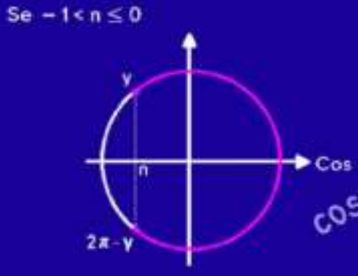
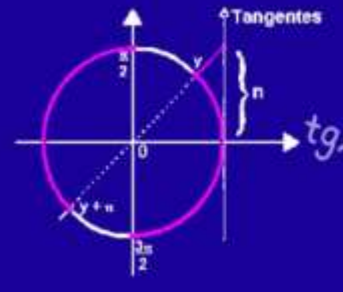
Israel Costa Lima
Ducival Carvalho Pereira

$\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$





$\cos x > \frac{1}{2}$

$tg x > \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

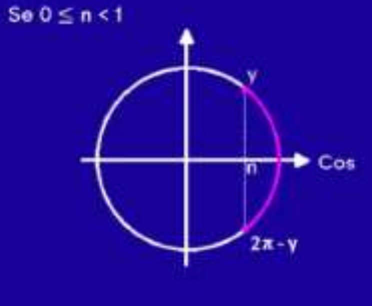
$sen x < -\frac{1}{2}$

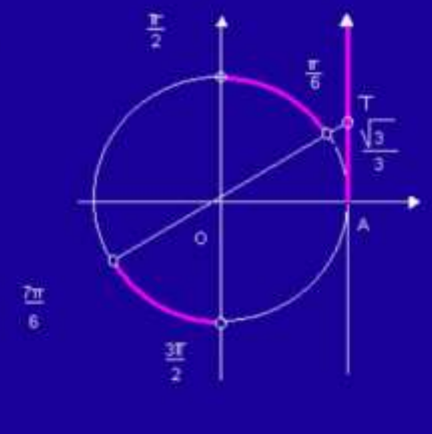
$S = \{ x \in R \mid 0 < x > 30° \text{ ou } 150° < x > 350° \}$

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Produto Educacional

$S = \{ x \in R \mid 0 < x > 30° \text{ ou } 150° < x > 350° \}$





$\cos x > \frac{1}{2}$

$sen x < -\frac{1}{2}$

$tg x < \sqrt{3}$

$S = \{ x \in R \mid \frac{\pi}{6} < x > \frac{5\pi}{6} \}$

$tg\, 4x < -\sqrt{3}$

Belém/PA
2022

Israel Costa Lima
Ducival Carvalho Pereira

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE INEQUAÇÃO TROGONOMÉTRICA

Produto Educacional

Produto educacional vinculado à dissertação "**O ensino de Inequação Trigonométrica por atividades**" do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.

BELÉM/PA
2021

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: **"O ENSINO DE INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS POR ATIVIDADE".**

Mestrando (a): **ISRAEL COSTA LIMA**

Data da avaliação: **09/03/2022**

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado à:*

( ) Estudantes do Ensino Fundamental ( ) Estudantes do Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental (X) Professores do Ensino Médio

( ) Outros: ____________________

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

(X) Sequência Didática ( ) Página na Internet ( ) Vídeo

( ) Texto Didático (alunos/professores) ( ) Jogo Didático ( ) Aplicativo

( ) Software ( ) Outro: ____________________

b) Possui URL: ( ) Sim, qual o URL: ____________________

( ) Não ( ) Não se aplica

c) *É coerente com a questão foco da pesquisa?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ____________________

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ____________________

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ____________________

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Possui sumário:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
b) *Possui orientações ao professor:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
c) *Possui orientações ao estudante:*	( ) Sim	( ) Não	(X) Não se aplica
d) *Possui objetivos/finalidades:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
e) *Possui referências:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
f) *Tamanho da letra acessível:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
g) *Ilustrações são adequadas:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) Foi aplicado?

(x) Sim, onde: Escola da rede estadual de ensino de Imperatriz - MA

( ) Não, justifique: ______________________________

( ) Não se aplica

b) Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?

(x) Sim, onde: Em escolas públicas ou privadas de outros municípios.

( ) Não, justifique: ______________________________

( ) Não se aplica

c) O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?

( ) Sim, onde: ______________________________

( ) Não, justifique: ______________________________

(x) Não se aplica

d) Em qual condição o produto educacional foi aplicado?

(x) na escola, como atividade regular de sala de aula

( ) na escola, como um curso extra

( ) outro: ______________________________

e) A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):

( ) Alunos do Ensino Fundamental

(x) Alunos do Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental

( ) Professores do Ensino Médio

( ) outros membros da comunidade escolar, tais como ____________________

( ) outros membros da comunidade, tais como ____________________

O produto educacional foi considerado:

(x) APROVADO ( ) APROVADO COM MODIFICAÇÕES ( ) REPROVADO

MEMBROS DA BANCA Assinaturas

Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira (Presidente)
Doutor em Matemática
IES de obtenção do título: UFRJ

Prof. Dr. Pedro Franco de Sá (Examinador 01)
Doutor em Educação
IES de obtenção do título: UFRN

Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias (Examinador 02)
Doutor em Engenharia Elétrica
IES de obtenção do título: UFPA

Clay Anderson Nunes Chagas
Reitor Universidade do Estado do Pará

Ilma Pastana Ferreira
Vice-Reitora Universidade do Estado do Pará

Renato da Costa Teixeira
Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação

Anderson Madson Oliveira Maia
Diretor do Centro de Ciências Sociais e Educação

Fábio José da Costa Alves
Coordenador do PPGEM

Natanael Freitas Cabral
Vice coordenador do PPGEM

Diagramação e Capa: Os autores
Revisão: Os autores

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Lima, Israel Costa
Sequência de atividades para o ensino de inequação trigonométrica / Israel Costa Lima, Ducival Carvalho Pereira - Belém, 2022.

Produto educacional vinculado à Dissertação “O Ensino de inequações trigonométricas por atividade do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, Belém, 2022.

ISBN: 978-65-84998-02-5

1. Inequações trigonométricas-Estudo e ensino (Ensino médio)-Imperatriz-MA. 2. Prática de ensino 3.Ensino por atividade. I. Pereira, Ducival Carvalho. II. Sá, Pedro Franco de. III. Título.

CDD. 23ºed. 512

Regina Coeli A. Ribeiro – CRB-2/739

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

A sequência didática para o ensino de Inequação trigonométrica foi construída no âmbito do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, como produto de uma pesquisa dissertação de mestrado.

Este produto educacional é destinado a escolas da rede pública e privada de ensino como recurso ou apoio didático para professores de Matemática no Ensino Médio para ensino e aprendizagem de Inequação Trigonométrica. Trata-se de um produto didático validado experimentalmente que apresentou efeitos positivos quantitativa e qualitativamente para o objetivo a que se destina: ensinar Inequação Trigonométrica por meio de atividades.

Ao longo do desenvolvimento deste produto identificou-se as dificuldades de ensino e aprendizagem no estudo de Inequações, em especial das trigonométricas. Com base na metodologia Ensino por Atividades, elaborou-se este produto educacional sobre Inequações Trigonométricas também com o intuito de atender as atuais orientações curriculares para o ensino de Matemática no Ensino Médio:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como Observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2017, p. 523).

O professor que adotar este produto estará proporcionando a seus educandos um instrumento de ensino e aprendizagem de Inequação Trigonométrica validado que explora dentre outras habilidades as seguintes:

- Construção autônoma do conhecimento matemático;
- Retomada de conhecimentos base;
- Formação, tratamento e conversão de representação gráfica, geométrica, algébrica e língua natural como forma de significação ao conhecimento apreendido.
- Interações entre estudantes entre os estudantes e com o professor.
- Melhora no desempenho quantitativo em exercícios sobre Inequações Trigonométricas.

Para dar suporte teórico ao professor que for fazer uso de nossa sequência de atividades realizou-se um estudo sobre o objeto matemático Inequação Trigonométrica na perspectiva histórica e epistemológica apresentados no capítulo 3.

A sequência didática construída possui quatro atividades que de forma gradual e colaborativa conduzem para o alcance das habilidades necessárias para a aprendizagem de Inequação Trigonométrica, seno, cosseno, tangente, quais sejam o reconhecimento dos tipos de desigualdade, as diferentes formas de representar suas soluções e os métodos resolutivos.

Todo material necessário para utilização deste produto educacional, bem como a fundamentação, instrução de uso é apresentado a seguir.

1. PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Este capítulo dedica-se em apresentar os aportes teóricos e metodológicos adotados para que fosse possível desenvolver o produto educacional para o ensino de Inequações Trigonométricas.

1. 1 ENSINO POR ATIVIDADES

Neste produto, buscou-se elaborar um produto educacional em que "[...] não basta, por exemplo, saber executar mecanicamente as inequações trigonométricas. É preciso ter o domínio total de sua aplicação em situações" (DANTE, 2010, p. 21). Por esse motivo, escolheu-se uma forma de organizar as atividades elaboradas de modo a promoverem a autonomia e a redescoberta do conhecimento pelo educando, como se propõe o Ensino por atividades: "uma prática metodológica que proporciona ao aluno construir sua aprendizagem, por meio da aquisição de conhecimentos e redescoberta de princípios" (SÁ, 2009, p. 14).

O Ensino por Atividades é uma metodologia de ensino que procura trabalhar os conteúdos Matemáticos, para que o aluno possa descobrir as leis gerais ou um padrão de solução com mediações do professor no processo de aprendizagem. De tal maneira, que por meio das atividades, os alunos descobrem que são sujeitos ativos e contribuintes de seu aprendizado.

Sá (2009, p.14-15) propõe que: "[...] a prática metodológica do ensino de Matemática por atividade dá oportunidade ao aluno de construir sua aprendizagem, por meio da aquisição de conhecimento e redescoberta de princípios". Esse tipo de abordagem interativa permite ao aluno realizar um grande número de experimentos, interpretá-los, para depois discuti-lo em classe com professores e colegas.

Nessa perspectiva de ensino, o professor não faz sua aula iniciando pela apresentação de conceitos, seguidas de definições, exemplos e exercícios. Neste caso, a aula é direcionada com a apresentação de diversas atividades e os itens interrogativos destas que vão induzindo os alunos a perceberem e descobrirem uma lei geral ou padrão de regularidade que venha auxiliar na compreensão e resolução da atividade. Através desse processo, o aluno vai construindo / descobrindo o objeto matemático estudado a partir do objetivo proposto para cada atividade. Deste modo:

> O professor geralmente, determina a agenda proposta, orienta a construção e valida os resultados, mas ao final das contas é o aluno quem deve fazer as construções. Dessa forma, as avaliações são feitas com o intuito de determinar o que o aluno construiu para que o professor possa determinar como continuar sua orientação (FOSSA, 2009, p. 11)

Essa característica do Ensino por Atividades confirma que o aluno pode desenvolver muitas habilidades como analisar, planejar, testar, concluir e generalizar. No entanto, ao fazer o planejamento e sua execução, alguns cuidados devem ser considerados, para haver aprendizado significativo e sem erros conceituais sobre o objeto de estudo.

Para estruturar a sequência de atividades considerou-se que "uma aula por meio de atividade de redescoberta tem os seguintes momentos: **organização**, **apresentação**, **execução**, **registro**, **análise** e **institucionalização"** (SÁ, 2019, p. 29). Para melhor explicar organiza-se esses momentos no quadro a seguir:

Quadro 1 - Organização do Ensino por Atividade de Redescoberta.

Momento	**Organização.**
Organização	Momento de instruir a formação de equipes podendo também ocorrer de forma individual. O professor deve dirigir as ações, orientar a formação das equipes sem imposições, demonstrar segurança e objetividade quanto ao roteiro a ser seguido.
Apresentação	Momento do professor distribuir o material necessário para a realização da atividade incluindo o roteiro da mesma. O roteiro pode ser impresso ou disponibilizado no quadro o que vai depender das condições estruturais da escola. Para atividades com procedimento mais longo é preferível que o roteiro seja disponibilizado de forma escrita para economizar tempo.
Execução	Corresponde à etapa da experimentação quando o educando manipula os materiais, realiza medidas e/ou cálculo, compara e/ou observa. O professor neste momento deve deixar as equipes trabalharem livremente, supervisionar o desenvolvimento das ações e auxiliar nas dúvidas, quando solicitado ou perceber dificuldade de execução, que possam surgir em cada equipe no ocorrer da realização do procedimento.
Registro	Corresponde ao momento da sistematização das informações na pesquisa cientifica. Neste momento espera-se que cada equipe ou indivíduo registre as informações obtidas durante a execução dos procedimentos no respectivo espaço destinado no roteiro.

Análise	Neste momento espera-se que cada equipe analise as informações que foram registradas e descubram uma relação válida entre as informações registradas. Este momento é crucial para o bom andamento da atividade devido, ser o momento quando os alunos deverão ter o primeiro acesso a informação desejada pelo professor.
Institucionalização	É o momento em que será produzida a conclusão oficial da turma a partir das conclusões que cada equipe elaborou no momento da análise. O momento da institucionalização corresponde grosso modo ao momento da elaboração das considerações finais de um trabalho cientifico.

Fonte: Adaptado de Sá (2019)

Portanto, percebemos que o Ensino por atividade como metodologia de ensino é capaz de conduzir o aluno a desenvolver ou ampliar o seu envolvimento pela matemática, uma vez que participa ativamente nos processos de descobertas e generalizações de padrões e leis bem como no desenvolvimento de habilidades previstas no currículo escolar conforme o nível de ensino e faixa etária.

Para o conteúdo de Inequações Trigonométricas o Ensino por Atividades foi adotado por se propor a criar um envolvimento com a matemática, explorando conhecimentos prévios e o entendimento de outros conteúdos matemáticos.

1. 2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

O objeto matemático deste produto, Inequações Trigonométricas, permite a exploração de diferentes formas de representar esse mesmo objeto, de forma algébrica, que é a mais usualmente encontrada em livros didáticos, mas também como auxiliar no entendimento do comportamento das funções trigonométricas de forma gráfica e geométrica. Explorar isso significa:

> Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático. (BRASIL, 2017, p. 523)

O filósofo, psicólogo de formação de professores Raymund Duval investigou a aprendizagem matemática e o papel dos registros de representação semiótica para a apreensão do conhecimento matemático, na França entre 1970 e 1995, quando publicou sua teoria na obra *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Nessa perspectiva, os estudos de Duval (2004) preconizam que um sistema cognitivo de representação necessita de três atividades cognitivas, as quais chama de semiosis: Formação, tratamento e conversão, e isso se deve ao fato de que:

> a construção de conceitos matemáticos depende muito da capacidade de utilizar vários Registros de Representação Semiótica dos referidos conceitos: representando-os em um dado registro, tratando tais representações no interior de um mesmo registro, e fazendo a conversão de um registro para outro". Assim, para o autor, estes três elementos estão profundamente ligados a aquisição conceitual de um objeto matemático, isto é, a noésis (DALLEMOLE, 2010, p. 59).

Ao adotar-se os registros de representações semióticas como forma de analisar os efeitos do produto educacional construído na aprendizagem de Inequações Trigonométricas, deseja-se explorar um nível de compreensão desse objeto sob diferentes perspectivas. Para Duval (2003) a análise semiótica é um importante instrumento de pesquisa para aquisição de conhecimentos matemáticos e organização de situações de aprendizagem por desenvolver capacidades cognitivas que favorecem o uso da linguagem matemática e a sua compreensão. Além disso, "o trânsito entre os diversos registros de representação pode favorecer que os estudantes tenham maior flexibilidade e fluidez na área e, ainda, promover o desenvolvimento do raciocínio" (BRASIL, 2017, p. 519).

As atividades cognitivas ou *Semiosis* que são exploradas em uma atividade que necessite de registros e representações são, segundo Duval (2004) e Dallemole (2010):

a) <u>Formação</u>: atividade em que se estabelece um sistema de representação que permita o reconhecimento das representações como representações, isto é, os registros de representação precisam ser identificáveis seja por meio de um texto em língua natural, de uma figura geométrica, de um gráfico, etc., respeitando regras inerentes a cada sistema de registros.
b) <u>Tratamento</u>: trata-se da transformação ao longo do desenvolvimento de uma mesma representação ou registro, por exemplo, resolver uma equação ou inequação ou reformular um enunciado dado, em outro.
c) <u>Conversão</u>: É a transformação externa, em outro tipo de registro conservando os mesmos objetos matemáticos, como por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica ou passar de uma

representação linguística em uma representação figural. A conversão se dá entre os registros, ou seja, é exterior ao registro de partida.

