comprimentos *a* e *b* são medidos de acordo com o sentido dos eixos correspondentes.

Ao acompanharmos a evolução dos comprimentos dos catetos do triângulo da figura anterior, percebemos que à medida que o ângulo *α* varia, podemos identificar valores típicos dessas funções e algumas interessantes propriedades.

Ilustramos a seguir os gráficos das funções seno e cosseno no intervalo $[-\pi, \pi]$.



Função seno

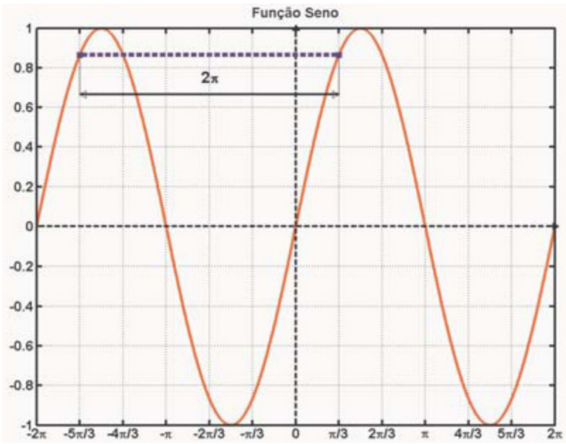


Função cosseno

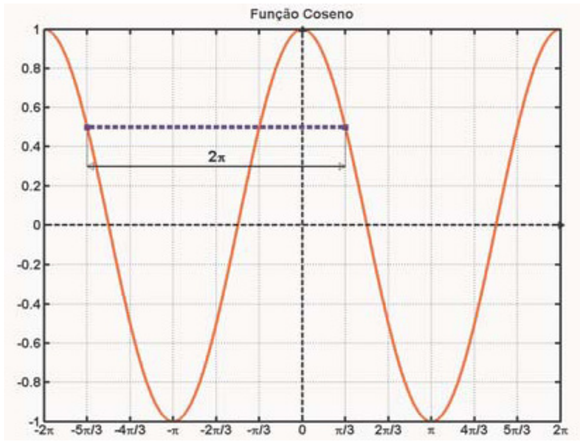
Com base nestas figuras, notamos que:

Ângulo	Seno	cosseno
0	0	1
$\pi/2$	1	0
π	0	-1
$3\pi/2$	-1	0
2π	0	0

Outra característica que se pode registrar observando a evolução dos comprimentos dos catetos é a periodicidade da função. Tanto a função seno quanto a função cosseno tem período 2π. Nas figuras a seguir pode-se verificar esta propriedade.



Função seno



Função cosseno

Tem-se, assim, para qualquer ângulo α

$$sen\ \alpha = sen\ (\alpha + 2\pi)$$

e

$$cos\ \alpha = cos\ (\alpha + 2\pi)\ .$$

ou de uma forma mais geral

$$sen\ \alpha = sen\ (\alpha + k2\pi)$$

e

$$cos\ \alpha = cos\ (\alpha + k2\pi)$$

para todo ângulo α e k número inteiro.

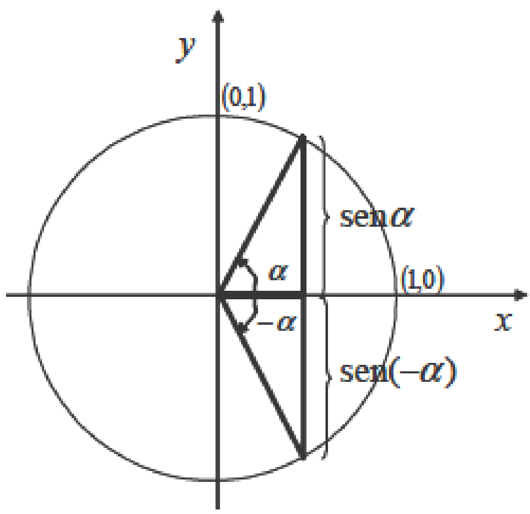
Pode-se ainda verificar que para todo o ângulo α

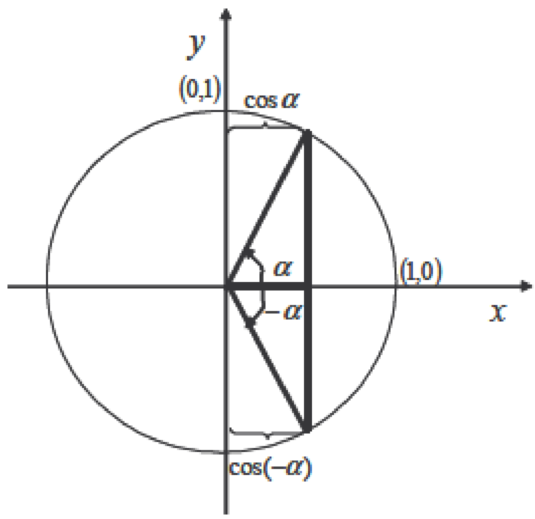
$$sen\ \alpha = -\ sen\ (-\alpha)$$

e

$$cos\ \alpha = cos\ (-\alpha)\ .$$

em outras palavras, a função seno é uma função ímpar e a função cosseno é uma função par. Nas figuras a seguir verificamos, como base na interpretação do círculo trigonométrico, estas propriedades.





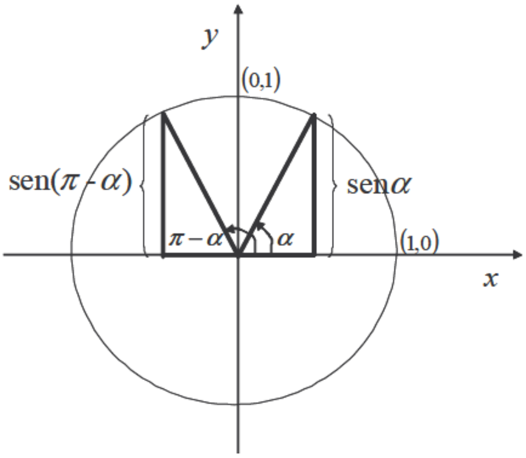
Por outro lado também é possível observarmos que

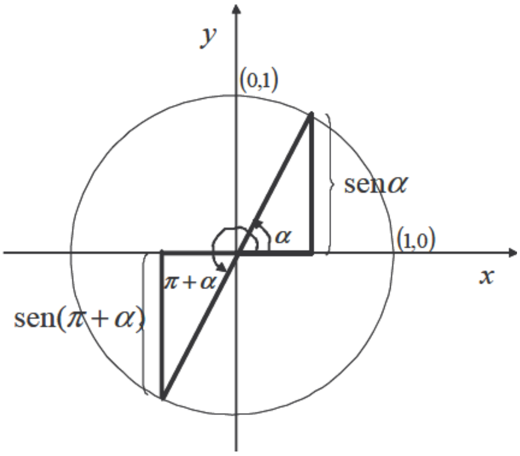
$$sen\ (\pi - \alpha) = sen\ \alpha$$

e

$$sen\ (\pi + \alpha) = -\ sen\ \alpha.$$

Graficamente podemos verificar estas propriedades, na figura a seguir.

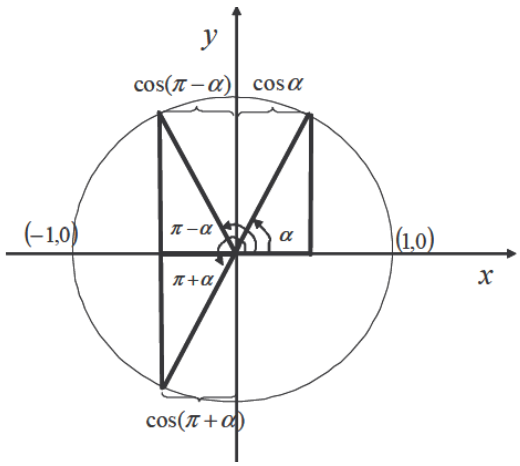




E também,

$$cos\ \alpha = -\ cos\ (\pi - \alpha) = -\ cos\ (\pi + \alpha).$$

Graficamente, temos que:



Outra característica leva em conta o Teorema de Pitágoras. Observando o círculo trigonométrico deduz-se a chamada **relação fundamental da trigonometria:**

$$1 = c^2 = a^2 + b^2 = sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha$$

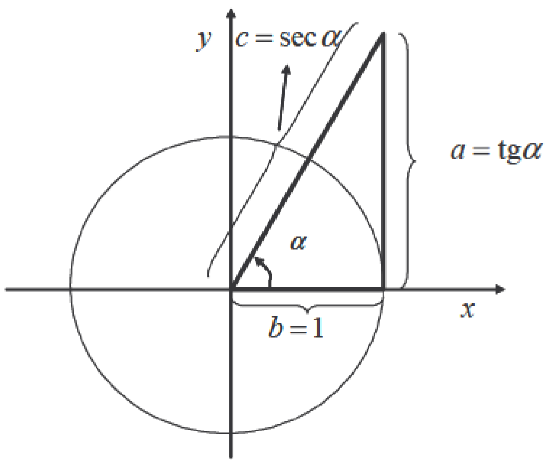
isto é

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

para qualquer ângulo α.

Bom, anteriormente falamos sobre funções senos e cossenos, mas agora vamos falar sobre as outras funções trigonométricas: tangente, cotangente, secante e cossecante.

Vamos começar com a tangente e secante. Para isso consideremos o círculo trigonométrico com um triângulo retângulo com hipotenusa igual a um. Seja α o ângulo medido no sentido anti-horário entre o semi-eixo positivo dos x e a hipotenusa do triângulo retângulo representado e b o comprimento unitário do cateto adjacente do triângulo retângulo representado. Os comprimentos a e b dos catetos são medidos de acordo com os sentidos dos correspondentes eixos.



Como o cateto adjacente ao ângulo α é unitário e atendendo à definição de Tangente e Secante para ângulos entre *0* e *π/2* obtemos que:

$$tg\ \alpha = a/1 = a$$

e

$$sec\ \alpha = c/1 = c.$$

ou seja, o comprimento do cateto oposto e da hipotenusa do triângulo representado na figura anterior correspondem aos valores da tangente e da secante do ângulo α, respectivamente.

Para outros ângulos as funções Tangente e Secante são definidas da seguinte forma:

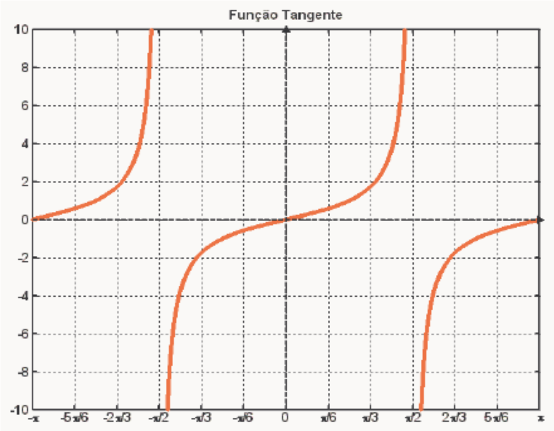
$$tg\ \alpha = a/b$$

e

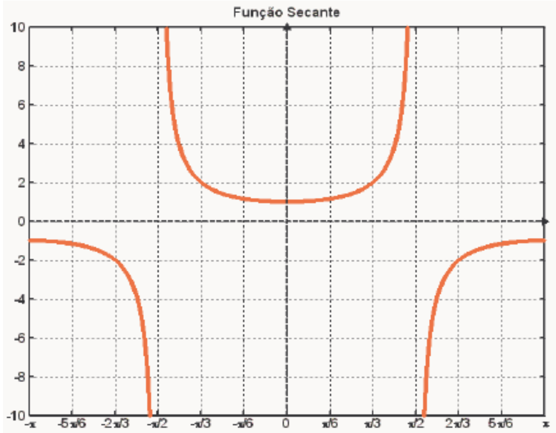
$$sec\ \alpha = c/b$$

em que os comprimentos a e b são medidos de acordo com o sentido dos eixos.

Os gráficos das funções Tangente e Secante, no intervalo [−π, π], estão ilustrados na figura a seguir.



Função Tangente



Função Secante

Com base nestas figuras, podemos deduzir os seguintes valores das funções Tangente e Secante para alguns ângulos de interesse:

Ângulo	tangente	Secante
0	0	1
π/2	*Não definida*	*Não definida*
π	0	-1
3π/2	*Não definida*	*Não definida*
2π	0	1

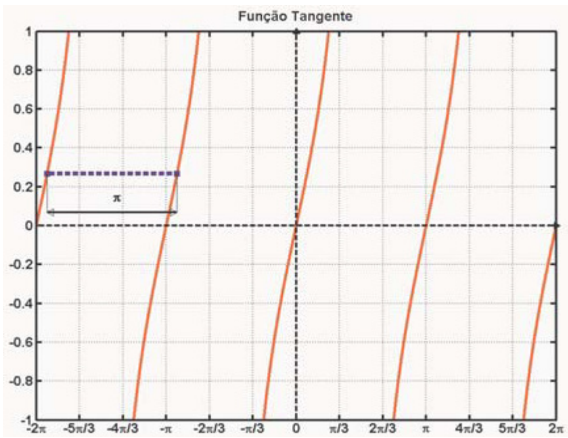
É possível notar que:

$$tg\ \alpha = a/b = (-a)/(-b) = tg\ (\alpha + \pi),$$

ou seja, a função tangente é periódica com período π, ou seja,

$$tg\ \alpha = tg\ (\alpha + k\pi)$$

para todo ângulo α e k número inteiro. Na figura a seguir podemos verificar a periodicidade desta função.



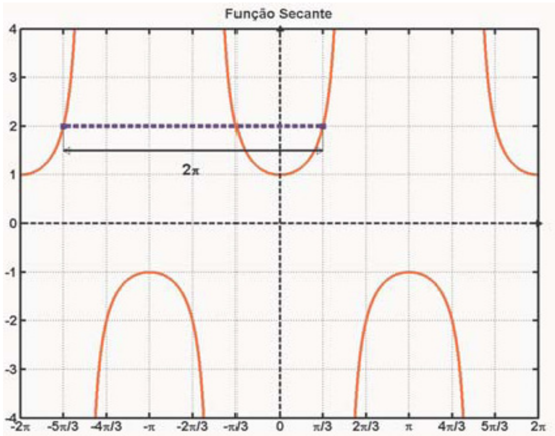
Função Tangente

Já para a função Secante temos que:

$$sec\ \alpha = c/b = (-c)/(-b) = -\,sec\ (\pi + \alpha) = -\,(-\,sec\ (\pi + (\pi + \alpha)))$$

$$sec\ \alpha = sec\ (2\pi + \alpha),$$

o que mostra que a função secante também é periódica de período 2π. Isto é, $sec\ \alpha = sec\ (\alpha + 2k\pi)$ para todo ângulo α e k número inteiro. Esta propriedade é ilustrada na figura a seguir:



Função Secante

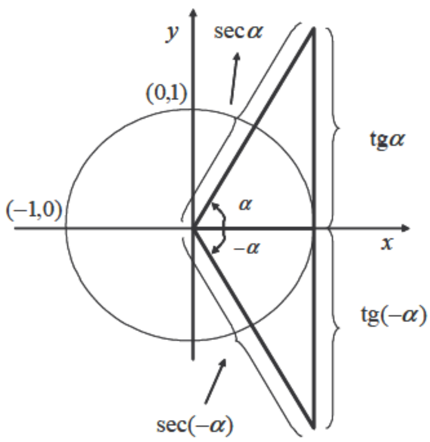
Em relação a estas duas funções, temos que

$$tg\ \alpha = -\,tg\ (-\alpha)$$

e

$$sec\ \alpha = sec\ (-\alpha),$$

o que mostra que a função tangente é uma função ímpar e a função secante uma função par. Veja a figura a seguir.

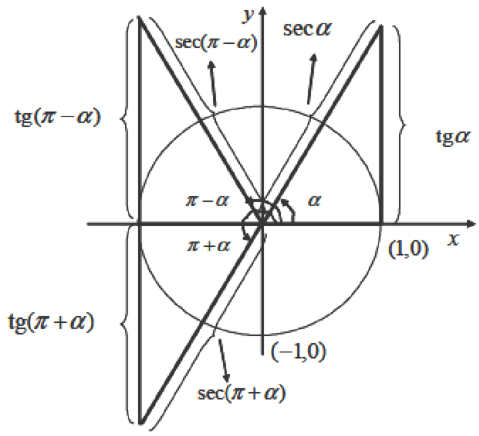


Também, percebemos que

$$tg\ \alpha = -\ tg\ (\pi - \alpha)$$

e

$$sec\ \alpha = c/b = -c/-b = -\ sec\ (\pi - \alpha) = -\ sec\ (\pi + \alpha).$$



Utilizando o Teorema de Pitágoras, observando no círculo trigonométrico, deduzimos que:

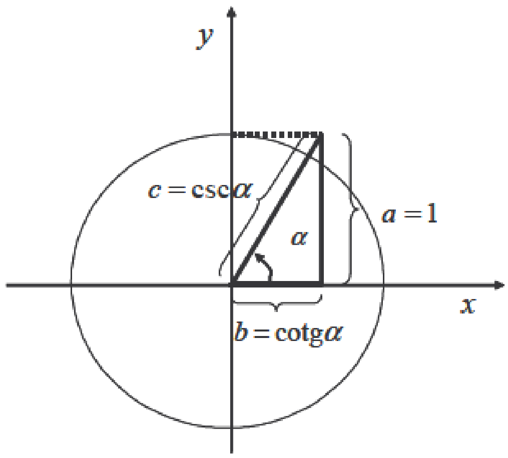
$$c^2 = sec^2\ \alpha = a^2 + b^2 = tg^2\ \alpha + 1,$$

isto é

$$sec^2\ \alpha = tg^2\ \alpha + 1,$$

para qualquer o ângulo α.

Até agora já estudamos as funções seno, cosseno, tangente e secante. Falta ainda, considerar as funções cotangente e cossecante. Para isto, consideremos a figura a seguir que representa um círculo trigonométrico com um triângulo retângulo. Seja *α* o ângulo medido no sentido positivo entre o eixo positivo x e a hipotenusa do triângulo retângulo representado e *a* o comprimento unitário do cateto oposto do triângulo retângulo.



Como o cateto oposto ao ângulo α é igual 1, atendendo à definição de cotangente e cossecante para ângulos entre *0* e *π/2*, temos que:

$$cotg\ \alpha = b/1 = b$$

e

$$csc\ \alpha = c/1 = c.$$

Estes resultados significam que os comprimentos do cateto adjacente e da hipotenusa do triângulo representado na figura anterior correspondem aos valores da cotangente e da cossecante do ângulo α, para ângulos entre 0 e $\pi/2$, respectivamente.

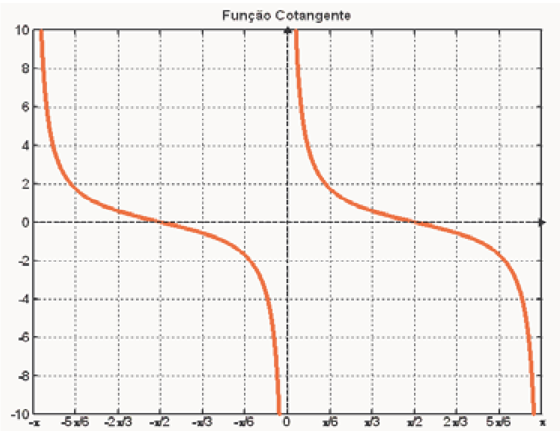
Para outros ângulos as funções cotangente e cossecante são definidas da seguinte forma:

$$cotg\ \alpha = b/a$$

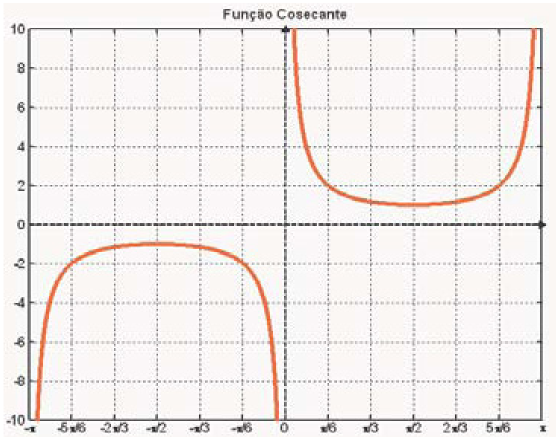
e

$$csc\ \alpha = c/a$$

Uma ilustração gráfica é mostrada em seguida com os gráficos das funções cotangente e cossecante no intervalo [−π, π].



