Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática a Distância

Fundamentos de Matemática Elementar II

Juliano Gonçalves Oler

Segunda Edição
Revista e Atualizada

UFU

2018

1ª edição 2013
2ª edição 2018

Oler, Juliano Gonçalves

Fundamentos de Matemática Elementar II / Juliano Gonçalves Oler. - 2ª ed. - Uberlândia, MG : UFU, 2018 - 171p.

Licenciatura em Matemática.

ISBN: 000.00.00000.00-0

1. Fundamentos de Matemática Elementar II

Edição
Centro de Educação a Distância
Comissão Editorial - CEAD/UFU

Diagramação
Equipe CEAD/UFU

PRESIDENTE DA REPÚBLICA
Michel Miguel Elias Temer

MINISTRO DA EDUCAÇÃO
José Mendonça Bezerra Filho

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
DIRETORIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA/CAPES
Carlos Cezar Modernel Lenuzza

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA - UFU
REITOR
Valder Steffen Júnior

VICE-REITOR
Orlando César Mantese

CENTRO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA
DIRETORA E COORDENADORA UAB/UFU
Maria Teresa Menezes Freitas

SUPLENTE UAB/UFU
Aléxia Pádua Franco

FACULDADE DE MATEMÁTICA – FAMAT – UFU
DIRETOR
Prof. Dr. Marcio Colombo Fenille

COORDENADORA DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA – PARFOR
Profa. Dra. Fabiana Fiorezi de Marco

ASSESSORA DA DIRETORIA
Sarah Mendonça de Araújo

EQUIPE MULTIDISCIPLINAR
Alberto Dumont Alves Oliveira
Darcius Ferreira Lisboa Oliveira
Dirceu Nogueira de Sales Duarte Jr.
Gustavo Bruno do Vale
Otaviano Ferreira Guimarães

Sumário

Sobre o curso

A Matemática é uma ciência que nasceu da necessidade que o homem tinha de resolver problemas, e vem se desenvolvendo e aprimorando ao longo dos tempos. Produz técnicas analíticas que são empregadas por engenheiros e outras profissionais na criação, desenvolvimento e aprimoramento tecnológico de vários produtos. O mundo como o conhecemos hoje não seria possível sem a Matemática. Não teríamos carros, aviões, celulares, computadores, televisões, aparelhos médicos etc. Assim, essa nobre ciência é uma parte essencial das engrenagens que fazem a sociedade evoluir. Desse modo, o profissional da área de Matemática é um elemento fundamental para o desenvolvimento tecnológico e, portanto, sócioeconômico de qualquer sociedade.

Nesse contexto, é de suma importância o processo de formação de profissionais que vão atuar na área de Matemática. Essa tarefa é desempenhada pelas instituições de ensino superior. O processo de formação em um curso superior de Matemática envolve a aquisição de vários conhecimentos. Para facilitar a assimilação destes, o curso é divido em várias disciplinas. Uma dessas disciplinas é a de**Fundamentos da Matemática Elementar II** , que, em essência apresentar ao aluno uma visão geral da Matemática, além de resolver problemas envolvendo técnicas de contagem e binômio de Newton. Para facilitar o entendimento, tal disciplina é dividida em quatro módulos:

- Princípios básicos de contagem;
- Princípio da Inclusão - Exclusão;
- Princípio da Casa dos Pombos;
- O binômio de Newton e o triângulo de Pascal;

A duração de cada módulo é de quinze dias. O texto básico da disciplina é contemplado com exercícios estrategicamente posicionados, de tal forma que o conteúdo previamente estudado fique bem assimilado em seus conceitos mais básicos.

Quanto à metodologia, o curso terá seguinte base: estudo da teoria do livro texto, com o treino através dos exercícios nele contidos, e atividades dentro do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) os quais serão passados para os alunos dentro do período de vigência de cada módulo, e farão parte do processo de avaliação, assim como as provas presenciais.

Quanto ao sistema de avaliação, serão distribuídos 100 pontos, sendo 60 pontos relativos às provas escritas em modo presencial e 40 pontos nas atividades passadas pelo Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA).

As listas de exercícios que serão disponibilizadas no AVA deverão ser entregues em datas que também serão apresentadas no AVA, para que os tutores possam corrigir. Desejamos ao caro aluno um ótimo curso, e torcemos para que venha atingir com sucesso os objetivos da disciplina.

Informações

Prezado(a) aluno,

Ao longo deste guia impresso você encontrará alguns “ ícones” que lhe ajudarão a identificar as atividades.

Fique atento ao significado de cada um deles, pois isso facilitará a sua leitura e seus estudos.

Destacamos alguns termos no texto do Guia cujos sentidos serão importantes para sua compreensão. Para permitir sua iniciativa e pesquisa, não criamos um glossário, mas se houver dificuldade interaja no Fórum de Dúvidas.

Cabe, ainda, mencionar que os exemplos e exercícios presentes nesse material foram retirados dos livros texto que constam na bibliografia.

Anotações

Módulo 1
Princípios básicos da contagem

Pergunta. O que é Contagem?

A palavra CONTAGEM no dicionário significa:

"Ato de Enumerar, Ação de especificar coisas uma por uma, Estudo dos arranjos dos objetos."

Pergunta. Qual o ramo da matemática que estuda os vários tipos de contagens?

A parte da matemática que estuda as formas de contagem é chamada de COMBINATÓRIA.

Pare e Pense. Por que a combinatória é importante?

Através dos métodos de contagem presentes na combinatória podemos estudar SITUAÇÕES COTIDIANAS, tais como:

- o espaço utilizado por um determinado BANCO DE DADOS;
- a quantidade de usuários que uma determinada REDE DE TELEFONIA suporta;
- o número suficiente de PROTOCOLOS DA INTERNET para suprir as condições mínimas de navegação;
- os diferentes NÚMEROS DE TELEFONES possíveis em um determinado país, estado etc.;
- Definir SENHAS COMPUTACIONAIS diversas.

As regras básicas de contagem, estudadas neste texto, são:

- PRINCÍPIO DA ADIÇÃO;
- PRINCÍPIO DA MULTIPLICAÇÃO;
- PRINCÍPIO DA INCLUSÃO-EXCLUSÃO;
- PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS.

Inicialmente estudaremos as propriedades dos Princípios Aditivo e Multiplicativo; na próxima seção, abordaremos o Princípio da Inclusão-Exclusão e, finalmente, abordaremos o Princípio da Casa dos Pombos.

Princípio Multiplicativo

Pergunta. O que é o Princípio Multiplicativo?

O **PRINCÍPIO DA MULTIPLICAÇÃO** ou **PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO** é formulado matematicamente da seguinte forma:

Observação. Considere r_1 e r_2 resultados possíveis para os eventos A e B, respectivamente. Então, existem $r_1 \cdot r_2$ resultados possíveis para o evento A e B (ou seja, para a sequência dos dois eventos).

Pare e Pense. Como utilizamos o Princípio Multiplicativo para entender e resolver problemas cotidianos?

Iniciamos nosso estudo analisando o seguinte problema do dia a dia:

> Uma costureira deve decidir entre três linhas, uma verde, uma laranja e uma azul, e entre dois três tipos de botões, um pequeno, um médio e um grande. Quantos conjuntos diferentes a costureira pode ter?

Vamos resolver o problema separando o ato de escolher em dois momentos sequenciais:

1° Escolher a cor da linha;

2° Escolher o tipo de botão.

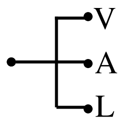
É importante frisar que neste problema existe uma sequência de eventos, visto que a costureira deve escolher três cores de linha e depois decidir entre três tipos de botões (os eventos não são disjuntos).

Utilizando a nomenclatura

V : linha vermelha
A : linha azul
L : linha laranja
P : botão pequeno
M : botão médio
G : botão grande,

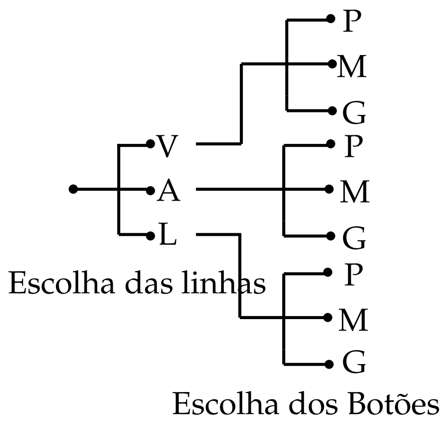
podemos resolver o problema através de um diagrama assim composto:

1. Existem três possibilidades para escolha das linhas.

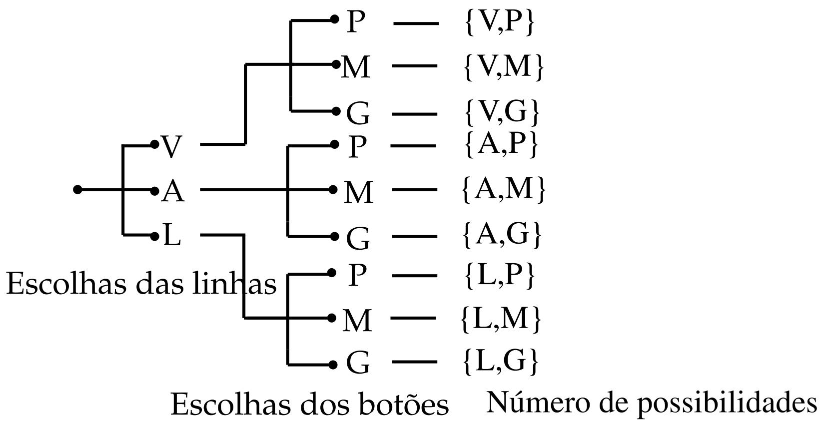


Escolha das linhas

2. Existem três possibilidades para a escolha dos botões:



3. Completando o diagrama temos 9 possibilidades de escolhas.



Dessa forma, podemos concluir que o número de escolhas diferentes que a costureira pode fazer é dada por:

$$3 \times 3 = 9.$$

Observação. O que não posso esquecer sobre o Princípio da Multiplicação?

1. O Princípio da Multiplicação nos diz que o número total de resultados possíveis para uma sequência de eventos não disjuntos pode ser obtido multiplicando-se o número de possibilidades de o primeiro evento ocorrer pelo número de possibilidades do segundo.

2. O conectivo “e” mostra que os eventos NÃO são disjuntos.

3. O Princípio da Multiplicação é aplicado sempre que houver uma sequência dos eventos NÃO disjuntos.

Testando os conhecimentos

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. A placa dos carros de uma determinada cidade possui seis digítos. Quantas placas existem?

Solução.

- Como as placas possuem seis dígitos devemos escolher o primeiro dígito, "e" depois escolher o segundo dígito, "e" depois escolher o terceiro dígito, "e" os demais dígitos, até finalizarmos a confecção da placa.
- O conectivo "e" nos diz que os eventos não são disjuntos.
- Se os eventos não são disjuntos, então podemos aplicar o Princípio da Multiplicação para resolver este problema.
- Observe que temos 10 opções de dígitos, a saber 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.
- Ao escolher o primeiro dígito, temos 10 possibilidades.
- Ao escolher o segundo dígito, temos 10 possibilidades.
- Ao escolher o terceiro dígito, temos 10 possibilidades.
- Ao escolher o quarto dígito, temos 10 possibilidades.
- Ao escolher o quinto dígito, temos 10 possibilidades.
- Ao escolher o sexto dígito, temos 10 possibilidades.
- Assim, aplicando o Princípio da Multiplicação, obtemos:

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6 = 1.000.000 \text{ possibilidades} .$$

- Portanto, nesta cidade existem um milhão de placas de carros.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Quantas placas teríamos se os dígitos de cada placa não pudessem ser repetidos?

Solução.

- Ao escolher o primeiro dígito, temos 10 possibilidades.
- Ao escolher o segundo dígito, temos 9 possibilidades (não há repetição).
- Ao escolher o terceiro dígito, temos 8 possibilidades (não há repetição).
- Ao escolher o quarto dígito, temos 7 possibilidades (não há repetição).
- Ao escolher o quinto dígito, temos 6 possibilidades (não há repetição).
- Ao escolher o sexto dígito, temos 5 possibilidades (não há repetição).
- Assim, aplicando o Princípio da Multiplicação, obtemos:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151.200 \text{ possibilidades} .$$

- Portanto, nesta cidade existem 151.200 placas de carros.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Um elenco de um time de futebol é formado, em geral, por vinte e sete jogadores. Para uma determinada atividade o treinador necessita de quatro jogadores. De quantas maneiras o treinador pode escolher seus comandados?

Solução.

- Primeiramente, observe que o treinador está montando um grupo de quatro jogadores onde um jorgador é escolhido uma única vez, isto é, não são permitidas repetições.
- Ao montar o grupo, o treinador escolhe um jogador para ser o primeiro elemento do grupo, “e” depois escolhe um outro jogador para o segundo elemento, “e” os demais membros são escolhidos analogamente na sequência.
- O conectivo “e” nos diz que os eventos não são disjuntos.
- Se os eventos não são disjuntos, então podemos aplicar o Princípio da Multiplicação para resolver este problema.
- Ao escolher o primeiro jogador, temos 27 possibilidades.
- Ao escolher o segundo jogador, temos 26 possibilidades (não há repetição).
- Ao escolher o terceiro jogador, temos 25 possibilidades (não há repetição).

- Ao escolher o quarto jogador, temos 24 possibilidades (não há repetição).
- Assim, aplicando o Princípio da Multiplicação, obtemos:

$$27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 = 421.200 \text{ possibilidades }.$$

- Portanto, o treinador possui a sua disposição 421.200 possibilidades de escolha.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. As mulheres sempre são muito vaidosas. Maria por exemplo, possui sempre consigo quatro tipos de sombra, oito cores de esmalte e cinco tons de batons. De quantas formas diferentes Maria pode se produzir?

Solução.

1. Para compor sua maquiagem Maria deverá utilizar um tipo de sombra, "e" uma cor de esmalte, "e" uma cor de batom.
2. O conectivo "e" nos diz que os eventos não são disjuntos.
3. Se os eventos não são disjuntos, então podemos aplicar o Princípio da Multiplicação para resolver este problema.
4. Ao escolher um tipo de sombra, Maria possui 4 possibilidades.
5. Ao escolher a cor do esmalte, Maria possui 8 possibilidades.
6. Ao escolher o batom, Maria possui 5 possibilidades.
7. Assim, aplicando o Princípio da Multiplicação, obtemos:

$$4 \cdot 8 \cdot 5 = 160 \text{ possibilidades }.$$

8. Portanto, ao escolher sua maquiagem, Maria terá 160 opições distintas.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Uma sorveteria permite que o cliente escolha um sabor (chocolate, milho verde, creme, maracujá ou doce de leite), uma cobertura, (mel, morango ou baunilha) e um biju (cestinha ou casquinha). Quais as combinações de sorvetes possíveis?

Solução.

- Ao montar o sorvete o cliente escolhe o tipo de biju, “e” depois escolhe um sabor, “e” depois escolhe uma cobertura.
- O conectivo “e” nos diz que os eventos não são disjuntos.
- Se os eventos não são disjuntos, então podemos aplicar o Princípio da Multiplicação para resolver este problema.
- Ao escolher o tipo de biju, o cliente tem 2 possibilidades.
- Ao escolher um sabor, o cliente tem 5 possibilidades.
- Ao escolher a cobertura, o cliente tem 3 possibilidades.
- Assim, aplicando o Princípio da Multiplicação, obtemos:

$$2 \cdot 5 \cdot 3 = 30 \text{ possibilidades.}$$

- Portanto, ao chegar à soveteria o cliente poderá montar 30 tipos diferentes de sorvetes.

Princípio Aditivo

Pergunta. O que é o Princípio da Adição?

O **PRINCÍPIO DA ADIÇÃO** ou **PRINCÍPIO ADITIVO** é formulado matematicamente da seguinte forma:

Observação. Considere r_1 e r_2 resultados possíveis para os eventos A e B respectivamente. Então, existem $r_1 + r_2$ resultados possíveis para o evento A ou B (ou seja, existe uma sequência disjuntas de eventos)?

Pare e Pense. Como utilizamos o Princípio Aditivo para entender e resolver problemas cotidianos?

Suponha que queremos escolher uma peça de roupa entre oito camisetas e sete camisas pólo. De quantas maneiras diferentes esta escolha pode ser realizada?

Neste caso, temos dois processos: um consiste na escolha da camiseta e outro na escolha da camisa pólo. Porém não temos uma SEQUÊNCIA de dois processos neste problema, uma vez que usaremos apenas uma das peças de roupa, que será escolhida dentre as possibilidades de dois CONJUNTOS DISJUNTOS.