Na construção e na análise da sequência didática por atividades houve o planejamento da realização das atividades cognitivas descritas, em especial das formas algébricas, gráficas, geométricas e em língua natural, para o objeto matemático Inequações Trigonométricas. Ainda que o estudante nem sempre fale ou escreva em língua natural sobre o objeto matemático, o simples fato de interpretar os enunciados demonstra sua capacidade de tratar e converter para outros registros em linguagem matemática. No tratamento das representações é também o momento de se fazer a retomada de conhecimentos prévios, tais como: desigualdade, intervalo, equação trigonométrica, ciclo trigonométrico, etc.

Estando definido o percurso metodológico desta pesquisa, no capítulo a diante apresenta-se as análises prévias que nortearam tal percurso.

2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta seção apresentamos a materialização da sequência didática que se apropriou das fundamentações dos estudos apresentados na integra na dissertação disponível em: https://ccse.uepa.br/pmpem/?page_id=23.

2.1 ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Nesta seção, apresenta-se como foi construída a sequência didática para o ensino de Inequação Trigonométrica. A construção e análise a priori das atividades é uma fase da Engenharia Didática apresentada na seção 1.1 da dissertação que deu origem a este produto, em que se apresenta os objetivos de aprendizagem que foram previstos para cada atividade e uma previsão das possíveis situações e dificuldades que possam ocorrer ao longo do processo de experimentação do produto educacional que possui a estrutura apresentada no quadro 11.

Quadro 2 – Estrutura das atividades da Sequência Didática

ATIVIDADE	OBJETIVO	MATERIAL	TEMPO

1- Inequação seno	Descobrir uma relação entre as soluções de inequação do seno	-Ciclo Trigonométrico -Folha de atividade.; -Caneta lápis e borracha.	2 h/aula
2- Inequação cosseno	Descobrir uma relação entre as soluções de inequação do seno	-Ciclo Trigonométrico -Folha de atividade.; -Caneta lápis e borracha.	1 h/aula
3- Inequação Tangente	Descobrir uma relação entre as soluções de inequação do seno	-Ciclo Trigonométrico -Folha de atividade.; -Caneta lápis e borracha.	1 h/aula
4- Soluções de Inequações Trigonométricas	Desenvolver a conversão entre as representações das soluções da inequação trigonométrica, as quais sejam: No ciclo trigonométrico (geométrica e gáfica), na solução particular algébrica e no intervalo.	-Folha de atividade.; -Caneta lápis e borracha.	1 h/aula

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Perceba que na primeira atividade foi estimado um tempo maior por ser uma atividade em que os estudantes começariam a mobilizar os conhecimentos prévios que precisariam para compreender o novo assunto. Os conhecimentos prévios estão relacionados a conceitos básicos da trigonometria, tais como: razões trigonométricas, equações trigonométricas e reconhecimento e manipulação do ciclo trigonométrico como forma de representação geométrica e gráfica.

As quatro atividades foram construídas de modo a fazer os estudantes manipularem estaticamente o ciclo trigonométrico traçando sobre ele os intervalos de arcos para compreensão da solução da Inequação Trigonométrica. Essa solução é também explorada em diferentes registros de representação semiótica, explicado na seção 1.2, podendo ser escrito como representação algébrica, gráfica, geométrica e em intervalo.

Na construção da sequência didática foram dispostos diferentes momentos orientados pelo material impresso disponível no apêndice A, conforme o exposto na seção 1.1, momentos de **organização, apresentação**, **execução**, **registro**, **análise** e **institucionalização,** em que a organização e apresentação deve ser realizada oralmente pelo professor, orientando a formação de grupos ou não e as instruções iniciais do roteiro da atividade**.** Assim segue a análise a priori de cada uma das atividades.

ATIVIDADE 1

A atividade 1 tem o objetivo de descobrir uma relação entre as soluções da inequação seno, é possível por meio dessa atividade explorar a representação algébrica, gráfica e geométrica da inequação seno.

Na primeira questão da atividade 1 pede-se que com o auxílio do ciclo trigonométrico, determine-se a solução algébrica de cada inequação $sen\ a > k$ ou $sen\ a < k$ dada, no intervalo de [0, 2π]. É disponibilizado em cada item um ciclo trigonométrico para dar apoio visual na solução da inequação proposta. Os itens estão dispostos de forma a levar a percepção de que diferenças ocorrem quando se muda a desigualdade ou quando se muda o sinal de k.

Estimou-se que os estudantes precisassem de mediação do professor para relembrarem dos conhecimentos prévios, em especial as equações trigonométricas.

O reconhecimento do ciclo trigonométrico de raio unitário e sua divisão em quadrantes também foi uma dificuldade prevista na elaboração deste material. O eixo a que deveria se considerar com relação a inequação seno poderia ser uma dúvida dos educandos, para isso indicou-se enfatizar que a relação estabelecida deveria voltar o olhar para o eixo das ordenadas (eixo de “y”).

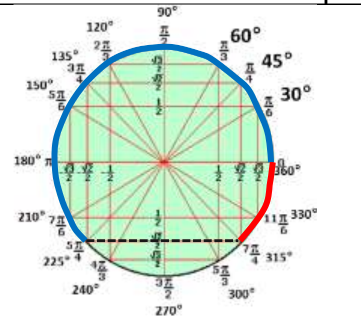
Na questão 2 solicita-se que com as informações obtidas na questão 1 fosse preenchido um quadro com as soluções. A intenção dessa questão é promover uma melhor observação do comportamento das soluções e assim poder estabelecer relações, semelhanças e diferenças entre os diferentes tipos de inequação seno e como esse comportamento interferia na representação da sua solução, na forma algébrica e na forma de intervalo. Esse momento seria para o educando um exercício da linguagem matemática adequada, com uso do simbolismo próprio e formal e com a explicação de seu significado. Como na questão 1 explora-se a representação algébrica da solução, presumiu-se que os estudantes não teriam grandes dificuldades em realizar a representação da solução em intervalo.

A questão 3 foi elaborada com a intenção de estimular a capacidade de observação e análise. Deseja-se que o estudante perceba o intervalo ou intervalos que satisfazem a solução na inequação seno, isto é, quando a desigualdade for (>k) deve ser observado o arcsenk acima de k no eixo y e quando a desigualdade for (< k) deve ser observado o arcsenk abaixo de k no eixo y.

Também foram previstas as situações em que a solução seria a união de dois intervalos, quando o arco alcança parte do quarto quadrante, é necessário que se represente o intervalo que pertence no quarto quadrante unido com o outro intervalo, acompanhando a ordem do sentido anti-horário.

Exemplo:

Quadro 3 – Possível erro de representação da Inequação Seno.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">$Sen\,x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$</td>
<td rowspan="2">
</td>
<td>$\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}/\mathbf{0} < \mathbf{x} < \frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{4}} \cup \frac{\mathbf{7\pi}}{\mathbf{4}} < \mathbf{x} < \mathbf{2\pi}\,\}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\mathbf{S} =]\mathbf{0}, \frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{4}}[\, \cup\,]\frac{\mathbf{7\pi}}{\mathbf{4}}, \mathbf{2\pi}[$</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Nessa situação o educando pode fazer equivocamente $\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}/\frac{\mathbf{7\pi}}{\mathbf{4}} < \mathbf{x} < \frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{4}}\}$ ou $\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}/\frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{4}} < \mathbf{x} < \frac{\mathbf{7\pi}}{\mathbf{4}}\}$, que é a solução de $Sen\,x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, nessa situação, caso a discussão entre os educandos não levasse a essa compreensão o professor deveria mediar a discussão para que realizassem a união dos intervalos de solução devidamente.

A questão 4 é o momento de socialização das discuções em que os estudantes deveriam chegar a um consenso que levasse a uma conclusão que demonstre a redescoberta sobre o que seria uma inequação seno e sua solução em diferentes representações. Ao final ocorre a formalização pelo professor, organizando a definição e a generalização de sua solução da inequação seno.

ATIVIDADE 2

A atividade 2 foi elaborada com o objetivo de descobrir uma relação entre as soluções de inequação do cosseno. Na primeira questão da atividade 1 pede-se que com o auxílio do ciclo trigonométrico, determine-se a solução algébrica de cada inequação $cos\, a > k$ ou $cos\, a < k$ dada, no intervalo de [0, 2π]. É disponibilizado em cada item um ciclo trigonométrico para dar apoio visual na solução da inequação proposta. Os itens estão dispostos de forma a levar a percepção de que diferenças ocorrem quando se muda a desigualdade ou quando se muda o sinal de k.

Nesta atividade estimou-se que os estudantes não tivessem mais dificuldades em manipular o ciclo trigonométrico e recorrer aos conhecimentos prévios.

O eixo a que se deva considerar com relação a inequação cosseno poderia ser uma dúvida dos educandos, para isso indicou-se enfatizar que a relação estabelecida deveria voltar o olhar para o eixo das abscissas (eixo de “x”).

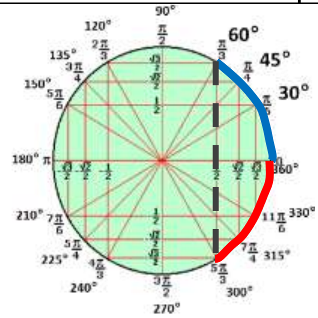
Na questão 2 solicita-se que com as informações obtidas na questão 1 fosse preenchido um quadro com as soluções. A intenção dessa questão é promover uma melhor observação do comportamento das soluções e assim poder estabelecer relações, semelhanças e diferenças entre os diferentes tipos de inequação cosseno e como esse comportamento interferia na representação da sua solução, na forma algébrica e na forma de intervalo.

A questão 3 foi elaborada com a intenção de estimular a capacidade de observação e análise. Desejou-se que o estudante percebesse o intervalo ou intervalos que satisfazem a solução na inequação cosseno, isto é, quando a desigualdade for (>k) deve ser observado o arccosk a direita de k no eixo x e quando a desigualdade for (< k) deve ser observado o arccosk a esquerda de k no eixo x.

Também foram consideradas as situações em que a solução é a união de dois intervalos, talvez pela experiência na atividade anterior o educando percebesse que quando o arco alcança primeiro e quarto quadrante passando ou não pelo segundo e terceiro quadrante de forma descontínua, é necessário que represente na ordem do sentido anti-horário a união do primeiro intervalo da solução com o segundo intervalo da solução.

Exemplo:

Quadro 4 - Possível erro de representação da Inequação Cosseno

$Cos\ x\ >\ \frac{1}{2}$		$\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}/\mathbf{0} < \mathbf{x} < \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}} \cup \frac{\mathbf{5}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}} < \mathbf{x} < \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\,\}$
		$\mathbf{S} =]\mathbf{0}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}[\ \cup\ ]\frac{\mathbf{5}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}, \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}[$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Nessa situação o professor deveria observar se equivocamente o educando estabeleceu $\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}/\frac{5\pi}{3} < \mathbf{x} < \frac{\pi}{3}\}$. Assim, nessa situação, caso a discussão entre os educandos não levasse a essa compreensão o professor deveria mediar a discussão para que realizassem a união dos intervalos de solução devidamente.

Na questão 4 os estudantes socializam as discuções e deveriam chegar um consenso que leve a uma conclusão que demonstre a redescoberta sobre o que seria uma inequação cosseno. Ao final o professor formaliza e organiza essa definição e a generalização da solução da inequação cosseno.

ATIVIDADE 3

A atividade 3 foi elaborada com a intenção de descobrir uma relação entre as soluções de inequação tangente. Nesta atividade é possível que seja necessário explorar os conhecimentos prévios sobre a representação da equação seno no ciclo trigonométrico, haja vista que agora o olhar sobre a correspondência do arco é voltado para a reta tangente ao ciclo e paralela ao eixo de y.

Na primeira questão da atividade 3 pede-se que com o auxílio do ciclo trigonométrico, determine-se a solução algébrica de cada inequação $tg\ a > k$ ou $tg\ a < k$ dada, no intervalo de [0, 2π]. É disponibilizado em cada item um ciclo trigonométrico para dar apoio visual na solução da inequação proposta. Os itens estão dispostos de forma a levar a percepção de que diferenças ocorrem quando se muda a desigualdade ou quando se muda o sinal de k.

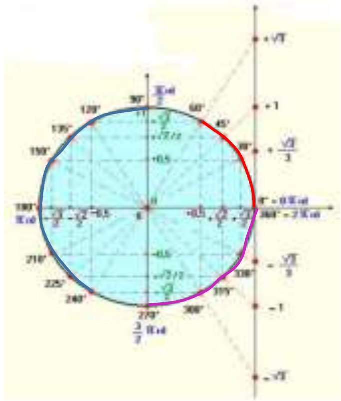
Na questão 2 solicita-se que com as informações obtidas na questão 1 fosse preenchido um quadro com as soluções. A intenção dessa questão é promover uma melhor observação do comportamento das soluções e assim poder estabelecer relações, semelhanças e diferenças entre os diferentes tipos de inequação tangente e como esse comportamento interferia na representação da sua solução, na forma algébrica e na forma de intervalo.

A questão 3 foi elaborada com a intenção de estimular a capacidade de observação e análise. Desejou-se que o estudante percebesse o intervalo ou intervalos que satisfazem a solução na inequação tangente, isto é, quando a desigualdade for (>k) deve ser observado o arccosk a direita de k no eixo x e quando a desigualdade for (< k) deve ser observado o arccosk a esquerda de k no eixo x.

Em tratando-se da inequação tangente o estudante deveria perceber a solução pode ter até três intervalos, entretanto, presumiu-se que por consta das experiências com as atividades anteriores represente naturalmente cada intervalo na ordem do sentido anti-horário.

Exemplo:

Quadro 5- Possível erro de representação da Inequação Tangente.

$Tg\ x < \sqrt{3}$		$S = \{x \in \mathbb{R} \ /\ 0 < x < \frac{\pi}{3} \cup \frac{\pi}{2} < x < \frac{4\pi}{3} \cup \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\}$
		$S =]0, \frac{\pi}{3}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Assim, nessa situação, caso a discussão entre os educandos não levasse a compreensão desejado o professor deveria mediar a discussão para que realizassem a união dos intervalos de solução devidamente.

Na questão 4 os estudantes socializam as discuções e deveriam chegar um consenso que leve a uma conclusão que demonstre a redescoberta sobre o que seria uma inequação tangente. Ao final o professor formaliza e organiza essa definição e a generalização da solução da inequação tangente.

ATIVIDADE 4

A atividade 4 tem o objetivo de desenvolver a conversão entre as representações das soluções da inequação trigonométrica, as quais sejam: no ciclo trigonométrico (geométrica e gráfica), na solução particular algébrica e no intervalo. Aliado a isso, nessa atividade, o estudante recorreria ao conteúdo das três atividades anteriores, aprofundando as formas de calcular e representar diferentes inequações trigonométricas sabendo qual se refere ao eixo x, qual se refere ao eixo y e qual se refere a reta tangente ao ciclo.

Na atividade 4, os momentos de execução e registro estão na questão 1, onde o educando poderia converter a representação de modo inverso a que se estava fazendo nas atividades anteriores, isto é, agora explora-se a conversão da representação algébrica para a gráfica e geométrica e da solução da inequação para a inequação, sendo esta última situação a que pudessem ter maior dificuldade em realizar.

Na questão 2, o professor poderia verificar por meio do registro em língua materna quais as estratégias adotadas pelos educandos e se não haveria equívocos em sua maneira de resolver cada inequação. Na questão 3, as dúvidas deveriam estar sanadas e a turma ter chegado a um consenso de como reconhecer cada uma das inequações e como estabelecer e converter suas soluções em diferentes representações.

Quadro 6 – Dificuldades e mediações

Atividade	**Possíveis dificuldades**	**Formas de mediação**
1-Inequação seno	-Retomada dos conhecimentos prévios sobre equação seno. -Manipulação do ciclo trigonométrico. -Compreensão da referência ao eixo y -Reconhecimento de que a solução possa ter mais de um intervalo. -Definição da ordem de representação dos intervalos da solução.	-Retomada do reconhecimento do ciclo trigonométrico unitário e suas características. (quadrantes, arcos, eixos, etc); - Ênfase no olhar para o eixo y. -Ênfase na ordem dos quadrantes pelo sentido anti-horário.
2-Inequação cosseno	-Retomada dos conhecimentos prévios sobre equação cosseno. -Compreensão da referência ao eixo x.	-Diferenciar da atividade 1. - Ênfase no olhar para o eixo x.