Função Cotangente



Função Cossecante

Com a atenção voltada para os comprimentos *a* e *b* dos catetos, podemos obter os valores das funções cotangente e cossecante para alguns ângulos de interesse:

Ângulo	cotangente	cossecante
0	*Não definida*	*Não definida*
$\pi/2$	0	1
π	*Não definida*	*Não definida*
$3\pi/2$	0	-1
2π	*Não definida*	*Não definida*

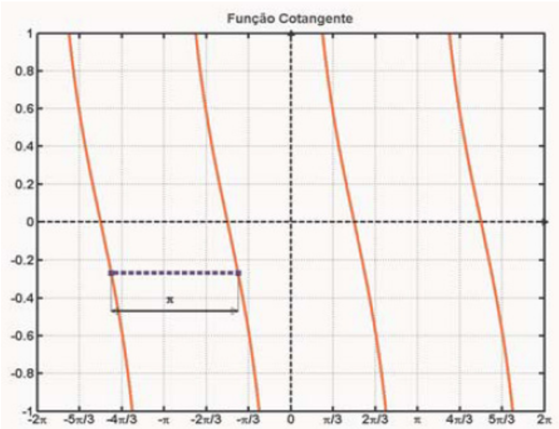
Pode-se observar também que:

$$cotg\ \alpha = b/a = (-b)/(-a) = cotg\ (\alpha + \pi),$$

isto é, a função cotangente é periódica com período π, ou seja

$$cotg\ \alpha = cotg\ (\alpha + k\pi)$$

para todo ângulo α e k número inteiro. Esta propriedade está representada na figura a seguir.



Função Cotangente

Seguindo o mesmo raciocínio, temos também que:

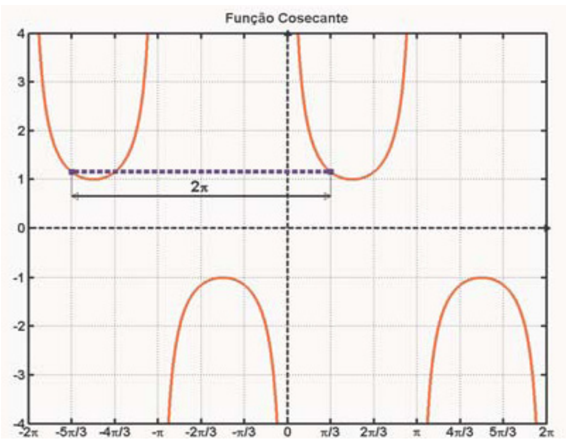
$$csc\ \alpha = c/a = (-c)/(-a) = -\ csc\ (\pi + \alpha) = -\ (-\ csc\ (\pi + (\pi + \alpha)))$$

$$csc\ \alpha = csc\ (2\pi + \alpha),$$

o que mostra que a função cossecante é periódica com período 2π. Ou seja:

$$csc\ \alpha = csc\ (\alpha + 2k\pi)$$

para todo ângulo α, e k é um número inteiro. Para isto, veja a figura a seguir:



Função Cossecante

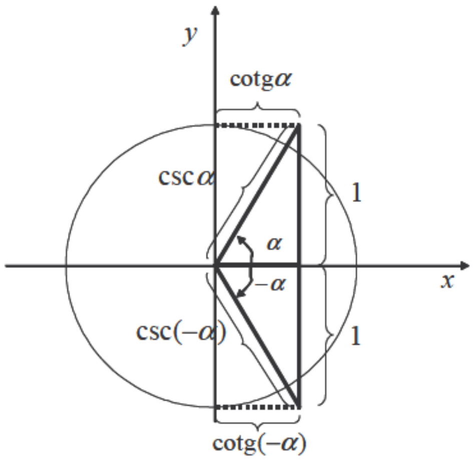
Por outro lado

$$cotg\ \alpha = -\ cotg\ (-\alpha)$$

e

$$csc\ \alpha = -\ csc\ (-\alpha),$$

o que mostra que a função cotangente e a função cossecante são funções ímpares. Esta propriedade pode ser observada na figura abaixo.

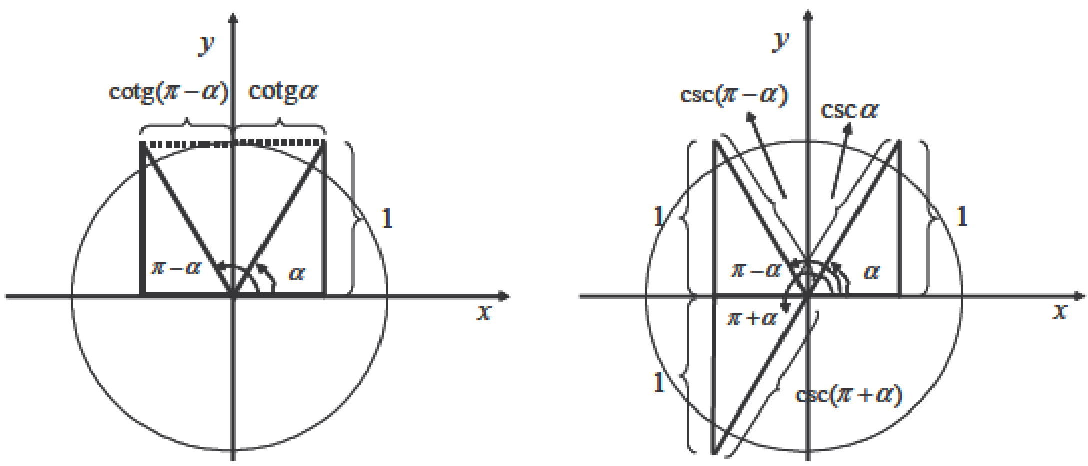


Usando essa propriedade temos que:

$$cotg\ \alpha = -\ cotg\ (\pi - \alpha)$$

e

$$csc\ \alpha = c/a = (-c)/\ (-a) = -\ csc\ (\pi + \alpha) = csc\ (\pi - \alpha).$$



Utilizando o Teorema de Pitágoras no círculo trigonométrico, obtemos que:

$$c^2 = csc^2\ \alpha = a^2 + b^2 = 1 + cotg^2\ \alpha,$$

isto é

$$csc^2\ \alpha = cotg^2\ \alpha + 1,$$

para qualquer ângulo α.

1.2.7 Funções trigonométricas para ângulos arbitrários

Vimos anteriormente que as funções trigonométricas básicas são periódicas de período 2π e π. Adicionalmente, se uma função é periódica de período *π* então, essa função também é periódica com período *2π.* Logo, podemos concluir que todas as funções trigonométricas básicas têm período *2π*. Assim, poderemos calcular o valor dessas funções para um ângulo arbitrário se soubermos os valores das funções trigonométricas para ângulos no intervalo [*0, 2π* [(ou [*0, 360º]*), bastando para tal reduzir o ângulo dado a um valor no intervalo [*0, 2π* [(ou [*0, 360º]*).

Tal redução é feita calculando-se o resto da divisão inteira do ângulo dado por *2π* ou *360º*. O ângulo obtido (resto da divisão) diz-se **congruente** com o ângulo dado *mod 2π*, ou *mod360º* .

Exemplo: Reduza ao intervalo [*0, 3'60º*] o ângulo de -1080º.

Ao dividir -1080º por 360º temos um resultado igual a -3 e o resto da divisão é 0º, o que mostra que −1080º é congruente com 0º (*mod* 360º).

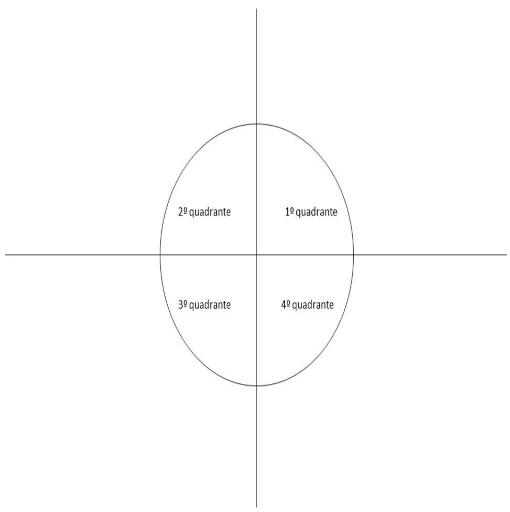
Exemplo: Reduza ao intervalo [*0, 2π*] o ângulo *25π /4 rad*.

Ora, ao dividir *25π /4* por *2π* temos um resultado igual a *3* e o resto da divisão é *π /4*, o que mostra que *25π /4* é congruente com *π /4* (*mod 2π*).

Exemplo: Calcule *cos (−1080º)*.

Sabemos que *−1080º* é congruente com *0º* (*mod 360*). Então *cos (−1080º) = cos 0º = 1*.

Dado um círculo trigonométrico, podemos dividir o círculo em partes que são chamadas quadrantes, como mostrado na figura a seguir.



Em certas situações é necessário reduzir um ângulo de uma função trigonométrica ao 1º quadrante. Para isso, e recorrendo às propriedades das funções trigonométricas é possível relacionar os valores que as funções trigonométricas assumem no intervalo [*0, 2π*[(ou [*0, 360º*]) com valores no intervalo [*0, π/2*[(ou [*0, 90º*]). Tal procedimento designa-se por redução de uma dada função trigonométrica ao 1º quadrante (do círculo trigonométrico). Esse procedimento pode ser conveniente, uma vez que conhecemos os valores das diferentes funções trigonométricas para diferentes ângulos no 1º quadrante.

Exemplo: Reduza ao 1º quadrante *cos (180º − 35º)*.

Tomemos *cos (180º − 35º) = − cos (35º)*. Note que *35º* pertence ao 1º quadrante.

Exemplo: Calcule sem (29π /4)

Sabemos que dividindo 29π /4 por 2π é igual a 3 com resto (5π/4) = (π+ π/4). Então,

$$sen(29\pi /4) = sen(5\pi /4) = sen(\pi + \pi /4) = -sen(\pi /4) = -\sqrt{2} /2$$

1.3 Identidades Fundamentais

Na trigonometria existem algumas identidades que nos ajudam na solução de muitos problemas. Algumas delas já foram vistas na seção anterior, a saber:

a) $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$

b) $sec^2\,\alpha = tg^2\,\alpha + 1$

c) $csc^2\,\alpha = cotg^2\,\alpha + 1$

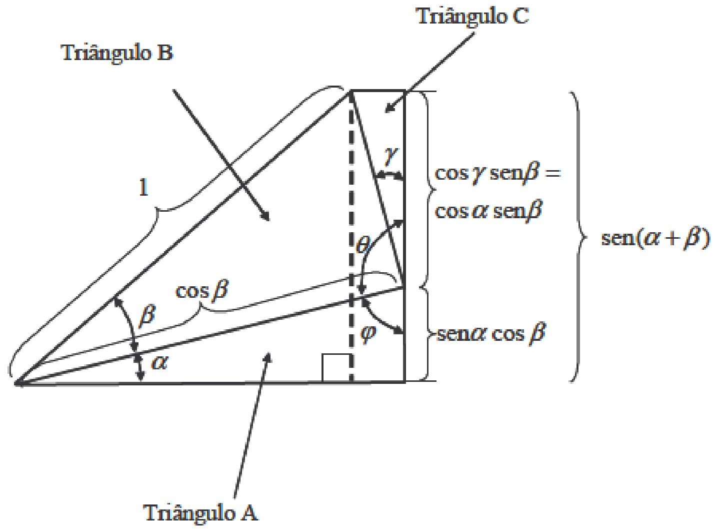
A seguir, aprenderemos sobre identidades trigonométricas que nos auxiliaram no cálculo de funções da soma e da subtração de ângulos quaisquer.

1.3.1 Seno da soma

Uma importante fórmula da trigonometria é a que estabelece o seguinte resultado, conhecido sugestivamente por “o seno da soma”:

$$sen\ (\alpha + \beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \beta\ cos\ \alpha.$$

Observando esta fórmula vemos que ela relaciona o seno de uma soma de ângulos com o seno e o cosseno de cada uma das parcelas. Para nos convencermos que este resultado é verdadeiro consideremos a figura abaixo:



Esta figura representa três triângulos: o triângulo A, o triângulo B e o triângulo C, sendo que a hipotenusa do triângulo B tem comprimento unitário. Naturalmente, nessas circunstâncias, o comprimento do cateto oposto ao ângulo $\alpha + \beta$, representado a traço interrompido, será *sen* $(\alpha + \beta)$. Mas, este valor é igual à soma do comprimento do cateto oposto ao ângulo α (que é $sen\ \alpha \cos \beta$) com o comprimento do cateto adjacente ao ângulo γ (que é $\cos \gamma\ sen\ \beta$), isto é:

$$sen\ (\alpha + \beta) = sen\ \alpha \cos \beta + \cos \gamma\ sen\ \beta.$$

Como $\alpha = \gamma$, já que $\phi + \vartheta = \pi$ com $\varphi = \pi/2 - \alpha$ e $\vartheta = \pi/2 + \gamma$, que resulta em

$$\pi/2 - \alpha + \pi/2 + \gamma = \pi \rightarrow \alpha = \gamma,$$

a fórmula procurada fica em

$$sen\ (\alpha + \beta) = sen\ \alpha \cos \beta + \cos \alpha\ sen\ \beta.$$

Exemplo: Mostre que $sen\ (\alpha - \beta) = sen\ \alpha \cos \beta - \cos \alpha\ sen\ \beta$.

A partir da fórmula do seno da soma e, notando que o seno é uma função ímpar e o cosseno uma função par, temos que:

$$sen\ (\alpha - \beta) = sen\ (\alpha + (-\beta)) = sen\ \alpha \cos (-\beta) + \cos \alpha\ sen\ (-\beta)$$

$$sen\ (\alpha - \beta) = sen\ \alpha \cos \beta - \cos \alpha\ sen\ \beta.$$

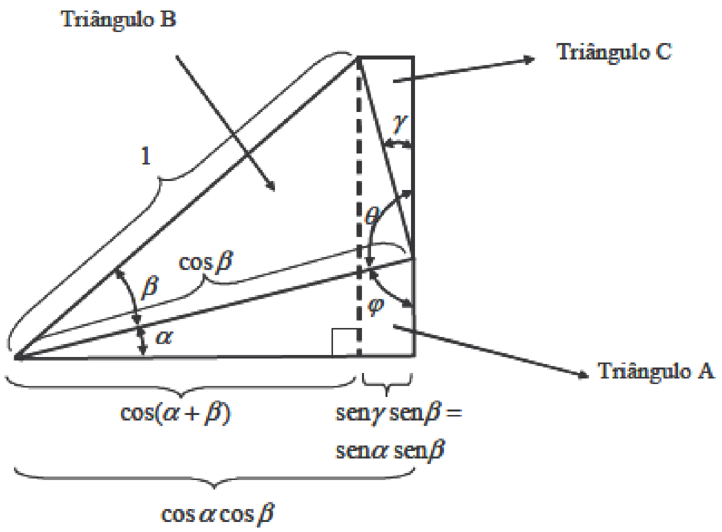
Observação: Esta expressão é conhecida como formula do seno da subtração

1.3.2 Cosseno da soma

Outra fórmula importante da trigonometria é a que estabelece um resultado conhecido sugestivamente por "o cosseno da soma":

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta.$$

Como se pode observar esta fórmula relaciona o cosseno de uma soma de ângulos com o seno e o cosseno de cada uma das parcelas. Para nos convencermos de que este resultado é verdadeiro consideremos a seguinte figura:



Esta figura representa três triângulos: o triângulo A, o triângulo B e o triângulo C, tendo a hipotenusa do triângulo B um comprimento unitário. Naturalmente, nestas circunstâncias, o comprimento do cateto adjacente ao ângulo $\alpha + \beta$, será $\cos(\alpha + \beta)$. Mas, a soma deste valor com o comprimento do cateto oposto ao ângulo γ (que é $\operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\beta$) é o valor $\cos\alpha \cos\beta$, isto é:

$$\cos(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\beta = \cos\alpha \cos\beta.$$

Deduzimos, então, que:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\beta.$$

Como $\alpha = \gamma$, já que $\varphi + \vartheta = \pi$ com $\varphi = \pi/2 - \alpha$ e $\vartheta = \pi/2 + \gamma$, que resulta em

$$\pi/2 - \alpha + \pi/2 + \gamma = \pi \rightarrow \alpha = \gamma,$$

a expressão, então, fica

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta.$$

Exemplo: Mostre que $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$.

Com base na fórmula do cosseno da soma e notando que o seno é uma função ímpar e o cosseno uma função par, deduzimos que:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos\alpha \cos(-\beta) - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(-\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta.$$

Observação: Esta expressão é conhecida como formula do cosseno da subtração

1.4 Equações trigonométricas

Em diversas circunstâncias pode ser útil resolver equações provenientes de funções trigonométricas. Na sequência estudaremos algumas técnicas destinadas à resolução deste tipo de equação.

1.4.1 Equação do tipo *sen x = sen α*

Vamos supor que pretendemos determinar os valores de x que satisfazem a equação $sen\ x = sen\ \alpha$, para certo ângulo α conhecido. Tendo em conta as propriedades da função seno sabemos que:

$$sen\ x = sen\ \alpha$$

se

$$x = \alpha + 2k\pi, \text{ com } k \text{ inteiro,}$$

já que a função seno é periódica de período fundamental 2π. Por outro lado, se:

$$sen\ x = sen\ \alpha,$$

também

$$sen\ x = sen\ (\pi - \alpha),$$

novamente, devido à periodicidade da função seno

$$x = \pi - \alpha + 2k\pi, \text{ com } k \text{ inteiro.}$$

Assim, os valores x que satisfazem a equação

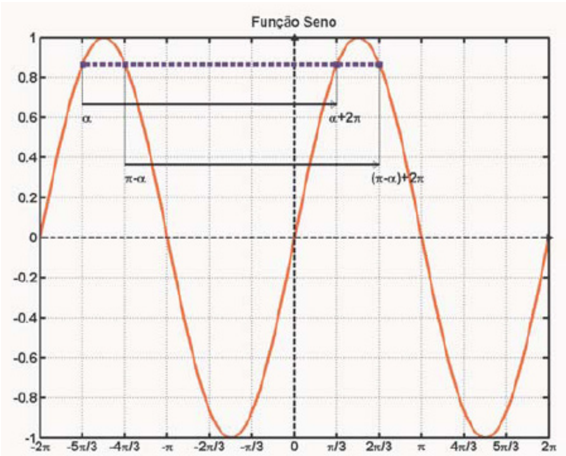
$$sen\ x = sen\ \alpha$$

serão

$$x = \alpha + 2n\pi \vee x = \pi - \alpha + 2m\pi, \text{ com } n \text{ e } m \text{ inteiros,}$$

em que $\vee$, significa a inserção das duas soluções.

Na figura abaixo estão ilustradas as soluções indicadas.



Exemplo: Resolva a equação *sen x = sen π/4*.

Como vimos acima, a solução desta equação será

$x = \pi/4 + 2n\pi \vee x = \pi - \pi/4 + 2m\pi$, com n e m inteiros $\leftrightarrow$

$x = \pi/4 + 2n\pi \vee x = 3\pi/4 + 2m\pi$, com n e m inteiros.

Exemplo : Resolva a equação sen x = 0.

Como, *sen x = 0* $\leftrightarrow$ *sen x = sen 0º,* pois *sen 0 = 0*.

Então, tendo em conta a solução conhecida para a equação anterior

$x = 0 + 2n\pi \vee x = \pi - 0 + 2m\pi$, com n e m inteiros $\leftrightarrow$

$x = 2n\pi \vee x = \pi + 2m\pi$, com n e m inteiros $\leftrightarrow$

$x = k\pi$, com k inteiro.

1.4.2 Outras equações

Consideremos agora o problema de determinar os valores de x que satisfazem a equação:

$$\cos x = \cos \alpha$$

para um certo ângulo α conhecido. Levando em conta as propriedades da função cosseno sabemos que,

$$\cos x = \cos \alpha$$

se

$$x = \alpha + 2k\pi, \text{ com } k \text{ inteiro,}$$

já que a função cosseno é periódica de período fundamental 2π. Por outro lado, se

$$\cos x = \cos \alpha,$$

também

$$\cos x = \cos(-\alpha),$$

de onde se deduz, novamente a periodicidade da função cosseno, que

$$x = -\alpha + 2k\pi, \text{ com } k \text{ inteiro.}$$

Assim, os valores x que satisfazem a equação

$$\cos x = \cos \alpha$$

serão

$$x = \alpha + 2n\pi \vee x = -\alpha + 2m\pi, \text{ com } n \text{ e } m \text{ inteiros.}$$

Notando que $\sec x = 1/\cos x$ e $\csc x = 1/\operatorname{sen} x$, o leitor poderá verificar facilmente que as soluções das equações do tipo

$$\sec x = \sec \alpha$$

e

$$\csc x = \csc \alpha$$

são respectivamente

$$x = \alpha + 2n\pi \vee x = -\alpha + 2m\pi, \text{ com } n \text{ e } m \text{ inteiros.}$$

e

$$x = \alpha + 2n\pi \vee x = \pi - \alpha + 2m\pi, \text{ com } n \text{ e } m \text{ inteiros.}$$

Quanto às equações do tipo

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$$

ou

$$\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} \alpha$$

as soluções serão

$$x = \alpha + k\pi, \text{ com } k \text{ inteiro}$$

o que atende à periodicidade π destas últimas funções.

