

**CARLOS MAGNO DE MORAES
CINTHIA CUNHAMARADEI PEREIRA
ROBERTO PAULO BIBAS FIALHO**

**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA
O ENSINO DE PERMUTAÇÃO**



**BELÉM-PARÁ
2022**

Clay Anderson Nunes Chagas
Reitor Universidade do Estado do Pará

Ilma Pastana Ferreira
Vice-Reitora Universidade do Estado do Pará

Renato da Costa Teixeira
Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação

Anderson Madson Oliveira Maia
Diretor do Centro de Ciências Sociais e Educação

Fábio José da Costa Alves
Coordenador do PPGEM

Natanael Freitas Cabral
Vice coordenador do PPGEM

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

Conselho Editorial

Profa. Dra. Acylena Coelho Costa Profa. Dra. Ana Kely Martins da Silva Prof. Dr. Antonio José Lopes Prof. Dr. Benedito Fialho Machado Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha Profa. Dra. Celsa Herminia de Melo Maranhão Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira Profa. Dra. Claudianny Amorim Noronha Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz Prof. Dr. Dorival Lobato Junior Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira Profa. Dra. Eliza Souza da Silva Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo Profa. Dra. Glaudianny Amorim Noronha Prof. Dr. Gustavo Nogueira Dias Prof. Dr. Heliton Ribeiro Tavares

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma Prof. Dr. José Antonio Oliveira Aquino Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo Prof. Dr. Marcos Monteiro Diniz Profa. Dra. Maria de Lourdes Silva Santos Profa. Dra. Maria Lúcia P. Chaves Rocha Prof. Dr. Miguel Chaquiam Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral Prof. Dr. Pedro Franco de Sá Prof. Dr. Raimundo Otoni Melo Figueiredo Profa. Dra. Rita Sidmar Alencar Gil Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho Profa. Dra. Talita Carvalho da Silva de Almeida

Comitê de Avaliação

Cinthia Cunha Maradei Pereira
Roberto Paulo Bibas Fialho
Glaucianny Amorim Noronha

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP) Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Uma sequência didática para o ensino de permutação / Carlos Magno de Moraes, Cinthia Cunha Maradei Pereira, Roberto Paulo Bibas Fialho. - Belém, 2022.

Produto educacional vinculado à Dissertação “Ensino de permutação através da resolução de problemas” do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, Belém, 2022.

ISBN: 978-65-84998-05-6

1. Matemática-Estudo e ensino (Ensino médio) 2. Resolução de problemas. 3. Engenharia didática. 4. Prática de ensino I. Pereira, Cinthia Cunha Maradei. II. Fialho, Roberto Paulo Bibas (coorient.). III. Título.

CDD. 23º ed. 510.7

Regina Coeli A. Ribeiro – CRB-2/739



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO CENTRO DE
CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA

EXAMINADORA

Título: “ENSINO DE PERMUTAÇÃO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS”. Mestrando: **CARLOS MAGNO DE MORAES**

Data da avaliação: **15/06/2022**

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado à:*

() Estudantes do Ensino Fundamental (x) Estudantes do Ensino Médio ()
Professores do Ensino Fundamental () Professores do Ensino Médio () Outros:

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

(X) Sequência Didática () Página na Internet

() Vídeo () Texto Didático

(alunos/professores) () Jogo Didático ()

Aplicativo

() Software () Outro: _____

b) *Possui URL:* (X) Sim, qual o URL: _____

() Não () Não se aplica

c) *É coerente com a questão-foco da pesquisa?*

(X) Sim

() Não. Justifique? _____

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*

(X) Sim

() Não. Justifique? _____

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*

Sim

Não. Justifique? _____

ESTRUTURA	DO	PRODUTO	EDUCACIONAL
-----------	----	---------	-------------

a) <i>Possui sumário:</i>	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	<input type="checkbox"/> Não se aplica
b) <i>Possui orientações ao professor:</i>	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	<input type="checkbox"/> Não se aplica
c) <i>Possui orientações ao estudante:</i>	<input type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	<input checked="" type="checkbox"/> Não se aplica
d) <i>Possui objetivos/finalidades:</i>	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	<input type="checkbox"/> Não se aplica
e) <i>Possui referências:</i>	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	<input type="checkbox"/> Não se aplica
f) <i>Tamanho da letra acessível:</i>	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	<input type="checkbox"/> Não se aplica
g) <i>Ilustrações são adequadas:</i>	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	<input type="checkbox"/> Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Foi aplicado?*

Sim, onde: Escola pública do município de Codó-MA – turma do 2º Ano

Não, justifique: _____

Não se aplica

b) *Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?*

Sim, onde: Alunos de graduação

Não, justifique: _____

Não se aplica

c) *O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?*

Sim, onde: Com professores do ensino médio da rede estadual do Maranhão

Não, justifique: _____

Não se aplica

d) *Em qual condição o produto educacional foi aplicado?*

na escola, como atividade regular de

sala de aula na escola, como um curso

extra

outro: _____

e) *A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):*

Alunos do Ensino

Fundamental Alunos

do Ensino Médio

() Professores do Ensino

Fundamental() Professores

do Ensino Médio

() outros membros da comunidade escolar, tais como _____

() outros membros da comunidade, tais como _____

f) O produto educacional foi considerado:

() APROVADO (x) APROVADO COM MODIFICAÇÕES () REPROVADO

MEMBROS DA BANCA

Assinaturas

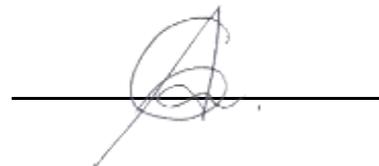
Profa. Cinthia Cunha Maradei Pereira (Presidente)
Doutora em Bioinformática
IES de Obtenção do Título: UFPA



Prof. Roberto Paulo Bibas Fialho (Membro Interno e Coorientador)
Doutor em Ciências e Matemática
IES de Obtenção do Título: UFPA



Profa. Glaucianny Amorim Noronha (Membro Externo)
Doutora em Educação Matemática
IES de Obtenção do Título: UFPA



SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO	8
2 ASPECTOS DIDÁTICOS SOBRE PERMUTAÇÃO	11
2.1 Permutação Simples	13
2.2 Permutação com Repetição	15
2.3 Permutação Circular.....	19
3 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA	22
3.1 Orientações Gerais Para o Professor.....	23
3.2 Orientações Específicas e Materiais para o Professor	24
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	41
5 REFERÊNCIAS.....	42

1 APRESENTAÇÃO

O presente produto educacional é resultado da dissertação de mestrado, elaborada por Moraes (2022), que teve como propósito construir uma sequência didática para o ensino de Permutação que foi aplicada em uma turma do 2º ano do ensino médio em uma escola da rede pública de ensino.

O interesse em elaborar esta pesquisa surgiu por conta das dificuldades que notamos no ensino e aprendizagem de Matemática, em especial nos conteúdos de Análise Combinatória sobretudo em relação aos assuntos de Permutação, vivenciados durante a prática docente e constatado em nossa revisão de literatura.

Segundo Rosas (2018), professores e alunos apresentam dificuldades na resolução de problemas de Análise Combinatória. O ensino e aprendizagem deste conteúdo, ministrado no ensino médio, estão indicados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN).

É inegável a relevância deste conteúdo para o ensino da matemática no ensino fundamental e médio, tendo em vista que este assunto é utilizado em várias áreas do conhecimento. Neste sentido, é necessário fortalecer a base acadêmica dos estudantes de modo que eles possam desenvolver autonomia e motivação necessária para superação de suas dificuldades a respeito deste conteúdo.

Assim, elaboramos um conjunto de atividades envolvendo os assuntos de Permutação que foram aplicados como sequência didática com o auxílio da Análise Microgenética e materiais manipuláveis como recurso didático na Resolução de Problemas.

As Sequências Didáticas são procedimentos metodológicos que vem sendo cada vez mais utilizados durante o processo de ensino e aprendizagem, sobretudo nos trabalhos de pesquisa. Concordamos com Macedo (2019), quando afirma que esta abordagem permite a construção do saber, possibilita a experimentação, a generalização, a abstração e a formação de significados. Além de possibilitar a interdisciplinaridade, pois o que se trabalha em um tema numa determinada disciplina, pode também ser trabalhado em outras áreas do conhecimento. Assim o professor deve buscar novas metodologias para melhorar o ensino e aprendizagem dos estudantes.

Para a construção da sequência didática, o professor deve utilizar as análises prévias, para buscar informações sobre o ensino e aprendizagem dos estudantes

quanto ao ensino de Permutação.

Caro professor, as análises prévias é a primeira etapa da engenharia didática. Com vistas a elaboração de sua proposta, torna-se necessário conhecer os sujeitos que estarão envolvidos. No contexto da investigação, as análises prévias servem a essa finalidade. De acordo com Carneiro (2005), elas são estruturadas com o objetivo de:

analisar o funcionamento do ensino habitual do conteúdo, para propor uma intervenção que modifique para melhor a sala de aula usual. A análise é feita para esclarecer os efeitos do ensino tradicional, as concepções dos alunos e as dificuldades e obstáculos que marcam a evolução das concepções. (CARNEIRO, 2005, p. 93).

Você pode ir buscar nas análises prévias um ponto de equilíbrio entre sua proposta e o que é estudado de forma tradicional, para melhorar o ensino e aprendizagem do conteúdo a ser ministrado.

Para Artigue (1996 *apud* CARNEIRO, 2005, p. 93), essa análise deve incluir a distinção de três dimensões: 1) dimensão epistemológica, associada às características do saber em jogo; 2) dimensão didática, associada às características do funcionamento do sistema de ensino; 3) dimensão cognitiva, associada às características do público ao qual se dirige o ensino.

Na dimensão epistemológica e didática, você pode buscar orientações sobre os aspectos curriculares que tratam de identificar as habilidades e competências orientadas pelos documentos oficiais que baseiam o ensino em nosso país: Lei de Diretrizes e Bases, Parâmetros Curriculares Nacionais, Sistema de Avaliação da Educação Básica, Base Nacional Comum Curricular e seus descritores, entre outros.

Por fim na dimensão cognitiva, associada às características do público ao qual se dirige o ensino e aprendizagem, o professor pode aplicar uma consulta diagnóstica com os estudantes sobre o conteúdo de Permutação para conhecer o público de sua pesquisa no sentido de buscar informações para propor a sua sequência didática.

Para se aprofundar mais, recomendo visitar a dissertação de mestrado de Moraes (2022).

A estrutura deste produto educacional está dividida em três capítulos: No capítulo 1 – Introdução, apresento os fundamentos teóricos e metodológicos nos quais o professor pode usar para desenvolver sua pesquisa; O segundo trata dos aspectos didáticos (fundamentação matemática) relacionados ao conteúdo de Permutação, afim de contribuir para a formação continuada do professor; O terceiro aborda nossa

sequência didática com sua apresentação, orientações gerais e específicas para os docentes, além dos materiais de apoio ao professor.

Caro professor, em relação às atividades que compõem a sequência didática que apresentaremos mais a frente, a mesma é composta de 4 atividades sobre o conteúdo de Permutação. Esperamos que o aluno, ao final desta aplicação, seja capaz de interpretar e resolver situações problemas envolvendo:

- Permutações Simples;
- Permutações com Repetição;
- Permutação Circular.

Este produto educacional, assim como a dissertação mencionada podem ser acessados no site do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM), da Universidade do Estado do Pará (UEPA), por meio do endereço ccse.uepa.br/pmpem.

2 ASPECTOS DIDÁTICOS SOBRE PERMUTAÇÃO

Neste capítulo, descreveremos sobre os assuntos: Permutação Simples, Permutação com Repetição e Permutação Circular que são estudados no ensino médio em Análise Combinatória percorrendo sobre os conceitos, a classificação e demonstração destes assuntos que foram usados em nossa pesquisa dentro da sequência didática sobre Permutação, além das concepções de alguns autores, que utilizaremos na mesma.

Estes aspectos didáticos (fundamentação matemática), nos ajudaram a entender os conteúdos que foram abordados dentro da sequência didática. Acreditamos ser importante fazer essa abordagem para melhor contribuir na formação continuada do professor de matemática.

O principal objetivo da análise combinatória, de acordo com Rosas (2018), é determinar de quantas maneiras uma tomada de decisão pode ser feita ou qual é a quantidade de elementos de um determinado conjunto, tendo estes elementos, pelo menos uma característica em comum.

Vários pesquisadores se dedicaram a trabalhos em Análise Combinatória, que ao longo da história, interessou pessoas que praticavam diversos jogos de azar, querendo descobrir nas partidas que faziam, as possibilidades de vencer. Entre estes estudiosos se destacam: O matemático italiano Niccollo Fontana (1500-1557), conhecido como Tartaglia, depois vieram os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662).

Estes estudos favoreceu o desenvolvimento dos trabalhos em Probabilidade, Binômio de Newton e Estatística. Além de problemas de contagem que fazem parte do dia a dia das pessoas.

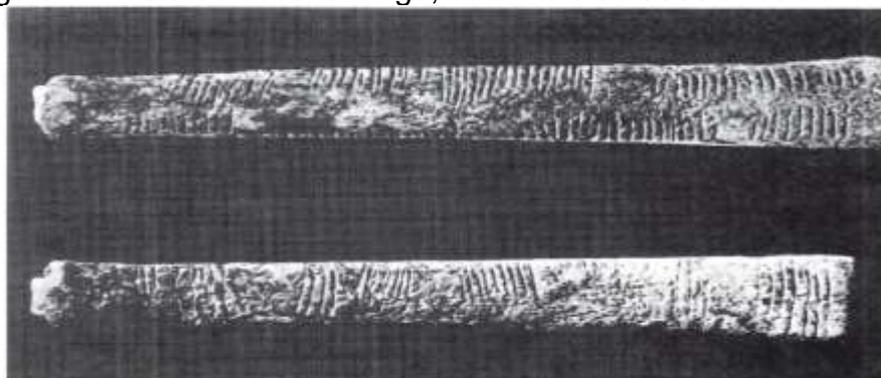
A necessidade do homem de contar teve seu desenvolvimento antes dos escritos históricos. Para Rosas (2018), esta necessidade surgiu antes mesmo dos números, tendo evidências de que o processo de contagem teve início aproximadamente a 9000 anos a.C. Este autor afirma que o homem, desde o começo da civilização humana, vem tentando encontrar diferentes maneiras para contar, primeiro com objetos, depois números, algoritmos, fórmulas, teoremas e principalmente com a lógica aplicada.

É provável que o modo mais antigo de contar, segundo Eves (2011), tenha se baseado em registro simples, usando o princípio de correspondência biunívoca. Como

por exemplo, para contar a quantidade de carneiros, associava-se cada um deles, a uma pedra, um dedo ou riscos no barro, entalhas num pedaço de madeira ou fazendo nós numa corda.

Com o passar dos tempos, foi desenvolvido arranjos de sons vocais para registrar verbalmente o número de objetos de um grupo pequeno. Depois, com o desenvolvimento da escrita, foram surgindo símbolos para representar a quantidade de objetos. Veja Figura 1.

Figura 1 - Vista do osso Ishango, com mais de 8000 anos de idade.



Fonte: Eves (2011, p. 26)

Segundo este autor, o processo de contar teve de ser sistematizado a partir da necessidade de efetuar contagens com um número de elemento muito grande.

Alguns problemas no cotidiano não eram resolvidos, quando apresentavam quantidades enormes. Assim, houve a necessidade de outro método de contagem, através da noção de agrupamentos de objetos de um conjunto. Dessa forma Gerdenits (2014), destaca que:

[...] a procura por técnicas de contagem está diretamente vinculada à história da matemática e é a forma pela qual as pessoas tem seu primeiro contato com esta disciplina. A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é “contar”, ou seja enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas (e aprendidas pelas crianças) através de sua aplicação a problemas de contagem (MORGADO, 1991, p. 17 *apud* GERDENITS, 2014 p. 61).

Neste sentido, para Mendes (2014, p.11), a Análise Combinatória é uma ampliação dessa necessidade, que estabelece conceitos e técnicas que nos possibilitam a contagem em diferentes situações. Como parte da matemática, a Análise Combinatória, permite resolver problemas em que é necessário “escolher”, “arrumar”, e, principalmente “contar” os objetos de um conjunto.

Este autor considera que “é uma importante ferramenta que o cidadão, hoje inserido no mundo das informações e de novas tecnologias”, tem a disposição para resolver problemas reais.

Assim, para Rosas (2018), podemos efetuar contagem com métodos eficientes, quando aprendemos boas técnicas, principalmente em situações em que a quantidade de elementos que vamos contar seja muito grande.

Segundo Hazzan (1977), a análise combinatória é um componente da matemática que visa desenvolver técnicas que possibilitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo que estes elementos, ficam agrupados e formados sob certas condições.

Num primeiro momento, fica desnecessária a existência destas técnicas, “se o número de elementos que queremos contar for pequeno. Entretanto, se o número de elementos a serem contados for grande, esse trabalho torna-se quase que impossível, sem o uso de métodos especiais” (Hazzan, 1977, p. 1).

2.1 Permutação Simples

A seguir, veremos as Permutações Simples como aplicação imediata do Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.). Os elementos formarão agrupamentos que são diferentes um do outro somente pela ordem, isto é, a diferença entre estes agrupamentos é feita pela mudança de posição entre seus elementos.

Segundo Dante (2016, p. 206) permutar é o mesmo que trocar. Este autor afirma que “intuitivamente, nos problemas de contagem, devemos associar a permutação à noção de embaralhar, isto é, trocar objetos de posição”. Na permutação com elementos diferentes, de forma geral, os elementos envolvidos no problema trocam de posição, montando agrupamentos diferentes.

Vejamos o exemplo a seguir:

Os alunos **B**eatriz (B), **C**arlos (C) e **P**edro (P) querem tirar uma foto de recordação de uma viagem na qual todos apareçam lado a lado. De quantas formas distintas eles podem se distribuir nesta foto?

Fazendo uma listagem organizada, teremos as possíveis distribuições dos alunos na foto (agrupamentos):

BCP	CBP	PBC
BPC	CPB	PCB

Lembre-se: as disposições mudaram de configuração apenas pela troca dos alunos de posição na foto, uma característica das permutações.

Pelo P.F.C., teremos:

1ª posição na foto	2ª posição na foto	3ª posição na foto	Total de possibilidades
3 possibilidades	2 possibilidades (já foi utilizada uma pessoa)	1 possibilidades (já foram utilizadas duas pessoas)	3 . 2 . 1 = 6

Cada forma de dispor os três alunos lado a lado corresponde a uma permutação dessas 3 pessoas, uma vez que a sequência é formada por todos os alunos. O número de posições possíveis é, portanto, $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Para lezzi *et al.* (2016, p. 236), dados n elementos distintos, chama-se **permutação simples** ou simplesmente **permutação** todo **agrupamento ordenado** (sequência) formado por esses n elementos.

Cálculo do número de permutações

sejam n elementos distintos e P_n o número de permutações possíveis desses n elementos.

Vamos contar o número de sequências formadas por n elementos:

- Para escolher o primeiro elemento da sequência temos n possibilidades.
- Para escolher o segundo elemento da sequência, uma vez definida a primeira posição, há $(n - 1)$ possibilidades.
- Definidos os dois primeiros elementos da sequência, podemos escolher o terceiro elemento de $(n - 2)$ maneiras.
- Escolhidos os $(n - 1)$ primeiros elementos da sequência, o elemento que irá ocupar a última posição na sequência fica determinado de maneira única.

Assim, pelo PFC:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1, \text{ isto é, } P_n = n!$$

Segundo Rosas (2018), a permutação simples de n elementos é uma técnica usada em Análise Combinatória para determinar as possibilidades de formação de

uma fila ou sequência, sem que haja repetição de elementos e todos os elementos são utilizados na questão.

Para Hazzan (1977, p.15), seja M o conjunto $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ e identificamos por P_m o número de permutações dos m elementos de M .

Temos:

$$P_m = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot [m - (m - 1)]$$

Logo,

$$P_m = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Em particular, se $m = 1$, podemos perceber que $P_1 = 1$

2.2 Permutação com Repetição

Os Agrupamentos Simples (permutação), são caracterizados com a palavra “simples” por não haver elementos repetidos. Segundo Conceição (2019), quando formamos agrupamentos em que uma certa quantidade de elementos se repete mais de uma vez, de forma que a diferença entre um agrupamento e outro, seja feita pela troca de posição entre seus elementos, chamamos estes agrupamentos de permutação com repetição. Vale ressaltar que todos os elementos em questão devem ser utilizados nos agrupamentos.

Para Dante (2016, p. 209), o número de permutações de n elementos dos quais α é de um tipo, β é de outro e γ é de outro, com $\alpha + \beta + \gamma = n$, é dado por:

$$P_n^{\alpha, \beta, \gamma} = \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta! \cdot \gamma!} \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(representam o número de vezes que certo número} \\ \text{se repete)} \end{array}$$

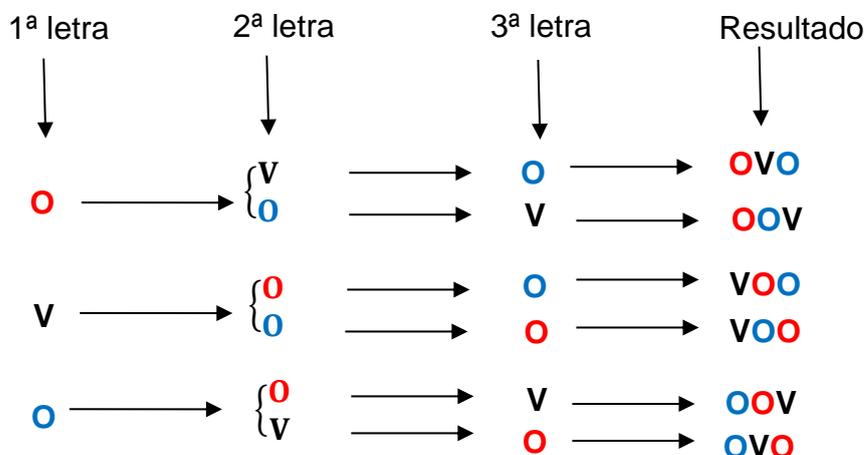
Considere o exemplo:

Quantos são os anagramas da palavra **OVO**?

RESOLUÇÃO:

Se os **O's** fossem diferentes, e identificando o primeiro “**O**” com a cor vermelha, e o segundo “**O**” com a cor azul, teríamos as letras: **OV**. dessa forma, não teríamos

mais elementos repetidos. Com a nova palavra podemos formar os seguintes anagramas, conforme árvore das possibilidades a seguir:



O total de anagramas seria $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ anagramas diferentes.

Mas as permutações entre os dois **O's**, não formarão novo anagrama. Para corrigir as repetições em excesso, devemos efetuar a divisão do resultado encontrado pela quantidade de permutações dos elementos repetidos.

Quando permutamos as letras **O's** entre si, em excesso, multiplicamos o resultado por $2 \cdot 1 = 2!$, logo devemos tomar o resultado dividido por $2!$. Assim, a quantidade de

anagramas da palavra **OVO** é igual a $\frac{6}{2!} = \frac{3 \cdot 2!}{2!} = 3$

Neste sentido Mendes (2014) considera que as permutações com elementos repetidos, são vistas como aplicações de permutações simples. Para tanto, basta fazer a permutação de todos os elementos como se não tivesse repetições e em seguida dividir o resultado pelas permutações dos elementos repetidos.

Veja o exemplo a seguir:

Quantos são os anagramas da palavra BATATA?

Se os **A's** fossem diferentes e os **T's** também, teríamos as letras **B, A₁, A₂, A₃, T₁, T₂** e o total de anagramas seria $P_6 = 6!$

Mas as permutações entre os 3 **A's** produzirão o mesmo anagrama, ou seja, não formarão agrupamentos diferentes. Então precisamos dividir P_6 por P_3 . O mesmo ocorre com os dois **T's**: precisamos dividir também P_6 por P_2 . Portanto, o número de

anagramas da palavra BATATA é:

$$\frac{P_6}{P_3 \cdot P_2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 60$$

Vale ressaltar que denominamos de **anagrama**, todo agrupamento formado pelas trocas das letras de uma palavra, com ou sem significado na linguagem comum.

PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO, de acordo com Rosas (2018), é a quantidade de permutações com n elementos em que um deles aparece se repetindo “**a**” vezes, outro “**b**” vezes, outro “**c**” vezes e assim por diante, com

$$a + b + c = n.$$

De forma geral, em Hazzan (1977, p. 35), encontramos:

1º CASO:

Considere que n elementos, dos quais n_1 são iguais a a_1 e o restante são todos distintos entre si e distintos de a_1 .

Indiquemos por $P_n^{n_1}$ o número de permutações nessas condições e calculemos esse número.

Cada permutação dos n elementos é uma n -úpla ordenada de elementos em que devem figurar n_1 elementos iguais a a_1 e os restantes $n - n_1$ elementos distintos.

$$\underbrace{(_ _ _ \dots _ _)}_{n \text{ elementos}}$$

Façamos o seguinte raciocínio. Das n posições que existem na permutação vamos escolher $n - n_1$ posições, para colocar os elementos todos distintos de a_1 .

Existem $\binom{n}{n - n_1}$ modos de escolher essas posições.

Para cada escolha de $(n - n_1)$ posições, existem $(n - n_1)!$ modos em que os $(n - n_1)$ elementos podem ser permutados. Logo, existem ao todo

$$\binom{n}{n - n_1} \cdot (n - n_1)! = \frac{n!}{n_1!}$$

formas de dispormos os elementos distintos de a_1 , na permutação.

Uma vez colocados estes elementos distintos, a posição dos elementos repetidos a_1 fica determinada (de uma só forma) pelos lugares restantes.

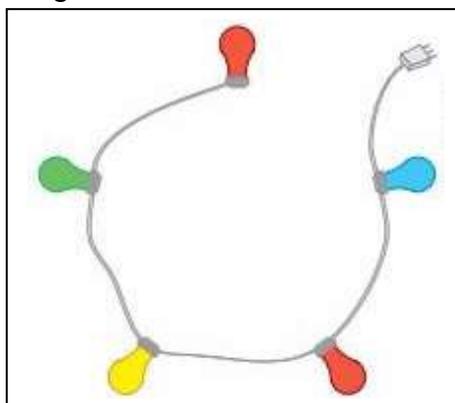
Logo, existem $\frac{n!}{n_1!}$ permutações com n_1 elementos iguais a_1 . Isto é,

$$P_n^{n_1} = \frac{n!}{n_1!}$$

Considere o exemplo a seguir:

Um enfeite natalino em forma de adorno, recebe cinco lâmpadas, sendo que duas delas possuem a mesma cor (vermelha), como mostra a figura a seguir. Dispondo apenas dessas lâmpadas, de quantos modos distintos é possível distribuí-las?

Figura 2 - Adorno de Natal.



Fonte: Balestri (2016, p. 135)

RESOLUÇÃO:

As cinco lâmpadas podem ser distribuídas em qualquer ordem, no entanto, duas delas possuem a mesma cor (vermelha). Assim, a quantidade de maneiras distintas de distribuí-las pode ser determinada pela permutação das cinco lâmpadas, sendo duas delas repetidas. Desse modo, podemos ter: $n = 5$ e $n_1 = 2$, logo

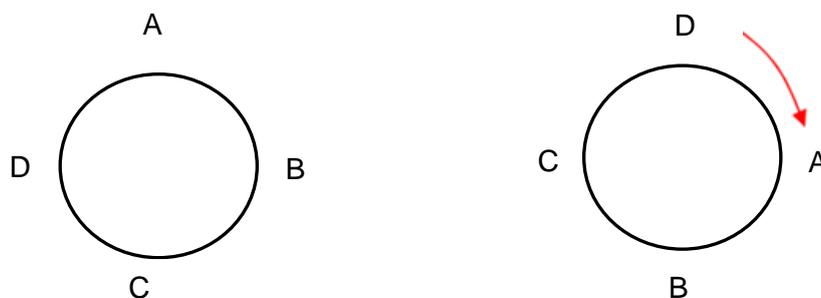
$$P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60$$

Portanto, existem 60 maneiras diferentes de distribuir essas 5 lâmpadas.

2.3 Permutação Circular

Os elementos se dispõem como se fosse em uma roda de ciranda, formando ordem em círculo.

Segundo Rosas (2018, p. 77-78) Quando são colocados “n objetos distintos de maneira igualmente espaçada num círculo, não importa exatamente a ordem entre eles, mas sim a posição relativa entre eles”. Este autor afirma que, diferentemente da permutação denominada de linear, na **permutação circular** o que realmente importa é que duas rotações não sejam coincidentes.



Para determinar a quantidade de permutações circulares de n objetos distintos, indicado por $(P_C)_n$, sem necessariamente visualizar cada uma delas, vários procedimentos podem ser utilizados. Um deles é notar que cada permutação circular consegue gerar exatamente n permutações lineares diferentes, por rotação ao girar a roda.

Logo:

$$(P_C)_n = \frac{P_n}{n}, \text{ isto é, } (P_C)_n = \frac{n!}{n} = (n - 1)!$$

Veja o exemplo a seguir:

De quantos modos distintos 5 crianças podem sentar-se em volta de uma mesa circular para estudar?

RESOLUÇÃO:

Temos que dispor as 5 crianças em círculos. Permutação circular dos 5 elementos indicados por:

$$(P_C)_5 = P_{(5-1)} = P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Generalizando se temos n elementos distintos para dispor em uma fila circular e de forma equidistante podemos realizar esse processo de $(n - 1)!$ maneiras diferentes. Simbolizamos por:

$$(P_C)_n = (n - 1)!$$

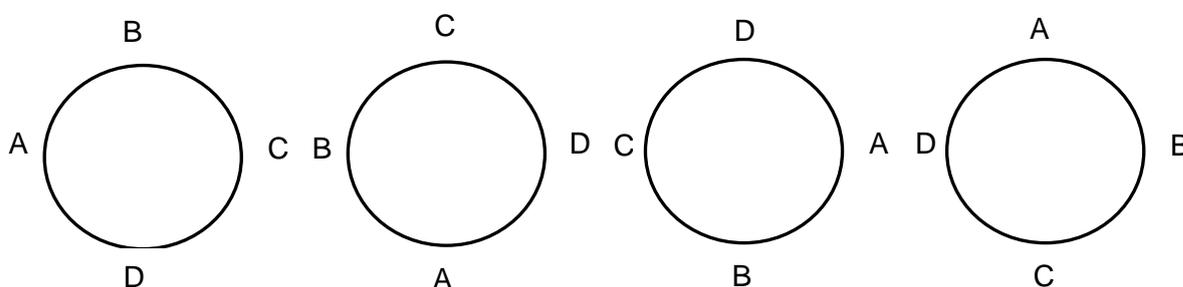
Para Carvalho (2015, p. 30-31), é importante conhecer a fórmula que expressa sua solução de certos problemas de contagem que ocorrem com frequência.

Considere o exemplo a seguir:

De quantos modos 4 crianças podem formar uma roda de ciranda para brincar?

Solução:

À primeira vista, pode parecer que para formar uma roda com as 4 crianças basta escolher uma ordem para elas, o que pode ser feito de $4! = 24$ modos. Entretanto, as rodas ABCD, BCDA, CDAB e DABC mostradas na figura a seguir são iguais, já que cada uma resulta da anterior por uma “virada” de $1/4$ de volta.



Para calcular o número de maneiras possíveis de formar uma roda, podemos raciocinar de dois modos diferentes. Um deles consiste em partir do resultado anterior ($4! = 24$) e perceber que cada roda está sendo contada 4 vezes. Logo, o número correto de rodas que podem ser formadas é $\frac{24}{4} = 6$. Alternativamente, podemos

começar por fixar a criança A na posição à esquerda (já que em qualquer roda A pode ficar nesta posição). Agora, temos 3 lugares para as 3 crianças que restaram, para um total de $3! = 6$ possibilidades. De modo geral, o número de modos de colocar n objetos em círculo, considerando-se iguais disposições que coincidam por rotação (ou seja, o número de permutações circulares de n objetos) é $PC_n = (n - 1)!$.

Neste tópico apresentamos os assuntos de permutação que foram abordados em nossa sequência didática. Professor, a partir dos problemas desenvolvidos nesta seção, espera-se que o aluno compreenda e desenvolva questões de forma contextualiza e que habilidades precisam ser desenvolvidas para resolver questões que estejam relacionadas com a convivência e realidade dos estudantes.

Caro professor, os aspectos didáticos (fundamentação matemática) apresentados nesta seção, estão de acordo com as análises prévias da engenharia didática que segundo Carneiro (2005), estão sugeridas por Artigue (1996), na dimensão epistemológica, associada às características do saber. A fundamentação matemática desenvolvida nessa fase, irá lhe ajudar a entender os conteúdos e produzir informações para lhe dar base matemática para elaboração das atividades de sua proposta de ensino. A seguir apresentamos nossa sequência didática.

3 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta seção, apresentamos as quatro atividades que compõem a nossa sequência didática proposta para o ensino e aprendizagem de permutação. No entanto, antes de descrevê-la, apresentamos algumas orientações para que o professor de matemática, bem como os estudantes possam se familiarizar com a nossa proposta e contribuir para o sucesso nas futuras aplicações.

Para a construção da sequência didática o professor pode seguir o modelo de sequência didática de Zabala (1998), conforme Quadro 1.

Quadro 1 - Estrutura do modelo da Sequência Didática.

FASE	DESCRIÇÃO	ENCAMINHAMENTO
1	Apresentação por parte do docente de uma situação problemática.	O professor expõe aos alunos uma situação conflitante que pode ser solucionada por meios matemáticos.
2	Proposições de problemas ou questões e Busca de soluções.	Os alunos individualmente ou coletivamente orientados pelo professor expõem as respostas intuitivas ou suposições, sobre o problema ou situação proposta.
3	Conceituação e algoritmo.	O professor apresenta uma atividade que conduza o aluno à descoberta de novos conceitos, a partir de roteiros de atividades, o aluno a responde.
4	Elaboração de conclusões.	Os alunos, coletiva ou individualmente, mediados pelo professor, elaboram as conclusões que se referem às questões propostas nas atividades da etapa anterior.
5	Generalização das conclusões e síntese.	O professor demonstra a função do modelo conceitual e o algoritmo em todas as situações que cumprem determinadas condições.
6	Exercitação.	Os alunos realizam exercícios com o uso do algoritmo.
7	Avaliação.	Os alunos expõem os resultados obtidos nos exercícios escrito ou verbalmente.

Fonte: Adaptado de Zabala (1998 *apud* SILVA, 2019, p. 152)

O modelo de sequência didática de zabala (1998) pode ser articulado com as quatro etapas para a resolução de problemas proposto por Polya (1945), que segundo

Dante (2009, p. 29), corresponde: Compreender o problema; elaborar um plano; executar o plano; fazer o retrospecto ou verificação.

Na 1ª etapa: Compreender o problema. Professor, nesta etapa, você deve conduzir ao estudante a compreender o problema antes de começar a resolução, para tanto é necessário ler atentamente a questão proposta.

Na 2ª fase: Elaborar um plano. Para resolver o problema, o aluno deve ser estimulado a traçar um plano de ação para atingir o que foi proposto, fazendo um linque entre as informações do problema e sua demanda.

Na 3ª fase: executar o plano. Nesta etapa, o aluno deve ser conduzido a colocar em prática o que foi traçado no plano, fazendo a verificação de cada passo a ser seguido.

Na 4ª e última etapa: Fazer o retrospecto ou verificação. Professor, aqui você analisa junto com os alunos, a resposta encontrada fazendo a verificação do resultado. Esta fase possibilita ao aluno a repassar todo o problema, rever como imaginou no início e como direcionou um método de solução, como fez as operações, bem como todo o percurso para determinar a resposta. É o momento para exercitar a aprendizagem, constatar e concertar possíveis erros.

Caro professor, você pode também seguir os passos de Onuchic *et al.* (2014, p. 45) que apresentam como sugestão para o desenvolvimento da resolução de problemas em sala de aula, as atividades organizadas nas seguintes etapas: “(1) Proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observar e incentivar, (6) registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo, (10) proposição e resolução de novos problemas”.

3.1 Orientações Gerais Para o Professor

Caro professor, de acordo com o planejamento curricular de sua escola, a aplicação dos assuntos de matemática proposto neste produto educacional pode sofrer modificações, ficando a seu critério a melhor forma para executá-lo.

O conteúdo de Permutação é ministrado geralmente após os assuntos de Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C) e Fatorial que são pré-requisitos para o estudo do referido assunto. Os alunos na maioria das vezes, ao chegarem ao ensino médio, apresentam muitas dificuldades em matemática, sobretudo na parte de

permutação. Decorrente de vários fatores.

Para Macedo (2019), uma das dificuldades que pode desmotivar os estudantes ao chegarem no ensino médio é com relação a compreensão de conteúdos que foram ministrados no ensino fundamental, os quais não foram devidamente assimilados pelos estudantes e, ao passar para os anos seguintes, levam estas dificuldades. Como consequência disso, este aluno que está de certa forma atrasado com a disciplina, dificilmente consegue compreender os conteúdos que obedecem uma sequência, faltando a base para a nova aprendizagem, aumentando ainda mais as dificuldades.

Antes de iniciar a aplicação da sequência didática, o professor pode fazer uma oficina de revisão sobre os assuntos do Princípio fundamental da Contagem (P.F.C.), fatorial e anagramas, para resgatar os conhecimentos prévios dos alunos. Você pode também incluir outros assuntos que achar necessário. Sugerimos que as questões trabalhadas durante a oficina de revisão sejam na forma discursiva.

Para as futuras aplicações, você pode usar várias estratégias como recursos didáticos na resolução de problemas de permutação como: Materiais manipuláveis, dominó, baralho, jogos digitais, entre outros. Você pode mostrar aos alunos as aplicações das permutações em outras áreas do conhecimento como: A computação e suas subáreas: algoritmos de computador, linguagens de programação, criptografia e desenvolvimento de programas computacionais (softwares), além de aplicação na biologia computacional, com as linguagens de códigos, sobre tudo na genética, nos Rearranjo de Genomas, para despertar nos estudantes o gosto e o envolvimento com o conhecimento científico e a pesquisa.

Na proposta de ensino que será apresentada mais a frente, os papéis dos atores são bem definidos, o estudante exerce o papel de protagonista e construtor de sua própria aprendizagem e o professor figura como mediador e orientador, aquele que direciona o estudante à aprendizagem. Dessa forma a sequência didática apresentada se diferencia de modelos tradicionais de ensino.

A seguir apresentamos nossa sequência didática composta de orientações específicas e materiais para o professor sobre os conteúdos de Permutação.

3.2 Orientações Específicas e Materiais para o Professor

Neste momento, apresentamos a sequência didática para o ensino de permutação que achamos convenientes e que foram trabalhadas em nossa pesquisa,

utilizando as metodologias já mencionadas, segundo as ideias dos teóricos como Polya (1945), Zabala (1998), Dante (2009, p. 29) e Onuchic *et al.* (2014), entre outros. Esta sequência é composta por quatro atividades.

Todos os alunos devem receber seu material e serem divididos em grupos. Ao final, cada grupo deve entregar uma cópia respondida ao professor. Este deve também ter o mesmo material para acompanhar os estudantes na realização das atividades. Ao aplicar a sequência didática, o professor por meio de intervenções deve expor aos estudantes o objetivo da atividade e explicar os comandos que orientam o desenvolvimento da mesma.

Os alunos participantes de sua pesquisa podem ser avaliados com base nos objetivos das atividades propostas de forma contínua e dinâmica, durante a aplicação das referidas atividades. Você pode avaliar também os aspectos relacionados a compreensão dos conteúdos como os conceitos e procedimentos matemáticos, as atitudes, o raciocínio, as capacidades de comunicação oral, a frequência, a participação em grupo e os diálogos por meio das interações entre estudantes e estudantes e entre professor e estudante e o relacionamento com os colegas e com o professor.

Você pode fazer observações para identificar as possíveis dificuldades e os avanços no desempenho das atividades em sala. Essas observações podem ser feitas a partir das informações coletadas dos estudantes, por meio do registro em fichas de atividades individuais e em grupo, com áudios e gravação em vídeos, fazendo uso da análise microgenética.

Após cada atividade, deve ser feita uma intervenção de formalização, para dar o teor formal da matemática ao tema abordado, seguindo a quinta fase do modelo de seqüência didática de Zabala (1998) e o nono passo para a resolução de problemas de Onuchic *et al.* (2014). Após cada atividade, você pode também propor algumas questões de aprofundamento destinadas a execução para uma melhor fixação da aprendizagem de cada uma das atividades, seguindo a sexta fase do modelo de seqüência didática de Zabala (1998) e o décimo passo para a resolução de problemas de Onuchic *et al.* (2014).

A quantidade de aulas destinadas para a realização de cada uma das atividades, fica a critério do professor. Sugerimos a organização das atividades, conforme descrição de aplicação das mesmas no Quadro 2.

Quadro 2 - Descrição da Aplicação da Sequência Didática.

Data	Atividade	Título/Atividade	Tempo/estimado
	Oficina de Revisão	P.F.C, Fatoria e Anagramas	90 minutos
	1 ^a	Permutação Simples	90 minutos
	2 ^a	Permutação Simples	45 minutos
	3 ^a	Permutação com Repetição	80 minutos
	4 ^a	Permutação Circular	50 minutos

Fonte: Elaborada pelo autor (2021)

Os tópicos a serem trabalhados na sequência didática são: noções gerais e conceito de permutação, além das técnicas para calcular as quantidades de permutações simples, permutação com repetição e permutação circular na resolução de problemas.

Para iniciar o assunto de permutação simples, o professor pode fazer uso do material manipulável (alfabeto móvel e algarismos) como recurso didático na resolução de problemas, para fortalecer e fixar os conceitos e as ideias sobre permutação. Para tanto, solicite a presença de três ou mais alunos à frente da turma com os algarismos 1, 2 e 3 ou mais algarismos para formarem números diferentes trocando-os de posição. Você pode fazer o mesmo procedimento com as letras “P”, “A”, e “I”, ou com outras letras para formarem palavras diferentes com as trocas destas letras (os Anagramas), a fim de melhorar o entendimento das ideias sobre Permutação Simples conforme Figuras 3 e 4.

Figura 3 - Atividade - Alunos formando números diferentes trocando os algarismos de posição



Fonte: Dados da Pesquisa (2021)

Figura 4 - Atividade - Alunos formando anagramas diferentes trocando as letras de posição



Fonte: Dados da Pesquisa (2021)

Ao final desta atividade, deixe alguns minutos da aula para os alunos praticarem o material manipulável com as letras e os algarismos de forma lúdica, conforme Figuras 5 e 6.

Figura 5 - Atividade – Alunos usando o alfabeto móvel para formar anagramas



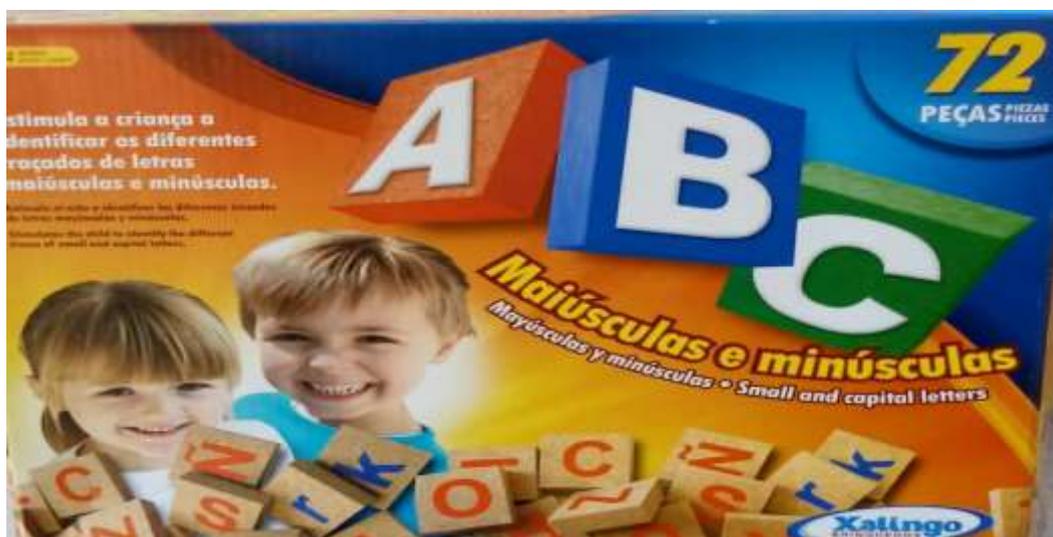
Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

Figura 6 - Permutação de algarismos para formação de números.



Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

Figura 7 - Alfabeto móvel em compensado de madeira.



Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

Figura 8 -Alfabeto móvel em E.V.A



Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

Figura 9 - Algarismo móvel em E.V.A e Plástico.



Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

Acreditamos que a utilização deste material manipulável (algarismos: para problemas envolvendo os números e alfabeto móvel: para formação de anagramas) que usamos em nosso experimento, podem servir como um importante recurso didático na resolução de problemas para auxiliar os professores em sua prática nas abordagens dos assuntos de permutação desde o ensino fundamental.

Neste contexto é importante o uso de materiais manipuláveis como recursos

didáticos na resolução de problemas para melhoria do ensino. “À formação continuada e a busca de aperfeiçoamento pessoal e profissional do professor são, sem dúvida, condições cruciais para experimentos e análises de grau de inovações dos materiais” Araújo e Santos (2020 p. 76). Os materiais manipuláveis aumentam a concepção dos estudantes sobre o que é, como e para quê aprender matemática, ultrapassando as barreiras dos mitos e preconceitos negativos da matemática, favorece uma aprendizagem através da formação de ideias e modelos.

Os alunos apresentam níveis de aprendizagens diferentes, modos de pensar diferentes. Podem apresentar e trazer diferentes formas para resolver as questões propostas. Assim, você pode orientá-los para que eles resolvam as questões da maneira que acharem mais conveniente (podem montar as possibilidades, listá-las, usar a calculadora, raciocínio lógico, materiais manipuláveis, jogos e etc.). A seguir tem-se as atividades da Sequência Didática.

Atividade 01 de Ensino

ATIVIDADE 01

Título: Permutação Simples.

Objetivo: Compreender o conceito de Permutação Simples.

Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões.

Procedimento:

- Leia atentamente a lista de questões;
- Resolva cada pergunta proposta na lista de questões.

01. Quantos números de três algarismos (sem repeti-los num mesmo número) podemos formar com os algarismos 2, 3 e 4?

02. Os alunos **Ana**, **Beatriz** e **Carlos** estão indo, à fila do caixa da lanchonete de uma escola. De quantas maneiras eles podem se posicionar nesta fila?

03. Qualquer ordenação das letras de uma palavra (com ou sem sentido), chama-se de **anagrama**. Quantos anagramas tem a palavra **UVA**?

04. Quantas **senhas** são possíveis formar, de quatro dígitos, com as letras da palavra **GATO**?

05. **Aline**, **Beatriz**, **Carlos** e **Daniel** são estudantes do 9º ano de um colégio e, na classe, ocupam a mesma fileira de quatro lugares. Para não haver conflitos entre

eles por causa da posição em que cada um quer sentar-se, a professora sugeriu um rodízio completo dos alunos na fila, trocando a disposição todos os dias. Quantos dias são necessários para esgotar todas as possibilidades de os quatro meninos se acomodarem nas quatro cadeiras?

Orientações específicas ao Professor

- Orientar aos estudantes que se organizem em equipes e quando possível que fiquem em quantidades de componentes iguais;
- Distribuir os envelopes contendo o roteiro da atividade, ficha de resposta de acordo com o número de integrantes de cada equipe;
- Orientar os estudantes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;
- Auxiliar sempre os estudantes em caso de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução da atividade, intervir, caso necessário, de modo a permitir a continuidade da atividade, evitando assim, o abandono e desinteresse pela realização do procedimento proposto;
- Estimule a interação entre os estudantes e entre professor e estudantes;
- Explore os saberes dos estudantes adquirido na oficina de revisão sobre os assuntos de Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C), Fatorial e noções sobre Anagramas;
- Professor, é interessante ao menos iniciar a construção do diagrama para o estudante compreender a estrutura da multiplicação por meio do P.FC;
- Explique que a intensão é fazer com que os estudantes resolvam as questões propostas, a partir delas preencham o Quadro 4, para que percebam uma característica no cálculo necessário para se obter os resultados e dessas informações cheguem a uma conclusão geral do que seria a Permutação Simples de “n” elementos.
- Orientar os estudantes para o preenchimento da ficha de respostas;
- Orientar os estudantes para a socialização das características encontradas no preenchimento da ficha de respostas;
- Apresente aos estudantes a formalização do conceito que a atividade propõe ensinar, tomando por base as características apresentadas por eles na ficha de resposta.

Você pode usar as fichas de respostas usadas nas atividades para

preenchimento pelos estudantes para o entendimento, verificação dos padrões (fórmulas) que serão verificados e para facilitar a elaboração das conclusões e dos conhecimentos aprendidos pelos mesmos.

Após o preenchimento da ficha de respostas tem-se uma visualização parecida com o Quadro 3.

Quadro 3 - Ficha resposta preenchida na Atividade 01

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Qual o número de possibilidades da				Total de permutações
		1ª etapa/ posição	2ª etapa/ posição	3ª etapa/ posição	4ª etapa/ posição	
1ª	3	3	2	1		6
2ª	3	3	2	1		6
3ª	3	3	2	1		6
4ª	4	4	3	2	1	24
5ª	4	4	3	2	1	24

Fonte: Adaptada de Rosas (2018)

Definição / formalização:

Quadro 4 - Ficha resposta a ser preenchida na Atividade 01.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Qual o número de possibilidades da				Total de permutações
		1ª etapa/ posição	2ª etapa/ posição	3ª etapa/ posição	4ª etapa/ posição	
1ª						
2ª						
3ª						
4ª						
5ª						

Fonte: Adaptada de Rosas (2018)

Trocando a ordem (posição) dos elementos altera os agrupamentos?

Sim Não

O que é preciso fazer para determinar o número total de permutações em cada uma das questões?

Conclusão:

Atividade 02 de Ensino

ATIVIDADE 02

Título: Permutação Simples.

Objetivo: Compreender o processo de como chegar ao resultado de Permutação Simples.

Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões.

Procedimento:

- Leia atentamente a lista de questões;
- Resolva cada pergunta proposta na lista de questões.

01. Qualquer ordenação das letras de uma palavra (com ou sem sentido), chama-se de **anagrama**. Considerando a palavra FESTA, determine o número de anagramas que começam por F.

02. Quantos são os anagramas da palavra FESTA que começam com A e terminem com F.

03. Determine o número de anagramas da palavra FESTA que tenham as letras F e E juntas, nessa ordem.

Orientações específicas ao Professor

- Orientar aos estudantes que se organizem em equipes e quando possível que fiquem em quantidades de componentes iguais;
- Distribuir os envelopes contendo o roteiro da atividade, quadro de resposta de acordo com o número de integrantes de cada equipe;
- Orientar os estudantes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;
- Auxiliar sempre os estudantes em caso de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução da atividade, Intervir, caso necessário, de modo a permitir a continuidade da atividade, evitando assim, o abandono e desinteresse pela realização do procedimento proposto;
- Estimule a interação entre os estudantes e entre professor e estudantes;
- Explore os saberes dos estudantes adquirido na oficina de revisão sobre os assuntos de Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C), Fatorial e noções sobre Anagramas,

além dos saberes aprendidos na atividade 01 de ensino e com o material didático (alfabeto móvel e algarismos);

- explique que a intensão é fazer com que os estudantes resolvam as questões propostas, a partir delas preencham o quadro 6 a seguir, para que percebam uma característica no cálculo necessário para se obter o total de permutações Simples;
- Orientar os estudantes para o preenchimento da ficha de respostas;
- Orientar os estudantes para a socialização das características encontradas no preenchimento da ficha de respostas;
- Apresente aos estudantes a formalização que a atividade propõe ensinar, tomando por base as características apresentadas por eles na ficha de resposta.

Após o preenchimento da ficha de respostas tem-se uma visualização parecida com o Quadro 5.

Quadro 5 - Ficha resposta preenchida na Atividade 02.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Qual o número de possibilidades após a fixação dos elementos para a				Total de permutação
		1ª etapa/ posição	2ªetapa/ posição	3ªetapa/ posição	4ªetap/p osição	
1ª	5	4	3	2	1	24
2ª	5	3	2	1		6
3ª	5	4	3	2	1	24

Fonte: Adaptada de Rosas (2018)

Quadro 6 - Ficha a ser preenchida na Atividade 02.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Qual o número de possibilidades após a fixação dos elementos para a				Total de permutação
		1ª etapa/ posição	2ªetapa/ posição	3ªetapa/ posição	4ªetap/p osição	
1ª						
2ª						
3ª						

Fonte: Adaptada de Rosas (2018)

O que é preciso fazer para determinar o número total de permutações em cada uma das questões?

Conclusão:

Atividade 03 de Ensino

Nesta atividade de ensino, o professor pode fazer uso do material manipulável como recurso didático na resolução de problemas para iniciar o assunto de permutação com repetição. Para tanto, solicite a presença de três alunos para se posicionarem cada um com as respectivas letras da palavra “OVO”. Em seguida pergunte a turma se ao trocar os “os” de posição gera uma palavra diferente. Logo após, pergunte se trocando apenas o “V” de posição, gera uma nova palavra (anagrama). Conforme fotos dos estudantes a seguir.

Figura 10 - Atividade – Alunos formando anagramas com as letras da palavra OVO.



Fonte: Dados da Pesquisa (2021)

Deixe alguns minutos desta atividade para os estudantes praticarem o material manipulável. Você pode ter as seguintes posturas durante esta atividade para orientá-los a responder as questões:

- 1º - Questioná-los se a resolução por meio de permutação simples, estava fazendo com que criassem agrupamentos a mais;
- 2º- Perguntar para os estudantes, se era necessário ter feito a permutação dos elementos repetidos dentro de cada agrupamento, ou seja, a troca destes elementos alterava o agrupamento;
- 3º - Perguntar o que eles poderiam fazer, para corrigir o número de agrupamentos que estava em excesso;

Essas perguntas podem ajudar aos alunos a preencherem a tabela (ficha de respostas) até a última coluna para obter o resultado.

Atividade 03 de Ensino

Atividade 03

Título: Permutação com Repetição.

Objetivo: Compreender o processo de como chegar ao resultado de Permutação com Repetição.

Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões.

Procedimento:

- Leia atentamente a lista de questões;
- Resolva cada pergunta proposta na lista de questões.

01. Qualquer ordenação das letras de uma palavra (com ou sem sentido), chama-se de **anagrama**. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra **OVO**?

02. Determine o número de anagramas da palavra **ANA**?

03. Um aluno, que nasceu em 1989, resolveu criar uma senha de acesso ao seu computador, utilizando os 4 dígitos que formam o ano de seu nascimento. Quantas senhas ele terá a sua disposição?

04. Quantos anagramas tem a palavra **CAMA**?

05. Trocando de posição os algarismos 1, 1, 2, 2, 3 quantos números de cinco algarismos podemos formar?

06. Quantos anagramas podemos formar, com as letras da palavra **ARARA**?

Orientações específicas ao Professor

- Orientar aos estudantes que se organizem em equipes e quando possível que fiquem em quantidades de componentes iguais;
- Distribuir os envelopes contendo o roteiro da atividade, quadro de resposta de acordo com o número de integrantes de cada equipe;
- Orientar os estudantes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;
- Auxiliar sempre os estudantes em caso de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução da atividade, Intervir, caso necessário, de modo a permitir a continuidade da atividade, evitando assim, o abandono e desinteresse pela realização do procedimento proposto;
- Estimule a interação entre os estudantes e entre professor e estudantes;

- Explore os saberes dos estudantes adquirido na oficina de revisão sobre os assuntos de Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C), Fatorial e noções sobre Anagramas, bem como os saberes aprendidos nas atividades 01 e 02;
- explique que a intenção é fazer com que os estudantes resolvam as questões propostas e a partir delas preencham o quadro 8 para que se chegue a fórmula geral de Permutação com Elementos Repetidos. Professor, atenção para as resoluções, os grupos podem estar habituados em resolvê-las pelo P.F.C. e ou fatorial, quando não há elementos repetidos. Para orientá-los a responder as questões e gerar a fórmula de Permutação com Elementos Repetidos, adote os seguintes procedimentos:
 - 1º - Deixe que resolvam as questões como se fossem de Permutação Simples e solicite que montem todas as possibilidades listando-as;
 - 2º - Pergunte para eles, se a troca de posição desses elementos repetidos forma agrupamentos diferentes;
 - 3º - Pergunte se é necessário fazer a permutação dos elementos repetidos dentro de cada agrupamento;
 - 4º - Peça para que verifiquem, se o resultado feito por Permutação Simples coincide com o número de agrupamentos que foram montados;
 - 5º - Questione se a resolução por meio de Permutação Simples, estava fazendo com que se crie agrupamentos a mais;
 - 6º - Pergunte o que eles poderiam fazer, para corrigir o número de agrupamentos que estão em excesso e se chegue ao resultado correto, encontrado com a listagem das possibilidades.
- Orientar os estudantes para o preenchimento da ficha de respostas;
- Orientar os estudantes para a socialização das características encontradas no preenchimento da ficha de respostas;
- Apresente aos estudantes a formalização que a atividade propõe ensinar, tomando por base as características apresentadas por eles na ficha de resposta.

Após o preenchimento da ficha de respostas tem-se uma visualização parecida com o quadro 7 a seguir.

Quadro 7 - : Ficha resposta preenchida na Atividade 03.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Quantidade de elementos repetidos	Quantidade de vezes que repete	Total de permutações

1ª	3	1	2	3
2ª	3	1	2	3
3ª	4	1	2	12
4ª	4	1	2	12
5ª	5	2	1: duas vezes 2: duas vezes	30
6ª	5	2	A: três vezes R: duas vezes	10

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Definição / Formalização:

Quadro 8 - Ficha resposta a ser preenchida na Atividade 03.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Quantidade de elementos repetidos	Quantidade de vezes que repete	Total de permutações
1ª				
2ª				
3ª				
4ª				
5ª				
6ª				

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Trocando a ordem (posição) dos elementos repetidos, altera os agrupamentos?

Sim Não

O que é preciso fazer para determinar o número total de permutações em cada uma das questões?

Conclusão:

Atividade 04 de Ensino

Atividade 04
Título: Permutação Circular.
Objetivo: Compreender o processo de como chegar ao resultado de uma Permutação Circular.
Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões.

Procedimento:

- Leia atentamente a lista de questões;
 - Resolva cada pergunta proposta na lista de questões.
1. De quantos modos podemos dispor 3 amigos (**A**ntônio, **B**ia e **C**arlos) num círculo em lugares equidistantes? (com a mesma distância entre eles).
 2. De quantas formas distintas 4 crianças Ana, Beatriz, Carlos e Daniel podem se sentar em uma mesa circular?
 3. De Quantos modos 5 crianças podem formar uma roda de ciranda?
 4. Duas amigas e três amigos vão dispor-se em forma de círculo. De quantas formas eles podem formar-se, sendo que as amigas devem ficar juntas.

Orientações específicas ao Professor

- Oriente aos estudantes que se organizem em equipes e quando possível que fiquem em quantidades de componentes iguais;
- Distribuir os envelopes contendo o roteiro da atividade, quadro de resposta de acordo com o número de integrantes de cada equipe;
- Orientar os estudantes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;
- Auxiliar sempre os estudantes em caso de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução da atividade. Intervir, caso necessário, de modo a permitir a continuidade da atividade, evitando assim, o abandono e desinteresse pela realização do procedimento proposto;
- Estimule a interação entre os estudantes e entre professor e estudantes;
- Explore os saberes dos estudantes adquirido na Atividade 1 e 2, bem como da revisão sobre P. F. C. e Fatorial;
- Explique que a intenção é fazer com que os estudantes resolvam as questões propostas e a partir delas preencham o quadro 10, para que se chegue a fórmula geral de Permutação Circular. Professor, atenção para as resoluções, os grupos podem estar habituados em resolvê-las pela Permutação Simples de forma linear, não percebendo as configurações circulares. Para ajudá-los a responder as questões e gerar a fórmula de Permutação Circular, adote os seguintes procedimento:

1º - Deixe que resolvam as questões como se fossem de Permutação Simples e solicite que montem todas as possibilidades listando-as;

2º - Pergunte para eles, se ao Fazer rotações (giros) de 90º, as configurações ficam iguais?;

3º Pergunte para eles, se trocando as pessoas de lugar, os agrupamentos ficam iguais?;

4º - Peça para que verifiquem, se o resultado feito por Permutação Simples coincide com o número de agrupamentos que foram montados;

5º - Questione se a resolução por meio de Permutação Simples, estava fazendo com que se crie agrupamentos a mais;

6º - Pergunte o que eles poderiam fazer, para corrigir o número de agrupamentos que estão em excesso e se chegue ao resultado correto, encontrado com a listagem das possibilidades.

- Orientar os estudantes para o preenchimento da ficha de respostas;
- Orientar os estudantes para a socialização das características encontradas no preenchimento da ficha de respostas;
- Apresente aos estudantes a formalização do conceito que a atividade propõe ensinar, tomando por base as características apresentadas por eles na ficha de respostas.

Após o preenchimento da ficha de respostas tem-se uma visualização parecida com o Quadro 9.

Quadro 9 - Ficha resposta preenchida na Atividade 04.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Fazendo rotações (giros) de 90º, as configurações ficam iguais?		Trocando as pessoas de lugar, os agrupamentos ficam iguais?		Total de permutações
		Sim	Não	Sim	Não	
1ª	3	X			X	2
2ª	4	X			X	6
3ª	5	X			X	24
4ª	5	X			X	12

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Definição / Formalização:

Quadro 10 - Ficha resposta a ser preenchida na Atividade 04.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Fazendo rotações (giros) de 90°, as configurações ficam iguais?		Trocando as pessoas de lugar, os agrupamentos ficam iguais?		Total de permutações
		Sim	Não	Sim	Não	
1ª						
2ª						
3ª						
4ª						

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

O que é preciso fazer para determinar o número total de permutações circulares em cada uma das questões?

Conclusão:

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste produto educacional foi apresentar uma Sequência Didática para o ensino de permutação. Para a organização e elaboração de nossa sequência didática, tomamos como base as ideias de Zabala (1998) e Polya (1945) com o entendimento de Dante (2009), Onuchic *et al.* (2014) e Pinheiro e Sá (2010) sobre a Resolução de Problemas. A sequência didática foi composta de quatro atividades

relacionadas aos assuntos de permutação simples, permutação com repetição e permutação circular, que gerou um produto educacional desenvolvido em nosso experimento.

A partir de nossa sequência didática foi possível trazer para o estudante uma autonomia na resolução dos problemas, onde o mesmo pode buscar recursos como o material manipulável, raciocínio lógico, calculadora, entre outros. A partir dessa autonomia os alunos compreenderam os conceitos e as ideias sobre permutação. Assim é possível obter uma aprendizagem significativa a partir da sequência didática apoiada na resolução de problemas.

Os resultados da sequência didática foram positivos e mostraram avanços significativos dos estudantes participantes, evidenciados claramente com as observações e conclusões das atividades.

Assim, esperamos que este produto educacional fruto de nossa pesquisa possa contribuir com o ensino e aprendizagem na prática pedagógica de professores de matemática ao ministrarem o conteúdo de Permutação. Esperamos que professores do ensino médio e/ou fundamental, continuem em busca de novas metodologias de ensino que reconheça os aspectos sociais, o ambiente onde vive, o esforço e o ritmo de cada estudante.

Sobre a sequência didática que apresentamos referente ao ensino de Permutação, acreditamos que abra espaço para novas investigações sobre esta temática, cremos na continuidade deste estudo sobre a mesma metodologia de ensino, acrescentada de novos instrumentos, como por exemplo os jogos, outros materiais manipuláveis, aplicativos e softwares, acompanhando o conhecimento científico e tecnológico no ambiente escolar, sempre com o objetivo de melhorar o ensino.

5 REFERÊNCIAS

ARTIGUE, Michelle. Engenharia didáctica. In: BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

ARAÚJO, Gerliane Rocha de., Santos, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão. Materiais Manipuláveis como Recurso para a Resolução de Problemas de Combinatória por Alunos com Deficiência Visual. **Revista Educação Inclusiva** -

REIN, Campina Grande, PB, v.4, n.01, Edição Especial-2020, p.74-85. Disponível em: < <https://revista.uepb.edu.br/REIN/article/view/217/153>.> Acesso em: 23 de jan. 2021.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): Matemática. Ensino de primeira a quarta série.** Brasília: MEC, 1997. Brasília, DF: 1997. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>> Acesso em 25 de set de 2019.

BRASIL, **Lei de Diretrizes e B. Lei nº 9.394/96**, de 20 de dezembro de 1996. BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/lei9394_ldbn1.pdf > Acesso em 08 de set. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação/Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2017. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=85121-bncc-ensino-medio&category_slug=abril-2018-pdf&Itemid=30192 > Acesso em: 05 set. 2020.

BALESTRI, Rodrigo. **Matemática: interação e Tecnologia. – São Paulo:** Volume 2. Ed. Leya, 2016.

CARVALHO, Paulo Cerzar Pinto. **Métodos de Contagem e Probabilidade – Rio de Janeiro, IMPA, 2015.**

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Engenharia Didática: Um Referencial para Ação Investigativa e para Formação de Professores de Matemática. **ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp – v.13 – n. 23**, jun. 2005. Disponível em: <<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646981/13882> > acesso em: 28 de mar. 2020.

CONCEIÇÃO, Dérik de Carvalho. **O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio por Atividades.** 357f. (Mestrado) - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARÁ, Belém, 2019, Pará, 2019. Disponível em:< <https://www.google.com/search?ei=lbMLXoWCGZiV5OUP8su6uAo&q=uepa+disserta%C3%A7%C3%A3o+2019+derik+Ensino+de+An%C3%A1lise+combinat%C3%B3ria+no+ensino+M%C3%A9dio+por+atividades.&oq=uepa+disserta%C3%A7%C3%A3o+2019+derik+Ensino+de+An%C3%A1lise+combinat%C3%B3ria+no+ensino+M%C3%A9dio+por+atividades.>> Acesso em: 30 de dez. 2019.

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e Resolução de Problemas de Matemática: Teoria e Prática**, São Paulo: Ática, 2009.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações: ensino médio / Luiz Roberto Dante.** -- 3. ed. -- São Paulo: Ática, 2016.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues.** 5a ed. – Campinas, sp: Editora da Unicamp, 2011.

GERDENITS, Gisele Aparecida Massuela. **Raciocínio Combinatório: Uma**

Proposta para Professores de Matemática do Ensino Fundamental – Anos Finais. 2014.170f. Dissertação (Mestrado) - UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS, 2014, Sorocaba, São Paulo, 2014. Disponível em: <<https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/4471/6432.pdf?sequence=1&isAllowed=y>> Acesso em: 22 de dez. 2019.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática elementar 5: Combinatória, Probabilidade** – São Paulo: Atual, 1977.

IEZZI, Gelson ... [et al.]. **Matemática: ciência e aplicações: ensino médio, volume 2.** – 9. ed. – São Paulo: Saraiva, 2016.

MACEDO, Maurício dos Santos. **Uma Sequência Didática para o Ensino de Função Afim.** 156f. (Mestrado) - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARÁ, Belém, 2019, Pará, 2019.

Disponível em: <<https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/559531/1/Mauricio%20dos%20Santos%20Macedo.pdf>> Acesso em: 25 de fev 2021.

MENDES, Daniel Ferreira. **Abrangência das Permutações na Análise Combinatória** 68f. Dissertação (Mestrado) – UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, 2014, Brasília, Distrito Federal, 2014. Disponível em: <https://www.repositorio.unb.br/bitstream/10482/17318/1/2014_DanielFerreiraMendes.pdf>. Acesso em: 23 de dez. 2020.

MORAES, Carlos Magno de. **Ensino de Permutação Através da Resolução de Problemas.** 2022, 233 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2022.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa., Allevato, Norma Suely Gomes., Noguti, Fabiane Cristina Hopner., Justulin, Andresa Maria. (Orgs). **Resolução de Problemas – Teoria e Prática.** Jundiaí, Paco Editorial, 2014.

POLYA, G. (George). **A Arte de Resolver Problemas: Um Novo Aspecto do Método Matemático.** Tradução e Adaptação – Araújo, Heitor Lisboa de. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

ROSAS, Leonardo da Silva. **Ensino de análise combinatória por atividades.** 315f. (Mestrado) - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARÁ, Belém, 2018, Pará, 2018. Disponível em: <<https://doc-0k-0o-docs.googleusercontent.com/docs/securesc/qggk2acfbv25vehr731n378hq0v7nt1n/o0muisqd09ln8gj4tnqknubo4d67uu57/1560960000000/12949868903871117807/00193106216936576382/1N2brbZGRFCIRdGoGZv0rvMu9dj8Zbew9?h=18226202333151870530&e>> Acesso em: 29 de mai 2019.

SILVA, Renato Darcio Noletto. **Ensino de Pirâmides na construção de aplicativos para smartphones.** 2019. 293f. Dissertação (Mestrado) - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARÁ, Belém, Pará, 2019. Disponível em: <<https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/559520>> acesso em: 20 ago. 2020.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar.** Trad. Ernani F. da F. Rosa. Porto

Alegre: Artmed, 1998. Disponível em:
<https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4557186/mod_resource/content/1/texto11B_azabala_1998.pdf> acesso em: 03 de out. 2020.

Sobre os autores



Carlos Magno de Moraes Possui graduação em Licenciatura em Matemática pelo Centro Federal de Educação Tecnológica do Maranhão (CEFET – 2003). Especialização em Ensino de Matemática e Ciências Pelo Instituto de Ensino Superior Franciscano (IESF – 2007). Mestrado em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (PPGEM/UEPA – 2022). É membro do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA), onde atualmente é professor efetivo com dedicação exclusiva.



CINTHYA CUNHA MARADEI PEREIRA Possui graduação em Licenciatura em Matemática e em Tecnologia em Processamento de Dados, especialização em Informática Médica, Mestrado em Ciências da Computação e Doutorado em Genética e Biologia Molecular (Bioinformática). Atualmente é Professora da Universidade do Estado do Pará, Docente do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática/UEPA e vice-líder do Grupo de Pesquisa em Ensino de Matemática e Tecnologias.



ROBERTO PAULO BIBAS FIALHO Possui graduação em Arquitetura e Urbanismo pela União das Escolas Superiores do Pará (1989), graduação em Educação Artística do 1 Grau pela Universidade Federal do Pará (1993), graduação em Educação Artística Licenciatura Plena pela Universidade Federal do Pará (1994) e mestrado em Desenvolvimento Sustentável do Trópico Úmido pela Universidade Federal do Pará - UFPA (1998). É artista plástico e especialista em educação pela UNAMA (1994) e em design de móveis pela Universidade do Estado do Pará - UEPA (2006). Desenvolve atividades como professor adjunto na Universidade do Estado do Pará e professor titular da Faculdade de Estudos Avançados do Estado do Pará - FEAPA. Desenvolveu tese doutoral intitulada "A MATEMÁTICA DO SENSÍVEL PELAS MÃOS DO ARTESÃO: Marcas da aprendizagem matemática e da cultura material dos ceramistas de Icoaraci" (2013), junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM), pertencente à Universidade Federal do Pará. Atuou como coordenador de TCC no Curso de Bacharelado em Secretariado Executivo Trilíngue da UEPA do ano 2013 a 2018, onde atualmente

integra o colegiado deste curso. É também membro do Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, do CCSE/UEPA.



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Travessa: Djalma Dutra s/n – Telegrafo
66113-200 Belém – Pará