	-Reconhecimento de que a solução possa ter mais de um intervalo. -Definição da ordem de representação dos intervalos da solução.	
3-Inequação Tangente	-Retomada dos conhecimentos prévios sobre equação tangente. -Compreensão da referência à reta tangente ao ciclo. -Reconhecimento de que a solução possa ter até três intervalos.	-Retomada do reconhecimento sobre equação tangente; - Ênfase no olhar para o eixo da reta tangente ao ciclo trigonométrico.
4-Soluções de Inequações Trigonométricas	-Recorrência ao conteúdo das três atividades anteriores. -Decisão sobre qual eixo de referência: x, y ou reta tangente. -Realizar a o processo inverso de conversão, da solução para a inequação.	- Discussão sobre o que foi estudado nas atividades anteriores, suas diferenças e semelhanças.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Note no quadro acima que se previu que algumas dificuldades poderiam ser minimizadas ao longo da execução das atividades e que, portanto, a intensidade de interferência do professor nas redescobertas dos educandos também tenderia a diminuir. De modo que essa interferência seria não em diretamente em responder as dúvidas dos educandos, mas levá-los a recorrerem aos conhecimentos que os conduziriam para o alcance de tais respostas.

2. 2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE INEQUAÇÃO TRIGONOMÉTRICA

SEQUENCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Identificação da Escola: ____

Identificação do estudante: _____________________________________

Data: ____/_____/_____.

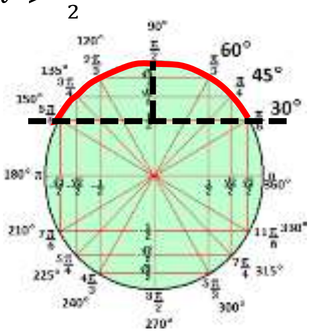
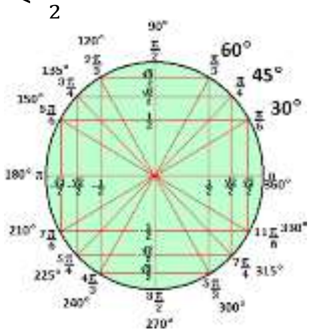
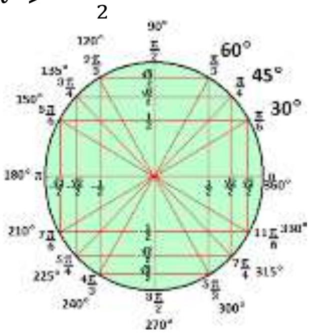
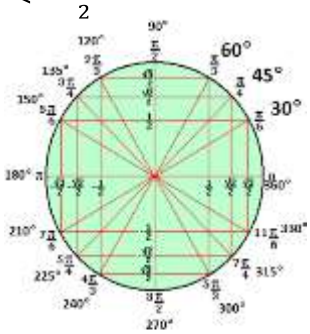
Atividade 1- Inequação do seno

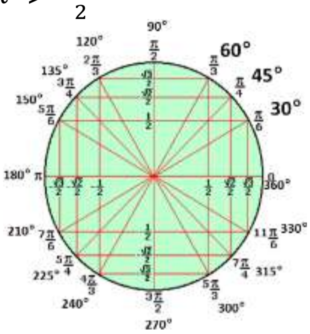
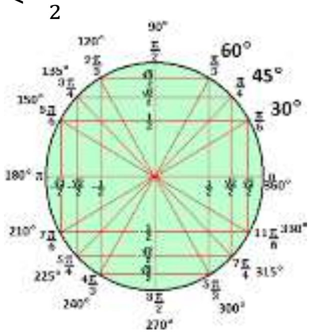
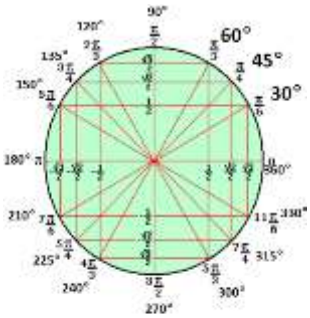
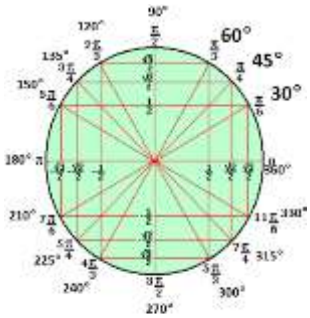
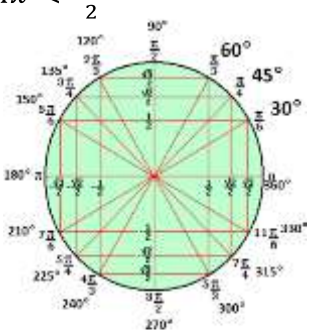
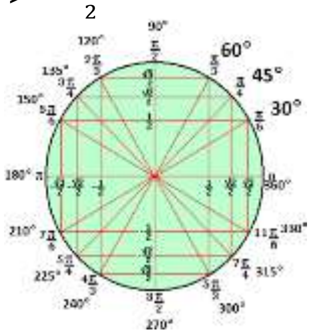
Objetivo: Descobrir uma relação entre as soluções de inequação do seno

Material: Ciclo Trigonométrico e folha de atividade.

Procedimento: Os estudantes formarão duplas ou trios e deverão resolver as questões a seguir com o apoio visual do ciclo trigonométrico.

1. (Execução) Com o auxílio do ciclo trigonométrico, determine a solução algébrica de cada inequação $sen\ a > k$ ou $sen\ a < k$ dada, no intervalo de [0, 2π].

a) $Sen\ x\ > \frac{1}{2}$  $S = \{x \in \mathbb{R}\ /\ \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}\}$	b) $Sen\ x\ < \frac{1}{2}$ 
c) $Sen\ x\ > -\frac{1}{2}$ 	d) $Sen\ x\ < -\frac{1}{2}$ 

e) $Sen\ x\ > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 	f) $Sen\ x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 
g) $Sen\ 2x < \ -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 	h) $Sen\ 3x > -\ \frac{\sqrt{2}}{2}$ 
i) $Sen\ 4x < \ \frac{\sqrt{3}}{2}$ 	j) $Sen\ 5x > \ -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 

2. (Registro) Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

Inequação	A inequação é da forma:		Raízes	Intervalo da solução
	$sen\,a\ >\ k$	$sen\,a\ <\ k$		
$a)\ Sen\,x\ >\ \frac{1}{2}$	X		$x=\frac{\pi}{6}\ e$ $x=\frac{5\pi}{6}$	S= $]\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}[$
$b)\ Sen\,x < \frac{1}{2}$				
$c)\ Sen\,x\ > -\frac{1}{2}$				
$d)\ Sen\,x <\ -\frac{1}{2}$				
$e)\ Sen\,x\ >\ \frac{\sqrt{2}}{2}$				
$f)\ Sen\,x < \frac{\sqrt{2}}{2}$				
$g)\ Sen\ 2x\ > -\frac{\sqrt{2}}{2}$				
$h)\ Sen\ 3x <\ -\frac{\sqrt{2}}{2}$				
$i)\ Sen\ 4x\ >\ \frac{\sqrt{3}}{2}$				
$j)\ Sen\ 5x <\ -\frac{\sqrt{3}}{2}$				

3) (Análise) Analise o quadro e responda:

a) Você consegue observar alguma relação comum entre as inequações seno de mesma forma? Qual?

b) Consegue analisar o que muda na solução quando muda apenas a desigualdade?

4) (Institucionalização) Discuta com seus colegas, depois sintetize uma conclusão.

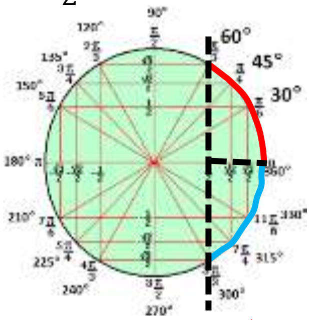
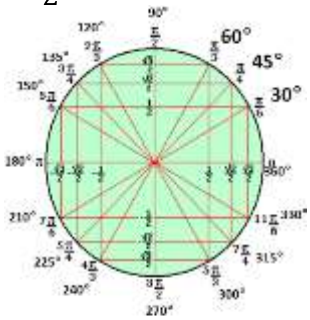
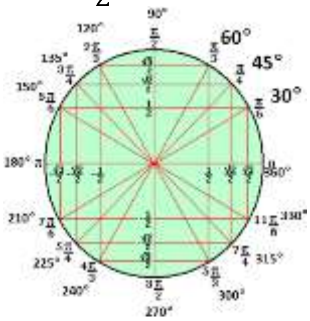
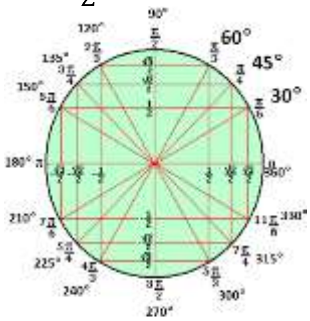
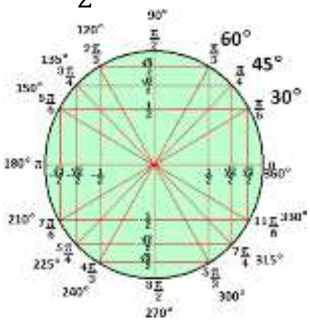
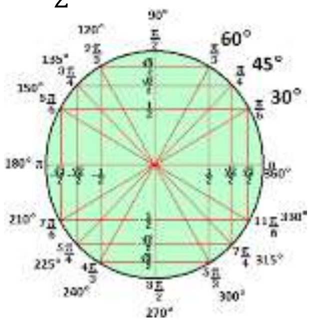
Formalização do Professor

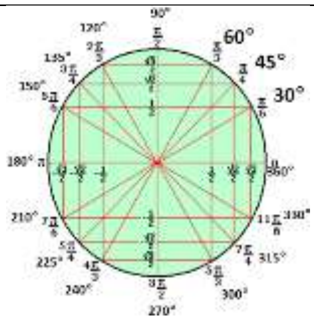
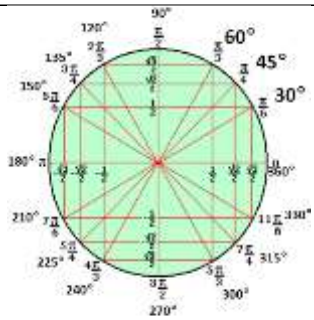
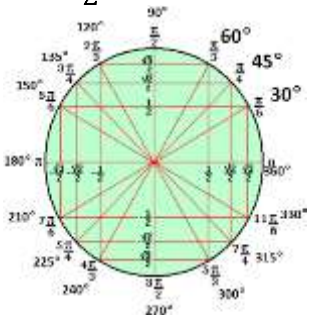
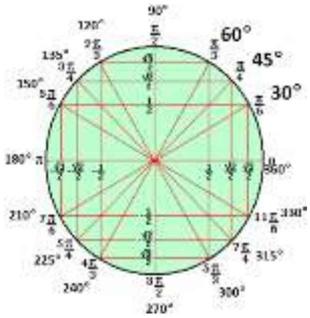
Atividade 2: Inequação do Cosseno

Objetivo: Descobrir uma relação entre as soluções de inequações do cosseno
Material: Ciclo Trigonométrico e folha de atividade.

Procedimento: Os estudantes formarão duplas ou trios e deverão resolver as questões a seguir com o apoio visual do ciclo trigonométrico.

1)(Execução) Com o auxílio geométrico do ciclo trigonométrico determine a solução de cada inequação $cos\ a > k$ ou $cos\ a < k$ dada, no intervalo de [0, 2π].

$a) Cos\ x\ > \frac{1}{2}$  $S = \{x \epsilon \mathbb{R}\ /\ 0 < x < \frac{\pi}{3} \cup \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\}$	$b) Cos\ x\ < \frac{1}{2}$ 
$c)\ Cos\ x\ > -\frac{1}{2}$ 	$d)\ Cos\ x\ < -\frac{1}{2}$ 
$e)\ Cos\ x\ > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 	$f)\ Cos\ x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 
$g)\ Cos\ 2x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$h)\ Cos\ 3x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

	
$i)\ Cos\ 4x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 	$j)\ Cos\ 5x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 

2. (Registro) Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

Inequação	**A inequação é da forma:**		**Raízes**	**Intervalo da solução**
	$sen\ a\ >\ k$	$sen\ a\ <\ k$		
$a)\ Cos\ x\ >\ \frac{1}{2}$	X		$x = \frac{\pi}{3}\ e$ $x = \frac{5\pi}{3}$	$S =]\,0\,, \frac{\pi}{3}\,[\cup]\,\frac{5\pi}{3}, 2\pi[$
$b)\ Cos\ x < \frac{1}{2}$				
$c)\ Cos\ x\ > -\frac{1}{2}$				
$d)\ Cos\ x < -\frac{1}{2}$				
$e)\ Cos\ x\ > \frac{\sqrt{2}}{2}$				
$f)\ Cos\ x < \frac{\sqrt{2}}{2}$				

$g)\ Cos\ 2x\ > -\frac{\sqrt{2}}{2}$				
$h)\ Cos\ 3x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$				
$i)\ Cos\ 4x\ > \frac{\sqrt{3}}{2}$				
$j)\ Cos\ 5x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$				

(Análise) Analise o quadro e responda:

a) Você consegue observar alguma relação comum entre as inequações cosseno de mesma forma? Qual?

b) Consegue analisar o que muda na solução quando muda apenas a desigualdade?

4) (Institucionalização) Discuta com seus colegas, depois sintetize uma conclusão.

Formalização do Professor

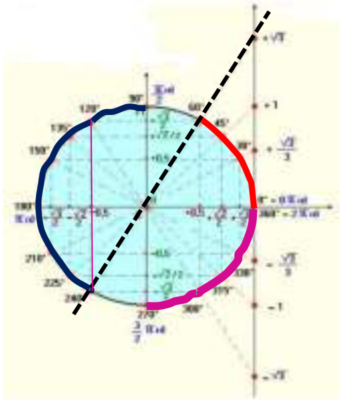
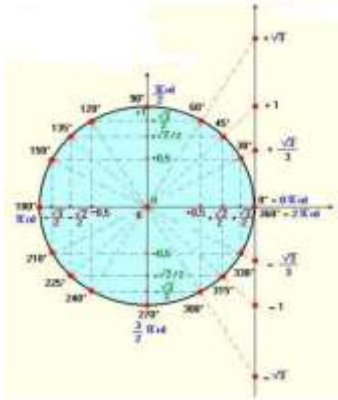
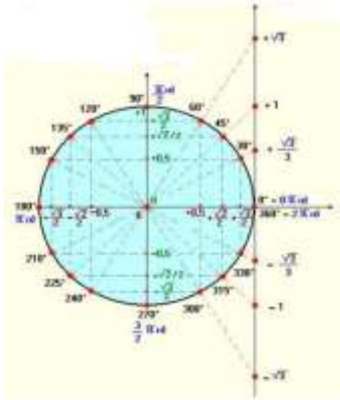
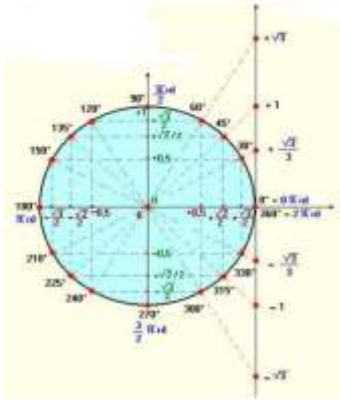
Atividade 3: Inequação da Tangente

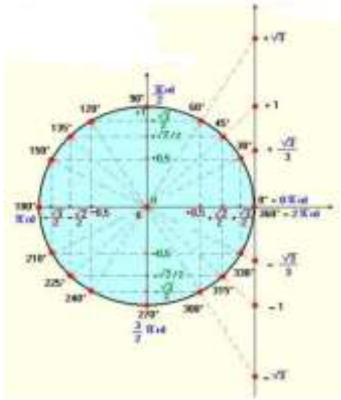
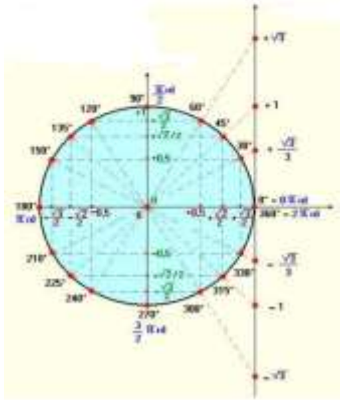
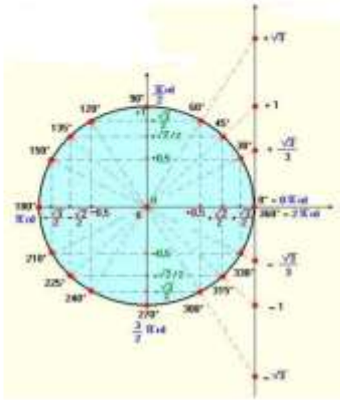
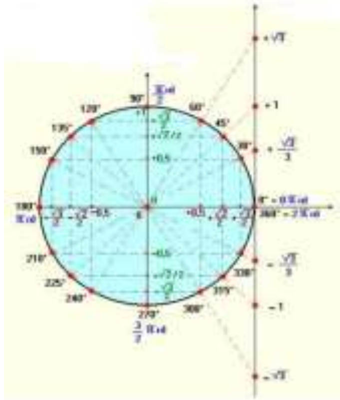
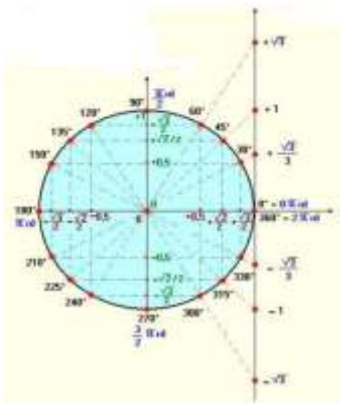
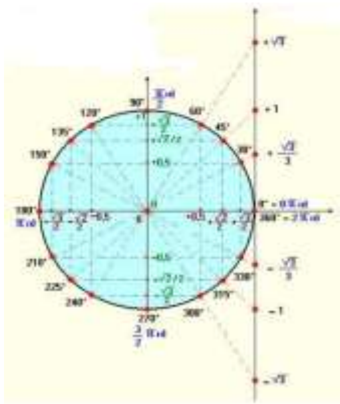
Objetivo: Descobrir uma relação entre as soluções de inequações tangentes.