Exemplo: Resolva a equação $\cos x = \cos \pi/3$.

Como vimos, a solução desta equação será

$x = \pi/3 + 2n\pi \vee x = -\pi/3 + 2m\pi$, com n e m inteiros.

Exemplo: Resolva a equação $\cos x = \operatorname{sen} \pi/3$.

Comecemos por observar que

$$\operatorname{sen} \pi/3 = \cos(\pi/2 - \pi/3) = \cos \pi/6.$$

Então, resolver a equação em questão é equivalente a resolver à equação

$$\cos x = \cos \pi/6$$

cuja solução será

$x = \pi/6 + 2n\pi \vee x = -\pi/6 + 2m\pi$, com n e m inteiros.

Capítulo 2
Números Complexos

2.1 Introdução

Vamos iniciar este capítulo pensando um pouco sobre os outros tipos de números. Temos os números Naturais, números Inteiros, números Racionais, números Irracionais e números Reais.

O surgimento dos números Naturais está relacionado à necessidade do homem de relacionar objetos a quantidades. Os elementos que pertencem a esse conjunto são:

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...}

O zero surgiu posteriormente, com a finalidade de expressar algo nulo no preenchimento posicional.

A proposta dos números naturais era simplesmente a contagem. No comércio sua utilização esbarrava nas situações em que era preciso expressar prejuízos. Assim, com o intuito de resolver tal situação, os matemáticos da época, criaram o conjunto dos números inteiros, simbolizado por:

Z = {... , -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... }

Agora com este conjunto os lucros e/ou prejuízos comerciais podiam ser calculados. Por exemplo:

30 – 35 = – 5 (prejuízo)

–87 + 107 = 20 (lucro)

–1030 + 1010 = – 20 (prejuízo)

Com o avanço dos cálculos, o conjunto dos números inteiros não satisfazia mais algumas operações. Assim, foi necessário estipular outro conjunto de números, que foi denominado conjunto dos números racionais. Para estipular esse conjunto foi necessário unir o conjunto dos números naturais com o conjunto dos números inteiros mais os números que podem ser escritos em forma de fração ou em forma de números decimais.

Q = { ...; -6; ...; -3,2; ...; -1;...; 0; ...; 3,92; ...; 5; ...}

Em algumas situações os números decimais não podem ser representados na forma de fração. Assim, esses números não pertencem ao conjunto dos racionais, eles fazem parte do conjunto dos números irracionais. Nesse conjunto existem alguns números de extrema importância para a Matemática, como, por exemplo, o número pi (aproximadamente 3,14).

A união dos conjuntos dos números Naturais, o conjunto dos Inteiros, o conjunto dos Racionais e o conjunto dos Irracionais forma o conjunto dos números Reais.

O conjunto dos números Reais foi criado ao longo de todo o processo de evolução da Matemática, atendendo a sociedade em suas necessidades. Uma dessas necessidades é originária da necessidade da resolução de uma equação do 2º grau. Como ilustração resolveremos a seguinte equação $2x^2 + 2x + 6 = 0$, aplicando a formula de Bháskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Percebemos que, ao desenvolver a formula de Bháskara, nos deparamos com a raiz quadrada de um número negativo, o que torna impossível a resolução dessa raiz quadrada dentro do conjunto dos Reais, pois não há um número negativo que elevado ao quadrado forneça como resultado um número negativo. A resolução desse problema só foi resolvida com a criação dos números complexos. O conjunto dos números Complexos é representado pela letra C e a forma de representação mais conhecida com o número da letra i (denominado unidade imaginária), sendo designada nesse conjunto a seguinte fundamentação: $i^2 = -1$.

Alguns estudos sobre esses números levaram os matemáticos ao cálculo das raízes quadradas de números negativos, pelo fato de utilizar o termo $i^2 = -1$, que também é conhecido como número imaginário. Observe o procedimento:

$$\sqrt{-16} = \sqrt{-1 \times 16} = \sqrt{-1 \times 4^2} = \sqrt{-1} \times \sqrt{4^2}$$

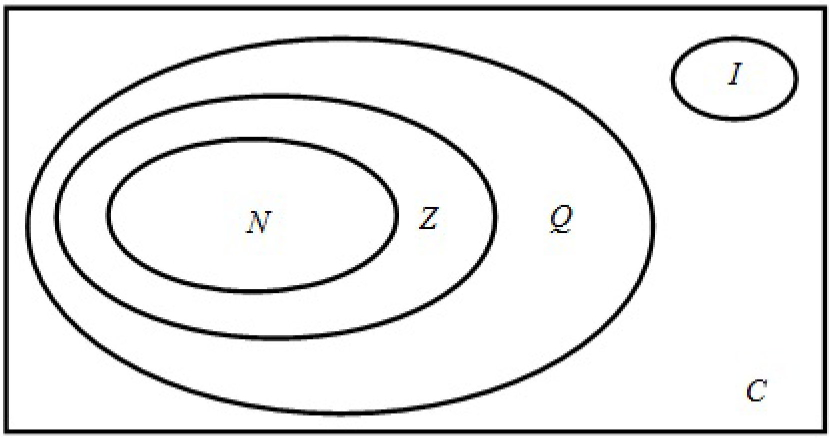
Temos:

$$\sqrt{-1} = i$$
$$\sqrt{4^2} = 4$$

Assim,

$$\sqrt{-16} = 4i$$

Logo, o conjunto dos números Complexos é o maior conjunto numérico existente.



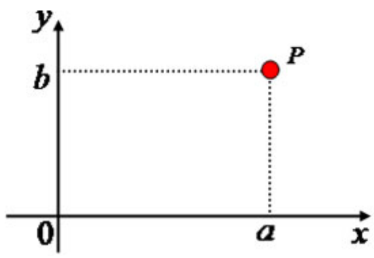
em que: *N*: é o conjunto dos números Naturais; *Z*: é o conjunto dos números Inteiros; *Q*: é o conjunto dos números Racionais; *I*: é o conjunto dos números Irracionais; *R*: é o conjunto dos números Reais; e *C*: é o conjunto dos números Complexos.

2.2 Suas representações algébricas e geométricas

Os números complexos podem ser representados tanto algebricamente como geometricamente. A seguir, vamos ver como são feitas essas representações.

2.2.1 Representações algébricas

Os números complexos são formados por um par ordenado (*a, b*) onde os valores de *a* estão situados no eixo x (abscissa), que é denominado de eixo real, e os valores de *b* no eixo y (ordenadas), que é denominado de eixo imaginário. Sobre o eixo x marcamos os pontos relacionados à parte real do número complexo e sobre o eixo y os pontos relacionados à parte imaginária.



Sejam (*a, b*) as coordenadas do ponto de P, que refere-se a um número complexo. A forma algébrica pela qual iremos representar um número complexo será a + bi, de modo que *a* e *b* Є R. O plano no qual representamos os complexos é chamado plano de Argand-Gauss.

A grande vantagem da forma de representação algébrica de um número complexo é praticidade e a facilidade de cálculos.

Chamamos de unidade imaginária e indicamos por i o ponto (0,1) e sua propriedade básica é $i^2 = -1$.

Assim temos que:

$i^0 = 1$	$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$
$i^1 = i$	$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1\ (-i) = -i$

Observe que as quatro potências de i na coluna da esquerda se repetem nos quatro casos seguintes na coluna da direita (1, i, -1, -i). Esse ciclo se repete indefinidamente.

Mas, geralmente, para todo $n \in \mathbf{N}$, temos que:

$i^{4n} = 1$ $\quad$ $i^{4n+1} = i$ $\quad$ $i^{4n+2} = -1$ $\quad$ $i^{4n+3} = -i$

A seguir definiremos as partes que formam um número complexo $z = a + bi$. Chamaremos z um número complexo qualquer; a é a parte real do número complexo z, representado por Re (z); b é a parte imaginária do número complexo z, representado por Im (z).

Abaixo apresentamos alguns exemplos de como identificar a parte real e a parte imaginária de um número complexo:

$$z = -4 + 2i$$
$$\text{Re}(z) = -4$$
$$\text{Im}(z) = 2$$

$$z = -15 + 1i$$
$$\text{Re}(z) = -15$$
$$\text{Im}(z) = 1$$

$$z = 1/2 + (1/3)i$$
$$\text{Re}(z) = 1/2$$
$$\text{Im}(z) = 1/3$$

Assim, os valores (coordenadas) a e b podem assumir qualquer valor do conjunto dos números reais e, dependendo do valor que as coordenadas assumirem, o número complexo receberá um nome diferente:

Quando a e b forem diferentes de zero dizemos que o número complexo é imaginário. Por exemplo: $z = 7 + 10i$

Quando o valor de a é igual a zero e o valor de b é diferente de zero dizemos que o número complexo é imaginário puro, por exemplo: $z = 0 + 10i = 10i$

Quando a for diferente de zero e b igual a zero dizemos que o número complexo será real, por exemplo: $z = 7 – 0i = 7$

Na sequência, apresentaremos outros exemplos:

Exemplo: Determine o valor de k para que z =(k-6) + (7k)i, seja um:

a) Número Real

Para que o complexo seja um número real devemos fazer b = 0 e a ≠ 0.

k – 6 ≠ 0 e 7k = 0

então:

k ≠ 6 e k = 0

b) Imaginário puro

Para que um número complexo seja imaginário puro a = 0 e b ≠ 0, então podemos dizer que:

k – 6 = 0 e 7k ≠ 0

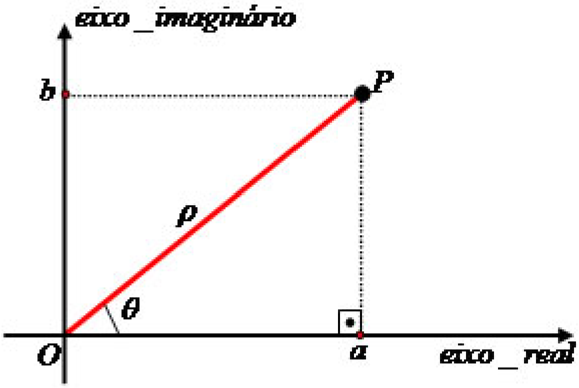
então:

k = 6 e k ≠ 0

2.2.2 Representações trigonométricas

Seja um ponto P no plano cartesiano associado ao número complexo *z = a + bi*. A parte real pode ser representada por um ponto no eixo real (eixo x), e no eixo vertical (eixo y). Representamos por um ponto, a parte imaginária.

Observe a seguir, representação geométrica dos números complexos:



Com base na representação geométrica, podemos calcular a distância entre os pontos O e P, que chamaremos de ρ (letra grega: rô). Ao aplicarmos o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, temos que:

$$\rho^2 = a^2 + b^2 \rightarrow \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

O módulo de *z* é representado pela grandeza ρ, mas também pode ser representado por $|z|$ ($|z| = \rho$).

A ângulo θ ($0 \leq \theta < 2\pi$), formado pelo eixo real e a reta do segmento OP, é chamado de argumento de *z* (*z ≠ 0*), sendo indicado por *Arg(z)*. Com base nestas definições podem-se estabelecer as seguintes relações na interpretação geométrica dos complexos:

$$\theta = Arg(z)$$

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\rho}$$

$$sen(\theta) = \frac{b}{\rho}$$

Exemplo: Calcule o módulo e o argumento do número complexo z = 1 + 2i.

i) Módulo

a = 1 e b = 2

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 2^2}$$

$$\rho = \sqrt{5}$$

θ *= Arg(z)*

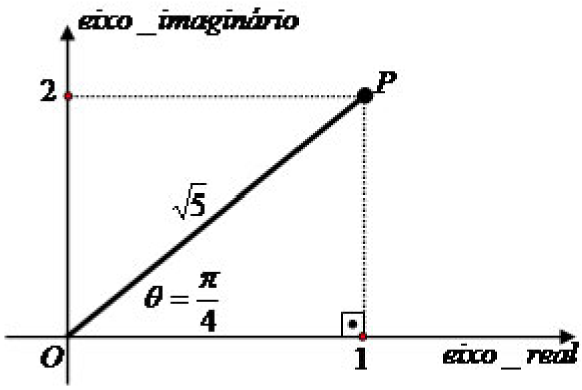
$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathrm{s}en(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

isso implica que:

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

O gráfico que representa o número complexo *z = 1 + 2* é:



Sabemos que um número complexo possui forma geométrica igual a z = a + bi, em que a recebe a denominação de parte real e b parte imaginária de z. Por exemplo, para o número complexo z = 3 + 5i, temos a = 3 e b = 5 ou Re(z) = 3 e Im(z) = 5. Os números complexos também possuem uma forma trigonométrica ou polar, que será demonstrada com base no argumento de z (para z ≠ 0).

Anteriormente vimos a representação geométrica de um número complexo. Considere, o número complexo *z = a + bi*, em que *z ≠ 0*, e consequentemente que:

.

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\rho} \quad \text{e} \quad sen(\theta) = \frac{b}{\rho}$$

Assim essas relações podem ser escritas da seguinte forma:

$$a = \rho\cos(\theta)$$

$$b = \rho sen(\theta)$$

Substituindo esses valores de *a* e *b* em *z = a + bi*.

$$z = \rho cos(\theta) + \rho sen(\theta) i \rightarrow \mathbf{z = \rho(cos(\theta) + i\, sen(\theta))}$$

Essa é forma trigonométrica de um número complexo e tem grande utilidade em alguns cálculos.

Exemplo: Represente o número complexo *z = 1 + i* na forma trigonométrica.

Resolução:

Temos que *a = 1* e *b = 1*

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$\rho = \sqrt{2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

portanto, $\theta = 45^o$

Assim, a representação trigonométrica do complexo z = 1 + i é:

$$z = \sqrt{2}\ (cos(45^o) + i\ sen(45^o))$$

Exemplo: Represente trigonometricamente o complexo $z = -\sqrt{3} + i$.

Resolução:

Temos que $a = -\sqrt{3}$ e $b = 1$

$$\rho = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2}$$

$$\rho = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$sen(\theta) = \frac{1}{2}$$

portanto, $\theta = 150^o$

Assim, a representação trigonométrica do complexo $z = -\sqrt{3} + i$ é:

$$z = 2\ (cos(150^o) + i\ sen(150^o))$$

2.3 Operações envolvendo números complexos

Os números complexos são escritos na sua forma algébrica *a + bi.* Sabemos que *a* e *b* são números reais e que o valor de *a* é a parte real do número complexo e que o valor de *bi* é a parte imaginária do número complexo.

Com esses números podemos efetuar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, obedecendo a ordem e características da parte real e parte imaginária.

2.3.1 *Oposto*

No conjunto dos números reais o seu oposto é o seu simétrico: o oposto de *10* é *-10*; o oposto de *-5* é *+5*. No caso dos números complexos, essa mesma regra deve ser respeitada. Assim, o oposto do número complexo *z* será – *z*.

Exemplo: Dado o número complexo *z = 10 – 2i*, o seu oposto será: *- z = - 10 + 2i*.

2.3.2 *Conjugado*

Quando representamos o número complexo pelo oposto da parte imaginária, determinarmos o conjugado de um número complexo. Assim, o conjugado de $z = a + bi$ será $\overline{z} = a - bi$

Exemplo:

$z = 7 – 7i$, o seu conjugado será: $\overline{z} = 7 + 7i$

$z = – 3 – 17i$, o seu conjugado será: $\overline{z} =- 3 + 17i$

2.3.3 *Igualdade*

Dois números complexos serão iguais se, e somente se, respeitarem a seguinte condição:

1) *Partes imaginárias iguais*

2) *Partes reais iguais*

De uma forma geral, dados os números complexos, quaisquer, $z_1 = a + bi$ e $z_2 = d + ei$, z_1 e z_2, eles serão iguais se, somente se, $a = d$ e $bi = ei$.

Observações:

1) A soma de números complexos opostos será sempre igual a zero: $z + (-z) = 0$.

2) O conjugado do conjugado de um número complexo será o próprio número complexo: $\overline{\overline{z}} = z$

3) Não é possível estabelecer a relação de ordem no conjunto dos números complexos, e assim não podemos dizer qual número é maior.

Exemplo: Dado o número complexo $z = - 2 + 6i$, calcule o seu oposto, o seu conjugado e o oposto do conjugado.

Oposto: $- z = 2 - 6i$

Conjugado: $\overline{z} = - 2 - 6i$
Oposto do conjugado : $-\overline{z} = 2+6i$

Exemplo: Determine *a* e *b* de modo que $-2+9i = \overline{a+bi}$.

Precisamos estabelecer a propriedade da relação de igualdade entre eles. Temos ainda que: $\overline{a+bi} = a - bi$. Então:

$a = - 2$

$b =- 9$

2.3.4 Adição

Dados dois números complexos quaisquer $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, ao adicionarmos teremos:

$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = a + c + bi + di = (a + c) + (b + d)i$

Portanto, $z1 + z2 = (a + c) + (b + d)i$.

Exemplo: Dados dois números complexos $z_1 = 6 + 5i$ e $z_2 = 2 – i$, calcule a sua soma:

$(6 + 5i) + (2 – i) = 6 + 5i + 2 – i = 6 + 2 + 5i – i = 8 + (5 – 1)i = 8 + 4i$

Portanto, $z_1 + z_2 = 8 + 4i$.

2.3.5 Subtração

Dados dois números complexos quaisquer $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, ao subtraírmos teremos:

$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = a + bi – c – di = a – c + bi – di = (a – c) + (b – d)i$

Portanto, $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$.

Exemplo: Dados dois números complexos $z_1 = 4 + 5i$ e $z_2 = -1 + 3i$, calcule a sua subtração:

$(4 + 5i) – (-1 + 3i) = 4 + 5i + 1 – 3i = 4 + 1 + 5i – 3i = 5 + (5 – 3)i = 5 + 2i$

Portanto, $z_1 - z_2 = 5 + 2i$.

2.3.6 Multiplicação

Dados dois números complexos quaisquer $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, ao multiplicarmos teremos:

$z1 . z2 = (a + bi) . (c + di) = ac + adi + bci + bdi2 = ac + adi + bci + bd (-1)$

$= ac + adi + bci – bd = ac - bd + adi + bci = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Portanto, $z_1 . z_2 = (ac + bd) + (ad + bc)i$.

Exemplo: Dados dois números complexos $z_1 = 5 + i$ e $z_2 = 2 - i$, calcule a sua multiplicação:

$(5 + i) \cdot (2 - i) = 5 \cdot 2 - 5i + 2i - i^2 = 10 - 5i + 2i + 1 = 10 + 1 - 5i + 2i = 11 - 3i$
Portanto, $z_1 \cdot z_2 = 11 - 3i$.

2.3.7 Divisão

Ao dividirmos dois números complexos devemos escrevê-los em forma de fração e multiplicarmos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador. Veja como:

Dados dois números complexos z_1 e z_2, para efetuarmos a divisão dos dois devemos seguir a seguinte regra:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$$

Exemplo: Dados dois números complexos $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 4i$, calcule a divisão de z_1 por z_2

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{4i} = \frac{3+2i}{4i} \cdot \frac{(-4i)}{(-4i)} = \frac{-12i - 8i^2}{-16i^2} = \frac{-12i + 8}{16} = \frac{8}{16} - \frac{12i}{16} = \frac{1}{2} - \frac{3i}{4}$$

Portanto,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} - \frac{3i}{4}$$

Exemplo: Dados dois números complexos $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1+2i$, calcule a divisão de z_1 por z_2.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1+2i} = \frac{1+i}{1+2i} \cdot \frac{(1-2i)}{(1-2i)} = \frac{1 - 2i + i - 2i^2}{1 - 4i^2} = \frac{1 - i + 2}{1+4} = \frac{3-i}{5}$$

Portanto,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{5} - \frac{i}{5}$$

De uma forma geral podemos demonstrar a divisão de dois números complexos por:

Dado $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ a divisão de z_1 por z_2 será:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{(c-di)}{(c-di)} = \frac{ac - adi + cbi - bdi^2}{c^2 - d^2 i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd + cbi - adi}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd + (cb - ad)i}{c^2 + d^2}$$

2.4 Potenciação e radiciação de números complexos

2.4.1 Potenciação

Em muitas situações é necessário calcular a potência de um número complexo. Para tal, é aconselhável escrevê-lo na forma trigonométrica.

