Universidade Federal de Uberlândia
Universidade Aberta do Brasil
Centro de Educação a Distância

Universidade Federal de Uberlândia
Licenciatura Plena em Matemática - PARFOR

Álgebra linear

Guilherme Chaud Tizziotti
Jean Venato Santos

2012

Álgebra linear

PRESIDENTE DA REPÚBLICA
Dilma Vana Rousseff

MINISTRO DA EDUCAÇÃO
Aloizio Mercadante

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
DIRETORIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA/CAPES
João Carlos Teatini de Souza Clímaco

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA - UFU
REITOR
Elmiro Santos Resende

VICE-REITOR
Eduardo Nunes Guimarães

CENTRO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA
DIRETORA E REPRESENTANTE UAB/UFU
Maria Teresa Menezes Freitas

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL - UFU
COORDENADOR UAB/UFU
Maria Teresa Menezes Freitas

SUPLENTE UAB/UFU
José Benedito de Almeida Júnior

FACULDADE DE MATEMÁTICA -FAMAT - UFU
DIRETOR
Luís Antônio Benedetti

CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO PLANO NACIONAL DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES DA EDUCAÇÃO BÁSICA PÚBLICA (PARFOR)

COORDENADORA
Fabiana Fiorezi de Marco Matos

PROFESSOR
Guilherme Chaud Tizziotti

EQUIPE DO CENTRO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA DA UFU - CEaD/UFU

ASSESSORA DA DIRETORIA
Sarah Mendonça de Araújo

EQUIPE MULTIDISCIPLINAR
Alberto Dumont Alves Oliveira
Gustavo Bruno do Vale
João Victor da Silva Alves
Otaviano Ferreira Guimarães

RESPONSÁVEL PELO SETOR DE TECNOLOGIA
Eucidio Pimenta Arruda

RESPONSÁVEL PELO SETOR PEDAGÓGICO
Marisa Pinheiro Mourão

REVISORA
Paula Godoi Arbex
ESTAGIÁRIOS
Antonio Mourão
Bruno Madureira
Cristhian Zanforlin Lousa
Daniel Kenji Nishiyama
Gustavo Lemes Mendonça
Gustavo Piccolo
Heldson Luiz da Silva
Janaína Batista do Nascimento
Julian Degutis de Freitas Garcia
Maíla Moura Suriani
Marcos Andrade Oliveira Júnior
Matheus Lacerda Domingos Medeiros
Rodrigo Junqueira Buzzi
Thiago Pereira Freitas

Sumário

Sobre o curso

Álgebra Linear é um ramo da Matemática que surgiu do estudo sistemático de sistemas de equações lineares, tanto algébricas quanto diferenciais. A álgebra linear trata de alguns conceitos e objetos fundamentais da matemática tais como: matrizes, sistemas de equações lineares, vetores, espaços vetoriais e transformações lineares. Tais conceitos são úteis em várias áreas da Matemática, seja explorando seus aspectos mais algébricos, ou levando em conta aspectos geométricos e topológicos inseridos na teoria.

Estes assuntos começaram tomar a forma que hoje os conhecemos em meados do século XIX, quando muitas noções e métodos de séculos anteriores foram abstraídos e generalizados. De fato, muitas das ferramentas básicas da álgebra linear, em especial aquelas relacionadas com a solução de sistemas de equações lineares, datam da antiguidade, como o método de Gauss (ou eliminação gaussiana), citado pela primeira vez por volta do século II d.c., porém tais ferramentas não haviam sido isoladas e consideradas separadamente até os séculos XVII e XVIII. Por exemplo, somente na virada do século XX, matrizes e tensores foram tratados como objetos matemáticos abstratos e assim estabelecidas suas propriedades de forma mais profunda. O uso de tais objetos na estatística, na mecânica quântica e na relatividade geral em muito contribuiu para a disseminação da Álgebra Linear para além da Matemática Pura.

A presente disciplina visa apresentar de forma introdutória os principais elementos da álgebra linear a partir dos seguintes módulos:

- Matrizes;
- Sistemas lineares;
- Espaços vetoriais;
- Transformações lineares;
- Espaços com produto interno.

O texto básico da disciplina é contemplado com exercícios estrategicamente posicionados, de tal forma que o conteúdo previamente estudado fique bem assimilado em seus conceitos mais básicos.

Quanto à metodologia, o curso seguirá com a seguinte base: estudo da teoria do livro texto, com o treino através dos exercícios nele contido, e atividades dentro do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), que serão passados para os alunos dentro do período de vigência de cada módulo, e que farão parte do processo de avaliação, assim como as provas presenciais.

Quanto ao cronograma, descrito mais adiante, as 75 horas do curso são distribuídas nos módulos de acordo com o número de semanas, considerando 4 horas de atividades de estudo da teoria por semana, sendo necessário considerar para cada hora de estudo em teoria pelo menos uma hora de estudo através de exercícios. Esse esquema tem por finalidade assegurar um treino mínimo nos módulos.

As listas de exercícios que serão disponibilizadas no AVA, nas datas citadas na tabela, deverão ser entregues em datas que também serão apresentadas no AVA para que os tutores possam corrigir. Desejamos ao caro aluno um ótimo curso, e torcemos para que atinja com sucesso os objetivos da disciplina.

Anotações

Módulo 1

Matrizes e Sistemas Lineares

Ao final deste módulo o leitor estará familiarizado com os seguintes conceitos:

- ▷ Matriz;
- ▷ Matriz quadrada;
- ▷ Matriz simétrica e antissimétrica;
- ▷ Matriz inversa;
- ▷ Sistema linear possível determinado ou possível indeterminado;
- ▷ Sistema linear impossível.

Leitura Complementar

O leitor interessado em aperfeiçoar e ampliar seus conhecimentos nos assuntos tratados neste módulo encontrará o suporte necessário nos seguintes textos: [1, 2, 6].

Adição de Matrizes

Ao final desta seção você deverá ser capaz de:

- ▷ Compreender o conceito de matriz.
- ▷ Identificar se uma matriz é retangular, quadrada, linha, coluna, nula ou diagonal.
- ▷ Fazer a adição e a subtração de matrizes.

Nesta primeira seção, veremos como representar uma matriz e como são definidas certas matrizes especiais.

Quando falamos em matrizes, o que lhe vem à mente? Certamente a resposta é um quadro, ou tabela, formados por números. Bem, a definição de matriz passa por isso mesmo, como veremos na definição a seguir.

Definição 1 (Matriz **).** Chamamos de matriz de ordem m por n um quadro com m linhas e n colunas cujos elementos, que podem ser números, funções, etc., estão dispostos em m linhas e n colunas, como abaixo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Em geral, denotamos uma matriz por uma letra maiúscula, por exemplo A, M ou I. E escrevemos "A é uma matriz $m \times n$", para dizer que A tem ordem m por n, lembrando que m denota o número de linhas e n o número de colunas da matriz. Para efeito de simplificação, usa-se também a notação $A_{(m,n)}$ ou $A_{m\times n}$, para dizer que A é uma matriz de ordem m por n.

Outra notação importante é a representação dos elementos de uma matriz, que também são chamados de *entradas*. Se A é uma matriz $m \times n$, denotam-se os elementos, ou entradas, de A por a_{ij}, onde o primeiro índice, i, indica a linha, e o segundo índice, j, a coluna a que o elemento a_{ij} pertence. Usando esta notação, pode-se representar uma matriz por $A = (a_{ij})$, ou ainda, $A = [a_{ij}]$, onde i varia de 1 a m (isto é, $i = 1, 2, \dots, m$), e j varia de 1 a n (isto é, $j = 1, 2, \dots, n$).

De agora em diante, representaremos uma matriz B por (b_{ij}), uma X por (x_{ij}) e assim por diante.

Denota-se o conjunto das matrizes $A_{m\times n}$ com entradas reais por $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Já o conjunto das matrizes $A_{m\times n}$ cujas entradas são números inteiros, é denotado por $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$, etc.

Neste material, em geral, vamos trabalhar com matrizes em $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

A seguir veremos como chamamos algumas matrizes com características especiais.

Matriz coluna: Uma matriz de ordem m por 1 é chamada de *matriz coluna*.

Por exemplo, a matriz $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ é uma matriz coluna.

Matriz linha: Uma matriz de ordem 1 por n é chamada de *matriz linha*.

A matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ é um exemplo de matriz linha.

Matriz retangular: É uma matriz de ordem m por n com $m \neq n$.

A matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 3 & 0 & sen\theta \end{pmatrix}$ é uma matriz retangular.

Matriz quadrada: É uma matriz na qual o número de linhas é igual ao número de colunas, ou seja, é uma matriz de ordem n por n.

A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada.

Observação. Quando nos referirmos à ordem de uma matriz quadrada $n \times n$, diremos simplesmente que ela tem ordem n.

Duas definições importantes no estudo de matrizes relacionada a matrizes quadradas são as seguintes.

Definição 2. *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n. Os elementos a_{ij}, com $i = j$, ou seja, $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, são chamados de **elementos principais** e constituem a **diagonal principal** da matriz A.*

Por exemplo, a diagonal principal da matriz $\begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ é formada por $1, 3, 0$ e -7.

Definição 3. *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n. O **traço** de A, denotado por $tr(A)$, é a soma dos elementos da diagonal principal de A, ou seja,*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Por exemplo, o traço da matriz $\begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ é dado por: $tr(A) = -1 + 3 + 1 = 3$.

Matriz diagonal: Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$, de ordem n, é chamada de *matriz diagonal* se os elementos a_{ij} são iguais a zero se $i \neq j$.

A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ é um exemplo de matriz diagonal.

Matriz triangular: Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$, de ordem n, é chamada de *matriz triangular superior* se os elementos a_{ij} são iguais a zero se $i > j$. No caso em que os elementos a_{ij} são iguais a zero se $j > i$, dizemos que a matriz quadrada $A = (a_{ij})$ é uma *matriz triangular inferior*.

A matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ é triangular superior. Já a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & -3 & 0 \\ 10 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ é triangular inferior.

Matriz nula: Uma matriz $A = (a_{ij})$ é chamada de *matriz nula* se todos os seus elementos a_{ij} são iguais a zero. Em geral, denota-se uma matriz nula simplesmente por 0.

Um exemplo de matriz nula é a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Além das matrizes que definimos até o momento, uma em particular é muito importante tanto no estudo de matrizes quanto para todo o decorrer deste curso. A matriz a que estamos nos referindo é a matriz identidade que é definida da seguinte maneira.

Matriz identidade: Uma matriz diagonal que possui todos os elementos de sua diagonal iguais a 1 é chamada de *matriz identidade*. Se esta matriz tem ordem n a denotamos I_n. Ainda pode-se denotá-la por I_d, ou simplesmente por I.

Exemplos de matrizes identidade são $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

TOME NOTA. Note que, para uma matriz ser uma matriz identidade ela antes tem que ser uma matriz diagonal, que por sua vez tem que ser uma matriz quadrada. Portanto, uma matriz identidade é antes de tudo uma matriz quadrada!

Uma observação importante que não pode ser deixada de lado é a seguinte.

Observação. Duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, **ambas** de ordem m por n, são iguais se $a_{ij} = b_{ij}$, para quaisquer i e j.

Por exemplo, as matrizes $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ são iguais, isto é, $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

É perfeitamente possível definirmos operações que envolvam matrizes. Nesta seção, vamos definir a adição, e como consequência a subtração, de matrizes. Na próxima seção veremos como definir o produto de uma matriz por um escalar e o produto de duas matrizes.

Adição e subtração de matrizes: Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ duas matrizes $m \times n$. A soma de A e B é uma matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times n$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para quaisquer i e j. E a diferença $A - B$ será a matriz $C = (c_{ij})$ também $m \times n$, tal que $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, para quaisquer i e j.

TOME NOTA. Note que a adição e a subtração de duas matrizes só podem ser feitas se ambas as matrizes possuem a mesma ordem.

A seguir, vemos alguns exemplos de adição e subtração de matrizes.

Exemplo 1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+(-2) & 2+1 \\ 1+1 & -1+1 \\ 3+(-1) & 0+2 \\ -5+3 & 7+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & -1-0 & 0-4 \\ 3-(-5) & 6-3 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalizamos esta seção introduzindo propriedades fundamentais a respeito da adição de matrizes.

Propriedades da adição de matrizes: Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$ matrizes $m \times n$ quaisquer, e 0 a matriz nula de ordem $m \times n$. Então são válidas as seguintes propriedades:

1) $A + (B + C) = (A + B) + C$, ou seja, a adição de matrizes é associativa.

2) $A + B = B + A$, isto é, a adição de matrizes é comutativa.

3) $A + 0 = A$, a matriz nula 0 é o elemento neutro com respeito à adição de matrizes.

4) $-A + A = A - A = 0$, isto é, a matriz $-A$ é a matriz inversa da matriz A com respeito à adição.

Utilizando as definições de adição a subtração de matrizes não é difícil mostrar a veracidade das quatro propriedades acima. Deixaremos a cargo do leitor, como exercício, comprovar que tais propriedades são realmente válidas.

Seguindo os exemplos feitos nesta seção, faça os exercícios a seguir para uma melhor fixação do conteúdo estudado.

EXERCÍCIOS

1. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & a-1 \\ -1 & b^2+1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$, encontre a e b de modo que as matrizes A e B sejam iguais.

2. Será que existem x e y de modo que as matrizes $M = \begin{pmatrix} x+1 & y^3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sejam iguais? Justifique.

3. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix}$, calcule $A+B$, $A+(B-C)$ e $B-(C-A)$.

4. Faça o mesmo que no exercício anterior para os casos em que $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \\ -1 & 5 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$.

Produto de Matrizes

Ao final desta seção você deverá ser capaz de:

- ▷ Calcular o produto de uma matriz por um escalar.
- ▷ Calcular o produto de duas matrizes.

Começaremos esta seção definindo o produto de uma matriz A por um número real α. Na linguagem de matrizes, como na de vetores que veremos mais à frente, o número real α será chamado de escalar.

Produto de uma matriz por um escalar: Sejam α um escalar e $A = (a_{ij})$ uma matriz $m \times n$. O produto de A por α é uma matriz $B = (b_{ij})$ também $m \times n$ tal que $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ para quaisquer i e j. Costuma-se denotar por $\alpha A = (\alpha a_{ij})$ a matriz que é o produto do escalar α pela matriz A.

Por exemplo,

$$4.\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.2 & 4.(-1) & 4.0 & 4.3 \\ 4.1 & 4.0 & 4.(-2) & 4.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 & 12 \\ 4 & 0 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

O produto de uma matriz por um escalar satisfaz as seguintes propriedades.

Propriedades do produto de uma matriz por um escalar: Sejam α e β escalares, e A e B matrizes $m \times n$ quaisquer. Então são válidas as seguintes propriedades:

1) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

2) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \beta B$

4) $1.A = A$

Vamos mostrar somente a segunda propriedade. As demais podem ser mostradas de forma análoga e serão deixadas como exercício para o leitor.

Vejamos que dados dois escalares α e β, e uma matriz $A = (a_{ij})$, de ordem $m \times n$, quaisquer, então $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

De fato, $(\alpha + \beta)A$ é, por definição, uma matriz $B = (b_{ij})$, onde $b_{ij} = (\alpha + \beta)a_{ij}$.

Agora, $(\alpha+\beta)a_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta a_{ij}$. Assim, $b_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta a_{ij}$. Sendo $\alpha A = (\alpha a_{ij})$ e $\beta A = (\beta a_{ij})$, então, por definição de soma de matrizes, segue que $B = \alpha A + \beta A$. Portanto, $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.

Dadas duas matrizes A e B será que sempre é possível fazer o produto de A por B? Será que o produto de A por B é igual ao produto de B por A? A partir de agora vejamos como responder estas e outras questões relacionadas ao produto de matrizes cuja definição é dada abaixo.

Produto de matrizes: Sejam $A = (a_{ij})$ uma matriz $m \times n$ e $B = (b_{ij})$ uma matriz $r \times s$. Definimos o produto de A por B, e denotamos $A.B$, ou simplesmente AB, da seguinte maneira: primeiramente, temos que ter $n = r$, esta condição é necessária para se definir o produto de duas matrizes; sendo $n = r$, o produto $A.B$ será a matriz $C = (c_{ij})$, de ordem $m \times s$, tal que $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2} + b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$, com $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, s$.

Exemplo 3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 + 2.6 \\ 3.5 + 4.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$

Exemplo 4. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 7 \\ 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0.1 + 2.5 + (-1).3 + 0.9 & 0.1 + 2.2 + (-1).(-4) + 0.1 & 0.(-1) + 2.0 + (-1).7 + 0.0 \\ 3.1 + (-2).5 + 4.3 + 1.9 & 3.1 + (-2).2 + 4.(-4) + 1.1 & 3.(-1) + (-2).0 + 4.7 + 1.0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 8 & -7 \\ 14 & -16 & 25 \end{pmatrix}$$

TOME NOTA. Note que em geral, não temos a igualdade $AB = BA$. Primeiro que para ambos os produtos existam é necessário, pela definição de produto de matrizes, que A seja uma matriz $m \times n$ e que B seja uma matriz $n \times m$. Segundo, mesmo que isso ocorra, podemos não ter $AB = BA$, como veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 5. *Sejam* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$*. Então,*

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.1+2.0+1.3 & 0.0+2.(-1)+1.5 & 0.(-2)+2.4+1.2 \\ 3.1+0.0+(-1).3 & 3.0+0.(-1)+(-1).5 & 3.(-2)+0.4+(-1).2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 0 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

.

Agora, o produto BA não existe, já que B é uma matriz 3×3 e A é uma matriz 2×3.

Exemplo 6. *Sejam* $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$*. Assim,*

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.(-3) & 1.0 & 1.5 \\ 2.(-3) & 2.0 & 2.5 \\ 4.(-3) & 4.0 & 4.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ -6 & 0 & 10 \\ -12 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$ *que é uma matriz 3×3.*

$$BA = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3).1+0.2+5.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \end{pmatrix}$$ *que é uma matriz 1×1.*

Note que tanto AB quanto BA existem, mas claramente AB é diferente de BA.

Exemplo 7. *Sejam* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$*. Então,*

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1+1.0 & 0.(-1)+1.2 \\ 1.1+(-1).0 & 1.(-1)+(-1).2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 + (-1).1 & 1.1 + (-1).(-1) \\ 0.0 + 2.1 & 0.1 + 2.(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

E temos mais um exemplo onde $AB \neq BA$.

Portanto, podemos dizer que a multiplicação de matrizes não é comutativa.

Mas existem matrizes A e B tais que $AB = BA$. Um exemplo óbvio é quando $B = A$. Outro exemplo é quando A é uma matriz quadrada de ordem n e $B = I_n$, neste caso tem-se $AI_n = I_nA$. Além disso, usando a definição de produto de matrizes, mostra-se que $AI_n = I_nA = A$.

Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
Então, $AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.0 + (-1).(-1) & 3.1 + (-1).3 \\ 1.0 + 0.(-1) & 1.1 + 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

E $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 + 1.1 & 0.(-1) + 1.0 \\ (-1).3 + 3.1 & (-1).(-1) + 3.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ou seja, temos que $AB = BA = I_2$.

Matriz inversa: Dada uma matriz quadrada de A de ordem n. A matriz B (quando existir) tal que $AB = BA = I_n$ é chamada de *matriz inversa* de A. Veremos que se uma matriz A possui inversa esta será única. Diante disso denotamos a inversa da matriz A por A^{-1}.

Falaremos mais sobre matriz inversa nas aulas seguintes, onde veremos suas propriedades e como encontrá-la. Mas adiantamos que nem todas matrizes possuem uma inversa. Note na definição acima que uma condição necessária para uma matriz A ter uma inversa é que A seja uma matriz quadrada. Porém, veremos mais adiante que está condição não é suficiente, isto é, existem matrizes quadradas que não possuem inversa.

Apesar de não ser comutativo o produto de matrizes satisfaz algumas importantes propriedades que vemos a seguir.

Propriedades do produto de matrizes:

1) Sejam A, B e C matrizes de ordem $m \times n$, $n \times p$ e $p \times r$, respectivamente. Então,
   $(AB)C = A(BC)$;

2) Sejam A, B e C matrizes de ordem $m \times n$, $m \times n$ e $n \times p$, respectivamente. Então, $(A+B)C = AC + BC$;

3) Sejam A, B e C matrizes de ordem $m \times n$, $m \times n$ e $p \times m$, respectivamente. Então, $C(A+B) = CA + CB$;

4) Se A é uma matrizes de ordem $m \times n$, então $I_m A = AI_n = A$;

5) Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$, $n \times p$, respectivamente. Então, para todo número α tem-se: $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$.

Novamente deixaremos a cargo do leitor a verificação das propriedades acima.

Seguindo os exemplos feitos nesta seção, faça os exercícios para uma melhor fixação do produto de matrizes.

EXERCÍCIOS

1. Sejam $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Em cada um dos itens abaixo encontre o produto pedido ou diga, justificando, que não é possível fazê-lo.

   a) AB

   b) BC

   c) $A(C+D)$

   d) $B(C+D)$

   e) $(C+D)B$

   f) $A(BC)$

   g) $B(AC)$

2. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$. Determine os valores de x, y, z e w para que $AB = I_2$.

3. Sejam $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$. Verifique que $A(BC) = (AB)C$.

4. Mostre as cinco propriedades do produto de matrizes dadas no final desta seção.

Matrizes Transposta, Simétrica e Ortogonal

Ao final desta seção você deverá ser capaz de:

▷ Encontrar a transposta de uma matriz.

▷ Compreender as propriedades da matriz transposta.

▷ Identificar matrizes simétricas, antissimétricas e ortogonais.

Vamos começar esta seção definindo a transposta de uma matriz.

Matriz transposta: Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $m \times n$. A *matriz transposta* de A, denotada por A^T, ou A^t, é uma matriz $n \times m$ obtida, a partir de A, trocando as linhas pelas colunas de mesmo índice. Ou seja, se $A = (a_{ij})$, então a matriz transposta de A é definida por $A^T = (a_{ji})$.

Exemplo 8. *a) Seja* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 9 & 17 & 11 & 8 \end{pmatrix}$. *Então,* $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 2 & 17 \\ 0 & 11 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

b) Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$, *então* $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{pmatrix}$.

c) Se $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, *então* $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Temos algumas propriedades que podem ser úteis quando tratamos de matrizes transpostas. Tais propriedades são as seguintes.

Propriedades da matriz transposta:

1) $(A + B)^T = A^T + B^T$, onde A e B são matrizes $m \times n$.

2) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, sendo A uma matriz qualquer.

3) $(A^T)^T = A$, sendo A uma matriz qualquer.

4) $(AB)^T = B^T A^T$, onde A é uma matriz $m \times n$ e B é uma matriz $n \times m$.

Primeiramente, vejamos a validade de 1), isto é, $(A+B)^T = A^T + B^T$. De fato, sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes $m \times n$. Então, pela definição de soma de matrizes, $A + B = C = (c_{ij})$, onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para quaisquer i e j. Agora, $(A+B)^T = C^T = (c_{ji})$, com $c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$, ou seja, $C^T = A^T + B^T$. Logo, $(A+B)^T = A^T + B^T$.

Agora, vejamos que $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, onde $A = (a_{ij})$ é uma matriz $m \times n$. Pela definição de produto de uma matriz por um escalar, temos $\alpha A = (\alpha a_{ij})$. Assim, segue que $(\alpha A)^T = (\alpha a_{ji}) = \alpha A^T$.

Deixaremos a verificação das propriedades 3) e 4) como exercício.

Matriz simétrica: Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ é uma *matriz simétrica* se $A^T = A$, ou seja, se $a_{ij} = a_{ji}$ para quaisquer i e j.

Exemplo 9. *a) A matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ *é simétrica, já que* $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = A.$

b) A matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 1 & 16 \\ 0 & 16 & 5 \end{pmatrix}$ *é simétrica, pois* $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 1 & 16 \\ 0 & 16 & 5 \end{pmatrix} = A.$

TOME NOTA. Uma propriedade interessante envolvendo uma matriz quadrada e sua transposta é a seguinte: seja A uma matriz quadrada, então $A.A^T$ é uma matriz simétrica, ou seja, $A.A^T = C$, onde C é uma matriz simétrica.

De fato, suponha que $A = (a_{ij})$ seja uma matriz quadrada de ordem n. Então, $A^T = (a_{ji})$ que também é uma matriz quadrada de ordem n. Pela definição de produto de matrizes, temos que $A.A^T = C$, com $C = (c_{ij})$ quadrada de ordem n e $c_{ij} = a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + a_{i3}a_{j3} + \ldots + a_{in}a_{jn}$. Assim, vemos que $c_{ji} = c_{ij}$, e portanto $C = C^T$. Logo, $A.A^T = C$ é simétrica.

Exemplo 10. *Seja* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. *Então,* $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

Logo,

$$A.A^T = \begin{pmatrix} 0.0+2.2+1.1 & 0.3+2.(-1)+1.5 & 0.4+2.0+1.8 \\ 3.0+(-1).2+5.1 & 3.3+(-1).(-1)+5.5 & 3.4+(-1).0+5.8 \\ 4.0+0.2+8.1 & 4.3+0.(-1)+8.5 & 4.4+0.0+8.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 3 & 35 & 52 \\ 8 & 52 & 80 \end{pmatrix},$$

que é uma matriz simétrica.

Matriz antissimétrica: Dizemos que uma matriz quadrada A é *antissimétrica* se $A = -A^T$.

Exemplo 11. *a) A matriz* $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ *é antissimétrica, já que* $M^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -M$.

b) A matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -7 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ *é antissimétrica, pois* $B^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 7 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix} = -B$.

TOME NOTA. Note que se $A = (a_{ij})$ é uma matriz antissimétrica, então ela é uma matriz quadrada com os elementos da diagonal principal sendo todos nulos e os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal sendo opostos.

Matriz ortogonal: Uma matriz A é chamada de *matriz ortogonal* se $A^{-1} = A^T$, ou seja, se $A.A^T = A^T.A = I_d$.

Exemplo 12. *Considere a matriz* $G = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. *Então,* $G^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Logo, $G.G^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + sen^2\theta & \cos\theta sen\theta - sen\theta\cos\theta \\ sen\theta\cos\theta - \cos\theta sen\theta & sen^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, G *é uma matriz ortogonal.*

Seguindo os exemplos feitos nesta seção, faça os exercícios para uma melhor fixação das definições e propriedades estudadas.

EXERCÍCIOS

1. Determine a matriz transposta de cada uma das matrizes abaixo.

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

   b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & -7 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

   c) $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

   d) $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \\ p_{31} & p_{32} \end{pmatrix}$

2. Sejam $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcule.

a) $(M+N)^T$

b) $(2.M)^T$

c) $(MN)^T$

3. Diga quais das matrizes abaixo são simétricas ou antissimétricas.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 1 \\ 9 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

4. Diga qual das matrizes abaixo é ortogonal. Jusifique.

a) $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

b) $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ 4 & 3 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

c)$W = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Escalonamento de Matrizes

Ao final desta seção você deverá ser capaz de escalonar uma matriz quadrada de ordem $m \times n$.

Nesta seção vamos descrever um processo muito útil no tratamento não só de matrizes, que nos ajuda a calcular o determinante de uma matriz de ordem n, mas também a solução de sistemas lineares, como veremos mais adiante. Tal processo utiliza operações chamadas elementares de matrizes e é chamado de escalonamento ou triangulação de matrizes. Antes, porém, vamos definir alguns conceitos importantes que justificam este processo.

Dependência e independência linear de linhas e colunas de uma matriz

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $m \times n$. Vamos representar a linha i de A por:

$$L_i = [\ a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3}\ \ldots\ a_{in}\ ],$$

onde, para cada $i = 1, 2, \ldots, m$, L_i será uma matriz $1 \times n$.