Material: Ciclo Trigonométrico e folha de atividade.

Procedimento: Os estudantes formarão duplas ou trios e deverão resolver as questões a seguir com o apoio visual do ciclo trigonométrico e do gráfico da função tangente.

1. (Execução) Com o auxílio geométrico do ciclo trigonométrico determine a solução de cada inequação $tg\ a > k$ ou $tg\ a < k$ dada, no intervalo [0,2π].

a) $Tg\ x < \sqrt{3}$  $S = \{x \in \mathbb{R}\ /\ 0 < x < \frac{\pi}{3} \cup \frac{\pi}{2} < x < \frac{4\pi}{3} \cup \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\}$	b) $Tg\ x > \sqrt{3}$ 
c) $Tg\ x < 1$ 	d) $Tg\ x > 1$ 
e) $Tg\ x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$	f) $Tg\ x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$

	
g) $Tg\ 2\ x < -1$ 	h) $Tg\ 3x > 1$ 
i) $Tg\ 4x < -\sqrt{3}$ 	j) $Tg\ 5x > -\sqrt{3}$ 

2) (Registro) Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

Inequação	A inequação é da forma:		Raízes	Intervalo da solução
	$Tg\ a > k$	$Tg\ a < k$		
a) $Tg\ x < \sqrt{3}$		X	$x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{4\pi}{3}$	$S =]\,0, \frac{\pi}{3}\,[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$
b) $Tg\ x < \sqrt{3}$				
c) $Tg\ x < 1$				
d) $Tg\ x > 1$				
e) $Tg\ x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$				
f) $Tg\ x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$				
g) $Tg\ 2x < -1$				
h) $Tg\ 3x > 1$				
i) $Tg\ 4x < -\sqrt{3}$				
j) $Tg\ 5x > -\sqrt{3}$				

(Análise) Analise o quadro e responda:

a) Você consegue observar alguma relação comum entre as inequações cosseno de mesma forma? Qual?

b) Consegue analisar o que muda na solução quando muda apenas a desigualdade?

4) (Institucionalização) Discuta com seus colegas, depois sintetize uma conclusão.

Formalização do Professor

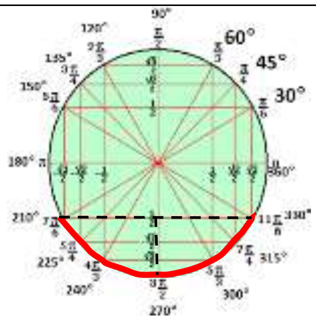
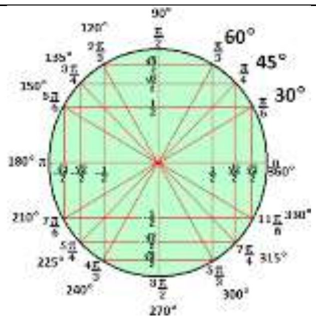
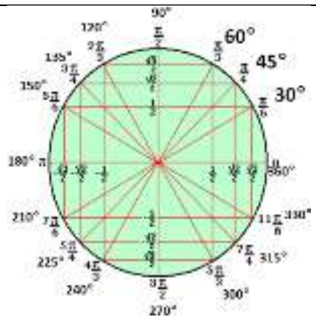
Atividade 4- Soluções de Inequações Trigonométricas

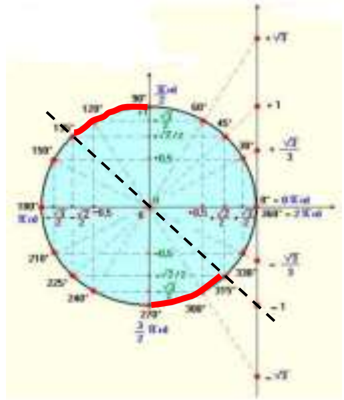
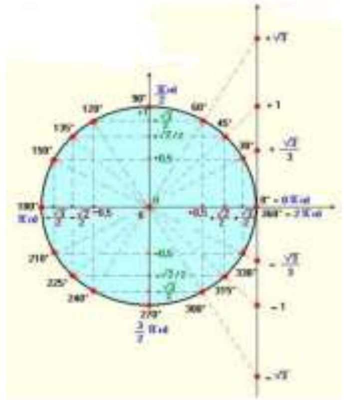
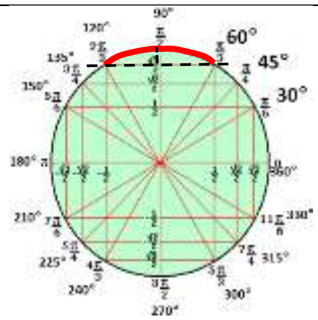
Objetivo: Desenvolver a conversão entre as representações das soluções da inequação trigonométrica, as quais sejam: No ciclo trigonométrico (geométrica), na solução particular algébrica e no intervalo.

Material: Folha de atividade e caneta.

Procedimento: O professor disponibilizará para cada estudante (ou grupo de estudantes) a folha de atividade que apresenta um quadro a ser completado com um ou mais tipos de representação conforme o que foi estudado nas atividades anteriores.

1) (Execução e Registro) Complete o quadro com a inequação trigonométrica ou com alguma representação da inequação trigonométrica: gráfica no ciclo trigonométrico, na forma algébrica ou na forma de intervalo.

Inequação	**Ciclo trigonométrico**	**Solução algébrica e Solução no intervalo**
$sen\, x < -\frac{1}{2}$		
$Cos\, 2x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\mathbf{S = \{x \in \mathbb{R} / \frac{5\pi}{12} < x < \frac{7\pi}{12}\}}$ $\boldsymbol{S =]\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}[}$
$Cos\, x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$		
		$\mathbf{S = \{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3} \cup \frac{3\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{4}\}}$

		$S =]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}[\ ou\ ]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}[$
$Tg\ 2x < \sqrt{3}$		
		

2) (Análise) Você conseguiu criar uma estratégia para reconhecer e fazer a conversão das representações das solução nas inequações trigonométricas do quadro? Explique.

3) (Institucionalização) Discuta com seus colegas, depois sintetize uma conclusão.

Formalização do Professor

2. 3 QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO

SEQUENCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Identificação da Escola: ____

Identificação do estudante: _____________________________________

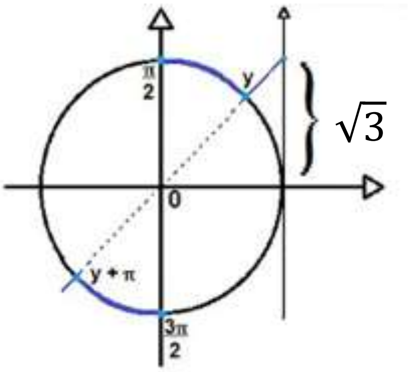
Data: ____/_____/_____.

ATIVIDADE DE APROFUNDAMENTO

3) Dada a inequação $Cos\,\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}\ x \in [0, 2\pi]$, para quais valores de x a solução é negativa? Responda e ilustre sua resposta.

4) Dada a inequação $sen\ 2x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, com $x \in [0, 2\pi]$, para quais valores a solução é positiva? Responda e ilustre sua resposta.

5) Represente a inequação tangente que tem a solução x, para 0 ≤ x ≤ 2π, ilustrada na figura.



6) Represente uma inequação seno cuja solução x, para $0 \leq x \leq 2\pi$, seja negativa. Responda e ilustre sua resposta.

5) Resolva a inequação $tg\ x \geq \sqrt{3}$ para $0 \leq x \leq 2\pi$. Ilustre no ciclo trigonométrico.

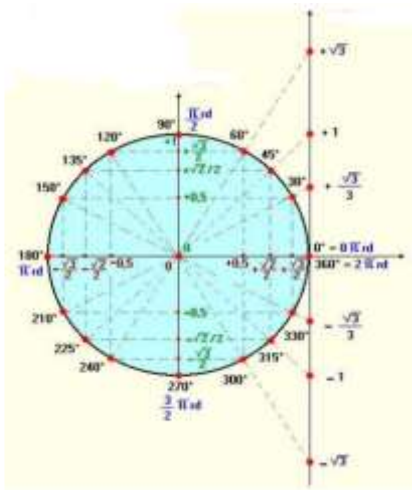
a) S = $\left\{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}\ ou\ \frac{4\pi}{3} \leq x < \frac{3\pi}{2}\right\}$

b) S = $\left\{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{3}\ ou\ \frac{4\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{5}\right\}$

c) S = $\left\{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{2}\ ou\ \frac{4\pi}{5} \leq x < \frac{3\pi}{4}\right\}$

d) S = $\left\{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}\ ou\ \frac{2\pi}{3} \leq x < \frac{4\pi}{2}\right\}$

e) S = $\left\{x \in \mathbb{R} / \frac{2\pi}{3} \leq x < \frac{3\pi}{2}\ ou\ \frac{4\pi}{3} \leq x < \frac{5\pi}{2}\right\}$



6) Resolva a inequação $\cos x < -\frac{1}{2}$ no intervalo $[0,2\pi]$. Ilustre sua resposta no ciclo trigonométrico.

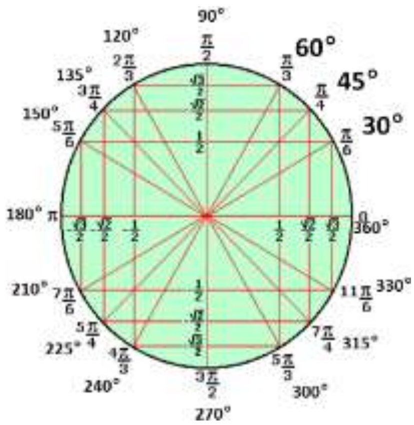
a) [π/3,5 π/3]

b) [π/4, π/3]

c) [π/3. π/2]

d) [π/3,5 π/3]

e)]2 π/3,4 π/3[



7) As soluções de $\frac{1}{2} < sen\ x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ no intervalo $[0\ , 2\pi\ [$, são todas as medidas x , em radianos, tais que:

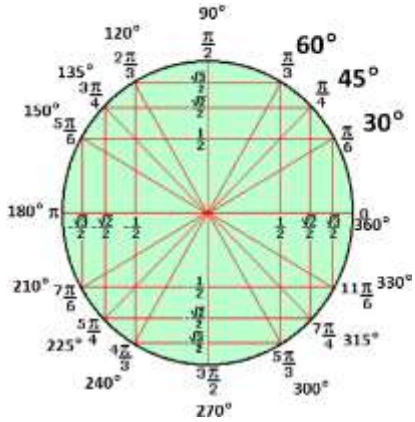
a) $\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} \leq x < \frac{5\pi}{6}$

b) $\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} < x \leq \frac{5\pi}{6}$

c) $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} < x \leq \frac{3\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{3}$

e) $\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}$



8) Determinar a solução da inequação $\tan 2x < \sqrt{3}$. Ilustre no ciclo trigonométrico.

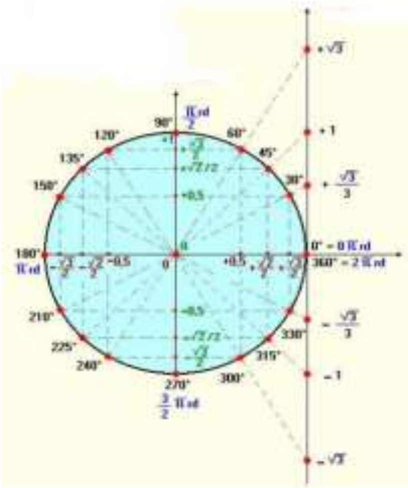
a) [0, π/6[U[7 π/6,3 π/2[

b) [π/2, π]U[3 π/2,2 π[

c) [0, π/4[U] π/2,5 π/4[

d)]0, π/3[U] π/2,4 π/3[

e)]0, π/3[U]3 π/2,2 π[



9) Marque o item que apresenta o maior valor de x, com $0 \leq x \leq 2\pi$, tal que $cos\ x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ilustre.

$a)\ \frac{3\pi}{4}$

$b)\ \frac{2\pi}{3}$

$c)\ \frac{\pi}{4}$

$d)\ \frac{5\pi}{4}$

$e)\ \frac{3\pi}{2}$

3. ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO: Inequações Trigonométricas

Neste capítulo, apresenta-se o estudo sobre Inequações Trigonométricas, o objeto matemático sobre o qual este produto educacional foi desenvolvido.

3.1 ESTUDO HISTÓRICO

Para apresentar um estudo mais minucioso sobre o objeto matemático Inequações Trigonométricas realizou-se uma pesquisa inicial um resgate da construção histórica do desenvolvimento da trigonometria, por ser a base para o ensino de Inequações Trigonométricas considerando sua importância para a constituição do saber matemático e, do ponto de vista didático-pedagógico, por promover a capacidade de relacionar raciocínio algébrico, geométrico e gráfico proporcionando também o desenvolvimento da capacidade de abstração, necessária para diversas circunstâncias (Feijó, 2018, p. 53).

Brasil (2017) desafia professores de matemática a mediarem em seus alunos habilidades de resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com apoio da geometria, bem como identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos.

Para que essas habilidades de realizar e interpretar diferentes registros e representações possam ser adquiridas pelo aluno, é necessário também que tais elementos do ensino de temas de trigonometria não sejam obstáculos epistemológicos para o professor de Matemática ensinar os assuntos subsequentes.

Valendo-nos da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval e da análise dos obstáculos também vividos pelos matemáticos no passado, foi possível fundamentar os objetivos de aprendizagem do produto educacional construído a partir desta investigação sob o olhar da História da Matemática.

Para tanto, inicialmente, realizou-se um levantamento bibliográfico sobre história da trigonometria por meio dos obstáculos epistemológicos dos registros e representações semióticas. Em seguida traçou-se uma linha do tempo onde destaca-se os personagens que marcaram a construção histórica da trigonometria no que tange a semiótica desse objeto matemático.

Por fim, faz-se a síntese e análise dos resultados obtidos ressaltando as contribuições de cada personagem para a compreensão de como os obstáculos de aprendizagem se dão e como isso pode ajudar professores de matemática que lerem este trabalho a entenderem as dificuldades de aprendizagem de seus alunos ao ensinarem temas de trigonometria, em especial Inequação Trigonométrica.

Na seção 1.3 desta dissertação fala-se da teoria dos registros e representações semióticas, que se retoma aqui. Raymund Duval é filósofo, psicólogo de formação de professores e investigou a aprendizagem matemática e o papel dos registros de representação semiótica para a apreensão do conhecimento matemático, na França entre 1970 e 1995, quando publicou sua teoria na obra *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.*

Em síntese e para o que diz respeito desta pesquisa, Duval defendia que:

> para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, ele deve permitir as três atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiosis: formação (identificação do objeto matemático representado), tratamento (operação cognitiva que vai compreender uma transformação do registro representação no interior do mesmo sistema semiótico de representação em que foi formado) e conversão (transformação de um dado registro de representação, pertencente a um sistema semiótico em outro registro, pertencente a outro sistema semiótico). (DIONÍZIO e BRANDT, 2011, p.4411)

Neste sentido, faz-se uma discussão acerca dos elementos das *semiosis,* que ao longo da descrição histórica caracteriza como elementos de *formação* (F), *tratamento* (T) e *conversão* (C) dos registros e representações dos estudos de trigonometria feitas ao longo da história, em especial aquelas tidas nas diretrizes da educação como fundamentais, tais como: resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (F); Realizar (T) e comparar (C) representações com funções periódicas nos ciclos trigonométricos, no plano cartesiano, com apoio da geometria; identificar as características fundamentais das funções trigonométricas (F) por meio da Realização (T) e comparação (C) das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, geometricamente e em linguagem materna.