Sendo assim, consideremos o número complexo não nulo:

$$z = a + bi = \rho(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$$

e o número n ∈ N. Dessa forma, escrevemos:

$$z^n = z.z.z...z$$

ou

$$z^n = \rho \cdot \rho \cdot \rho \dots \rho(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)).(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))....(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)).$$

Daí, pelas propriedades trigonométricas, temos que:

$$z^n = \rho^n[\cos(\theta+\theta+\theta+...+\theta) + i*\mathrm{sen}(\theta+\theta+\theta+...+\theta)],$$

e concluímos que:

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i*\mathrm{sen}(n\theta)]$$

Essa igualdade é chamada 1ª Formula de Moivre.

Em situações que envolvem $(a + bi)^n$, essa expressão é muito importante. Caso não existisse, deveríamos usar o binômio de Newton, o que acarretaria em cálculos trabalhosos.

Observação: para utilizar a formula de Moivre para calcular a potência de um número complexo, deve-se escrever o número complexo na sua forma trigonométrica.

Exemplo: Dado o complexo $z = -2 - 2i$, calcule z^{10}.

Temos que $a = -2$ e $b = -2$

$$\rho = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2}$$

$$\rho = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen(\theta) = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

portanto,

$$\theta = 225^{o} = \frac{5\pi}{4}$$

Assim, representação trigonométrica do complexo *z = -2 - 2 i* é:

$$z = 2\sqrt{2}\ (\cos(\tfrac{5\pi}{4}) + i\ sen(\tfrac{5\pi}{4}))$$

Logo,

$z^{10} = (2\sqrt{2})^{10}\ [\cos(10.\frac{5\pi}{4}) + i*sen(10.\frac{5\pi}{4})]$

$z^{10} = 2^{10} 2^{5}\ [\cos(\frac{50\pi}{4}) + i*sen(\frac{50\pi}{4})]$

$z^{10} = 2^{15}\ [\cos(\frac{25\pi}{2}) + i*sen(\frac{25\pi}{2})]$

$z^{10} = 2^{15}\ [\cos(12\pi + \frac{\pi}{2}) + i*sen(12\pi + \frac{\pi}{2})]$

$z^{10} = 2^{15}\ [\cos(\frac{\pi}{2}) + i*sen(\frac{\pi}{2})]$

$z^{10} = 2^{15}\ [0 + i*1]$

$z^{10} = i*2^{15}$

Exemplo: Dado o número complexo $z = -1 - \sqrt{3}\,i$, determine z^{15}.

Temos que $a = -1$ e $b = -\sqrt{3}$

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2}$$

$$\rho = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$$

$$sen(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

portanto,

$$\theta = 240^{o} = \frac{4\pi}{3}$$

Assim, a representação trigonométrica do complexo $z = -1 - \sqrt{3}i$ é:

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\ sen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

Logo,

$z^{15} = 2^{15}\ [\cos(15.\ \frac{4\pi}{3}) + i*sen(15.\ \frac{4\pi}{3})]$

$z^{15} = 2^{10}2^{5}\ [\cos(\frac{60\pi}{3}) + i*sen(\frac{60\pi}{3})]$

$z^{15} = 2^{15}\ [\cos(20\pi) + i*sen(20\pi)]$

$z^{15} = 2^{15}\ [\cos(0) + i*sen(0)]$

$z^{15} = 2^{15}\ [1 + i*0]$

$z^{15} = 2^{15}$

2.4.2 Radiciação

Dado um número complexo z, chama-se raiz enésima, e denota-se por $\sqrt[n]{z}$, um número complexo z_k tal que $z_k^n = z$:

$$\sqrt[n]{z} = z_k \leftrightarrow z = z_k^n$$

Assim, imediatamente surge uma dúvida: "quantas são as raízes enésimas de z e como determiná-las?". Para responder a esta pergunta, suponha um número complexo:

$$z = \rho(\cos(\theta) + i\ sen(\theta))$$

e um número natural n ($n \geq 2$), e então queremos determinar todos os complexos z_k tal que $\sqrt[n]{z} = z_k$.

Sendo z_k, um número complexo, ele pode ser escrito da seguinte forma:

$z_k = r(\cos(w) + i\ sen(w))$.

Assim, precisamos determinar o valor de r e w.

Assim, utilizando a 1ª Formula de Moivre temos que:

$z_k^n = z = r^n(\cos(nw) + i\ sen(nw)) = \rho(\cos(\theta) + i\ sen(\theta))$

Desse modo, é necessário que:

$$r^n = \rho \rightarrow r = \sqrt[n]{\rho}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(nw) = \cos(\theta) \\ sen(nw) = sen(\theta)\end{array}\right\} \rightarrow nw = \theta + 2k\pi \rightarrow w = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

Dessa forma,

$$z_k = r(\cos(w) + i\,sen(w))$$
$$z_k = \sqrt[n]{\rho}(\cos(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}) + i\,sen(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}))$$

que é chamada 2ª fórmula de Moivre.

Observação: Para se obter todos os z_k, basta fazer *k = 0, 1, 2, 3, ..., n-1*, pois o *n* valores de *w* são não congruentes por estarem todos no intervalo *[0,2π]*

Exemplo: Calcular a raiz quadrada de *z = -1*.

Temos que: $\rho = 1$ e $\theta = \pi$

Assim,

$$z_k = \sqrt{-1} = \sqrt{1}(\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2}) + i\,sen(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2}))$$
$$z_k = (\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) + i\,sen(\frac{\pi}{2} + k\pi))$$

Assim ,

$$z_0 = (\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,sen(\frac{\pi}{2})) = i$$
$$z_1 = (\cos(\frac{\pi}{2} + \pi) + i\,sen(\frac{\pi}{2} + \pi)) = -i$$

Exemplo: Calcular as raízes quartas de *z = -8 +* $8\sqrt{3}$*i*.

Temos que: $\rho = 16$ e $\theta = \frac{2\pi}{3}$

Assim,

$$z_k = \sqrt[4]{16}(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right) + i\,sen\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right))$$
$$z_k = 2(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right))$$

Assim ,

$$z_0 = 2(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{6}\right)) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$z_2 = 2(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\,sen\left(\frac{7\pi}{6}\right)) = -\sqrt{3 - i}$$

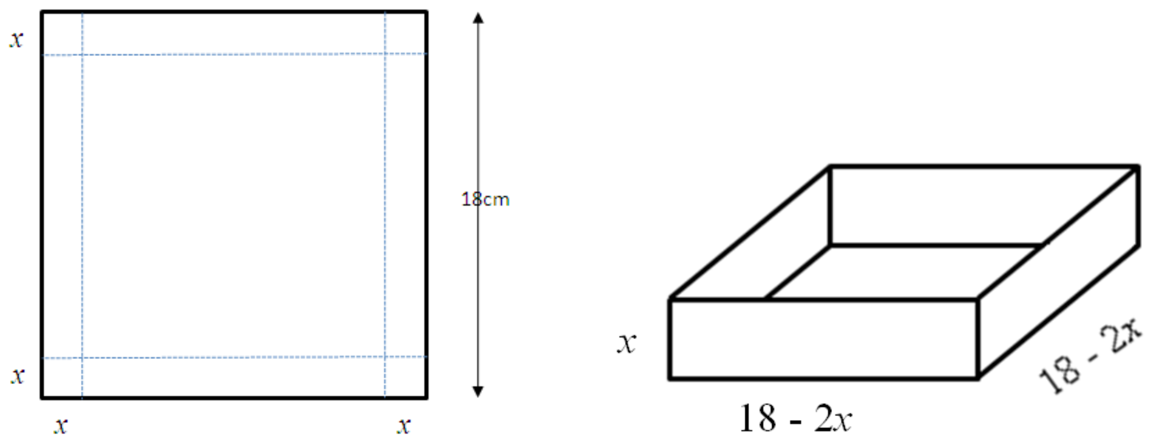
$$z_3 = 2(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\,sen\left(\frac{5\pi}{3}\right)) = 1 - i\sqrt{3}$$

Capítulo 3
Equações Polinomiais

3.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é o estudo das equações algébricas (isto é, equações da forma p(x) = 0, onde p é uma função polinomial). Equações desse tipo ocorrem naturalmente nas aplicações como no exemplo a seguir:

Exemplo: Cortando-se quadrados em cada canto de uma folha de papelão quadrada, com 18 cm de lado, e dobrando-se conforme a figura, obtém-se uma caixa retangular sem tampa. Qual deve ser o lado do quadrado a ser recortado para que o volume da caixa seja igual a 400 cm^3?



As dimensões da caixa formada quando se recorta um quadrado de lado x são dadas por:

Dimensões da base: 18-2*x* e 18-2*x,*

Altura da caixa: *x ;*

Logo o volume da caixa é $(18-2x)^2x$ e a condição estabelecida pelo problema é expressa pela equação:

$$(18-2x)^2x=400$$

ou, equivalentemente,

$$4x^3 - 72x^2+324x - 400 = 0$$

ou, ainda

$$x^3 - 18x^2+81x - 100 = 0$$

3.2 Polinômios

3.2.1 Definições

Para polinômios podemos encontrar várias definições diferentes como: Polinômio é uma expressão algébrica com todos os termos semelhantes reduzidos.

Dada a sequência de números complexos (a_0, a_1, a_2,... ,a_n), consideremos a função $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. A função é denominada função polinomial ou polinômio associada à sequência dada.

Os números a_0, a_1, a_2,... ,a_n são denominados coeficientes e as parcelas a_0, a_1x, a_2x^2 e a_nx^n são chamadas termos do polinômio *f.*

Exemplos: As seguintes aplicações são polinômios

1) $f(x)=1 + 2x + 3x^2 -5x^3$, onde $a_0=1$, $a_1=2$, $a_2= 3$ e $a_3=-5$

2) $g(x)=1 + 7x^4$, onde $a_0=1$, $a_1= a_2= a_3=0$ e $a_4=7$

3) $h(x)= 5x + 3x^2 -5x^3$, onde $a_0=0$, $a_1=5$, $a_2= 3$ e $a_3=-5$

3.2.2 Igualdade

Bom, o próximo passo será definir a igualdade de polinômios, mas antes temos que saber a definição de polinômio nulo. Podemos dizer que um polinômio é nulo (ou identicamente nulo) quando *f* assume o valor numérico zero para *x* complexo, ou seja:

$$f = 0 \leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{C}$$

Apreendida esta definição podemos dizer que dois polinômios *f* e *g* são iguais (ou idênticos) quando assumirem os mesmos valores numéricos para qualquer valor de *x* complexo:

$$f = g \leftrightarrow f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{C}$$

Assim, dois polinômios f e g são iguais se, e somente se, os coeficientes de f e g forem ordenadamente iguais. Seja

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n$$

Assim, f(x) e g(x) serão iguais se $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$,..., $a_n = b_n$

Exemplo: Calcular a,b e c, sabendo-se que $x^2-2x+1 \equiv a(x^2+x+1)+(bx+c)(x+1)$.

Eliminando os parênteses e somando os termos semelhantes do segundo membro temos:

$x^2-2x+1 \equiv ax^2+ax+a+bx^2+bx+cx+c$

$1x^2-2x+1 \equiv (a+b)x^2+(a+b+c)x+(a+c)$

Agora igualamos os coeficientes correspondentes:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a+b+c=-2 \\ a+c=1 \end{cases}$$

Substituindo a 1ª equação na 2ª:

1+c = -2 => c=-3.

Colocando esse valor de c na 3ª equação, temos:

a-3=1 => a=4.

Colocando esse valor de a na 1ª equação, temos:

4+b=1 => b=-3.

Resposta: a=4, b=-3 e c=-3.

3.2.3 Operações

Em muitas situações temos dois polinômios e desejamos realizar algumas operações aritméticas, o que será definido a seguir.

3.2.3.1 Adição

Suponha que estamos interessados em fazer a soma de *f(x) + g(x)= (f+g)(x)*. Para isso utilizaremos o procedimento que envolve a técnica de redução de termos semelhantes, jogo de sinal, operações envolvendo sinais iguais e sinais diferentes. Observe os exemplos a seguir, considerando os seguintes polinômios $f(x) = 4 + 3x + x^2$ e $g(x) = 5 - 3x^2 + x^4$.

$f(x) + g(x)=(4+3x+x^2)+(5-3x^2+x^4)= 4+3x+x^2 + 5-3x^2+x^4$

$=(4+5)+(3x)+(x^2-3 x^2)+(x^4)$

$=9 + 3x -2 x^2+ x^4$

De uma forma geral, dado:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$$

Teremos que:

$$(f + g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots + (a_n + b_n)x^n$$

3.2.3.2 Subtração

Tendo em vista a operação anterior e seguindo a mesma técnica de redução de termos semelhantes, jogo de sinal, operações envolvendo sinais iguais e sinais diferentes, temos que a subtração de dois polinômios $f(x) = 4 + 3x + x^2$ e $g(x) = 5 - 3x^2 + x^4$ é:

$f(x) - g(x)=(4+3x+x^2)-(5-3x^2+x^4)= 4+3x+x^2 - 5+3x^2-x^4$

$=(4-5)+(3x)+(x^2+3 x^2)+(- x^4)$

$=-1 + 3x +4 x^2- x^4$

De uma forma geral, dados

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$$

Teremos que

$$(f - g)(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \ldots + (a_n - b_n)x^n$$

Exemplos: Considerando os polinômios $f(x) = 6x^3 + 5x^2 - 8x + 15$, $g(x) = 2x^3 - 6x^2 - 9x + 10$ e $h(x) = x^3 + 7x^2 + 9x + 20$, Calcule:

$f(x) + g(x) + h(x)$

Se D(x) é divisor de P(x) $\Leftrightarrow$ R(x)=0

$(6x^3 + 5x^2 - 8x + 15) + (2x^3 - 6x^2 - 9x + 10) + (x^3 + 7x^2 + 9x + 20) =$

$6x^3 + 5x^2 - 8x + 15 + 2x^3 - 6x^2 - 9x + 10 + x^3 + 7x^2 + 9x + 20 =$

$6x^3 + 2x^3 + x^3 + 5x^2 - 6x^2 + 7x^2 - 8x - 9x + 9x + 15 + 10 + 20 =$

$9x^3 + 6x^2 - 8x + 45$

Assim,
$f(x) + g(x) + h(x) = 9x^3 + 6x^2 - 8x + 45$

b) $f(x) - g(x) - h(x)$

$(6x^3 + 5x^2 - 8x + 15) - (2x^3 - 6x^2 - 9x + 10) - (x^3 + 7x^2 + 9x + 20) =$

$6x^3 + 5x^2 - 8x + 15 - 2x^3 + 6x^2 + 9x - 10 - x^3 - 7x^2 - 9x - 20 =$

$6x^3 - 2x^3 - x^3 + 5x^2 + 6x^2 - 7x^2 - 8x + 9x - 9x + 15 - 10 - 20 =$

$6x^3 - 3x^3 + 11x^2 - 7x^2 - 17x + 9x + 15 - 30 =$

$3x^3 + 4x^2 - 8x - 15$

Assim,
f(x) - g(x) - h(x)= $3x^3 + 4x^2 – 8x – 15$

3.2.3.3 Multiplicação

Para fazer a multiplicação entre monômios e polinômios aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação. Por exemplo, suponha que estejamos interessados em $f(x) = 3x^2$ por $g(x) = 5x^3 + 8x^2 – x$. Assim,

$f(x).g(x)=(3x^2) . (5x^3 + 8x^2 – x) = (3x^2 . 5x^3) + (3x^2 . 8x^2) – (3x^2 . x) = 15x^5 + 24x^4 – 3x^3$

De uma forma geral, dados

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$$

Teremos que:

$$(fg)(x) = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + \ldots + (a_mb_n)x^{m+n}$$

Exemplo: Faça a multiplicação de $f(x)= (x – 1)$ por $g(x)= (x^2 + 2x - 6)$

$(fg)(x) = (x – 1) . (x^2 + 2x - 6) = x^2 . (x – 1) + 2x . (x – 1) – 6 . (x – 1)$

$= (x^3 – x^2) + (2x^2 – 2x) – (6x – 6) = x^3 – x^2 + 2x^2 – 2x – 6x + 6$

$= x^3 + x^2 – 8x + 6$

3.2.3.4 Grau de um polinômio

Teríamos que aprender agora sobre a última operação entre polinômios, a divisão, mas antes precisamos aprender sobre como determinar o grau de um polinômio. Para isso suponha que $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ seja um polinômio não nulo. Chama-se grau de *f*, representado por ∂f ou gr f, o número natural *p* tal que $a_p \neq 0$ e $a_i = 0$ para todo $i > p$. Assim, o grau de um polinômio *f* é o índice do "último" termo não nulo de *f*.

Exemplo: Determinar o grau dos seguintes polinômios:

a) $f(x) = 4 + 7x + 2x^3 - 6x^4 \rightarrow \partial f = 4$

b) $f(x) = -1 + 2x + 5x^2 \rightarrow \partial f = 2$

c) $f(x) = 1 + 5x - 3x^2 + (a - 4)x^3 \rightarrow \partial f = 2$, se $a = 4$ ou $\partial f = 3$, se $a \neq 4$

Propriedades

1) Se f, g e $f+g$ são polinômios não nulos, então o grau de $f+g$ é menor ou igual ao maior dos números ∂f ou ∂g.

2) Se f e g são polinômios não nulos, então o grau de fg é igual à soma dos graus de f e g ($\partial(fg) = \partial f + \partial g$).

3.2.3.5 Divisão

Sejam dois polinômios $P(x)$ e $D(x)$, com $D(x)$ não nulo. Efetuar a divisão de P por D é determinar dois polinômios $Q(x)$ e $R(x)$, que satisfaçam as duas condições abaixo:

1ª) $Q(x)D(x) + R(x) = P(x)$

2ª) $\boldsymbol{\partial R < \partial D}$ (ou $R(x)=0$)

$$\begin{array}{r|l} P(x) & D(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

Nessa divisão:

$P(x)$ é o dividendo.

$D(x)$ é o divisor.

$Q(x)$ é o quociente.

$R(x)$ é o resto da divisão.

Observação: Quando temos R(x)=0 dizemos que a divisão é exata, ou seja, P(x) é divisível por D(x) ou D(x) é divisor de P(x).

Para realizar a divisão de dois polinômios, existem várias maneiras. A primeira que estudaremos é conhecida por método da chave. Para entender esse método, suponha que estejamos interessados na divisão de P(x) = $x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1$ por D(x) = $x^2 + 3x - 2$. Para realizar esta operação deve-se proceder da seguinte forma:

1º Grupo de operações

Formamos o primeiro termo de Q(x) pela operação $\frac{x^4}{x^2} = x^2$ e construímos o primeiro resto parcial

$R_1(x) = P(x) - x^2 D(x) = -2x^3 - 5x^2 + 9x - 1$, que tem grau maior que **∂D**.

2º Grupo de operações

Formamos o segundo termo de Q(x) pela operação $\frac{-2x^3}{x^2} = -2x$ e construímos o segundo resto parcial

$R_2(x) = R_1(x) - (-2x)D(x) = x^2 + 5x - 1$, que tem grau maior que **∂D**.

3º Grupo de operações

Formamos o terceiro termo de Q(x) pela operação $\frac{x^2}{x^2} = 1$ e construímos o terceiro resto parcial

$R_3(x) = R_2(x) - 1D(x) = 2x + 1$, que tem grau menor que **∂D** e, portanto, está encerrada a divisão. A resposta é: *Q(X) = 3x² + 4x - 1* e *R(x)= - 3x + 2*

A seguir apresentamos a disposição prática das operações realizadas anteriormente:

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1 & \underline{x^2 + 3x - 2} \\
\underline{-x^4 - 3x^3 + 2x^2 \qquad\qquad} & x^2 - 2x + 1 \quad \rightarrow \quad Q(x) \\
-2x^3 - 5x^2 + 9x - 1 & \\
\underline{+2x^3 + 6x^2 - 4x \quad} & \\
x^2 + 5x - 1 & \\
\underline{-x^2 - 3x + 2} & \\
2x + 1 \quad \rightarrow \quad R(x) &
\end{array}
$$

Verificamos que:

$$\underbrace{x^4+x^3-7x^2+9x-1}_{P(x)} = \underbrace{(x^2+3x-2)}_{D(x)}\underbrace{(x^2-2x+1)}_{Q(x)} + \underbrace{(2x+1)}_{R(x)}$$

Na sequência tratamos da divisão de um polinômio por um binômio da forma *ax+b.* Para isso, consideremos a divisão de $P(x)=4x^2-2x+3$ por $D(x)=2x-1$.