A solução deste problema é dada pela soma das possibilidades de escolha que os dois eventos nos fornecem, isto é:

$$8 + 7 = 15 \text{ possibilidades.}$$

Observação. O que não posso esquecer sobre o Princípio da Adição?

1. O Princípio da Adição nos diz que o número total de resultados possíveis para uma sequência de eventos disjuntos pode ser obtido somando-se o número de possibilidades de o primeiro evento ocorrer com número de possibilidades do segundo.

2. O conectivo “ou” mostra que os eventos SÃO disjuntos;

3. O Princípio da Adição é aplicado sempre que houver uma sequência de disjuntos;

Testando os conhecimentos

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Um esportista necessita escolher um par de tênis adequado para a sua próxima prova em uma loja de material esportivo. A loja possui quinze pares com borracha macia e vinte com borracha normal. Quantas escolhas possíveis este esportista possui?

Solução.

- Observe inicialmente que o esportista pode escolher um tênis com solado de borracha macia ou com borracha normal, visto que não é possível correr com ambos os tênis.
- O conectivo “ou” nos diz que os eventos são disjuntos.
- Se os eventos são disjuntos, então podemos aplicar o Princípio da Adição para resolver este problema.
- A escolha de um tênis com solado de borracha macia rende 15 possibilidades.
- A escolha de um tênis com solado de borracha normal rende 20 possibilidades.
- Assim, aplicando o Princípio da Adição, obtemos:

$$15 + 20 = 35 \text{ possibilidades} .$$

- Portanto, o esportista possui 35 possibilidades de escolha.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Em um clube de futebol existem quarenta diretores, noventa conselheiros e nenhum membro pode ser diretor e conselheiro ao mesmo tempo. Quantas escolhas diferentes podem ser feitas para a presidência do clube considerando que um diretor ou algum conselheiro seja escolhido para a presidêcia do clube?

Solução.

- Primeiramente, note que o presidente dever ser um diretor ou um conselheiro, uma vez que nenhum membro pode ser diretor e conselheiro ao mesmo tempo.
- O conectivo "ou" nos diz que os eventos são disjuntos.
- Se os eventos são disjuntos, então podemos aplicar o Princípio da Adição para resolver este problema.
- Se o presidente for um diretor, temos 40 possibilidades.
- Se o presidente for um conselheiro, temos 90 possibilidades.
- Assim, aplicando o Princípio da Adição, obtemos:

$$40 + 90 = 130 \text{ possibilidades} .$$

- Portanto, para a cadeira de presidente, temos 130 possibilidades de escolha.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Um atirador deve escolher uma arma para efetuar uma tarefa designada pelo seu batalhão. As armas a sua disposição são organizada a partir de três faixas organizadas através de seus calibres. Quais opções de escolha o atirador possui sabendo que as faixas 1, 2 e 3 possuem vinte e três, quinze e dezenove armas, respectivamente?

Solução.

- Como o atirador vai efetuar os disparos com um única arma, podemos concluir que ou o atirador utilizará uma arma da faixa 1, ou uma arma da faixa 2 ou uma arma da faixa 3.
- O conectivo "ou" nos diz que os eventos são disjuntos.
- Se os eventos são disjuntos, então podemos aplicar o Princípio da Adição para resolver este problema.
- Se o atirador escolher uma arma da faixa 1, temos 23 possibilidades.
- Se o atirador escolher uma arma da faixa 2, temos 15 possibilidades.
- Se o atirador escolher uma arma da faixa 3, temos 19 possibilidades.
- Assim, aplicando o Princípio da Adição, obtemos:

$$23 + 15 + 19 = 57 \text{ possibilidades} .$$

- Portanto, o atirador tem 57 opções de escolha para efetuar sua tarefa.

Teste seu conhecimento. Em uma empresa, existem vinte consultores financeiros e quatrocentos e trinta e cinco vendedores. Existem quantas formas de escolher um funcionário que seja consultor ou vendedor?

Solução.

- O conectivo "ou" nos diz que os eventos são disjuntos.
- Se os eventos são disjuntos, então podemos aplicar o Princípio da Adição para resolver este problema.
- Se escolhermos um consultor, temos 20 possibilidades.
- Se escolhermos um vendedor, temos 435 possibilidades.
- Assim, aplicando o Princípio da Adição, obtemos:

$$20 + 435 = 455 \text{ possibilidades} .$$

- Portanto, para a escolha do funcinário, temos 455 possibilidades de escolha.

Uso Simultâneo dos Princípios

Observação. Posso utilizar os Princípios da Multiplicação e Adição simultaneamente para entender e resolver problemas?

Muitas situações envolvendo formas de contagem não podem ser solucionados aplicando separadamente o Princípio da Multiplicação ou o Princípio da Adição. Assim sendo, problemas mais elaborados de contagem são solucionados combinando ambos os princípios.

Testando os conhecimentos

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Uma costureira deve decidir entre três linhas, uma verde, uma laranja e uma azul, e entre três tipos de botões, um pequeno, um médio e um grande. Quantas formas diferentes de escolha a costureira pode ter?

Solução.

- Note que escolher uma linha verde e depois optar por um botão pequeno não é o mesmo que primeiramente escolher um botão pequeno e depois optar por uma linha verde. São escolhas diferentes.

- Podemos separar nossa análise em dois eventos:

EV1: Primeiro escolhemos as linhas e depois os botões

"ou"

EV2: Primeiro escolhemos os botões depois as linhas.

- O conectivo "ou" nos diz que os eventos são disjuntos.

- Assim, para resolvermos o problema, temos que determinar o número de vezes que o EV1 ocorre e depois somar com o número de ocorrências do EV2.

- Para determinar o número de vezes que EV1 ocorre, podemos aplicar o Princípio da Multiplicação, pois temos uma sequência de eventos não disjunta.

$$3 \times 2 = 6 \text{ possibilidades.}$$

- Para determinar o número de vezes que EV2 ocorre, podemos novamente aplicar o Princípio da Multiplicação, uma vez que novamente temos uma sequência de eventos não disjunta.

$$2 \times 3 = 6 \text{ possibilidades .}$$

- Agora para finalizar, aplicando o Princípio da Adição, temos

$$6 + 6 = 12 \text{ possibilidades.}$$

- Portanto, a costureira tem 12 formas diferentes de escolher as linhas e botões.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Em uma determinada cidade, as placas dos veículos possuem seis dígitos. Determine o número de placas que começam com o dígito um ou zero.

Solução.

- Podemos dividir nossa análise em duas situações:

$$\begin{aligned} \text{Sit1} &: \text{ placas que começam com o dígito } 1; \\ \text{Sit2} &: \text{ placas que começam com o dígito } 0; \end{aligned}$$

- Como não existem placas que começam com os dígitos 0 e 1 simultaneamente, podemos considerar Sit1 e Sit2 como eventos disjuntos, ou seja, podemos aplicar o Princípio da Adição.
- Antes de aplicarmos o Princípio da Adição, é necessário determinarmos a quantidade de placas que iniciam com o dígito 0 e a quantidade de placas que iniciam com o dígito 1.
- Para determinarmos os números das placas, escolhemos o primeiro dígito, “e” na sequência o segundo, “e” prosseguimos até preenchermos todos os elementos.
- O conectivo “e” nos diz que os eventos não são disjuntos.
- Assim, para determinarmos o número de possibilidades para Sit1 e Sit2, podemos aplicar o Princípio da Multiplicação.
- Vamos determinar o número de placas que começam com 0. Como cada placa tem seis dígitos, para o primeiro dígito, temos 1 possibilidade, “e”, para os demais cinco dígitos, temos 10 possibilidades.

$$1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100.000 \text{ possibilidades}.$$

- Para a placa que começa com o dígito 1, repetimos o mesmo processo.

$$1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100.000 \text{ possibilidades}.$$

- Portanto, nesta cidade existem 200.000 placas.

Teste seu conhecimento. Um pescador possui sete tipos de linha, cinco tipos de anzóis e nove tipos de rede. De quantas formas diferentes o pescador pode pescar sabendo que não é permitido pescar com vara e rede simultaneamente.

Solução.

- Podemos separar nossa análise em dois eventos disjuntos:

  Ev1: Pescar com vara.

  Ev2: Pescar com rede.

- Para pescar com vara o pescador ,tem pelo Princípio da Multiplicação

$$7 \cdot 5 = 35 \text{ possibilidades}.$$

- Para pescar com rede o pescador tem

$$9 \text{ possibilidades}.$$

- Portanto, pelo Princípio da Adição, temos que o pescador possui:

$$35 + 9 = 44$$

  formas diferentes para realizar sua pescaria.

Teste seu conhecimento. Quantos números inteiros de três dígitos são ímpares?

Solução.

- Note que todo número ímpar, termina com os dígitos: 1, 3, 5, 7, 9.

- Precisamos contar os números ímpares de três dígitos que terminam "ou" com 1, "ou" com 3, "ou" com 5, "ou" com 7, "ou" com 9.

- Consideramos, então:

Ev1: quantidade de números ímpares de três dígitos terminados em 1;

Ev2: quantidade de números ímpares de três dígitos terminados em 3;

Ev3: quantidade de números ímpares de três dígitos terminados em 5;

Ev4: quantidade de números impares de três dígitos terminados em 7;

Ev5: quantidade de números ímpares de três dígitos terminados em 9;

- O conectivo "ou" nos diz que os eventos Ev1 até Ev5 são disjuntos.

- Se os eventos são disjuntos, podemos aplicar o Princípio da Adição.

- Antes de aplicarmos o Princípio da Adição, vamos utilizar o Princípio da Multiplicação para determinar a quantidade de elementos nos eventos de 1 a 5 descritos acima, visto que tais acontecimentos não são disjuntos.

- Para o Ev1, temos 1 possibilidade para o dígito 1 (deve estar presente) e 10 possibilidades para os demais dígitos, ou seja,
$$1 \cdot 10 \cdot 10 = 100.$$

- Para o Ev2, temos 1 possibilidade para o dígito 3 (deve estar presente) e 10 possibilidades para os demais dígitos, ou seja,
$$1 \cdot 10 \cdot 10 = 100.$$

- Para o Ev3, temos 1 possibilidade para o dígito 5 (deve estar presente) e 10 possibilidades para os demais dígitos, ou seja,
$$1 \cdot 10 \cdot 10 = 100.$$

- Para o Ev4, temos 1 possibilidade para o dígito 7 (deve estar presente) e 10 possibilidades para os demais dígitos, ou seja,
$$1 \cdot 10 \cdot 10 = 100.$$

- Para o Ev5, temos 1 possibilidade para o dígito 9 (deve estar presente) e 10 possibilidades para os demais dígitos, ou seja,
$$1 \cdot 10 \cdot 10 = 100.$$

- Aplicando agora o Princípio da Adição, segue que:

$$100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 500 \text{ possibilidades}$$

representam a quantidade de números ímpares de trés dígitos.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Todo número escrito no sitema de numeração de base quatro é representado pela combinação dos algarismos: 0,1,2 e 3. Determine todos os números na base quatro cujos três últimos dígitos têm que incluir pelo menos um dígito repetido.

Solução.

- Vamos resolver esta questão considerando dois eventos disjuntos:

Ev1: Números na base quatro onde a repetição é permitida

Ev2: Números na base quatro onde a repetição não é permitida.

- Note que a união de todos os números onde há repetição com os sem repetição resulta em todos os números de três dígitos;

- A quantidade de números na base quatro com três dígitos é dada pelo Princípio da Multiplicação por:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \text{ possibilidades}.$$

- A quantidade de números na base quatro com três dígitos onde não é permitida a repetição de dígitos é dado pelo Princípio da Multiplicação por:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ possibilidades}.$$

- A quantidade de números na base quatro cujo os três últimos dígitos tem que incluir pelo menos um dígito repetido é dado pelo Princípio da Adição é dado por:

$$64 - 24 = 40 \text{ possibilidades}.$$

Arranjos Simples

Pergunta. O que é um arranjo de um conjunto de objetos?

Um ARRANJO é definido como sendo as várias formas de ordenação que se pode formar em um certo número de quantidades (a ordem em que os objetos são alocados importa).

Vamos estudar esta definição através de um exemplo. Considere N o conjunto formado pelos números 1, 2, 3 e 4, isto é,

$$N = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Observe a seguinte pergunta:

Pergunta. Quantos números de dois dígitos podem ser formados a partir do conjunto N?

Afim de formarmos números de dois dígitos, a ordem em que organizamos os números que formam o conjunto N é importante, visto que o número "12" é diferente do número "21". Além disso, é importante ressaltar que dos quatro possíveis dígitos que formam o conjunto N, estamos ordenando apenas dois.

Pare e Pense. Como ordenar n objetos em r conjuntos, onde a ordem é relevante?

Considere inicialmente n objetos distintos. Denotamos por $A(n, r)$ o número de arranjos simples de r objetos distintos escolhidos entre os n objetos iniciais.

No exemplo anterior, temos $n = 4$ (número de elementes do conjunto N) e $r = 2$ (devemos formar números de dois dígitos). Dessa forma, obtemos:

$$A(4, 2) = 12,$$

onde os possíveis números são:

$$\{12, 13, 14, 23, 24, 34, 21, 31, 41, 32, 42, 43\}.$$

Pare e Pense. Podemos expressar $A(n, r)$ através de uma fórmula?

Recordemos inicialmente que o fatorial de um número natural n é definido por:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Note que, se $n = 6$, obtemos:

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Se $n = 0$, então convencionamos que:

$$0! = 1.$$

Dessa forma, temos que:

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot [\underbrace{(n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}_{(n-1)!}] \\ &= n \cdot (n-1)!. \end{aligned}$$

Observe que:

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 6 \cdot 5!.$$

De um modo geral, sendo n e r números inteiros tais que $0 \leq r \leq n$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
n! &= n\cdot(n-1)\cdots\underbrace{(n-[r-1])}_{(n-r+1)}\cdot(n-r)! \\
&= n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1)\cdot(n-r)!.
\end{aligned}
$$

Assim, segue que:

$$
\begin{aligned}
\frac{n!}{(n-r)!} &= \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-[r-1])\cdot\cancel{(n-r)!}}{\cancel{(n-r)!}} \\
&= n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1).
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar, agora que:

$$A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Na verdade, mostraremos que:

$$A(n,r) = n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1)$$

e como

$$\frac{n!}{(n-r)!} = n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1),$$

concluímos a afirmação.

De fato, como temos n elementos à escolher e recordando que em um arranjo a ordem é importantes, temos:

1° Elemento do Arranjo	:	n possibilidades
2° Elemento do Arranjo	:	$n-1$ possibilidades (sobraram $n-1$ elementos)
3° Elemento do Arranjo	:	$n-2$ possibilidades
$\vdots$		$\vdots$
$r-$éssimo Elemento	:	$n-(r-1) = n+r-1$ possibilidades

Agora, aplicando o princípio da multiplicação, obtemos:

$$A(n,r) = n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1)$$

o que mostra a afirmação.

Observação. $A(n,r)$ representa o número de arranjos simples de r objetos distintos escolhidos entre os n objetos iniciais, isto é,

$$A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Permutações Simples

Observe a seguinte pergunta:

Pergunta. Quantos números de três dígitos podem ser formados a partir do conjunto $C = \{1, 2, 3\}$?

Denotamos por $P(3)$ o número de permutações simples de n objetos distintos. Assim como no exemplo anterior, temos $n = 3$ (número de elementes do conjunto C). Neste caso, estamos utilizando todos os elementos do conjunto C. Dessa forma, obtemos:

$$P(3) = 6,$$

onde os possíveis números são:

$$\{123, 132, 213, 231, 312, 321\}.$$

Pare e Pense. Podemos expressar $P(n)$ através de uma fórmula?

Considere inicialmente n objetos distintos. Denotamos por $A(n,r)$ o número de arranjos simples de r objetos distintos escolhidos entre os n objetos iniciais. Quando consideramos $n = r$, estamos permutando todos os n-elementos que compõem um arranjo ordenado, isto é,

$$\begin{aligned} P(n) = A(n,n) &= \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1. \end{aligned}$$

Observação. $P(n)$ representa o número de permutações simples de n objetos distintos, isto é,

$$P(n) = n!$$

Testando os conhecimentos

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Sabendo que, em uma corrida de fórmula 1, participam vinte e um carros, e que o podium é formado pelos três primeiros competidores, de quantas maneiras diferente o podium pode ser montado?

Solução.

- Observamos primeiramente que a ordem de chegada dos competidores importa, ou seja, trata-se de um arranjo simples;
- Dentre os 21 pilotos, devemos ordenar apenas três, pelo fato de o podium ser composto por três posições;
- Se a ordem importa, então esse problema pode ser resolvido aplicando a fórmula do arranjo simples $A(n, r)$;
- Neste problema temos:

$$\begin{aligned} n = 21 \quad &\rightarrow \quad \text{número total de pilotos} \\ r = 3 \quad &\rightarrow \quad \text{tamanho da permutação (podium 3 pilotos)} \end{aligned}$$

- Como $A(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, obtemos

$$\begin{aligned} A(21, 3) &= \frac{21!}{(21-3)!} = \frac{21!}{18!} \\ &= \frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot \cancel{18!}}{\cancel{18!}} = 21 \cdot 20 \cdot 19 \\ &= 7.980. \end{aligned}$$

- Portanto, temos 7.980 possibilidades.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Uma determinada agência bancária atende dez clientes por dia através de cinco caixas. Sabendo que o primeiro cliente é atendido no caixa 1, o segundo no caixa 2, o terceiro no caixa 3, o quarto no caixa 4 e o quinto no caixa 5, quantas maneiras diferentes há para distribuir os clientes nos caixas?

- A ordem de chegada dos clientes é relevante para a distribuição dos caixas;
- Dentre os 10 clientes, devemos ordenar apenas cinco, pelo fato de a agência possuir cinco caixas para atendimento;
- Se a ordem importa, então esse problema pode ser resolvido aplicando a fórmula do arranjo simples $A(n, r)$;
- Neste problema temos:

$$\begin{array}{lcl} n = 10 & \rightarrow & \text{número total de clientes} \\ r = 5 & \rightarrow & \text{tamanho da permutação (5 caixas)} \end{array}$$

- Como $A(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, obtemos

$$\begin{aligned} A(10,5) &= \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} \\ &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \\ &= 30.240. \end{aligned}$$

- Portanto, temos 30.240 possibilidades.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. O doutor Santos é um médico muito atencioso com os seus pacientes. Neste momento o doutor possui nove pacientes internados sob os seus cuidados. Durante o período de sua visita, um determinado paciente deve ser atendido antes dos demais. De quantas formas possíveis o doutor Santos realiza sua visita?

Solução.

- A primeira visita já esta prédefinida.
- Restam 8 possibilidades de visita para o Doutor. Tais visitas podem ser ordenadas arbitrariamente.
- Se a ordem importa, então esse problema pode ser resolvido aplicando a fórmula do arranjo simples $A(n, r)$;
- Neste problema temos:

$$\begin{array}{lcl} n = 8 & \rightarrow & \text{número visitas que restam} \\ r = 8 & \rightarrow & \text{devemos ordenar todas as visitas que restam} \end{array}$$

- Como $A(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, obtemos

$$\begin{aligned} A(8,8) &= \frac{8!}{(8-8)!} = \frac{8!}{0!} = \frac{8!}{1} \\ &= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 40.320. \end{aligned}$$

- Portanto, temos 40.320 possibilidades.

ATB Atividades Texto Básico

Teste seu conhecimento. Considere a palavra FÉRIAS. Quantas permutações das letras da palavra FÉRIAS contém a palavra RIA?

Solução.

- Como a palavra RIA deve sempre estar presente, vamos considerá-la como um bloco único.
- O conjunto de letras que devemos permutar é:

$$C = \{\underbrace{\text{RIA}}_{bloco}, F, E, S\}$$

- Se a ordem importa, então esse problema pode ser resolvido aplicando a fórmula do arranjo simples $A(n, r)$;
- Neste problema temos:

$$\begin{aligned} n = 4 &\quad \rightarrow \quad \text{número letras a permutar} \\ r = 4 &\quad \rightarrow \quad \text{devemos permutar todas as letras} \end{aligned}$$

- Como $A(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, obtemos

$$\begin{aligned} A(4,4) &= \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = \frac{4!}{1} \\ &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 24. \end{aligned}$$

- Portanto, temos 24 permutações.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Para uma partida de futebol é necessário ter um árbitro principal, o bandeirinha um, o bandeirinha dois e um árbitro reserva. Se atualmente o quadro de arbitragem possui 20 profissionais, de quantas maneiras podemos selecionar o quadro de arbitragem de uma partida de futebol?

Solução.

- A ordem de escolha dos árbitros e dos bandeirinhas é relevante;
- Dentre os 20 profissionais, devemos ordenar apenas 4, pelo fato de o quadro de arbitragem ser composto por apenas 4 profissionais.
- Se a ordem importa, então esse problema pode ser resolvido aplicando a fórmula do arranjo simples $A(n, r)$;
- Neste problema temos:

$$\begin{aligned} n = 20 &\quad \rightarrow \quad \text{número total de profissionais} \\ r = 4 &\quad \rightarrow \quad \text{tamanho da permutação (2 árbitros e 2 bandeiras)} \end{aligned}$$

- Como $A(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, obtemos

$$\begin{aligned} A(20,4) &= \frac{20!}{(20-4)!} = \frac{20!}{16!} \\ &= \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot \cancel{16!}}{\cancel{16!}} = 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17 \\ &= 116.280. \end{aligned}$$

- Portanto, podemos escolher o quadro de arbitragem de 116.280 maneiras.

Observação. O que não posso esquecer sobre arranjos e permutações simples?

1. Quando estamos arranjos simples ordenamos n elementos distintos em r conjuntos.
2. Uma permutação simples estuda o número de modos de se ordenar n objetos distintos.
3. O método geral para se calcular um arranjo simples é dado pela expressão:

$$A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

4. O método geral para se calcular uma permutação simples é dado pela expressão:

$$P(n) = n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.$$

Combinações Simples

Vejamos como esse conceito se aplica. Considere o conjunto $C = \{9, 8, K, W\}$ formado por letras e números. Quantos subconjuntos formados por três elementos podemos extrair do conjunto C?

Note que $\{9, 8, K\}$ faz parte dos subconjuntos que estamos procurando. Além disso, observe que $\{9, 8, K\}$, $\{9, K, 8\}$ e $\{K, 9, 8\}$ representam o mesmo subconjunto, ou seja, a ordem em que os elementos aparecem dentro dos subconjuntos não importa.

Pare e Pense. Como devo chamar as permutações onde a ordem dos objetos não importa?

Seja n a quantidade de elementos de um determinado conjunto C e considere $0 \leq r \leq n$. Uma r-combinação de elementos de C é uma seleção não ordenada de r-elementos de C.

Pergunta. Como representamos uma combinação simples?

Usualmente, denotamos uma combinação de r-elementos por $C(n, r)$. Na prática, utilizamos $C(n, r)$ para escolher r objetos de um conjunto com n-elementos, sem nos importar com a ordem desses objetos.

No exemplo citado inicialmente, vamos calcular $C(4, 3)$. Consideramos inicialmente, os subconjuntos que possuem o 9 e 8. Assim, temos as possibilidades:

$$\{9, 8, W\} \text{ e } \{9, 8, K\}.$$

Consideraremos agora, os subconjuntos que possuem as letras W e K. Logo, temos as possibilidades:

$$\{W, K, 9\} \text{ e } \{K, W, 8\}.$$

Observe que o subconjunto $\{W, 8, 9\}$ já foi contado anteriormente, visto que a ordem dos elementos do subconjunto é irrelevante.

Dessa forma, podemos concluir que existem quatro subconjuntos:

$$\{9, 8, W\},\ \{9, 8, K\},\ \{W, K, 9\} \text{ e } \{K, W, 8\}.$$

Portanto, $C(4, 3) = 4$.

Pare e Pense. Podemos expressar $C(n, r)$ através de uma fórmula?

Antes de obtermos uma fórmula geral para calcular combinações, estudaremos um pouco mais o exemplo anterior. Neste exemplo, temos um conjunto com quatro elementos e desejamos escolher 3 objetos, sem nos importar com a ordem.

Vimos que, $C(4, 3) = 4$, ou seja, existem 4 combinações possíveis. Agora, dentro de cada combinação, quantas permutações existem?

Considere a combinação $\{9, 8, W\}$. Note que,

$$\underbrace{\{9, 8, W\}}_{\text{combinação}} \Rightarrow \begin{cases} \{9, 8, W\} \\ \{9, W, 8\} \\ \{8, 9, W\} \\ \{8, W, 9\} \\ \{W, 9, 8\} \\ \underbrace{\{W, 8, 9\}}_{\text{permutações}} \end{cases}$$

o que mostra que, para cada combinação, existem $6 = 3!$ possibilidades de permutação dos elementos.

Dessa forma,

$$C(4, 3) \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24.$$

Agora, vamos calcular $P(4, 3)$, isto é,

$$P(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Logo,

$$P(4, 3) = C(4, 3) \cdot 3!.$$

Portanto, acabamos de concluir que o número de permutações de 3 objetos distintos escolhidos entre os 4 objetos possíveis é o produto do número de escolhas possíveis dos objetos $C(4, 3)$, pelo número de maneiras de ordenar os objetos escolhidos, $3!$.

Neste momento, estamos preparados para entender o caso geral. Seja $C = \{c_1, \cdots, c_n\}$ um conjunto com n-elementos e considere $0 \leq r \leq n$. O nosso objetivo é selecionar r-elementos do conjunto C não levando em consideração a ordem.

Repetindo o mesmo raciocínio aplicado ao exemplo temos:

$$P(n,r) = C(n,r) \cdot r!,$$

o que mostra que

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!}.$$

Como já sabemos que $P(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, obtemos

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Aplicando a fórmula para calcular $C(4,3)$ temos:

$$C(4,3) = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 1!} = 4,$$

visto que $1! = 1$.

Observação. O que não posso esquecer sobre combinações simples?

1. Combinações simples são utilizadas para determinarmos de quantos modos podemos escolher r objetos distintos entre n objetos distintos possíveis.

2. O método geral para se obter as combinações simples é dado pela expressão:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}.$$

Testando os conhecimentos

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Sabemos que um jogo de dominó possui vinte e oito peças. Quantas formas existem de selecionar oito peças a partir de um jogo de dominó completo?

Solução.

- A ordem com que as peças são retiradas do jogo de dominó não importa.
- Se a ordem não importa, trata-se de um problema que podemos resolver através da fórmula das combinações simples $C(n,r)$.
- Neste problema, temos:

$n = 28 \quad \rightarrow \quad$ número total de pedras do jogo de dominó

$r = 8 \quad \rightarrow \quad$ tamanho da combinação (8 pedras)

- Como $C(n,r) = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
C(28,8) &= \frac{28!}{8!(28-8)!} = \frac{28!}{8!\cdot 20!} \\
&= \frac{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot \cancel{20!}}{8!\cdot \cancel{20!}} \\
&= \frac{\overbrace{\cancel{28}}^{7}\cdot\overbrace{\cancel{27}}^{9}\cdot\overbrace{\cancel{26}}^{13}\cdot\overbrace{\cancel{25}}^{5}\cdot\overbrace{\cancel{24}}^{3}\cdot 23\cdot\overbrace{\cancel{22}}^{11}\cdot\overbrace{\cancel{21}}^{3}}{\cancel{8}\cdot\cancel{7}\cdot\underbrace{\cancel{6}}_{3}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} \\
&= \frac{23\cdot 13\cdot 11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}} = 23\cdot 13\cdot 11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3 = 3.108.105.
\end{aligned}
$$

- Portanto, temos 3.108.105 possibilidades de escolha.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. O Futsal é um esporte que aumentou muito sua popularidade, tendo o Falcão como seu maior ídolo. Em geral uma equipe de Futsal é formada por quinze atletas. Sabendo que a equipe que inicia o jogo é composta por cinco atletas, existem quantas maneiras para o treinador definir sua equipe?

Solução.

- A ordem com que os atletas são escolhidos para a partida não importa.
- Se a ordem não importa, trata-se de um problema que podemos resolver através da fórmula das combinações $C(n, r)$.
- Neste problema temos:

$$\begin{array}{lcl} n = 15 & \rightarrow & \text{número total de atletas da equipe} \\ r = 5 & \rightarrow & \text{tamanho da combinação (5 atletas)} \end{array}$$

- Como $C(n, r) = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, obtemos

$$\begin{aligned} C(15, 5) &= \frac{15!}{5!(15-5)!} = \frac{15!}{5! \cdot 10!} \\ &= \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{5! \cdot \cancel{10!}} \\ &= \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{360360}{120} = 3003. \end{aligned}$$

- Portanto, temos 3003 possibilidades de escolha.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Um grupo de quarenta e cinco cães está sendo treinado para farejar drogas nos aeroportos. Sabendo que cada aéroporto comporta três cães, de quantas formas podemos escolher três cães para realizar esta operação?

Solução.

- A ordem em que os cães são escolhidos não é relevante, pois todos têm a mesma função (farejar drogas).

- Se a ordem não importa, trata-se de um problema que podemos resolver através da fórmula das combinações $C(n, r)$.

- Neste problema temos:

$$\begin{array}{lcl} n = 45 & \rightarrow & \text{número total de cães} \\ r = 3 & \rightarrow & \text{tamanho da combinação (3 cães)} \end{array}$$

- Como $C(n, r) = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, obtemos

$$\begin{aligned} C(45, 3) &= \frac{45!}{3!(45-3)!} = \frac{45!}{3! \cdot 42!} \\ &= \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot \cancel{42!}}{3! \cdot \cancel{42!}} \\ &= \frac{45 \cdot 44 \cdot 43}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{85140}{6} \\ &= 14190. \end{aligned}$$

- Portanto, temos 14190 possibilidades de escolha.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Devido ao crescente aumento da violência, será necessário montar um equipe composta por policiais civis e militares para garantir a segurança na cidade. Contando com oito policiais civis e doze militares de quantas formas podemos montar equipes com seis policiais civis e 3 militares?

Solução.

- Temos 8 policiais civis e apenas 6 vagas na equipe para tais policiais.

- Como a ordem de escolha dos policiais não é importante, temos $C(8, 6)$ opções de escolha.

- Assim,
$$C(8,6) = \frac{8!}{6! \cdot (8-6)!} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 2} = \frac{56}{2} = 28.$$

- Logo, temos 28 opções de escolha para os policiais civis.

- Temos 12 policiais militares e apenas 3 vagas na equipe para tais policiais.

- Como a ordem de escolha dos policiais não é importante, temos $C(12,3)$ opções de escolha.

- Assim,
$$C(12,3) = \frac{12!}{3! \cdot (12-3)!} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \cancel{9!}}{\cancel{9!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1320}{6} = 220.$$

- Logo, temos 220 opções de escolha para os policiais militares.

- Como para a formação da equipe temos que escolher os policiais civis e militares sequencialmente, pelo princípio do produto, temos:
$$C(8,6) \cdot C(12,3) = 28 \cdot 220 = 6160$$
possibilidades para montar a equipe.

Exercícios Propostos

1. Uma nova companhia com apenas dois empregados, Sanches e Patel, aluga um andar de um prédio com 12 salas. Quantas formas diferentes há para designar as diferentes salas para esses dois empregados? R: 132.

2. As cadeiras de um auditório devem ser etiquetadas com uma letra e um número inteiro positivo que não exceda 100. Qual é o número de cadeiras que podem ser etiquetadas de maneira diferente?R: 2600.

3. Há 32 computadores em um centro computacional. Cada computador tem 24 portas. Quantas portas diferentes para um computador existem no centro?R: 768.

4. Sabendo que cada bit equivale a 0 ou 1, quantas sequências de bits com comprimento sete existem?R: 128.

5. Quantas placas de identificação estão disponíveis, se cada placa contém uma sequência de três letras seguidas de três números e não são proibidas quaisquer sequências de letras, mesmo se elas forem obscenas?R: 17.576.000.

6. Quantas funções existem partindo-se de um conjunto com 5 elementos para um cojunto com 7 elementos?R: 7^5.

7. Quantas funções injetoras existem partindo-se de um conjunto com 5 elementos para um conjunto com 7 elementos?R:5040 .

8. Suponha que um membro da faculdade de matemática ou um estudante que tenha mestrado em matemática seja escolhido como representante para um comitê da Universidade. Quantas escolhas diferentes podem ser feitas para esse representante se houver 37 membros da faculdade da matemática e 83 mestres em matemática e nenhum for ao mesmo tempo um membro da faculdade e um mestre?R: 120.

9. Um estudante pode escolher um projeto de computação a partir de três listas. As três listas contêm 23, 15 e 19 projetos possíveis, respectivamente. Nenhum projeto está em mais de uma lista. Quantos projetos possíveis existem para serem escolhidos?R: 57.

10. Cada usuário em um sistema computacional tem uma senha, com seis a oito caracteres, em que cada caracter é uma letra maiúscula ou um digíto numérico. Cada senha contém pelo menos um dígito numérico. Quantas senhas são possíveis?R: 2.684.483.063.360 .

11. De quantas maneiras podemos escolher três alunos, de um grupo de cinco estudantes, para ficarem em fila para uma foto? De quantas maneiras podemos organizar todos os cinco estudantes em fila para uma foto?R: 60.

12. Quantas maneiras há para selecionar o vencedor do primeiro e do segundo lugar a partir de 100 pessoas diferentes que participam de um concurso?R: 970.200.

13. Suponha que haja oito atletas em uma corrida. O vencedor recebe madalha de ouro, o segundo lugar, medalha de prata, e o terceiro, medalha de bronze. Quantas maneiras diferentes há para ganhar essas medalhas, se todos os resultados possíveis da corrida podem ocorrer e não há nenhum empate?R: 336.

14. Suponha que uma vendedora tenha de visitar oito cidades diferentes. Ela deve começar sua viagem por uma determinada cidade, mas depois pode visitar as outras sete na ordem em que ela quiser. Quantas ordens são possíveis para a vendedora visitar as cidades?R: 5040.

15. Quantas permutações das letras ABCDEFGH contêm a sequência ABC?R: 720.

16. Quantos comitês diferentes de três estudantes podem ser formados a partir de um grupo de quatro estudantes?R: 4.

17. Quantas mãos de pôquer de cinco cartas podem ser retiradas a partir de um baralho de 52 cartas? Quantas formas de selecionar 7 cartas a partir de um baralho de 52 cartas são possíveis?R: 2.598.960.

18. Quantas maneiras há para selecionar cinco jogadoras de um time de basquete com 10 membros para disputar uma partida em outra escola?R: 252.

19. Um grupo de 30 pessoas foi treinado a fim de serem formados astronautas para ir a uma primeira missão a Marte. Considerando que todos os membros da tripulação têm a mesma função, quantas maneiras de selecionar uma tripulação de seis pessoas para embarcarem nessa missão são possíveis?R: 593.775.

20. Quantas cadeias de bits de extensão 5 contêm exatamente três digítos um?R: C(5,3).

21. Suponha que haja 9 membros da faculdade no departamento de matemática e 11 no departamento de ciência da computação. Quantas maneiras de selecionar um comitê para desenvolver um curso de matemática discreta na escola são possíveis, se o comitê é formado por três membros do departamento de matemática e quatro do departamento de ciência da computação?R: 27.720.

22. Para fazer uma viagem Rio-S.Paulo-Rio, posso usar como transporte o trem, o ônibus ou o avião. De quantos modos posso escolher os transportes se não desejo usar na volta o mesmo meio de transporte?R: 6.

23. Uma bandeira é formada por quatro listras, que devem ser coloridas usando-se apenas as cores amarelo, branco e cinza, não devendo listras adjascentes ter a mesma cor. De quantos modos pode ser colorida a bandeira?R: 24.

24. Quantos números naturais de três algarismos distintos, na base 10, existem?R: 648.

25. Quantos números naturais de 4 algarismos, na base 10, que sejam menores que 5000 e divisíveis por 5, podem ser formados usando-se apenas os algarismos 2, 3, 4 e 5?R: 48.

26. As placas dos automóveis são formados por duas letras, (K, Y e W inclusive) seguidas por quatro algarismos. Quantas placas podem ser formadas?R: 6.760.000.

27. Quantos são os números naturais pares que se escrevem (na base 10) com três algarismos distintos?R: 328.

28. Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO?R: 5040.

29. Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO que começam e terminam por consoante?R: 1440.

30. De quantos modos 5 rapazes e 5 moças podem se sentar em 5 bancos de dois lugares cada, de modo que em cada banco fiquem um rapaz e uma moça?R: 460.860.

31. De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em dois grupos de 4 pessoas cada?R: 35.

32. Quantas saladas contendo exatamente 4 frutas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes?R: 210.

33. Marcam-se 5 pontos sobre uma reta A e 8 pontos sobre uma B paralela a A. Quantos triângulos existem com vértices em 3 desses 13 pontos?R: 220.

34. De quantos modos podemos escolher 6 pessoas, incluindo pelo menos duas mulheres, em um grupo de 7 homens e 4 mulheres?R:371 .

Módulo 2
Contando de outra forma

Permutações com Repetição

Pergunta. Podemos realizar permutações de objetos nem todos distintos?

Claramente, podemos permutar um conjunto finito de objetos distintos ou não. Quando permutamos objetos que não são distintos estamos realizando uma PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO.

Pare e Pense. Existe um método prático para se determinar permutações com repetição?

Através da fórmula que já conhecemos para se determinar o número de permutações com n objetos distintos, podemos deduzir um método para determinar as permutações com repetição. Observe o exemplo. Considere a palavra SIM. Quantos anagramas (combinações de letras) podemos obter através da palavra SIM? Os anagramas são: SIM, SMI, ISM, IMS, MSI e MIS, ou seja, seis anagramas. Vamos repetir a mesma ánalise para a palavra ABA. Note que temos, ABA, AAB e BAA anagramas somente.

Pare e Pense. Qual a relação entre a permutação simples e a permutação com repetição?

Note que, como a palavra ABA possui dois As e um B, ao formar os anagramas teremos que organizar os dois As e um B em três posições. Para encaixar os As temos que combinar três posições e duas letras, ou seja, devemos calcular $C(3,2)$. Para o próximo passo temos apenas uma posição para colocar o B pois os dois A's já foram posicionados. Pelo princípio da multiplicação temos como resultado final:

$$C(3,2)\cdot 1 = \frac{3!}{2!\cdot(3-2)!} = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{3\cdot \cancel{2!}}{1!\cdot \cancel{2!}} = \frac{3}{1} = 3.$$

Este número é obtido calculando os anagramas como se os objetos fossem todos distintos e depois dividindo pelo número de objetos repetidos, isto é,

$$\frac{P(3,3)\ \text{(total de permutações de elementos distintos)}}{2\ \text{(quantidade de elementos repetidos)}} = \frac{3!}{2!}.$$

Representamos esta permutação com repetição por:

$$PR(3,2) = \frac{3!}{2!}.$$

Pergunta. Existe um fórmula para o caso geral?

Começamos com uma palavra com n letras. Considere que esta palavra tenha letras que se repetem r_1, r_2, $\cdots$, r_k vezes respectivamente. Dessa forma, devemos ter que:

$$n = r_1 + r_2 + \cdots + r_k.$$

Assim, repetindo o mesmo argumento do exemplo anterior temos:

$$\begin{aligned}
PR(n, r_1 + r_2 + \cdots + r_k) &= C(n, r_1) \cdot C(n - r_1, r_2) \cdot C(n - r_1 - r_2, r_3) \cdots C(n - r_1 - r_2 - \cdots - r_{k-1}, r_k) \\
&= \frac{n!}{r_1! \cdot \cancel{(n - r_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n - r_1)!}}{r_2! \cdot (n - r_1 - r_2)!} \cdot \cdots \cdot \frac{\cancel{(n - r_1 - r_2 - \cdots - r_{k-1})!}}{r_k! \cdot \underbrace{(n - r_1 - r_2 - \cdots - r_{k-1} - r_k)!}_{=0}} \\
&= \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdots r_k!},
\end{aligned}$$

ou seja, permutamos todas as letras e depois descontamos a quantidade de letras que se repetem.

Testando os conhecimentos

Atividades

Texto Básico

Teste seu conhecimento. Quantos são os anagramas da palavra PARALELEPÍPEDO?

Solução.

- Para formar os anagramas temos:

$$\begin{array}{lcl} P, P, P & \rightarrow & \text{letras repetidas} \\ A, A & \rightarrow & \text{letras repetidas} \\ R & & \\ L, L & \rightarrow & \text{letras repetidas} \\ E, E, E & \rightarrow & \text{letras repetidas} \\ D & & \\ O & & \\ I. & & \end{array}$$

- Observe primeiramente que, quando estamos formando os anagramas, se a ordem das letras importa e temos repetições, então trata-se de uma permutação com repetição;
- Assim, esse problema pode ser resolvido aplicando $PR(n, r_1, \cdots, r_k)$;
- Neste problema temos:

$$\begin{array}{lcl} n = 14 & \rightarrow & \text{número total de letras} \\ r_1 = 3 & \rightarrow & \text{três letras P} \\ r_2 = 2 & \rightarrow & \text{duas letras A} \\ r_3 = 2 & \rightarrow & \text{duas letras L} \\ r_4 = 3 & \rightarrow & \text{três letras E} \end{array}$$

- Como $PR(n, r_1, r_2, r_3, r_4) = \dfrac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \cdot r_4!}$, obtemos

$$PR(14, 3, 2, 2, 3) = \frac{14!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3!}.$$

- Portanto, temos $\dfrac{14!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3!}$ anagramas.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. De quantas formas nove sinais $(+)$ e seis sinais $(-)$ podem ser colocados em uma sequência?

Solução.

- Para formar as sequências temos:

$$\begin{array}{lcl} +,+,+,+,+,+,+,+,+ & \rightarrow & \text{símbolos repetidos} \\ -,-,-,-,-,- & \rightarrow & \text{símbolos repetidos} \end{array}$$

- Observe primeiramente que quando estamos formando as sequências, se a ordem dos símbolos importa e temos repetições, então trata-se de uma permutação com repetição;

- Assim, esse problema pode ser resolvido aplicando $PR(n, r_1, \cdots, r_k)$;

- Neste problema temos:

$$\begin{array}{lcl} n = 15 & \rightarrow & \text{número total de símbolos} \\ r_1 = 9 & \rightarrow & \text{nove símbolos +} \\ r_2 = 6 & \rightarrow & \text{seis símbolos -} \end{array}$$

- Como $PR(n, r_1, r_2) = \dfrac{n!}{r_1! \cdot r_2!}$, obtemos

$$\begin{aligned} PR(15, 9, 6) &= \frac{15!}{9! \cdot 6!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \cancel{9!}}{\cancel{9!} \cdot 6!} \\ &= \frac{\cancel{15} \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot}{6 \cdot \cancel{5} \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{14 \cdot 13 \cdot \cancel{12} \cdot 11 \cdot 10 \cdot}{\cancel{6} \cdot 4 \cdot \cancel{2} \cdot 1} \\ &= \frac{14 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 10 \cdot}{4} = \frac{20020}{4} = 5005. \end{aligned}$$

- Portanto, temos 5005 possibilidades.

Teste seu conhecimento. Quantos números de nove algarismos podemos formar permutando os algarismos 1,1,1,1,3,3,3,7,7?

Solução.

- Para formar os números temos:

$$\begin{array}{lcl} 1,1,1,1 & \rightarrow & \text{letras repetidas} \\ 3,3,3 & \rightarrow & \text{letras repetidas} \\ 7,7 & \rightarrow & \text{letras repetidas} \end{array}$$

- Observe primeiramente que, quando estamos formando os números, se a ordem dos algarismos importa e temos repetições, então trata-se de uma permutação com repetição;

- Assim, esse problema pode ser resolvido aplicando $PR(n, r_1, \cdots, r_k)$;

- Neste problema temos:

$$\begin{array}{lcl} n = 9 & \rightarrow & \text{número total de algarismos} \\ r_1 = 4 & \rightarrow & \text{quatro números 1} \\ r_2 = 3 & \rightarrow & \text{três números 3} \\ r_3 = 2 & \rightarrow & \text{dois números 7} \end{array}$$

- Como $PR(, r_1, r_2, r_3, r_4) = \dfrac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3!}$, obtemos

$$\begin{aligned} PR(9,4,3,2) &= \frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 3! \cdot 2!} \\ &= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9 \cdot \cancel{8}^4 \cdot 7 \cdot 5}{\cancel{2} \cdot 1} \\ &= \frac{9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5}{1} = 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 1260. \end{aligned}$$

- Portanto, podemos formar 140 números permutando os algarismos 1,1,1,1,3,3,3,7,7.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Uma moeda é lançada dez vezes. Quantas sequências de caras e coroas existem, com quatro caras e seis coroas?

Solução.

- Vamos utilizar a nomenclatura:

$$\begin{aligned} \text{Ca} &: \text{ representa o surgimento de uma cara} \\ \text{Co} &: \text{ representa o surgimento de uma coroa.} \end{aligned}$$

- Para formar as sequências temos:

$$\begin{aligned} \text{Ca}, \text{Ca}, \text{Ca}, \text{Ca} &\rightarrow \text{ caras repetidas} \\ \text{Co}, \text{Co}, \text{Co}, \text{Co}, \text{Co}, \text{Co} &\rightarrow \text{ coroas repetidas} \end{aligned}$$

- Observe primeiramente que, quando estamos formando as sequências, se a ordem de surgimento de Ca ou Co importa e temos repetições, então trata-se de uma permutação com repetição;

- Assim, esse problema pode ser resolvido aplicando $PR(n, r_1, \cdots, r_k)$;

- Neste problema temos:

$$\begin{aligned} n = 10 &\rightarrow \text{ número total de caras e coroas} \\ r_1 = 4 &\rightarrow \text{ quatro caras} \\ r_2 = 6 &\rightarrow \text{ seis coroas} \end{aligned}$$

- Como $PR(n, r_1, r_2) = \dfrac{n!}{r_1! \cdot r_2!}$, obtemos

$$\begin{aligned}
PR(10,4,6) &= \frac{12!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{4! \cdot \cancel{6!}} \\
&= \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 7}{3} \\
&= \frac{10 \cdot \cancel{9}^3 \cdot 7}{\cancel{3}} = 10 \cdot 3 \cdot 7 \\
&= 210.
\end{aligned}$$

- Portanto, ao lançar uma moeda 10 vezes existem 210 sequências com 4 caras e 6 coroas.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Se uma pessoa gasta exatamente um minuto para escrever cada anagrama da palavra ANAGRAMA, quanto tempo levará para escrever todos, se não deve parar nenhum instante para descansar?

Solução.

- Primeiramente devemos encontrar o número de anagramas da palavra $ANAGRAMA$.

- Para formar os anagramas temos:

$$\begin{aligned}
&A, A, A, A \quad \rightarrow \quad \text{letras repetidas} \\
&N \\
&G \\
&R \\
&M.
\end{aligned}$$

- Observe primeiramente que, quando estamos formando os anagramas, se a ordem das letras importa e temos repetições, então trata-se de uma permutação com repetição;

- Assim, esse problema pode ser resolvido aplicando $PR(n, r_1)$;

- Neste problema temos:

$$
\begin{aligned}
n = 8 &\quad \rightarrow \quad \text{número total letras} \\
r_1 = 4 &\quad \rightarrow \quad \text{quatro letras A}
\end{aligned}
$$

- Como $PR(n, r_1) = \dfrac{n!}{r_1!}$, obtemos

$$PR(8,4) \;=\; \frac{8!}{4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680.$$

- Dessa forma, obtemos 1680 anagramas da palavra $ANAGRAMA$ e, portanto, uma pessoa gasta 28 horas para obter todos os anagramas.

Observação. O que não podemos esquecer sobre permutações com repetição?

1. Utilizamos permutações com repetições quando necessitamos contar o número de permutações de n objetos dos quais r_1 são iguais a A_1, r_2 são iguais a A_2, $\cdots$, r_k são iguais a A_k.
2. O método geral para se calcular uma permutação com repetição é dado pela expressão:

$$PR(n, r_1, r_2, \cdots, r_k) = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!}.$$

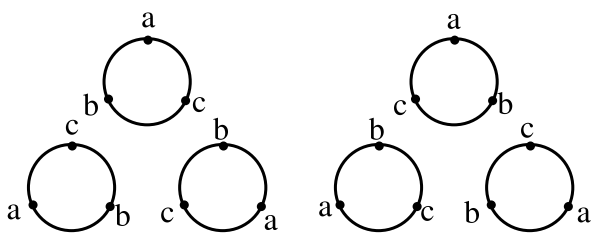
Permutações Circulares

Nesta seção, vamos estudar como podemos organizar n objetos distintos, em n lugares que estão igualmente espaçados sob um círculo.

Pare e Pense. Não é um problema que envolve permutação simples?

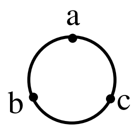
Inicialmente sim, mas na organização circular estaremos sempre considerando iguais as sequências de objetos que possam coincidir por rotação.

Por exemplo, vamos organizarmos as letras $\{a, b, c\}$ em três lugares igualmente espaçados sob uma circunferência. Podemos realizar esta tarefa de seis formas (permutação de três elementos distintos em três lugares, $P(3,3) = 3! = 6$), ou seja:

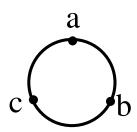


Bloco 1 Bloco 2

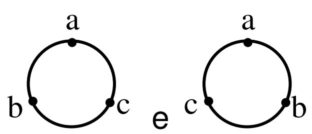
Agora considerando a condição de que elementos que coincidem por permutação são iguais, então todas as configurações do bloco 1 serão iguais à configuração:



e todos os elementos do bloco 2 serão iguais à configuração:



restando assim, somente as configurações:



Assim, concluímos que o número de permutaçãoes circulares de três elementos é 2.

Pergunta. Afinal como devo entender uma permutação circular?

Uma questão envolvendo permutação circular surge quando necessitamos organizar n objetos distintos, em n lugares que estão igualmente espaçados sob um círculo considerando iguais as sequências de objetos que possam coincidir por rotação.

Pergunta. Como denotamos uma permutação circular?

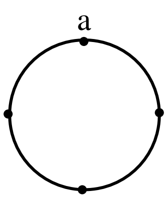
Sempre denotamos uma permutação circular de n elementos por $PC(n)$.

Pare e Pense. Qual é o método geral para permutação circular?

Assim como no caso de permutações com repetição, vamos deduzir a fórmula geral para as permutações circulares através da expressão já conhecida das permutações simples.

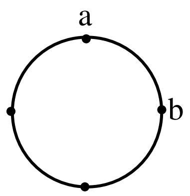
Vejamos como chegamos ao número de configurações do exemplo anterior. Para um melhor entendimento, vamos trabalhar com 4 objetos. Como estamos organizando 4 objetos sob círculo, o que realmente importa é a posição entre eles.

Assim, existe um modo de colocar o primeiro objeto no círculo, pois este objeto estará em uma das 4 posições igualmente espaçadas do círculo (recordo que estamos preocupados com a posição relativa entre os objetos no círculo).

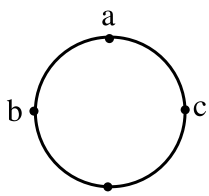


As demais configurações são equivalentes a esta, mediante rotações. Agora, ao alocar a letra

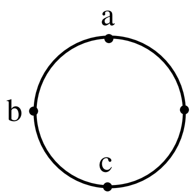
b, temos uma única possibilidade: coloca-lá imediatamente após a letra a:



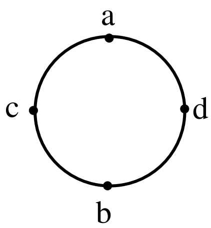
As demais configurações são equivalentes a esta mediante rotações. Ao alocar a letra c temos duas possilidades: colocá-la imediatamente a após a letra a ou colocá-la imediatamente após a letra b:



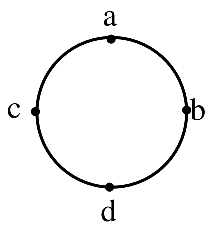
ou



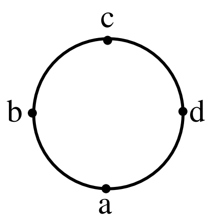
As demais configurações são equivalentes a esta mediante rotações. Ao alocar a letra d temos três possilidades: colocá-la imediatamente a após a letra a ou colocá-la imediatamente após a letra b ou colocá-la imediatamente a letra c:



ou



ou



Logo, aplicando o princípio da multiplicação, temos que a permutação circular de quatro objetos é dada por:

$$PC(4) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3! = (4-1)!.$$

onde 4 representa a quantidade inicial de objetos a se permutar de forma circular.

Portanto, se temos n objetos então:

$$PC(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) = (n-1)!.$$

Observação. O que não podemos esquecer sobre permutações circulares?

1. Utilizamos permutações circulares quando necessitamos colocar n objetos distintos em n, lugares igualmente espaçados, em torno de um círculo (considerando sempre iguais disposições que possam coincidir por rotação).

2. O método geral para se calcular uma permutação circular é dado pela expressão:

$$PC(n) = (n-1)!.$$

Testando os conhecimentos

Teste seu conhecimento. Oito amigos estão ao redor de um mesa circular para jogar carteado. De quantas formas podemos organizá-los ao redo da mesa?

Solução.

- Como estamos organizando os oito amigos ao redor de uma mesa circular, então devemos tratar essa questão como uma permutação circular.
- Assim, devemos utilizar o método geral: $PC(n)$
- Neste problema temos:

$$n = 8 \quad \rightarrow \quad \text{número de amigos}$$

- Como $PC(n) = (n-1)!$, obtemos

$$PC(8) \quad = \quad (8-1)! = 7! = 5040.$$

- Portanto, existem 5040 formas de organizar os amigos ao redor da mesa.

Teste seu conhecimento. Se João e sua esposa Maria são dois dos amigos do exercício anterior, em quantas disposições diferentes os oito amigos podem se sentar em torno da mesa de modo que João e sua esposa fiquem sempre juntos?

Solução.

- Com João e Maria devem permanecer juntos, vamos considerá-los como se fossem um único elemento.

- Assim, estamos organizando sete objetos (Maria e João sempre juntos) ao redor de uma mesa circular, então devemos tratar essa questão como uma permutação circular.

- Assim, devemos utilizar o método geral: $PC(n)$

- Neste problema temos:

$$n = 7 \quad \rightarrow \quad \text{número de objetos}$$

- Como $PC(n) = (n-1)!$, obtemos:

$$PC(7) \;=\; (7-1)! = 6! = 720.$$

- Dessa forma, se Maria estiver à direita de João, então existem 720 formas de organizar os amigos ao redor da mesa.

- Por outro lado, se Maria estiver a esquerda de João, então existem 720 formas de organizar os amigos ao redor da mesa.

- Portanto, existem 1440 formas de organizar os amigos ao redor da mesa com João e Maria sempre juntos.

Teste seu conhecimento. Ainda considerando o enunciado do exercício 1, em quantas disposições diferentes os oito amigos podem se sentar em torno da mesa de modo que João e sua esposa NÃO fiquem juntos?

Solução.

- Note que agora temos a condição de que João e Maria nunca fiquem juntos ao redor da mesa.

- Assim como no exercício anterior, utilizaremos Permutação Circular.

- Para esta situação, iremos calcular o número de formas de organizar os oito amigos ao redor da mesa, sem restrição de João e Maria ficarem sempre separados (já calculado no exercício 1) e subtrair desta quantidade o número de formas em que João e Maria estão sempre juntos (já calculado no exercício 2).

- Assim, temos:

$$5040 - 1440 = 3600.$$

- Portanto, existem 3600 formas de organizar os amigos ao redor da mesa sem que João e Maria fiquem sempre juntos.

Combinações Completas

Ao estudarmos as combinações simples, vimos que $C(n, r)$ representa de quantas formas podemos escolher r objetos distintos entre n objetos todos distintos.

Pare e Pense. O que ocorre se quisermos escolher r objetos agora distintos ou não entre n objetos distintos?

Vejamos na prática como este conceito aparece. Considere o conjunto $C = \{1, 2, 3, 4\}$ formado por quatro números inteiros. Vamos montar números de três algarismos a partir do conjunto C, sem considerarmos a ordem dos algarismos. Assim sendo, temos as possibilidades:

três repetidos	dois 1's	dois 2's	dois 3's	dois 4's	Misturados
111	112	221	331	441	123
222	113	223	332	442	124
333	114	224	334	443	134
444					234

Através dessa análise obtemos 20 possibilidades de combinações. Observe que se não considerarmos as repetições $(C(4, 3))$ teríamos:

três repetidos	dois 1's	dois 2's	dois 3's repetidos	dois 4's	Misturados
$\cancel{111}$	$\cancel{112}$	$\cancel{221}$	$\cancel{331}$	$\cancel{441}$	123
$\cancel{222}$	$\cancel{113}$	$\cancel{223}$	$\cancel{332}$	$\cancel{442}$	124
$\cancel{333}$	$\cancel{114}$	$\cancel{224}$	$\cancel{334}$	$\cancel{443}$	134
$\cancel{444}$					234

Restaria apenas 4 $\left(C(4, 3) = \dfrac{4!}{3! \cdot 1!} = \dfrac{4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 4\right)$ possibilidades: 123, 124, 134 e 234.

Note que o conjunto C pode ser substituído por um conjunto de possibilidades cotidianas, por exemplo, quatro tipos de salgados, balas, refrigerantes etc. Observe o exemplo que segue.

José é um florista especializado em orquídeas. Em sua floricultura José oferece 4 tipos de orquídeas. Se um cliente quiser comprar três orquídeas, de quantas formas é possível fazê-lo?

Pelo estudo que acabamos de realizar a resposta é: 20 possibilidades de escolha (neste caso conjunto C é formado por 4 tipos de orquídeas). O número 20 representa o número de combinações completas (com repetições) de classe 3 de 4 objetos.

Pergunta. Como representamos uma combinação completa de classe r de n elementos?

Representamos uma combinação completa de classe r de n elementos pelo símbolo: $CR(n, r)$.

Logo, o número de combinações completas (com repetições) de classe 3 de 4 objetos obtido no estudo do problema das orquídeas é representado por: $CR(4, 3) = 20$.

Pergunta. Como obtemos o método geral?

Considere a equação

$$x + y + z + w = 3,$$

com x, y, z e w números naturais.

Podemos interpretar que cada solução para a equação $x + y + z + w = 3$ é uma forma esperta, para representarmos uma possível forma de escolhermos um dos três números listados anteriormente. Por exemplo, a solução (1, 1, 1, 0) significa que, dos quatro possíveis números para escolha, optamos pelo 1, pelo 2 e pelo 3, obtendo 123.

Agora, resta sabermos como determinamos o total de soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z + w = 3$. Para este fim, vamos introduzir a simbologia;

$\bullet + \bullet + \bullet +$ implica que temos a solução $x = 1,\ y = 1,\ z = 1,\ w = 0$

$\bullet \bullet + + + \bullet$ implica que temos a solução $x = 2,\ y = 0,\ z = 0,\ w = 1$

$+ + + \bullet \bullet \bullet$ implica que temos a solução $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ w = 3.$

Dessa forma, concluímos que, para cada mudança de posição dos seis símbolos, sendo três $\bullet$ e três sinais $+$, temos uma única solução solução para a equação $x+y+z+w=3$.

O próximo passo agora é determinamos de quantos modos podemos mudar de lugar os símbolos $\bullet$ e $+$. Quando falamos em mudar de lugar, fazemos referência a permutações, ou seja, devemos permutar os seis símbolos, sendo que um deles ($\bullet$) aparece repetido três vezes e o outro ($+$) também se repete três vezes.

Logo, devemos calcular a permutação de seis elementos nos quais três elementos são iguais ao símbolo $\bullet$ e três são iguais ao símbolo $+$, isto é,

$$PR(6,3,3) = \frac{6!}{3!3!} = C(6,3) = 20.$$

Portanto, concluímos que

$$CR(4,3) = C(6,3),$$

onde $n=4$ e $r=3$.

De um modo geral, $CR(n,r)$ é obtido através do número de soluções naturais da equação:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r,$$

que, pelo estudo anterior, é dado por:

$$PR(r+n-1, r, n-1) = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!} = C(r+n-1, r),$$

isto é,

$$CR(n,r) = C(r+n-1, r).$$

Voltemos novamente ao exemplo da escolha das orquídeas. Neste exemplo, temos uma combinação completa de classe 3 de quatro elementos, ou seja,

$$CR(4,3) = C(3+4-1,3) = C(7-1,3) = C(6,3),$$

como obtemos anteriormente.

Observação. O que não podemos esquecer sobre combinações com repetição?

1. Utilizamos combinações com repetição para determinarmos o número de modos de esco-

lher p objetos distintos ou não entre n objetos distintos dados.

2. O método geral para se calcular uma combinação com repetição é dado pela expressão:

$$CR(n,p) = C(p+n-1,p).$$

Testando os conhecimentos

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. De quantos modos podemos comprar quatro sorvetes em uma sorveteria que oferece sete opções de sabores para escolha?

Solução.

- Estamos escolhendo 4 sabores (não necessariamente distintos) dentre 7 opções distintas de sabores.

- Este problema pode ser resolvido utilizando combinações com repetições.

- Assim, devemos utilizar o método geral: $CR(n, r)$.

- Neste problema temos:

$$\begin{array}{lcl} n = 7 & \rightarrow & \text{número de sabores} \\ r = 4 & \rightarrow & \text{número sabores a escolher} \end{array}$$

- Como $CR(n, r) = C(r + n - 1, r)$, obtemos

$$\begin{aligned} CR(7,4) &= C(4+7-1,4) = C(10,4) = \frac{10!}{6! \cdot 4!} \\ &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1} \\ &= \frac{10 \cdot \cancel{9}^{3} \cdot 7}{\cancel{3}} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210. \end{aligned}$$

- Portanto, existem 210 formas de se escolher os sabores nessa sorveteria.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Em uma loja é possível escolher cinco tipos de sapato e quatro tipos de bolsa. De quantos modos é possível uma mulher fazer uma compra com dois tipos de sapato e três tipos de bolsa?

Solução.

- Dos 5 tipos de sapatos, a mulher deve escolher dois tipos (não necessariamente distintos).
- Esta situação pode ser resolvida utilizando combinações com repetições.
- Assim, devemos utilizar o método geral: $CR(n, r)$.
- Neste problema temos:

$$\begin{aligned} n = 5 &\quad \rightarrow \quad \text{tipos de sapato} \\ r = 2 &\quad \rightarrow \quad \text{tipos de sapato a escolher} \end{aligned}$$

- Como $CR(n, r) = C(r + n - 1, r)$, obtemos

$$\begin{aligned} CR(5, 2) &= C(2 + 5 - 1, 2) = C(6, 2) = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \\ &= \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2!} = \frac{\cancel{6}^3 \cdot 5}{\cancel{2}} = 3 \cdot 5 = 15. \end{aligned}$$

- Logo, existem 15 formas de se escolher os sapatos.
- Analogamente, dos 4 tipos de bolsa a mulher deve escolher 3 tipos (não necessariamente distintas).
- Novamente, esta situação pode ser resolvida utilizando combinações com repetições.
- Assim, devemos utilizar o método geral: $CR(n, r)$.
- Neste problema temos:

$$\begin{aligned} n = 4 &\quad \rightarrow \quad \text{tipos de bolsa} \\ r = 3 &\quad \rightarrow \quad \text{tipos de bolsa a escolher} \end{aligned}$$

- Como $CR(n,r) = C(r+n-1,r)$, obtemos

$$\begin{aligned} CR(4,3) &= C(3+4-1,3) = C(6,3) = \frac{6!}{3!\cdot 3!} \\ &= \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot 3!} = \frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}} = 5\cdot 4 = 20. \end{aligned}$$

- Logo, existem 20 formas de se escolher as bolsas.

- Portanto, como a mulher deve escolher sapatos e bolsas, segue pelo Princípio da Multiplicação que existem:

$$15(\text{escolhas de sapatos})\cdot 20(\text{escolhas de bolsa}) = 300$$

possibilidades.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Quantas são as soluções inteiras e não negativas da inequação $x+y+z \leq 3$?

Solução.

- As soluções inteiras e não negativas da inequação $x+y+z \leq 3$ são dadas pelas soluções da equações:

$$\begin{aligned} x+y+z&=0\\ x+y+z&=1\\ x+y+z&=2\\ x+y+z&=3. \end{aligned}$$

- Vimos que, para obtermos o número de soluções das equações listadas anteriormente, devemos recorrer a combinações com repetições $(CR(n,r))$.

- Assim, temos:

$$\begin{array}{lll} CR(3,0) & \text{soluções da equação} & x+y+z=0\\ CR(3,1) & \text{soluções da equação} & x+y+z=1\\ CR(3,2) & \text{soluções da equação} & x+y+z=2\\ CR(3,3) & \text{soluções da equação} & x+y+z=3. \end{array}$$

- Logo, o número de soluções da inequação é dada pela soma:

$$CR(3,0) + CR(3,1) + CR(3,2) + CR(3,3)$$

$$\Downarrow$$

$$C(2,0) + C(3,1) + C(4,2) + C(5,3)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2!}{2! \cdot 0!} + \frac{3!}{2! \cdot 1!} + \frac{4!}{2! \cdot 2!} + \frac{5!}{3! \cdot 2!}$$

$$\Downarrow$$

$$1 + 3 + 6 + 10 = 20.$$

- Portanto, a inequação $x + y + z \leq 3$ possui 20 soluções.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Quantas são as soluções inteiras da equação $x + y + z = 10$, com $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$.

Solução.

- Note que sabemos contar soluções inteiras com as variáveis sendo maiores ou iguais a zero.

- Podemos transformar este problema no problema que sabemos resolver?

- A resposta é sim. Através da mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} x &= 1 + s \\ y &= 1 + t \\ z &= 1 + r \end{aligned}$$

obtemos a equação:

$$s + t + r = 7$$

cujo número de soluções sabemos calcular.

- O número de soluções da equação $s + t + r = 7$ é obtida calculando:

$$CR(7,3) = C(3+7-1,3) = C(9,3) = \frac{9!}{7! \cdot 3!} = 36.$$

- Portanto, temos 36 possíveis soluções para o problema.

Princípio da Inclusão - Exclusão

Nesta seção vamos aprender a contar o número de elementos obtidos através da união de um número finito de conjuntos.

Pergunta. Como é definida a união de dois conjuntos?

Considere dois conjuntos A e B. A a união de A com B, denotada por $A \cup B$, é definida por:

$$A \cup B = \{x \ : \ x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Por exemplo se $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{5,6,7,8,9\}$, então

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

Pergunta. Como é definida a interseção de dois conjuntos?

Considere dois conjuntos A e B. A a interseção de A com B, denotada por $A \cap B$, é definida por:

$$A \cap B = \{x \ : \ x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Por exemplo se $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $B = \{5,6,7,8,9\}$, então

$$A \cap B = \{5,6\}.$$

Pergunta. O que é a cardinalidade de um conjunto?

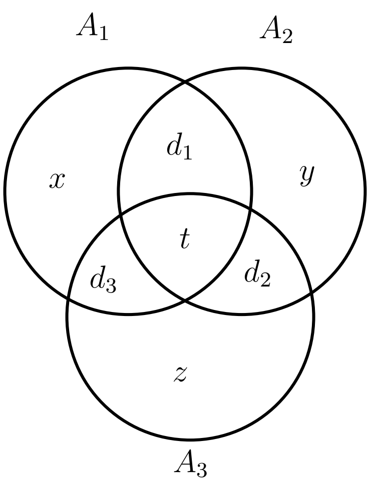
Seja A um conjunto finito. A cardinalidade do conjunto A, denotada por $card(A)$, é definida como sendo número de elementos do conjunto A.

Note que, se $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ então $card(A) = 9$.

O que diz o pricípio da Inclusão-Exclusão?

O princípio da Inclusão-Exclusão nos diz como calcular a cardinalidade da união de n de conjuntos finitos $A_1, \cdots, A_n$.

Vejamos como isso ocorre. Considere inicialmente $n = 3$. Assim, vamos calcular $card(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$. Note que,



Através da figura podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} card(A_1) &= x + d_1 + t + d_3, \\ card(A_2) &= y + d_1 + t + d_2, \ . \\ card(A_3) &= z + d_2 + t + d_3. \end{aligned}$$

Observe que ao somarmos $card(A_1) + card(A_2) + card(A_3)$ estamos contando $d_1 + t$ duas vezes (primeira e segunda igualdade), $d_3 + t$ duas vezes (primeira e treceira igualdade) e $d_2 + t$ duas vezes (terceira e primeira igualdade).

Assim, para que não existam elementos repetidos, devemos retirar uma parcela de $d_1 + t$, $d_2 + t$ e $d_3 + t$ da soma $card(A_1) + card(A_2) + card(A_3)$, isto é,

$$card(A_1) + card(A_2) + card(A_3) - (d_1 + t) - (d_2 + t) - (d_3 + t).$$

Como

$$\begin{aligned} card(A_1 \cap A_2) &= d_1 + t \\ card(A_2 \cap A_3) &= d_2 + t \\ card(A_3 \cap A_1) &= d_3 + t, \end{aligned}$$

obtemos

$$card(A_1) + card(A_2) + card(A_3) - card(A_1 \cap A_2) - card(A_2 \cap A_3) - card(A_3 \cap A_1).$$

Ao extrairmos as parcelas $card(A_1 \cap A_2)$, $card(A_2 \cap A_3)$ e $card(A_3 \cap A_1)$, estamos retirando a parcela t do nosso conjunto. Para corrigir este deslize, devemos acrescentar a parcela t. Sendo $card(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = t$, temos:

$$card(A_1) + card(A_2) + card(A_3) - card(A_1 \cap A_2) - card(A_2 \cap A_3) - card(A_3 \cap A_1) + card(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Analisando a última expressão temos:

$$\begin{aligned} x + y + z &= card(A_1) + card(A_2) + card(A_3) - card(A_1 \cap A_2) - card(A_2 \cap A_3) - card(A_3 \cap A_1) \\ &- card(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Segue da figura que $card(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = x + y + z$. Dessa forma, concluímos que:

$$\begin{aligned} card(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= card(A_1) + card(A_2) + card(A_3) - card(A_1 \cap A_2) - card(A_2 \cap A_3) \\ &- card(A_3 \cap A_1) + card(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Pergunta. Como seria o caso geral?

O caso geral é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 1. *(Princípio da Inclusão-Exclusão: caso geral)* Sejam Ω um conjunto, $A_1, \cdots, A_n$ subconjuntos de Ω e considere:

$$\begin{aligned}
S_0 &= card(\Omega);\\
S_1 &= \sum_{i=1}^{n} card(A_i);\\
S_2 &= \sum_{1\leq i<j\leq n} card(A_i \cap A_j);\\
S_3 &= \sum_{1\leq i<j<k\leq 3} card(A_i \cap A_j \cap A_k)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Note que há $C(n,1)$ parcelas em S_1, $C(n,2)$ parcelas S_2 etc $\cdots$. Então:

1. O número de elementos de Ω que pertencem a exatamente p $(p \leq n)$ dos conjuntos $A_1, \cdots, A_n$ é dado por:
$$a_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k C(p+k,k) S_{p+k};$$

2. O número de elementos de Ω que pertencem a pelo menos p $(p \leq n)$ dos conjuntos $A_1, \cdots, A_n$ é dado por:
$$b_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k C(p+k-1,k) S_{p+k};$$

3. O número de elementos do conjunto $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ é:
$$S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{n-1} S_n.$$

A prova deste teorema não será feita neste texto, gostaríamos de fazer algumas obsevações:

Observação. Utilizando o item 3 do teorema com $n = 3$ obtemos:

$$card(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \quad = \quad S_1 - S_2 + S_3.$$

Como

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{i=1}^{3} card(A_i) = card(A_1) + card(A_2) + card(A_3);\\
S_2 &= \sum_{1\leq i<j\leq 3}^{3} card(A_i \cap A_j) = card(A_1 \cap A_2) + card(A_1 \cap A_3) + card(A_2 \cap A_3);\\
S_3 &= \sum_{1\leq i<j<k\leq 3} card(A_i \cap A_j \cap A_k) = card(A_1 \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
card(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= card(A_1) + card(A_2) + card(A_3) - card(A_1 \cap A_2) - card(A_2 \cap A_3)\\
&- card(A_3 \cap A_1) + card(A_1 \cap A_2 \cap A_3).
\end{aligned}
$$

Observação. O item 1 do teorema foi provado pelo matemático português Daniel Algusto da Silva. Além disso, se considerarmos $p = 0$, este resultado é conhecido por FÓRMULA DO CRIVO, e foi provado pelo algebrista francês Silvester.

Testando os conhecimentos

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Quantos números inteiros entre 1 e 100 são divisíveis por 2 ou 6?

Solução.

- Para resolvermos este problema, vamos aplicar o Princípio da Inclusão e Exclusão.

- Para isto, vamos definir:

$$\begin{aligned}
A &= \text{conjunto dos inteiros entre 1 e 100 que são divisíveis por 2} \\
B &= \text{conjunto dos inteiros entre 1 e 100 que são divisíveis por 6} \\
A \cap B &= \text{conjunto dos inteiros entre 1 e 100 que são divisíveis por 2 e 6} \\
&= \text{conjunto dos inteiros entre 1 e 100 que são divisíveis por 12} \\
A \cup B &= \text{conjunto dos inteiros entre 1 e 100 que são divisíveis por 2 ou 6}
\end{aligned}$$

- Nosso objetivo é calcular $card(A \cup B)$.

- Aplicando o Princípio de Inclusão e Exclusão, temos:

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B).$$

- Dessa forma:

$$\begin{aligned}
card(A) &= \frac{100}{2} = 50 \\
card(B) &= \frac{100}{6} = 16,6666\cdots \\
card(A \cap B) &= \frac{100}{12} = 8,3333\cdots
\end{aligned}$$

- Como a cardinalidade é um número natural, devemos considerar apenas a parte inteira dos números $16,6666\cdots$ e $8,3333\cdots$, isto é,

$$\begin{aligned}
card(A) &= \frac{100}{2} = 50 \\
card(B) &= \frac{100}{6} = 16 \\
card(A \cap B) &= \frac{100}{12} = 8.
\end{aligned}$$

- Aplicando o princípio da Inclusão e Exclusão, temos:

$$card(A \cup B) = 50 + 16 - 8 = 66 - 8 = 58.$$

- Portanto, entre 1 e 100 existem 58 números inteiros que são divisíveis por 2 ou 6.

Teste seu conhecimento. Quantos anagramas da palavra CONTAGEM têm M em primeiro lugar ou E no segundo lugar ou G no terceiro lugar?

Solução.

- Para resolvermos este problema, vamos aplicar o Princípio da Inclusão e Exclusão.
- Para isto, vamos definir:

$$\begin{aligned}
A &= \text{conjunto dos anagramas com M no primeiro lugar} \\
B &= \text{conjunto dos anagramas com E no segundo lugar} \\
C &= \text{conjunto dos anagramas com G no terceiro lugar} \\
A \cap B &= \text{conjunto dos anagramas com M no primeiro lugar} \\
&\quad \text{e E no segundo lugar} \\
A \cap C &= \text{conjunto dos anagramas com M no primeiro lugar} \\
&\quad \text{e G no terceiro lugar} \\
B \cap C &= \text{conjunto dos anagramas com E no segundo lugar} \\
&\quad \text{e G no terceiro lugar} \\
A \cap B \cap C &= \text{conjunto dos anagramas com M no primeiro lugar,} \\
&\quad \text{E no segundo lugar e G no terceiro lugar.}
\end{aligned}$$

- Nosso objetivo é calcular $card(A \cup B \cup C)$.

- Aplicando o Princípio de Inclusão e Exclusão, temos:

$$\begin{aligned} card(A \cup B \cup C) &= card(A) + card(B) + card(C) - card(A \cap B) \\ &- card(A \cap B) - card(A \cap C) + card(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

- Dessa forma:

$$\begin{aligned} card(A) &= 7! = 5040 \text{ (total de anagramas com uma letra fixa)} \\ card(B) &= 7! = 5040 \text{ (total de anagramas com uma letra fixa)} \\ card(C) &= 7! = 5040 \text{ (total de anagramas com uma letra fixa)} \\ card(A \cap B) &= 6! = 720 \text{ (total de anagramas com duas letras fixas)} \\ card(A \cap C) &= 6! = 720 \text{ (total de anagramas com duas letras fixas)} \\ card(B \cap C) &= 6! = 720 \text{ (total de anagramas com duas letras fixas)} \\ card(A \cap B \cap C) &= 5! = 120 \text{ (total de anagramas com três letras fixas)} \end{aligned}$$

- Aplicando o princípio da Inclusão e Exclusão, temos:

$$card(A \cup B \cup C) = 5040 + 5040 + 5040 - 720 - 720 - 720 + 120 = 13.080.$$

- Portanto, o número de anagramas da palavra CONTAGEM que têm M em primeiro lugar ou E no segundo lugar ou G no terceiro lugar é 13.080.

Contando números primos: a função ϕ de Euler

Na seção anterior aprendemos a contar os elementos de uma união finita de conjuntos. Agora, vamos aprender a contar a quandidade de números primos a um certo número natural n fixado.

Pergunta. O que é um número primo?

Dizemos que um número p é primo se é divisível apenas pelos números: -1, $-p$, 1 e p.

Pergunta. Quando dois números p e q são primos entre si?

Dois números p e q são primos entre si se:

$$mdc(p, q) = 1.$$

É possível saber a quantidade de números primos n que não são maiores que n?

Se n for um número pequeno esta pergunta é fácil. Por exemplo, se $n = 10$ os número que são primos a 10 e menores que 10 são: 1, 3, 7 e 9.

Pergunta. Existe um método geral para se calcular primos menores que um certo número inteiro fixado?

Para cada inteiro positivo n definimos $\varphi(n)$ com sendo o número de inteiros positivos que são primos com n e não são maiores que n. Por exemplo, $\varphi(10) = 4$, pois vimos anteriormente que os números primos a 10 e menores que 10 são:1, 3, 7 e 9.

Agora, se n é um número grande, devemos utilizar sua decomposição em fatores primos, isto é,

$$n = p_1^{j_1} + p_2^{j_2} + \cdots + p_k^{j_k},$$

onde $p_1, p_2, \cdots, p_k$ são primos.

Através de um exemplo, vejamos como encontrar tal decomposição. Note que $100 = 2^2 \cdot 5^2$, onde $j_1 = 2$, $j_2 = 2$ são os expoentes e $p_1 = 2$ e $p_2 = 5$ são os primos.

Assim, considerando $n = p_1^{j_1} + p_2^{j_2} + \cdots + p_k^{j_k}$ obtemos:

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right),$$

sendo $p_1, p_2, \cdots, p_k$ os primos que aparecem na decomposição de n.

Note que

$$\begin{aligned}\varphi(10) &= \varphi(2^1 \cdot 5^1) = 10\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \\ &= 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{40}{10} = 4.\end{aligned}$$

Testando os conhecimentos

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Quantos números primos com 480 existem entre 0 e 480?

Solução.

- Para resolver este problema calculamos $\varphi(480)$.
- Para calcular $\varphi(480)$ precisamos decompor 480 em fatores primos:

$$\begin{array}{c|l}
480 & 2 \\
240 & 2 \\
120 & 2 \\
60 & 2 \\
30 & 2 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
\hline
1 & 2^5 \cdot 3 \cdot 5
\end{array}$$

- Assim:

$$\begin{aligned}
\varphi(480) &= 480 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \\
&= 480 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{480 \cdot 2 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{3840}{30} \\
&= 128.
\end{aligned}$$

- Portanto, existem 128 números primos com 480 entre 0 e 480.

Exercícios Propostos

1. Quantas sequências de extensão 10 podem ser formadas com o alfabeto de língua inglesa? E portuguesa? (sem considerar Y, K e W)R: 26^{10} e 23^{10} .

2. Há quantas maneiras possíveis de escolher quatro pedaços de uma fruta a partir de uma tigela que contém maçãs, laranjas e peras, se a ordem em que cada pedaço é escolhido não é relevante, apenas o tipo de fruta, e o pedaço individual não é relevante também, sendo que há pelo menos quatro pedaços de cada tipo de fruta na tigela?R: 15.

3. Há quantas maneiras de escolher cinco cédulas possíveis em uma caixa que contém cédulas de $R\$$ 1, $R\$$ 2, $R\$$ 5, $R\$$ 10, $R\$$ 20, $R\$$ 50 e $R\$$ 100? Considere que a ordem na qual cada cédula é escolhida não é relevante, que cada nota é idêntica e que há pelo menos cinco cédulas de cada valor.R: 462.

4. Suponha que uma cafeteria tenha quatro tipos diferentes de biscoitos. Há quantas maneiras diferentes possíveis de escolher seis biscoitos? Suponha que apenas o tipo de biscoito seja relevante, e não os biscoitos individualmente ou a ordem em que são escolhidos.R: 84.

5. Quantas soluções a equação $x + y + z = 11$ pode ter, em que x, y e z são números inteiros não negativos?R: 78.

6. Quantas sequências podem ser obtidas reorganizando-se as letras da palavra SUCCESS?R: 420.

7. Quantas maneiras existem de distribuir mãos de 5 cartas para cada um dos quatro jogadores, a partir de um baralho de 52 cartas?R: $\dfrac{52!}{5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 32!}$.

8. Há quantas maneiras possíveis de colocar 10 bolas idênticas em oito caixas distintas?R: 19.448.

9. Há quantas maneiras possíveis de colocar quatro empregados diferentes em três escritórios idênticos, em que cada escritório pode conter qualquer número de empregados?R: 15.

10. Há quantas maneiras possíveis de empacotar seis cópias do mesmo livro em quatro caixas idênticas, em que cada caixa pode conter até seis livros?R: 9.

11. Em uma classe de matemática discreta, todo estudante é graduando em ciência da computação ou matemática ou ambos. O número de estudantes que são graduandos em ciência da computação (possivelmente com matemática) é 25; o número de estudantes que são graduandos em matemática (possivelmente com ciência da computação) é 13 e o número de graduandos em ciência da computação e em matemática é 8. Quantos estudantes há na sala?R: 30.

12. Quantos números inteiros positivos que não excedem a 1000 são divisíveis por 7 ou 11?R: 220.

13. Suponha que existam 1807 calouros em uma escola. Destes 453 estão cursando ciência da computação, 567 cursam matemática e 299 estão cursando ambos, ciência da computação e matemática. Quantos calouros não estão cursando ciência da computação nem matemática?R: 1086.

14. Um total de 1232 alunos cursam espanhol, 879 cursam francês e 114 cursam russo. Além disso, 103 cursam espanhol e francês, 23 cursam espanhol e russo e 14 cursam francês e russo. Se 2092 estudantes cursam, pelo menos, uma das três linguas, espanhol, francês e russo, quantos estudantes cursam as três linguas?R: 7.

15. Quantas rodas de ciranda podem ser formadas com 6 crianças?R: 5!.

16. De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 7 crianças, de modo que duas determinadas crianças não fiquem juntas?R: 480.

17. Quantos anagramas possui a palavra TÁRTARA?R: 210.

18. Quantos anagramas tem a palavra MATEMÁTICA?R: 151.200.

19. Quantos anagramas tem a palavra URUGUAI?R: 840.

20. Quantas são as soluções inteiras e não negativas de $x + y + z = 5$?R: 21.

21. De quantos modos podemos comprar 3 refrigerantes em uma loja onde há 5 tipos de refrigerantes?R: 35.

22. Quantas são as soluções inteiras e não-negativas da inequação $x + y + z \leq 5$?R: 56.

23. Quantas são as soluções inteiras da equação $x + y + z = 20$ com $x \geq 2$, $y \geq 2$ e $z \geq 2$?R: 120.

24. Quantos são os anagramas da palavra PIRACIACABA que não possuem duas letras A juntas?R: 70.560.

25. Quantos inteiros entre 1 e 1000 são divisíveis por 3 ou 7?R: 428.

26. Quantos são os anagramas da palavra CAPÍTULO que têm C em primeiro lugar, ou A em segundo lugar, ou P em terceiro lugar, ou I em quarto lugar?R: 16.296.

27. Quantos são os inteiros, compreendidos entre 1 e 1000 inclusive, que são divisíveis por exatamente dois dos números 2, 3, 7 e 10? E por pelo menos dois?R: 233 e 295 .

Módulo 3
Princípio da Casa dos Pombos

O Princípio da Casa dos Pombos é uma ferramenta matemática elementar que nos auxilia de forma eficaz no desenrolar de situações onde necessitamos comprovar que elementos, com determinadas propriedades, satisfazem certo padrão.

Pare e Pense. Afinal o que diz o Princípio da Casa dos Pombos?

O Princípio da Casa dos Pombos nos diz que se existem 13 pombos e apenas 12 casas para acomodá-los, então pelo menos uma das 12 casas receberá dois pombos.

Pergunta. Como formalizamos o princípio matematicamente?

Considere n um número inteiro positivo. Se desejamos alocar $n+1$ objetos em n recipientes, então pelo menos um dos recipientes receberá dois objetos.

Pare e Pense. Mas este resultado não é óbvio? Podemos prová-lo?

A prova deste resultado será feita por contradição. Suponha que nenhum dos recipientes receba mais do que um objeto. Como temos n recipientes, podemos concluir que teriámos somente n objetos. Porém esta afirmação é falsa, pois por hipótese temos $n+1$ objetos. A contradição surgiu ao considerarmos que nenhum recipiente receberá mais de um objeto.

Pergunta. O princípio da Casa dos Pombos sempre recebeu este nome?

Esse princípio foi enunciado pela primeira vez por G. Lejeune Dirichlet (1805-1859), matemático alemão, com o nome de Princípio das Gavetas de Dirichlet. Dirichlet nasceu em uma familia francesa que morava perto de Colônia, na Alemanha. Estudou na Unversidade de Paris e ocupou cargos na Universidade de Breslau e na Universidade de Berlim. Em 1855, foi escolhido como sucessor de Gauss na Universidade de Göttingen.

Pare e Pense. O princípio ainda é válido se existir um número de objetos bem maior do que os recipientes?

Podemos generalizar o princípio da casa dos pombos considerando um número de objetos bem superior ao número de recipientes. Matematicamente falando, considere N um número inteiro positivo tal que $N > n$. Se desejamos alocar N objetos em n recipientes, então pelo menos um dos recipientes receberá dois $\lceil \frac{N}{n} \rceil$ objetos.

Pare e Pense. O que significa o símbolo $\lceil \quad \rceil$?

Definimos a função teto $\lceil \quad \rceil$ da seguinte forma:

$$\lceil p \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} \ : \ k \geq p\}$$

Observe o lógica da função $\lceil \quad \rceil$, através de alguns exemplos.

$$\begin{aligned}
\lceil 10 \rceil &= \min\{k \in \mathbb{Z} \ : \ k \geq 10.\} = 10 \\
\lceil 1,5 \rceil &= \min\{k \in \mathbb{Z} \ : \ k \geq 1,5\} = 2. \\
\lceil \frac{7}{9} \rceil &= \lceil 0,7777\cdots \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} \ : \ k \geq 0,7777\cdots\} = 1.
\end{aligned}$$

Pergunta. Como provamos o Princípio da Casa dos Pombos Generalizado?

A prova do Princípio da Casa dos Pombos Generalizado também será feita por contradição. Suponha que nenhum dos recipientes, receba mais do que $\lceil \frac{N}{n} \rceil - 1$ objetos. Como temos n recipientes podemos concluir que teríamos somente

$$n \cdot \left(\lceil \frac{N}{n} \rceil - 1 \right) = n \cdot \left(\lceil \frac{N}{n} \rceil \right) - n.$$

objetos.

Por outro lado, como

$$\lceil \frac{N}{n} \rceil < \frac{N}{n} + 1 \Rightarrow \lceil \frac{N}{n} \rceil - 1 < \frac{N}{n}$$

obtemos

$$n \cdot \left(\lceil \frac{N}{n} \rceil - 1 \right) < n(\frac{N}{n} + 1) = N + n - n = N$$

o que implica que

$$n \cdot \left(\lceil \frac{N}{n} \rceil - 1 \right) < N.$$

Porém esta última afirmação é falsa, pois pela suposição temos:

$$n \cdot \left(\lceil \frac{N}{n} \rceil - 1 \right) = N.$$

o que implicaria que:

$$N < N.$$

A contradição surgiu ao considerarmos que nenhum recipiente receberá $\lceil \frac{N}{n} \rceil$ objetos.

Pare e Pense. Existe um método geral que relaciona N, n e $\lceil \frac{N}{n} \rceil$?

Segue da definição da função teto que:

$$\lceil \frac{N}{n} \rceil - 1 < \frac{N}{n} \leq \lceil \frac{N}{n} \rceil.$$

Dessa forma, temos que

$$\lceil \frac{N}{n} \rceil - 1 < \frac{N}{n}.$$

Assim sendo, afirmamos que:

$$N = n \cdot \left(\lceil \frac{N}{n} \rceil - 1 \right) + 1.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{N}{n} &= \frac{n \cdot \left(\lceil \frac{N}{n} \rceil - 1 \right) + 1}{n} = \frac{n \cdot \lceil \frac{N}{n} \rceil - n + 1}{n} \\ &= \frac{\cancel{n} \cdot \lceil \frac{N}{n} \rceil}{\cancel{n}} - \frac{n-1}{n} = \lceil \frac{N}{n} \rceil - \frac{n-1}{n} \\ &> \lceil \frac{N}{n} \rceil - 1, \end{aligned}$$

visto que:

$$n - 1 < n \Rightarrow \frac{n-1}{n} < 1 \Rightarrow -\left(\frac{n-1}{n} \right) > -1 \Rightarrow \lceil \frac{N}{n} \rceil - \left(\frac{n-1}{n} \right) > \lceil \frac{N}{n} \rceil - 1.$$

Testando os conhecimentos

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Quantas pessoas são necessárias para se ter certeza de que cinco nasceram no mesmo dia?

Solução.

- Ingredientes necessários para aplicar o Princípio da Casa dos Pombos:

$$\begin{aligned} N &: \text{ número de objetos.} \\ n &: \text{ número de recipientes.} \\ \lceil \frac{N}{n} \rceil &: \text{ quantidade de objetos por caixa.} \end{aligned}$$

- Fazemos a analogia:

número de objetos	$=$	número de pessoas.
número de recipientes	$=$	número de dias
quantidade de pessoas fazendo aniversário no mesmo dia	$=$	quantidade de objetos nos recipientes.

- Dessa forma, obtemos:

$$\begin{aligned} N &= \text{ queremos determinar.} \\ n &= \text{ 365 dias (quantidade de dias no ano.)} \\ \lceil \frac{N}{n} \rceil &= 5 \text{ número de pessoas fazendo aniversário no mesmo dia.} \end{aligned}$$

- Aplicando o Princípio da Casa dos Pombos, obtemos:

$$N = n \cdot \left(\lceil \frac{N}{n} \rceil - 1 \right) + 1.$$

$$\Rightarrow$$

$$N = 365 \cdot (5 - 1) + 1 = 365 \cdot 4 + 1 = 1460 + 1 = 1461.$$

- Portanto, são necessários um total de 1.461 pessoas para que existam pelo menos 5 fazendo aniversário no mesmo dia.

ATB
Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Qual a quantidade necessária de palavras em português para se ter pelo menos três que começam com a mesma letra?

Solução.

- Ingredientes necessários para aplicar o Princípio da Casa dos Pombos:

$$\begin{array}{lcl} N & : & \text{número de objetos.} \\ n & : & \text{número de recipientes.} \\ \lceil \frac{N}{n} \rceil & : & \text{quantidade de objetos por caixa.} \end{array}$$

- Fazemos a analogia:

$$\begin{array}{lcl} \text{número de objetos} & = & \text{número de palavras.} \\ \text{número de recipientes} & = & \text{número de letras do alfabeto} \\ \text{quantidade de palavras que} & & \\ \text{começam com a mesma letra} & = & \text{quantidade de objetos nos recipientes.} \end{array}$$

- Dessa forma, obtemos:

$$\begin{array}{lcl} N & = & \text{queremos determinar.} \\ n & = & \text{23 letras (23 letras, sem as letras K, W e Y)} \\ \lceil \frac{N}{n} \rceil & = & 3 \text{ palavras que começam com a mesma letra .} \end{array}$$

- Aplicando o Princípio da Casa dos Pombos, obtemos:

$$N = n \cdot \left(\lceil \frac{N}{n} \rceil - 1 \right) + 1.$$

$$\Rightarrow$$

$$N = 23 \cdot (3 - 1) + 1 = 23 \cdot 2 + 1 = 46 + 1 = 57.$$

- Portanto, é necessário um grupo de 47 palavras para que existam pelo menos 3 começando com a mesma letra.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Quantos alunos devem existir em um determinado curso para termos certeza de que pelo menos sete alunos possuam a mesma média final (valores inteiros), sabendo que as médias variam de 0 a 10?

Solução.

- Ingredientes necessários para aplicar o Princípio da Casa dos Pombos:

N	:	número de objetos.
n	:	número de recipientes.
$\lceil \frac{N}{n} \rceil$	:	quantidade de objetos por caixa.

- Fazemos a analogia:

número de objetos	$=$	número de alunos.
número de recipientes	$=$	quantidade de notas
quantidade de estudantes com a mesma nota	$=$	quantidade de objetos nos recipientes.

- Dessa forma, obtemos:

N	$=$	queremos determinar.
n	$=$	11 número de notas possíveis
$\lceil \frac{N}{n} \rceil$	$=$	7 quantidade de alunos com a mesma nota.

- Aplicando o Princípio da Casa dos Pombos, obtemos:

$$N = n \cdot \left(\lceil \frac{N}{n} \rceil - 1 \right) + 1.$$

$$\Rightarrow$$

$$N = 11 \cdot (7 - 1) + 1 = 11 \cdot 6 + 1 = 66 + 1 = 67.$$

- Portanto, é necessário um grupo de 67 alunos para que existam pelo menos 7 com a mesma nota.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Um certo açougue é especializado em cinco cortes de carnes: a picanha, a costela, o t-bone, a alcatra e o filet mignon. Qual o número de compradores necessários para se ter certeza de que pelo menos seis comprarão o mesmo corte de carne?

Solução.

- Ingredientes necessários para aplicar o Princípio da Casa dos Pombos:

$$\begin{array}{lcl} N & : & \text{número de objetos.} \\ n & : & \text{número de recipientes.} \\ \lceil \frac{N}{n} \rceil & : & \text{quantidade de objetos por caixa.} \end{array}$$

- Fazemos a analogia:

$$\begin{array}{lcl} \text{número de objetos} & = & \text{número de compradores.} \\ \text{número de recipientes} & = & \text{tipos de cortes de carne} \\ \text{quantidade de compradores para} & & \\ \text{um determinado tipo de carne} & = & \text{quantidade de objetos nos recipientes.} \end{array}$$

- Dessa forma, obtemos:

$$\begin{array}{lcl} N & = & \text{queremos determinar.} \\ n & = & \text{5 tipos de carnes} \\ \lceil \frac{N}{n} \rceil & = & 6 \text{ quantidade de compradores de um certo corte.} \end{array}$$

- Aplicando o Princípio da Casa dos Pombos, obtemos:

$$N = n \cdot \left(\lceil \frac{N}{n} \rceil - 1 \right) + 1.$$

$$\Rightarrow$$

$$N = 5 \cdot (6 - 1) + 1 = 5 \cdot 5 + 1 = 25 + 1 = 26.$$

- Portanto, são necessários 26 compradores para que existam pelo menos 6 comprando o mesmo corte.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. João possui cinquenta e dois selos em sua coleção. Sabendo que os selos podem ter as cores azul, preta, verde e cinza, quantos selos devemos escolher para que pelo menos três selos da mesma cor sejam selecionados?

Solução.

- Primeiramente, vamos responder á primeira pergunta. Ingredientes necessários para aplicar o Princípio da Casa dos Pombos:

$$\begin{array}{lcl} N & : & \text{número de objetos.} \\ n & : & \text{número de recipientes.} \\ \lceil \frac{N}{n} \rceil & : & \text{quantidade de objetos por caixa.} \end{array}$$

- Fazemos a analogia:

$$\begin{array}{lcl} \text{número de objetos} & = & \text{número de selos.} \\ \text{número de recipientes} & = & \text{cores dos selos} \\ \text{quantidade de selos} & & \\ \text{com a mesma cor} & = & \text{quantidade de objetos nos recipientes.} \end{array}$$

- Dessa forma, obtemos:

$$\begin{array}{lcl} N & = & \text{queremos determinar.} \\ n & = & \text{4 (tipos de cores)} \\ \lceil \frac{N}{n} \rceil & = & 3 \text{ selos da mesma cor.} \end{array}$$

- Aplicando o Princípio da Casa dos Pombos, obtemos:

$$N = n \cdot \left(\lceil \frac{N}{n} \rceil - 1 \right) + 1 \Rightarrow N = 4 \cdot (3 - 1) + 1 = 4 \cdot 2 + 1 = 8 + 1 = 9.$$

- Portanto, é necessário escolhermos 9 selos para obtermos três selos da mesma cor.

Exercícios Propostos

1. Um grupo de alunos estuda uma vez por semana em um determinado dia da semana. Quantas aulas devemos ter para que ocorram dois encontros no mesmo dia, considerando que não haja aulas nos finais de semana? R: 6.

2. Quantas pessoas devem estar em um auditório para existirem ao menos duas com a mesma data de aniversário? R: 366.

3. Um determinado cinema tem seus assentos numerados de 0 a 100. Qual a quantidade de pessoas que deve existir no cinema para que pelo menos duas ocupem o mesmo assento? R: 102.

4. Qual o menor número de estudantes necessário em uma sala de matemática discreta para se ter certeza de que pelo menos seis receberão a mesma nota, se são possíveis cinco notas A, B, C, D e F?R: 26

5. Quantas cartas devem ser escolhidas de um baralho de cinquenta e duas cartas para garantir que pelo menos três cartas do mesmo naipe sejam selecionadas? Quantas cartas devem ser escolhidas para garantir que pelo menos três copas sejam selecionadas?R: 9 e R: 42.