Aliado a isso, também se dá destaque à História da Matemática como recurso enriquecedor dos conhecimentos docentes, na perspectiva de compreender que a matemática, nasceu de necessidades práticas de cada povo, a cada nova situação, impulsionando o progresso científico da humanidade como afirma D'Ambrósio:

> As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber. (D'AMBRÓSIO, 1999, p. 97 apud CHAQUIAM, 2017, p. 16).

É nessa perspectiva de D'Ambrósio, de que a História desempenha na formação do professor um revestimento de significado a seu saber matemático e a sua prática de ensino. Assim traça-se a seguir uma linha do tempo, destacando alguns personagens específicos que de alguma forma trouxeram contribuições importantes para nosso objeto.

Ao longo da apresentação dos personagens destacados nos períodos históricos, faz-se discussões acerca dos obstáculos epistemológicos encontrados e/ou superados sob a óptica da semiótica.

Para cada período histórico destaca-se personagens cujos desafios e descobertas contribuíram para a formação epistemológica no que tange a formação, tratamento e conversão de registros e representações semióticas que levaram a constituição de estudos em trigonometria.

Os personagens aos que se dá destaque a seguir representam um marco ao longo da história no que tange aos obstáculos epistemológicos superados e ao novo registro de representação semiótica por eles utilizados. Situa-se pelo menos um personagem em cada período histórico, em que também discorre-se sobre o cenário sócio-cultural da época, para enfatizar de que maneira sua contribuição marcou na construção das representações semióticas da trigonometria.

Antiguidade

A antiguidade, marcada pelo desenvolvimento da escrita a cerca de 4000 a. C., foi um período de notável progresso cultural trazendo uso da roda e dos metais, e, tendo seu término marcado pela queda do império romano em 476 d. C.

A origem das noções de funções trigonométricas não é precisa. Seu surgimento veio com primeiros estudos em trigonometria pela necessidade de se medir distâncias inacessíveis em problemas que sugiram na agricultura, agronomia, navegação e medicina. Os primeiros registros de representações trigonométricas dedicam-se a babilônios e egípcios.

Na Babilônia havia grande interesse pela Astronomia, por suas ligações com os conceitos religiosos e por suas conexões com o calendário, as épocas de plantio e estações do ano. Em 28 a. C. foi construído um calendário astrológico e elaboraram uma tábua de eclipses lunares.

No Egito, a trigonometria foi utilizada nas medições das pirâmides e em 1500 a.C., aproximadamente, a ideia de associar sombras projetadas por uma vara vertical a sequências numéricas cujos comprimentos representavam a passagem das horas (relógios de sol ou gnômon), anunciando a chegada, séculos depois, das funções tangente e cotangente. (Costa, 1997, p. 10).

Segundo Mineiro (2019), nesse contexto, ao realizarem relações entre grandezas por meio dos termos “maior que” e ”menor que” deu-se início aos estudos de análise sobre os números reais, adotando-se intervalos numéricos ao estabelecerem as desigualdades, o que entendemos ser a gênese das relações de inequação.

- **Eratóstenes de Cirene (276 - 196 a.C.) -** O grego Eratóstenes, por volta de 200 a. C., ao medir a circunferência da Terra, fez o tratamento e conversão de registros representativos utilizando relações entre ângulos e cordas, semelhança de triângulos e razões trigonométricas. Com esse feito, Eratóstenes marcou o fechamento de dois séculos de lentos avanços na trigonometria.

Para Boyer (2012, p. 124), de Hipócrates a Eratóstenes, embora os gregos estudassem as relações entre retas e círculos e as aplicassem na Astronomia, disso não resultou uma trigonometria sistemática, indicando que muito se precisava avançar no que diz respeito a formalização de estudos em trigonometria, sendo este um obstáculo para que se avançasse mais.

- **Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.) -** Hiparco ficou conhecido como “o pai da trigonometria” quando ampliou a ideia de Hipsícles (180 a. C.) de dividir qualquer círculo em 360 partes e a partir disso construir a primeira tabela da trigonometria, mais uma forma de representação e registro trigonométrico.

Para formular tais tabelas ele olhava para o céu e imaginava triângulos traçados sobre a esfera e assim relacionava corpos celestes uns com os outros.

> Hiparco considerava que cada triângulo estava inscrito dentro de um círculo e desenvolveu um sistema para calcular ângulos a partir de cordas. Ele compilou tabelas de cordas produzidas desenhando-se ângulos de diferentes tamanhos que se relacionavam com o conceito moderno de senos e cossenos. (ROONEY, 2012, p. 89)

A formulação da trigonometria de Hiparco, fazia o tratamento, isto é, operações cognitivas, baseado na ideia de função ao associar cada arco de circunferência de raio arbitrário a uma respectiva corda, tendo, por assim dizer, gerado o “embrião” das funções seno e cosseno.

Idade média

Esse período é datado 476 até 1453, quando Constantinopla foi tomada pelos turcos otomanos. Iniciou com uma fase de pouco progresso científico, considerada “idade das trevas”. Entre séculos XII e XIII surgiram as primeiras universidades, tendo suas contribuições entendidas como um prolongamento do saber das correntes filosóficas platônicas e aristotélicas (Roque e Carvalho, 2012, p. 188).

- **AL Battani (aproximadamente 850 a 929 d.C.) -** Dos séculos VIII até o século XI, o Império Muçulmano ou Árabe teve uma expansão econômica e avanços em diversos campos das artes e da ciência, em ao século IX, devido também a difusão da língua árabe em substituição ao grego, permitindo a preservação do saber por eles constituído.

Al Battani, também conhecido como Ptolomeu de Bagdad, para calcular a altitude do sol usou razões trigonométricas e construiu tábuas de senos, naquela época chamada de *Jiva* ou meias-cordas, caracterizando a formulação do objeto matemático.

Sua genialidade se mostrou no tratamento do registro das representações semióticas utilizadas, a partir da introdução do círculo de raio unitário e com isso demonstrando e generalizando que a razão *jiva* é válida para qualquer triângulo retângulo, independentemente do valor da medida da hipotenusa, propondo uma conversão geométrica e algébrica das relações trigonométricas do círculo para o retângulo, diferente de como se ensina na escola, onde primeiro se faz o estudo das relações no triângulo e muito depois, sem fazer associações, fala-se do ciclo trigonométrico.

De acordo com Alvarenga, Barbosa e Ferreira (2014, p. 168), as contribuições do árabe Al Battani podem ser observadas nos trabalhos de Euler, que se baseava em relações entre lados de um triângulo retângulo e sintetizou fórmulas trigonométricas, tomando o seno inteiro igual a 1, proporcionando também aplicações na física como, por exemplo, a propagação do som.

Idade moderna

Período de 1453 a 1789, ano da revolução francesa. A idade moderna é marcada por uma ampla disseminação do conhecimento matemático de caráter mais significativo e pela comercialização dos livros, devido à invenção da impressão de tipos móveis.

A Itália se destacou no desenvolvimento dos conceitos matemáticos, aritmética, álgebra e trigonometria. A população volta a ter interesse pela educação e os livros apresentam uma linguagem matemática mais acessível às massas populares. Nesse período também ocorreu um maior desenvolvimento das funções.

- **Johann Müller (Regiomontanus) (1436-1475) -** Este matemático é um dos maiores século XV, cujo trabalho teve grande importância, estabeleceu a Trigonometria como uma ciência independente da Astronomia. O primeiro trabalho impresso em trigonometria foi a "Tabula Directionum" de Regiomontanus, publicado em Nuremberg em 1485.

Segundo Costa (1997), a Trigonometria de Regiomontanus não diferia basicamente da que se faz hoje em dia, ele calculou novas tábuas trigonométricas, aperfeiçoando a dos senos e introduziu na trigonometria europeia o uso das tangentes, incluindo-as em suas tábuas.

Em suas formulações houve uma mudança no tratamento dos registros de representação, pois as seis funções trigonométricas foram definidas como funções do ângulo, em vez de funções do arco, e subentendidas como razões. Deduz-se que neste momento houve uma ruptura entre a trigonometria do triângulo retângulo e a trigonometria do ciclo trigonométrico.

- **François Viète (1540-1603) -** François Viète não era matemático de profissão, era advogado do Estado, por seu amor pela matemática dedicava horas de seu descanso ao estudo e investigação matemática. Em 1579 utilizou como registro e representação, fórmulas que determinam funções trigonométricas de múltiplos de um ângulo, quando se conhecem as funções trigonométricas do mesmo.

Segundo Chaquiam (2017, p. 168), na sua obra Canon Mathematicus, Viète desenvolveu o tratamento sistemático de métodos para resolver problemas com triângulos planos ou esféricos, com o auxílio das seis funções trigonométricas, uma vez que John Wallis tabulou as seis, mas só tratava as do seno.

- **Pierre de Fermat (1601-1665).** Traz-se Fermat para este estudo, não por ter desenvolvido contribuições diretas a trigonometria, mas sim com a introdução da ideia de desigualdade no estudo de funções. De acordo com Boyer e Merzbach (1991), desde 1629 Fermat estivera considerando lugares geométricos numa notação baseada em equações da forma $y = x^n$, definindo uma geometria analítica de curvas planas de grau superior. Fermat denotou para curvas polinomiais da forma $y = f\ (x)$, que a função assume um máximo ou o um mínimo. Ele comparou o valor de $f\ (x)$ em um ponto como valor $f\ (x + E)$ com variação quase imperceptível, tornando-os quase iguais, uma pseudoigualdade, o que fez chegar a definição de máximos e mínimos e a essência do que hoje chama-se de derivação.

Nesse sentido percebe-se que a ideia de inequação utilizada por Fermat por meio de desigualdade trouxe um tratamento diferente ao pensamento algébrico e uma definição analítica de função que alcançasse também as funções trigonométricas.

- **Sir Isaac Newton (1642-1727) -** John Wallis (1616-1703), fazia registros e representações das seis fórmulas trigonométricas usando equações e séries infinitas em vez de proporções. Esse avanço contribuiu com os estudos de Sir Isaac Newton (1642-1727) sobre cálculo infinitesimal na geometria do movimento.

Newton observando o movimento dos planetas, teve uma nova concepção do universo regido por leis mecânicas de uma assombrosa precisão. Fazia representações com séries infinitas, tendo expandido $arcsen\, x$ em séries e, por reversão, deduzido a série para $sen\, x$. Além disso, comunicou a Leibniz a fórmula geral para representar $sen\ (nx)$ e $cos\ (nx)$ tendo, com isso, aberto a perspectiva para o $sen\, x$ e o $cos\, x$ surgirem como números e não como grandezas.

Segundo Alvarenga, Barbosa e Ferreira (2014, p. 174), Joseph Fourier (1768-1830) utilizou as séries definidas por Newton para representar fenômenos físicos (transmissão do som, e fluxo do calor), manifestando a certeza de que qualquer função, ainda que “descontínua”, podia ser representada por uma série soma de senos e cossenos, uma vontade que Euler, tinha rejeitado, “isto mostra que a definição anterior de continuidade era inadequada” (ROQUE e CARVALHO, 2012, p. 336).

Nota-se aqui que Newton superou o obstáculo antigo da homogeneidade, a partir dele Fourrier superou o da descontinuidade, porém este último teve obstáculos de generalização, pois sua definição de função contemplava apenas aquelas consideradas convergentes.

Período contemporâneo

A Idade Contemporânea é estudada de 1789, época da Revolução Francesa, até os dias atuais. Dentro desse período, vários acontecimentos políticos, econômicos, sociais, científicos e tecnológicos, como a Revolução Industrial, receberam influência da evolução da matemática e em específico das funções trigonométricas. Por exemplo, os arquivos em MP3 hoje são possíveis por causa de matemáticos como Fourrier e Euler que definiram função analiticamente como sendo uma série trigonométrica complexa e composta. (Rooney, 2012)

- **Leonard Euler (1707-1783) -** A trigonometria toma a sua forma atual quando Euler (1707-1783) adota, em 1748, a medida do raio de um círculo como uma unidade e representa funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo como era feito até então. Neste sentido percebe-se que Euler realizou a conversão do registro de uma representação geométrica baseada no ângulo para outra cartesiana baseada no número, tal conversão permitiu estabelecer melhor caracterização da periodicidade das funções trigonométricas.

Segundo Roque e Carvalho (2012) Euler generalizou função como sendo uma expressão analítica que pode ser formada pela aplicação de finitas ou infinitas operações algébricas de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, integrando também ao escopo das funções admissíveis aquelas que são transcendentes, ou seja, que podem não ser algébricas, como a exponencial, a logarítmica e as trigonométricas.

A transição das razões trigonométricas para as funções periódicas começou com Viète no século XVI, teve novo impulso com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal no século XVII com Newton e culminou com a figura de Euler que desenvolveu também a análise de Fourier que permitiu a Newton “encontrar valores necessários para modelar a propagação do calor para qualquer distribuição inicial de temperatura” (ROONEY, 2012, p. 164), convergente ou não, superando assim um obstáculo de generalização.

Para melhor organizar as análises apresentadas ilustra-se no quadro a seguir uma síntese do que foi discutido sobre os registros e representações semióticas utilizadas por alguns personagens ao longo dos períodos históricos no estudo da trigonometria.

Quadro 7- Síntese dos resultados

PERÍODO HISTÓRICO	**PERSONAGEM**	**REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO**	**CONTRIBUIÇÃO**
Antiguidade (4000 a.C.- 476) Desenvolvimento da escrita e primeiros registros da trigonometria	**Eratóstenes**  **(276 - 196 a.C.)**	Relações entre ângulos e cordas, semelhança de triângulos e razões trigonométricas.	Utilizou trigonometria (não formalizada) para calcular a circunferência da Terra e com aplicações na Astronomia.
	Hiparco  **(180 - 125 a.C.)**	Formulava, tratava e convertia registos de representação geométricos em tabelas trigonométricas.	Dividir círculo em 360 partes para construir a primeira tabela trigonométrica utilizando a ideia intuitiva de função.
Idade Média (476-1453) Primeiras universidades e gênese círculo trigonométrico	**AL Battani**  **(850 a 929)**	Fazia representações semióticas geométrica e algébrica do círculo para o triângulo.	Introduziu o círculo de raio unitário a trigonometria e com isso generalizou que a razão *jiva* (seno) é válida para qualquer triângulo retângulo.
Idade Moderna (1453-1789) Ampla disseminação de conhecimento através da editoração e impressão e comercialização de livros.	**Johann Müller (Regiomontanus)**  **(1436-1475)**	Formulou seis funções trigonométricas tratadas como função do ângulo e não do arco.	Publicou o primeiro trabalho impresso em trigonometria, reuniu seis relações trigonométricas em função do ângulo, desassociando triângulo retângulo do ciclo trigonométrico.
	François Viète  **(1540-1603)**	Determinava funções trigonométricas de múltiplos de um ângulo, quando se conhecem as funções trigonométricas do mesmo.	Desenvolveu o tratamento sistemático de métodos para resolver triângulos planos ou esféricos, com o auxílio das seis funções trigonométricas.
	Pierre de Fermat  **(1601-1665)**	Desenvolveu a ideia de desigualdade no estudo de comportamento funcional.	Desenvolveu um tratamento diferente da representação algébrica de funções por meio de inequações.
	Sir Isaac Newton	Fez tratamento das seis fórmulas trigonométricas usando equações e séries	Contribuiu com os estudos de John Wallis (1616-1703) sobre cálculo

	 **(1642-1727)**	infinitas em vez de proporções.	infinitesimal na geometria do movimento, superou o obstáculo da homogeneidade.
Contemporâneo (1789 - atual) Revolução industrial e científica com várias contribuições das novas definições de funções trigonométricas	**Leonard Euler**  **(1707-1783)**	Realizou a conversão do registro de uma representação geométrica baseada no ângulo para outra cartesiana baseada no número.	Caracterizou a periodicidade das funções trigonométricas e superou os problemas de convergência ao generalizar funções sendo convergentes ou não.

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Dos recortes da história da matemática e das contribuições dos personagens destacou-se a construção semiótica dos estudos de trigonometria, chama-se a atenção para os seguintes aspectos da funcionalidade dos registros como propõe Duval.

> A originalidade da abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situações de ensino. (DUVAL, 2003, p. 12).

Observa-se ao longo da história representações multifuncionais, como por exemplo o $sen\ x$ que hora é dado como número e hora como grandeza, um obstáculo superado por Newton e que o professor de matemática precisa ter cuidado e clareza tanto quanto a representação discursiva (associações verbais, argumentações e deduções) como quanto a representação não-discursiva (operações, figuras geométricas, modelagem) .