Utilizando o método da chave temos:

$$\begin{array}{rl} 4x^2-2x+3 & \big|\underline{\;2x-1\;} \\ \underline{-4x^2+2x} & \quad 2x \\ 3 & \end{array}$$

Logo: *R(x)=3*

A raiz do divisor é *2x-1=0 => x=1/2.*

Agora calculamos P(x) para *x=1/2.*

P(1/2) = 4(1/4) – 2(1/2) + 3= 3

Observe que *R(x) = 3 = P(1/2)*

Portanto, mostramos que o resto da divisão de *P(x)* por *D(x)* é igual ao valor numérico de *P(x)* para *x=1/2*, isto é, a raiz do divisor.

Assim, temos os seguintes teoremas:

Teorema do resto: O resto da divisão de um polinômio P(x) pelo binômio *ax+b* é igual a *P(-b/a)*, em que **–b/a** é a raiz do divisor.

Exemplo: Calcule o resto da divisão de x^2+5x-1 por *x+1*.

Achamos a raiz do divisor:

x+1=0 => x=-1

Pelo teorema do resto sabemos que o resto é igual a *P(-1)*:

$P(-1)=(-1)^2+5.(-1)-1 \Rightarrow P(-1) = -5 = R(x)$

Portanto *R(x) = -5.*

T*eorema de D'Alembert:** Um polinômio P(x) é divisível pelo binômio *ax+b* se ***P(-b/a)=0

Exemplo: Determinar o valor de *p*, para que o polinômio $P(x)=2x^3+5x^2-px+2$ seja divisível por *x-2*.

Se *P(x)* **é divisível por** *x-2*, então *P(2)=0*.

P(2)=0 => 2.8+5.4-2p+2=0 => 16+20-2p+2=0 => p=19

Outro método muito conhecido é o dispositivo de Briot-Ruffini. Serve para efetuar a divisão de um polinômio P(x) por um binômio da forma (ax+b).

Exemplo: Determinar o quociente e o resto da divisão do polinômio $P(x)=3x^3-5x^2+x-2$ por *(x-2)*.

Para a resolução desse problema seguimos os seguintes passos:

1º) Colocamos a raiz do divisor e os coeficientes do dividendo ordenadamente na parte de cima da "cerquinha**".**

2º) O primeiro coeficiente do dividendo é repetido abaixo.

3º) Multiplicamos a raiz do divisor por esse coeficiente repetido abaixo e somamos o produto com o 2º coeficiente do dividendo, colocando o resultado abaixo deste.

4º) Multiplicamos a raiz do divisor pelo número colocado abaixo do 2º coeficiente e somamos o produto com o 3º coeficiente, colocando o resultado abaixo deste, e assim sucessivamente.

5º) Separamos o último número formado, que é igual ao resto da divisão, e os números que ficam à esquerda deste serão os coeficientes do quociente.

Resolução:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
\overbrace{\quad}^{\text{RAIZ DO DIVISOR}} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\text{COEFICIENTES DE P(x)}}} \\
2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline
 & \downarrow & 3(2)-5 & 1(2)+1 & 3(2)-2 \\
 & 3 & 1 & 3 & 4 \\
 & \multicolumn{3}{c|}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{COEFICIENTES DO QUOCIENTE Q(x)}}} & \underbrace{\quad}_{\text{RESTO}}
\end{array}$$

Observe que o grau de Q(x) é uma unidade inferior ao de P(x), pois o divisor é de grau 1.

Resposta: $Q(x)=3x^2+x+3$ *e* $R(x)=4$.

3.3 Equações polinomiais de grau: *1, 2, 3 e n*

Equação polinomial ou algébrica é toda equação da forma $p(x) = 0$, em que $p(x)$ é um polinômio:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \text{ com } n \geq 1.$$

onde x é a incógnita, os coeficientes a_k são números reais, complexos, e o número n é chamado o grau da equação.

Resolver a equação consiste em encontrar quais são os elementos x que tornam a equação verdadeira ($p(x)=0$). Esses elementos são chamados soluções da equação polinomial.

Assim, podemos fazer a seguinte classificação de uma equação polinomial:

- Se $n = 1$ dizemos que a equação é do primeiro grau ou linear e tem a seguinte forma: $ax + b =0$
- Se $n = 2$ dizemos que a equação é do segundo grau ou quadrática e tem a seguinte forma: $ax^2 + bx + c =0$
- Se $n = 3$ dizemos que a equação é do terceiro grau ou cúbica e tem a seguinte forma: $ax^3 + bx^2 + cx + d =0$
- Para um $n > 3$ dizemos que a equação é de grau e tem a seguinte forma: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$

Veja alguns exemplos:

a) $10x + 3 = 0$ (equação de primeiro grau)

b) $x^2 – x + 10 = 0$ (equação de segundo grau)

c) $2x^3 + x^2 - 4 = 0$ (equação de terceiro grau)

d) $x^4 + 9x^2 – 10x + 3 = 0$ (equação de quarto grau)

e) $10x^6 – 2x^5 + 6x^4 + 12x^3 – x^2 + x + 7 = 0$ (equação de sexto grau)

f) $x^8 – x^6 – 6x + 2 = 0$ (equação de oitavo grau)

g) $x^{10} – 6x^2 + 9 = 0$ (equação de décimo grau)

3.4 Propriedades relacionadas às equações polinomiais

Com os conhecimentos adquiridos, resta-nos verificar algumas propriedades relacionadas às equações polinomiais.

3.4.1 Raízes

As raízes de uma equação polinomial constituem o conjunto solução da equação, ou seja, é o conjunto de valores composto por todos os valores de *x* tal que *p(x)=0*. Para as equações em que o grau é 1 ou 2, o método de resolução é simples e prático. Nos casos em que o grau dos polinômios é maior ou igual 3, existem expressões para a obtenção da solução, mas esses métodos não são tão simples.

3.4.2 Número de Raízes

A seguir será enunciado um dos teoremas mais importantes da álgebra e a demonstração desse teorema foi a tese de doutoramento de Carl Friedrich Gauss, apresentada no ano de 1798. Embora outros matemáticos já tivessem tentado fazer essa demonstração, Gauss foi o primeiro a realizá-la com perfeição.

Teorema Fundamental da Álgebra: Toda equação polinomial p(x) = 0, de grau n onde n ≥ 1, admite pelo menos uma raiz complexa.

e a consequência deste teorema é que de grau n,

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, com $a_n \neq 0$

pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau, isto é:

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)...(x - r_n)$$

em que r_1, r_2, ...,r_n, são as raízes de *P(x)*. Este resultado é conhecido como **teorema da decomposição**

Exemplo: Fatorar o polinômio $P(x)=5x^5 - 5x^4 - 80x + 80$, sabendo que suas raízes são: *1, -2, 2, -2i, 2i.*

Pelo teorema da fatoração temos que:

$$P(x)=5(x - 1)(x+2)(x - 2)(x+2i)(x - 2i)$$

3.4.3 Multiplicidade de uma raiz

Consideremos a equação polinomial $(x - 3)(x - 1)^2(x - 4)^3 = 0$, que apresenta seis raízes sendo: uma raiz igual a 3, duas raízes iguais a 1, e três raízes iguais a 4. Dizemos que 3 é raiz simples, 1 é raiz dupla e 4 é raiz tripla da equação dada.

Assim, quando decompomos *P(x)* e uma mesma raiz ocorre mais de uma vez, a denominamos raiz múltipla de *P(x)*.

Exemplo: Se $P(x) = (x-1)^2.(x-3)$, dizemos nesse caso que das 3 raízes de *P(x)*, a raiz 1 tem multiplicidade 2 enquanto que 3 é uma raiz simples

3.4.4 Relações entre coeficientes e raízes

Consideremos a equação do 2º grau: $ax^2 + bx + c = 0$, cujas raízes são r_1 e r_2. Vimos que essa equação pode ser escrita da forma: $a(x - r_1)(x - r_2) = 0$

Assim,

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$

ou

$$x^2 + (b/a)x + (c/a) = x^2 - (r_1 + r_2)x - r_1 r_2$$

portanto :

$$(r_1 + r_2) = -(b/a)$$

$$r_1 r_2 = (c/a)$$

são as relações entre as raízes e coeficientes da equação.

Estas relações podem ser generalizadas para qualquer polinômio e grau n. Para isso considere a equação algébrica:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad \text{(I)}$$

Se fizermos a decomposição polinomial obteremos:

$$a_n x^n + (r_1 + r_2 + \ldots + r_n) x^{n-1} + (r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n) x^{n-2} + \ldots + (-1)^n a_n r_1 r_2 \ldots r_n \quad \text{(II)}$$

Igualando-se (I) e (II), temos que:

$$r_1 + r_2 + \ldots. + r_n = - a_{n-1} / a_n$$

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n = a_{n-2} / a_n$$

....

$$r_1 r_2 \ldots.. r_n = (-1)^n . a_0 / a_n$$

Estas relações são chamadas de relações de Girard

Exemplo: Determinar as relações entre as raízes e os coeficientes da equação:

$$2x^3 - 4x^2 + 6x + 10 = 0$$

Temos que:

$n = 3$

$a_n = a = 2$

$a_{n-1} = b = -4$

$a_{n-2} = c = 6$

$a_{n-3} = d = 10$

Pelas relações de Girard, temos que:

Soma das raízes => $-b / a = 4/2 = 2$

Soma dos produtos 2 a 2 => $c/a = 6/2 = 3$

Produto das raízes => $(-1)^3 . d/a = -10/2 = -5$

3.4.5 Raízes Complexas

Vamos expor aqui algumas propriedades que relacionam entre si as raízes complexas e não reais de uma equação polinomial de coeficientes reais e ajudam a determinar as raízes da equação.

Suponha que uma equação $P(x) = 0$, de coeficientes reais, apresente uma raiz complexa ($a+bi$). Podemos afirmar que o seu conjugado ($a-bi$) também será raiz de $P(x)$, e com a mesma multiplicidade.

Observações:

1) O resultado anterior só se aplica a equações polinomiais com coeficientes reais;

2) O número de raízes complexas de um polinômio $P(x) = 0$ com coeficientes reais é necessariamente par.

3) Num polinômio $P(x)$ com coeficientes reais e grau ímpar há, no mínimo, uma raiz real

Exemplo: Calcular as raízes da equação $x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x + 10 = 0$, sabendo que $(2+i)$ é uma das raízes

Se $(2+i)$ é uma das raízes, o seu conjugado $(2-i)$ também é raiz da equação.

Usando a forma:

$P(x) = (x-r_1).(x-r_2).Q(x) = 0$

temos que:

$P(x) = [x - (2+i)].[x - (2-i)].Q(x) = 0$

$P(x) = [(x-2) + i]. [(x-2) - i].Q(x) = 0$

$P(x) = [(x-2)^2 - i^2].Q(x) = 0$

$P(x) = [(x^2 - 4x +4) - (-1)].Q(x) = 0$

$P(x) = (x^2 - 4x + 5).Q(x) = 0$

Como o polinômio dado é de grau n=4 e sabemos, agora, que é divisível por $x^2 - 4x + 5$, restam duas raízes a se descobrir. Essas raízes produzem um polinômio do tipo $ax^2 + bx + c$.

Assim, podemos dizer que:

$x^4 - x^3 -5x^2 + 7x + 10 = (x^2 - 4x + 5).(ax^2 + bx + c)$

$$\frac{x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x + 10}{x^2 - 4x + 5} = ax^2 + bx + c = Q(x)$$

Logo $Q(x) = x^2 + 3x + 2$

Fazendo $Q(x) = 0$, temos que $x_1 = -2$ e $x_2 = -1$

Assim, as raízes da equação são $S = \{ -2, -1, 2+i, 2-i\}$

3.4.6 Raízes Racionais

Vamos desenvolver aqui um raciocínio que permite estabelecer se uma equação polinomial de coeficientes inteiros admite raízes racionais e, em caso positivo, vamos obter tais raízes.

Seja a equação polinomial de coeficientes inteiros:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, (com $a_n \neq 0$)

Se o racional p/q, (p e q primos entre si) é raiz dessa equação, então: p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n. Observações:

1) O teorema não nos garante a existência de raízes racionais de uma equação de coeficientes inteiros. Apenas, em caso de existirem raízes racionais, ele nos mostra todas as possibilidades de tais raízes.

2) O teorema anterior só se aplica a equações polinomiais de coeficientes inteiros (todos). Não é suficiente que o a_n e a_0 sejam inteiros.

3) Se a equação $P(x) = 0$, com coeficientes inteiros, admite uma raiz inteira $r = (r/1)$, então r é divisor de a_0.

4) Se a equação $P(x) = 0$, com coeficientes inteiros e $a_n = 1$, admite uma raiz racional (p/q), então essa raiz é necessariamente inteira pois $q = 1$.

Exemplo: Resolver a equação $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0$

Pesquisemos alguma raiz racional, sabendo que:

p pertence a {*+1, -1, +5, -5*} e ;

q pertence {*+1, -1*};

onde *p/q* pertence {*+1, -1, +5, -5*}

Logo:

$f(1) = 0$, $f(-1) = -20$, $f(5) = 40$, e $f(-5) = -300$

Então, a única raiz inteira da equação é *1*

Logo, $(x^3 - 5x^2 + 9x - 5) / (x-1) = x^2 - 4x + 5$

Calculando as outras duas raízes, temos que, se $x^2 - 4x + 5 = 0$ as raízes são:

$x_1 = 2 - i$ e $x_2 = 2 + i$

Finalmente, o conjunto solução será: $S = \{ 1, 2+i, 2-i\}$

Capítulo 4
Logaritmos

4.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é o estudo dos logaritmos. Os logaritmos foram criados como instrumentos para tornar mais simples cálculos aritméticos complicados, sendo que posteriormente verificou-se a grande aplicabilidade dessa ferramenta na matemática e em outras ciências.

Os primeiros autores a publicarem tábuas de logaritmos foram John Napier (1550-1617) em 1614 e Jost Bürgi (1552-1632) em 1620. Esses autores publicaram seus resultados de forma independente, ou seja, nenhum sabia no que o outro estava trabalhando. Uma tabua de logaritmo consiste em uma tabela de duas colunas de números, em que para cada número da coluna da esquerda há um correspondente na coluna da direita, que é chamado de logaritmo. Por exemplo:

nº	Log	nº	Log	nº	Log	nº	Log
1	0,00000	17	1,23045	33	1,51851	49	1,69020
2	0,30103	18	1,25527	34	1,53148	50	1,69897
3	0,47712	19	1,27875	35	1,54407	51	1,70757
4	0,60206	20	1,30103	36	1,55630	52	1,71600
5	0,69897	21	1,32222	37	1,56820	53	1,72428
6	0,77815	22	1,34242	38	1,57978	54	1,73239
7	0,84510	23	1,36173	39	1,59106	55	1,74036
8	0,90309	24	1,38021	40	1,60206	56	1,74819
9	0,95424	25	1,39794	41	1,61278	57	1,75587
10	1,00000	26	1,41497	42	1,62325	58	1,76343
11	1,04139	27	1,43136	43	1,63347	59	1,77085
12	1,07918	28	1,44716	44	1,64345	60	1,77815
13	1,11394	29	1,46240	45	1,65321	61	1,78533
14	1,14613	30	1,47712	46	1,66276	62	1,79239
15	1,17609	31	1,49136	47	1,67210	63	1,79934
16	1,20412	32	1,50515	48	1,68124	64	1,80618

A potenciação é conceito já conhecido e consiste em elevar um número ou expressão a uma dada potência. De uma forma geral suponha que a seja um número real positivo. Dado um inteiro $n > 0$, a potência a^n é definida como o produto de n fatores iguais ao número a. Ou seja:

$$a^n = a.a.a \ldots a \text{ (} n \text{ fatores)}$$

Em um caso particular da definição acima podemos calcular o produto de 6 por 6:

$$6^2 = 36$$

Com base na situação acima, muitas vezes podemos estar interessados em resolver uma equação:

$$8^x = 64$$

Assim, para o caso mais genérico, qual seria o valor de x, na seguinte situação:

$$a^x = y$$

Diante desta situação, sendo a e y números reais e positivos, $a \neq 1$, o logaritmo de um número na base a, é o expoente x a que se deve elevar de tal modo que $a^x = y$. Neste caso escreve-se:

$$x = \log_a y$$

e lê-se: x é o logaritmo de y na base a.

Assim, podemos escrever que:

$$x = \log_a y \leftrightarrow a^x = y$$

ou seja, pode-se dizer que $x = \log_a y$ é o mesmo que $a^x = y$.

Exemplos

1) $\log_2 8 = 3$ pois $2^3 = 8$
2) $\log_3 \frac{11}{99} = -2$ pois $3^{-2} = \frac{11}{99}$
3) $\log_5 5 = 1$ pois $5^1 = 5$
4) $\log_7 1 = 0$ pois $7^0 = 1$
5) $\log_4 8 = \frac{33}{22}$ pois $4^{\frac{3}{2}} 4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$
6) $\log_{0,2} 25 = -2$ pois $(0,2)^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5^2 = 25$

4.2 Caracterização do logaritmo via área

4.2.1 Área de uma faixa de hipérbole

Consideremos no plano um sistema de coordenadas cartesianas. Cada ponto do plano ficará caracterizado por um par ordenado (x,y) de número reais, x sendo a *abscissa* e y a *ordenada* do ponto. Por simplicidade, diremos apenas o ponto (x,y) em vez de o ponto cujas coordenadas são x e y.

Seja H o ramo positivo do gráfico da função:

$$y = \frac{1}{x}$$

ou seja, uma função real que associa a cada número real positivo $x > 0$, o número $y = 1/x$. H é o subconjunto do plano constituído pelos pontos da forma $(x, 1/x)$, onde $x > 0$. Podemos escrever ainda que:

$H=\{(x,y);\ x>0,\ y = 1/x\}$

Geometricamente, H é o ramo da hipérbole $xy = 1$ que está contida no primeiro quadrante.

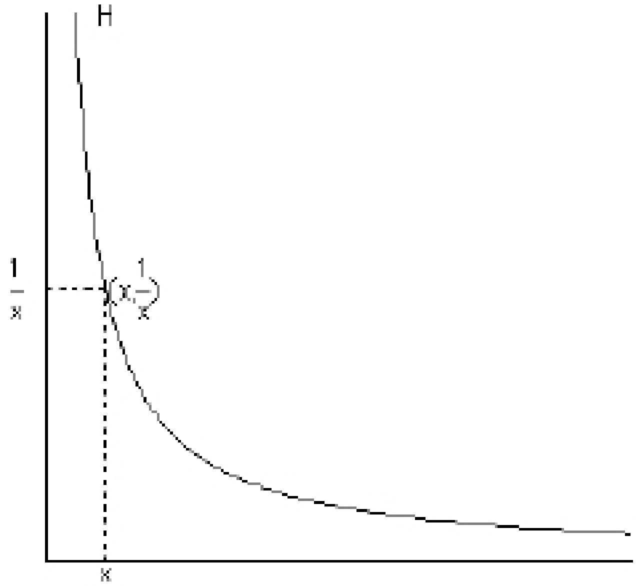


Figura 5: Ramo da hipérbole H

Uma faixa de hipérbole é obtida quando fixamos dois números reais positivos a e b, com a < b, e tomamos a região do plano limitado pelas duas retas verticais x = a e x = b, pelo eixo das abscissas, e pela hipérbole H. Denotaremos essa área pelo símbolo Hab.

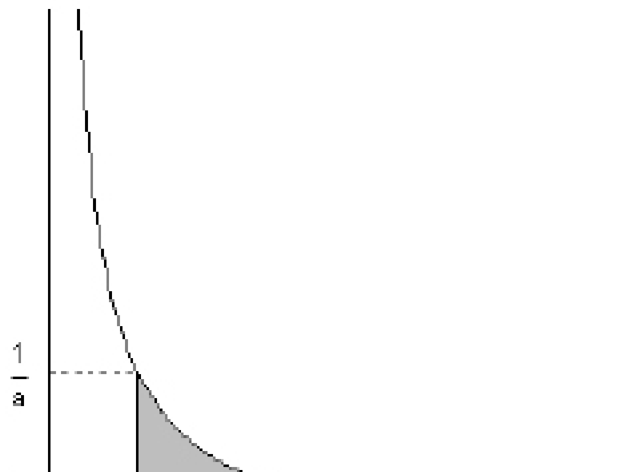


Figura 6: A faixa Hab.