Uma **combinação linear** de k linhas de A será qualquer expressão do tipo

$$L = \alpha_1.L_{i_1} + \alpha_2.L_{i_2} + \ldots + \alpha_k.L_{i_k}$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, e $i_j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, para cada $j = 1, 2, \ldots, k$.

Note que se $L_0 = [\ 0\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ ]$ for uma matriz nula, então tomando $\alpha_i = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, temos que

$$L_0 = 0.L_{i_1} + 0.L_{i_2} + \ldots + 0.L_{i_k}.$$

Considerando a expressão $L_0 = \alpha_1.L_{i_1} + \alpha_2.L_{i_2} + \ldots + \alpha_k.L_{i_k}$, se a única possibilidade de obtermos esta igualdade for quando $\alpha_i = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, então dizemos que as linhas $L_{i_1}, L_{i_2}, \ldots, L_{i_k}$ são **linearmente independentes**. Agora, se a igualdade for válida para pelo menos um α_i diferente de zero, então dizemos que as linhas $L_{i_1}, L_{i_2}, \ldots, L_{i_k}$ são **linearmente dependentes**.

TOME NOTA. Note que se uma das linhas L_{i_j} for igual a L_0, então $L_{i_1}, L_{i_2}, \ldots, L_{i_k}$ são linearmente dependentes.

De fato, sem perda de generalidade, suponhamos que $L_{i_1} = L_0$. Assim,

$$L_0 = \alpha_1.L_{i_1} + 0.L_{i_2} + \ldots + 0.L_{i_k} = \alpha_1.L_0 + 0.L_{i_2} + \ldots + 0.L_{i_k}$$

onde α_1 pode assumir qualquer valor real.

Analogamente, podemos definir dependência e independência linear do ponto de vista das colunas de uma matriz. Um fato importante é que o número máximo de linhas linearmente independentes em uma matriz A é igual ao número máximo de colunas linearmente independentes de A.

Algumas propriedades da dependência e independência linear são as seguintes:

1) A dependência ou independência linear das linhas de uma matriz não se altera se trocarmos a ordem dessas linhas.

2) Se $L_{i_1}, L_{i_2}, \ldots, L_{i_k}$ são linearmente dependentes, então $L_{i_1}, L_{i_2}, \ldots, L_{i_k}, L_{i_{k+1}}$ também são linearmente dependentes. Ou seja, acrescentar uma linha em um conjunto linearmente dependente mantém a dependência linear.

3) Se $L_{i_1}, L_{i_2}, \ldots, L_{i_k}$ são linearmente dependentes (independentes), então $L_{i_1}, L_{i_2}, \ldots, \alpha.L_{i_j}, \ldots, L_{i_k}$ também é linearmente dependente (independente) se $\alpha \neq 0$. Ou seja, multiplicar uma das linhas por um escalar não nulo mantém a dependência (independência) linear.

4) Se $L_{i_1}, L_{i_2}, \ldots, L_{i_s}, \ldots, L_{i_j}, \ldots, L_{i_k}$ são linearmente dependentes (independentes), então $L_{i_1}, L_{i_2}, \ldots, L_{i_s}, \ldots, L_{i_j} + L_{i_k}, \ldots, L_{i_k}$ também é linearmente dependente (independente). Ou seja, somar uma das linhas a uma linha mantém a dependência (independência) linear.

5) As linhas de uma matriz triangular (superior ou inferior), com os elementos da diagonal principal diferentes de zero, são linearmente independentes.

Definição 4. *A **característica** ou **posto** de uma matriz A é o número máximo de linhas de A que são linearmente independentes.*

Como o número de linhas linearmente independentes é igual ao número de colunas linearmente independentes, podemos calcular o posto de uma matriz tanto por linhas como por colunas.

Definição 5. *Dizemos que duas matrizes A e B são **equivalentes**, indicamos $A \sim B$, se ambas possuem a mesma ordem e têm o mesmo posto.*

Observamos que, se A é uma matriz triangular, então o posto de A é igual ao número de elementos da diagonal principal que são diferentes de zero.

O processo de escalonamento de uma matriz A consiste obter, a partir de A, uma matriz B, equivalente a A, na qual figure uma matriz triangular superior ou inferior da maior ordem possível. Este processo utiliza operações elementares, as quais veremos a seguir.

Suponha que $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$, onde $L_1, L_2, \ldots, L_n$ são as linhas da matriz A de ordem $n \times m$. Então, chamaremos de **operações elementares** de A as seguintes:

1) Permutar duas linhas, ou seja, trocar as linhas L_i e L_j, com $i \neq j$, de lugar;

2) Multiplicar uma linha por um número diferente de zero;

3) Substituir uma linha por uma linha formada pela soma da linha que está sendo substituída com uma outra linha da matriz previamente multiplicada por um número diferente de zero, ou seja, substituir L_i por $L_i + k.L_j$, com $k \neq 0$.

Observamos que, de forma análoga, as operações elementares também são definidas sobre as colunas da matriz.

O processo de escalonamento possui várias etapas, onde, em cada uma delas, vamos anulando as entradas abaixo (ou acima) da diagonal principal de uma submatriz quadrada de maior ordem possível, ou da diagonal principal da própria matriz no caso de a matriz a ser escalonada seja quadrada.

Vejamos como fazer o escalonamento de uma matriz não nula $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$.

Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Suponhamos que $a_{11} \neq 0$. Se $a_{11} = 0$, basta trocar linhas ou colunas de forma a colocar um elemento não nulo na posição de a_{11}. O primeiro passo é adicionar a primeira linha a todas as outras restantes, multiplicada por fatores de forma que anulem todos os elementos seguintes da primeira coluna que estão abaixo de a_{11}. Dessa forma, obtemos a matriz abaixo, que é equivalente à matriz A,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim A$$

A seguir, procedemos com a_{22} em relação à segunda coluna, como procedemos com a_{11} em relação à primeira coluna. Daí, obtemos a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim A$$

E assim, procedemos de modo análogo para os restantes a_{ii} até que o escalonamento termine ou porque não há mais linhas ou porque as linhas que existem são todas formadas por zeros. A matriz ao final do processo, dada abaixo, terá uma forma onde nela figure uma matriz ou uma submatriz triangular da maior ordem possível com elementos principais não nulos.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3k} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{4k} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix} \sim A$$

Ao final, podemos dividir cada linha i, onde a_{ii} for não nulo, por a_{ii}, de modo a ter 1 no lugar destes a_{ii}.

Vejamos como fazer o escalonamento através de exemplos.

Exemplo 13. *Seja* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$1^o)$ *Temos que* $a_{11} = 2$. *Como a entrada* a_{21}*, logo abaixo de* a_{11}*, é igual a zero, o primeiro passo (ou etapa) é substituir a linha* 3 *pela linha* 1 *multiplicada por* (-3) *e somada pela linha* 3. *Vamos representar esta operação por:* $L_3 \to (-3).L_1 + L_3$. *Assim, obtemos a matriz*

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -11 & 3 \end{pmatrix}$$

Por praticidade, escrevemos este procedimento como:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} L_3 \to -3.L_1 + L_3 \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -11 & 3 \end{pmatrix}$$

$2^o)$ *Tendo a primeira coluna no modo desejado, o próximo passo é deixar o elemento* a_{32} *igual a* 0*. Para isso basta multiplicar a segunda linha por* $-\dfrac{11}{3}$ *e somar com a terceira. Assim, obtemos*

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -11 & 3 \end{pmatrix} L_3 \to -\frac{11}{3}.L_2 + L_3 \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -\dfrac{13}{3} \end{pmatrix}$$

E o processo acaba, já que chegamos a uma matriz na forma desejada. Caso quiséssemos deixar os elementos principais iguais a 1, bastaria multiplicar a primeira linha por $\dfrac{1}{2}$*, a segunda por* $-\dfrac{1}{3}$ *e a terceira por* $-\dfrac{3}{13}$*. Assim, temos*

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -\dfrac{13}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De forma resumida escrevemos da seguinte maneira:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} L_3 \to -3.L_1 + L_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -11 & 3 \end{pmatrix} L_3 \to -\frac{11}{3}.L_2 + L_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -\dfrac{13}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \to \frac{1}{2}.L_1 \\ L_2 \to -\frac{1}{3}.L_2 \\ L_3 \to -\frac{3}{13}.L_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 14. *Seja* $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$*. Vamos escalonar a matriz* A*.*

$1^o)$ *Note que* $a_{11} = 0$ *e que* $a_{31} = 1$*. Assim, vamos trocar as linhas 1 e 3 de posição. Poderíamos também trocar as linhas 1 e 2, já que* $a_{21} = 2 \neq 0$*. Então, temos que:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$2^o)$ *Agora, substituindo a linha 2 pela linha 1 multiplicada por* -2 *e somando com a linha 2 temos:* $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Logo, a primeira coluna está na forma desejada.

$3^o)$ *Multiplicando a linha 2 por* $-\frac{1}{2}$*, temos* $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$4^o)$ *Substituindo a linha 3 pela linha 2 multiplicada por* -3 *e somada com a linha 3, temos* $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

Finalmente, multiplicamos a linha 3 por $\frac{1}{5}$*, e obtemos*

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 15. *Seja* $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -5 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$*, escalone a matriz* M*.*

Vejamos. Escrevendo resumidamente, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -5 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \to L_2 \\ L_2 \to L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -5 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \to -2.L_1 + L_2 \\ L_4 \to \quad L_1 + L_4 \\ L_5 \to -3.L_1 + L_5 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \to \quad -1.L_2 \\ L_3 \to \quad 2.L_2 + L_3 \\ L_4 \to \quad 5.L_2 + L_4 \\ L_5 \to -1.L_2 + L_5 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \to \frac{1}{11}.L_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_4 \to -15.L_3 + L_4 \\ L_5 \to -2.L_3 + L_5 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Seguindo os exemplos feitos nesta seção, faça os exercícios para uma melhor fixação do método de escalonamento.

EXERCÍCIOS

1. Escalone cada uma das matrizes abaixo.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \end{pmatrix}$

d) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $L = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 6 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Inversão de Matrizes

Ao final desta seção você deverá ser capaz de encontrar a inversa de uma matriz quadrada.

Nesta seção apresentaremos um método para se obter a inversa de uma matriz. Antes porém, vejamos importantes definições e propriedades relacionadas à matriz inversa.

Matriz Singular e Não-Singular: Chamamos uma matriz quadrada A de *singular* se o determinante de A for nulo, ou seja, se $det(A) = 0$. Caso contrário, dizemos que a matriz A é *não-singular* (ou regular).

Exemplo 16. *A matriz* $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ *é uma matriz singular.*

Já a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ *é não-singular.*

Observação. Se A é uma matriz singular, então ela não possui inversa. Mas, se A é não-singular, então ela possui inversa. Lembre que $det(I) = 1$ e que se A possui inversa, então $A.A^{-1} = I$.

Propriedades da matriz inversa:

1) Se uma matriz A admite inversa, então esta inversa é única.

2) Se A é uma matriz não-singular, então sua inversa A^{-1} também é não-singular. Além disso, a inversa de A^{-1} é A, ou seja, $(A^{-1})^{-1} = A$.

3) A inversa da matriz identidade I é ela mesma, ou seja, $I^{-1} = I$.

4) Se a matriz A é não-singular, então A^T também é não-singular. Além disso, $(A^{-1})^T$ é a inversa de A^T.

5) Se A e B são matrizes não-singulares de mesma ordem, então o produto AB também é uma matriz não-singular e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demonstração. 1) Suponhamos que A admite inversa e que B e C são duas inversas de A. Vejamos que $B = C$. De fato, como B é inversa de A, então $A.B = I$. Multiplicando ambos os lados desta igualdade pela matriz C, temos que $C.(A.B) = C.I \Rightarrow (C.A).B = C \Rightarrow I.B = C \Rightarrow B = C$. c.q.d. (como queríamos demonstrar)

2) Suponhamos que A é não-singular, ou seja, $det(A) \neq 0$. Como $A.A^{-1} = I$ e $det(I) = 1$, segue que $det(A.A^{-1}) = 1 \Rightarrow det(A).det(A^{-1}) = 1$. Agora, $det(A) \neq 0$ e então temos que

$det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)} \neq 0$. c.q.d.

3) Segue diretamente do fato de que $I.I = I$.

4) Sabemos que $det(A^T) = det(A)$. Logo, se A é não-singular, então é claro que A^T também será não-singular. Agora, vejamos que $(A^{-1})^T$ é a inversa de A^T.

De fato, $(A^{-1})^T.A^T = (A.A^{-1})^T = I^T = I$. Portanto $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. c.q.d.

5) Suponhamos que A e B são matrizes não-singulares de mesma ordem.

Então, como $det(AB) = det(A).det(B)$, segue que AB é não-singular. Para mostrar que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, basta observar que $(B^{-1}A^{-1}).(AB) = I$.

■

Um método para se inverter uma matriz quadrada A utilizando as operações elementares, dadas na seção onde estudamos escalonamento, é o seguinte:

$1^o)$ coloca-se à direita da matriz A a matriz I, separada por um traço vertical;

$2^o)$ transforma-se, por meio de operações elementares, a matriz A na matriz I, aplicando-se simultaneamente à matriz I, as mesmas operações elementares.

$3^o)$ a matriz que estará à direita da matriz I, ao final do processo, será a inversa de A, que é A^{-1}.

As mesmas operações elementares que transformarão a matriz A na matriz identidade I, transformarão I na matriz A^{-1}.

Vejamos como fazer este processo através de alguns exemplos.

Exemplo 17. *Vamos determinar a inversa de* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Primeiramente, vamos colocar a matriz I *à direita de* A*, separando-as com um traço.*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Agora, vamos transfomar, utilizando operações elementares, a A *na matriz* I.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow L_1 \to \frac{1}{3}.L_1$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow L_2 \to 2.L_1 - L_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{array}\right) \longrightarrow L_2 \to -3.L_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow L_1 \to \frac{2}{3}.L_2 + L_1$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Portanto, a inversa de A *será* $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Note que $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.(-1) + (-2).(-2) & 3.2 + (-2).3 \\ 2.(-1) + (-1).(-2) & 2.2 + (-1).3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemplo 18. *Determine a inversa da matriz* $M = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

A primeira coisa a fazer é colocar a matriz I à direita de M, separando-as com um traço.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Utilizando as operações elementares teremos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \textit{Permutamos as linhas } L_1 \textit{ e } L_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow L_2 \to 2.L_1 + L_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow L_2 \to \frac{1}{4}.L_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow L_3 \to 3.L_1 - L_3$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow L_3 \to 6.L_2 + L_3$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 6 & -1 \end{array}\right)$$

Logo, temos que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

Faça os produtos $M.M^{-1}$ e $M^{-1}.M$ e comprove que de fato eles resultam na matriz identidade.

Seguindo os exemplos feitos nesta seção, faça os exercícios para uma melhor fixação do método para encontrar matrizes inversas.

EXERCÍCIOS

1. Encontre a inversa, caso exista, de cada uma das matrizes abaixo. No caso em que a matriz não possua inversa, justifique sua resposta.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 7 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Sistemas Lineares

Ao final desta seção você deverá ser capaz de:

- ▷ Resolver sistemas lineares utilizando o método de Gauss-Jordan.
- ▷ Resolver sistemas lineares utilizando o método da matriz inversa.

Nesta seção, vamos estudar sistemas de equações lineares, que constituem um tópico de muito interesse prático. Veremos como classificá-los e resolvê-los.

TOME NOTA. Dica de leitura: O artigo *Sobre o ensino de sistemas lineares*, de Elon Lages Lima, é muito interessante e vale a pena ser lido.

Para começar vamos ver como é definida uma equação linear.

Uma *equação linear* é uma equação da forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, na qual $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são chamados de *variáveis* (ou incógnitas); $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são chamados *coeficientes das variáveis*; e b é chamado de *termo independente*.

Os valores das variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfazem a equação são chamados de *solução* da equação.

Um *sistema de equações lineares*, ou simplesmente sistema linear, é um conjunto de equações lineares. Representamos um sistema linear de m equações com n variáveis da seguinte maneira:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sistema possível: Um sistema que admite solução é chamado de *sistema possível*.

Exemplo 19. *O sistema*

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

é um sistema possível, já que $x = 2$ *e* $y = 1$ *é uma solução.*

Sistema determinado: Um sistema possível é chamado de *sistema determinado* quando possui uma única solução.

O exemplo anterior é um exemplo de um sistema determinado.

Sistema indeterminado: Um sistema possível é chamado de *sistema indeterminado* quando possui mais de uma solução (no caso infinitas).

Exemplo 20. *O sistema*

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

é um sistema possível e indeterminado, já que $x = -1$ *e* $y = 2$ *é uma solução,* $x = 1$ *e* $y = 0$ *também é uma solução, assim como todos os valores de* x *e* y *tais que* $x = 1 - 2y$*.*

Sistema impossível: Um sistema linear é chamado de *sistema impossível* quando não possui solução.

Exemplo 21. *O sistema*

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

é um sistema impossível, já que a expressão $2x + y$ *não pode ser simultaneamente igual a 0 e igual a 2.*

Sistema homogêneo: Quando os termos independentes de um sistema linear são todos nulos o chamamos de *sistema homogêneo*.

Exemplo 22. *O sistema*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ -2x + 5y - 4z = 0 \end{cases}$$

é um sistema homogêneo.

TOME NOTA. Note que um sitema homogêneo sempre possui pelo menos uma solução, que é $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Essa solução é chamada de *solução trivial*.

Sistemas equivalentes: Dizemos que dois, ou mais, sistemas de equações lineares são *equivalentes* quando eles possuem a mesma solução.

Exemplo 23. *Os sistemas*

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

são equivalentes, pois possuem a mesma solução $x = 2$ *e* $y = 1$

Operações elementares: Um sistema linear se transforma em um sistema equivalente quando se efetuam as seguintes operações elementares:

1) Permutação de duas equações.

2) Multiplicação de uma equação por um número real diferente de zero.

3) Substituição de uma equação por sua soma com outra equação previamente multiplicada por um número real diferente de zero.

Observação. Observe que estas operações elementares são análogas às dadas na seção onde apreendemos a escalonar matrizes. O processo que será feito para resolver um sistema linear será essencialmente o mesmo para escalonar uma matriz.

Primeiramente, vejamos como encontrar a solução de um sistema de n equações com n variáveis. Veremos dois métodos para esse propósito, o método de Gauss-Jordan e o método da matriz inversa.

Solução de um sistema de n equações com n variáveis: método de Gauss-Jordan

O método de Guass-Jordan consite em trabalhar com as operações elementares a fim de deixar o sistema inicial equivalente a um sistema cujos termos independentes sejam a sua solução. O método consiste no seguinte:

$1^{\text{o}})$ coloca-se ao lado da matriz dos coeficientes a matriz coluna dos termos independentes, separadas por um traço vertical (de maneira semelhante ao processo de inversão de matrizes);

$2^{\text{o}})$ transforma-se, por meio de operações elementares, a matriz dos coefientes na matriz identidade, aplicando-se, simultanemente, à matriz coluna dos termos independentes, as mesmas operações;

$3^{\text{o}})$ transformada a matriz dos coeficientes na matriz identidade, a matriz dos termos independentes ficará transformada, ao final, na solução do sistema.

A matriz, associada ao sistema, formada no primeiro passo, é chamada de **matriz ampliada do sistema**. Cada uma de suas linhas é uma representação abreviada da equação correspondente no sistema. O traço vertical é dispensável, mas é colocado para facilitar a visualização da matriz dos coeficientes e da matriz coluna dos termos independentes. O exemplo a seguir ilustra a aplicação do método de Guass-Jordan.

Exemplo 24. *Vamos resolver o sistema*

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 8 \\ 2x - 4y - 2z = -4 \\ x - 2y - 3z = -4 \end{cases}$$

utilizando o método de Guass-Jordan.

O primeiro passo é colocar a matriz coluna dos termos independentes ao lado da matriz dos coeficientes, separadas por um traço vertical. Ou seja, construir a matriz ampliada do sistema, que é dada abaixo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 8 \\ 2 & -4 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

Agora, analogamente ao processo feito para encontrar a inversa de uma matriz, vamos usar operações elementares para transformar a matriz dos coefientes na matriz identidade, aplicando-se, simultanemente, à matriz coluna dos termos independentes, as mesmas operações. Vejamos.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 8 \\ 2 & -4 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow L_1 \to \frac{1}{3}L_1$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 2 & -4 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow L_2 \to L_2 + (-2)L_1$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{16}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{28}{3} \\ 1 & -2 & -3 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow L_3 \to L_3 + (-1)L_1$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{16}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{28}{3} \\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{20}{3} \end{array}\right) \longrightarrow L_2 \to -\frac{3}{16}L_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{20}{3} \end{array}\right) \longrightarrow L_3 \to L_3 + \frac{8}{3}L_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow L_1 \to L_1 - \frac{2}{3}L_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow L_3 \to -\frac{1}{2}L_3$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow L_1 \to L_1 + \frac{3}{2}L_3$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow L_2 \to L_2 + \frac{1}{4}L_3$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Portanto, os sistemas $\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 8 \\ 2x - 4y - 2z = -4 \\ x - 2y - 3z = -4 \end{cases}$

e $\begin{cases} x + 0y + 0z = 3 \\ 0x + y + 0z = 2 \\ 0x + 0y + z = 1 \end{cases}$ *são equivalentes.*

E do último sistema vem que a solução é $x = 3$*,* $y = 2$ *e* $z = 1$*.*

Solução de um sistema de n equações com n variáveis: método de matriz inversa

Consideremos o sistema de n equações com n variáveis

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Tomando $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

o sistema pode ser representado na forma matricial $A.X = B$. Se a matriz A possui inversa, tem-se $A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$. Logo, $X = A^{-1}.B$ e temos a solução do sistema.

Portanto, se A possui inversa, a solução do sistema $A.X = B$ é obtida de uma forma muito simples, bastando multiplicar A^{-1} pela matriz B. Vejamos como fazer isso usando o exemplo anterior.

Exemplo 25. *Resolva o sistema*

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 8 \\ 2x - 4y - 2z = -4 \\ x - 2y - 3z = -4 \end{cases}$$

usando o método da matriz inversa.

O primeiro passo é encontrar, se existir, a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Fazendo o procedimento dado na seção onde estudamos a inversão de matrizes encontramos $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{-3}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Assim, temos $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{-3}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Portanto, a solução do sistema é $x = 3$, $y = 2$ *e* $z = 1$.

Solução de um sistema de m equações com n variáveis ($m \neq n$)

O método para resolver um sistema de m equações com n variáveis ($m \neq n$) é semelhante ao método de Guass-Jordan. Neste caso, como $m \neq n$, a matriz dos coeficientes não pode ser transformada na matriz identidade, pois não é quadrada. Entretanto, o procedimento será o mesmo: transformar os elementos a_{ii} em 1 e em zeros os demais elementos das colunas em que se situam estes a_{ii}. Feito isso se consegue encontrar a solução do sistema. Vejamos como fazemos isso através de alguns exemplos.

Exemplo 26. *Resolva o sistema*

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ x-2y=-1 \\ 4x+6y=2 \end{cases}$$

Note que o sistema acima possui 3 equações com 2 variáveis.

Vejamos como resolvê-lo.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow L_1 \to \frac{1}{2}.L_1 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow L_3 \to L_3 - 4L_1$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow L_2 \to L_2 - L_1 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow L_2 \to -\frac{2}{7}L_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow L_1 \to L_1 - \frac{3}{2}L_2 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Essa matriz corresponde ao sistema $\begin{cases} x+0.y=-\frac{1}{7} \\ 0.x+y=\frac{3}{7} \\ 0.x+0.y=0 \end{cases}$ *que é equivalente ao sistema* $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ x-2y=-1 \\ 4x+6y=2 \end{cases}$

Note que a terceira equação $0.x+0.y=0$ não estabelece nenhuma condição para x e y, pois ela é satisfeita para quaisquer valores de x e y. Portanto, a solução do sistema será dada pelas duas primeiras equações: $x+0.y=-\frac{1}{7}$ e $0.x+y=\frac{3}{7}$, cujas soluções são $x=-\dfrac{1}{7}$ e $y=\dfrac{3}{7}$.

Exemplo 27. *Resolva o sistema*

$$\begin{cases} x-3y+4z-w=2 \\ 2x-y+3z-2w=19 \end{cases}$$

Note que o sistema acima possui 2 equações com 4 variáveis.

Resolução.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 19 \end{array}\right) \longrightarrow L_2 \to L_2 - 2L_1 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 15 \end{array}\right) \longrightarrow L_2 \to \frac{1}{5}L_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow L_1 \to L_1 + 3L_2 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

A matriz $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)$ *corresponde ao sistema* $\begin{cases} x = 11 - z + w \\ y = 3 + z \end{cases}$ *, que é equivalente ao sistema dado.*

Assim, o sistema é possível e indeterminado, pois admite infinitas soluções. Os valores de x *e* y *são obtidos atribuindo valores arbitrários a* z *e* w*. Por exemplo, se* $z = 1$ *e* $w = 1$*, temos* $x = 11$ *e* $y = 4$*. Portanto,* $x = 11$*,* $y = 4$*,* $z = 1$ *e* $w = 1$ *é uma solução do sistema.*

Exemplo 28. *Resolva o sistema*

$$\begin{cases} 2x - 6y = -4 \\ x + 3y = 1 \\ 4x + 12y = 2 \end{cases}$$

Resolução.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 12 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow L_1 \to \frac{1}{2}L_1 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 12 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow L_2 \to L_2 - L_1$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 4 & 12 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow L_3 \to L_3 - 4L_1 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 24 & 10 \end{array}\right) \longrightarrow L_2 \to \frac{1}{6}L_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 24 & 10 \end{array}\right) \longrightarrow L_1 \to L_1 + 3L_2 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 24 & 10 \end{array}\right) \longrightarrow L_3 \to L_3 - 24L_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

A matriz acima corresponde ao sistema $\begin{cases} x + 0.y = -\frac{1}{2} \\ 0.x + y = \frac{1}{2} \\ 0.x + 0.y = -2 \end{cases}$ *, que é equivalente ao sistema dado.*

Mas não existem valores de x *e* y *que satisfaçam a equação* $0.x + 0.y = -2$*. Portanto, o sistema é incompatível.*

Seguindo os exemplos feitos nesta seção, faça os exercícios para uma melhor fixação do conteúdo estudado.

EXERCÍCIOS

1. Resolva os sistemas lineares a seguir.

a) $\begin{cases} 2x - 6y + z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 0 \\ 4x - 12y - z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -2x + 2y - 4z = -4 \\ 3x - 3y + 6z = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - y + 2z = 5 \\ -x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x - y + 3z = 6 \\ 3x + 2y - z = 2 \\ x + y - 2z = -4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x - y - 2z = 7 \\ 3x + 2y + 4z = 10 \\ x - y - 6z = -2 \end{cases}$

Sistemas Lineares e suas Matrizes Ampliadas

Ao final desta seção você deverá ser capaz de classificar um sistema linear utilizando sua matriz ampliada.

Nesta seção vamos estudar como a matriz ampliada de um sistema linear pode nos ajudar a classificá-lo como possível, determinado ou indeterminado, ou impossível.

Matriz escada: No método de Guass-Jordan para solução de sistemas lineares de n equações com n variáveis e no método semelhante para a solução de sistemas lineares de m equações com n variáveis ($m \neq n$), transformamos a matriz ampliada do sistema em uma matriz cujas entradas a_{ii} se transformam em 1 e os demais elementos da coluna em que se situam esses a_{ii} se transformam em zeros. Chamaremos essa matriz de *matriz escada* do sistema.

Denotaremos a matriz ampliada do sistema de S e a sua matriz escada por E.

Nos três exemplos que finalizaram a aula anterior, obtivemos as seguintes matrizes escadas:

i) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ do Exemplo 26.

ii) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)$ do Exemplo 27

iii) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$ do Exemplo 28

Observe o modo como estão dispostos os números 1 em cada uma das matrizes acima. Esta disposição é que dá origem ao nome matriz escada.

Denotaremos por A_E a matriz dos coeficientes das variáveis na matriz escada. Assim, em i) $A_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Já em ii) temos $A_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Característica da matriz ampliada S: O número de linhas com elementos não todos nulos de

E (matriz escada do sistema) é chamado de *característica* de S (a matriz ampliada do sistema). Esse número será denotado por p_S.

Em i) e em ii) temos que $p_S = 2$. Já em iii), temos $p_S = 3$

Característica da matriz A_E: O número de linhas com elementos não todos nulos de A_E é chamado de *característica* de A_E. Denotaremos esse número por p_A.

Tanto em i) como em ii) e em iii) dados acima, temos $p_A = 2$.

TOME NOTA. Observe que $p_S \geq p_A$. Isto se deve ao fato de que a matriz A_E está dentro da matriz E. Assim, as linhas de A_E com elementos não todos nulos estão contidas em mesmas linhas de E com elementos não todos nulos, implicando termos no mínimo $p_A = p_S$.

Através dos números p_S e p_A podemos classificar um sistema linear de m equações com n variáveis da seguinte maneira:

- $p_A \neq p_S$, então o sistema é impossível.
- $p_A = p_S = n$, então o sistema é possível e determinado.
- $p_A = p_S < n$, então o sistema é possível e indeterminado.

Uma análise geométrica de sistemas lineares

Consideremos o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Cada solução (x_0, y_0) deste sistema pode ser vista como um ponto P no plano cartesiano, cujas coordenadas são $P = (x_0, y_0)$. Sob este ponto de vista, cada uma das equações do sistema é a equação de uma reta nesse plano e cada uma das soluções do sistema é um ponto de interseção destas retas. Ou seja, se r_1 e r_2 são as retas definidas pelas equações $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ e $a_{21}x + a_{22}y = b_2$, respectivamente, então as soluções do sistema são os pontos $P = (x_0, y_0)$ que pertencem à interseção $r_1 \cap r_2$.

Assim, teremos que as retas r_1 e r_2 são:

- **concorrentes** se o sistema possui uma única solução.
- **paralelas** se o sistema não possui solução.
- **coincidentes** se o sistema possui infinitas soluções.

Exemplo 29. *Sejam r_1 e r_2 retas definidas pelas equações: $r_1 : x + 2y = 3$ e $r_2 : 2x + 2y = 4$. Será que r_1 e r_2 são concorrentes, paralelas ou coincidentes?*

Da equação das retas obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, vemos que ele possui uma única solução dada por $x = 1$ e $y = 1$. Portanto, as retas r_1 e r_2 são concorrentes, sendo $P = (1, 1)$ o ponto de interseção entre elas.

Exemplo 30. *Sejam r_1 e r_2 retas definidas pelas equações: $r_1 : 2x - 2y = 4$ e $r_2 : x = y$. Será que r_1 e r_2 são concorrentes, paralelas ou coincidentes?*

Da equação das retas obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, vemos que ele não possui solução. Portanto, as retas r_1 e r_2 são paralelas.

Exemplo 31. *Sejam r_1 e r_2 retas definidas pelas equações: $r_1 : 2x - 3y = -1$ e $r_2 : -4x + 6y = 2$. Será que r_1 e r_2 são concorrentes, paralelas ou coincidentes?*

Da equação das retas obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -4x + 6y = 2 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, vemos que ele possui infinitas soluções. Portanto, as retas r_1 e r_2 são coincidentes.

Do mesmo ponto de vista, podemos olhar cada solução (x_0, y_0, z_0) do sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{23}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

como sendo um ponto P no espaço tridimensional, cujas coordenadas cartesianas são $P = (x_0, y_0, z_0)$. Analogamente ao caso bidimensional, podemos ver cada equação do sistema acima como sendo equações de planos no espaço tridimensional, e cada uma das soluções como sendo pontos comuns aos planos.

Exemplo 32. *Suponhamos que A_1, A_2 e A_3 são planos cujas equações são dadas por:*
A_1: $x - 2y + z = 1$
A_2: $x - 2y + z = 0$
A_3: $x - 2y + z = -1$
A partir destas equações, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - 2y + z = 1 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$$

Claramente, vemos que este sistema linear não possui soluções. Assim, temos que $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$.

Exemplo 33. *Agora, suponha que A_1, A_2 e A_3 são planos cujas equações são dadas por:*
A_1: $x + y - z = 0$
A_2: $2x + y + z = 3$
A_3: $x - 2y + z = 2$
Com estas equações, obtemos o sistema linear:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

O qual possui uma única solução: $x = 1$, $y = 0$ e $z = 1$. Assim, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{P = (1, 0, 1)\}$.

Seguindo os exemplos feitos nesta seção, faça os exercícios para uma melhor fixação do método de escalonamento.

EXERCÍCIOS

1. Resolva os sistemas lineares a seguir utilizando o método da matriz ampliada.

a) $\begin{cases} 2x - 6y + z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 0 \\ 4x - 12y - z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -2x + 2y - 4z = -4 \\ 3x - 3y + 6z = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - y + 2z = 5 \\ -x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x - y + 3z = 6 \\ 3x + 2y - z = 2 \\ x + y - 2z = -4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x - y - 2z = 7 \\ 3x + 2y + 4z = 10 \\ x - y - 6z = -2 \end{cases}$

Módulo 2
Espaços Vetoriais

Ao final deste módulo o leitor estará familiarizado com os seguintes conceitos:

▷ Espaços e subespaços vetoriais;

▷ Subespaços vetoriais gerados;

▷ Conjuntos linearmente dependentes e linearmente independentes;

▷ Base e dimensão de um espaço vetorial.

Leitura Complementar

O leitor interessado em aperfeiçoar e ampliar seus conhecimentos nos assuntos tratados neste módulo encontrará o suporte necessário nos seguintes textos: [1, 2, 6]. Aos interessados em aprofundar nestes conteúdos indicamos: [3, 4].

Espaços e subespaços vetoriais

Definição 6 (Espaços vetoriais). Dado um conjunto V, não vazio, sobre o qual estão definidas as operações de adição e produto por escalar, isto é:

$$\forall u, v \in V, \ \ u + v \in V$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in V, \alpha u \in V.$$

O conjunto V com estas duas operações é chamado *espaço vetorial* se forem verificadas as seguintes propriedades:

A) Em relação à adição:

A_1) $(u+v)+w = u+(v+w), \forall u, v, w \in V$

A_2) $u+v = v+u, \forall u, v \in V$

A_3) $\exists 0 \in V, \forall u \in V, u+0 = u$

A_4) $\forall u \in V, \exists(-u) \in V, u+(-u) = 0$

M) Em relação à multiplicação por escalar:

M_1) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

M_2) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$

M_3) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

M_4) $1u = u, \forall u, v \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Os elementos $u, v, w, ...$ de um espaço vetorial V são chamados *vetores*.

Vejamos, agora, alguns exemplos de conjuntos e operações que se enquadram na estrutura de espaços vetoriais.

Exemplo 34. O conjunto $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por um número real assim definidas:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Essas operações são denominadas operações usuais.

Para verificar os oito axiomas de espaço vetorial, sejam $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ e $w = (x_3, y_3)$.

$$
\begin{aligned}
A_1)\quad (u+v)+w &= ((x_1,y_1)+(x_2,y_2))+(x_3,y_3)\\
&= (x_1+x_2,y_1+y_2)+(x_3,y_3)\\
&= ((x_1+x_2)+x_3,(y_1+y_2)+y_3)\\
&= (x_1+(x_2+x_3),y_1+(y_2+y_3))\\
&= (x_1,y_1)+(x_2+x_3,y_2+y_3)\\
&= (x_1,y_1)+((x_2,y_2)+(x_3,y_3))\\
&= u+(v+w)
\end{aligned}
$$

Na primeira igualdade, simplesmente substituímos os vetores $u,\ v$ e w. Na segunda, aplicamos a definição de soma dentro do parêntese. Na terceira, aplicamos a definição com o vetor fora do parêntese. Na quarta, aplicamos a associatividade de números reais. Na quinta, voltamos a usar a definição de soma (agora no sentido contrário da segunda igualdade). Na sexta, novamente a definição de soma dentro do parêntese. Por fim, voltamos com $u,\ v$ e w.

Os axiomas seguintes são estabelecidos de maneira análoga ao primeiro. Um excelente exercício para o leitor é explicar, por escrito, cada uma das igualdades como foi feito acima.

$$
\begin{aligned}
A_2)\quad u+v &= (x_1,y_1)+(x_2,y_2)\\
&= (x_1+x_2,y_1+y_2)\\
&= (x_2+x_1,y_2+y_1)\\
&= (x_2,y_2)+(x_1,y_1)\\
&= v+u
\end{aligned}
$$

$A_3)$ Seja $0=(0,0)\in\mathbb{R}^2$, $\forall u=(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$,

$$
\begin{aligned}
u+0 &= (x_1,y_1)+(0,0)\\
&= (x_1+0,y_1+0)\\
&= (x_1,y_1)\\
&= u
\end{aligned}
$$

$A_4)$ $\forall u=(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2,$ consideremos $(-u)=(-x_1,-y_1)\in\mathbb{R}^2$,

$$
\begin{aligned}
u+(-u) &= (x_1,y_1)+(-x_1,-y_1)\\
&= (x_1-x_1,y_1-y_1)\\
&= (0,0)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_1)\quad (\alpha\beta)u &= (\alpha\beta)(x_1, y_1)\\
&= ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)y_1)\\
&= (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta y_1))\\
&= \alpha(\beta x_1, \beta y_1)\\
&= \alpha(\beta(x_1, y_1))\\
&= \alpha(\beta u)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_2)\quad (\alpha+\beta)u &= (\alpha+\beta)(x_1, y_1)\\
&= ((\alpha+\beta)x_1, (\alpha+\beta)y_1)\\
&= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_1)\\
&= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_1, \beta y_1)\\
&= \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_1, y_1)\\
&= \alpha u + \beta u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_3)\quad \alpha(u+v) &= \alpha((x_1, y_1) + (x_2, y_2))\\
&= \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\
&= (\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2))\\
&= (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2)\\
&= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2)\\
&= \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2)\\
&= \alpha u + \alpha v
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_4)\quad 1u &= 1(x_1, y_1)\\
&= (1x_1, 1y_1)\\
&= (x_1, y_1)\\
&= u
\end{aligned}
$$

Exemplo 35. Da geometria analítica se sabe que um par ordenado (x_1, x_2) de números reais representa um ponto ou um vetor do plano $\mathbb{R}^2$, assim como uma terna (x_1, x_2, x_3) representa um ponto ou um vetor no $\mathbb{R}^3$. Em geral, uma quádrupla (x_1, x_2, x_3, x_4) é um ponto ou um vetor de $\mathbb{R}^4$ e uma n-upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ é um ponto ou um vetor de $\mathbb{R}^n$.

Procedendo como no Exemplo 34, verifica-se que os conjuntos $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$,..., $\mathbb{R}^n$ são também espaços vetoriais com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar.

Exemplo 36. O conjunto $\mathbb{R}$, em relação às operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, é um espaço vetorial. De fato, sabe-se que a adição de números reais satisfaz os axiomas A_1, A_2, A_3 e A_4 e que, na multiplicação, se verificam os axiomas M_1, M_2, M_3 e M_4.

Exemplo 37. O conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(a,b); a, b \in \mathbb{R}\}$ não é um espaço vetorial em relação às operações assim definidas:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

$$\alpha(a,b) = (\alpha a, b), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Como a adição aqui definida é a usual, verificam-se os axiomas A_1, A_2, A_3 e A_4 de espaço vetorial conforme se viu no Exemplo 34. Logo, não devem se verificar alguns (ou algum) dos axiomas relativos à multiplicação.

Sejam $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} M_1) \quad (\alpha\beta)u &= (\alpha\beta)(x_1, y_1) \\ &= ((\alpha\beta)x_1, y_1) \\ &= (\alpha(\beta x_1), y_1) \\ &= \alpha(\beta x_1, y_1) \\ &= \alpha(\beta(x_1, y_1)) \\ &= \alpha(\beta u) \\ & \quad \text{(Este axioma se verifica)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2) \quad (\alpha+\beta)u &= (\alpha+\beta)(x_1, y_1) \\ &= ((\alpha+\beta)x_1, y_1) \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_1, y_1) \\ &\neq \alpha(x_1,\ y_1) + \beta(x_1, y_1) \\ &= (\alpha x_1, y_1) + (\beta x_1, y_1) \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_1, 2y_1). \end{aligned}$$

Como se vê, $(\alpha+\beta)u \neq \alpha u + \beta u$ e, portanto, não se verifica, no mínimo, o axioma M_2. Assim, o conjunto de que trata este exemplo não é um espaço vetorial.

Exemplo 38. O conjunto $\mathbb{R}^2$ com as operações

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + 2x_2, y_1 + 2y_2)$$

$$\alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$$

não é um espaço vetorial, pois, pelo menos, o axioma A_1 não é satisfeito.

De fato, sejam $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2)$ e $w = (x_3, y_3)$,

$$
\begin{aligned}
(u+v)+w &= ((x_1,y_1)+(x_2,y_2))+(x_3,y_3)\\
&= (x_1+2x_2,y_1+2y_2)+(x_3,y_3)\\
&= ((x_1+2x_2)+2x_3,(y_1+2y_2)+2y_3)\\
&= (x_1+2x_2+2x_3,y_1+2y_2+2y_3)\\
&\neq (x_1+2x_2+4x_3,y_1+2y_2+4y_3)\\
&= (x_1+2(x_2+2x_3),y_1+2(y_2+2y_3))\\
&= (x_1,y_1)+(x_2+2x_3,y_2+2y_3)\\
&= (x_1,y_1)+((x_2,y_2)+(x_3,y_3))\\
&= u+(v+w).
\end{aligned}
$$

Propriedades dos espaços vetoriais: É possível mostrar que, da definição de espaço vetorial V, decorrem as seguintes propriedades:

1) Existe um único vetor nulo em V (elemento neutro da adição).
2) Cada vetor $u \in V$ admite apenas um simétrico $(-u) \in V$.
3) Para quaisquer $u, v, w \in V$, se $u + w = v + w$, então $u = v$ (lei do cancelamento).
4) Qualquer que seja $v \in V$, tem-se $-(-v) = v$, isto é, o oposto de $-v$ é v.
5) Quaisquer que sejam $u, v \in V$, existe um e somente um w, tal que $u + w = v$.
6) Qualquer que seja $v \in V$, $0v = 0$. O primeiro 0 é o número real zero e o segundo é o vetor zero.
7) Qualquer que seja $\alpha\mathbb{R}$, $\alpha 0 = 0$.
8) $\alpha v = 0$, implica $\alpha = 0$ ou $v = 0$.
9) Qualquer que seja $v \in V$, $(-1)v = -v$.
10) Quaisquer que sejam $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $(-\alpha)v = \alpha(-v) = -(\alpha v)$.

Subespaços

Certos subconjuntos de um espaço vetorial possuem a propriedade de que a soma de dois de seus elementos é um elemento do próprio subconjunto, bem como, ao multiplicar um elemento do subconjunto por um real (escalar), o resultado continua pertencendo a este subconjunto. Em outras palavras, dizemos que tais subconjuntos são fechados para a soma e produto por escalar. Tais subconjuntos jogam um papel fundamental dentro da teoria da álgebra linear e são conhecidos como subespaços vetoriais. De forma mais precisa:

Definição 7 (Subespaços vetoriais). Dado um espaço vetorial V e um subconjunto não vazio $S \subset V$, dizemos que S é um *subespaço vetorial* de V se são satisfeitas as condições:

S_1) Se $u, v \in S$, então $u + v \in S$.

S_2) Se $u \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\alpha u \in S$.

Observação. É importante salientar que todo subespaço vetorial S de um espaço vetorial V é ele próprio um espaço vetorial. De fato, as propriedades A_1, A_2, M_1, M_2, M_3 e M_4 são herdadas do próprio espaço vetorial V. O elemento neutro da adição (A_3) é um elemento de S por S_2) e pela propriedade 6) acima, pois dado $u \in S$, $0u = 0 \in S$. Finalmente (A_4), se $u \in S$, então $-u = (-1)u \in S$ pela propriedade 9) acima e por S_2).

A seguir veremos alguns exemplos de subconjuntos que são subespaços vetoriais e outros que não são.

Exemplo 39. Os subconjuntos $\{0\}$ e V são subespaços vetoriais do espaço vetorial V e são conhecidos como subespaços vetoriais triviais.

Exemplo 40. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 5x\} = \{(x, 5x); x \in \mathbb{R}\}$.
Note que $S \neq \emptyset$, pois $(0, 0) \in S$. Sejam $u = (x_1, 5x_1)$, $v = (x_2, 5x_2) \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

$$
\begin{aligned}
i)\ u + v &= (x_1, 5x_1) + (x_2, 5x_2) \\
&= (x_1 + x_2, 5x_1 + 5x_2) \\
&= (x_1 + x_2, 5(x_1 + x_2)) \in S,
\end{aligned}
$$

pois a segunda componente de $u + v$ é cinco vezes a primeira.

$$
\begin{aligned}
ii)\ \alpha u &= \alpha(x_1, 5x_1) \\
&= (\alpha x_1, \alpha(5x_1)) \\
&= (\alpha x_1, 5(\alpha x_1)) \in S,
\end{aligned}
$$

pois a segunda componente de αu é o quíntuplo da primeira.

Logo, S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$. Geometricamente, o subespaço S representa uma reta do plano $\mathbb{R}^2$ passando pela origem.

Observe que, ao escolher dois vetores u e v da reta $y = 5x$, o vetor $u + v$ pertence à reta e, se multiplicar um vetor u da reta por α, o vetor αu também estará na reta. Note ainda que, se uma reta dada não passa pela origem, então ela não será um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$ (pense numa justificativa para este fato).

Note que se S é um subespaço vetorial de um espaço vetorial V, então o elemento neutro $\overline{0}$ de V pertence a S. Com efeito, dado $v \in S$ pela propriedade S_2) temos que $0v = \overline{0} \in S$. Desta observação conclui-se o seguinte teste:

TOME NOTA. Teste do $\overline{0}$: Se um subconjunto S de um espaço vetorial V não contiver o elemento neutro $\overline{0}$ de V, então S não é um subespaço vetorial de V.

Exemplo 41. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y + 4z = 0\} = \left\{\left(x, y, \dfrac{-2x - 3y}{4}\right)\right\}$.
Note que $S \neq \emptyset$, pois $(0, 0, 0) \in S$. Dados $u = \left(x_1, y_1, \dfrac{-2x_1 - 3y_1}{4}\right)$, $v = \left(x_2, y_2, \dfrac{-2x_2 - 3y_2}{4}\right) \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

$$
\begin{aligned}
i)\ u + v &= \left(x_1, y_1, \frac{-2x_1 - 3y_1}{4}\right) + \left(x_2, y_2, \frac{-2x_2 - 3y_2}{4}\right)\\
&= \left(x_1 + x_2, y_1 + y_2, \frac{-2x_1 - 3y_1}{4} + \frac{-2x_2 - 3y_2}{4}\right)\\
&= \left(x_1 + x_2, y_1 + y_2, \frac{-2(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2)}{4}\right) \in S.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ii)\ \alpha u &= \alpha\left(x_1, y_1, \frac{-2x_1 - 3y_1}{4}\right)\\
&= \left(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha\frac{-2x_1 - 3y_1}{4}\right)\\
&= \left(\alpha x_1, \alpha y_1, \frac{-2\alpha x_1 - 3\alpha y_1}{4}\right) \in S.
\end{aligned}
$$

Portanto, S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Da geometria analítica sabe-se que a equação que define o subespaço S no exemplo anterior, é a equação de um plano em $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem. Utilizando o Teste do $\overline{0}$, conclui-se que, se um plano não passa pela origem, então ele não é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 42. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e S o conjunto solução do sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x - y + 3y = 0 \end{cases}.$$

Note que $S \neq \emptyset$, pois $(0,0,0) \in S$. Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2) \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então:
$i)$ $u + v \in S$. De fato, $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ e

$$\begin{aligned} 3(x_1 + x_2) + 4(y_1 + y_2) - 2(z_1 + z_2) &= 3x_1 + 3x_2 + 4y_1 + 4y_2 - 2z_1 - 2z_2 \\ &= (3x_1 + 4y_1 - 2z_1) + (3x_2 + 4y_2 - 2z_2) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) &= 2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2 - z_1 - z_2 \\ &= (2x_1 + y_1 - z_1) + (2x_2 + y_2 - z_2) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) &= x_1 + x_2 - y_1 - y_2 + 3z_1 + 3z_2 \\ &= (x_1 - y_1 + 3z_1) + (x_2 - y_2 + 3z_2) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

$ii)$ $\alpha u \in S$. De fato, $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ e

$$\begin{aligned} 3(\alpha x_1) + 4(\alpha y_1) - 2(\alpha z_1) &= 3\alpha x_1 + 4\alpha y_1 - 2\alpha z_1 \\ &= \alpha(3x_1 + 4y_1 - 2z_1) \\ &= \alpha 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(\alpha x_1) + (\alpha y_1) - (\alpha z_1) &= 2\alpha x_1 + \alpha y_1 - \alpha z_1 \\ &= \alpha(2x_1 + y_1 - z_1) \\ &= \alpha 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha x_1) - (\alpha y_1) + 3(\alpha z_1) &= \alpha x_1 - \alpha y_1 + 3\alpha z_1 \\ &= \alpha(x_1 - y_1 + 3z_1) \\ &= \alpha 0 = 0. \end{aligned}$$

Exemplo 43. Aplicando novamente o Teste do $\overline{0}$, pode-se concluir que, se um sistema linear for não-homogêneo, então o seu conjunto solução não será um subespaço vetorial.

É preciso tomar cuidado ao usar o Teste do $\overline{0}$, pois ele só afirma que S não é subespaço vetorial quando não possuir o elemento neutro $\overline{0}$ da soma. Porém, ele nada afirma quando $0 \in S$. De fato, no próximo exemplo se exibe um subconjunto contendo o 0 que não é subespaço vetorial.

Exemplo 44. Seja $V = \mathbb{R}^2$. O subconjunto $S = \{(x, y); x \geq 0\}$ de V não é subespaço vetorial, pois não satisfaz a condição $S_2)$ da Definição 7.

EXERCÍCIOS

1. Considere os seguintes conjuntos munidos com as operações de adição e multiplicação por escalar neles definidas. Verifique quais são espaços vetoriais. Quando não for um espaço vetorial, indique todas as propriedades que falham.

   (a) $\mathbb{R}^3$, com as seguintes operações $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ e $\alpha(x, y, z) = (0, \alpha y, \alpha z)$. Resposta: Não.

   (b) $\{(x, 2x, 3x); x \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais. Resposta: Sim.

   (c) $\mathbb{R}^2$, com as operações

   $$(a, b) + (c, d) = (a, b)$$

   $$\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$$

   Resposta: Não.

   (d) $\mathbb{R}^2$, com as operações

   $$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

   $$\alpha(x, y) = (\alpha^2 x, \alpha^2 y)$$

   Resposta: Não.

   (e) $\mathbb{R}^2$, com as operações

   $$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

   $$\alpha(x, y) = (\alpha x, 0)$$

   Resposta: Não

   (f) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 5x\}$, com as operações usuais. Resposta: Sim.

2. Verifique quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ são subespaços vetoriais relativos às operações de adição e multiplicação por escalar usuais. Para os que são subespaços, mostre que as duas condições estão satifeitas. Caso contrário, cite um contraexemplo.

   (a) $S = \{(x, y); y = -x\}$ Resposta: Sim.

(b) $S = \{(x, x^2); x \in \mathbb{R}\}$ Resposta: Não.

(c) $S = \{(x, y); x + 3y = 0\}$ Resposta: Sim.

(d) $S = \{(y, y); y \in \mathbb{R}\}$ Resposta: Sim.

(e) $S = \{(x, y); y = x + 1\}$ Resposta: Não.

3. Verifique quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ são seus subespaços em relação às operações de adição e multiplicação por escalar usuais. Para os que são subespaços, mostre que as duas condições estão satifeitas. Caso contrário, cite um contraexemplo.

   (a) $S = \{(x, y, z); y = 0$ e $z = 7x\}$ Resposta: Sim.

   (b) $S = \{(x, y, z); x = 2z - y\}$ Resposta: Sim.

   (c) $S = \{(x, y, z); y = z^2\}$ Resposta: Não.

   (d) $S = \{(x, y, z); z = y - 1$ e $z = 0\}$ Resposta: Não.

   (e) $S = \{(t, t, t); t \in \mathbb{R}\}$ Resposta: Sim.

   (f) $S = \{(r, 0, r); r \in \mathbb{R}\}$ Resposta: Sim.

   (g) $S = \{(x, y, z); yz = 0\}$ Resposta: Não.

   (h) $S = \{(x, -3x, 4x); x \in \mathbb{R}\}$ Resposta: Sim.

   (i) $S = \{(x, y, z); z = 0$ e $y = |x|\}$ Resposta: Não.

   (j) $S = \{(x, y, z); y \geq 0\}$ Resposta: Não.

   (k) $S = \{(x, y, z); ax + by + cz = 0,$ onde $a,\ b,\ c$ são constantes reais$\}$ Resposta: Sim.

   (l) $S = \{(5t, 7t, -11t); t \in \mathbb{R}\}$ Resposta: Sim.

Combinação Linear

Nesta seção introduziremos o conceito de combinação linear de vetores com o intuito de definir subespaços gerados por um conjunto, bem como, espaço vetorial finitamente gerado.

Definição 8 (Combinação Linear)**.** Dados vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de um espaço vetorial V e escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Um vetor $v \in V$ escrito da forma:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

é uma *combinação linear dos vetores* $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Notaremos nos exemplos abaixo que o fato de um vetor ser ou não uma combinação linear de outros vetores dados está ligado ao fato de um certo sistema linear ser possível ou impossível.

Exemplo 45. Dados os vetores $v_1 = (-1, 2, 3)$ e $v_2 = (7, -2, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, escreva o vetor $v = (17, -10, -7)$ como combinação linear de v_1 e v_2.

O objetivo é encontrar escalares a_1 e a_2 tais que $v = a_1v_1 + a_2v_2$, ou seja,

$$\begin{aligned}(17, -10, -7) &= a_1(-1, 2, 3) + a_2(7, -2, 1)\\ &= (-a_1, 2a_1, 3a_1) + (7a_2, -2a_2, a_2)\\ &= (-a_1 + 7a_2, 2a_1 - 2a_2, 3a_1 + a_2).\end{aligned}$$

Pela condição de igualdade de vetores, segue a igualdade das respectivas coordenadas e portanto obtemos o sistema:

$$\begin{cases} -a_1 + 7a_2 = 17\\ 2a_1 - 2a_2 = -10\\ 3a_1 + a_2 = -7 \end{cases} \tag{2.1}$$

cuja solução é $a_1 = -3$ e $a_2 = 2$.

Exemplo 46. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, o vetor $v = (5, 2, 7)$ é uma combinação linear dos vetores v_1 e v_2 do Exemplo 45, pois $v = 2v_1 + v_2$. (Verifique!)

No próximo exemplo apresentamos um vetor que não é combinação linear dos vetores v_1 e v_2 dados no Exemplo 45.

Exemplo 47. Mostre que o vetor $v = (13, -2, 4)$ de $\mathbb{R}^3$ não é combinação linear dos vetores v_1 e v_2 do Exemplo 45.

A idéia agora é mostrar que não existem escalares a_1 e a_2 tais que $v = a_1 v_1 + a_2 v_2$. Procedendo como no Exemplo 45, temos

$$(13, -2, 4) = a_1(-1, 2, 3) + a_2(7, -2, 1),$$

o que resultará num sistema parecido com **(2.1)**, mudando somente os termos independentes, isto é,

$$\begin{cases} -a_1 + 7a_2 = 13 \\ 2a_1 - 2a_2 = -2 \\ 3a_1 + a_2 = 4 \end{cases}.$$

Como este sistema é impossível, segue que v não pode ser escrito como combinação linear de v_1 e v_2.

Exemplo 48. Determine o valor de m para que o vetor $u = (13, -2, m)$ seja combinação linear de v_1 e v_2 do Exemplo 45.

Pelo Exemplo 47, o objetivo é obter m tal que o seguinte sistema seja possível:

$$\begin{cases} -a_1 + 7a_2 = 13 \\ 2a_1 - 2a_2 = -2 \\ 3a_1 + a_2 = m \end{cases},$$

donde resulta que $m = 5$, $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$.

Exemplo 49. Verifique de quantas maneiras diferentes o vetor $w = (5, 2) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $w_1 = (1, 0), w_2 = (0, 1)$ e $w_3 = (2, 4)$.

Buscamos escalares a_1, a_2 e a_3 tais que

$$\begin{aligned} (5, 2) &= a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3 \\ &= a_1(1, 0) + a_2(0, 1) + a_3(2, 4) \\ &= (a_1, 0) + (0, a_2) + (2a_3, 4a_3) \\ &= (a_1 + 2a_3, a_2 + 4a_3), \end{aligned}$$

que equivale ao sistema

$$\begin{cases} a_1 + 2a_3 = 5 \\ a_2 + 4a_3 = 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_1 = 5 - 2a_3 \\ a_2 = 2 - 4a_3 \end{cases}.$$

Assim, para cada valor atribuído a a_3 obtemos valores para a_1 e a_2. Portanto, w pode ser escrito de infinitas maneiras como combinação linear de w_1, w_2 e w_3.

Subespaço vetorial gerado por um conjunto

Sejam V um espaço vetorial e $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um conjunto não vazio de V.

Afirmação: O conjunto S de todos os vetores de V que são combinações lineares dos vetores de A é um subespaço vetorial de V.

Demonstração: Se $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ e $v = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n$ são dois vetores quaisquer de S, então podemos escrever:

I) $u+v = (a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n)+(b_1v_1+b_2v_2+\cdots+b_nv_n) = (a_1+b_1)v_1+(a_2+b_2)v_2+\cdots+(a_n+b_n)v_n$

II) $\alpha u = \alpha(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) = (\alpha a_1)v_1 + (\alpha a_2)v_2 + \cdots + (\alpha a_n)v_n$

isto é, $u + v, \alpha u \in S$, uma vez que são combinações lineares de $v_1, v_2, \dots, v_n$. Logo, S é um subespaço vetorial de V.

Chamamos o subespaço S de *subespaço gerado pelos vetores* $v_1, v_2, \dots, v_n$, ou, *subespaço gerado pelo conjunto* A, e o denotamos por $S = [v_1, v_2, \dots, v_n]$, ou, $S = [A]$. Os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são chamados *geradores* do subespaço S e A é um *conjunto gerador* de S.

Formalmente, podemos escrever

$$S = [v_1, v_2, \dots, v_n] = \{v \in V; v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n; a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}.$$

Todo subconjunto A de V gera um subespaço vetorial $[A]$ de V. Quando A é um conjunto gerador de V teremos que $[A] = V$. Isto nos motiva introduzir a seguinte definição.

Definição 9 (Finitamente gerado). Dizemos que um espaço vetorial V é *finitamente gerado* se existir um subconjunto A de V tal que $V = [A]$.

Nos exemplos a seguir ficará claro que $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial finitamente gerado para qualquer número natural n.

Exemplo 50. Os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ geram o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$, pois qualquer par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é combinação linear de e_1 e e_2. De fato,

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = xe_1 + ye_2.$$

Assim, $[e_1, e_2] = \mathbb{R}^2$.

Exemplo 51. Os vetores $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ do $\mathbb{R}^3$ geram o subespaço
$S = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3; y, z \in \mathbb{R}\}$, pois

$$(0, y, z) = (0, y, 0) + (0, 0, z) = ye_2 + ze_3,$$

isto é, $S = [e_2, e_3]$. S é um subespaço próprio do $\mathbb{R}^3$ e representa geometricamente o plano yOz.

Exemplo 52. Os vetores $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$,...,$e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ geram o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^n$, pois dado um vetor $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ qualquer, ele pode ser escrito como combinação linear de $e_1, e_2, \ldots, e_n$. De fato, basta tomar as coordenadas de v como os escalares da combinação linear:

$$\begin{aligned} x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots x_ne_n &= x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \cdots + x_n(0, 0, \ldots, 1) \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Um espaço vetorial finitamente gerado V pode ser gerado por subconjuntos diferentes. Este fato é evidenciado nos próximos exemplos.

Exemplo 53. O conjunto $A = \{u = (1, 2), v = (3, 5)\}$ gera o $\mathbb{R}^2$. De fato, para que o conjunto A gere o $\mathbb{R}^2$ é necessário que qualquer vetor $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ seja combinação linear de u e v, isto é, devem existir números reais α e β, tais que:

$$\begin{aligned} w &= \alpha u + \beta v \\ (x, y) &= \alpha(1, 2) + \beta(3, 5) \\ (x, y) &= (\alpha, 2\alpha) + (3\beta, 5\beta) \\ (x, y) &= (\alpha + 3\beta, 2\alpha + 5\beta). \end{aligned}$$

Dessa igualdade resulta o sistema:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = x \\ 2\alpha + 5\beta = y \end{cases}$$

que, resolvido em função de x e y, fornece:

$$\alpha = -5x + 3y \quad \text{e} \quad \beta = 2x - y,$$

isto é, $\mathbb{R}^2 = [u, v]$.

No próximo exemplo veremos que o $\mathbb{R}^2$ pode ser gerado por um conjunto formado por mais de dois elementos.

Exemplo 54. Os vetores $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ e $u = (7, 4)$ geram $\mathbb{R}^2$. De fato, para que os vetores e_1, e_2 e u gerem o $\mathbb{R}^2$ é necessário mostrar que para qualquer vetor $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, existem números reais a, b e c tais que

$$\begin{aligned} w &= ae_1 + be_2 + cu \\ (x, y) &= a(1, 0) + b(0, 1) + c(7, 4) \\ (x, y) &= (a, 0) + (0, b) + (7c, 4c) \\ (x, y) &= (a + 7c, b + 4c). \end{aligned}$$

Dessa igualdade resulta o sistema

$$\begin{cases} a + 7c = x \\ b + 4c = y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = x - 7c \\ b = y - 4c \end{cases}$$

Tomando, por exemplo, $c = 2$ temos

$$a = x - 14 \qquad b = y - 8$$

e, portanto,

$$(x, y) = (x - 14)e_1 + (y - 8)e_2 + 2u,$$

isto é, $[e_1, e_2, u] = \mathbb{R}^2$.

Exercícios

1. Considere os vetores $u = (5, -2, 1)$ e $v = (3, 1, -4)$ do $\mathbb{R}^3$.

   (a) Escreva o vetor $w_1 = (0, 11, -23)$ como combinação linear de u e v.

   (b) Encontre m para que $w_2 = (-9, m, -7)$ seja combinação linear de u e v.

   Resposta: (a) $w_1 = -3u + 5v$ (b) $\frac{140}{23}$

2. Sejam $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (-1, 0, 1)$ e $v_3 = (0, 1, 1)$ vetores de $\mathbb{R}^3$. Obtenha $u_1 = (-1, 1, 4)$ e $u_2 = (1, 3, 0)$ como combinação linear de v_1, v_2 e v_3.

   Resposta: $u_1 = v_1 + 2v_2 - v_3$ e $u_2 = -v_1 - 2v_2 + 5v_3$

3. Determine o subespaço $[A]$ nos seguintes casos:

   (a) $A = \{v_1 = (2, 3, 3), v_2 = (-1, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$

(b) $A = \{(\frac{-1}{2}, 2), (2, -8)\} \subset \mathbb{R}^2$.

O que $[A]$ representa geometricamente?

Resposta: (a) $[A] = \{(2a - b, 3a + b, 3a); a, b \in \mathbb{R}\}$

(b) $[A] = \{(\frac{-a}{2} + 2b, 2a - 8b); a, b \in \mathbb{R}\}$

4. Será que os vetores $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, 1, 2)$ e $v_3 = (0, 1, 1)$ geram o $\mathbb{R}^3$?

Dependência e Independência Linear

Vimos no Exemplo 50 que o conjunto $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ gera o $\mathbb{R}^2$. Com um pouco de reflexão é possível concluir que os conjuntos $\{e_1, e_2, v_1\}$ e $\{e_1, e_2, v_1, v_2\}$ também geram o $\mathbb{R}^2$, para quaisquer $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Ou seja, o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ pode ser gerado por dois vetores, ou também por três, ou quatro, etc. Porém em nossos estudos estamos interessados em conjuntos geradores que tenham o menor número possível de vetores. De fato, vimos que para gerar o $\mathbb{R}^2$ são necessários somente dois vetores. Assim, outros vetores que eventualmente aparecem no conjunto gerador são desnecessários.

A noção de dependência e independência linear será muito útil para a determinação do menor conjunto gerador de um espaço vetorial.

Sejam V um espaço vetorial e $v_1, \ldots, v_n \in V$. Considere a equação

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0. \tag{2.2}$$

Note que ela possui pelo menos uma solução que é a trivial:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Isto nos motiva a próxima definição.

Definição 10 (LI e LD)**.** Dizemos que o conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é *linearmente independente*, ou simplesmente que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são LI, se a equação (2.2) admitir somente a solução trivial. Se existir solução com algum $\alpha_i \neq 0$, dizemos que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é *linearmente dependente*, ou simplesmente que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são LD.

Vejamos alguns exemplos de conjuntos com estas caracterizações.

Exemplo 55. O conjunto $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ é LI. Com efeito,

$$\begin{aligned} (0,0) &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \\ &= \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) \\ &= (\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2) \\ &= (\alpha_1, \alpha_2) \end{aligned}$$

o que implica $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 0$.

Exemplo 56. Procedendo de maneira análoga ao exemplo anterior, podemos concluir que os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ são LI.

Exemplo 57. Os vetores $v_1 = (6, 4)$ e $v_2 = (15, 10)$ do $\mathbb{R}^2$, são LD. De fato,

$$\begin{aligned}(0,0) &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \\ &= \alpha_1(6,4) + \alpha_2(15,10) \\ &= (6\alpha_1, 4\alpha_1) + (15\alpha_2, 10\alpha_2) \\ &= (6\alpha_1 + 15\alpha_2, 4\alpha_1 + 10\alpha_2).\end{aligned}$$

Donde resulta o sistema

$$\begin{cases} 6\alpha_1 + 15\alpha_2 = 0 \\ 4\alpha_1 + 10\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

o qual admite a solução $\alpha_1 = \frac{-5}{2}\alpha_2$. Assim, fazendo $\alpha_2 = 2$, temos $\alpha_1 = -5$ e a equação

$$-5v_1 + 2v_2 = 0, \text{ ou seja, } -5(6,4) + 2(15,10) = (0,0)$$

se verifica e, portanto, $(6, 4)$ e $(15, 10)$ são LD.

Note que, no exemplo anterior, o fato de $(6, 4)$ e $(15, 10)$ serem LD implica que um dos vetores é múltiplo do outro. De fato, podemos escrever

$$(6,4) = \frac{2}{5}(15,10).$$

Por outro lado, se dois vetores são múltiplos entre si, isto é, $v_1 = \beta v_2$, para algum $\beta \in \mathbb{R}$, é fácil concluir que eles serão LD, pois a equação $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ admite solução não trivial, a saber, $\alpha_1 = 1 \neq 0$ e $\alpha_2 = -\beta$.

Esta propriedade é generalizada para mais que dois vetores no seguinte resultado.

Proposição 1. Dado um espaço vetorial V, o conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ é LD se, e somente se, um destes vetores é uma combinação linear dos demais.

Demonstração. Primeiro mostraremos que se $v_1, \ldots, v_n$ são LD, então um destes vetores é a combinação linear dos demais. Da definição de conjunto LD, existe algum $\alpha_i \neq 0$ satisfazendo

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_i v_i + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$

Assim, isolando o vetor v_i obtemos $v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i}v_1 - \cdots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}v_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}v_{i+1} - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i}v_n$,

pois $\alpha_i \neq 0$. Logo, v_i é a combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$.

Assumimos agora que algum $v_i \in \{v_1, \ldots, v_n\}$ é a combinação linear dos outros vetores do conjunto, ou seja,

$$v_i = a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1}v_{i-1} + a_{i+1}v_{i+1} + \cdots + a_n v_n,$$

donde temos

$$-a_1v_1 + \cdots - a_{i-1}v_{i-1} + v_i - a_{i+1}v_{i+1} - \cdots - a_nv_n = 0.$$

Como nesta equação o coeficiente de v_i é $1 \neq 0$, concluímos que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é LD. ■

Nos exemplos seguintes usaremos a proposição anterior para concluir que um determinado conjunto é LD.

Exemplo 58. O conjunto $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1), v = (a,b)\}$ de vetores de $\mathbb{R}^2$, onde (a,b) é qualquer vetor de $\mathbb{R}^2$, é LD. Com efeito, podemos escrever v como combinação linear de e_1 e e_2

$$v = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a(1,0) + b(0,1) = ae_1 + be_2,$$

e portanto, pela Proposição 1, o conjunto é LD.

Exemplo 59. Os vetores $v_1 = (1,1,1), v_2 = (-2,0,2)$ e $v_3 = (2,3,4)$ do $\mathbb{R}^3$ são LD. De fato,

$$\begin{aligned} v_3 &= a_1v_1 + a_2v_2 \\ (2,3,4) &= a_1(1,1,1) + a_2(-2,0,2) \\ &= (a_1,a_1,a_1) + (-2a_2, 0, 2a_2) \\ &= (a_1 - 2a_2, a_1, a_1 + 2a_2). \end{aligned}$$

Equivale ao sistema linear:

$$\begin{cases} a_1 - 2a_2 = 2 \\ a_1 = 3 \\ a_1 + 2a_2 = 4 \end{cases}$$

que tem como solução $a_1 = 3$ e $a_2 = \frac{1}{2}$. Logo, $v_3 = 3v_1 + \frac{1}{2}v_2$ e, portanto, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LD.

Exemplo 60. Os vetores $v_1 = (2,1,2,1)$, $v_2 = (1,2,1,0)$ e $v_3 = (-3,0,5,0)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ são LI. Com efeito

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \alpha_3v_3 \\ &= \alpha_1(2,1,2,1) + \alpha_2(1,2,1,0) + \alpha_3(-3,0,5,0) \\ &= (2\alpha_1, \alpha_1, 2\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, 2\alpha_2, \alpha_2, 0) + (-3\alpha_3, 0, 5\alpha_3, 0) \\ &= (2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3, \alpha_1). \end{aligned}$$

que equivale ao sistema linear

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

o qual admite somente a solução trivial, ou seja, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Portanto, v_1, v_2 e v_3 são LI.

EXERCÍCIOS

1. Assinale como verdadeira ou falsa as seguintes afirmações. Justifique sua resposta provando a afirmação se for verdadeira e dando um contra-exemplo caso for falsa:

   ( ) Seja B um subconjunto de $A \subset \mathbb{R}^n$. Se B é LD então A também é LD.

   ( ) Seja B um subconjunto de $A \subset \mathbb{R}^n$. Se A é LI então B também é LI.

   ( ) Se $v \in \mathbb{R}^n$ é um vetor não nulo, então o conjunto $\{v\}$ é LI.

   ( ) Se $v \in \mathbb{R}^n$, então o conjunto $\{v\}$ é LI.

   Resposta: V - V - V - F

2. Verifique se são LD ou LI:

   (a) $\{(10, 40), (\frac{3}{2}, 6)\}$

   (b) $\{(7, 9), (-1, \frac{5}{3})\}$

   (c) $\{(-5, 1, 3), (1, 2, 1), (0, \frac{5}{4}, 1)\}$

   (d) $\{(3, 2, 1), (1, 2, 3), (5, 0, -5)\}$

   (e) $\{(1, 5, -3, 1), (0, \frac{7}{2}, 1, 2), (2, \frac{-3}{2}, 0, 5)\}$

   (f) $\{(1, 5, 3, -2), (-5, -7, 2, -1), (13, 11, -12, 7)\}$

   Resposta: (a) LD (b) LI (c) LI (d) LD (e) LI (f) LD

3. Considere dois vetores (a, b) e (c, d) no plano. Se $ad - bc = 0$, mostre que eles são LD. $ad - bc \neq 0$, mostre que eles são LI.

Base e Dimensão

Dado um espaço vetorial V estamos interessados em encontrar um subconjunto de V que o gere e ao mesmo tempo que seja o menor possível, isto é, se subtrairmos deste conjunto algum vetor, ele não gera mais todo V. Um conjunto com tais propriedades é chamado *base* de V. Vejamos a definição precisa de base.

Definição 11 (Base)**.** Um conjunto de vetores $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ é uma base de V se for LI e gerar V.

Vejamos alguns exemplos de conjuntos que são bases dos espaços vetoriais $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$.

Exemplo 61. O conjunto $C = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, conhecida como *base canônica* de $\mathbb{R}^2$. De fato, vimos no Exemplo 50 que C gera $\mathbb{R}^2$ e no Exemplo 55 que C é LI.

Exemplo 62. O conjunto $B = \{(1, 1), (0, 1)\}$ também é uma base de $\mathbb{R}^2$. Com efeito, se

$$(0, 0) = a(1, 1) + b(0, 1) = (a, a + b),$$

temos $a = b = 0$, ou seja, B é LI. Além disto, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ qualquer, podemos escrever

$$(x, y) = x(1, 1) + (y - x)(0, 1),$$

isto é, todo vetor de $\mathbb{R}^2$ é uma combinação linear de $(1, 1)$ e $(0, 1)$, provando que B gera $\mathbb{R}^2$.

No entanto, nem todo conjunto com dois elementos forma uma base de $\mathbb{R}^2$. Vejamos um exemplo disto.

Exemplo 63. O conjunto $\{(-1, 0), (5, 0)\}$ não é base de $\mathbb{R}^2$, pois $(5, 0) = -5(-1, 0)$, isto é, o conjunto é LD.

No próximo exemplo veremos um conjunto de $\mathbb{R}^3$ que é LI, porém não é base de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 64. O conjunto $\{e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ não é base de $\mathbb{R}^3$. Apesar de LI ele não gera todo o $\mathbb{R}^3$, ou seja, $[e_2, e_3] \neq \mathbb{R}^3$. De fato, notemos que todo elemento de $\mathbb{R}^3$ da forma $(a, 0, 0), a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, não pertence ao espaço $[e_2, e_3]$.

Exemplo 65. Os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$, chamada *base canônica* de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 66. Mais geralmente, não é difícil ver que os vetores $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$, onde $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$, formam uma base de $\mathbb{R}^n$, conhecida como *base canônica* de $\mathbb{R}^n$.

Do próximo resultado concluiremos que duas bases quaisquer de um espaço vetorial finitamente gerado têm o mesmo número de vetores.

Teorema 1. Se $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de um espaço vetorial V, então todo conjunto com mais de n vetores é linearmente dependente.

Demonstração. Seja $B' = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ um conjunto qualquer de m vetores de V, com $m > n$. Devemos mostrar que B' é LD. Para isto, basta mostrarmos que existem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$, não todos nulos, tais que

$$a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_m w_m = 0. \tag{2.3}$$

Como B é uma base de V, cada vetor w_i de B' é uma combinação linear dos vetores de B, isto é, existem números $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}$, tais que

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_{11} v_1 + \alpha_{21} v_2 + \cdots + \alpha_{n1} v_n \\ w_2 &= \alpha_{12} v_1 + \alpha_{22} v_2 + \cdots + \alpha_{n2} v_n \\ &\vdots \\ w_m &= \alpha_{1m} v_1 + \alpha_{2m} v_2 + \cdots + \alpha_{nm} v_n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Substituindo as relações (2.3) em (2.4), obtemos:

$$a_1(\alpha_{11} v_1 + \alpha_{21} v_2 + \cdots + \alpha_{n1} v_n) + \cdots + a_m(\alpha_{1m} v_1 + \alpha_{2m} v_2 + \cdots + \alpha_{nm} v_n) = 0$$

ou, ordenando os termos convenientemente,

$$(a_1 \alpha_{11} + \cdots + a_m \alpha_{1m}) v_1 + \cdots + (a_1 \alpha_{n1} + \cdots + a_m \alpha_{nm}) v_n = 0.$$

Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ são LI, os coeficientes dessa combinação linear são nulos, ou seja,

$$\begin{cases} a_1 \alpha_{11} + \cdots + a_m \alpha_{1m} = 0 \\ \quad \vdots \\ a_1 \alpha_{n1} + \cdots + a_m \alpha_{nm} = 0 \end{cases}.$$

Esse sistema linear homogêneo possui m variáveis $a_1, a_2, \ldots, a_m$ e n equações. Como $m > n$, tal sistema admite soluções não-triviais, isto é, $a_i \neq 0$ para algum $i \in \{1, ..., m\}$.

Logo, $B' = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ é LD. ■

Corolário 1. Duas bases quaisquer de um espaço vetorial finitamente gerado têm o mesmo número de vetores.

Demonstração. Considere $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $B' = \{v_1, \ldots, v_m\}$ duas bases de um espaço vetorial V. Como B é base e B' é LI, pelo Teorema 1, $m \leq n$. Da mesma forma, como B' é base e B é LI, temos $n \leq m$. Logo, $m = n$. ■

O corolário anterior nos motiva à definição que segue.

Definição 12 (Dimensão)**.** Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Se $V \neq \{0\}$ definimos a *dimensão de* V, e a denotamos por dim V, como sendo o número de elementos de uma base qualquer de V. Se $V = \{0\}$ definimos a *dimensão* de V como sendo 0.

Agora, se V é um espaço vetorial não é finitamente gerado dizemos que V possui *dimensão infinita* ($\dim V = \infty$).

Com esta definição podemos enunciar o Teorema 1 da seguinte maneira:

Se V é um espaço vetorial de dimensão n, então qualquer subconjunto de V com mais de n elementos é linearmente dependente.

No próximo exemplo discutimos a dimensão dos espaços vetoriais $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, ..., \mathbb{R}^n$.

Exemplo 67. A dimensão do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ é 2, pois a base canônica, e portanto qualquer base de $\mathbb{R}^2$, tem 2 elementos. Da mesma forma, dim $\mathbb{R}^3 = 3$. Mais geralmente, dim $\mathbb{R}^n = n$.

TOME NOTA. Na Definição 11 vimos que um conjunto B é base de um espaço vetorial V se for LI e gerar V. No entanto, se soubermos que dim $V = n$, bastará verificar uma as duas condições, ou seja,

(a) Se dim $V = n$ e $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é LI, então B é base de V.

(b) Se dim $V = n$ e $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ gera V, então B é base de V.

Exemplo 68. O conjunto $B = \{(1, 2), (-1, -1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, pois sabemos que dim $\mathbb{R}^2 = 2$ e B é LI, uma vez que $(1, 2)$ não é múltiplo de $(-1, -1)$.

Observação. Sejam V um espaço vetorial com dim $V = n$ e S um subespaço de V. Então dim $S \leq n$. No caso em que dim $S = n$, tem-se $S = V$.

Com o auxílio da observação acima, apresentamos a seguir uma interpretação geométrica para os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 69. Consideremos o espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$. A dimensão de qualquer subespaço $S \subseteq \mathbb{R}^3$ só poderá ser $0, 1, 2$ ou 3. Assim,

(a) se $dimS = 0$, então $S = \{0\}$ é a origem.

(b) se $dimS = 1$, então S é uma reta que passa pela origem.

(c) se $dimS = 2$, então S é um plano que passa pela origem.

(d) se $dimS = 3$, então $S = \mathbb{R}^3$.

Observação. Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Se os vetores $v_1, \ldots, v_r$ são LI em V, com $r < n$, então existem $v_{r+1}, \ldots, v_n$ tais que $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ é uma base de V.

Exemplo 70. Encontre uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha o vetor $(2, 1, 1)$.

Como dim $\mathbb{R}^3 = 3$, precisamos encontrar dois vetores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ que juntos com $(2, 1, 1)$ formam um conjunto LI. Tomando v_1 um vetor que não seja múltiplo de $(2, 1, 1)$ já teremos que $\{(2, 1, 1), v_1\}$ é LI. Assim, consideremos $v_1 = (1, 0, 0)$. Para completar, escolhemos v_2 que não seja combinação linear de $(2, 1, 1)e(1, 0, 0)$. Dentre os infinitos existentes, tomemos $v_2 = (0, 1, 0)$. Logo, $\{(2, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ é LI e portanto é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 71. Consideremos o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \{(x, y, z, w); x - 2y = 0 \text{ e } z = 3w\}.$$

Determinar uma base de S e sua dimensão.

Um vetor $(x, y, z, w) \in S$ se $x = 2y$ e $z = 3w$. As variáveis livres são y e w. Logo, $dimS = 2$ e qualquer subconjunto de S com dois vetores LI forma uma base desse espaço. Façamos $y = 1, w = 0$ e $y = 0, w = 1$ para obter os vetores $v_1 = (2, 1, 0, 0)$ e $v_2 = (0, 0, 3, 1)$, respectivamente. O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é uma base de S.

Exercícios

1. Verifique quais dos conjuntos de vetores a seguir constituem uma base do $\mathbb{R}^2$:

   (a) $\{(-1, -1), (1, 2)\}$

   (b) $\{(3, -6), (-\frac{1}{2}, 1)\}$

   (c) $\{(0, 0), (2, 3)\}$

   (d) $\{(5, 1), (-2, 4)\}$

   Resposta: Os vetores dos itens (a) e (d) formam uma base de $\mathbb{R}^2$

2. Verifique quais dos conjuntos de vetores a seguir constituem uma base do $\mathbb{R}^2$:

   (a) $\{(1, 1, -1), (2, -1, 0), (3, 2, 0)\}$

   (b) $\{(3, 0, 3), (0, -1, 2), (-1, \frac{1}{2}, -2)\}$

   (c) $\{(2, 1, -1), (-3, 0, 3), (0, 0, 2)\}$

   (d) $\{(1, 3, 4), (1, 1, 1)\}$

   Resposta: Os vetores dos itens (a) e (c) formam uma base de $\mathbb{R}^3$

3. Encontre valores de m para que o conjunto $\{(-2, -m), (m, 3)\}$ seja uma base do $\mathbb{R}^2$.

   Resposta: $m \neq \pm\sqrt{6}$

4. O conjunto $B = \{(2, -1), (-3, 2)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$. Escrever qualquer vetor de $\mathbb{R}^2$ como combinação linear de B.

   Resposta: $(x, y) = (2x + 3y)(2, 1) + (x + 2y)(-3, 2)$

5. Mostrar que o conjunto

   $$\{(1, 2, 0, 0), (0, 0, 2, 1), (1, 0, 0, 6), (0, 0, 0, 4)\}$$

   forma uma base do $\mathbb{R}^4$.

6. Determinar uma base do subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelo conjunto

   $\{(1, -1, 0, 0), (-1, 1, 2, 1), (0, 0, 4, 2), (-2, 2, 2, 1)\}$.

   Resposta: Uma base é $\{\{(1, -1, 0, 0), (-2, 2, 2, 1)\}$

7. Seja $V = \mathbb{R}^3$ e o conjunto

$$B = \{(0,1,1),(1,1,0),(1,2,1)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

   (a) B é uma base de $\mathbb{R}^3$?

   (b) Determine uma base do $\mathbb{R}^3$ que possua dois elementos do conjunto B.

   Resposta: (b) Uma base é $\{(0,1,1),(1,1,0),(0,0,1)\}$

8. Determinar a dimensão e uma base para cada um dos seguintes espaços vetoriais:

   (a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; y = -x\}$

   (b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = 8x$ e $y = 0\}$

   (c) $\{(x,y)\} \in \mathbb{R}^2; 3x + 2y = 0\}$

   (d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = 2y$ e $z = -3y\}$

   (e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + 5z = 0\}$

   (f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; y = 0\}$

   Resposta: (a) $\dim = 2$ (b) $\dim = 1$ (c) $\dim = 1$ (d) $\dim = 1$ (e) $\dim = 2$ (f) $\dim = 2$

9. Encontre uma base e a dimensão do espaço solução dos seguintes sistemas lineares:

   (a) $\begin{cases} x + 2y - 2z - t = 0 \\ 2x + 4y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 2t = 0 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \\ 4x + 3y - z + 5t = 0 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} x + y - 2z + t = 0 \\ 2x + 2y - 4z + 2t = 0 \end{cases}$

   Resposta: (a) $\dim = 2$ e uma base é $\{(1,0,3,-5),(0,1,6,-10)\}$

   (b) $\dim = 2$ e uma base é $\{(0,-2,-1,1),(1,-3,-5,0)\}$

(c) $\dim = 1$ e uma base é $\{(1, 1, -1)\}$

(d) $\dim = 0$ e não existe base

(e) $\dim = 3$ e uma base é $\{(-1, 0, 0, 1), (-1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0)\}$

10. Para os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$

$$S_1 = \{(x, y, z, w); x + y + z = 0\} \text{ e } S_2 = \{(x, y, z, w); x - 2y = 0 \text{ e } z = 3w\}$$

obter:

(a) uma base de S_1 e sua dimensão.

(b) uma base de S_2 e sua dimensão.

Resposta: (a) $\dim S_1 = 3$ e uma base é $\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$
(b) $dimS_2 = 2$ e uma base é $\{(2, 1, 0, 0), (0, 0, 3, 1)\}$

Coordenadas e matriz mudança de base

Teorema 2. *Seja $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de um espaço vetorial V. Então, todo vetor $v \in V$ se escreve de maneira única como combinação linear dos vetores de B.*

Demonstração. Dado um vetor $v \in V$, pela definição de base, sabemos que v pode ser expresso como combinação linear dos vetores da base B. Suponha que existam duas tais combinações lineares:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n.$$

Assim,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$$

ou seja,

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0.$$

Como os vetores da base são LI, segue que

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \cdots = \alpha_n - \beta_n = 0,$$

isto é,

$$\alpha_i = \beta_i, \text{ para todo } i = 1, \ldots, n$$

o que prova o resultado. ■

Sejam V um espaço vetorial e $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Pelo Teorema 2 um elemento $v \in V$ qualquer se escreve de maneira única como

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Os números $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são chamados *coordenadas de v com relação à base* B e se representa por

$$v_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

ou em notação matricial

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Exemplo 72. Considere a base $B = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ do $\mathbb{R}^3$. Encontre as coordenadas do vetor $(3,2,1)$ com relação a B.

Devemos obter a, b e c tais que

$$
\begin{aligned}
(3,2,1) &= a(1,0,0)+b(1,1,0)+c(1,1,1) \\
&= (a+b+c, b+c, c)
\end{aligned}
$$

o que equivale ao sistema linear:

$$
\begin{cases}
a+b+c=3 \\
b+c=2 \\
c=1
\end{cases}
$$

donde $a=1, b=1$ e $c=1$. Assim,

$$(3,2,1)_B=(1,1,1).$$

Exemplo 73. Encontre o vetor $v \in \mathbb{R}^3$ cujas coordenadas na base $B=\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ é $v_B=(1,2,3)$.

Pela definição de coordenadas com relação à uma base, basta fazer:

$$v=1(1,0,0)+2(1,1,0)+3(1,1,1)=(6,5,3).$$

Matriz mudança de base

Dadas duas bases ordenadas $B_1=\{u_1,\ldots,u_n\}$ e $B_2=\{v_1,\ldots,v_n\}$ de um mesmo espaço vetorial V, um vetor $v \in V$ pode ser escrito como

$$
\begin{aligned}
v &= \alpha_1 u_1+\cdots+\alpha_n u_n \\
v &= \beta_1 v_1+\cdots+\beta_n v_n
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Nosso objetivo agora, é relacionar as coordenadas $v_{B_1}=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ de v em relação à base B_1, com as coordenadas $v_{B_2}=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ de v em relação à base B_2.

Uma vez que $\{u_1,\ldots,u_n\}$ é uma base de V, cada vetor $v_i \in B_2$ pode ser escrito como combinação linear dos u_j, ou seja,

$$
\begin{aligned}
v_1 &= a_{11}u_1+a_{21}u_2+\cdots+a_{n1}u_n \\
v_2 &= a_{12}u_1+a_{22}u_2+\cdots+a_{n2}u_n \\
&\vdots \\
v_n &= a_{1n}u_1+a_{2n}u_2+\cdots+a_{nn}u_n
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Substituindo (2.6) em (2.5) vem

$$
\begin{aligned}
v &= \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n \\
&= \beta_1(a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{n1}u_n) + \cdots + \beta_n(a_{1n}u_1 + \cdots \beta_n v_n) \\
&= (a_{11}\beta_1 + \cdots + a_{1n}\beta_n)u_1 + \cdots + (a_{n1}\beta_1 + \cdots + a_{nn}\beta_n)u_n.
\end{aligned}
$$

Como $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ e as coordenadas em relação a uma base são únicas, temos a seguinte relação entre as coordenadas $(\alpha_1, \ldots, \alpha_2)$ de v na base B_1 com as coordenadas $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ do mesmo vetor na base B_2:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= a_{11}\beta_1 + \cdots + a_{1n}\beta_n \\
&\vdots \\
\alpha_n &= a_{n1}\beta_1 + \cdots + a_{nn}\beta_n,
\end{aligned}
$$

que em forma matricial se escreve

$$
\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.
$$

Denotando a matriz dos coeficientes a_{ij} acima por $[I]_{B_1}^{B_2}$ podemos escrever:

$$
[v]_{B_1} = [I]_{B_1}^{B_2}[v]_{B_2}.
$$

Chamamos $[I]_{B_1}^{B_2}$ de *matriz mudança da base B_2 para a base B_1*. Esta matriz contribui para alcançar nosso objetivo, pois ela transforma as coordenadas de um vetor v na base B_2 em coordenadas do mesmo vetor v na base B_1.

Observação. (Dica para o cálculo da matriz $[I]_{B_1}^{B_2}$)
A i-ésima coluna de $[I]_{B_1}^{B_2}$ coincide as coordenadas do vetor v_i em relação à base B_1.

Exemplo 74. Calcule a matriz mudança da base $B_2 = \{(2,-1),(1,3)\}$ para a base $B_1 = \{(1,0),(1,1)\}$. Sabendo que $v_{B_2} = (5,3)$, calcule v_{B_1}.

Basta obter as coordenadas dos vetores de B_2 em relação a B_1 e dispó-las em colunas:

$$\begin{aligned} (2,-1) &= a_{11}(1,0) + a_{21}(1,1) \\ &= 3(1,0) - 1(1,1) \\ &\Rightarrow (2,-1)_{B_1} = (3,-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1,3) &= a_{12}(1,0) + a_{22}(1,1) \\ &= -2(1,0) + 3(1,1) \\ &\Rightarrow (1,3)_{B_1} = (-2,3) \end{aligned}$$

Assim,

$$[I]_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sendo $v_{B_2} = (5,3)$ temos

$$[v]_{B_1} = [I]_{B_1}^{B_2}[v]_{B_2} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Isto é, $v_{B_1} = (9,4)$.

Inversa da matriz mudança de base

Se ao contrário, escrevermos coordenadas dos vetores u_i de B_1 em relação aos vetores v_i da base B_2, obtemos a matriz $[I]_{B_2}^{B_1}$ mudança da base B_1 para a B_2.

TOME NOTA. Um fato importante é que as matrizes $[I]_{B_1}^{B_2}$ e $[I]_{B_2}^{B_1}$ são invertíveis e

$$\left([I]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1} = [I]_{B_2}^{B_1}.$$

Exemplo 75. Calcule a matriz mudança da base canônica $C = \{(1,0),(0,1)\}$ para a base $B = \{(-1,2),(4,3)\}$. Obtenha as coordenadas do vetor $(5,8)$ em relação a B.

Note que é mais fácil obter a matriz $[I]_C^B$ mudança da base B para C, pois os vetores da base B já estão em coordenadas na base canônica, ou seja,

$$(-1,2) = -1(1,0) + 2(0,1) \quad \text{e} \quad (4,3) = 4(1,0) + 3(0,1).$$

Assim, $[I]_C^B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Usando a fórmula de inversão de matrizes 2×2, obtemos:

$$[I]_B^C = \left([I]_C^B\right)^{-1} = \frac{-1}{11}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$[v_B] = [I]_B^C[v]_C = \begin{bmatrix} \frac{-3}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{11} \\ \frac{18}{11} \end{bmatrix},$$

ou seja, $v_B = (\frac{17}{11}, \frac{18}{11})$.

Exemplo 76. Seja $B = \{(1,1,0),(0,2,0),(0,0,5)\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$ e denote por C sua base canônica. Calcule a matriz mudança da base canônica para a base B.

$$(1,0,0) = a_{11}(1,1,0) + a_{21}(0,2,0) + a_{31}(0,0,5)$$

$$(0,1,0) = a_{12}(1,1,0) + a_{22}(0,2,0) + a_{32}(0,0,5)$$

$$(0,0,1) = a_{13}(1,1,0) + a_{23}(0,2,0) + a_{33}(0,0,5)$$

O que nos dá

$$\begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{11} + 2a_{21} = 0 \\ 5a_{31} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_{12} = 0 \\ a_{12} + 2a_{22} = 1 \\ 5a_{32} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_{13} = 0 \\ a_{13} + 2a_{23} = 0 \\ 5a_{33} = 1 \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{21} = \frac{-1}{2} \\ a_{31} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_{12} = 0 \\ a_{22} = \frac{1}{2} \\ a_{32} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_{13} = 0 \\ a_{23} = 0 \\ a_{33} = \frac{1}{5} \end{cases}.$$

Logo,

$$[I]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 77. Considere as bases $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ do $\mathbb{R}^3$ relacionadas da seguinte forma:

$$u_1 = v_1 + v_3$$
$$u_2 = 2v_1 + v_2 + v_3$$
$$u_3 = v_1 + 2v_2 + v_3$$

Determinar a matriz de mudança de B_2 para B_1 e de B_1 para B_2.

Por definição temos que

$$[I]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é a matriz mudança de B_1 para B_2.

Para obter a matriz $[I]_{B_1}^{B_2}$ mudança de B_2 para B_1, basta calcular a inversa de $[I]_{B_2}^{B_1}$, pois $[I]_{B_1}^{B_2} = \left([I]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$. Deixamos como exercício o cálculo desta matriz inversa que é:

$$[I]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercícios

1. Determinar o vetor coordenada de $v = (6, 2)$ em relação às seguintes bases

$$B_1 = \{(3,0), (0,2)\}, \qquad B_2 = \{(1,0), (0,1)\}$$

$$B_3 = \{(1,2),(2,1)\}, \quad \text{e} \quad B_4 = \{(0,1),(1,0)\}.$$

Resposta: $v_{B_1} = (2,1)$, $v_{B_2} = (6,2)$, $v_{B_3} = (\frac{-2}{3}, \frac{10}{3})$, $v_{B_4} = (2,6)$

2. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, consideremos a seguinte base,

$$B = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,-1,1)\}.$$

Determinar o vetor coordenada de $v \in \mathbb{R}^3$ em relação à base B se:

(a) $v = (2,-3,4)$.

(b) $v = (3,5,6)$.

(c) $v = (1,-1,1)$.

Resposta: (a) $v_B = (-2,1,4)$ (b) $v_B = (-3,11,6)$ (c) $v_B = (0,0,1)$

3. Sejam os vetores $v_1 = (1,0,-1)$, $v_2 = (1,2,1)$ e $v_3 = (0,-1,0)$ do $\mathbb{R}^3$.

(a) Mostrar que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ é base do $\mathbb{R}^3$

(b) Escrever $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ como combinação linear dos vetores da base B.

Resposta: (b) $e_1 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + v_3$, $e_2 = -v_3$, $e_3 = \frac{-1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + v_3$

4. Considere as seguintes bases de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(2,-1),(-1,1)\}, \quad B = \{(1,0),(2,1)\},$$

$$C = \{(1,1),(1,-1)\} \text{ e } D = \{(-1,-3),(3,5)\}.$$

Calcular:

(a) Calcular v_B sabendo que $v_A = (4,3)$

(b) Calcular v_A sabendo que $v_B = (7,-1)$

(c) Calcular v_D sabendo que $v_C = (2,3)$

Resposta: (a) $v_B = (7,-1)$ (b) $v_A = (4,3)$ (c) $v_D = (7,4)$

5. Sabendo que $B = \{(1,3),(2,-4)\}$ é base do $\mathbb{R}^2$ e que a matriz M de mudança de base de B para C é:

$$M = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -11 & 8 \end{bmatrix},$$

determinar a base C.

Resposta: $C = \{(3,-2),(-2,1)\}$

6. Considere as bases $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $C = \{(1,0,-1),(0,1,-1),(-1,1,1)\}$ do $\mathbb{R}^3$.

   (a) Determinar a matriz M de mudança de base de B para C.

   (b) Calcular v_C sabendo que $v_B = (1,2,3)$.

   (c) Calcular v_B sabendo que $v_C = (7,-4,6)$.

   Resposta: (a) $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
   (b) $v_C = (7,-4,6)$ (c) $v_B = (1,2,3)$

7. Sabendo que $v_C = (5,-2,3)$, calcular v_B, sendo

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   a matriz de mudança de base de B para C.

   Resposta: $v_B = (-4,2,7)$

8. Considere as bases $B_1 = \{u_1,u_2,u_3\}$ e $B_2 = \{v_1,v_2,v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ assim relacionadas:

$$v_1 = u_1 - u_2 - u_3$$
$$v_2 = 2u_2 + u_3$$
$$v_3 = 2u_1 + u_3$$

   (a) Determinar as matrizes de mudança de B_1 para B_2 e de B_2 para B_1.

   (b) Se um vetor u de $\mathbb{R}^3$ apresenta coordenadas $1,1$ e 1, em relação a B_1, quais as coordenadas de u relativamente a B_2?

   Resposta: (a) $[I]^{B_1}_{B_2} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 & -1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$ e $[I]^{B_2}_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
   (b) $u_{B_2} = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Módulo 3
Transformações Lineares

Ao final deste módulo o leitor estará familiarizado com os seguintes conceitos:

▷ Transformação linear;

▷ Núcleo e imagem de uma transformação linear;

▷ Representação matricial de uma transformação linear;

▷ Operadores lineares no plano.

Leitura Complementar

O leitor interessado em aperfeiçoar e ampliar seus conhecimentos nos assuntos tratados neste módulo encontrará o suporte necessário nos seguintes textos: [1, 2, 6]. Aos interessados em aprofundar nestes conteúdos indicamos: [3, 4].

Transformação Linear

As transformações lineares são funções especiais por dois motivos: o primeiro é que são funções definidas entre espaços vetoriais e o segundo motivo é porque são funções que respeitam as operações destes espaços vetoriais

Definição 13 (Transformação Linear)**.** Dados dois espaços vetoriais U e V, uma transformação linear de U em V é uma função $T: U \to V$, que satisfaz as seguintes condições:

TL 1) $T(u+v) = T(u) + T(v), \forall u, v \in U$.

TL 2) $T(\alpha u) = \alpha T(u), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in U$.

Observação. Uma transformação linear de U em U é chamada de *operador linear*.

Vejamos alguns exemplos de funções que são transformações lineares.

Exemplo 78. A transformação $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x,y) = (2x+y, x-y, 3y)$ é linear.

De fato, dados $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ vetores quaisquer de $\mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos:

$$\begin{aligned}
TL1)\ T(u+v) &= T((x_1,y_1) + (x_2,y_2)) \\
&= T(x_1+x_2, y_1+y_2) \\
&= (2(x_1+x_2) + (y_1+y_2), (x_1+x_2) - (y_1+y_2), 3(y_1+y_2)) \\
&= (2x_1+2x_2+y_1+y_2, x_1+x_2-y_1-y_2, 3y_1+3y_2) \\
&= (2x_1+y_1, x_1-y_1, 3y_1) + (2x_2+y_2, x_2-y_2, 3y_2) \\
&= T(u) + T(v).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TL2)\ T(\alpha u) &= T(\alpha(x_1,y_1)) \\
&= T(\alpha x_1, \alpha y_1) \\
&= (2\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_1 - \alpha y_1, 3\alpha y_1) \\
&= (\alpha(2x_1+y_1), \alpha(x_1-y_1), \alpha(3y_1)) \\
&= \alpha(2x_1+y_1, x_1-y_1, 3y_1) \\
&= \alpha T(u).
\end{aligned}$$

Exemplo 79. Seja $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $T(x)=kx$, onde $k\in\mathbb{R}-\{0\}$, é uma transformação linear.

Com efeito, sejam $x,y,\alpha\in\mathbb{R}$, temos:

TL 1) $T(x+y)=k(x+y)=kx+ky=T(x)+T(y)$.

TL 2) $T(\alpha x)=k(\alpha x)=\alpha kx=\alpha T(x)$.

Note que toda transformação linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ só pode ser da forma apresentada no exemplo anterior.

De fato, $T(x)=T(x\cdot 1)$ e, sendo T linear e x um escalar, podemos escrever $T(x\cdot 1)=xT(1)$. Denotando $T(1)=k$, temos $T(x)=kx$.

Exemplo 80. A aplicação identidade $I:U\to U$, dada por $I(u)=u$, é um operador linear.

De fato,

TL 1) $I(u+v)=u+v=I(u)+I(v),\forall u,v\in U$.

TL 2) $I(\alpha u)=\alpha u=\alpha I(u),\forall u\in U$ e $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exemplo 81. A transformação nula $T:U\to V$, dada por $T(u)=0,\forall u\in U$, é linear, pois:

TL 1) $T(u+v)=0=0+0=T(u)+T(v),\forall u,v\in U$.

TL 2) $T(\alpha u)=0=\alpha\cdot 0=\alpha T(u),\forall u\in U$ e $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exemplo 82. Uma matriz A de ordem 3×2 determina uma transformação da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rccl} T_A & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & u & \mapsto & T_A(u)=Au. \end{array}$$

Além disso, T_A é linear. De fato, sejam $u,v\in\mathbb{R}^2$ e $\alpha\in\mathbb{R}$ temos

TL 1) $T_A(u+v)=A(u+v)=Au+Av=T(u)+T(v)$,

TL 2) $T_A(\alpha u)=A(\alpha u)=\alpha Au=\alpha T(u)$.

Vejamos um caso particular de uma transformação linear definida como acima.

Considerando $A_{3\times 2}=\begin{pmatrix}5&0\\2&-1\\1&3\end{pmatrix}$ e $u=(x,y)$ como um vetor coluna, $u_{2\times 1}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, temos

$$Au=\begin{pmatrix}5&0\\2&-1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5x\\2x-y\\x+3y\end{pmatrix}.$$

Logo, $T_A(x,y) = (5x, 2x - y, x + 3y)$.

Isto significa que a matriz $A_{3\times 2}$ determina a transformação do vetor $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ no vetor $v = (5x, 2x - y, x + 3y)$ e tal transformação é linear.

A ideia apresentada no exemplo anterior pode ser generalizada para qualquer matriz de ordem $m \times n$ como segue.

Exemplo 83. Em geral, dada uma matriz A de ordem $m \times n$, fica determinada a transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ cuja imagem $T_A(u)$ do vetor $u \in \mathbb{R}^n$ é dada pelo produto da matriz $A_{m\times n}$ com o vetor coluna $u_{n\times 1}$:

$$T_A(u) = A_{m\times n} \cdot u_{n\times 1} = (Au)_{m\times 1}.$$

Mais adiante veremos que o contrário também acontece, ou seja, toda transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ pode ser representada por uma matriz de ordem $m \times n$.

No próximo exemplo veremos uma transformação que não é linear.

Exemplo 84. A transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x,y) = (x^2, 2y)$ não é linear.

De fato, dados $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ temos

$$T(u + v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = ((x_1 + x_2)^2, 2(y_1 + y_2)) = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, 2y_1 + 2y_2)$$

porém

$$T(u) + T(v) = (x_1^2, 2y_1) + (x_2^2, 2y_2) = (x_1^2 + x_2^2, 2(y_1 + y_2))$$

o que implica

$$T(u + v) \neq T(u) + T(v),$$

sempre que x_1 e x_2 são não nulos.

A próxima observação nos dá uma maneira de detectar algumas transformações que não são lineares.

Observação. Se $T : U \to V$ é uma transformação linear, então T leva o vetor nulo de U no vetor nulo de V. De fato, $T(0) = T(0 \cdot u) = 0T(u) = 0$.

Mas cuidado, para uma transformação T ser linear, não é suficiente que $T(0) = 0$, como pode ser visto no Exemplo 84.

Se $T : U \to V$ é uma transformação linear, então a imagem de uma combinação linear $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ em U é uma combinação linear das imagens $T(u_1)$ e $T(u_2)$ em V com os mesmos coeficientes α_1 e α_2. Ou seja,

$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = T(\alpha_1 u_1) + T(\alpha_2 u_2) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2).$$

É claro que isto vale para uma combinação linear qualquer em U, isto é,

$$T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n).$$

Isto nos revela que, caso U seja um espaço vetorial finitamente gerado, a transformação linear T fica completamente determinada se conhecermos seus valores nos elementos de uma base de U. De fato, seja $B = \{u_1, ..., u_n\}$ uma base de U tal que são conhecidos os vetores

$$T(u_1) = v_1, ..., T(u_n) = v_n \text{ de } V.$$

Dado $u \in U$ qualquer, sabemos que existem escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$. Assim, obtemos $T(u)$ por:

$$\begin{aligned} T(u) &= T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) \\ &= \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n) \\ &= \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n. \end{aligned}$$

Exemplo 85. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ uma base do $\mathbb{R}^2$. Supondo que $T(1, 1) = (2, 6)$ e $T(1, -1) = (-2, 2)$, determine $T(5, 3)$ e $T(x, y)$.

Expressando o vetor $(5, 3)$ como combinação linear dos vetores de B, temos:

$$(5, 3) = a(1, 1) + b(1, -1) = (a + b, a - b)$$

ou

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 3 \end{cases}$$

cuja solução é $a = 4$ e $b = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} T(5, 3) &= T(4(1, 1) + 1(1, -1)) \\ &= 4T(1, 1) + 1T(1, -1) \\ &= 4(2, 6) + 1(-2, 2) \\ &= (6, 26). \end{aligned}$$

Procedemos da mesma forma com o vetor genérico (x, y):

$$(x, y) = a(1, 1) + b(1, -1)$$

ou

$$\begin{cases} a + b = x \\ a - b = y \end{cases}$$

que tem solução $a = \dfrac{x+y}{2}$ e $b = \dfrac{x-y}{2}$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} T(x, y) & = & T(\frac{x+y}{2}(1, 1) + \frac{x-y}{2}(1, -1)) \\ & = & \frac{x+y}{2}T(1, 1) + \frac{x-y}{2}T(1, -1) \\ & = & \frac{x+y}{2}(2, 6) + \frac{x-y}{2}(-2, 2) \\ & = & (x + y, 3x + 3y) + (-x + y, x - y) \\ & = & (2y, 4x + 2y) \end{array}.$$

Se calculássemos primeiro $T(x, y) = (2y, 4x + 2y)$ poderíamos calcular o vetor $T(5, 3)$ por

$$T(5, 3) = (2 \cdot 3, 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3) = (6, 26).$$

Exemplo 86. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Sendo $T(1, 1, 1) = (-2, 1)$, $T(1, 1, 0) = (4, 0)$ e $T(1, 0, 0) = (1, 3)$, determine $T(x, y, z)$.

Expressando (x, y, z) como combinação linear dos elementos em B, temos

$$(x, y, z) = a(1, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(1, 0, 0)$$

ou

$$\begin{cases} a + b + c = x \\ a + b = y \\ a = z \end{cases}$$

cuja solução é $a = z$, $b = y - z$ e $c = x - y$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} T(x, y, z) & = & T(z(1, 1, 1) + (y - z)(1, 1, 0) + (x - y)(1, 0, 0)) \\ & = & zT(1, 1, 1) + (y - z)T(1, 1, 0) + (x - y)T(1, 0, 0) \\ & = & z(-2, 1) + (y - z)(4, 0) + (x - y)(1, 3) \\ & = & (-2z + 4y - 4z + x - y, z + 3x - 3y) \\ & = & (x + 3y - 6z, 3x - 3y + z). \end{array}$$

No próximo exemplo o que queremos é encontrar um vetor cuja imagem por uma transformação linear é conhecida.

Exemplo 87. Dado o operador linear no $\mathbb{R}^3$:

$$T(x,y,z) = (x+2y+2z, x+2y-z, -x+y+4z).$$

Determine o vetor $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(u) = (-1, 8, -11)$.

Fazendo $u = (x,y,z)$ temos que $T(u) = T(x,y,z) = (-1,8,-11)$ ou seja,

$$(x+2y+2z, x+2y-z, -x+y+4z) = (-1,8,-11)$$

ou

$$\begin{cases} x+2y+2z = -1 \\ x+2y-z = 8 \\ -x+y+4z = -11 \end{cases}$$

cuja solução é $x = 1$, $y = 2$ e $z = -3$. Logo, $u = (1,2,-3)$.

Exercícios

1. Entre as seguintes transformações, verique quais são lineares.
   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x,y) = (x-3y, 4x+2y)$
   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x,y) = (x, y^2)$
   (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x,y) = (x, y-1)$
   (d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x,y) = (0, 4y+3x)$
   (e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x,y) = (x, 2|y|)$
   (f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ T(x,y) = xy$
   (g) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(x,y) = (y+2x, -3x, 0)$
   (h) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x,y,z) = (x+z, z-y, -3x)$
   (i) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ T(x) = (x, 2-x)$
   (j) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T(x,y,z) = 2x-5y+3z$
   (k) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ T(x,y) = y$
   (l) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4,\ T(x,y) = (-y, x, y, -2x)$

   Resposta: As transformações dos itens (a), (d), (g), (h), (j), (k) e (l) são lineares.

2. Considere uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(-1,1) = (3,2,1)$ e $T(0,1) = (1,1,0)$. Determine:

   (a) $T(2,3)$

   (b) $T(x,y)$

   (c) $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = (-2,1,-3)$.

   Resposta: (a) $T(2,3) = (-1,1,-2)$ (b) $T(x,y) = (-2x+y, -x+y, -x)$ (c) $v = (3,4)$

3. Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(1,1,1) = (1,2)$, $T(1,1,0) = (2,3)$ e $T(1,0,0) = (3,4)$. Determine:

   (a) $T(x,y,z)$

   (b) $v_1 \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v_1) = (-3,-2)$

   (c) $v_2 \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v_2) = (0,0)$

   Resposta: (a) $T(x,y,z) = (3x-y-z, 4x-y-z)$ (b) $v_1 = (1, 6-z, z)$ (c) $v_2 = (0,-z,z)$

4. Seja $T : V \to W$ uma função, mostre que:

   (a) Se T é uma transformação linear, então $T(0) = 0$

   (b) Se $T(0) \neq 0$, então T não é uma transformação linear.

5. (a) Ache a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0,0) = (2,0)$, $T(0,1,0) = (1,1)$ e $T(0,0,1) = (0,-1)$.

   (b) Encontre v de $\mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (3,2)$.

   Resposta: (a) $T(x,y,z) = (2x+y, y-z)$ (b) $v = (x, 3-2x, 1-2x)$

6. (a) Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1) = (3,2,1)$ e $T(0,-2) = (0,1,0)$?

   (b) Ache $T(1,0)$ e $T(0,1)$.

   (c) Qual é a transformação linear $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $S(3,2,1) = (1,1)$, $S(0,1,0) = (0,-2)$ e $S(0,0,1) = (0,0)$?

   (a) Ache a transformação linear $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $P = S \circ T$.

Resposta: (a) $T(x,y) = (3x, \frac{5x-y}{2}, x)$ (b) $T(1,0) = (3, \frac{5}{2}, 1)$ e $T(0,1) = (0, \frac{-1}{2}, 0)$

(c) $S(x,y,z) = (\frac{1}{3}x, \frac{5}{3}x - 2y)$ (d) $P(x,y) = (x,y)$

Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Nesta unidade introduzimos e estabelecemos propriedades de núcleo e imagem de uma transformação linear. Veremos que estes objetos têm estrutura de subespaços vetorias e são usados no estudo das tranformações lineares. Apresentamos, por exemplo, o teorema da dimensão, o qual relaciona a dimensão do núcleo e da imagem com a dimensão do domínio de uma transformação linear. Este resultado é muito útil no estudo da injetividade e/ou da sobrejetividade de uma transformação linerar. Por fim, introduzimos o conceito de isomorfismos entre espaços vetoriais.

Iniciemos com a definição de núcleo de uma transformação linear.

Definição 14 (Núcleo). Dada uma transformação linear $T : U \to V$, chamamos de *núcleo de* T o conjunto de todos os vetores $u \in U$ tais que $T(u) = 0$. Tal conjunto denotaremos por $N(T)$ ou $Ker(T)$. Assim, podemos escrever

$$N(T) = \{u \in U; T(u) = 0\}.$$

Note que $N(T) \neq \emptyset$, pois, uma vez que $T(0) = 0$, o vetor nulo de U sempre pertence a $N(T)$.

Agora, consideremos algumas transformações lineares e determinemos seus núcleos.

Exemplo 88. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x, y) = x - y$. Neste caso,

$$N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\},$$

ou seja, $N(T)$ é a reta $y = x$. Podemos ainda escrever

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x, x); x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 1); x \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1, 1)]. \end{aligned}$$

Exemplo 89. O núcleo da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (x + y, 2x - y)$ é o conjunto

$$N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x + y, 2x - y) = (0, 0)\},$$

isto é, a solução geral do sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

a qual é $x = y = 0$.

Logo, $N(T) = \{(0, 0)\}$.

Exemplo 90. A transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y, z) = (x - y - z, 2x + y + 2z)$, apresenta como núcleo o conjunto

$$N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x - y - z, 2x + y + 2z) = (0, 0)\},$$

ou seja, $(x, y, z) \in N(T)$ se, e somente se,

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases},$$

sistema que admite como solução $x = \frac{y}{4}$ e $z = \frac{-3}{4}y$.

Logo,

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(\tfrac{y}{4}, y, \tfrac{-3}{4}y); y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\tfrac{y}{4}(1, 4, -3); y \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1, 4, -3)]. \end{aligned}$$

A seguir veremos que o conceito de imagem de uma transformação linear coincide com o conceito de imagem de uma função qualquer.

Definição 15 (Imagem)**.** Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Chamamos *imagem de T* o conjuntos dos vetores $v \in V$ tais que existe um vetor $u \in U$ satisfazendo $T(u) = v$. Denotaremos tal conjunto por $Im(T)$ ou $T(V)$. Assim,

$$Im(T) = \{v \in V; T(u) = v \text{ para algum } u \in U\}.$$

A seguinte figura ilustra todas as componentes relacionadas a uma transformação linear $T : U \to V$.

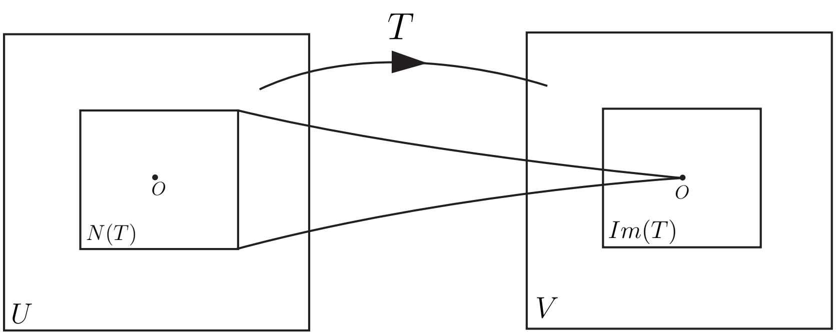

FIGURA 3.1

Note que $Im(T)$ é sempre não vazia, pois como $T(0) = 0$ temos que $0 \in Im(T)$.

Vejamos alguns exemplos de transformações lineares e suas respectivas imagens.

Exemplo 91. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x, y, z) = (0, y, z)$, isto é, T é a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ no plano yOz. A imagem de T é o próprio plano yOz. De fato,

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{(0, y, z); y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1); y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= [(0, 1, 0), (0, 0, 1)]. \end{aligned}$$

Já o núcleo de T é o eixo dos x, pois $T(x, 0, 0) = (0, 0, 0), \forall x \in \mathbb{R}$ e então

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x, 0, 0); x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, 0); x \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1, 0, 0)]. \end{aligned}$$

Exemplo 92. A transformação nula $T : U \to V$, $T(u) = 0, \forall u \in U$, tem $Im(T) = \{0\}$, enquanto que o núcleo é todo U.

Exemplo 93. A transformação identidade $I : U \to U$, $I(u) = u, \forall u \in \mathbb{R}$, tem $N(T) = \{0\}$, enquanto que a imagem é todo o U.

O próximo resultado nos diz que os conjuntos núcleo e imagem de uma transformação linear $T : U \to V$ são subespaços de U e V, respectivamente.

Proposição 2. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Então,

(1) O núcleo de T, $N(T)$, é um subespaço vetorial de U.

(2) A imagem de T, $Im(T)$, é um subespaço vetorial de V.

Demonstração. (1) Como visto, $0 \in N(T)$, logo $N(T) \neq \emptyset$. Dados $u_1, u_2 \in N(T)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos

SV 1) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = 0 + 0 = 0$, ou seja, $u_1 + u_2 \in N(T)$.

SV 2) $T(\alpha u_1) = \alpha T(u_1) = \alpha 0 = 0$, ou seja, $\alpha u_1 \in N(T)$.

Portanto, $N(T)$ é um subespaço vetorial de U.

(2) Como $0 \in Im(T)$, segue que $Im(T) \neq \emptyset$. Dados $v_1, v_2 \in Im(T)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, existem $u_1, u_2 \in U$ tais que $T(u_1) = v_1$ e $T(u_2) = v_2$. Assim,

SV 1) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = v_1 + v_2$, isto é, $v_1 + v_2 \in Im(T)$.

SV 2) $T(\alpha u_1) = \alpha T(u_1) = \alpha v_1$, isto é, $\alpha v_1 \in Im(T)$.

Portanto, $Im(T)$ é um subespaço vetorial de V.

■

Os conceitos de injetividade, sobrejetividade e bijetividade já são bem conhecidos quando se trata de funções. O que veremos a seguir é que estes conceitos também são introduzidos ao estudo de transformações lineares.

Definição 16 (Injetividade, sobrejetiva e bijetividade)**.** Seja $T : U \to V$ uma transformação linear.

1. Dizemos que T é *injetora* se para todos $u_1, u_2 \in U$, $u_1 \neq u_2$ implica $T(u_1) \neq T(u_2)$. Equivalentemente, $T(u_1) = T(u_2)$ implica $u_1 = u_2, \forall u_1, u_2 \in U$.

2. Dizemos que T é *sobrejetora* se $Im(T) = V$, ou seja, para todo $v \in V$ existe pelo menos um $u \in U$ tal que $T(u) = v$.

3. Dizemos que T é bijetora se ela for injetora e sobrejetora.

Note que os conceitos de injetividade e sobrejetividade de uma transformação linear coincidem com os mesmos conceitos para uma função qualquer.

O próximo resultado nos auxilia na verificação de uma transformação linear ser ou não injetora.

Proposição 3. Uma transformação linear $T : U \to V$ é injetora se, e somente se, $N(T) = \{0\}$.

Demonstração. Primeiramente suponhamos que T é injetora. Sabemos que $T(0) = 0$ e, como T é injetora, dado $u \in N(T)$ temos que $T(u) = 0 = T(0)$ implica que $u = 0$. Logo, $N(T) = \{0\}$.

Por fim, suponhamos que $N(T) = \{0\}$. Dados $u_1, u_2 \in U$ tais que $T(u_1) = T(u_2)$, temos que $T(u_1) - T(u_2) = 0$, o que implica $T(u_1 - u_2) = 0$, isto é, $u_1 - u_2 \in N(T)$. Como $N(T) = \{0\}$, segue que $u_1 = u_2$ e portanto T é injetora. ■

Teorema 3 (do núcleo e imagem)**.** Seja $T : U \to V$ uma transformação linear, onde U tem dimensão finita. Então,

$$\dim\ N(T) + \dim\ Im(T) = \dim\ U.$$

Demonstração. Tome uma base $\{v_1, ..., v_n\}$ de $N(T)$. Como $N(T)$ é um subespaço de U, podemos completar este conjunto de modo a obter uma base de U. Seja $\{v_1, ..., v_n, u_1, ..., u_m\}$ uma tal base de V.

Mostraremos que $\{T(u_1), ..., T(u_m)\}$ é uma base de $Im(T)$, ou seja,

(i) $Im(T) = [T(u_1), ..., T(u_m)]$

(ii) $\{T(u_1), .., T(u_m)\}$ é LI,

e com isto teremos que $\dim N(T) + \dim Im(T) = n + m = \dim U$.

Provemos o item (i). Dado $v \in Im(T)$, existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$. Assim, existem $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdot ... + \alpha_n v_n + \beta_1 u_1 + \cdot ... + \beta_m u_m.$$

Além disto,

$$\begin{aligned} v \;=\; T(u) &= T(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n + \beta_1 u_1 + ... + \beta_m u_m) \\ &= \alpha_1 T(v_1) + ... + \alpha_n T(v_n) + \beta_1 T(u_1) + ... + \beta_m T(u_m). \end{aligned}$$

Mas $T(v_i) = 0$, pois $v_i \in N(T)$, $\forall i = 1, ..., n$. Logo,

$$v = \beta_1 T(u_1) + ... + \beta_m T(u_m),$$

provando que $Im(T) = [T(u_1), ..., T(u_m)]$.

Provemos agora o item ii). Considerando a combinação linear

$$\gamma_1 T(u_1) + \cdots + \gamma_m T(u_m) = 0,$$

devemos mostrar que $\gamma_i = 0, \forall i = 1, ..., m$.

Sendo T linear temos $T(\gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_m u_m) = 0$, ou seja, $\gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_m u_m \in N(T)$, isto é, existem $\delta_1, ..., \delta_n \in \mathbb{R}$ satisfazendo:

$$\gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_m u_m = \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_n v_n$$

ou

$$\gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_m u_m - \delta_1 v_1 - \cdots - \delta_n v_n = 0.$$

Como $\{v_1, ..., v_n, u_1, ..., u_m\}$ é uma base de V, em particular é LI, concluímos que

$$\gamma_1 = \cdots = \gamma_m = \delta_1 = \cdots = \delta_n = 0.$$

■

Vejamos alguns exemplo de como aplicar o teorema acima.

Exemplo 94. Verifique nos exemplos anteriores as $\dim N(T)$, $\dim Im(T)$ e $\dim U$.

Exemplo 95. Determine o núcleo e a imagem do operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dado por

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 2z, y - x, 4y - x + 2z),$$

bem como suas dimensões.

Temos que

$$N(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; T(x,y,z) = 0\},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in N(T) \quad &\Leftrightarrow \quad (x+2y+2z, y-x, 4y-x+2z) = (0,0,0)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+2z=0 \\ -x+y=0 \\ -x+2y+2z=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

cuja solução geral é $(x, x, -\frac{3}{2}x), x \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$N(T) = \{(x,x,-\frac{3}{2}x); x \in \mathbb{R}\} = [(1,1,-\frac{3}{2})].$$

Como $\{(1,1,\frac{3}{2})\}$ é LI, segue que dim $N(T) = 1$.

Agora,

$$Im(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3; T(x,y,z) = (a,b,c)\},$$

para algum $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Ou seja, $(a,b,c) \in Im(T)$ se existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$(x+2y+2z, -x+y, -x+4y+2z) = (a,b,c)$$

o que equivale ao seguinte sistema possuir solução

$$\begin{cases} x+2y+2z=a \\ -x+y=b \\ -x+4y+2z=c \end{cases}.$$

Escalonando a matriz ampliada deste sistema concluímos que ele só admite solução se $-a-2b+c=0$. Assim,

$$\begin{aligned}
Im(T) &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3; -a-2b+c=0\}\\
&= \{(-2b+c, b, c); b,c \in \mathbb{R}^2\}\\
&= \{b(-2,1,0)+c(1,0,1); b,c \in \mathbb{R}\}\\
&= [(-2,1,0),(1,0,1)].
\end{aligned}$$

Note que $\dim Im(T) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim N(T) = 3-1 = 2$. Desta forma, podemos concluir que o conjunto $\{(-2,1,0),(1,0,1)\}$ é uma base de $Im(T)$.

Exemplo 96. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $T(1,0,0) = (-1,1)$, $T(0,1,0) = (3,2)$ e $T(0,0,1) = (1,0)$.

(a) Use o teorema da dimensão para concluir que T não é injetora.

(b) Determine $N(T)$ e uma de suas bases.

(c) Determine $Im(T)$ e uma de suas bases. T é sobrejetora?

(a) Como $\dim Im(T)$ é no máximo 2, pois $Im(T) \subset \mathbb{R}^2$, temos de

$$\dim N(T) + \dim Im(T) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

e então $\dim N(T)$ é no mínimo 1. Logo, $N(T) \neq \{0\}$ e T é não injetora.

(b) Inicialmente vamos obter a expressão que define T. Para isto escrevemos

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

e, em seguida, aplicamos T nesta igualdade:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= T(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) \\ &= xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1) \\ &= x(-1, 1) + y(3, 2) + z(1, 0) \\ &= (-x + 3y + z, x + 2y). \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in N(T) &\Leftrightarrow T(x, y, z) = (0, 0) \\ &\Leftrightarrow (-x + 3y + z, x + 2z) = (0, 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

cuja solução geral é $(-2z, -z, z), z \in \mathbb{R}$. Logo, $N(T) = \{(-2z, -z, z); z \in \mathbb{R}\} = [(-2, -1, 1)]$ e portanto $\dim N(T) = 1$.

(c) Como $\dim Im(T) = 3 - \dim N(T) = 3 - 1 = 2$, segue que $Im(T) = \mathbb{R}^2$ e então qualquer base de $\mathbb{R}^2$ é base de $Im(T)$, por exemplo, a base canônica $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Além disto, T é sobrejetora.

Exemplo 97. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ cujo núcleo seja gerado por $(1, 0, 0, 1)$ e $(0, -1, 0, 1)$.

Sendo $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ e $\dim N(T) = \dim[(1, 0, 0, 1), (0, -1, 0, 1)] = 2$, temos que

$$\dim Im(T) = 4 - 2 = 2.$$

O primeiro passo é completar o conjunto $\{(1, 0, 0, 1), (0, -1, 0, 1)\}$ a uma base de $\mathbb{R}^4$. Para isso basta acrescentar os vetores $(0, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$, pois

$$\alpha(1, 0, 0, 1) + \beta(0, -1, 0, 1) + \gamma(0, 0, 1, 0) + \delta(0, 0, 0, 1) = 0$$

se, e somente se, $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Agora, basta tomar o cuidado das imagens de $(0, 0, 1, 0)$ e

$(0,0,0,1)$ pela T serem LI. Para isto, definimos $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(0,0,1,0)=(0,1,0),\ T(0,0,0,1)=(0,0,1),\ T(1,0,0,1)=(0,0,0) \text{ e } T(0,-1,0,1)=(0,0,0).$$

Dado $(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4$ reescrevemos

$$(x,y,z,w)=(w+y-x)(0,0,0,1)+z(0,0,1,0)+x(1,0,0,1)-y(0,-1,0,1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} T(x,y,z,w) &= T((w+y-x)(0,0,0,1)+z(0,0,1,0)+x(1,0,0,1)-y(0,-1,0,1)) \\ &= (w+y-x)T(0,0,0,1)+zT(0,0,1,0)+0+0 \\ &= (w+y-x)(0,0,1)+z(0,1,0) \\ &= (0,z,w+y-x), \end{aligned}$$

a qual é uma transformação linear cujo núcleo é gerado por $(1,0,0,1)$ e $(0,-1,0,1)$.

Vejamos agora uma consequência do Teorema 3.

Corolário 2. Se U e V são espaços vetoriais de dimensões finitas, $\dim U=\dim V$ e se $T:U\to V$ é uma transformação linear, então são equivalentes as seguintes condições:

(a) T é sobrejetora.

(b) T é injetora.

(c) T é bijetora.

Demonstração. $(a)\Rightarrow(b)$ Se T é sobrejetora, então $Im(T)=V$ e, como pelo Teorema 3 $\dim U=\dim N(T)+\dim V$, segue que $\dim N(T)=0$, pois $\dim U=\dim V$. Logo, $N(T)=\{0\}$ e, pela Proposição 3, T é injetora.

$(b)\Rightarrow(c)$ Se T é injetora, então $\dim N(T)=0$. Deste fato e do Teorema 3 segue que $\dim U=\dim\ Im(T)=\dim V$. Como $Im(T)$ é um subespaço de V com mesma dimensão de V, segue que $Im(T)=V$, ou seja, T é sobrejetora e portanto bijetora.

$(c)\Rightarrow(a)$ Imediato. ■

Definição 17 (Isomorfismo). Chamamos de *isomorfismo do espaço vetorial U em V* a uma transformação linear $T:U\to V$ que é bijetora. Neste caso os espaços U e V são ditos *isomorfos*.

Sob o ponto de vista da álgebra linear, dois espaços vetoriais isomorfos são equivalentes. Isto é, para um algebrista estes espaços são "iguais".

Note que, pelo Corolário 2, se $T : U \to V$ é uma transformação linear e $\dim U = \dim V$, então, para verificar que T é isomorfismo, basta provar que T é injetora ($N(T) = \{0\}$) ou é sobrejetora.

EXERCÍCIOS

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to W$ a projeção ortogonal do $\mathbb{R}^3$ sobre o plano yOz, indicado por W.

   (a) Determinar a lei que define T.

   (b) Calcular $T(3, -4, 5)$.

   Resposta: (a) $T(x, y, z) = (0, y, z)$; (b) $T(3, -4, 5) = (0, -4, 5)$.

2. Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é tal que $T(-1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, 1) = (1, 1, 0)$. Determinar:

   (a) $T(2, 3)$

   (b) $T(x, y)$

   (c) $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = (-2, 1, -3)$.

   Resposta: (a) $T(2, 3) = (-1, 1, -2)$, (b) $T(x, y) = (-2x + y, -x + y, -x)$ e $v = (3, 4)$

3. Seja $T; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(1, 1, 1) = (1, 2)$, $T(1, 1, 0) = (2, 3)$ e $T(1, 0, 0) = (3, 4)$. Determinar:

   (a) $T(x, y, z)$

   (b) $v_1 \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v_1) = (-3, -2)$

   (c) $v_2 \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v_2) = (0, 0)$

   Resposta: (a) $T(x, y, z) = (3x - y - z, 4x - y - z)$; (b) $v_1 = (1, 6 - z, z)$; (c) $v_2 = (0, -z, z)$

4. Dado o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x + y, 4x + 2y)$, decidir quais dos seguintes vetores pertencem a $N(T)$:

   (a) $v_1 = (1, -2)$

   (b) $v_2 = (2, -3)$

   (c) $v_3 = (-3, 6)$.

   Resposta: v_1 e v_3.

5. Considerando o mesmo operador linear do exercício anterior, verificar quais dos seguintes vetores pertencem à Im(T):

   (a) $v_1 = (2, 4)$
   (b) $v_2 = (\frac{-1}{2}, -1)$
   (c) $v_3 = (-1, 3)$.

6. Para cada transformação linear abaixo, determinar:

   (i) O núcleo, uma base desse subespaço e sua dimensão.
   (ii) A imagem, uma base desse subespaço e sua dimensão.

   Verificar ainda a propriedade do Teorema 3.

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (3x - y, -3x + y)$
   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x + y, x, 2y)$
   (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x - 2y, x + y)$
   (d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x - y + z)$

   Resposta: (a) $N(T) = \{(x, 3x); x \in \mathbb{R}\}$, $B_{N(T)} = \{(1, 3)\}$ e $dimN(T) = 1$; $Im(T) = \{(-y, y); y \in \mathbb{R}\}$, $B_{Im(T)} = \{(-1, 1)\}$ e $dimIm(T) = 1$.

   (b) $N(T) = \{(0, 0)\}$, $N(T)$ não possui base e $dimN(T) = 0$; $Im(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - 2y - z = 0\}$, $B_{Im(T)} = \{(1, 0, 2), (0, 1, -2)\}$ e $dim_{Im(T)} = 2$.

   (c) $N(T) = \{(0, 0)\}$, $N(T)$ não possui base e $dimN(T) = 0$; $Im(T) = \mathbb{R}^2$, $B_{Im(T)} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $dimIm(T) = 2$.

   (d) $N(T) = \{(-\frac{y}{3}), y, \frac{5y}{3}; y \in \mathbb{R}\}$, $B_{N(T)} = \{(-\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3})\}$ e $dimN(T) = 1$; $Im(T) = \mathbb{R}^2$, $B_{Im(T)} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $dimIm(T) = 2$.

7. Seja $T : V \to W$ uma função. Mostre que:

   (a) Se T é uma transformação linear, então $T(0) = 0$
   (b) Se $T(0) \neq 0$, então T não é uma transformação linear.

8. (a) Encontrar a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$.
   (b) Encontrar v de $\mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (3, 2)$.

   Resposta: (a) $T(x, y, z) = (2x + y, y - z)$ e (b) $v = (x, 3 - 2x, 1 - 2x)$

9. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$.

   (a) Determine uma base do núcleo de T

   (b) Dê a dimensão da imagem de T

   (c) T é sobrejetora? Justifique.

   Resposta: (a) $N(T) = [(1, 1, 0)]$. Uma base $N(T) = \{(1, 1, 0)\}$

   (b) $\dim Im(T) = 3 - \dim N(T) = 2$

   (c) Não. $\dim Im(T) = 2$.

Representação Matricial de uma Transformação Linear

Nesta unidade, veremos que o estudo das transformações lineares está fortemente ligado ao estudo das matrizes. De fato, vimos no Exemplo 83 que a qualquer matriz $m \times n$ podemos associar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. No que segue, vamos estabelecer o contrário, ou seja, veremos que, fixadas bases do $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, a toda transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ está associada uma única matriz.

Dadas uma transformação linear $T : V \to W$, A uma base de V e B uma base W. Buscamos uma matriz que represente T nestas bases. Para isto, sem perda de generalidade, considere o caso particular $\dim V = 3$ e $\dim W = 2$. Considere $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $B = \{w_1, w_2\}$. Dado $v \in V$, podemos expressá-lo por:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \quad \text{ou} \quad v_A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

e sua imagem $T(v)$ por:

$$T(v) = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 \tag{3.1}$$

ou $T(v)_B = (\beta_1, \beta_2)$.

Por outro lado,

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \alpha_3 T(v_3). \tag{3.2}$$

Sendo $T(v_1), T(v_2)$ e $T(v_3)$ vetores de W podemos escrevê-los como combinação linear dos vetores de B, ou seja,

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11} w_1 + a_{21} w_2 \\ T(v_2) &= a_{12} w_1 + a_{22} w_2 \\ T(v_3) &= a_{13} w_1 + a_{23} w_2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Substituindo (3.3) em (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} T(v) &= \alpha_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2) + \alpha_2(a_{12}w_1 + a_{22}w_2) + \alpha_3(a_{13}w_1 + a_{23}w_2) \\ &= (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3)w_1 + (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3)w_2. \end{aligned}$$

Comparando a última igualdade com (3.1), concluímos que:

$$\beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3$$

$$\beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3$$

que em forma matricial se escreve:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \\ \alpha_2 \\ \\ \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

Denotando por $[T]_B^A$, a matriz $(a_{ij})_{2\times 3}$ acima, podemos escrever:

$$[T(v)]_B = [T]_B^A [v]_A.$$

A matriz $[T]_B^A$ é chamada *matriz de T em relação às bases A e B*.

TOME NOTA. Uma observação importante para se obter $[T]_B^A$ é que suas colunas são as componentes das imagens dos vetores da base A em relação à base B, o que é compravado pelas igualdades em (3.3):

$$\begin{array}{ccc} T(v_1)_B & T(v_2)_B & T(v_3)_B \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

Em geral, dada uma transformação linear $T : V \to W$, com $\dim V = n$ e $\dim W = m$, $A = \{v_1, ..., v_n\}$ e $B = \{w_1, ..., w_m\}$ bases de V e W, respectivamente, $[T]_B^A$ será uma matriz $m \times n$, cuja coluna j é formada pelas componentes da imagem de $v_j \in A$ em relação à base B, ou seja:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} T(v_1)_B & T(v_2)_B & \cdots & T(v_n)_B \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
\end{array}.$$

Sendo assim, como a matriz $[T]_B^A$ depende das bases A e B, uma mesma transformação linear pode ser representada por infinitas matrizes, bastando mudar as bases. Porém, uma vez fixadas A e B, a matriz será única.

A seguir, veremos alguns exemplos deste processo de obter a matriz de uma transformação linear relacionada a bases dadas.

Exemplo 98. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear

$$T(x, y) = (x - 2y, 5x + 3y, y - 4x).$$

Considere as bases $A = \{v_1 = (-1, -1), v_2 = (1, 2)\}$ do $\mathbb{R}^2$ e $B = \{w_1 = (1, 0, 0), w_2 = (1, 1, 0), w_3 = (1, 1, 1)\}$ do $\mathbb{R}^3$.

(a) Determine $[T]_B^A$

(b) Dado $v = (5, 4)$ (coordenadas em relação à base canônica do $\mathbb{R}^2$), usando $[T]_B^A$ calcule $T(v)_B$.

(a) Temos que

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} T(v_1)_B & T(v_2)_B \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}
\end{array},$$

onde

$$T(v_1) = T(-1, -1) = (1, -8, 3) = a_{11}(1, 0, 0) + a_{21}(1, 1, 0) + a_{31}(1, 1, 1),$$

ou seja,

$$\begin{cases} a_{11} + a_{21} + a_{31} = 1 \\ a_{21} + a_{31} = -8 \\ a_{31} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 9 \\ a_{21} = -11 \\ a_{31} = 3 \end{cases}$$

e

$$T(v_2) = T(1,2) = (-3,11,-2) = a_{12}(1,0,0) + a_{22}(1,1,0) + a_{32}(1,1,1),$$

isto é,

$$\begin{cases} a_{12} + a_{22} + a_{32} = -3 \\ a_{22} + a_{32} = 11 \\ a_{32} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = -14 \\ a_{22} = 13 \\ a_{32} = -2 \end{cases}.$$

Assim,

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} 9 & -14 \\ -11 & 13 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

(b) Vamos usar a relação

$$[T(v)]_B = [T]_B^A [v]_A.$$

Para isto, devemos expresar $v = (5,4)$ como coordenadas na base A,

$$v = (5,4) = a(-1,-1) + b(1,2)$$

isto é,

$$\begin{cases} -a + b = 5 \\ -a + 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = -1 \end{cases}$$

ou seja, $v_A = (-6,-1)$.

Logo,

$$[T(v)]_B = \begin{bmatrix} 9 & -14 \\ -11 & 13 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ 53 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 99. Considere a mesma transformação linear do exemplo anterior e a mesma base A do $\mathbb{R}^2$. Seja $C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

(a) Determine $[T]_C^A$.

(b) Calcule $[T(v)]_C$, utizando $[T]_C^A$ sendo $v = (5,4)$.

(a)

$$T(v_1) = T(-1,-1) = (1,-8,3) = 1(1,0,0) - 8(0,1,0) + 3(0,0,1)$$

$$T(v_2) = T(1,2) = (-3,11,-2) = -3(1,0,0) + 11(0,1,0) - 2(0,0,1).$$

Assim,

$$[T]_C^A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -8 & 11 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Como $v_A = (-6,-1)$, obtemos:

$$[T(v)]_C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -8 & 11 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 37 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

Note que, sendo C a base canônica do $\mathbb{R}^3$, $T(v)_C = T(v)$ também poderia ser obtido diretamente da lei que define T,

$$T(v) = T(5,4) = (5 - 2 \cdot 4, 5 \cdot 5 + 3 \cdot 4, \cdot - 4 \cdot 5) = (-3, 37, -16).$$

Exemplo 100. Considere a mesma transformação linear e sejam $C' = \{(1,0),(0,1)\}$ e $C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ as bases canônicas do $\mathbb{R}^2$ e do $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

(a) Determine $[T]_C^{C'}$.

(b) Se $v = (5,4)$ calcule $T(v)_C$ utizando $[T]_C^{C'}$.

(a)

$$T(1,0) = (1,5,-4) = 1(1,0,0) + 5(0,1,0) - 4(0,0,1)$$

$$T(0,1) = (-2,3,1) = -2(1,0,0) + 3(0,1,0) + 1(0,0,1).$$

Assim,

$$[T]_C^{C'} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Note que $T(v)_C$ não depende da base do domínio, mas sim do vetor v e da base C e como tais objetos são idênticos aos do exemplo anterior teremos novamente $T(v)_C = (-3, 37, -16)$.

Definição 18. No caso de A e B serem bases canônicas, representa-se $[T]_B^A$ simplesmeste por $[T]$ a qual é chamada *matriz canônica de T*. Neste caso, tem-se $[T(v)] = [T][v]$.

Observe que calcular $T(v)$ pela matriz $[T]$ é o mesmo que fazê-lo pela expressão de T, como pode ser observado no último exemplo: $T(5,4) = (-3, 37, -16)$.

Os exemplos anteriores ilustram que dada uma transformação linear T, a cada dupla de bases A e B corresponde uma matriz $[T]_B^A$. Por outro lado, no próximo exemplo veremos que dadas uma matriz e um par de bases A e B, pode-se obter a expressão de T.

Exemplo 101. Dadas $A = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ base do $\mathbb{R}^3$ e $B = \{(1,0),(1,1)\}$ base do $\mathbb{R}^2$, determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sabe-se que o significado de cada coluna de $[T]_B^A$ é:

$$[T(1,1,1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, [T(1,1,0)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } [T(1,0,0)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Assim,
$T(1,1,1) = 1(1,0) + 2(1,1) = (3,2)$
$T(1,1,0) = 0(1,0) - 1(1,1) = (-1,-1)$
$T(1,0,0) = 1(1,0) - 1(1,1) = (0,-1)$.
Conhecidas as imagens dos vetores numa base A do domínio $\mathbb{R}^3$ de T, expressando o vetor genérico $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ como combinação linear dos elementos desta base A, obteremos $T(x,y,z)$:

$$(x,y,z) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x \\ \alpha + \beta = y \\ \alpha = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = z \\ \beta = y - z \\ \gamma = x - y \end{cases}.$$

Ou seja,

$$(x,y,z) = z(1,1,1) + (y-z)(1,1,0) + (x-y)(1,0,0).$$

Pela linearidade de T temos

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= zT(1,1,1) + (y-z)T(1,1,0) + (x-y)T(1,0,0) \\ &= z(3,2) + (y-z)(-1,-1) + (x-y)(0,-1) \\ &= (3z - y + z, 2z - y + z - x + y) \\ &= (4z - y, 3z - x). \end{aligned}$$

Dado um espaço vetorial V, lembre-se que um operador linear T sobre V nada mais é do que uma transformação linear $T : V \to V$. Neste caso, para tomar uma representação matricial de T, é comum considerar a mesma base no domínio e no contradomínio, isto é, fazer $A = B$. A matriz resultante, denotada simplesmente por $[T]_A$, é chamada *matriz de T em relação à base A*. Por exemplo, o leitor pode verificar que a matriz do operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x + y, x - 3y)$ em relação à base $A = \{(-1, -1), (0, 1)\}$ é

$$[T]_A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Operações com Transformações Lineares:

Soma:

Dadas $T_1 : V \to W$ e $T_2 : V \to W$ transformações lineares. Definimos a soma de T_1 com T_2 por $T_1 + T_2 : V \to W$, onde $(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v), \forall v \in V$, note que esta é a definição usual de soma de funções.

Produto por escalar:

Definimos o produto de T_1 pelo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ como sendo $\alpha T_1 : V \to W$, onde $(\alpha T_1)(v) = \alpha T_1(v), \forall v \in V$, observe novamente que isto é a definição usual de produto de uma função por um escalar.

Um exercício fácil, porém interessante, é mostrar que tanto $T_1 + T_2$ quanto αT_1 são transformações lineares. Este exercício, a princípio um tanto ingênuo, mostra que o conjunto de todas as transformações lineares de V em W com as operações definidas acima é na realidade um espaço vetorial, geralmente denotado por

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W;\ T \text{ é uma transformação linear}\}.$$

Além disso, não é difícil mostrar que se V e W têm dimensões finitas, A é base de V e B é base de W, então

$$[T_1 + T_2]_B^A = [T_1]_B^A + [T_2]_B^A$$

e

$$[\alpha T_1]_B^A = \alpha [T_1]_B^A.$$

(O leitor é fortemente incentivado a verificar tais afirmações).

Composição:

Considere agora duas transformações lineares $T_1 : V \to W$ e $T_2 : W \to U$. A composta de T_1 com T_2, denotada por $T_2 \circ T_1 : V \to U$ é dada por

$$(T_2 \circ T_1)(v) = T_2(T_1(v)), \forall v \in V.$$

Verifique que $T_2 \circ T_1$ é uma transformação linear. Pode-se mostrar que, se A, B e C são bases de V, W e U, respectivamente, então:

$$[T_2 \circ T_1]_C^A = [T_2]_C^B \cdot [T_1]_B^A.$$

Vejamos alguns exemplos que envolvem estas operações.

Exemplo 102. Dadas as transformações lineares $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$T_1(x, y, z) = (3x - 2y + z, z - 4x) \ \text{ e } \ T_2(x, y, z) = (2x + y, 3y - z).$$

Determine:

(a) $T_1 + T_2$

(b) $5T_1 - 3T_2$

(c) Verifique a seguinte igualdade matricial, $[5T_1 - 3T_2] = 5[T_1] - 3[T_2]$.

(a)
$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)(x, y, z) &= T_1(x, y, z) + T_2(x, y, z)\\ &= (3x - 2y + z, z - 4x) + (2x + y, 3y - z)\ .\\ &= (5x - y + z, 3y - 4x)\end{aligned}$$
(b)
$$\begin{aligned}(5T_1 - 3T_2)(x, y, z) &= 5(3x - 2y + z, z - 4x) - 3(2x + y, 3y - z)\\ &= (15x - 10y + 5z, 5z - 20x) + (-6x - 3y, -9y + 3z)\ .\\ &= (9x - 13y + 5z, 8z - 20x - 9y).\end{aligned}$$
(c)
$$\begin{aligned}[5T_1 - 3T_2] &= \begin{bmatrix} 9 & -13 & 5 \\ -20 & -9 & 8 \end{bmatrix}\\ &= 5\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}\\ &= 5[T_1] - 3[T_2].\end{aligned}$$

Exemplo 103. Dados os operadores lineares no $\mathbb{R}^2$: $T(x, y) = (2x, -y)$ e $S(x, y) = (x + y, x - y)$. Determine: $(a) S \circ T$ $\quad (b) T \circ S$ $\quad (c) T^2 = T \circ T$ $\quad (d) S^2 = S \circ S$.

(a) $(S \circ T)(x, y) = S(T(x, y)) = S(2x, -y) = (2x - y, 2x + y)$.
(b) $(T \circ S)(x, y) = T(S(x, y)) = T(x + y, x - y) = (2(x + y), -(x - y)) = (2x + 2y, y - x)$.
(c) $T^2(x, y) = T(T(x, y)) = T(2x, -y) = (4x, y)$.
(d) $S^2(x, y) = S(S(x, y)) + S(x + y, x - y) = (x + y + x - y, x + y - (x - y)) = (2x, 2y)$.

Observe que

$$[S\circ T]=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=[S]\cdot[T].$$

Além disto, note que $S\circ T\neq T\circ S$, ou seja, em geral a composição não é comutativa; recorde que o mesmo ocorre com o produto matricial.

EXERCÍCIOS

1. Consideremos a transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z)=(2x+y-z,x+2y)$ e as bases $B=\{(1,0,0),(2,-1,0),(0,1,1)\}$ do $\mathbb{R}^3$ e $C=\{(-1,1),(0,1)\}$ do $\mathbb{R}^2$. Determinar a matriz $[T]_C^B$.

   Resposta: $\begin{bmatrix}-2 & -3 & 0\\ 3 & 3 & 2\end{bmatrix}$

2. Seja a transformação linear $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $T(x,y)=(2x-y,x+3y,-2y)$ e as bases $A=\{(-1,1),(2,1)\}$ e $B=\{(0,0,1),(0,1,-1),(1,1,0)\}$. Determinar $[T]_B^A$. Qual a matriz $[T]_C^A$, onde C é a base canônica do $\mathbb{R}^3$?

   Resposta: $[T]_B^A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 5 & 2\\ -3 & 3\end{bmatrix}$ e $[T]_C^A=\begin{bmatrix}-3 & 3\\ 2 & 5\\ -2 & -2\end{bmatrix}$

3. Sabendo que a matriz de uma transformação linear $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ nas bases $B=\{(-1,1),(1,0)\}$ do $\mathbb{R}^2$ e $C=\{(1,1,-1),(2,1,0),(3,0,1)\}$ e do $\mathbb{R}^3$ é:

   $$[T]_C^B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 5\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

   encontrar a expressão de $T(x,y)$ e a matriz $[T]$.

   Resposta: $T(x,y)=(8x+18y,6x+11y,-2x-4y)$ e $[T]=\begin{bmatrix}8 & 18\\ 6 & 11\\ -2 & -4\end{bmatrix}$

4. Seja

   $$[T]=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

a matriz canônica de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Se $T(v) = (2, 4, -2)$, calcular v.

Resposta: $v = (2, 0)$

5. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear com matriz

$$[T]_B^C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

onde C é a base canônica do $\mathbb{R}^2$ e $B = \{(1, 0, 1), (-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$, base do $\mathbb{R}^3$. Qual a imagem do vetor $(2, -3)$ pela T?

Resposta: $(11, -13, 2)$

6. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$[T]_{B_2}^{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

sendo $B_1 = \{(0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ e $B_2 = \{(-1, 0), (0, -1)\}$ bases do $\mathbb{R}^3$ e do $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

(a) Encontrar a expressão de $T(x, y, z)$.

(b) Determinar ImT e uma base para esse subespaço.

(c) Determinar $N(T)$ e uma base para esse subespaço.

(d) T é injetora? T é sobrejetora? Justificar.

Resposta: (a) $T(x, y, z) = (-2y + z, -x + y)$, (b) $Im(T) = \mathbb{R}^2$, $B_{Im(T)} = \{(1, 0), (0, 1)\}$, (c) $N(T) = \{(x, x, 2x); x \in \mathbb{R}\}$, $B_{N(T)} = \{(1, 1, 2)\}$ e (d) T não é injetora e T é sobrejetora.

7. Consideremos o operador linear

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto & (x + 2y, x - y) \end{array}$$

e as bases $A = \{(-1, 1), (1, 0)\}$, $B = \{(2, -1), (-1, 1)\}$ e C a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Determinar $[T]_A, [T]_B, [T]_C$.

Resposta: $[T]_A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $[T]_B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ e $[T]_C = [T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

8. A matriz de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ relativa à base $B = \{v_1, v_2\}$, sendo $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (3, 2)$, é:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

(a) Determinar $T(v_1)_B$ e $T(v_2)_B$.

(b) Determinar $T(v_1)$ e $T(v_2)$.

(c) Calcular $T(x,y)$.

Resposta: (a) $T(v_1)_B = (2,-1)$, $T(v_2)_B = (1,-3)$ (b) $T(v_1) = (-1,0)$, $T(v_2) = (-8,-5)$, $T(x,y) = (-6x+5y, -5x+5y)$

9. Mostrar que a matriz do operador linear identidade

$$\begin{array}{rccc} I: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & v & \mapsto & v\ , \end{array}$$

em uma base qualquer, é a matriz identidade $n \times n$.

10. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Determinar os vetores u, v e w tais que:

(a) T(u)=u

(b) T(v)=2v

(c) T(w)=(4,4)

Resposta: (a) $(0,0)$ (b) $y(3,1)$ (c) $(1,1)$

11. Sejam as transformações lineares

$$\begin{array}{rccc} T_1: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (x-y, 2x+y, -2x) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} T_2: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (2x-y, x-3y, y) \end{array}.$$

Determinar as seguintes transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$:

(a) $T_1 - T_2$

(b) $3T_1 - 2T_2$.

Resposta: (a) $T_1(x,y) = (-x, x+4y, -2x-y)$ (b) $T_2(x,y) = (-x-y, 4x+9y, -6x-2y)$

12. Consideremos as transformações lineares S e T de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$ definidas por $S(x,y,z) = (2x-y, 3x-2y+z)$ e $T(x,y,z) = (x+y-z, y-2z)$.

(a) Determinar o núcleo da transformação linear $S+T$.

(b) Encontrar a matriz canônica de $3S-4T$.

Resposta: (a) $\{(x, 0, 3x); x \in \mathbb{R}\}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 9 & -10 & 11 \end{bmatrix}$

13. Sejam S e T operadores lineares de $\mathbb{R}^2$ definidos por $S(x, y) = (x - 2y, y)$ e $T(x, y) = (2x, -y)$. Determinar:

$(a)\ S + T$	$(d)\ S \circ T$
$(b)\ T - S$	$(e)\ T \circ S$
$(c)\ 2S + 4T$	$(f)\ S \circ S$

Resposta: (a) $(S + T)(x, y) = (3x - 2y, 0)$ (b)$(T - S)(x, y) = (x + 2y, -2y)$

(c) $(2S + 4T)(x, y) = (10x - 4y, -2y)$ (d) $(S \circ T)(x, y) = (2x + 2y, -y)$

(e) $(T \circ S)(x, y) = (2x - 4y, -y)$ (f) $(S \circ S)(x, y) = (x - 4y, y)$

14. Sejam as transformações lineares:

$$\begin{array}{rccc} S: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (x + y, z, x - y, y + z). \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \mapsto & (2x + y, x - y, x - 3y). \end{array}$$

(a) Calcular $(S \circ T)(x, y)$.

(b) Determinar a matriz canônica de $S \circ T$ e mostrar que ela é o produto da matriz canônica de S pela matriz canônica de T.

Resposta: (a) $(S \circ T)(x, y) = (3x, x - 3y, x + 2y, 2x - 4y)$

(b) $S \circ T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -3 \\ 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

15. As transformações $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ são tais que $S(x, y) = (y, x - y, 2x + 2y)$ e $T(x, y, z) = (x, y)$.

(a) Sendo $B = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$, determinar a matriz $[S \circ T]_B$.

(b) Determinar $[T \circ S]_{B'}$ e $[T \circ S]_{B''}$, sendo $B' = \{(1, 1), (0, -1)\}$ e B'' a base canônica.

Resposta: (a) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

16. Sendo S e T operadores lineares do $\mathbb{R}^3$ definidos por $S(x, y, z) = (x, 2y, x - y)$ e $T(x, y, z) = (x - z, y, z)$, determinar:

    (a) $[S \circ T]$

    (b) $[T \circ S]$.

    Resposta: (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

    (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

17. Sejam R, S e T três transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$. Se

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [S] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

    determinar T tal que $R = S \circ T$.

18. Sejam $B = \{(1, -1), (0, 2)\}$ e $C = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, 2, 0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente e

$$[T]_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

    (a) Determinar T.

    (b) Se $S(x, y) = (2y, x - y, x)$, determinar $[S]_C^B$.

    (c) Determinar uma base A de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_A^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

    Resposta: (a) $T(x, y) = \left(\dfrac{x - y}{2}, \dfrac{x - y}{2}, 2x + y\right)$

19. Se $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $[S] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, determinar $T \circ S$.

20. Se $T(x, y) = (2x, x - y, y)$ e $S(x, y, z) = (y - z, z - x)$, determinar:

    (a) $[T \circ S]$

(b) $[S \circ T]$.

Resposta: (a) $[T \circ S] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e

(b) $[S \circ T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

21. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Determinar os vetores u, v tais que

   (a) $T(u) = u$

   (b) $T(v) = -v$

Resposta: (a) $v = (x, -x)$ e (b) $v = (x, 0)$

Operadores Lineares do Plano

Nesta unidade apresentaremos alguns exemplos especiais de transformações lineares. Mais especificamente, vamos trabalhar com certos operadores lineares do plano, ou seja, certas transformações lineares do plano no plano, sob um ponto de vista geométrico. Em especial, veremos que reflexões, expansões, contrações, rotações e certas deformações podem ser descritas por transformações lineares. Mostrar que tais aplicações são lineares não é tarefa difícil e por isto será confiada aos leitores nos exercícios.

1) **Reflexões**

(i) **Reflexão em relação ao eixo x:**

Leva cada vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ para o vetor $(x, -y)$ simétrico em relação ao eixo x:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x,-y) \end{array}.$$

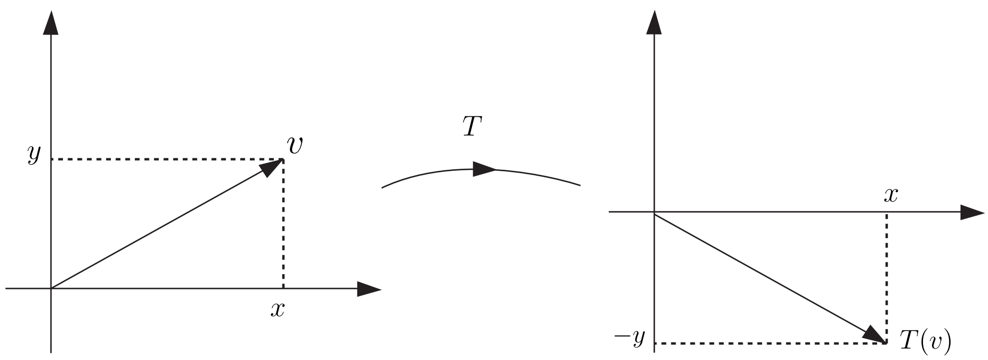

FIGURA 3.2: Reflexão em relação ao eixo x

Note que sua matriz canônica é: $[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(ii) **Reflexão em relação ao eixo y:**

Leva cada vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ para o vetor $(-x, y)$ simétrico em relação ao eixo y. Portanto é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (-x, y)$.

(iii) **Reflexão em relação à origem:**

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (-x, -y)$.

(iv) **Reflexão em relação à reta $y = x$:**

É a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (y, x)$.

(v) **Reflexão em relação à reta $y = -x$:**

Basta considerar a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (-y, -x)$.

2) **Expansões e contrações**

(i) **Na direção do vetor:**

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & \alpha(x,y) \end{array}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Matricialmente,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

.

Note que,

- se $|\alpha| > 1$, T expande o vetor;
- se $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor;
- se $\alpha = 1$, T é a identidade;
- se $\alpha < 0$, T inverte o sentido do vetor.

(ii) **Na direção do eixo x:**

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (\alpha x,y) \end{array}, \alpha > 0.$$

Esta transformação é também conhecida como expansão ou contração horizontal.

(iv) **Na direção do eixo y:**

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x,\alpha y) \end{array}, \alpha > 0.$$

Tal transformação é também conhecida por expansão ou contração vertical.

Observe que se nos itens (ii) e (iii) acima fizéssemos $\alpha = 0$, teríamos $\pi_2(x, y) = (0, y)$ e $\pi_1(x, y) = (x, 0)$, respectivamente. Estas são conhecidas como as projeções ortogonais do $\mathbb{R}^2$ sobre o eixo y e x, respectivamente.

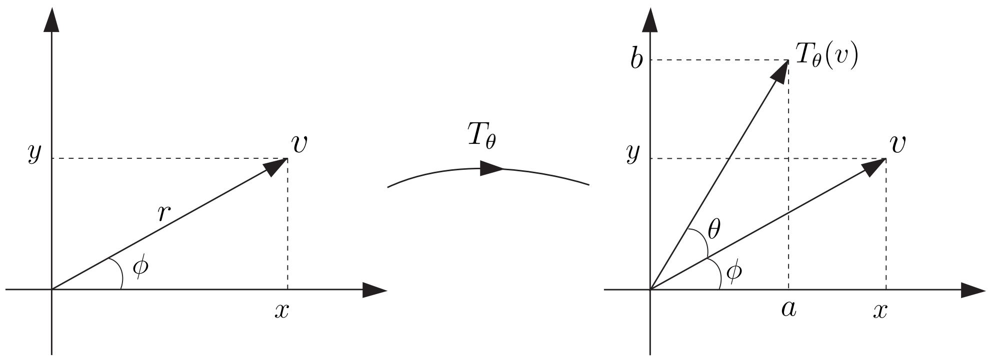

FIGURA 3.3: Rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário

3) **Rotações**

Dado um vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ considere $T_\theta(x, y) = (a, b)$ o vetor obtido rotacionando-se (x, y) de um ângulo θ no sentido anti-horário (ver Figura 3.3).

Seja $r \geq 0$ o comprimento do vetor $v = (x, y)$, ou seja, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Note que $x = r\cos\phi$ e $y = r \operatorname{sen}\phi$. Além disto, as coordenadas do vetor rotacionado $T_\theta(x, y) = (a, b)$ tem mesmo comprimento r do vetor v. Pela Figura 3.3 temos:

$$a = r\cos(\phi + \theta) = r\cos\phi\cos\theta - r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta = x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta$$

e

$$b = r\operatorname{sen}(\phi + \theta) = r\cos\phi\operatorname{sen}\theta + r\operatorname{sen}\phi\cos\theta = x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta.$$

Logo,

$$T_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta).$$

Sua matriz canônica é dada por:

$$[T_\theta] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

De fato, as imagens de $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ são:

$$T_\theta(e_1) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \quad \text{e} \quad T_\theta(e_2) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta).$$

Ou seja,

$$T_\theta(e_1) = \cos\theta e_1 + \operatorname{sen}\theta e_2 \quad \text{e} \quad T_\theta(e_2) = -\operatorname{sen}\theta e_1 + \cos\theta e_2.$$

Logo, a matriz canônica de T_θ é a descrita em 3.4. Tal matriz é conhecida por *matriz de rotação* (anti-horária) de um ângulo θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Por exemplo, a imagem do vetor $v = (1, 2)$ pela rotação $\theta = \frac{\pi}{2}$ é obtida por

$$T_{\pi/2}(1, 2) = (1\cos\pi/2 - 2\operatorname{sen}\pi/2, 1\operatorname{sen}\pi/2 + 2\cos\pi/2) = (-2, 1).$$

4) **Cisalhamentos**

(i) **Na direção do eixo x ou horizontal:**

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x+\alpha y, y) \end{array}.$$

Esta transformação também é conhecida como *cisalhamento horizontal de fator α*. Na Figura 3.4, pode-se ver que este cisalhamento transforma o retângulo $OMPN$ no paralelogramo $OMP'N'$ de mesma base e altura. Note que, ao aplicar este cisalhamento, cada ponto (x,y), com $y \neq 0$, é deslocado paralelamente ao eixo x até chegar em $(x+\alpha y, y)$. Já os pontos do eixo x permanecem fixos, pois neste caso $y = 0$. Isto explica porque as bases do retângulo $OMPN$ e o paralelogramo $DMP'N'$ coincidem.

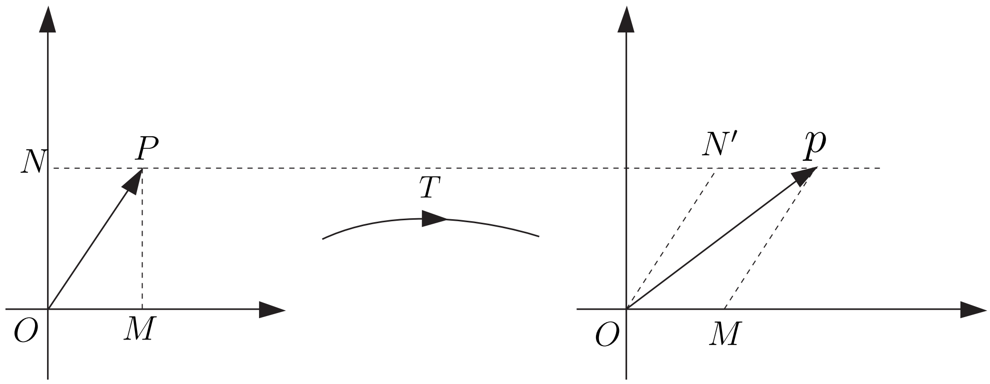

FIGURA 3.4: Cisalhamento horizontal

(ii) **Na direção do eixo y ou vertical:**

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x, \alpha x + y) \end{array}.$$

Exemplo 104. Determine a expressão da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que representa um cisalhamento vertical de fator $\frac{1}{2}$ seguida de uma reflexão em relação ao eixo x. Obter a matriz canônica desta transformação.

Note que o cisalhamento vertical de fator $\frac{1}{2}$ é a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T_1(x,y) = (x, \frac{x}{2} + y)$.

Já a reflexão, em relação ao eixo x é dada por $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T_2(x,y) = (x, -y)$.

Assim, T é obtida pelas expressões de T_1 e T_2 da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
T(x,y) &= (T_2 \circ T_1)(x,y)\\
&= T_2(T_1(x,y))\\
&= T_2(x, \tfrac{x}{2}+y)\\
&= (x, \tfrac{-x}{2}-y).
\end{aligned}
$$

Este exercício poderia ser resolvido matricialmente da seguinte forma:

$$
[T] = [T_2]\cdot[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & -1 \end{bmatrix}.
$$

Exemplo 105. Sobre o plano efetua-se uma rotação anti-horária de ângulo θ, em seguida realiza-se uma contração de fator $\frac{1}{4}$ na direção Oy e, finalmente, uma reflexão em torno da reta $y = -x$. Determine a transformação linear que realiza o efeito do conjunto das três transformações citadas.

A rotação é dada por: $T_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$.

A contração é dada por: $T_1(x,y) = (x, \frac{1}{4}y)$.

Por fim, a reflexão em torno da reta $y = -x$ é: $T_2(x,y) = (-y,-x)$.

Logo, a transformação T é obtida pela composição

$$
\begin{aligned}
T(x,y) &= (T_2 \circ T_1 \circ T_\theta)(x,y)\\
&= T_2(T_1(T_\theta(x,y)))\\
&= T_2(T_1(x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta))\\
&= T_2(x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, \tfrac{1}{4}x\operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{4}y\cos\theta)\\
&= (-\tfrac{1}{4}x\operatorname{sen}\theta - \tfrac{1}{4}y\cos\theta, -x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta)
\end{aligned}
$$

Exemplo 106. Determine o vértice C do triângulo equilátero $A = (2,-1)$, $B = (6,1)$ e $C = (x,y)$, utilizando uma rotação.

Como o triângulo é equilátero seus ângulos internos, bem como suas arestas, são todos iguais. Assim, temos que o vetor $\overrightarrow{AC}$ tem comprimento igual ao do vetor $\overrightarrow{AB}$ e pode ser obtido deste, por uma rotação de 60^0 ou -60^0, (faça uma figura para se convencer disto). No caso da rotação de $60^0 = \pi/3$ temos:

$$
\overrightarrow{AC} = T_{\frac{\pi}{3}}(\overrightarrow{AB}),
$$

onde $\overrightarrow{AB} = (6-2, 1-(-1)) = (4,2)$, $\overrightarrow{AC} = (x-2, y+1)$ e

$$
T_{\frac{\pi}{3}}(x,y) = (x\cos\frac{\pi}{3} - y\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}, x\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + y\cos\frac{\pi}{3} = (\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y).
$$

Assim,

$$
(x-2, y+1) = \overrightarrow{AC} = T_{\frac{\pi}{3}}(4,2) = (2-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}+1)
$$

ou, $x = 4-\sqrt{3}$ e $y = 2\sqrt{3}$. Isto é, $C = (4-\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$.

O caso da rotação de $-60^0 = -\pi/3$ é análogo e, portanto, deixado como exercício.

Exercícios

1. Mostre que todas as aplicações tratadas acima são lineares.

2. Faça figuras descrevendo o comportamento (geométrico) de um vetor qualquer do plano ao aplicar as transformações lineares dos itens: 1) (ii)-(v) e 2) (i)-(iii). No item 2) (i), faça uma figura para cada possibilidade de α.

3. Obtenha a matriz canônica das transformações lineares dos itens: 1) (ii)-(v), 2) (ii)-(iii) e 4) (i)-(ii).

4. Faça uma figura descrevendo o comportamento do retângulo $OMPN$ (da Figura 3.4) ao aplicar um cisalhamento vertical.

5. Faça uma figura descrevendo o comportamento do retângulo $OMPN$ (da Figura 3.4) ao aplicar uma dilatação horizontal. Compare este comportamento com o comportamento do cisalhamento horizontal.

6. Dado o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que produz uma rotação do plano de um ângulo θ, calcular $T(-2,4)$ e $T(x,y)$ nos casos de:

   (a) $\theta = \pi$

   (b) $\theta = \frac{\pi}{4}$

   (c) $\theta = \frac{\pi}{3}$

   Resposta: (a) $T(-2,4) = (2,-4)$ e $T(x,y) = (-x,-y)$

   (b) $T(-2,4) = (-3\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $T(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y, x+y)$

   (c) $T(-2,4) = (-1-2\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$ e $T(x,y) = \frac{1}{2}(x-\sqrt{3}y, \sqrt{3}x+y)$

7. Determinar a transformação linear em $\mathbb{R}^2$ que representa a sequência de transformações dadas a seguir:

   (a) Reflexão em relação ao eixo dos y, seguida de um cisalhamento de fator 5 na direção horizontal.

   (b) Rotação de 30^o no sentido horário, seguida de uma duplicação dos módulos e inversão dos sentidos.

   (c) Rotação anti-horária de 60^o, seguida de uma reflexão em relação ao eixo dos y.

   (d) Reflexão em relação à reta $y = -x$, seguida de uma dilatação de fator 2 na direção Ox e, finalmente, de um cisalhamento de fator 3 na direção vertical.

   Resposta: (a) $T(x,y) = (-x+5y, y)$, (b) $T(x,y) = (-\sqrt{3}x - y, x - \sqrt{3}y)$,

   (c) $T(x,y) = \frac{1}{2}(-x+\sqrt{3}y, \sqrt{3}x+y)$, (d) $T(x,y) = (-2y, -x-6y)$.

8. No plano, uma rotação anti-horária de 45^o é seguida por uma dilatação de $\sqrt{2}$. Ache a aplicação T que representa esta transformação.

   Resposta: $T(x, y) = (x - y, x + y)$

9. Qual é a aplicação T que representa uma contração de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ seguida por uma rotação horária de 45^o?

   Resposta: $T(x, y) = (\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2})$

10. Os pontos $A = (2, -1)$ e $B = (-1, 4)$ são vértices consecutivos de um quadrado $ABCD$. Determinar os vértices C e D, utilizando rotação no plano.

    Resposta: $C = (4, 7)$ e $D = (7, 2)$ ou $C = (-6, 1)$ e $D = (-3, -4)$

11. Em um triângulo ABC, os ângulos B e C medem 75^o cada um. Sendo $A = (1, 1)$ e

    $B = (-1, 5)$, calcular as coordenadas do vértice C.

    Resposta: $C = (-1 - \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ ou $C = (3 - \sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3})$

Módulo 4
Espaços com produto interno

Ao final deste módulo o leitor estará familiarizado com os seguintes conceitos:

▷ Produto interno;

▷ Norma;

▷ Base ortonormal.

Leitura Complementar

O leitor interessado em aperfeiçoar e ampliar seus conhecimentos nos assuntos tratados neste módulo encontrará o suporte necessário nos seguintes textos: [1, 3, 5, 6].

Produto Interno

Ao final desta seção você deverá ser capaz de:

- ▷ Avaliar se uma determinada função é um produto interno.
- ▷ Determinar a norma de um vetor.
- ▷ Compreender as propriedades que dizem respeito ao produto interno.

O conceito de produto interno, que estudaremos a partir de agora, enriquece a estrutura de espaço vetorial. De certa maneira, vamos formalizar conceitos geométricos, como o de comprimento de um vetor e ângulos entre dois vetores. Isso dará uma melhor compreensão de certos conceitos estudados anteriormente, como os de base ortogonal e ortonormal. Além dessa linguagem mais geométrica, podemos, de certa forma, ver um espaço com produto interno como uma generalização natural do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, que é um espaço que estamos mais acostumados a estudar.

Lembramos que, quando falamos em espaço vetorial, estamos nos referindo a espaços vetorias sobre $\mathbb{R}$.

Definição 19 (Produto interno)**.** Seja V um espaço vetorial. Um produto interno sobre V é uma função de $V \times V$ em $\mathbb{R}$, denotada por $\langle , \rangle$, que associa a cada par de vetores $u, v \in V$ um número real $\langle u, v \rangle$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\langle u, u \rangle > 0$, se $u \neq 0$.

ii) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, para quaisquer $u, v \in V$.

iii) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$, para quaisquer $u, v, w \in V$.

iv) $\langle \lambda.u, v \rangle = \lambda.\langle u, v \rangle$, para quaisquer $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

O número real $\langle u, v \rangle$ é chamado de produto interno de u por v.

Observação. *Seja V um espaço vetorial.*

1) Note que $\langle 0, u \rangle = 0$, para todo $u \in V$. De fato, $\langle 0, u \rangle = \langle 0+0, u \rangle = \langle 0, u \rangle + \langle 0, u \rangle \Rightarrow \langle 0, u \rangle = 0$.

2) $\langle u, u \rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$. De fato, de i) da definição de espaço vetorial, sabemos que $\langle u, u \rangle > 0$, se $u \neq 0$. Logo, como $\langle u, u \rangle = 0$, segue que $u = 0$. Por outro lado, por 1) acima, é claro que se $u = 0$, então $\langle u, u \rangle = 0$.

3) Dado $u \in V$, se $\langle u, v \rangle = 0$, para todo $v \in V$. Então, $u = 0$. (Deixamos esta verificação a cargo do leitor, ela será cobrada na seção de exercícios.)

4) Sejam $u, w \in V$ tais que $\langle u, v \rangle = \langle w, v \rangle$, para todo $v \in V$. Então, $u = w$. (Deixamos esta verificação a cargo do leitor, ela será cobrada na seção de exercícios.)

Exemplo 107. *Para cada* $u = (u_1, \ldots, u_n)$ *e* $v = (v_1, \ldots, v_n)$ *em* $\mathbb{R}^n$*, defina*

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i.v_i.$$

Esta função é um produto interno sobre $\mathbb{R}^n$*, chamado de* ***produto interno canônico****. Vejamos se as quatro propriedades da definição de produto interno são de fato satisfeitas.*

i) Seja $u = (u_1, \ldots, u_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ *em* $\mathbb{R}^n$*. Logo,* $\langle u, u \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i.u_i = \sum_{i=1}^{n} u_i^2$*. Como,* $(u_1, \ldots, u_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$*, então* $u_i \neq 0$ *para pelo menos um* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*. Daí,* $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 > 0$*, ou seja,* $\langle u, u \rangle > 0$*.*

ii) Dados $u = (u_1, \ldots, u_n)$ *e* $v = (v_1, \ldots, v_n)$ *em* $\mathbb{R}^n$*, temos que*

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i.v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i.u_i = \langle v, u \rangle.$$

iii) Dados $u = (u_1, \ldots, u_n)$*,* $v = (v_1, \ldots, v_n)$ *e* $w = (w_1, \ldots, w_n)$ *em* $\mathbb{R}^n$*, temos que*

$$\langle u + v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i).w_i = \sum_{i=1}^{n} (u_i.w_i + v_i.w_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i.w_i + \sum_{i=1}^{n} v_i.w_i = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle.$$

iv) Dados $u = (u_1, \ldots, u_n)$ *e* $v = (v_1, \ldots, v_n)$ *em* $\mathbb{R}^n$*, e* $\lambda \in \mathbb{R}$*, temos que*

$$\langle \lambda u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\lambda u_i).v_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda.(u_i.v_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} u_i.v_i = \lambda \langle u, v \rangle.$$

Exemplo 108. *Seja* f *uma função de* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ *em* $\mathbb{R}$*, dedinida, para cada* $u = (u_1, u_2)$ *e* $v = (v_1, v_2)$ *em* $\mathbb{R}^2$*, por*

$$f(u, v) = 2u_1v_1 + u_2v_2.$$

Será que a função f *é um produto interno sobre* $\mathbb{R}^2$*?*

Para responder esta pergunta devemos verificar se as quatro propriedades da definição de produto interno são satisfeitas.

i) Seja $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$*, com* $(u_1, u_2) \neq (0, 0)$*. Então,* $f(u, u) = 2u_1u_1 + u_2u_2 = 2u_1^2 + u_2^2 > 0$*, pois* $(u_1, u_2) \neq (0, 0)$*. Logo, i) é satisfeita.*

ii) Sejam $u = (u_1, u_2)$ *e* $v = (v_1, v_2)$ *em* $\mathbb{R}^2$*. Então,* $f(u, v) = 2u_1v_1 + u_2v_2 = 2v_1u_1 + v_2u_2 = f(u, v)$*. Daí, ii) também é satisfeita.*

iii) Sejam $u = (u_1, u_2)$*,* $v = (v_1, v_2)$ *e* $w = (w_1, w_2)$ *em* $\mathbb{R}^2$*. Então,* $f(u + v, w) = 2(u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 = 2u_1w_1 + 2v_1w_1 + u_2w_2 + v_2w_2 = 2u_1w_1 + u_2w_2 + 2v_1w_1 + v_2w_2 = f(u, w) + f(v, w)$*. Assim, iii) também é satisfeita.*

iv) Sejam $u = (u_1, u_2)$ *e* $v = (v_1, v_2)$ *em* $\mathbb{R}^2$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

Então, $f(\lambda u, v) = 2(\lambda u_1)v_1 + (\lambda u_2)v_2 = \lambda.2u_1v_1 + \lambda u_2v_2 = \lambda(2u_1v_1 + u_2v_2) = \lambda f(u, v)$*. E iv) também é satisfeita.*

Portanto, f *é um produto interno.*

Definição 20 (Norma)**.** Seja V um espaço vetorial com um produto interno $\langle , \rangle$. Para cada $v \in V$, o número real $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ é chamado de **norma**, ou comprimento, do vetor v.

A seguir, veremos algumas propriedades elementares relacionadas à norma de um vetor.

Seja V um espaço vetorial com pruduto interno $\langle , \rangle$. Então, das definições de produto interno e de norma, temos que:

- $\|v\| = 0$ se, e somente se, $v = 0$.
- $\|v\| \geq 0$, para todo $v \in V$.
- $\|\lambda.v\| = |\lambda|.\|v\|$, para quaisquer $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definição 21 (Vetor unitário)**.** Se $\|v\| = 1$, dizemos que v é um **vetor unitário**.

TOME NOTA. Observe que se v é um vetor não nulo qualquer em V, então o vetor $u = \dfrac{v}{\|v\|}$ é um vetor unitário. Verifique!

Exemplo 109. *Considere o espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$ *com o produto interno canônico. Então, para cada* $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$*, tem-se que* $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$*. Assim, o vetor* $v = (1, 0)$ *tem norma* 1*.*

Exemplo 110. *Agora, considere o espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$ *com o produto interno dado no Exemplo 108. Logo, para cada* $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$*, tem-se que* $\|v\| = \sqrt{2v_1^2 + v_2^2}$*. Daí, com respeito a esta norma, o vetor* $v = (1, 0)$ *tem norma igual a* $\sqrt{2}$*.*

Observação. É interessante observar que se V é um espaço com produto interno $\langle , \rangle$, então, para quaisquer $u, v \in V$, tem-se que

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2.$$

O teorema que veremos a seguir apresenta uma desigualdade, conhecida por Desigualdade de Schwarz, que é muito útil no estudo da Álgebra Linear, além de outros ramos da Matemática.

Teorema 4. *(Desigualdade de Schwarz) Seja V um espaço vetorial com produto interno. Então,*

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|.\|v\| \text{ , } \forall u,v \in V.$$

Demonstração. Sejam V um espaço com produto interno e $u, v \in V$. Considere a função real $f(x) = \|u - x.v\| = \langle u - x.v, u - x.v\rangle$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Observe que $f(x) \geq 0$, para todo x. Além disso, pelas propriedades do produto interno, segue que

$$\|u - x.v\| = \langle u - x.v, u - x.v\rangle = \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle.x + \|v\|^2.x^2 \geq 0.$$

Agora, como f é uma função quadrática, da forma $ax^2 + bx + c$, não negativa, segue que o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$, ou seja, $(-2\langle u,v\rangle)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$.

Portanto, $4(\langle u,v\rangle)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0 \Rightarrow |\langle u,v\rangle| \leq \|u\|.\|v\|$.

■

Exercício: Seja V um espaço vetorial com produto interno. Mostre que

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \text{ , } \forall u,v \in V.$$

Esta desigualdade é conhecida com Desigualdade Triangular.

Seguindo os exemplos feitos nesta seção, faça os exercícios para uma melhor fixação do conteúdo abordado nesta seção.

Exercícios

1. Verifique se cada uma das funções abaixo é um produto interno. No caso de a função ser um produto interno, determine a norma dos vetores u e v dados e compare com a normas obtidas a partir dos produtos internos canônicos.

   a) $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\langle (x,y),(z,w)\rangle = 3xz + 2yw$.

$u = (1, 0)$ e $v = (-1, 1)$.

b) $\langle \ , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\langle (x, y), (z, w) \rangle = xy + zw$.

$u = (1, 0)$ e $v = (-1, 1)$.

c) $\langle \ , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2$.

$u = (1, 0, 1)$ e $v = (-1, 1, 0)$.

d) $\langle \ , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2$.

$u = (1, 0, 1)$ e $v = (-1, 1, 0)$.

2. Use a desigualdade de Schwarz em $\mathbb{R}^3$ para mostrar que para $a, b, c \in \mathbb{R}$, todos positivos, tem-se que

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Ortogonalidade

Ao final desta seção você deverá ser capaz de:

- ▷ Avaliar se dois vetores são ortogonais.
- ▷ Determinar uma base ortonormal de um espaço vetorial de dimensão finita.

Definição 22. *Seja V um espaço com produto interno $\langle , \rangle$. Dizemos que $u, v \in V$ são* ***ortogonais****, indicamos $u \perp v$, se $\langle u, v\rangle = 0$.*

Observe que o vetor nulo 0 é ortogonal a todos elementos de um espaço vetorial V com produto interno, já que $\langle 0, v\rangle = 0$, $\forall v \in V$.

Exemplo 111. *Considere o espaço $\mathbb{R}^2$ com o produto interno canônico. Então, os vetores $u = (2, -1)$ e $v = (2, 4)$ são ortogonais, já que $\langle u, v\rangle = 2.2 + (-1).4 = 0$.*

Definição 23. *Um subconjunto W de V é chamado de* ***ortogonal*** *se $\langle u, v\rangle = 0$, $\forall u, v \in W$, com $u \neq v$. Se em um conjunto ortogonal W tem-se $\|u\| = 1$, $\forall u \in W$, dizemos que W é* ***ortonormal****.*

Exemplo 112. *Considere $\mathbb{R}^2$ com o produto interno canônico. Seja $A = \{(-1, 2), (6, 3)\}$. Então, A é um conjunto ortogonal, pois $\langle (-1, 2), (6, 3)\rangle = (-1).6 + 2.3 = -6 + 6 = 0$. Mas, A não é ortonormal, já que $\|(-1, 2)\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} \neq 1$.*

Exemplo 113. *Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno canônico. Seja $A = \left\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)\right\}$. Então, A é um conjunto ortonormal, pois $\langle (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)\rangle = 0$, $\|(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)\| = 1$ e $\|(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)\| = 1$.*

Um resultado interessante a respeito de subconjuntos ortogonais é o seguinte.

Proposição 4. *Sejam V um espaço vetorial com produto interno e $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ um subconjunto ortogonal de V, com $w_i \neq 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.*

a) Se v é um elemento do subespaço gerado por W, então

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, w_i \rangle}{\|w_i\|^2}.w_i.$$

b) O conjunto W é linearmente independente.

Demonstração. a) Seja v um elemento do subespaço gerado por W. Logo, $v = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$, com

$a_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Como $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ é ortogonal, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, temos que

$$\langle v, w_k \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} a_i w_i, w_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle w_i, w_k \rangle = a_k \langle w_k, w_k \rangle.$$

Como $w_k \neq 0$, para todo k, e $\langle w_k, w_k \rangle = \|w_k\|^2$, segue que $a_k = \dfrac{\langle v, w_k \rangle}{\|w_k\|^2}$.

Portanto, $v = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\langle v, w_i \rangle}{\|w_i\|^2}.w_i$.

b) Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que $a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + w_n = 0$.

Daí, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, temos que

$$0 = \langle 0, w_k \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} a_i w_i, w_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle w_i, w_k \rangle = a_k \langle w_k, w_k \rangle.$$

Como $\langle w_k, w_k \rangle \neq 0$, para todo k, pois $w_k \neq 0$, então $a_k = 0$, para todo k, e segue que W é linearmente independente. ■

Definição 24 (Base ortonormal)**.** Uma base B de um espaço vetorial V é chamada de **base ortonormal**, se B for ortonormal.

Exemplo 114. *Considere $\mathbb{R}^n$ com o produto interno canônico. Então, a base canônica $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto ortonormal, já que $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, se $i \neq j$, e $\langle e_i, e_i \rangle = 1 \Rightarrow \|e_i\| = 1$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Assim, a base canônica é um exemplo de base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.*

Observação. *Da Proposição 4, segue que se $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ é uma base ortonormal de um espaço vetorial V com produto interno, então, para todo $v \in V$, tem-se*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, w_i \rangle w_i.$$

Será que todo espaço vetorial de dimensão finita com produto interno possui uma base ortonormal?

A resposta é sim. Veremos que, se V é um espaço de dimensão finita com produto interno, é possível, a partir de uma base qualquer de V, construir uma base ortonormal de V. Este processo é chamado de **processo de ortonormalização de Gram-Schmidt** e consiste no seguinte.

Dada uma base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ do espaço V, primeiramente obteremos uma base ortogonal $B' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ de V. A seguir, obtemos a base ortonormal $B'' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, onde, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, $u_i = \dfrac{w_i}{\|w_i\|}$.

Processo de ortonormalização de Gram-Schmidt

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n com produto interno. Seja $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V.

$1)$ defina $w_1 = v_1$

$2)$ defina $w_2 = v_2 - \dfrac{\langle w_1, v_2\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}.w_1$

É importante observar que $w_2 \neq 0$, já que $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente.

$3)$ definidos $w_1, w_2, \ldots, w_k$, com $1 \leq k < n$, podemos definir w_{k+1} como sendo

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle w_i, v_{k+1}\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle}.w_i.$$

Assim, temos que $B' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ é uma base ortogonal de V. Daí, tomando $u_i = \dfrac{w_i}{\|w_i\|}$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, segue que $B'' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base ortonormal de V.

De fato, para $n = 1$ o resultado é claramente válido.

Suponhamos que para um inteiro $n > 1$ arbitrário o algoritmo é válido, ou seja, o processo produz uma base ortonormal $B'' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ para qualquer espaço V de dimensão n.

Agora, sejam V um espaço com produto interno de dimensão $n+1$ e $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$ uma base de V. Pela hipótese de indução, é possível, a partir de $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, obter uma base ortogonal $\{u_1, \ldots, u_n\}$ para o espaço V' gerado por $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Definindo o vetor w_{n+1} por

$$w_{n+1} = v_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v_{n+1}\rangle.u_i\ ,$$

temos que w_{n+1} é ortogonal a cada um dos u_j, $1 \leq j \leq n$, já que

$$\langle w_{n+1}, u_j \rangle = \langle v_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v_{n+1} \rangle . u_i, u_j \rangle = \langle v_{n+1}, u_j \rangle - \langle \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v_{n+1} \rangle . u_i, u_j \rangle$$

$$= \langle v_{n+1}, u_j \rangle - \langle v_{n+1}, u_j \rangle . \langle u_j, u_j \rangle = \langle v_{n+1}, u_j \rangle - \langle v_{n+1}, u_j \rangle = 0.$$

Daí, tomando $u_{n+1} = \dfrac{w_{n+1}}{\|w_{n+1}\|}$, segue que $\{u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}\}$ é um conjunto ortonormal.

Para mostrar que $\{u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}\}$ é uma base de V, note que cada u_j é uma combinação linear dos vetores $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$. Logo, temos $n+1$ vetores linearmente independentes em um espaço V de dimensão $n+1$, e assim temos que $\{u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}\}$ é de fato uma base de V.

Portanto, por indução matemática, provamos que o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt é válido.

Exemplo 115. *Considere o espaço $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual. Utilizando o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, vamos construir uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ a partir da base $B = \{(2,0), (-1,1)\}$, a qual claramente não é ortonormal.*

Sejam $v_1 = (2,0)$ e $v_2 = (-1,1)$.

$1)\ w_1 = (2,0)$

$2)\ w_2 = (-1,1) - \dfrac{\langle (2,0), (-1,1) \rangle}{\langle (2,0), (2,0) \rangle}.(2,0) = (-1,1) - \dfrac{(-2)}{4}.(2,0) = (-1,1) - (-1,0) = (0,1)$

Finalmente, tomando $u_1 = \dfrac{(2,0)}{\|(2,0)\|} = \dfrac{(2,0)}{2} = (1,0)$ e $u_2 = w_2 = (0,1)$, já que $\|w_2\| = 1$, temos que $\{u_1, u_2\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 116. *Considere o espaço $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Encontre uma base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ a partir da base $\{(1,1,1), (0,2,1), (0,0,1)\}$.*

Sejam $v_1 = (0,0,1)$, $v_2 = (1,1,1)$ e $v_3 = (0,2,1)$.

1) $w_1 = (0,0,1)$

2) $w_2 = (1,1,1) - \dfrac{\langle (0,0,1), (1,1,1) \rangle}{\langle (0,0,1), (0,0,1) \rangle}.(0,0,1) = (1,1,1) - \dfrac{1}{1}(0,0,1) = (1,1,0)$

3) $w_3 = (0,2,1) - \dfrac{\langle (0,0,1), (0,2,1) \rangle}{\langle (0,0,1), (0,0,1) \rangle}.(0,0,1) - \dfrac{\langle (1,1,0), (0,2,1) \rangle}{\langle (1,1,0), (1,1,0) \rangle}.(1,1,0)$

$= (0,2,1) - (0,0,1) - (1,1,0) = (-1,1,0)$

Assim, temos que:

$u_1 = \dfrac{w_1}{\|w_1\|} = \dfrac{(0,0,1)}{1} = (0,0,1)$

$u_2 = \dfrac{w_2}{\|w_2\|} = \dfrac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} = (\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

$u_3 = \dfrac{w_3}{\|w_3\|} = \dfrac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}} = (-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

Logo, a base ortonormal procurada será $\left\{(0,0,1),(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0),(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)\right\}$.

Seguindo os exemplos feitos nesta seção, faça os exercícios para uma melhor fixação do processo de ortonormalização de Gram-Schmidt.

EXERCÍCIOS

1. Com o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$, verifique se u e v dados a seguir são ortogonais.

   a) $u = (1,-1,2)$ e $v = (2,0,-1)$

   b) $u = (3,2,0)$ e $v = (0,-1,3)$

   c) $u = (4,-2,5)$ e $v = (1,2,0)$

   d) $u = (-3,-1,5)$ e $v = (2,4,2)$

2. Seja V um espaço vetorial com produto interno. Para quaisquer vetores $u, v \in V$, prove que $\|u\|.v + \|v\|.u$ e $\|u\|.v - \|v\|.u$ são ortogonais.

3. Use o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortonomal de $\mathbb{R}^3$ a partir de cada uma das bases B dadas a seguir.

   a) $B = \{(3,0,0),(-1,3,0),(2,-5,1)\}$

   b) $B = \{(-1,1,0),(5,0,0),(2,-2,3)\}$

   c) $B = \{(1,1,1),(1,-1,1),(1,-1,-1)\}$

Referências Bibliográficas

[1] Boldrini, J.L., Costa, S. R., Figueiredo, V. L. e Wetzler, H. G.; *Álgebra Linear*. 3ª ed., São Paulo, Harbra, 1980.

[2] Callioli, C., Costa, R. e Domingues, H.; *Álgebra linear e aplicações*. 6ª ed., SÃo Paulo, Atual, 1995.

[3] Coelho, F. e Lourenço, M. *Um curso de Álgebra linear*. 2ª ed., São Paulo, Edusp, 2001.

[4] Hoffman, K. e Kunze, R. *Álgebra Linear*; traduzido por A. P. Bergamasco, São Paulo, Polígono, 1971.

[5] Lages Lima, E. *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro, IMPA, 2012.

[6] Steinbruch, A. e Winterle, P.; *Álgebra Linear.*. 2ª ed., São Paulo, Makron, 1987.