Foi possível também constatar que os personagens, ora usavam triângulos (Eratóstenes), ora triângulos inscritos em círculos (Hiparco) e ora passaram a utilizar o círculo trigonométrico desassociado da trigonometria do triângulo retângulo (Regiomontanus). Esses passos das formações e tratamentos das representações elucidam o surgimento do círculo unitário a partir do triângulo retângulo, o que pode ser também utilizado por professores de matemática com funcionalidade tanto discursiva como não-discursiva.

Também se constatou de que modo as relações proporcionais entre lados de um triângulo retângulo se transformaram em funções trigonométricas, ao longo de cada necessidade da humanidade e em cada período histórico. Isso revelou a utilidade social, cultural e científica desse saber matemático.

Essas conversões semióticas razão/proporção - equação/inequação -função, que aconteceram ao longo da história, elucidam como os personagens superaram os obstáculos epistemológicos de proporção (Al Battani), homogeneidade (Newton), separação entre números e grandezas (Newton), generalização (Euler, Al Battani), continuidade (Fourrier) e convergência (Euler).

Tais obstáculos superados pelos personagens apesentados elucidaram como os estudos de trigonometria aliado a ideia de inequação contribuíram para uma definição mais ampla de função. Em certas circunstâncias essas formas de tratamento algébrico na forma de razão, proporção, equação, inequação e função e suas respectivas interpretações geométrica e gráfica no ensino de Matemática são tratadas de forma monofuncional, assim como na história, mas a consideração que se faz aqui segundo a teoria das representações semióticas de Duval, é:

> A existência de diferentes representações semióticas para um mesmo objeto matemático possibilita a escolha da melhor e mais adequada ao que se pretende trabalhar. Certas vezes, um objeto se apresenta em uma forma de representação que possui um custo cognitivo muito alto para realização de raciocínios e procedimentos de cálculo necessários, logo, a possibilidade de usar outra representação que proporcione tratamentos menos trabalhosos é de extrema importância (DIONÍZIO e BRANDT, 2012, p. 3)

Neste sentido a sequência didática que se construiu nesta pesquisa considerou a articulação de todas as formulações semióticas possíveis para uma melhor aprendizagem de Inequações Trigonométricas, tendo em vista que é válido começar por aquela que tenha menor custo cognitivo e que se avance progressivamente no tratamento dos registros e representações para apreensão das habilidades e objetivos de aprendizagem pretendidos.

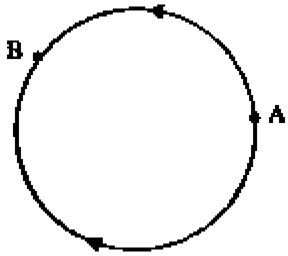
3. 2 ESTUDO EPISTEMOLÓGICO

Nesta parte do estudo sobre o objeto Inequações Trigonométricas, apresenta-se um estudo epistemológico que funciona também como um organizador de conteúdos e objetivos de aprendizagem do objeto com o rigor das definições matemáticas inerentes ao objeto como conteúdo curricular da educação básica. As definições e propriedades a seguir apresentadas foram embasadas por Machado (1986), Antar Neto (2010), Murakami e Iezzi (2013), Dante (2010), Oliveira (2017).

3. 2. 1 Medidas de arcos

Considerando uma circunferência. Sobre esta circunferência tome dois pontos A e B, conforme a figura abaixo. A circunferência fica dividida em duas partes, cada uma é chamada de arco da circunferência AB.

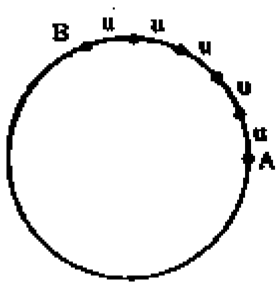
Figura 1- Arco da Circunferência AB.



Perceba que a simples simbologia AB não determina o arco, sendo necessário designar um sentido de medidas, horário ou anti-horário, de modo a especificar que dos dois arcos em que a circunferência ficou dividida é realmente o arco AB desejado.

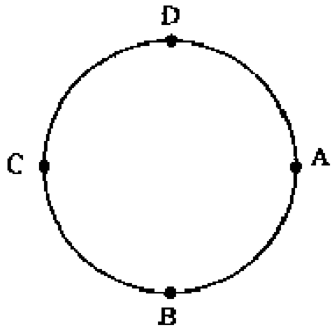
Para calcular a medida do arco de circunferência, deve-se determinar sobre a circunferência uma unidade fundamental de medida e calcular a quantidade destas unidades de medidas que estão contidas no arco. Por exemplo, na figura a baixo definiu-se a unidade de medida u. Perceba que o arco AB, destacado na figura existem exatamente 5 unidades u, fazendo com que AB = 5u.

Figura 2- Unidades u de uma arco.



Se essa circunferência for dividida em 360 partes iguais, dizemos que cada uma dessas partes possui um grau (º) como medida de cada um destes arcos menores em que a circunferência foi dividida. Em outras palavras, 1º (um grau) é igual a medida $\frac{1}{360}$ de um arco completo. Deste modo, um arco completo posssui 360º. Por exemplo, considere que os pontos A, B, C e D dividem uma circunferência em 4 partes iguais. Assim, cada um dos menores arcos AB, BC, CD e DA vale $\frac{360°}{4}$ = 90°.

Figura 3- Pontos que dividem a circunferência em 4 partes iguais.



Um radiano (1 rad) é o ângulo definido em uma circunferência por um arco com o mesmo comprimento que o raio da referida circunferência. É possível demonstrar que em uma circunferência existe 2π radianos em um arco completo.

Das definições de grau e radianos é possível identificar uma relação linear entre ambos. Assim, para fazer a conversão basta resolver uma regra de 3 simples. Para converter um ângulo conhecido θ, com a medida dada em graus, para radianos deve-se fazer da seguinte forma:

GRAU	RADIANOS
180°	π
θ	x

$$x = \frac{\theta\pi}{180°} \text{rad } (\theta \text{ em grau})$$

Para converter de radianos para graus.

GRAU	RADIANOS
180°	π
x	θ

$$x = \frac{\theta.180°}{\pi} \text{rad } (\theta \text{ em grau})$$

3. 2. 2 Ciclo trigonométrico

Considere um sistema de eixo cartesianos xOy, suponha que λ é uma circunferência de raio 1, centrada na origem O. Observe que o comprimento desta circunferência é 2π. A é o ponto da circunferência λ intercepta o eixo x. A partir desde ponto A todos os arcos são medidas ao longo de λ.

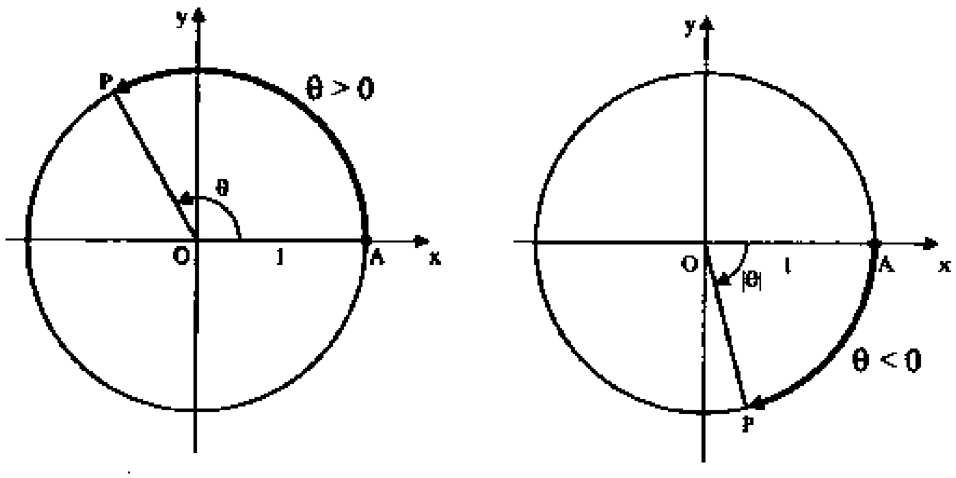
Seja $f(\theta)$ uma função que associa para cada θ um ponto P na circunferência de moo que:

i) Se θ = 0, o ponto P coincide com o ponto A

ii) Se $\theta > 0$, a partir do ponto A e no sentido anti-horário, é contado um arco de comprimento θ. O ponto P é outro extremo deste arco.

iii) Se $\theta < 0$, a partir do ponto A e no sentido horário, é contado um arco de comprimento $|\theta|$. O ponto P é o outro extremo deste arco.

Figura 4- Arcos no sentido horário e anti-horário.



Afirma-se que o ponto P é a imagem de θ pela função f. Quando a função f é associada a uma circunferência λ de raio unitário afirma-se que λ é o ciclo trigonométrico. Como o raio da circunferência é igual a 1, o comprimento do arco AP, em unidades de comprimento é igual ao valor do ângulo central θ, em radianos.

Assim, é possível identificar a posição de P para determinados valores de θ, como exemplificado abaixo:

Figura 5- Posição de P para valores de $\boldsymbol{\theta}$ no sentido anti-horário.

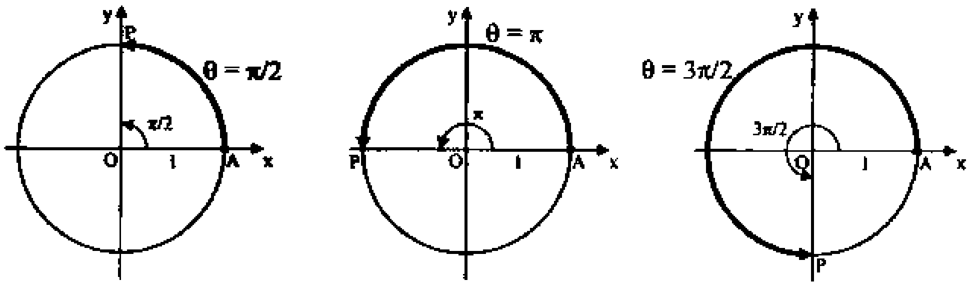
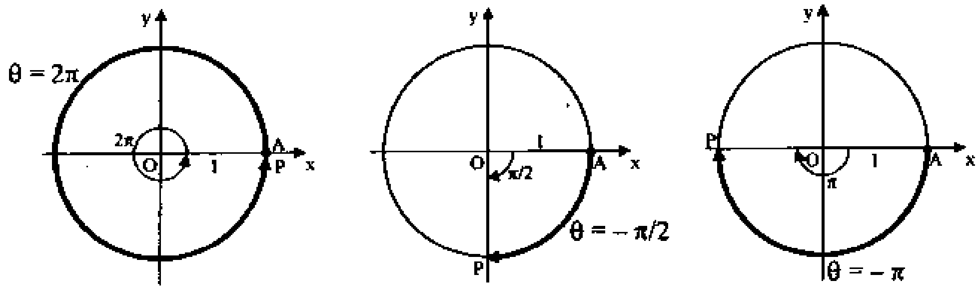


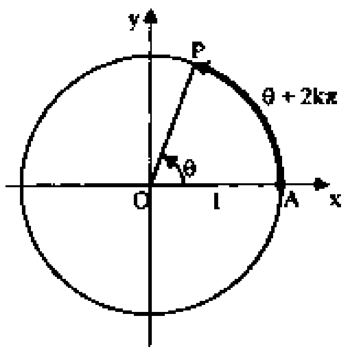
Figura 6- Posição de P para valores de $\boldsymbol{\theta}$ no sentido horário.



Observe que a função f é uma função periódica, uma vez que:

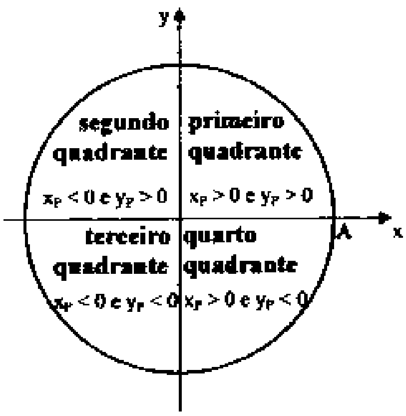
$f(\theta) = (\theta \pm 2\pi) = f(\theta \pm 4\pi) = f(\theta \pm 6\pi)\ldots = f(\theta \pm 2k\pi)\; k \in \mathbb{N}$. Desta maneira, caso dois arcos θ_1 e θ_2 sejam tais θ_1 - θ_2 = 2kπ, k ∈ $\mathbb{N}$, segue que θ_1 e θ_2 possuem a mesma imagem pela função f. Neste caso, θ_1 e θ_2 são chamados de arcos côngruos. Assim, qualquer ponto P no ciclo trigonométrico é a imagem de infinitos arcos, todos côngruos entre si.

Figura 7- P como imagem de infinitos arcos côngruos entre si.



Todos os arcos da forma $\theta \pm$ 2kπ, k ∈ $\mathbb{Z}$, θ positivo ou negativo, são associados ao mesmo ponto P do ciclo trigonométrico. Os eixos x e y dividem o ciclo trigonométrico em quatro setores, denominados de quadrantes, conforme mostra a figura a seguir. Em cada quadrante é possível identificar as coordenadas do ponto P.

Figura 8- Quadrantes do ciclo trigonométrico.



Assim, podemos afirmar que:

i) x ∈ 1º Q ⇔ θ + 2k$\pi < \theta < \frac{\pi}{2}$ + 2kπ

ii) x ∈ 2º Q ⇔ $\frac{\pi}{2}$ + 2k$\pi < \theta < \pi$ + 2kπ

iii) x ∈ 3º Q ⇔ π + 2k$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ + 2kπ

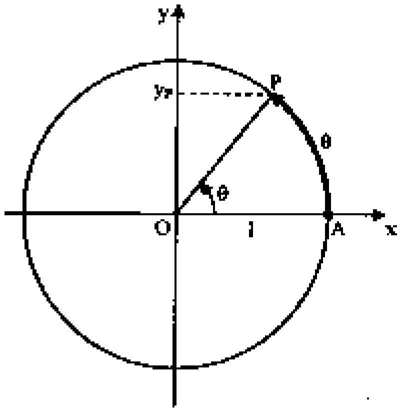
iv) x ∈ 4º Q ⇔ $\frac{3\pi}{2}$ + 2k$\pi < \theta <$ 2π + 2kπ, onde k ∈ $\mathbb{Z}$.

2. 3. 2. 3 Seno de um arco.

Considerando o ciclo trigonométrico e o ponto P, imagem de um arco de comprimento θ. Define-se a função seno de um arco θ como $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada θ a ordenada do ponto P.

$$f(\theta) = sen\,\theta = y_p.$$

Figura 9- Relação seno.



Observações

1) A imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$, ou seja -1 $\leq$ sen θ $\leq$ 1 para todo arco θ.

2) sen $\theta > 0$ no I e II Q; sen $\theta < 0$ no III Q e IV Q.

3) sen θ = 0, para θ = kπ, k ∈ $\mathbb{Z}$.

4) sen θ = 1, para $\theta = \frac{\pi}{2}$+ 2kπ, k ∈ $\mathbb{Z}$.

5) sen θ = -1, para $\theta = \frac{3\pi}{2}$+ 2kπ, k ∈ $\mathbb{Z}$.

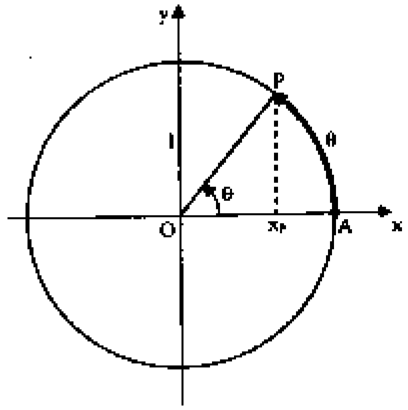
6) A função $f(\theta) = sen(\theta)$ é periódico de periodo 2π, k ∈ $\mathbb{Z}$ $|sen\theta = sen(\theta + 2k\pi)|$

2. 3. 2. 4 Cosseno de um arco

Considerando o ciclo trigonométrico e o ponto P, imagem de um arco de comprimento θ. Define-se a função cosseno de um arco θ como f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada θ a abscissa do ponto P.

$$f(\theta) = cos\,\theta = x_p.$$

Figura 10- Relação cosseno.



Observações

i) A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1\,]$, ou seja; -1 ≤ cosθ ≤ 1 para todo arco θ

ii) cos$\theta > 0$, para θ ∈ IQ e IVQ, cos$\theta < 0$, θ ∈ IIQ e IIIQ.

iii) cos θ = 0, para θ = $\frac{\pi}{2}$ + kπ, k∈ $\mathbb{Z}$.