Portanto, a faixa H_a^b, consiste dos pontos (x,y) cujas as coordenadas cumprem simultaneamente as condições $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq 1/x$. Na notação da teoria de conjuntos, temos

$$H_a^b = \{(x,y);\ a \leq x \leq b\ ,\ 0 \leq y \leq 1/x\ \}$$

Em muitas situações estamos interessados em calcular a área da faixa H_a^b. Para isso, por meio de pontos intermediários, decompomos o intervalo $[a,b]$ num número finito de intervalos justapostos. Com base em cada um dos intervalos $[c,d]$ da decomposição (onde $c < d$), considera-se o retângulo de altura igual a $1/d$. O vértice superior direito desse retângulo toca a hipérbole H. É o que chamaremos de um retângulo *inscrito* na faixa H_a^b. A reunião desses retângulos inscritos constitui o que chamaremos um *polígono retangular inscrito* na faixa H_a^b.

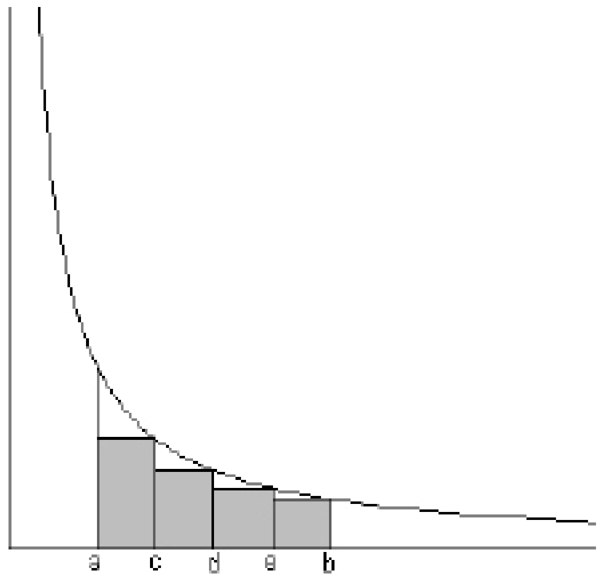


Figura 7

É fácil calcular a área de um polígono retangular inscrito numa faixa, quando conhecemos os pontos de subdivisão do intervalo [a,b]. Veja os exemplos a seguir:

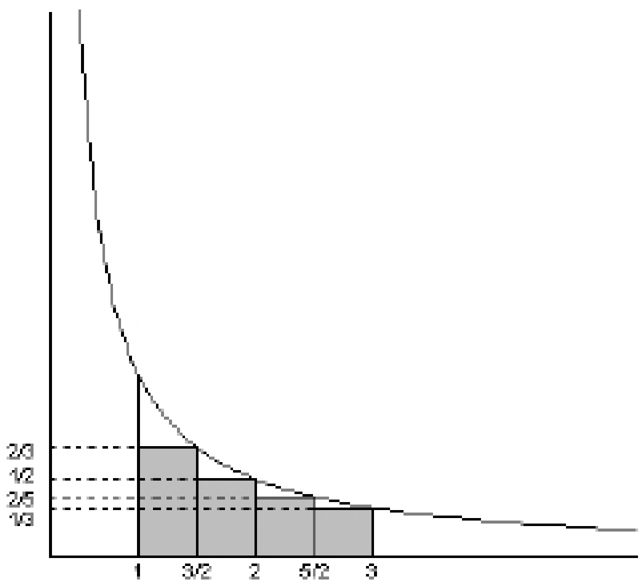


Figura 8:

Exemplo : Seja a faixa H_1^3.Se tomarmos a decomposição do intervalo [1,3] através dos seguintes pontos intermediários 1, 3/2, 2, 5/2, 3, obteremos um polígono retangular cuja área é igual à soma das áreas dos quatros retângulos acima hachurados, ou seja:

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)=$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}$$

se, porém, efetuarmos uma subdivisão mais fina do intervalo [1,3], por meio dos pontos:

1, 5/4, 6/4, 7/4 8/4, 9/4, 10/4, 11/4, 3

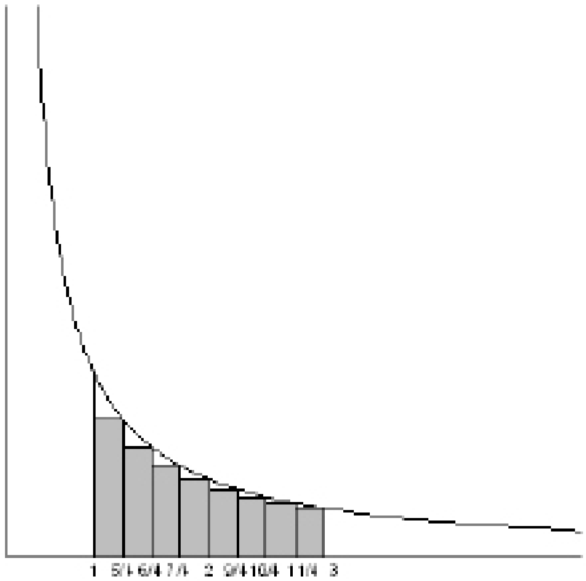


Figura 9

obteremos um polígono retangular inscrito em H_1^3, formado por 8 retângulos justapostos, cuja área total vale

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}=\frac{84813}{83160}$$

ou seja, 1,019 aproximadamente.

Assim, cada polígono retangular inscrito na faixa H_a^b fornece um valor aproximado (por falta) para a área H_a^b. Este valor será mais aproximado, quanto mais fina for a subdivisão do intervalo [*a,b*].

4.2.2 Logaritmos

Seja *x* um número real positivo. Definiremos o logaritmo natural de *x* como a área da faixa H_1^x. Assim, por definição, quando $x > 0$, temos:

$$\ln x = \text{Área } (H_1^x)$$

Usaremos o símbolo ln para indicar o logaritmo natural.

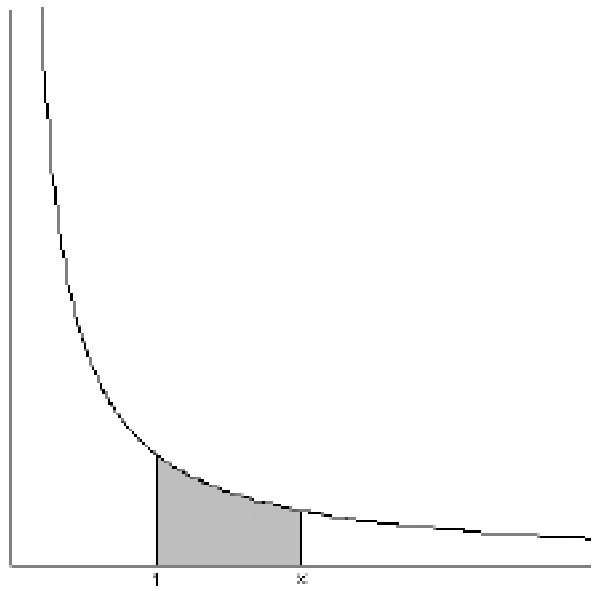


Figura 10

Observação: Para o caso de $0 < x < 1$, é possível mostrar que:

$$\text{Área}\ (H_1^x) = -\ \text{Área}\ (H_x^1)$$

Que implica em ter áreas negativas, ou seja, quando $0 < x < 1$ temos que $\ln x < 0$ (para saber mais detalhes consultar o capitulo 5 do livro Logaritmos, da Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, do autor Elon Lages Lima de 1980).

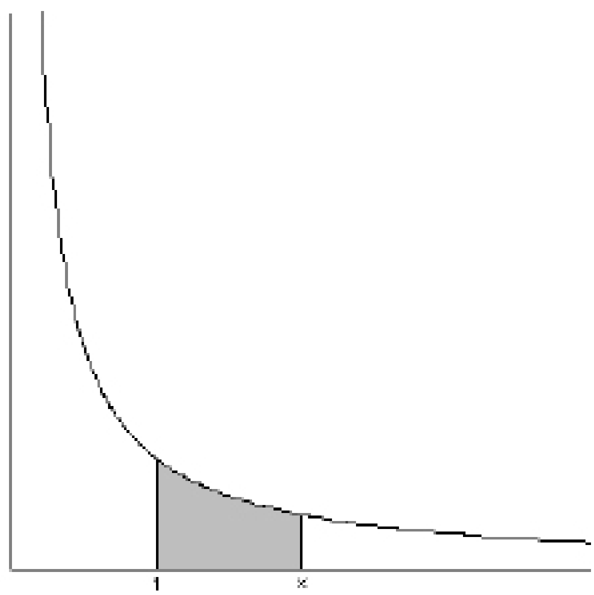


Figura 11

Em particular, quando $x = 1$, H_1^1 , reduz-se a um segmento de reta, portanto tem área igual a zero. Então, podemos escrever que:

$ln\ 1 = 0$;
$ln\ x > 0$ se $x > 1$;
$ln\ x < 0$ se $0 < x < 1$;
Não está definido $ln\ x$ quando $x < 0$

O logaritmo que estamos definindo é, por alguns autores, chamado de *logaritmo neperiano*.

Exemplo: Calculemos um valor aproximado para ln 2.

Para isso, vamos subdividir o intervalo [1,2] em dez partes iguais, utilizando os seguintes pontos:

1 1,1 1,2 1,3 1,4 1,5 1,6 1,7 1,8 1,9 2

Os valores de $1/x$ para os onze valores acima são:

1 0,909 0,833 0,769 0,714 0,666 0,625 0,588 0,555 0,526 0,500

Assim, uma aproximação para ln 2 será fornecida pela área do polígono retangular inscrito na faixa H_1^2, formado por 10 retângulos cujas bases medem 0,1 e cujas alturas são os dez últimos valores da lista acima. Logo,

$$H_1^2 = 0{,}1x0{,}909 + 0{,}1x0{,}833 + 0{,}1x0{,}769 + 0{,}1x0{,}714 + 0{,}1x0{,}666 + 0{,}1x0{,}625 + 0{,}1x0{,}588 + 0{,}1x0{,}555 + 0{,}1x0{,}526 + 0{,}1x0{,}500$$

$$H_1^2 = 0{,}6685$$

Portanto, uma aproximação para o ln 2 = 0,6685

Fica assim definida, uma função real

$$\ln: R^*_+ \rightarrow R$$

cujo domínio é o número R^*_+ dos números reais positivos.
A cada número real $x > 0$, a função ln faz corresponder seu logaritmo, ln x, definido acima.

4.3 Logaritmos: propriedades operacionais

Vejamos agora as propriedades que tornam vantajoso o emprego de logaritmos nos cálculos.

1) Logaritmo do produto

Em qualquer base a ($0 < a \neq 0$), o logaritmo do produto de dois fatores reais positivos é igual à soma dos logaritmos dos fatores.

Se $0 < a \neq 0$, $b > 0$ e $c > 0$, então

$$\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$$

Demostração:

Fazendo: $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a (b.c) = z$, provemos que $z = x + y$

Assim,

$$\left.\begin{array}{r} \log_a b = x \rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \rightarrow a^y = c \\ \log_a (b.c) = z \rightarrow a^z = b.c \end{array}\right\} \rightarrow a^z = a^x.a^y \rightarrow a^z = a^{x+y} \rightarrow z = x + y$$

Observações:

a) Esta propriedade pode ser estendida para o caso do logaritmo do produto de n ($n \geq 2$) fatores reais e positivos, isto é:

Se $0 < a \neq 0$ e $b_1, b_2, \ldots b_n, \in \mathrm{R}^*_+$, então,

$$\log_a (b_1.b_2 \ldots b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_n$$

b) Devemos observar que:

Se $b > 0$ e $c > 0$ então $b.c > 0$ e vale a identidade

$\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$

mas, se soubermos somente que $b.c > 0$ então temos que

$\log_a (b.c) = \log_a |b| + \log_a |c|$

Exemplos

i) $\log_5 (3.4) = \log_5 (3) + \log_5 (3)$

ii) $\log_4 (3.(-4).(-5)) = \log_4 (3) + \log_4 |-4| + \log_4 |-5|$

iii) $\log_3 (x.(x-2)) = \log_3 (x) + \log_3 (x-2)|$ se e somente se, $x > 0$ e $x - 2 > 0$, isto é , $x > 2$

2) Logaritmo do quociente

Em qualquer base a ($0 < a \neq 1$), o logaritimo do quociente de dois números reais positivos é igual à diferença entre o logaritimo do dividendo e o logaritimo do divisor.

Se $0 < a \neq 0$, $b > 0$ e $c > 0$, então

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Demostração:

Fazendo: $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z$, provemos que $z = x - y$

Assim,

$$\left.\begin{array}{r}\log_a b = x \to a^x = b\\ \log_a c = y \to a^y = c\\ \log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = z \to a^z = \dfrac{b}{c}\end{array}\right\} \to a^z = \frac{a^x}{a^y} \to a^z = a^{x-y} \to z = x - y$$

Observações:

a) Fazendo b = 1, escrevemos:

$$\log_a\left(\frac{1}{c}\right) = \log_a 1 - \log_a c = -\log_a c$$

b) Devemos observar que:

Se $b > 0$ e $c > 0$ então $\left(\dfrac{b}{c}\right) > 0$ e vale a identidade

$\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$, com $0 < a \neq 1$

mas se soubermos somente que $\left(\dfrac{b}{c}\right) > 0$ então temos que

$\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a |b| - \log_a |c|$, com $0 < a \neq 1$

Exemplos

i) $\log_5\left(\dfrac{2}{3}\right) = \log_5 2 - \log_5 3$

ii) $\log\left(\dfrac{2}{3.5}\right) = \log 2 - (\log 3 + \log 5) = \log 2 - \log 3 - \log 5$

iii) $\log_3\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \log_3(x+1) - \log_3(x-1)$, se e somente se, $x + 1 > 0$ e $x - 1 > 0$, isto é $x > 1$

iv)

3) Logaritmo da Potência

Em qualquer base a ($0 < a \neq 1$), o logaritmo de uma potência de base real positiva e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

Se $0 < a \neq 0$, $b > 0$ e $\alpha \in R$, então

$$\log_a b^{\alpha} = \alpha.\log_a b$$

Demostração:

Fazendo: $\log_a b = x$ e $\log_a b^{\alpha} = y$, provemos que $y = \alpha .x$

Assim,

$$\left.\begin{array}{r} \log_a b = x \to a^x = b \\ \log_a b^{\alpha} = y \to a^y = b^{\alpha} \end{array}\right\} \to a^y = \left(a^x\right)^{\alpha} \to a^y = a^{\alpha.x} \to y = \alpha.x$$

Observações:

i) Como corolário desta propriedade, decorre que:

Em qualquer base a ($0 < a \neq 1$), o logaritmo da raiz enézima de um número real positivo é igual ao produto do inverso do índice da raiz pelo logaritmo do radicando.

Se $0 < a \neq 0$, $b > 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, então

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a b$$

ii) Devemos observar que:

Se $b > 0$ então $b^{\alpha} > 0$, para todo α real e vale a identidade

$$\log_a b^{\alpha} = \alpha.\log_a b$$

mas se soubermos somente que $b^{\alpha} > 0$ então temos que:

$$\log_a b^{\alpha} = \alpha.\log_a |b|$$

Exemplos

i) $\log_5 2^3 = 3.\log_5 2$

ii) $\log_3 \sqrt[5]{2} = \log_3 2^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}.\log_3 2$

iii) $\log\left(x-1\right)^4 = 4.\log\left(x-1\right)$, se e somente se, $x - 1 > 0$, isto é $x > 1$

As propriedades apresentadas anteriormente, válidas com as devidas restrições para a, b e c, nos permitem obter o logaritmo de um produto, de um quociente ou de uma potência, conhecendo somente os logaritmos dos termos do produto, dos termos do quociente ou da base de potência.
Notemos a impossibilidade de obter o logaritmo de uma soma ou de uma diferença, por meio de regras análogas às dadas. Assim, para encontrarmos

$$\log_a(b+c) \text{ e } \log_a(b-c)$$

devemos, respectivamente, calcular inicialmente (*b + c*) e (*b - c*).

1.1 Gráfico da Função Logaritmo

Dado um número Real *a* (0 < *a* ≠ 1) chamamos *função logaritmo de base a* a função *f* de ln: R^*_+ em R que associa a cada *x* o número $\log_a x$.
Em símbolos:

$$f\colon R^*_+ \to R$$
$$x \to \log_a x$$

Se 0 < *a* ≠ 1 então a função *f* de R*+ em R definida por $f(x) = \log_a x$ admite a função inversa *g* de R em R*+ definida por *g*(*x*) = a^x . Logo *f* é bijetora e, portanto, a imagem de *f* é:
Im = R

Assim, em relação ao gráfico castesiano da $f(x) = \log_a x$ (0 < *a* ≠ 1), podemos dizer:

i) Está toda à direita do eixo *y* (*x* > 0);

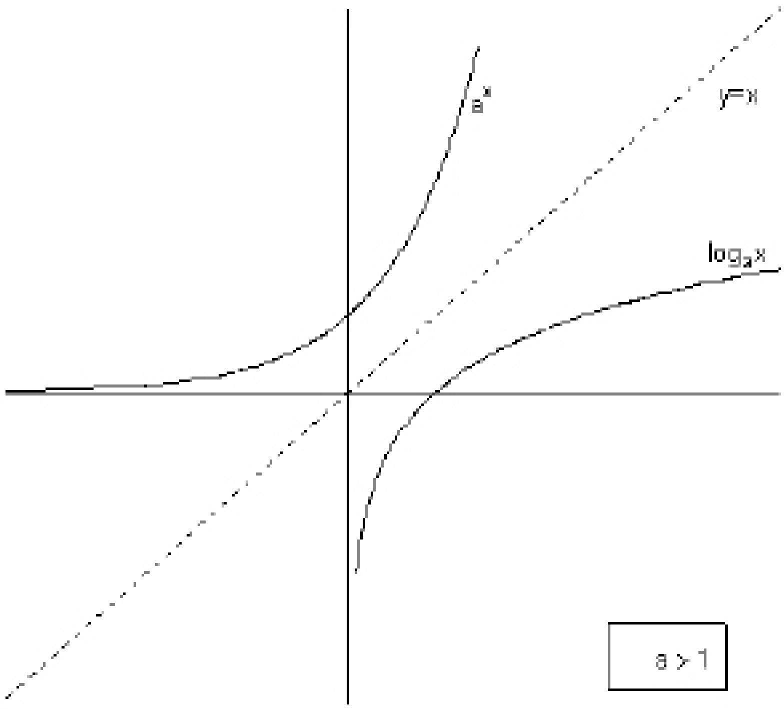
ii) Corta o eixo *x* no ponto de abscisssa 1 ($\log_a 1 = 0$, para todo 0 < *a* ≠ 1);

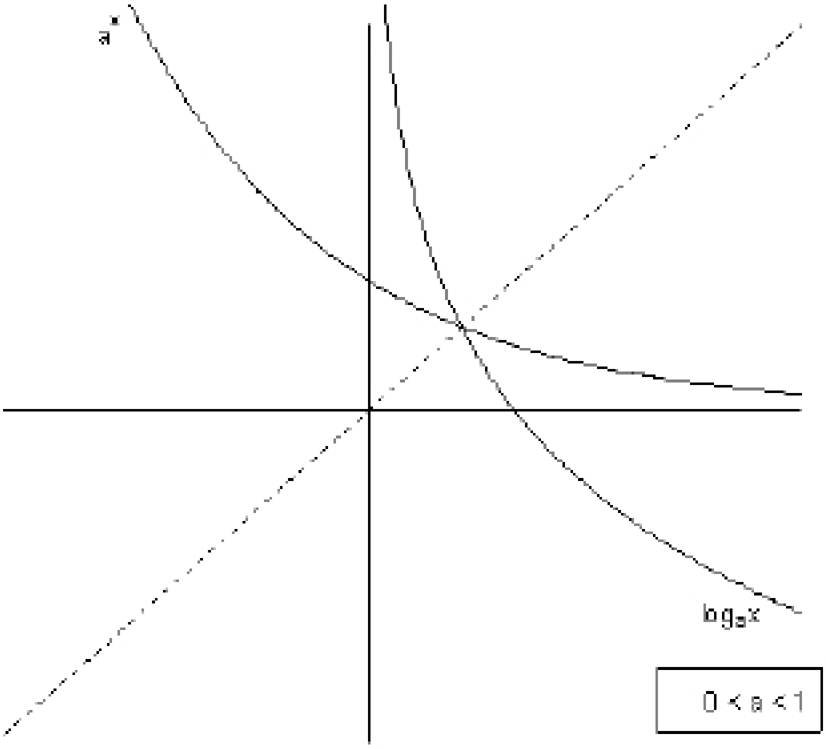
iii) Se *a* > 1 é uma função crescente e se 0 < *a* < 1 é uma função decrescente;

iv) É simétrico em relação à reta *y* = *x* (bissetriz dos quadrantes impares) do gráfico da função *g*(*x*) = a^x ;

v) Toma um dos aspectos da figura:

1.