6. Uma gaveta contém doze meias marrons e doze meias pretas. Um homem pega as meias aleatóriamente no escuro. Quantas meias deverão ser pegas para se ter certeza de que pelo menos duas são da mesma cor? Quantas meias deverão ser pegas para se ter certeza de que pelo menos duas são pretas?R:3 e R: 14.

7. Quantos números inteiros, não necessariamente consecutivos, são necessários para que se tenham dois com mesmo resto quando dividido por quatro?R: 5.

8. Quantos números inteiros consecutivos são necessários para que existam exatamente um número divisível por 7?R: 7.

9. Qual o número mínimo de estudantes, vindos dos cinquenta estados americanos, que devem ser inscritos em uma universidade para garantir que pelo menos cem venham do mesmo estado?R:4951 .

10. Quantos números devem ser selecionados a partir do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ para garantir que pelo menos um par desses números some sete?R:4 .

Módulo 4

Binômio de Newton e Triângulo de Pascal

Pergunta. O que é um binômio?

Um binômio é uma expressão algébrica formada pela soma ou a diferença de dois termos. Por exemplo:

$$a^2 + 2ab + b^2,\ a^2 + b,\ b^7 - 2a.$$

Pergunta. O que é o binômio de Newton?

Sejam a e b números reais e considere n um número natural. Então, o binômio de Newton descreve os coeficientes do desenvolvimento:

$$(a+b)^n = C(n,0)a^n + C(n,1)a^{n-1} \cdot b + C(n,2)a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots C(n,n-1)a \cdot b^{n-1} + C(n,n)b^n,$$

onde $C(n,p)$ representa a combinação simples de n tomada de p elementos, isto é,

$$C(n,p) = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}.$$

Pare e Pense. Por que os coeficientes da expansão são $C(n,p)$?

Vamos estudar inicialmente o caso $n = 2$. Fazendo a conta, obtemos:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b \\ &= 1\cdot a^2 + 2\cdot ab + 1\cdot b^2.\end{aligned}$$

Assim, temos que o coeficiente do termo a^2 é igual 1, o coeficiente do termo misto ab é igual a 2 e o coeficiente do termo b^2 é 1.

Conside a igualdade:

$$(a+b)^2 = \overbrace{(a+b)}^{\text{primeira soma}} \cdot \underbrace{(a+b)}_{\text{segunda soma}}.$$

Antes de contarmos o número de termos da forma a^2, note que:

$$a^2 = a^2 \cdot b^0.$$

Assim, para obtermos ^{2} temos que escolher dois a's dentre duas somas (um a na primeira soma e um a na segunda). Como a ordem de escolha não importa, esta tarefa pode ser realizada através de $C(2,2)$ formas (escolha de 2 a's dentre duas somas possíveis).

Agora, o termo ab é descrito da seguinte maneira:

$$a \cdot b = a^1 \cdot b^1.$$

Dessa forma, para obtermos ab, devemos escolher um a dentre duas somas pois o outro elemento já esta definido e será b. Como a ordem de escolha não importa podemos realizar esta tarefa de $C(2,1)$.

Para o termo b^2 o estudo é análogo ao estudo realizado para a^2 e, portanto, obtemos $C(2,0)$ formas de escolha.

Através dessa análise, concluímos que:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= C(2,0)a^2 + C(2,1)ab + C(0,2)b2 \\
&= \frac{2!}{2!\cdot 0!}a^2 + \frac{2!}{1!\cdot 1!}ab + \frac{2!}{0!\cdot 2!}b^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2.
\end{aligned}$$

Utilizando a mesma análise combinatória, para um número natural n, obtemos a expressão geral:

$$(a+b)^n = C(n,0)a^n + C(n,1)a^{n-1}\cdot b + C(n,2)a^{n-2}\cdot b^2 + \cdots + C(n,n-1)a\cdot b^{n-1} + C(n,n)b^n.$$

Pare e Pense. Como utilizamos o binômio de Newton?

O binômio de Newton geralmente é utilizado quando necessitamos saber algum coeficiente da expansão de $(a+b)^n$ e, consequentemente, termos de tal expansão para altos valores de n.

Por exemplo, o coeficiente de a^5b^5 no desenvolvimento de $(a+b)^{10}$ é dado pela expressão:

$$\begin{aligned}
C(10,5) &= \frac{10!}{5!\cdot 5!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \\
&= \frac{\cancel{10}\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{\cancel{5}\cdot 4\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot 1} = \frac{9\cdot \cancel{8}^2\cdot 7\cdot 6}{\cancel{4}\cdot 3} \\
&= \frac{\cancel{9}^3\cdot 2\cdot 7\cdot 6}{\cancel{3}} = 3\cdot 2\cdot 7\cdot 6 = 252.
\end{aligned}$$

Pergunta. O que representa o símbolo $\sum$?

A letra grega $\sum$ representa o operador SOMATÓRIO, utilizado em matemática na escrita de longas somas. Observe que:

$$\sum_{j=1}^{10} j = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10,$$

$$\sum_{j=1}^{10} \frac{1}{j} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}.$$

Aplicando este operador ao binômio de Newton para $n=3$, temos:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= \sum_{k=0}^{3} C(3,k)a^{3-k}b^k \\ &= C(3,0)a^{3-0}b^0 + C(3,1)a^{3-1}b^1 + C(3,2)a^{3-2}b^2 + C(3,3)a^{3-3}b^3 \\ &= C(3,0)a^3 + C(3,1)a^2b^1 + C(3,2)a^1b^2 + C(3,3)b^3.\end{aligned}$$

Pare e Pense. Podemos resumir a expansão de $(a+b)^n$?

A expressão de $(a+b)^n$ pode ser escrita na forma condensada:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n-k}b^k.$$

Pare e Pense. O binômio de Newton é válido para diferença $(x-y)^n$?

Para aplicarmos o binômio de Newton à diferença $(x-y)^n$, basta considerarmos $a = x$ e $b = -y$, ou seja,

$$\begin{aligned}
(x-y)^n &= (x+(-y))^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{n-k}(-y)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{n-k}(-1\cdot y)^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{n-k}(-1)^k y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k)x^{n-k}y^k.
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos;

$$(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k)x^{n-k}y^k.$$

Considerando $(x-y)^{10}$, então o coeficiente do termo x^5y^5 ($n = 10$ e $k = 5$) é dado por:

$$(-1)^5 C(10,5) = -1 \cdot C(10,5) = -256.$$

Pare e Pense. O binômio de Newton é válido para a soma $(c_1x + c_2y)^n$?

Para aplicarmos o binômio de Newton à soma $(c_1x + c_2y)^n$, basta considerarmos $a = c_1x$ e

$b = c_2 y$, ou seja,

$$\begin{aligned}
(c_1x + c_2y)^n &= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)(c_1x)^{n-k}(c_2y)^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)(c_1 \cdot x)^{n-k}(c_2 \cdot y)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{n-k}(-1)^k y^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k) c_1^{n-k} x^{n-k} c_2^k y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_1^{n-k} c_2^k C(n,k) x^{n-k} y^k.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que:

$$(c_1x + c_2y)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_1^{n-k} c_2^k C(n,k) x^{n-k} y^k.$$

Considerando $(2x + 3y)^{10}$, então o coeficiente do termo x^5y^5 ($n = 10$, $k = 5$, $c_1 = 2$ e $c_2 = 3$) é dado por:

$$2^{10-5} \cdot 3^5 \cdot C(10,5) = 2^5 \cdot 3^5 \cdot C(10,5).$$

Pergunta. Podemos utilizar o binômio de Newton para calcular as potências 2^n e 2^n?

Ao determinarmos o coeficiente do termo x^5y^5 presente na expansão de $(2x + 3y)^{10}$ nos deparamos com os números 2^5 e 3^5.

Logo, seria de grande ajuda se tivéssemos um método geral para calcular potências altas dos números.

Primeiramente, vamos utilizar o binômio de Newton para calcular 2^n. Considere $a = 1$ e $b = 1$. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned}
2^n &= (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) 1^{n-k} 1^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} C(n,k) 1^{(n-\cancel{k})+\cancel{k}} = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) 1^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} C(n,k).
\end{aligned}$$

Assim sendo, concluímos que:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k).$$

Portanto, temos que:

$$2^5 = \sum_{k=0}^{5} C(5,k) = C(5,0) + C(5,1) + C(5,2) + C(5,3) + C(5,4) + C(5,5).$$

Considerando:

$$\begin{aligned}
C(5,0) &= \frac{\cancel{5!}}{\cancel{5!}\cdot 0!} = \frac{1}{1\cdot 1} = 1.\\
C(5,1) &= \frac{5!}{4!\cdot 1!} = \frac{5\cdot 4!}{4!\cdot 1!} = \frac{5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\cdot 1!} = \frac{5}{1} = 5.\\
C(5,2) &= \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{2!\cdot \cancel{3!}} = \frac{5\cdot \cancel{4}^2}{\cancel{2}} = 5\cdot 2 = 10.\\
C(5,3) &= \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10.\\
C(5,4) &= \frac{5!}{4!\cdot 1!} = 5.\\
C(5,5) &= \frac{\cancel{5!}}{\cancel{5!}\cdot 0!} = \frac{1}{1} = 1.
\end{aligned}$$

temos que:

$$\begin{aligned}
2^5 &= \sum_{k=0}^{5} C(5,k) = C(5,0) + C(5,1) + C(5,2) + C(5,3) + C(5,4) + C(5,5)\\
&= 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32.
\end{aligned}$$

O próximo passo agora é utilizar novamente o binômio de Newton para calcular 3^n. Considere $a = 1$ e $b = 2$. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned}
3^n &= (1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\overbrace{1^{n-k}}^{=1}2^k\\
&= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)2^k.
\end{aligned}$$

Assim sendo, concluímos que:

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)2^k.$$

Portanto, temos que:

$$\begin{aligned}
3^5 = \sum_{k=0}^{5} C(5,k)2^k &= C(5,0)\cdot 2^0 + C(5,1)\cdot 2^1 + C(5,2)\cdot 2^2 + \\
&+ C(5,3)\cdot 2^3 + C(5,4)\cdot 2^4 + C(5,5)\cdot 2^5 \\
&= 1\cdot 2^0 + 5\cdot 2^1 + 10\cdot 2^2 + 10\cdot 2^3 + 5\cdot 2^4 + 1\cdot 2^5 \\
&= 1\cdot 1 + 5\cdot 2 + 10\cdot 4 + 10\cdot 8 + 5\cdot 16 + 1\cdot 32 \\
&= 1 + 10 + 40 + 80 + 80 + 32 = 243.
\end{aligned}$$

Pare e Pense. O que ocorre com o binômio de Newton se $a = 1$ e $b = -1$?

Considerando $a = 1$ e $b = -1$, temos:

$$\begin{aligned}
0 &= (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k)\, \overbrace{1^{n-k}1^k}^{=1^n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k)\, \overbrace{1^n}^{=1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k).
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos:

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k).$$

Logo, concluímos que, se somarmos as k-combinações de n elementos com k variando de 0 a n, obtemos 0 como resultado final. Observe como este resultado se verifica na prática:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{5} (-1)^k C(5,k) &= (-1)^0\cdot C(5,0) + (-1)^1\cdot C(5,1) + (-1)^2\cdot C(5,2) + \\
&+ (-1)^3\cdot C(5,3) + (-1)^4\cdot C(5,4) + (-1)^5\cdot C(5,5) \\
&= 1\cdot C(5,0) - 1\cdot C(5,1) + 1\cdot C(5,2) - \\
&- 1\cdot C(5,3) + 1\cdot C(5,4) - 1\cdot C(5,5) \\
&= 1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Pare e Pense. Existe alguma relação entre os coeficientes do binômio de Newton?

Vamos organizar os coeficientes do binômio de Newton de forma a obtermos um triângulo:

$$
\begin{array}{ccccccc}
C(0,0) & & & & & & \\
C(1,0) & C(1,1) & & & & & \\
C(2,0) & C(2,1) & C(2,2) & & & & \\
C(3,0) & C(3,1) & C(3,2) & C(3,3) & & & \\
C(4,0) & C(4,1) & C(4,2) & C(4,3) & C(4,4) & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
C(n,0) & C(n,1) & C(n,2) & C(n,3) & C(n,4) & \cdots & C(n,n) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Observe que, ao somarmos dois elementos consecutivos (esquerda para direita) no triângulo, obtemos o elemento que se encontra abaixo do último termo somado, mais precisamente,

$$C(n+1,p+1) = C(n,p) + C(n,p+1).$$

Vejamos porque esta igualdade é verdadeira.

$$
\begin{aligned}
C(n,p) + C(n,p+1) &= \frac{n!}{p!\cdot(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!\cdot(n-p-1)!} \\
&= \frac{n!}{p!\cdot(n-p)\cdot(n-p-1)!} + \frac{n!}{(p+1)\cdot p!\cdot(n-p-1)!} \\
&= \frac{(p+1)\cdot n! + (n-p)\cdot n!}{(p+1)\cdot p!\cdot(n-p)\cdot(n-p-1)!} \\
&= \frac{\cancel{p\cdot n!} + n! + n\cdot n! - \cancel{p\cdot n!}}{(p+1)\cdot p!\cdot(n-p)\cdot(n-p-1)!} \\
&= \frac{n! + n\cdot n!}{(p+1)\cdot p!\cdot(n-p)\cdot(n-p-1)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{(p+1)!\cdot(n-p)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)!\cdot(n-p)!} = C(n+1,p+1).
\end{aligned}
$$

Por exemplo, note que:

$$C(3,1) + C(3,2) = \frac{3!}{2!\cdot 1!} + \frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3 + 3 = 6.$$

Por outro lado,

$$C(4,2) = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 2} = \frac{24}{4} = 6.$$

Portanto,

$$C(3,1) + C(3,2) = C(4,2).$$

Observação. O que não posso esquecer sobre binômio de Newton?

1. Se x e y são números reais e n é um número inteiro positivo, então

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)b^k a^{n-k} \\ &= C(n,0)a^n + C(n,1)a^{n-1}\cdot b + C(n,2)a^{n-2}\cdot b^2 + \cdots + C(n,n-1)a\cdot b^{n-1} + C(n,n)b^n.\end{aligned}$$

2. O desenvolvimento $(a+b)^n$ tem $n+1$ termos.

3. Os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$ são os elementos da linha n do Triângulo de Pascal.

4. Escrevendo os termos do desenvolvimento na ordem acima o termo de ordem $k+1$ é:

$$T_{k+1} = C(n,k)b^k a^{n-k}.$$

Exercícios Propostos

1. Determine o termo central do desenvolvimento de $\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^8$. R: $70x^4$.

2. Determine o quinto termo do desenvolvimento de $\left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)^7$. R: $-\frac{280}{x^2}$.

3. Determine o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^3}\right)^{10}$. R: 210.

4. Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de $\left(2x^4 - \dfrac{1}{x}\right)^{12}$. R: -1760.

5. Determine o coeficiente de x^{28} no desenvolvimento $(x+2)^{20}(x^2-1)^5$. R: 755.

6. Para que valores de n o desenvolvimento de $\left(2x^2 - \dfrac{1}{x^3}\right)^n$ possui um termo independente?R: n é multiplo de 5.

7. Calcule o termo máximo e o termo mínimo do desenvolvimento de $\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)^{120}$.R: $\frac{C(120,40)}{2^{40}}$ e R: $\frac{1}{2^{120}}$

8. Determine a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(2x^2 - 3y)^{1991}$.R: -1.

9. Calcule a soma dos coeficientes dos termos de ordem par do desenvolvimento de $(2x^2 - 3y)^n$.R: $\frac{(-1)^n - 5^n}{2}$.

10. Qual é o maior dos números 101^{50} e $100^{50} + 99^{50}$?R: 101^{50} é maior.

Referências Bibliográficas

[1] Gersting, J. L.: *Fundamentos matemáticos para a ciência da computação*. LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 2010.

[2] Graham, R. L., Knuth D. E. e Patashnik O.: *Matemática Concreta: fundamentos para a ciência da computação*. LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 2008.

[3] Morgado, A. C. O., Carvalho J. B. P. Carvalho P. C. P. e Fernandez P.: *Análise Combinatória e Probabilidade*. Coleção do professor de matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1991.

[4] Rosen, K. H.: *Matemática discreta e suas aplicações*. The McGraw-Hill companies, 2009.