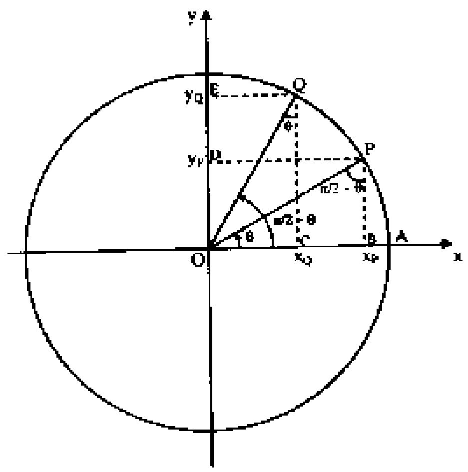
iv) cos θ = 1, para θ = 2kπ, k∈ $\mathbb{Z}$.

v) cos θ = -1, para θ = π + 2kπ, k∈ $\mathbb{Z}$.

vi) A função $f(\theta)\ =\ cos\ \theta$ é períodica de período 2π.

cos θ = cos(θ + 2kπ), k∈ $\mathbb{Z}$.

Figura 11 – Projeções de P e Q.



Em um ciclo trigonométrico sejam os pontos P e Q imagens de θ e $\frac{\pi}{2} - \theta$, respectivamente. Os pontos B, C, D e E são as projeções de P e Q sobre os eixos x e y, conforme a figura acima.

Observe que os triângulos OPB e OQC são congruentes logo:

OC = PB $\Rightarrow x_Q = y_P \Rightarrow$ cos($\frac{\pi}{2} - \theta$) = sen θ

QC = OB $\Rightarrow y_Q = x_P \Rightarrow$ sen($\frac{\pi}{2} - \theta$) = sen θ

3. 2. 5 Tangente de um arco

Considere um eixo t, com origem em A e paralelo ao eixo y. Esse eixo é conhecido como eixo das t. O ponto P é a imagem do arco θ sobre a circunferência trigométrica. A reta OP intercepta o eixo t em um ponto de posição t_p.
A função tangente é definida coo f: $\mathbb{R} - (\frac{\pi}{2} + k\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada θ a posição t_p sobre o eixo das tangentes. Assim temos f(θ) = tg $\theta = t_p$ observe que $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ a reta OP é paralela ao eixo das tangentes, não interceptando-a. Por isso a função tangente não é definida para $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
Propriedades:

1) A imagem da função tangente é $\mathbb{R}$.

2) tg $\theta > 0$, para $\theta \in$ 1°Q e 3°Q.

3) tg $\theta < 0$, para $\theta \in$ 2°Q e 4°Q.

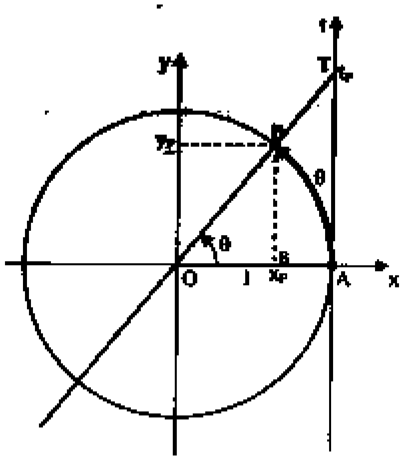
4) A função tangente e periódica de período π.

tg θ = tg ($\theta + k\pi$) , k $\in \mathbb{Z}$.

2. 3. 2. 6 Relações entre as funções trigonométricas

Teorema: Para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, tem-se tg $\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$

Figura 12 - Relação Tangente.



Demonstração:

Suponha que P é a imagem do arco θ sobre o ciclo trigonométrico. B é a projeção de P sobre o eixo x . T é a intersecção de OP com o eixo t das tangentes.

Observe que o ΔOAT e ΔOBP possuem os mesmos ângulos. Assim ΔOBP.

$$\frac{AT}{PB} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{|t_p|}{|y_p|} = \frac{1}{|x_p|} \Rightarrow \frac{|tg\theta|}{|sen\theta|} = \frac{1}{|cos\theta|} \Rightarrow tg\theta = \frac{|sen\theta|}{|cos\theta|}$$

O quadro mostra como variam os sinais de tg θ, sen θ e cos θ conforme os quadrantes no ciclo trigonométrico.

Figura 13 – Sinal das funções trigonométricas.

Quadrante	**Sinal de tg θ**	**Sinal de sen θ**	**Sinal de cos θ**	**Sinal de $\frac{sen\,\theta}{cos\,\theta}$**
1º	+	+	+	+
2º	–	+	–	–
3º	+	–	–	+
4º	–	–	+	–

Como o sinal de tgθ coincide, em cada quandrante, com o sinal de $\frac{sen\theta}{cos\theta}$, então pode-se afirmar que tgθ = $\frac{sen\theta}{cos\theta}$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ + kπ, k $\in \mathbb{Z}$.

Há outras relações trigonométricas que podem ser estudadas por meio do ciclo trigonométrico, tais como a cotangente, secante e cossecante, que não são objeto de estudo nesta pesquisa por não serem desenvolvidas na sequência didática construída.

3. 2. 7 Equações Trigonométricas

Seja $f(x)$ uma função que envolve apenas constantes reais e operações com funções trigonométricas. Resolver uma equação trigonométrica f(x) = 0 significa determinar todas os valores de α tais que f(α) = 0. Estes valores α formam um conjunto denomminado conjunto solução da equação $f(x) = 0$. Note que, para pertencer ao conjunto solução da equação $f(x) = 0$, todos os valores de α devem pertencer ao domínio da função $f(x)$.

De maneira geral, as equações trigonométricas são dadas originalmente por expressões envolvendo várias funções trigonométricas que, após a devida manipulação algébrica, se reduzem a resolver uma das equações fundamentais abaixo:

i) sen α = sen β

ii) cos α = cos β

iii) tg α = tg β

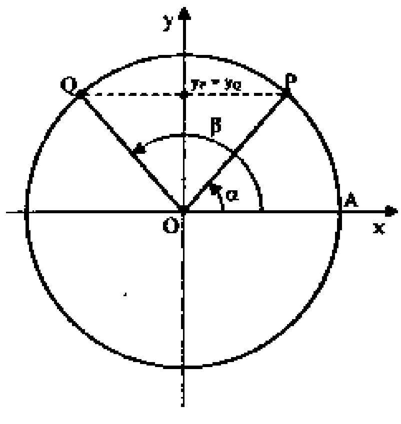
Portanto, é importante estudar com detalhes o conjunto solução destas equações trigonométricas fundamentais.

a) EQUAÇÃO DA FORMA sen α = sen β

De modo que as imagens dos arcos α e β, sobre o ciclo trigonmétrico, respectivamente os pontos P e Q, devem possuir a mesma ordenada:

$$y_P = y_Q$$

Figura 14 – Equação seno.



Isso é possível em duas possibilidades:

i) α e β são côngruos : $\alpha = \beta + 2k\pi$, k ∈ $\mathbb{Z}$

ii) α e β são côngruos : $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi$, k ∈ $\mathbb{Z}$

Portanto, conclui-se que:

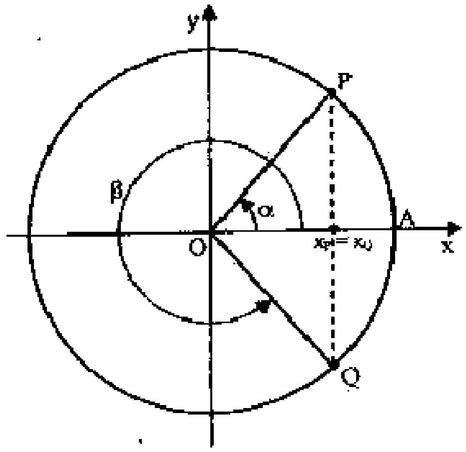
sen α = sen $\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$

b) EQUAÇÃO DA FORMA cos α = cos β

De modo que cos α = cos β, as imagens dos arcos α e β sobre o ciclo trigonométrico, respectivamente os pontos P e Q, devem possuir a mesma abscissa:

$$x_P = x_Q$$

Figura 15 – Equação cosseno.



Isto ocorre em duas possibilidades:

i) α e β são côngruos : $\alpha = \beta + 2k\pi$, k ∈ $\mathbb{Z}$

ii) α e $2\pi - \beta$ são côngruos : $\alpha = 2\pi - \beta + 2k\pi$, k ∈ $\mathbb{Z}$

Logo, conclui-se que:

cos α = cos $\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = 2\pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$

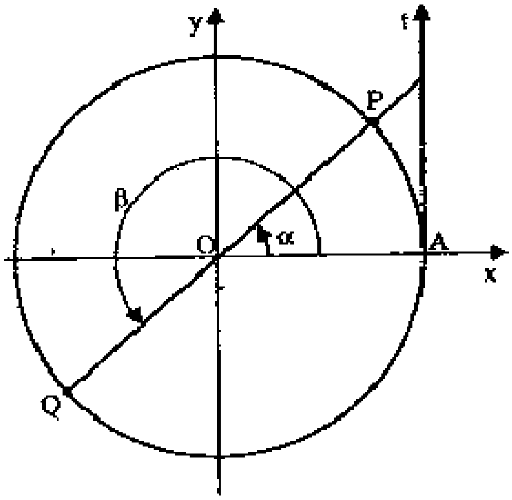
Observação: É muito comum utilizar no lugar de $2\pi - \beta$ o arco côngruo $-\beta$:

cos α = cos $\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$ ou $\Leftrightarrow \alpha = \pm\beta + 2k\pi$

c) EQUAÇÃO DA FORMA tg α = tg β

De modo que tg α = tg β, as imagens dos arcos α e β sobre o ciclo trigonométrico, respectivamente os pontos P e Q, devem estar alinhadas com o centro O do ciclo. Isto ocorre em duas possibilidades:

Figura 16- Equação tangente.



i) α e β são côngruos : $\alpha = \beta$ + 2kπ, k ∈ $\mathbb{Z}$

ii) α e $\pi + \beta$ são côngruos : $\alpha = \pi + \beta$ + 2kπ, k ∈ $\mathbb{Z}$

Logo, conclui-se que:

tg α = tg $\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \end{cases}$

3. 2. 8 Inequações Trigonométricas

Considere $f(x)$ e $g(x)$ expressões que envolvem apenas operações com funções trigonométricas. Uma inequação trigonométrica é qualquer expressão do tipo

$f(x) > g(x)$ ou $f(x) \geq g(x)$. De modo a simplificar a análise, serão considerados os caos de $> ou <$, caso o sinal de desigualdade seja $\geq ou \leq$, a análise é identicam bastando trocar $> por \geq$ e $< por \leq$. O conjunto solução de uma inequação trigonométrica do tipo $f(x) > g(x)$ é o conjunto dos arcos θ tais que a inequação é satisfeita, ou seja $f(\theta) > g(\theta)$.

De maneira geral, as Inequações Trigonométricas são dadas, originalmente, com várias operações com funções trigonométricas que, depois da devida manipulação algébrica, se reduz a resolver uma das inequações fundamentais (k $\in \mathbb{R}$):

i) senx $>$ k; senx $<$ k

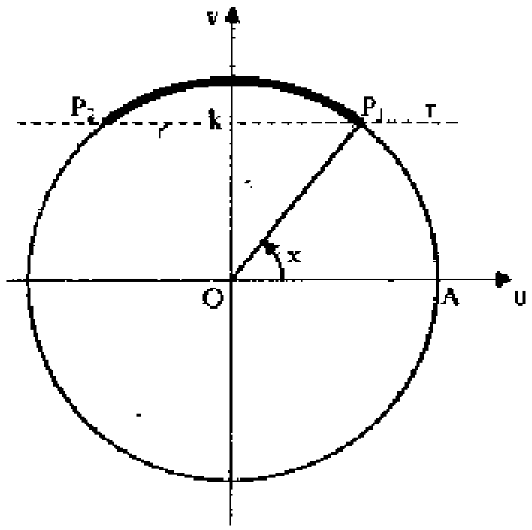
ii) cosx $>$ k; cosx $<$ k

iii) tgx $>$ k; tgx $<$ k

Devido a importância destas inequações fundamentais, suas soluções serão estudadas nos itens a seguir.

Solução de $Sen\,x > k$:

Figura 17 – Inequação Seno



Marcam-se no eixo v o ponto de ordenada k. Uma reta horizontal r é traçada passando por este ponto. Esta reta intersecta o ciclo trigonométrico em dois pontos, P_1 e P_2. Considere o arco de circunferência P_1P_2 sobre o ciclo trigonométrico que está acima da reta r.

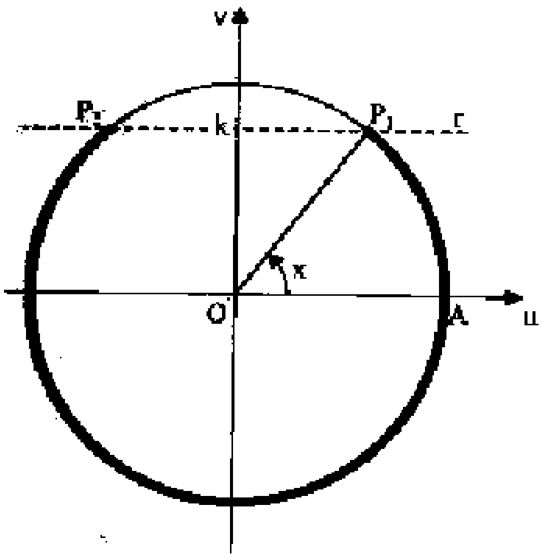
Todos os arcos do ciclo trigonométrico que pertencem a P_1P_2 são solução da inequação $senx\ >\ k$. Deste modo, identificando o arco x de modo que $x\ =\ arcsenk$, o conjunto solução da inequação $senx\ >\ k$ é :

$$S\ =\ \{x \in \mathbb{R}\ /\ x\ =\ arcsenk + 2k\pi < x\ <\ \pi -\ arcsenx + 2k\pi\}$$

Solução de $senx\ <\ k$:

Marca-se no eixo v o ponto de ordenada k. Uma reta horizontal r é traçada passando por este ponto. Esta reta intersecta o ciclo trigonométrico em dois pontos, P_1 e P_2. Considerando o arco de circunferência P_1P_2, sobre o ciclo trigonométrico que está abaixo da reta r . Todos os arcos do ciclo trigonométrico que pertencem a P_1P_2 são solução da inequação senx < k.

Figura 18- Inequação Cosseno.



Deste modo, identificando o arco x de modo que $x\ =\ arcsenk$, o conjunto solução da inequação $senx\ <\ k$.

$$S\ =\ \{x \in \mathbb{R}/\ 2k\pi \leq x\ <\ arcsenk + 2k\pi\ ou\ \pi -\ arcsenk\ < x\ < 2\pi + 2k\pi\}$$

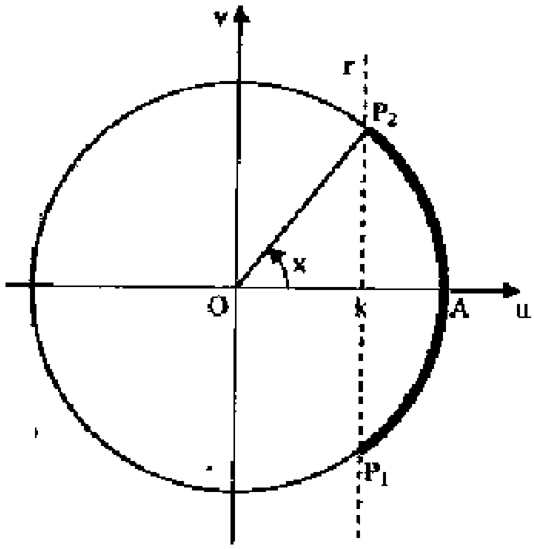
De maneira equivalente, utilizando arcos negativos, é possível escrever o conjunto solução em apenas um intervalo.

$$\mathrm{S} = \{x \in \mathbb{R}/ -\pi\mathrm{arc\,cosk}\ + 2\mathrm{k}\pi\ < \mathrm{x}\ <\ \mathrm{arc\,cosx} + 2\mathrm{k}\pi\ \}$$

Solução de   cosx $>$ k:

Marca-se no eixo v o ponto de abscissa k. Uma reta vertical r é traçada passando por este ponto. Esta reta intersecta o ciclo trigonométrico em dois pontos, P_1 e P_2. Considerando o arco de circunferência P_1P_2, sobre o ciclo trigonométrico que está abaixo da reta r . Todos os arcos do ciclo trigonométrico que pertencem a P_1P_2 são solução da inequação $cosx < k$. Deste modo, identificano o arco x de modo que $x = arc\ cosk$, o conjunto solução da inequação $cosx > k$ é:

Figura 19 – conjunto solução da inequação $\boldsymbol{cosx > k}$



S = $\{x \in \mathbb{R}/\ 2\mathrm{k}\pi \leq \mathrm{x} < \mathrm{arc\ cosk} + 2\mathrm{k}\pi \text{ ou } 2\pi - \mathrm{arc\ cosk} + 2\mathrm{k}\pi < \mathrm{x} < 2\pi + 2\mathrm{k}\pi\}$

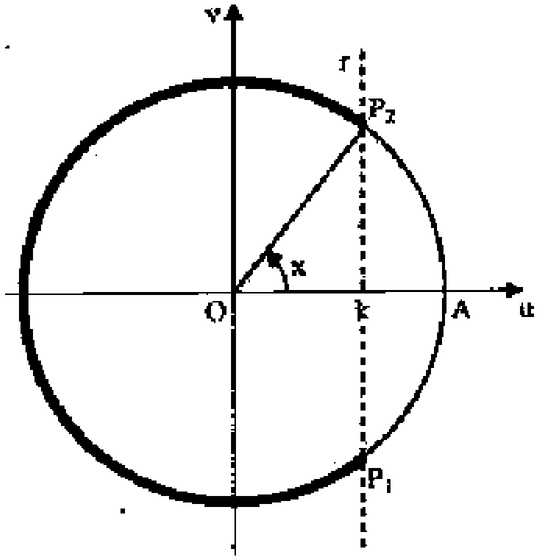
De maneira equivalente, utilizando arcos negativos, e possível escrever o conjunto solução em apenas um intervalo real.