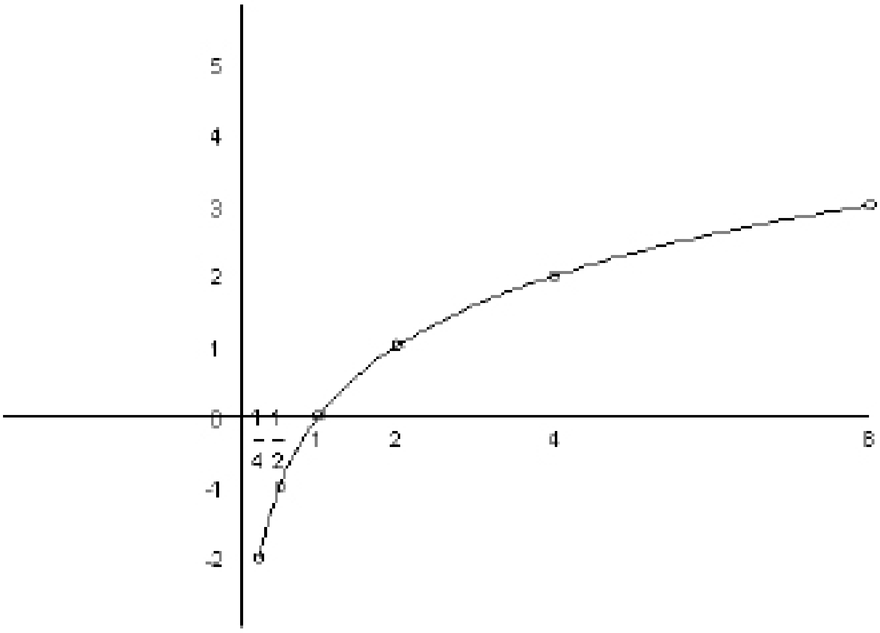




Exemplos: Construir o gráfico cartesiano da função $f(x) = \log_2 x$ (x > 0). Construímos a tabela dando valores inicialmente a *y* e depois calculamos *x*.

x	$y = \log_2 x$		x	$y = \log_2 x$
	-2		1/4	-2
	-1		1/2	-1
	0	$\rightarrow$	1	0
	1		2	1
	2		4	2
	3		8	3

Marcando esses pares ordenados temos a seguinte figura:



Para Saber mais assista aos vídeos:

http://www.youtube.com/watch?v=HifrYF7cKsQ&feature=relmfu

http://www.youtube.com/watch?v=yC0q4mO9co0&feature=fvwrel

http://www.youtube.com/watch?v=2s1qFnkM3ak&feature=relmfu

http://www.youtube.com/watch?v=udvX4J5LGA0&feature=fvwrel

Anotações

Capítulo 5
Progressões e Matemáticas financeira

5.1 Progressões aritméticas

São comuns, na vida real, grandezas que sofrem aumentos iguais em intervalos de tempos iguais. Por exemplo, a produção de uma fábrica que aumenta em 100 unidades por mês, as economias de Eduardo que crescem todo mês 500 reais etc...Neste capitulo trataremos de sequências que representam valores dessas grandezas, ou seja, de sequência $(a_n) = (a_1, a_2,..., a_n ,...)$ nas quais cada termo é obtido do anterior por um aumento constante.

Uma progressão é uma sequência de números $(a_1, a_2,..., a_n ,...)$ na qual é constante a diferença entre cada termo a_{n+1} e o seu antecedente a_n. Essa diferença constante é chamada razão e será representada por r. Assim, uma progressão aritmética (P.A.) de razão r é uma sequência (a_n) na qual $a_{n+1} - a_n = r$, para todo n natural.

Exemplo 1: São exemplos de sequências:

(2, 7, 12, 17,...) (Cada termo é igual ao anterior mais 5)

$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, ...)$ (Todos os termos iguais)

(8, 5, 2, -1, -5,...) (Cada termo é igual ao anterior menos 3)

Exemplo 2: A população de certa cidade tem um crescimento anual de 500 habitantes. Sendo P_0 o número de pessoas que habita na cidade atualmente e P_n a população daqui a n anos, a sequencia $(P_0, P_1, P_2,...)$ será uma progressão aritmética de razão 500.

Exemplo 3: Os lados de um triângulo retângulo formam uma progressão aritmética. Calcule-os, sabendo que o perímetro do triângulo vale 24.

Suponha que estes lados tenham os seguintes valores: $x-r, x, x+r$ (veja que poderia ser quaisquer outros valores, desde que este, estivesse de acordo com uma P.A. de razão r, que não conhecemos. Assim, temos que o perímetro deste triângulo vale 24, ou seja:

$$(x-r) + x (x+r) = 24 \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x= 8$$

Como este triângulo é retângulo temos a seguinte relação pelo teorema de Pitágoras (sabemos que a hipotenusa é o maior lado do triângulo retângulo, logo $x+r$ é a hipotenusa deste triângulo):

$$(x-r)^2 + x^2 = (x+r)^2 \Rightarrow x^2 = 4rx \Rightarrow 64 = 32r \Rightarrow r =2$$

Em muitas situações precisamos obter o valor do *n*-ésimo termo de uma P.A. por exemplo, no caso do segundo exemplo deste capitulo, temos atualmente 10.000 pessoas em uma cidade e que a população dessa cidade cresce de acordo com uma P.A. de razão 500, qual será a população dessa cidade daqui a 18 anos?

Para o caso genérico, considerando uma P.A. (a_n) de razão r, temos:

$$a_2 - a_1 = r$$
$$a_3 - a_2 = r$$
$$a_4 - a_3 = r$$
$$\vdots$$
$$a_n - a_{n-1} = r$$

Somando essas n-1 igualdades, termos que $a_n - a_1 = (n - 1)r$, ou seja,

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Neste caso, observa-se que se o primeiro termo da P.A. foi a_0 :

$$a_n = a_0 + nr$$

Voltando ao nosso exemplo, na cidade em questão, daqui 18 anos sua população será:

$P_{18} = P_0 + nr \Rightarrow P_{18} = 10.000 + 18x500 \Rightarrow P_{18} = 10.000 + 9000$

$P_{18} = 19.000$

Em outros casos é necessário calcular a soma de todos os termos de uma progressão aritmética. Por exemplo, somar a progressão aritmética (1,2,3,4,5,...,99,100).

Quando o grande matemático Carls F. Gauss (1777-1855) tinha sete anos de idade, seu professor lhe pediu que calculasse a soma dos inteiros de 1 até 100, ou seja, calcular a soma de todos os termos da seguinte P.A. (1,2,3,4,5,...,99,100). O professor, esperando que o trabalho durasse pelo menos uma hora, ficou surpreso quando, em poucos minutos, o pequeno Gauss anunciou que o valor da soma é era 5050. A resposta estava correta e, curioso, o professor lhe perguntou como conseguira fazer o calculo tão rápido. Gauss explicou: Primeiramente somou:

$$1+100=101$$
$$2+99=101$$
$$3+98=101$$
$$\vdots$$
$$50+51=101$$

Assim, obtivera 50 somas iguais a 101 e a resposta era 50 x 101 = 5050.

Baseados nessa ideia, podemos calcular a soma dos termos de uma progressão aritmética qualquer. Assim, qual a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética $(a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$?

Para isto, temos que:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

Somando essas duas equações:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-} + a_1)$$

Assim, todos os parênteses são iguais ao primeiro, $(a_1 + a_n)$ e, logo:

$2S_n = (a_1 + a_n).\text{n}$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Exemplo: A soma dos vinte primeiros termos da progressão aritmética (2, 5, 8, 11,...) é....

Para usarmos a expressão deduzida precisamos primeiro conhecer o qual é o valor de $a_{20.}$ Para isto, sabemos que $a_1 = 2$ e $r = 3$. Logo,

$a_{20} = a_1 + 19r = 2 + 19\text{x}3 = 59$

Assim,

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \times 20}{2} = \frac{(2 + 59) \times 20}{2} = 61 \times 10 = 610$$

5.2 Progressões geométricas

Nesta seção trataremos de sequências que variam com uma taxa de crescimento constante. A taxa de crescimento entre os pontos a e b é definida por:

$$\frac{b - a}{a}$$

Assim, a taxa de crescimento é a razão entre o aumento da grandeza e o seu valor inicial.

Exemplos:

i) A taxa de crescimento de uma grandeza que passa do valor 5 para 8 é:

ii)

$$\frac{8 - 5}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \text{ ou } 60\%$$

iii) Suponha que a população de uma cidade aumente 3% ao ano. Então a população P_n da cidade no n será igual a população P_{n-1} do ano anterior mais o aumento de população, que é igual a 3% da população P_{n-1} , ou seja:

$$P_n = P_{n-1} + 0{,}02 \times P_{n-1}$$

$$P_n = 1{,}02 \times P_{n-1}$$

Em resumo: A população em cada ano é igual à população do ano anterior multiplicada pela constante 1,02.

iv) Uma bomba a vácuo retira, em cada sucção 4% do liquido existente em certa câmara. Se G_n é a quantidade de líquido restante na camará após *n* sucções, temos

$$G_n = G_{n-1} - 0{,}04\, G_{n-1} = 0{,}96\, G_{n-1}$$

Isto é, cada termo da sequência (G_n) é igual ao termo anterior multiplicado pela constante 0,97. Note que a taxa de crescimento de G_n é -0,03.

Os resultados dos dois últimos exemplos podem ser resumidos na seguinte propriedade: Seja uma sequencia (G_n) com uma taxa de crescimento constante e igual a *i*, se e só se

$$G_n = (1+ i)\, G_n \,,$$

para todo *n* natural.

Por definição, uma progressão geométrica (P.G.) é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo, a partir do segundo pelo seu antecedente. Esse quociente constante é representado por *q* e chamado razão.

Exemplos: As sequências a seguir são exemplos de progressões geométricas

1, 2, 4, 8, 16, ...	(cada termo é igual ao dobro do anterior) – P.G. com razão igual a 2
18, 6, 2, 2/3, ...	(cada termo é igual à terça parte do anterior) – P.G. com razão igual a 1/3.
4, 4, 4, 4, ...	(todos os termos são iguais) – P.G. com razão igual a 1

Em vista da equação: $G_n = (1+ i)\, G_n$ pode-se definir uma P.G de razão 1+*i* como sendo uma sequência cuja taxa de crescimento é constante e igual a i.
Baseado nas considerações anteriores, consideremos o seguinte problema: Seja uma cidade que tem um crescimento de 4% ao ano e que hoje essa cidade tem 400 mil habitantes. Qual será sua população daqui a 5 anos?

Bom, como sabemos que essa cidade cresce 4% ao ano temos que:

$$\frac{P_2}{P_1} = 1,04$$

$$\frac{P_3}{P_2} = 1,04$$

$$\frac{P_4}{P_3} = 1,04$$

$$\frac{P_5}{P_4} = 1,04$$

Assim, multiplicando as igualdades acima, temos:

$$\frac{P_2}{P_1} \times \frac{P_3}{P_2} \times \frac{P_4}{P_3} \times \frac{P_5}{P_4} = 1,04 \times 1,04 \times 1,04 \times 1,04$$

$$\frac{P_5}{P_1} = (1,04)^4 \qquad P_5 = P_1 \times (1,04)^4 \text{ ,}$$

Como P_1 = 400.000, temos que a população dessa cidade em 5 anos será de $P_5 = 400.00 \times (1,04)^4 \approx 467.943$ habitantes

Essa relação pode ser generalizada. Assim, para uma progressão geométrica (a_n) de razão q, tem-se para todo n natural que:

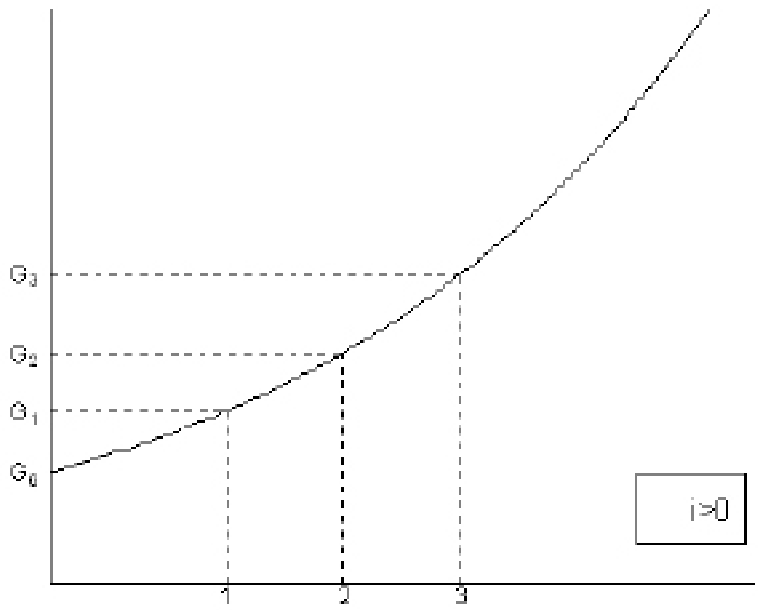
$$a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$$

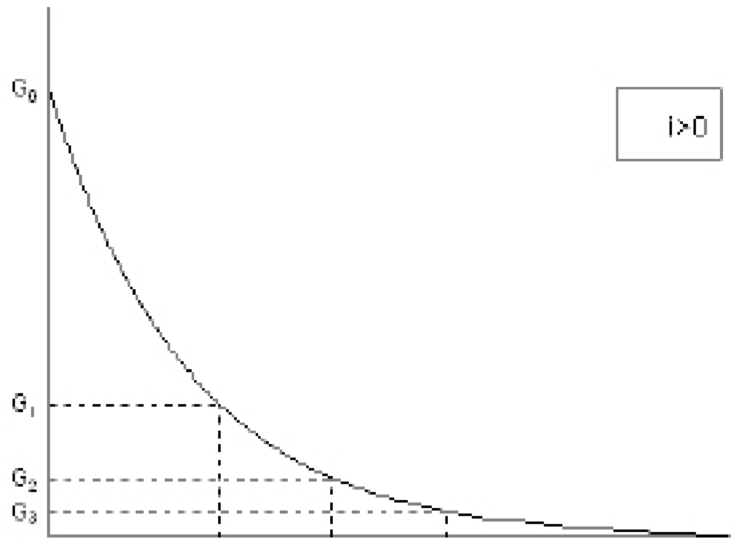
Essa relação pode ser demostrada, utilizando-se o mesmo procedimento para resolver o problema anterior.

Observação: Se tivéssemos enumerado os termos P.G. a partir de a_0 teríamos a seguinte relação para determinar o n-ésimo:

$$a_n = a_0 \,.\, q^n$$

Se a grandeza G varia de acordo com a taxa de crescimento constante igual a i, o valor de G na época n é $G_n = G_0 (1 + i)^n$. Observe que a função que associa a cada natural n o valor de G_n é simplesmente a restrição aos naturais da função exponencial $G(x) = G(0) (1 + i)^x$. Se $i > 0$ temos uma função crescente e se $i < 0$ a função é decrescente, como podemos observar nas figuras a seguir:





Em muitas situações praticas é interessante saber qual a soma de todos os termos de uma P.A. Assim, a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$ é igual a

$$S_n = a_1 . \frac{1-q^n}{1-q}$$

A veracidade desta igualdade é obtida, considerando que:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \quad \text{(equação 1)}$$

Multiplicando a expressão acima por q, temos:

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + ... + qa_n$$
$$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + qa_n \quad \text{(equação 2)}$$

Subtraindo (equação 2) da (equação 1), temos que:

$$S_n - qS_n = a_1 - qa_n = a_1 - a_1.q^n$$

ou seja,

$$S_n (1- q) = a_1 (1- q^n)$$

assim, obtemos:

$$S_n = a_1.\frac{1-q^n}{1-q}$$

desde que $q \neq 1$.

Exemplo: Diz a lenda que o inventor do xadrez pediu como recompensa um grão de trigo pela primeira casa, dois grãos pela segunda casa, quatro grãos pela terceira casa e assim sucessivamente, sempre dobrando a quantidade a cada casa nova. Como o Tabuleiro de xadrez tem 64 casas, a quantidade de grãos pedida pelo inventor do jogo é a soma dos 64 primeiros termos de progressão geométrica cujo primeiro termo é 1 e cuja razão é 2, isto é,

$$1.\frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1$$

Calculando, obtemos um grande número de vinte dígitos: 18 446 744 073 709 551 615 grãos de trigo.

5.3 Conceitos gerais em matemática financeira

A operação básica da matemática financeira é a operação de empréstimo. Alguém que dispõe de um capital C (chamado de *principal*), empresta-o a outro por certo período de tempo. Após esse período, ele recebe o seu capital C de volta, acrescido de renumeração *J* pelo empréstimo. Essa renumeração é chamada de *juro*. A Soma *C* + *J* é chamada de *montante* e será representada por M. A razão

$$i = \frac{J}{C}$$

é a taxa de crescimento do capital e será sempre referida ao período da operação e chamada de *taxa de juros*.
Para ilustrar a definição acima, considere uma situação em que Pedro tomou emprestado R$ 100,00. Dois meses após pagou R$ 110,00. Os juros pagos por Pedro são de R$ 10,00 e a taxa de juros é

$$\frac{10}{100} = 0{,}10 \text{ (ou 10\%)}$$

ao bimestre. O principal, que é a dívida inicial de Pedro, é igual a R$ 100,00 e o montante, que é a dívida de Pedro na época do pagamento, é igual a R$ 110,00.

No contexto financeiro, o leitor deve ficar atento para o fato de que o dinheiro que Pedro tomou emprestado, que é R$ 100,00, no início do bimestre tem o mesmo valor, R$ 110,00, no final do bimestre. É importante notar que o valor de uma quantia depende da época à qual ela se refere. Na situação ilustrada, quantias diferentes (R$ 100,00 e R$ 110,00) referidas a épocas diversas, têm o mesmo valor.
Em muitas situações é comum cometer os seguintes erros financeiros:

a) Pensar que R$110,00 vale mais que R$ 100,00. Esta afirmação é verdadeira se nos referimos à mesma época. Referidos a épocas diferentes, R$ 110,00 pode ter o mesmo valor que R$ 100,00 ou até mesmo um valor inferior. Todos nós preferiríamos receber R$ 100,00 agora do que R$ 110,00 daqui a sete anos. Com razão, mesmo que não houvesse inflação, R$ 100,00 colocado em uma caderneta de poupança a juros de 0,5% ao mês, após 84 meses (7 anos) os R$ 100,00 transformar-se-iam em R$ 152,00 (Para obter esse valor, note que temos uma P.A. com a_0 = 100 e q = 1,005 e determinamos o termo a_{84} da P.A.).

b) Acreditar que R$ 100,00 tem sempre o mesmo valor que R$ 100,00. Na verdade, R$ 100,00 hoje vale mais que R$ 100,00 daqui a 10 anos.

c) Somar quantias referidas a épocas diferentes. Pode ser verdade que comprar em três prestações de R$100,00 seja melhor que comprar em seis de R$ 51,00, apesar de 100 + 100 + 100 < 51 + 51 + 51 + 51 + 51 + 51.

Pensado em uma nova situação, suponha que Pedro tomou um empréstimo de R$ 100,00 com uma taxa de juros de 10% ao mês. Após um mês a dívida de Pedro será acrescida de 0,10 × 100,00 = 10 reais de juros (*J = i.C*), passando para R$ 110,00. Se acontecer algum imprevisto com Pedro e ele decidir adiar o pagamento da dívida em mais um mês e mantida a mesma taxa de juros, o empréstimo será quitado dois meses depois de contrair o empréstimo. O valor da quitação após dois meses será de R$ 121,00, pois agora os juros relativos ao segundo mês serão de 0,10 × 110,00 = 11 reais. Esses juros aqui calculados são chamados de juros compostos. Mais precisamente, no regime de juros compostos, os juros em cada período são calculados, conforme é natural, sobre a dívida do início desse período.

Para um caso geral, no caso de regime de juros compostos de taxa *i*, um principal C_0 transforma-se, após n períodos de tempo, em um montante igual a

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

Para justificar esta expressão, note que a dívida após *n* períodos de tempo é:

$$C_n = C_{n-1} + i.C_{n-1} = (1+i).C_{n-1}$$

Assim, C_n é uma progressão geométrica de razão (1+*i*). Logo, $C_n = C_0(1+i)^n$.

Exemplo: Cristina toma um empréstimo de R$ 150,00 a juros de 12% ao mês. Qual será a dívida de Cristina três meses depois?

$$C_3 = C_0(1+i)^3 = 150(1+0,12)^3 \approx 210,74 \text{ reais.}$$

Outro modo de ler a equação $C_n = C_0(1+i)^n$ é que o valor C_0 valerá após n períodos de tempos $C_0(1+i)^n$, ou seja, uma quantia que atualmente vale *A*, no futuro (após n períodos de tempos) valerá $F = A(1+i)^n$. A fórmula fundamental da equivalência de capitais diz que:

i) Para se obter um o valor futuro, basta multiplicar o valor atual por $(1+i)^n$;

ii) Para se obter o valor atual, basta dividir o futuro por $(1+i)^n$;

Exemplo: Geraldo Tomou um empréstimo de R$ 300,00 a juros mensais de 5%. Dois meses após, Geraldo pagou R$ 150,00 e um mês após esse pagamento, liquidou seu débito. Qual o valor do ultimo pagamento?

Os esquemas são equivalentes. Logo, R$ 300,00 na data 0, têm o mesmo valor de R$ 150,00 dois meses após, mais um pagamento igual a P, na data 3.

300					150	P
0			0	1	2	3

Igualados os valores na mesma época (0, por exemplo) dos pagamentos nos dois esquemas, temos:

$$300 = \frac{150}{(1+0,05)^2} + \frac{P}{(1+0,05)^3}$$

Daí, temos que P ≈ 189,79 reais

Exemplo: Telma tem duas opções de pagamento na compra de um telefone celular: três prestações mensais de R$ 100,00 cada, ou seis prestações mensais de R$ 51,00 cada. Se o dinheiro vale 2% ao mês para Telma, ou seja, Telma considera indiferente pagar (ou receber) 100 reais agora ou 102 reais daqui um mês, qual forma de pagamento ela deve preferir?

100	100	100				51	51	51	51	51	51
0	1	2				0	1	2	3	4	5

Para comparar, vamos determinar o valor dos dois conjuntos de pagamentos na época 2. Assim:

$V_1 = 100(1+0,02)^2 + 100(1+0,02) + 100 \approx 306,04$

$V_2 = 51.(1+0,02)^2 + 51.(1+0,02) + 51 + \frac{51}{(1+0,02)} + \frac{51}{(1+0,02)^2} + \frac{51}{(1+0,02)^3} \approx 303,16$

Assim, Telma deve preferir o pagamento em seis prestações.

Em outras situações podemos estar interessados em descobrir em quanto tempo o capital inicial atingirá determinado valor. Por exemplo, investindo incialmente uma quantia C_0, em quanto tempo este valor dobrará? Assim,

$$C_0 (1+0,08)^n = 2C_0$$

Ou seja,

$$1,08^n = 2$$

aplicando *ln* em ambos os lados dessa igualdade temos que:

$$n = \frac{\ln 2}{\ln 1,08} \approx 9$$

assim, em nove meses seu capital será dobrado.

Suponha agora, que tomamos um empréstimo com uma taxa de juros de 12% ao mês e, então, queremos saber o quanto vamos pagar de juros por um período de um ano. Logo ao final de 12 meses, teremos o seguinte acréscimo ao valor emprestado:

$$(1 + 0{,}12)^{12} = 3{,}90 = 1 + 2{,}90$$

ou seja, em um ano pagaremos uma taxa de juros de 290%.

Este resultado pode ser generalizado. Para uma taxa de juros relativa a um período de tempo ser i, a taxa de juros relativa a n períodos de tempos é I tal que

$$1 + I = (1 + i)^n$$

Um erro muito comum é pensar que juros de 12% ao mês equivalem a juros 12 x 12% = 144% ao ano. Taxas com 12% ao mês e 144% ao ano são ditas *taxas proporcionais*, pois a razão entre elas é igual à razão dos períodos aos quais elas se referem.

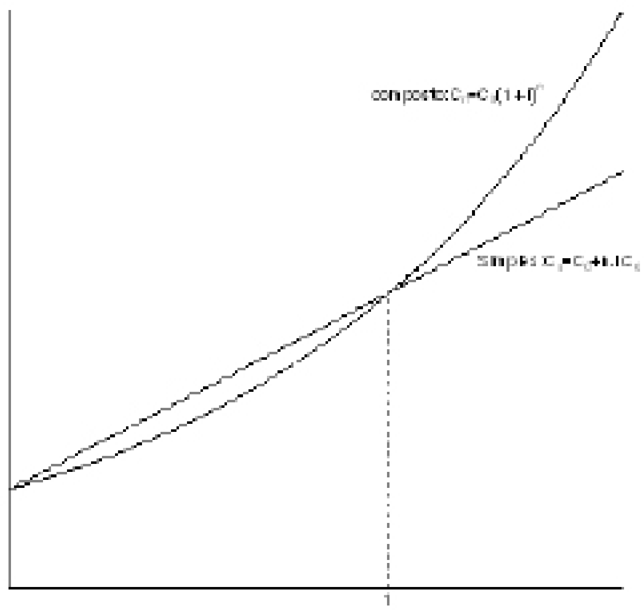
Observação: *Taxas proporcionais não são equivalentes*

Em algumas poucas situações, usam-se juros simples e não juros compostos. No regime de juros simples, os juros são calculados, em cada período, sobre o principal e não sobre o montado do período anterior.
A tabela a seguir mostra a evolução de um principal de R$ 100,00 a juros de 10% ao mês.

Época	Juros simples	Juros compostos
0	100,00	100,00
1	110,00	110,00
2	120,00	121,00
3	130,00	133,10

Observe que:

a) A juros compostos, os montantes constituem, uma progressão geométrica, e a juros simples, uma progressão aritmética (de razão $i.C_0$)



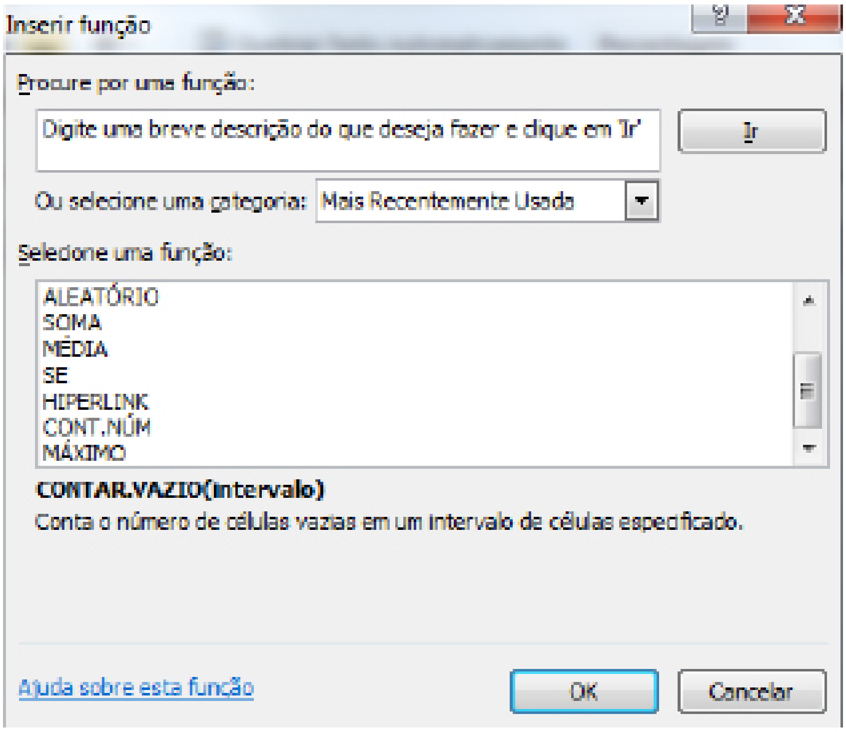
a) No regime de juros simples, taxas proporcionais são equivalentes. Juros de 10% ao mês equivalem a juros de 20% ao bimestre, de 30% ao trimestre, etc.

Na vida real, juros simples são raramente usados. Diante disso, um humorista, definiu, a "regra de ouro" da Matemática Financeira e da vida: "Na vida, quem tem o ouro é quem faz as regras". O gráfico mostra o motivo: os montantes a juros compostos são maiores que os montantes a juros simples. É, portanto de interesse dos detentores do capital que os juros sejam compostos.

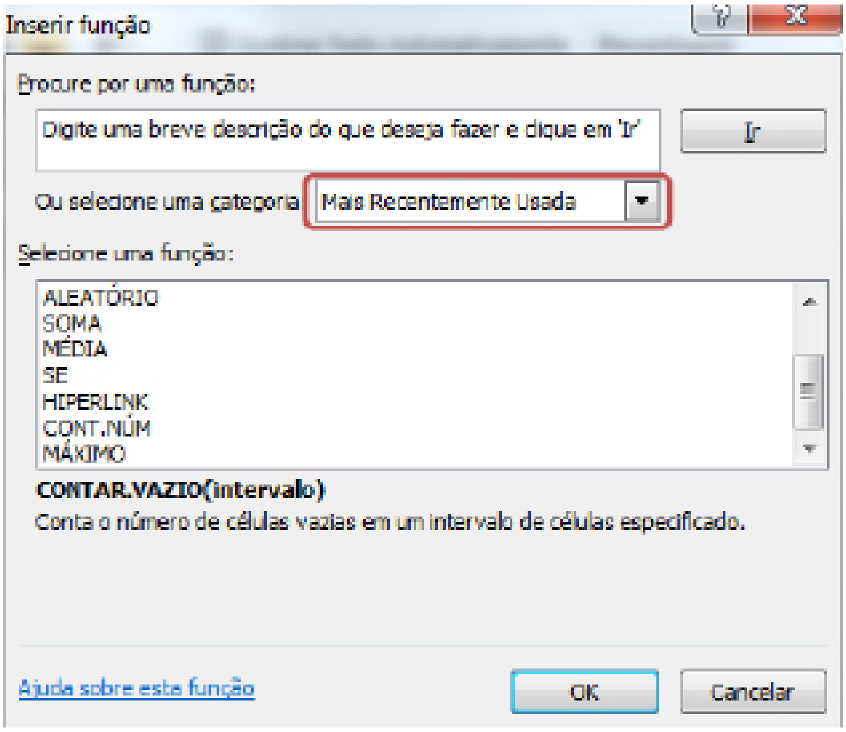
5.4 Cálculos de taxas utilizando Excel®

Para calcular a taxa de juros de uma série uniforme de pagamentos, inicialmente devemos clicar na tela do menu f_x.

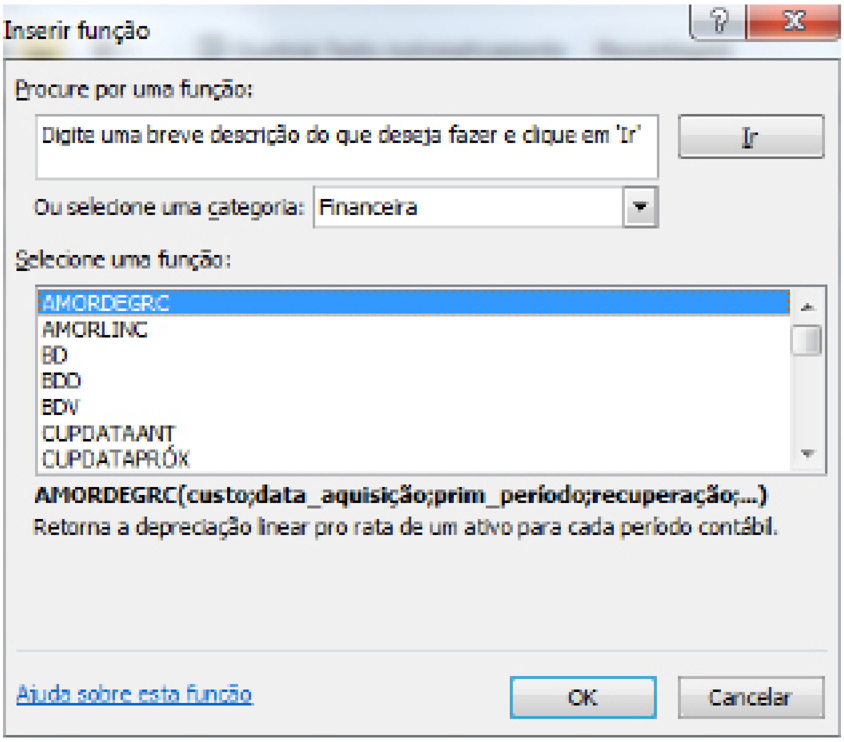
Após clicar neste ícone aparecerá a seguinte janela:



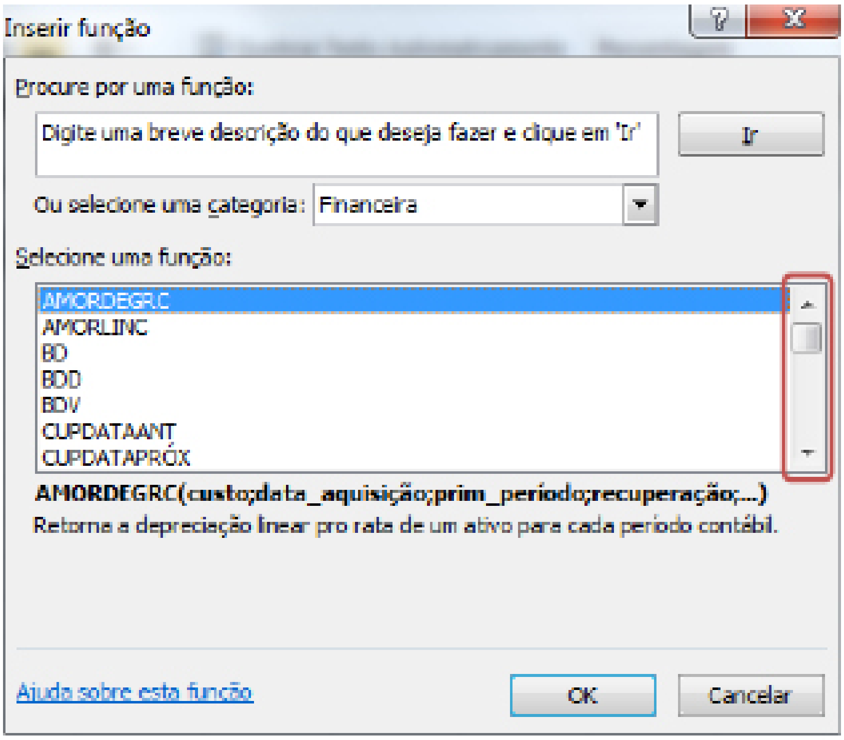
Na opção "Ou selecione uma categoria" escolha a opção "Financeira".



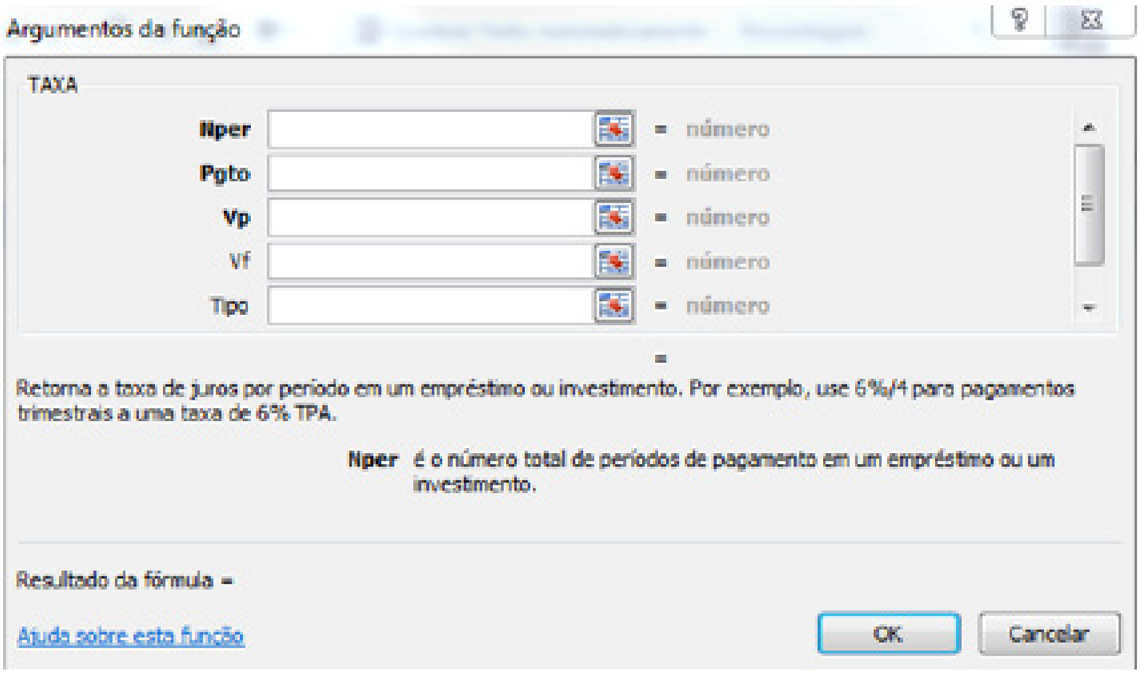
Então aparecerá a seguinte janela:



Em seguida, na barra de rolagem à direita, procure pela função TAXA e clique em, OK.



Após selecionar a função Taxa, aparecerá a seguinte tabela e será necessário preencher alguns valores.



Nesta janela, temos que:

Nper: nesta opção você colocará o número total de termos que existem na série uniforme.

Pgto: Nesta lacuna, você colocará o valor de cada prestação (cada termo da série uniforme)

Vp: Nesta opção você colocará o valor presente da dívida, com sinal contrário ao **Pgto**. Se o **Vf** for preenchido, esta célula deve ficar em branco.

Vf: Nesta opção você colocará o valor futuro da dívida, com sinal contrário ao **Pgto**. Se o **Vp** for preenchido, esta célula deve ficar em branco.

Tipo: Aqui você preencherá com 0 ou 1, conforme os pagamentos sejam postecipados ou antecipados. Se for deixado em branco, o Excel assumirá 0, considerando os pagamentos postecipados.

Observação: O Excel trabalha com a "Lógica do contador", na qual os pagamentos e recebimentos devem ter sinais contrários. Logo, se o valor presente é um valor positivo, o valor das prestações deve ser obrigatoriamente negativo.

Exemplo: Qual a taxa de juros na compra de um veículo cujo preço à vista é de R$ 8.000,00 e é pago em 24 pagamentos de R$ 400,00, sendo que o primeiro pagamento é efetuado um mês após a compra?

Assim, Nper = 24, Pgto = 400 e Vp = - 8000 (veja que o Tipo é omitido, pois o primeiro pagamento é postecipado)

Substituindo esses valores no Excel temos que a taxa será 1,51% ao mês.

Exemplo: Qual a taxa de juros na compra de um veículo cujo preço à vista é de R$ 8.000,00 e é pago em 24 pagamentos de R$ 400,00, sendo que o primeiro pagamento é efetuado no ato da compra?

Assim Nper = 24, Pgto = 400, Vp = - 8000 e Tipo = 1

Substituindo esses valores no Excel temos que a taxa será 1,56% ao mês.

Referências

CARMO, M. P.; MORGADO, A. C. O.; WAGNER, E. Trigonometria e Números Complexos. 4ª Edição, SBM, Rio de Janeiro, 2001.

CARVALHO, P. C. P.; LIMA, E. L.; MORGADO, A. C. O.; WAGNER, E. A Matemática do Ensino Médio. vol. 3, 3. Ed., SBM, Rio de Janeiro, 2001.

IEZZI, G., Fundamentos da Matemática Elementar 3: Trigonometria, 8. Ed., Atual Editora, São Paulo, 2004.

IEZZI, G, Fundamentos de Matemática Elementar, 6: Complexos, polinômios, equações. Ed. Saraiva, São Paulo, 2005.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKANI, C. Fundamentos de Matemática Elementar, 2: Logaritmos. Ed. Atual, São Paulo, 2004.

LIMA, E. L. Logaritmos, Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, SBM, Rio de Janeiro, 1980.

MOREIRA, M.; JUSTINO, J.; DIAS, M. Trigonometria e números complexos. 2006. Disponível em: http://ltodi.est.ips.pt/mmoreira/PUBLICACOES_P/TemaIII_Trigonome tria_Numeros_Complexos.pdf Acesso em: 30/10/2012.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; ZANI, S. Progressões e Matemática Financeira, Coleção Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2005.