S = $\{x \in \mathbb{R}/{-\mathrm{arc\ cosk}} + 2\mathrm{k}\pi < \mathrm{x} < \mathrm{arc\ cosx} + 2\mathrm{k}\pi\}$

Solução de cosx $<$ k:

Marca-se no eixo v o ponto de abscissa k. Uma reta vertical r é traçada passando por este ponto. Esta reta intersecta o ciclo trigonométrico em dois pontos, P_1 e P_2. Considerando o arco de circunferência P_1P_2, sobre o ciclo trigonométrico que está esquerda da reta r . Todos os arcos do ciclo trigonométrico que pertencem a P_1P_2 são solução da inequação cosx $<$ k. Deste modo, identificano o arco x de modo que x = arc cosk, o conjunto solução da inequação cosx $<$ k é:

Figura 20 - conjunto solução da inequação cosx $<$ k

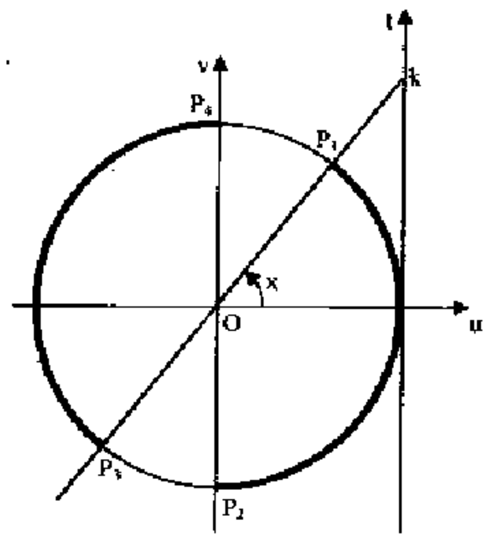


S = $\{x \in \mathbb{R} /\ \mathrm{arc\ cosk} + 2\mathrm{k}\pi\ < \mathrm{x}\ < 2\pi - \ \mathrm{arc\ cosx} +\ 2\mathrm{k}\pi\}$

Solução de tgx $>$ k:

Marca-se sobre o eixo t das tangentes o ponto com posição igual a k. A reta que passa por este ponto e o ponto O corta o ciclo trigonométrico em $P_1\ e\ P_3$.O arco x é identificado no ciclo de modo que x = arc tgk. Sejam $P_2\ e\ P_4$ os pontos onde o ciclo corta o eixo V conforme a figura. A solução da inequação tgx $>$ k é o conjunto dos arcos x que pertencem á união entre P_1P_2 e P_3P_4, ou seja,

Figura 21 - Conjunto solução da inequação tgx $>$ k.

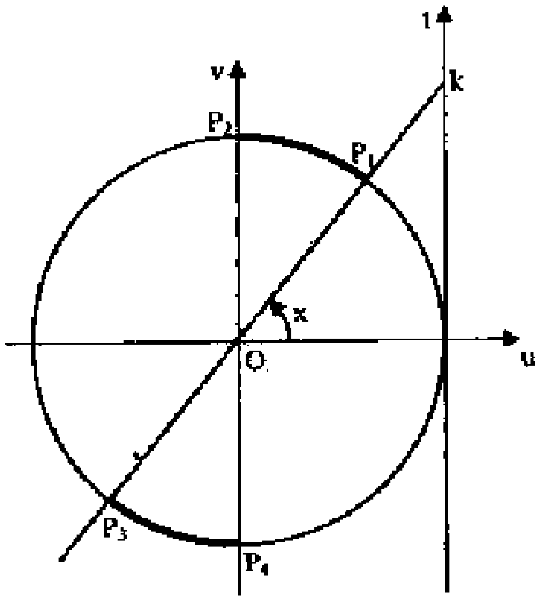


$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / \ \mathrm{arctg}\, k + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \mathrm{ou}\ \pi + \mathrm{arctg}\, k + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\}$$

Solução de tgx $<$ k:

Marca-se sobre o eixo t das tangentes o ponto com posição igual a k. A reta que passa por este ponto e o ponto O corta o ciclo trigonométrico em P_1 e P_3.O arco x é identificado no ciclo de modo que x = arc tgk. Sejam P_2 e P_4 os pontos onde o ciclo corta o eixo V conforme a figura. A solução da inequação tgx $<$ k é o conjunto dos arcos x que pertencem á união entre P_2P_1 e P_4P_3, ou seja,

Figura 22- Conjunto solução da inequação tgx $<$ k.

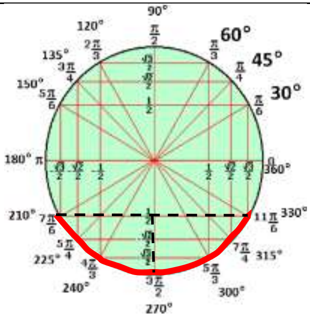
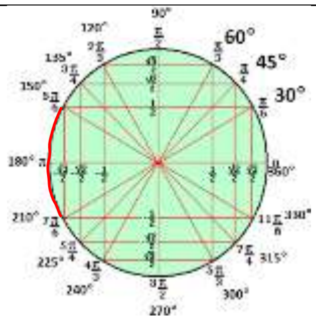
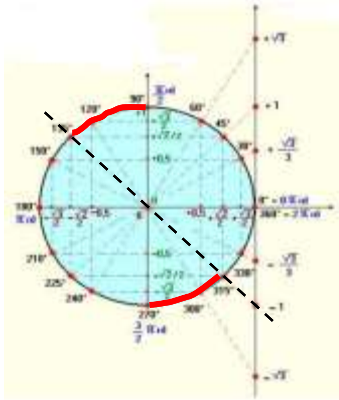


$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \mathrm{arctg}\, k + 2k\pi \ \mathrm{ou}\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + \mathrm{arctg}\, k + 2k\pi \right\}$$

Note que ao desenvolver a solução algébrica de um Inequação Trigonométrica é possível de forma auxiliar ou não também expressar a solução de forma gráfica e geométrica simultaneamente no ciclo trigonométrico e também converter para a representação de intervalos. Essas possibilidades de registros de representação semiótica das Inequações Trigonométricas permite um estudo mais detalhado sobre esse objeto.

Exemplo:

Quadro 8 – Possíveis representações de inequações trigonométricas.

Inequação	**Ciclo trigonométrico**	**Solução algébrica e Solução no intervalo**
$sen\, x < -\frac{1}{2}$		$\mathbf{S = \{x \in \mathbb{R} / \frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}\}}$
		$S =]\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}[$
$Cos\, 2x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\mathbf{S = \{x \in \mathbb{R} / \frac{5\pi}{12} < x < \frac{7\pi}{12}\}}$
		$S =]\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}[$
$\boldsymbol{Tg\, x < -1}$		$\mathbf{S = \{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3} \cup \frac{3\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{4}\}}$
		$S =]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}[\ ou\ ]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}[$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Chega-se ao final do estudo sobre o objeto matemático e sobre as análises prévias desta pesquisa, nessa fase foi possível estabelecer os elementos necessários para a construção da sequência didática a seguir apresentada.

REFERÊNCIAIS

ALMOULOUD, S. Ag. **Fundamentos da didática Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos. **REVEMAT** - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V3.6, p.62-77, UFSC: 2008.

ARTIGUE, Michelle. **Engenharia didáctica**. In: BRUN, Jean (Org.). Didáctica das matemáticas. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

ALVARENGA, Karly; BARBOSA, Celso Viana; FERREIRA, Gislaine Maria Ferreira. O conceito de função: o desenvolvimento baseado em alguns modelos desde o ano de 2000 a. C até o século XX. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.9, n. 1, p. 159-178, 2014.

ANTAR NETO, Aref. **Noções de Matemática**. Volume 3, 1ª – Edição. Editora Vestseller,2010.

BARBOSA, Américo Augusto. **Trajetórias hipotéticas de aprendizagem relacionadas ás razões e as funções trigonométricas, visando uma perspectiva construtivista .** (Dissertação de mestrado). PUC-SP. 2009.

BLOOM, Benjamim S.; KRATHWOHL, David R., MASIA, Bertram B. **Taxonomia dos objetivos educacionais**. vol.1 (domínio cognitivo). Porto Alegre: Globo, 1973.

BOYER, C. B. ; MERZBACH, U. C. **History of mathematics.** 2. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1991.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de Helena Castro, Ed. Blücher Ltda, São Paulo, 2012.

BRASIL. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep).** Relatório SAEB (ANEB e ANRESC) 2005- 2015: panorama da década. – Brasília: Inep, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular.** Brasília, DF, 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática**-** ensino médio**-**Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEM, 1998.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaios temáticos**: história e matemática em sala de aula. Belém: SBEM/SBEM-PA, 2017.

COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da. **Funções seno e cosseno**: Uma sequência de ensino a partir dos Contextos do “mundo experimental” e do computador. 197 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). – PUC/SP. São Paulo, 1997.

DALLEMOLE, Joseide Justin. **Registros de Representação Semiótica**: Uma experiência com ambiente virtual SIENA. Canoas: ULBRA, 2010. Dissertação(Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2010

DANTE, L. R. **Volume único**,- 1ª ed. São Paulo: Ártica, 2010.

DANTE, Luis Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Editora Ática, 2015.

DIONÍZIO, Fátima Queiroz; BRANDT, Célia Finck. Análise das dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio em trigonometria. X Congresso Nacional de Educação. **EDUCERE**. PUC/PR. Curitiba, 2011.

DUVAL, R . Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S.D.A. (Org.) **Aprendizagem em matemática**: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, p. 11-33. 2003.

DUVAL, R. **Les problemas fundamentales en el aprendizaje matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo**. Tradução de Myrian V. Restrepo. Cali: Universidade del Valle: 2004.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas / organização. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2011.

FEIJÓ, Rachel Saffir Aráujo Alves. **Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria:** Um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal. 108 f. Dissertação (Mestrado Matemática em Rede Nacional). - Universidade de Brasília. Brasília, 2018.

FERRAZ, A. P. C. M.; BELHOT, R. V. **Taxonomia de Bloom**: revisão teórica e apresentação das adequações do instrumento para definição de objetivos instrucionais. Gestão & Produção, São Carlos, v. 17, n. 2, p. 421-431, 2010.

FOSSA, John Andrew. Prefácio. In: SÁ, Pedro Franco de. **Atividades para o Ensino de Matemática no Nível Fundamental**. Belém: EDUEPA, 2009.

GODOY, Elenilton Vieira; SANTOS, Vinício de Macedo. O Cenário do Ensino de Matemática e o Debate sobre o Currículo de Matemática. **Práxis Educacional**, v. 8, n. 13, p.253-280.Vitória da Conquista-BA, 2012.

MACHADO, Antonio dos Santos. **Matemática**: Trigonometria e progressões. São Paulo: Atual, 1986.

MELO, Guiomar Namo de. **Currículo da Educação Básica no Brasil: concepções e políticas.** Setembro de 2014. Disponível em www.ceesp.sp.gov.br/comunicado.php?id=321. Acesso em 13 de julho de 2018.

MINEIRO, R. M. **Construção de um Percurso de Estudo e Pesquisa para o Estudo de Inequações**. 2019. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.

MURAKAMI,Carlos e IEZZI, Gelson **FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR,** Volume 3, 9ª Edição 2013 - Editora Atual.

OLIVEIRA ,Marcelo Rufino de.**Elementos da matemática-**Trigonometria e Geometria Espacial-1 ed- Belém. Gráfica GTR.2017.

OLIVEIRA, Carlos André Carneiro de et al. **Trigonometria**: o radiano e as funções seno, cosseno e tangente. 2014.

OLIVEIRA, Tais de. **Trigonometria: A mudança da prática docente mediante novos conhecimentos**. (Disseratação de Mestrado). Universidade Federal de São Carlos. 2010.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**. São Paulo: Editora Moderna, 1995.
Pará. Belém, 2017.

PATRIOTA, Maria do Rosário Alves; DUARTE, Vania de Moura Barbosa. A importância das inequações trigonométricas: reflexões com relação ao ensino e aprendizagem. **Revista Diálogos**, v. 14, p. 291, 2015.

PEDROSA, Leonor Wierzynski. **Uma proposta de ensino da trigonometria com uso do software** GeoGebra. 2012.

PEREIRA, Cícero da Silva. **Aprendizagem em trigonometria no ensino médio: Contribuição da Aprendizagem Significativ**a. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemáticas). Universidade Estadual da Paraíba. Grande. 2011

PEREIRA, Edcarlos; GUERRA, Ediel Azevedo. A utilização de applets no geogebra para a aprendizagem da trigonometria no ensino médio. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 7, n. 3, p. 53-72, 2016.

PINHEIRO, Evandro. **O ensino de trigonometria na educação básica a partir da visualização e interpretação geométrica do ciclo trigonométrico**. (Dissertação de mestrado). Universidade Federal de Belo Horizonte. 2008.

RODRIGUES, Julyana Cosme et al. **Elaboração e aplicação de uma sequência didática sobre a química dos cosméticos**. Revista eletrônica. Experiências em Ensino de Ciências V.13, No.1. 2018.

ROONEY, Anne. **A História da Matemática**. M. Books do Brasil Editora Ltda. São Paulo, 2012.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de história da matemática**. Rio de janeiro: SBM, 2012.

RUFINO, Marcelo de Oliveira. **Coleção elementos da matemática**: trigonometria espacial. São Paulo: Editora Ximango, 2018.

SÁ, Pedro Franco de. **Atividades para o ensino de Matemática no Nível Fundamental** – Belém: EDUEPA, 2009.

SÁ, Pedro Franco de. **Possibilidades do ensino de matemática por atividades**. Organizador Demetrius Gonçalves de Araújo. SBEM-PA. Belém, 2019.

SALDAN, CLAUDIO. Equações e inequações trigonométricas: uma abordagem com o aplicativo de matemática dinâmica GeoGebra. 2014.

SANTOS, Robério Valente. **O ensino de problemas envolvendo as quatro operações fundamentais com números naturais.** 393f. Dissertação (Mestrado Profissional em ensino de Matemática). Universidade do Estado do Pará. Belém, 2017.

SILVA, Wellington. **O ensino de trigonometria: perspectivas do ensino fundamental ao médio**. (Dissertação de mestrado). Rede Nacional. 2013.

SOUZA, Irlan Cordeiro de; SILVA, Marinaldo Felipe da. **Aplicações teóricas e práticas da trigonometria para um ensino significativo e interdisciplinar**. 2015.

ISRAEL COSTA LIMA

Mestre em Ensino de Matemática (UEPA-2022). Graduação em Licenciatura em Matemática (UFPA-1996). Professor do Ensino Superior da Universidade CEUMA (2014-2018). Atualmente é professor do quadro efetivo da SEDUC-MA desde 2002.

DUCIVAL CARVALHO PEREIRA

Possui graduação pela Universidade Federal do Pará (1972), mestrado em Matemática pela Universidade de Brasília (1980), doutorado em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (1987) e pós-doutorado em Matemática pelo Laboratório Nacional de Computação Científica do Cnpq (1989). Professor adjunto IV, aposentado da Universidade Federal do Pará. Foi Chefe do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Pará (1992 a 1994), Coordenador do Curso de Mestrado em Matemática da Universidade Federal do Pará (1995 a 1997). Atualmente é professor adjunto IV da Universidade do Estado do Pará, tendo sido Coordenador do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (maio/2015 a maio/2019). É pesquisador na área de Matemática, com ênfase em Análise, atuando principalmente no estudo das propriedades das soluções de problemas de equações diferenciais parciais hiperbólicas não lineares

UEPA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA