Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática.
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

DILSON MARTINS DO NASCIMENTO
NATANAEL FREITAS CABRAL

FUNÇÃO TANGENTE COM USO DE MATERIAL MANIPULÁVEL CONCRETO E VIRTUAL

Produto Educacional

BELÉM/PA
2022

Dilson Martins do Nascimento
Natanael Freitas Cabral

FUNÇÃO TANGENTE COM USO DE MATERIAL MANIPULÁVEL CONCRETO E VIRTUAL

Produto Educacional

Produto educacional vinculado à dissertação "**Ensino de Função Tangente com uso de Material manipulável concreto e virtual**" do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.

BELÉM/PA
2022

Clay Anderson Nunes Chagas
Reitor Universidade do Estado do Pará

Ilma Pastana Ferreira
Vice-Reitora Universidade do Estado do Pará

Renato da Costa Teixeira
Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação

Anderson Madson Oliveira Maia
Diretor do Centro de Ciências Sociais e Educação

Fábio José da Costa Alves
Coordenador do PPGEM

Natanael Freitas Cabral
Vice coordenador do PPGEM

Diagramação e Capa: Os autores
Revisão: Os autores

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Função tangente com uso de material manipulável concreto e virtual: produto educacional / Dilson Martins do Nascimento, Natanael Freitas Cabral. - Belém, 2022.

Produto educacional vinculado à Dissertação “Ensino de função tangente com uso de material manipulável concreto e virtual do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, Belém, 2022.

ISBN: 978-65-84998-01-8

1. Trigonometria-Estudo e ensino (Ensino médio) 2. Prática de ensino 3. Aprendizagem. I. Cabral, Natanael Freitas. II. Título.

CDD. 23º ed.516.24

Regina Coeli A. Ribeiro – CRB-2/739

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O produto educacional intitulado “Função Tangente com uso de material manipulável concreto e virtual” para o ensino de Função Tangente foi estruturado como sequência didática estruturada com Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC), segundo o teórico Cabral (2017). Este produto foi construído, experimentado e validado durante uma pesquisa de Mestrado profissional em ensino de Matemática do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.

Durante o desenvolvimento da sequência didática foi realizada uma pesquisa baseada na teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 1996). Este produto educacional é destinado aos professores e estudantes do Ensino Médio para ensino e aprendizagem de Função Tangente. Trata-se de um produto didático validado experimentalmente que apresentou potencialidades quantitativas e qualitativas para o objetivo a que se destina: ensinar Função Tangente por meio de dois recursos didáticos: Prancha Trigonométrica e aplicativo Geogebra.

A Prancha trigonométrica é aqui utilizada como Material Manipulável Concreto de modo que os estudantes podem manusear e visualizar o comportamento de funções trigonométricas. O aplicativo *geogebra* é adotado como Material Manipulável Virtual e trata-se de um *software* educacional gratuito que pode ser utilizado para diversos conteúdos de Matemática auxiliando no desenvolvimento da linguagem gráfica, geométrica e algébrica.

O professor que adotar este produto estará proporcionando a seus educandos um instrumento de ensino e aprendizagem de Função Tangente experimentado e validado com potencialidades didáticas quantitativas e qualitativas das quais destaca-se:

- Um instrumento de ensino que promove uma aceleração da construção autônoma do conhecimento matemático;
- Retomada de conhecimentos base;
- Desenvolvimento da linguagem gráfica, geométrica, algébrica e língua natural como forma de significação ao conhecimento aprendido.

- Interações entre estudantes, entre professor e estudantes a níveis crescentes de formalização, do intuitivo ao teórico.
- Motivação, autonomia e cooperação no processo de aprendizagem.
- Um produto fundamentado por meio de pesquisa científica, bibliográfica e experimental baseada nas atuais diretrizes educacionais para o ensino de Matemática no Ensino Médio.

Neste material também disponibiliza-se uma seção sobre o objeto matemático Função Tangente como um passeio histórico e epistemológico. Também, há um roteiro de aplicação e instrução para o professor que adote este produto que foi criado com o intuito de colaborar com a Educação Matemática.

A sequência didática a seguir apresentada possui quatro atividades que, de forma gradual e colaborativa, conduzem para o alcance das habilidades necessárias para a aprendizagem de Função Tangente, quais sejam sua conceituação, reconhecimento, construção gráfica, generalizações e exercícios.

Todo material necessário para utilização deste produto educacional, bem como a fundamentação e instrução de uso, apresentamos a seguir.

Os autores.

1 APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Esta seção é destinada a apresentar os aportes teóricos e metodológicos que fundamentam e estruturam este produto educacional: Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (1996); Sequência Didática Estruturada como Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC's) do teórico Cabral (2017);

Os aportes acima apresentados estão correlacionados aos elementos epistemológicos da pesquisa que construiu e validou este produto para ensino de Função Tangente como descrito a seguir.

a) A Teoria das Situações Didática é a teoria mais geral adotada e a que desempenha o papel de caracterizar os sujeitos, os contextos e o objeto matemático de estudo. Para realizar tal caracterização, os capítulos preliminares da dissertação que descrevem todo o processo de construção, experimentação e validação deste produto passaram por uma revisão de literatura, pesquisa com estudantes e professores e do estudo do objeto matemático função tangente, para verificar as necessidades de ensino e aprendizagem desse objeto no ensino médio e assim definir os três elementos de estudo dessa teoria: aluno, professor e saber.
b) A Sequência Didática Estruturada como Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual se apropria do levantamento preliminar para elaborar e planejar a experimentação do instrumento de pesquisa: uma sequência didática elaborada para o ensino de função tangente, o que também cria o meio didático e pedagógico que se pretende promover a aprendizagem. A estrutura em UARC permite que as intervenções do professor sejam motivadas de intenção, possibilitando a ocorrência das situações didáticas.

1. 1. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) teve origem na França, no final da década de 60 do século XX, através de estudos realizados no Instituto de Investigação do Ensino de Matemática (IREM), em meio ao Movimento da Matemática Moderna. O instituto surgiu com objetivo de oferecer complementação na formação de professores de Matemática, através da produção de meios materiais de apoio para complementar o ensino de matemática na sala de aula. Os meios materiais eram jogos, brinquedos, textos, problemas, exercícios e experimento de ensino. Através da produção desses materiais, surgiram discussões que amadureceram e favoreceram para o surgimento da TSD.

A criação da TSD se deve a Guy Brosseau, um educador matemático francês que elaborou esta teoria, dentro do Movimento da Matemática Moderna (MMM), a qual foi baseada em teorias construtivistas como a Epistemologia Genética de Jean Piaget e no Sócio construtivismo, de Vygotsky.

Como os materiais produzidos no instituto trabalhavam bastante a parte cognitiva, a TSD ganhou apoio nos estudos de Piaget, no Construtivismo, que entende que o conhecimento é algo que só passa a existir quando interagimos com o mundo que nos cerca, ou seja, quando interpretamos esse mundo; e do socio construtivismo, de Vygotsky, que afirma que de fato existe um conhecimento do lado de fora, um conhecimento que está impregnado na cultura, nos objetos, nas formas como as pessoas vivem. Mas quando esse conhecimento é internalizado, ou seja, quando alguém adota esse conhecimento, ele é interpretado pelo sujeito com base na sua história de vida. Vygotsky estava, portanto, interessado em estudar como a interação social interfere no desenvolvimento e na aprendizagem das pessoas.

Dessa forma, de acordo com Almouloud (2007, p.32), o qual diz que “o objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática, na qual são identificadas as interações entre professor, aluno e saber”

A TSD tem o objetivo de compreender as relações existentes na terna **aluno, professor e saber**. A teoria permite que o professor organize uma situação (didática) que incentive a autonomia do aluno na construção do conhecimento. O professor propõe ao aluno e este se compromete em se apropriar do saber. O aluno é que vai construindo os saberes através das orientações do professor que o direciona. Por isso Brosseau compara o trabalho do aluno a de um pesquisador, o qual testa conjecturas, formula hipóteses e as prova, constrói modelos, conceitos, teorias e socializa os resultados, sempre com o suporte do professor, que proporciona um ambiente favorável para que ele transforme esse saber em conhecimento.

A TSD tem, então, a intenção de modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos. A figura a seguir mostra o triângulo didático, formado por aluno, professor e saber e como se relacionam.

Figura 1: Triângulo didático

Fonte: Elaborado pelo autor

A TSD é uma teoria que estimula o desenvolvimento de alunos autônomos, reflexivos, ativos e argumentativos. Alunos que buscam vários caminhos na busca de soluções e procuram na mente conhecimentos adquiridos no passado (conhecimentos prévios) que serão usados na situação presente. Esses conhecimentos são chamados de adidáticos. São os conhecimentos onde não há a presença do professor, ou não há a necessidade de sua presença, não tendo assim, interferência ou auxílio no aprendizado.

A busca pela solução do problema se dá através das situações elaboradas pelo professor, aproximando o aluno do saber, que depois será transformado em conhecimento. Nesse sentido, o professor deve tomar cuidado na criação dessa situação de modo que ela torne favorável essa transformação.

Nesse momento, surgem os termos "situação didática" e situação adidática", sendo necessário fazer a diferença entre eles. Brousseau (1996) define uma situação como sendo uma ação entre duas ou mais pessoas, podendo ou não, a partir desta ação, gerar um conhecimento ou saber e afirma que uma situação didática ocorre quando há a intenção de aprendizagem, e nela há o suporte de alguém que direcione esta aprendizagem, que no caso é o professor.

Dessa forma, percebemos uma relação na tríade aluno – conhecimento – professor. Ela é marcada por um jogo de interações do aluno com os problemas apresentados pelo professor.

Na situação adidática, há uma conexão entre o aluno e o conhecimento sem a presença do professor. O aluno se encontra só, diante de um problema que precisa resolver, tendo como suporte seus conhecimentos prévios. Neste momento o professor não interfere com nenhum modelo de resolução pronto e acabado. Portanto, o aluno se conecta ao conhecimento de forma direta, trabalhando individualmente ou em grupo, deixando de lado o contato com o professor. Além disso, a situação (ou problema) é elaborada com intuito de estimular o aluno a agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria.

Em relação às situações adidáticas, Brosseau a utiliza para se referir à uma situação fundamental:

> cada conhecimento pode ser caracterizado por, pelo menos uma situação adidática que preserva seu sentido, e que é chamada de situação fundamental. Ela determina o conhecimento ensinado a um dado momento e o significado particular que esse conhecimento vai tomar do fato tendo em vista as escolhas das variáveis didáticas e as restrições e reformulações sofridas em seu processo de organização e reorganização. (ALMOULOUD, 2007, p.34)

Dessa forma, uma situação fundamental é definida como um grupo restrito de situações adidáticas a qual considera a noção de ensinar seja a resposta mais adequada ou indicada para o problema.

Para fundamentar a Teoria das Situações, são usadas três hipóteses:

a) O aluno aprende quando se adapta a um milieu fator de dificuldades, contradições, desequilíbrios. O saber é desenvolvido com as respostas novas, que aparecem para provar a aprendizagem.
b) O professor deve criar e organizar um milieu com objetivo de desenvolver situações favoráveis para que ocorra o aprendizado.
c) O milieu e as situações devem engajar fortemente os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

Assim, as situações didáticas são planejadas e elaboradas pelo professor, isto é, são motivadas pela intenção de alcançar os objetivos educacionais, estabelecendo-se um “contrato didático” entre professor e aluno, nem sempre explícitos.

As situações didáticas criadas pelo professor para os alunos são compostas de fases de ação, de formulação, de validação e de institucionalização que, segundo Brousseau (1996) e Almouloud (2014), são caracterizadas como:

a) *Situação de ação*: A partir das proposições do professor aos alunos, interagem entre si e o *milieu*.
b) *Situação de formulação*: Momento de discussão e com mobilização da linguagem oral e escrita entre alunos e professor a fim de argumentar sobre o que foi constatado.
c) *Situação de validação*: Momento de apresentar um modelo de resolução para as proposições do professor, validando, verificando e demonstrando as informações.
d) *Situação de institucionalização*: Momento conferido ao professor ao formalizar e generalizar os conceitos pretendidos.

Em tais situações estabelece-se modelos explicativos e esquemas teóricos para responder às intervenções do professor, buscando-se validar ou refutar modelos e esquemas anteriormente constituídos e ao se chegar a um consenso possam ser formalizados pelo professor para institucionalizar o saber pretendido. Após essa institucionalização espera-se que o estudante consiga realizar a transformação do conhecimento científico em conhecimento escolar, isto é, realize a *transposição didática*. Para tanto, a qualidade das interações aluno-professor e aluno-aluno, bem como o amadurecimento cognitivo individual dos educandos definirão o sucesso do evento didático.

Diante do exposto, a TSD funcionarou nesta pesquisa como uma estrutura metodológica geral empregada, partindo-se de uma investigação preliminar sobre os objetivos e dificuldades de ensino e aprendizagem de função tangente no ensino Médio, para fundamentar a elaboração da sequência didática construída.

1. 2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA ESTRUTURADA POR UARC

No contexto do planejamento estratégico de atividades organizadas para o desenvolvimento de objetivos educacionais no contexto escolar, uma "Sequência Didática" é um conjunto de atividades ou oficinas de aprendizagem aplicadas ao ensino de qualquer tipo de conteúdo escolar. Para Cabral (2017):

> Uma sequência didática é um conjunto de atividades escolares organizadas, de maneira sistemática, em torno de um gênero oral ou escrito. [...]. Quando nos comunicamos, adaptamo-nos à situação de comunicação. [...] Os textos escritos ou orais que produzimos diferenciam-se uns dos outros e isso porque são produzidos em condições diferentes. (ROJO e GLAÍS, 2010 apud CABRAL, 2017, p. 32)

O adendo de Cabral (2017) revela que, uma sequência didática é elaborada considerando-se condições específicas do público a que destina, isto é, nível de ensino, modadlidade de ensino, amadurecimento cognitivo, habilidades e objetivos que se pretende alcançar, realidade e contexto cultural e social que se possa tirar inspiração e motivação, dentre outros.

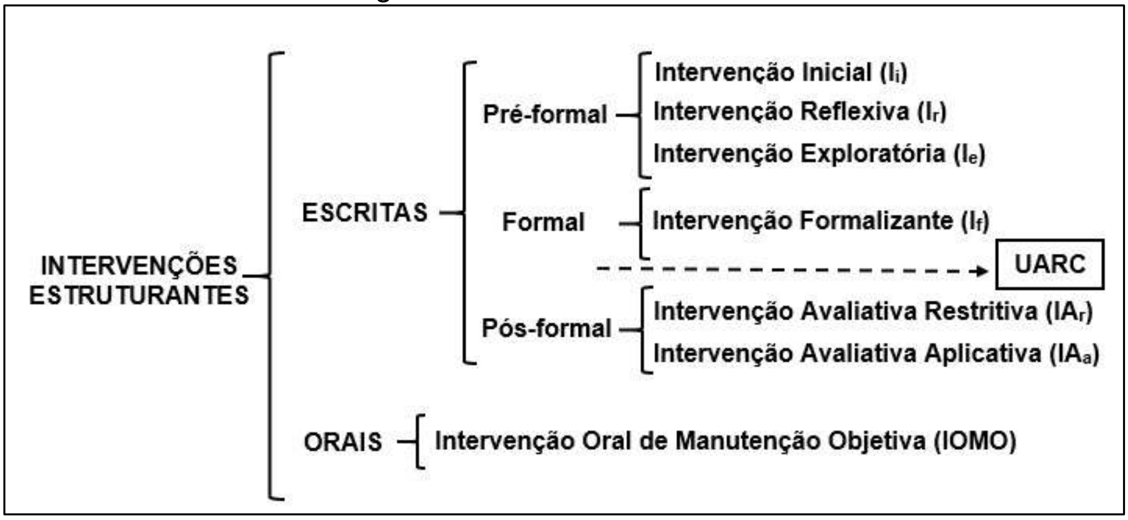
Logo, a sequência didática em si abre diversas possibilidades pedagógicas podendo agregar de forma individual ou combinada diferentes tendências do ensino de matemática, neste caso, das quais podemos citar a modelagem matemática, a etnomatemática, o uso de tecnologias, uso de jogos.

A maneira em que se deu coesão às atividades do produto objeto desta pesquisa foi sob a estrutura de Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC's), proposta por Cabral (2017) para estruturar a sequência didática para o ensino de função tangente.

> um conjunto articulado de dispositivos comunicacionais de natureza escrita ou oral que sistematiza as intervenções de ensino com a intencionalidade objetiva de estimular a aprendizagem de algum conteúdo disciplinar de Matemática a partir da percepção de regularidades e do estabelecimento de generalizações adotando-se uma dinâmica de interações empírico-intuitivas (CABRAL, 2017, p. 12).

Tal como a TSD, as UARC's como forma estruturante de sequência didática apresenta uma dinâmica de interações motivadas de intenção de estimular a aprendizagem, aqui chamadas de intervenções e classificadas como ilustro a seguir:

Figura 2: Estrutura das UARC's



Fonte: Cabral (2017)

As intervenções ilustradas na figura estruturam de maneira sistemática todo o episódio didático apresentado aos educandos de forma gradual ao nível de formalização (pré-formal, formal e pós -formal) do conhecimento e tendo as seguintes características:

a) Intervenção Inicial (Ii): Corresponde à primeira peça utilizada em uma espécie de jogo no qual o professor busca envolver o discente a partir de um discurso didático-pedagógico, na busca da percepção ativa (de maneira empírica e intuitiva) das regularidades relacionadas a determinado conceito;

b) Intervenção Reflexiva (Ir): Trata-se de uma intervenção que sempre se apresenta em forma de pergunta. Nela, um ou mais aspectos relacionados ao conceito estudado são inquiridos dos educandos e servirão para facilitar a reconstrução final do conceito pretendido pelo professor;

c) Intervenção Exploratória (Ie): Busca aprofundar a percepção dos alunos quanto às respostas dadas por eles nas intervenções reflexivas. Para isso, o professor solicita que os estudantes executem determinados procedimentos, agindo ativamente em simulações, descrições, preenchimentos de tabelas, etc.

d) Intervenção Formalizante ($\boldsymbol{If}$): A partir das intervenções anteriores, o professor considera aquilo que os escolares conseguiram se apropriar do conceito trabalhado e, levando em consideração a percepção de regularidade empírico-intuitiva dos alunos, formaliza o conceito matemático construído até então intuitivamente, mas agora, com o rigor inerente à Matemática.

e) Intervenção Avaliativa Restritiva ($\boldsymbol{IAr}$): Procura sondar o aprendizado do discente sobre o conceito matemático discutido, avaliando-o a partir de duas perguntas fundamentais: (i) O que é o objeto de estudo? E (ii) Como se justifica a utilização de determinado algoritmo na resolução de dada questão?

f) Intervenção Avaliativa Aplicada ($\boldsymbol{IAa}$): Nessa intervenção, o educando é levado a mobilizar as noções relacionadas ao conceito construído em resoluções de problemas e exercícios, tendo capacidade de ajustar as devidas habilidades em situações nas quais o objeto matemático é apresentado de forma plural, ou seja, em situações diversificadas.

Transversalmente a essas intervenções escritas, para sanar dúvidas e corrigir situações não previstas, é necessário que o professor realise intervenções orais durante a aplicação da sequência didática aos discentes, às quais Cabral (2017) denomina de Intervenções Orais de Manutenção Objetiva (I-OMO).

> Na verdade essa última categoria de intervenção pode ser entendida como uma espécie de Sequência Didática implícita complementar que é sustentada no discurso do professor durante todo o processo de ensino-aprendizagem e que permite a ele fazer as reformulações emergentes inevitáveis no processo de reconstrução conceitual (CABRAL, 2017, 45)

Todas essas intervenções permitiram que ocorressem interações aluno-aluno e aluno-professor necessárias para que fosse posssível detectar indícios de aprendizagem no discurso dos alunos que levaram a inferir a potencialidade da sequência didática. Neste sentido, as I-OMO contribuem na manutenção do diálogo e servem para que se provoque a externalização das estratégias adotadas e conclusões alcançadas pelos alunos.

1. 3 USO MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

O currículo de matemática brasileiro orienta a inserção de recursos didáticos diversos em sala de aula. A aproximação dos jovens a recursos tecnológicos exige do professor de matemática uma adequação e adaptação a esse público cada vez mais digital. É possível se apropriar sabiamente dessas habilidades dos estudantes para tornar o ensino de matemática mais dinâmico e prazeroso, sem perder o objetivo da aprendizagem e do rigor matemático. Assim, as diretrizes da Educação apontam formas de agregar tais recursos ao ensino de matemática.

> Os estudantes deverão ser capazes de fazer induções por meio de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais. Assim, ao formular conjecturas, mediante suas investigações, eles deverão buscar contra-exemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não precisa ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve incluir também argumentos mais "formais", sem que haja necessidade de chegarem à demonstração de diversas proposições. (BRASIL, 2017, p. 532)

Neste sentido, o recurso didático, concreto ou digital, deve ser uma ferramenta de investigação, que explore o raciocício e argumentação dos estudantes, bem como a comunicação das estratégias e conclusões alcançadas, sem que se perca o formalismo e rigor matemático necessários à aprendizagem.

A pesquisa realizada por Rodrigues & Gazire (2012) a respeito do uso de materiais manipuláveis no ensino de matemática levanta pontos importantes a considerar sobre essa utilização:

> • A importância da utilização de material didático manipulável no ensino da Matemática.• A utilização e as potencialidades do uso do material didático manipulável no ensino da matemática.• O papel do professor durante a utilização destes materiais de ensino. (RODRIGUES & GAZIRE, 2012, p. 190)

O aporte metodológico que adotei nesta pesquisa, material manipulável, permite a inserção de recursos pedagógicos dos mais diversos tipos, e, considerando as orientações curriculares para inserção de materiais de apoio visual e tecnológico, optei pelo uso de dois tipos de materiais manipuláveis: concreto e virtual. Descrevemos a seguir do que se trata esses recursos e como deve ser utilizado nesta pesquisa, considerando os pontos levantados por Rodrigues e Gazire (2012).

1. 3. 1 Material Manipulável Concreto.

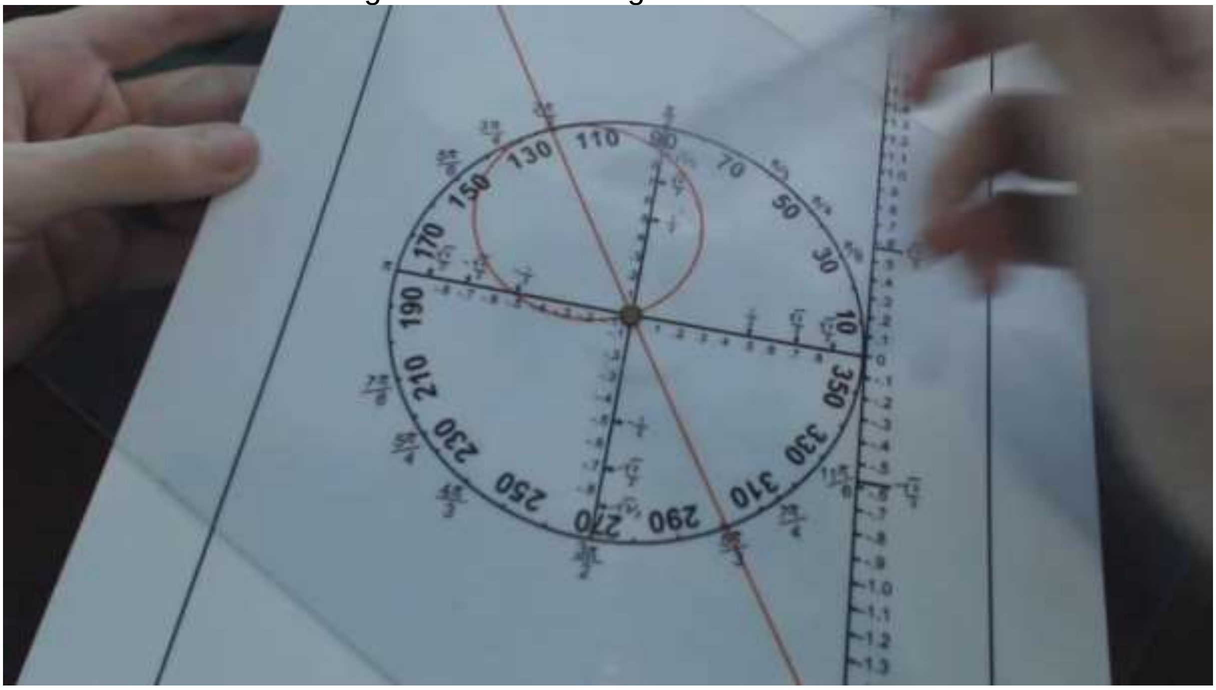
Neste produto educacional, apontamos uma alternativa para o ensino de Função Tangente que possa atender às necessidades de aprendizagem sobre o assunto de forma acessível a estudantes e professores. Optamos por utilizar um material manipulável concreto estático, definido por Rodrigues e Gazire (2012) da seguinte forma:

> O material manipulável estático: material concreto que não permite a transformação por continuidade, ou seja, alteração da sua estrutura física a partir da sua manipulação. Durante a atividade experimental, o sujeito apenas manuseia e observa o objeto na tentativa de abstrair dele algumas propriedades. Ao restringir o contato com o material didático apenas para o campo visual (observação), corre-se o risco de obter apenas um conhecimento superficial desse objeto. (RODRIGUES & GAZIRE, 2012, p. 190)

Devido à restrição acima citada, de incorrer em conhecimento superficial, a utilização do material a ser utilizado na sequência didática para o ensino de função tangente se dê apenas como artefato de investigação, para chegar ao objetivo de aprendizagem almejado.

O material aqui adotado chama-se Prancha Trigonométrica, um material que pode ser adquirido em papelarias ou lojas virtuais, ou facilmente confeccionado artesanalmente, com papel sulfite e transpatente em tamanho A4. Esse material manipulável concreto estático, permite a aferição da correspondência ângulo/valor da função trigonométrica, como ilustra a Figura 3:

Figura 3: Prancha trigonométrica



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=X_UGmnErhYk

Nesse sentido, o aluno manipula um material palpável, com recurso visual, que permite investigar regularidades e concluir um padrão de comportamento. O papel do professor é, então, de mediar essa investigação para que se alcance os objetivos de aprendizagem pretendidos, de modo a ter condições de formalizar os conceitos necessários e possibilitar que o estudante consiga aplicá-los em situações adidáticas, isto é, fora do contexto escolar e sem o uso desse recurso.

1. 3. 2 Material Manipulável Virtual

A sequência didática proposta nesta pesquisa foi aplicada com um grupo de estudantes do ensino Ensino Médio regular. Portanto, trata-se de um público de faixa etária de 16 a 17 anos de idade, uma geração que nasceu tendo contato com tecnologias da informação e comunicação. Além disso, fazendo parte da rotina diária desses alunos o uso de aparelhos eletrônicos como smartphones, aplicativos, notebooks. Nos apropriamos dessa característica desse público, para despertar o seu interesse e estimular o desenvolvimento do seu raciocínio para o estudo de Função Tangente utilizando Material Manipulável Virtual.

> enquanto um material manipulável é um objeto que o aluno ou o professor podem manipulá-lo de forma física, o manipulável virtual é um objeto que o aluno ou o professor podem manipulá-lo de forma virtual.(PEREIRA, 2017, p. 39)

Logo, o caráter da manipulação virtual se deu atavés de aparelhos eletrônicos, os quais os estudantes já possuiam familiaridade e tornaram o processo de ensino e aprendizagem mais dinâmico.

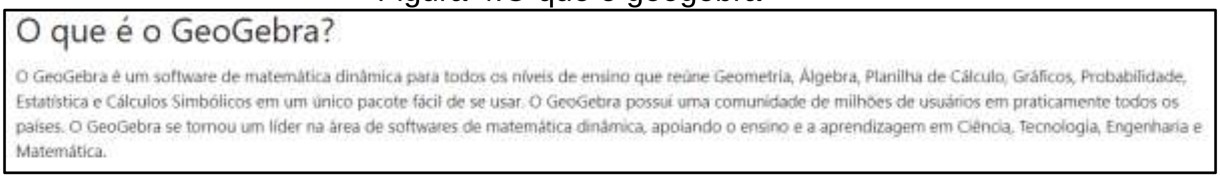
> [...] têm auxiliado estudantes e professores a visualizarem, generalizarem e representarem o fazer matemático de uma maneira passível de manipulação, pois permitem construção, interação, trabalho colaborativo, processos de descoberta de forma dinâmica e o confronto entre a teoria e a prática (PARANÁ, 2008, apud PEREIRA, 2017, p. 38).

Este recurso didático também se adequa ao aporte metodológico adotado nesta pesquisa, no que tange ao estímulo da investigação e interatividade, pois:

> [...] permitem a criação de ambientes de aprendizagem que estimulem a reflexão, a discussão, a interpretação, a simulação, a exploração, a experimentação e a resolução de problemas, de modo que o estudante possa desenvolver habilidades como a interpretação, a organização, a análise, a reflexão, a discussão, a criatividade, a autonomia, a interação, afetividade e o trabalho coletivo (SILVA, SAMÁ e MOURA, 2016, apud PEREIRA, 2017, p. 38)

Dadas as inúmeras vantagens da adoção de materiais manipuláveis virtuais, tanto para professores quanto para estudantes e considerando a acessibilidade na escola pública desses recursos, optei por utilizar um aplicativo com recursos gráficos e de calculadora, gratuito e manipulável mesmo sem uso de internet, o que me levou a decidir pelo aplicativo *Geogebra*, que segundo o próprio site:

Figura 4:O que é geogebra



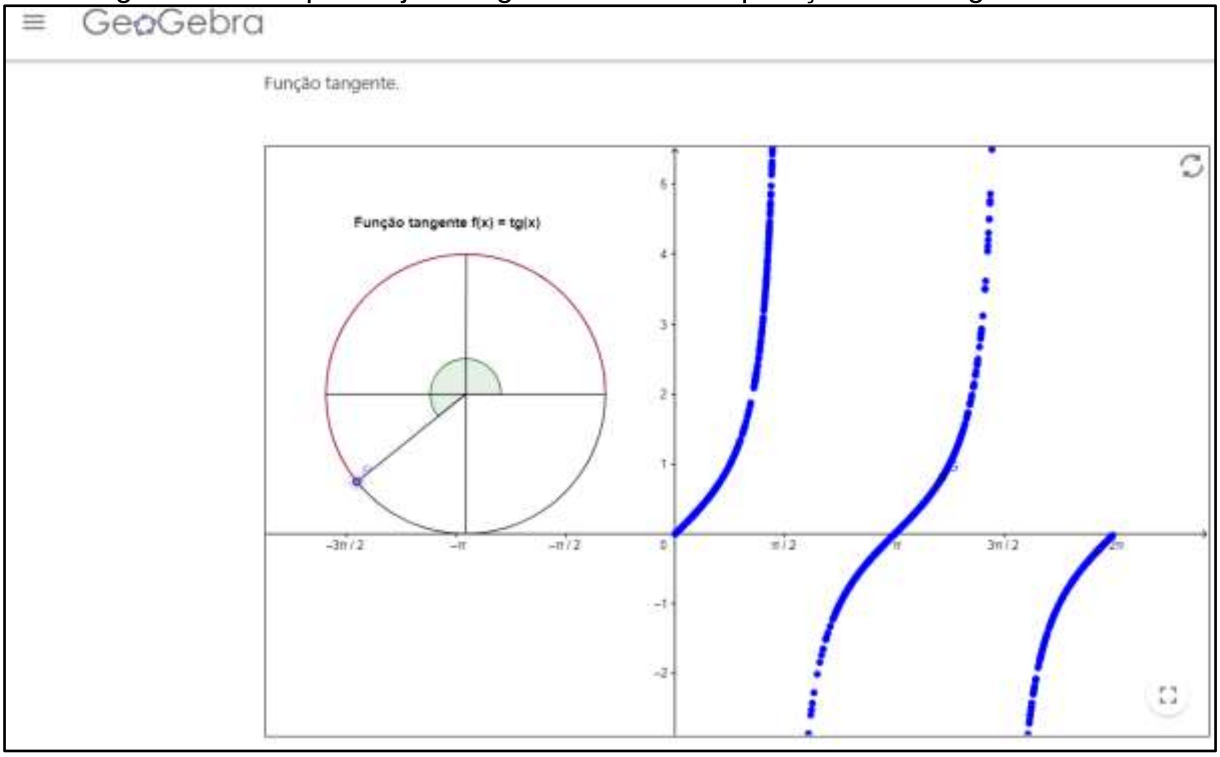
O que é o GeoGebra?

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. O GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países. O GeoGebra se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática.

Fonte: https://www.geogebra.org/about

O aplicativo Geogebra pode ser instalado em celurares, notebooks, computadores e tablets, ou utilizado on-line no próprio site do produto para criação de calculadoras, planilhas, gráficos, livros virtuais, etc, para os mais diversos conteúdos do ensino de matemática como, no caso desta pesquisa, função tangente.

Figura 5: Exemplo de janela gráfica e de manipulação no Geogebra



Fonte: https://www.geogebra.org/m/rrS2SHgU

Os objetos manipuláveis virtuais podem ser criados por professores e estudantes no aplicativo Geogegra ou ser utilizados os que estão disponíveis no próprio site. A manipulação em episódio didático precisa ser orientada e mediada pelo professor afim de alcançar os objetivos de aprendizagem almejados.

A seguir apresentamos o produto educacional Sequência didática estruturada por UARC para o Ensino de Função Tangente.

2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Apresentamos o produto educacional "Função tangente com uso de Material Manipulável concreto e virtual". Antes de apresentar cada uma das atividades no material do professor, indicamos algumas instruções que facilitarão a aplicação satisfatória deste produto com estudantes do Ensino Médio ao estudarem Função Tangente.

2.1 INSTRUÇÕES AO PROFESSOR

Os aportes que fundamentaram a construção deste produto pressupõem a valorização dos conhecimentos base do educando, haja vista que desenvolvem uma formalização sobre o objeto matemático Função Tangente que parte das ideias a níveis perceptivos/intuitivos, passando por níveis empíricos (manipulação e construção), para então alcançar uma segurança conceitual que evidencie a aprendizagem do educando. Deste modo, é necessário que o professor promova previamente a retomada de alguns conceitos antes de iniciar a aplicação deste produto, quais sejam:

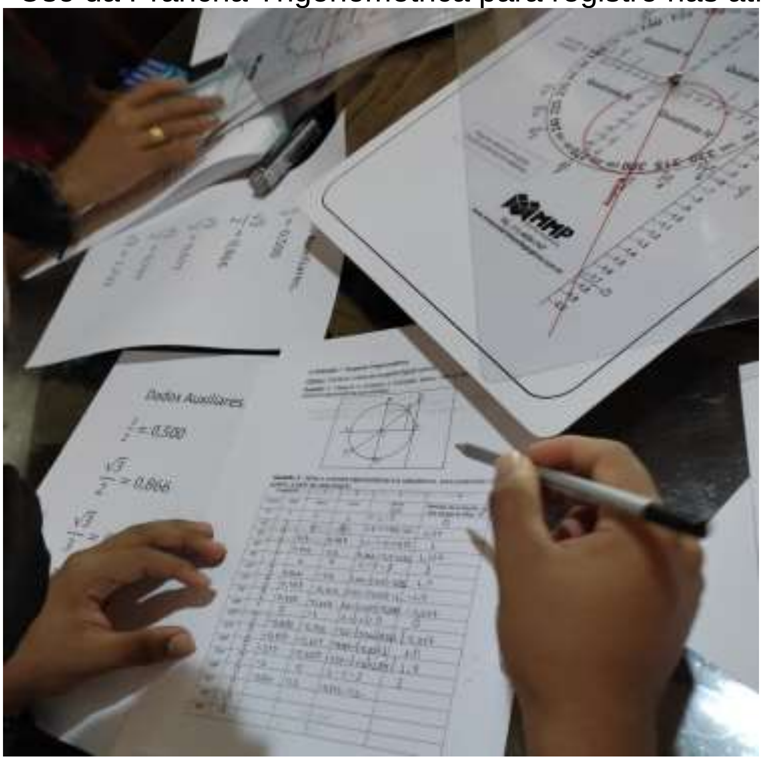
- Conceito de função, domínio, contradomínio e imagem;
- Noção de periodicidade;
- Ciclo trigonométrico;
- $\cos x$ e $sen\ x$ respectivamente como a abcissa e a ordenada do ponto $P(x)$ da circunferência unitária;
- Transformações geométricas (translação, rotação, reflexão, deformação por expansão e contração).

Essa retomada de conhecimentos base pode ser feita por meio de revisão ou resolução de exercícios, haja vista que são normalmente estudados no Ensino Fundamental e possivelmente necessitarão ser despertados para uma aplicação satisfatória. É possível também que o professor inicie a aplicação e vá fazendo intervenções orais durante a aplicação, deixando que os educandos discutam entre si para se lembrarem e assim trocar experiências e ideias. De todo modo essa seria uma decisão que o professor tomará por meio do conhecimento que possui sobre seus educandos, considerando a realidade e condições cognitivas que tenha acompanhado ou verificado por meio de avaliação ou experiência adquirida com a vivência com seus educandos.

Outro ponto importante a se considerar é a Familiarização com os recursos Prancha Trigonométrica e aplicativo *Geogebra.* Nesse aspecto o professor pode previamente proporcionar a manipulação para explicar o funciomento desses recursos ou proporcionar essa familiarização durante a aplicação deste produto educacional, a seu critério.

No que diz respeito à Prancha Trigonométrica (usada nas atividades 1, 2 e 3) pode ser adquirida em papelarias ou comprada pela internet. Também é uma boa opção promover com os educandos uma oficina para construção desse material. A Prancha Trigonométrica funciona neste produto como Material Manipulável concreto, desse modo é necessário estar acompanhado do material impresso de instrução e registro das atividades. Nesse recurso há uma base onde está desenhado o ciclo trigonométrico unitário e no centro está fixada uma folha de material transpatente com linha que passa pelo centro do ciclo. Ao realizar o giro da folha transparente, a linha indica o valor numérico do seno, cosseno e tangente, como ilustrado a seguir:

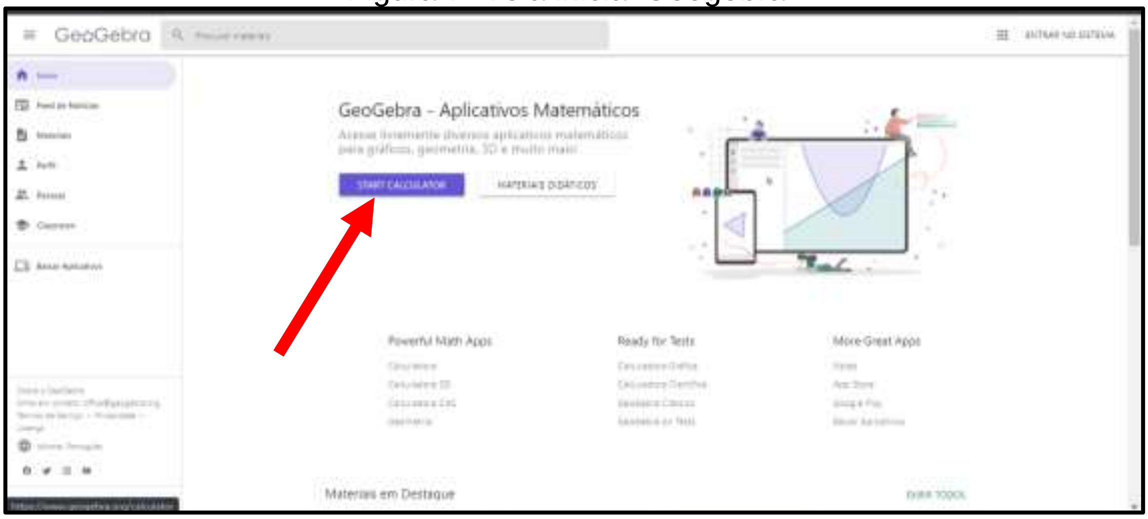
Figura 6- Uso da Prancha Trigonométrica para registro nas atividades.



Sobre o aplicativo *Geogebra*, adotado na atividade 4 o professor pode instruir que os educandos instalem no celular pessoal ou que usem on-line no endereço geogebra.org. Também é possível utilizar de modo on-line ou off-line no computador ou notebooks, a critério do professor. Esse aplicativo é adotado como Material manipulável virtual e também tem função de auxiliar no registro, observação e análise de comportamento da Tunção Tangente, aliando a linguagem gráfica, geométrica, algébrica e língua natural para um maior aprofundamento sobre o objeto de estudo.

A figura a seguir ilustra a primeira tela do aplicativo Geogebra. Nela o usuário deve clicar em “Start Calculator”, como indica a seta vermelha.

Figura 7- Tela inicial Geogebra.



Fonte: Geogebra.org

Abrirá a tela ilustrada na figura 8 em que o usuário deve clicar no botão “f(x)” (seta azul), em seguida no botão “tg” (seta vermelha), automaticamente aparece a forma algébrica “f(x)=Tg (x)” (seta verde) e seu gráfico, mas o eixo das abscisas ainda não estará em radianos.

Figura 8- Inserindo a Função Tangente

Fonte: Geogebra.org

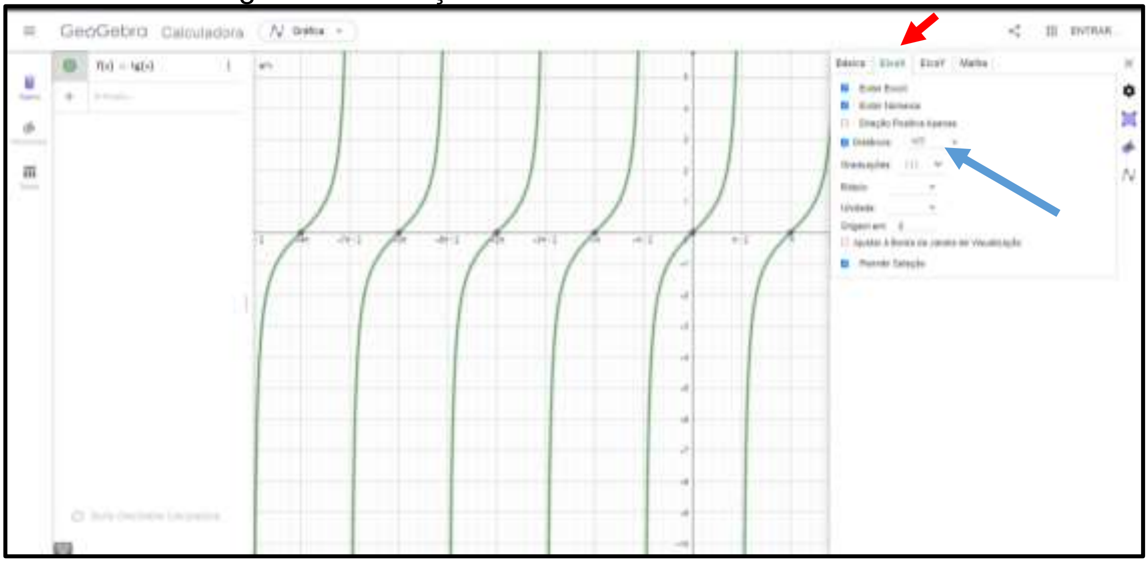
Para que o eixo das abscissas seja ajustado para radianos, na lateral direita superior da interface abre-se algumas opções e o usuário deve clicar em “configurações” (seta vermelha).

Figura 9 - Configurando os eixos

Fonte: Geogebra.org

Na aba de configuração que abrirá o usuário clica no botão “eixo x” (seta vermelha) e altera a distância para $\pi/2$ (seta azul).

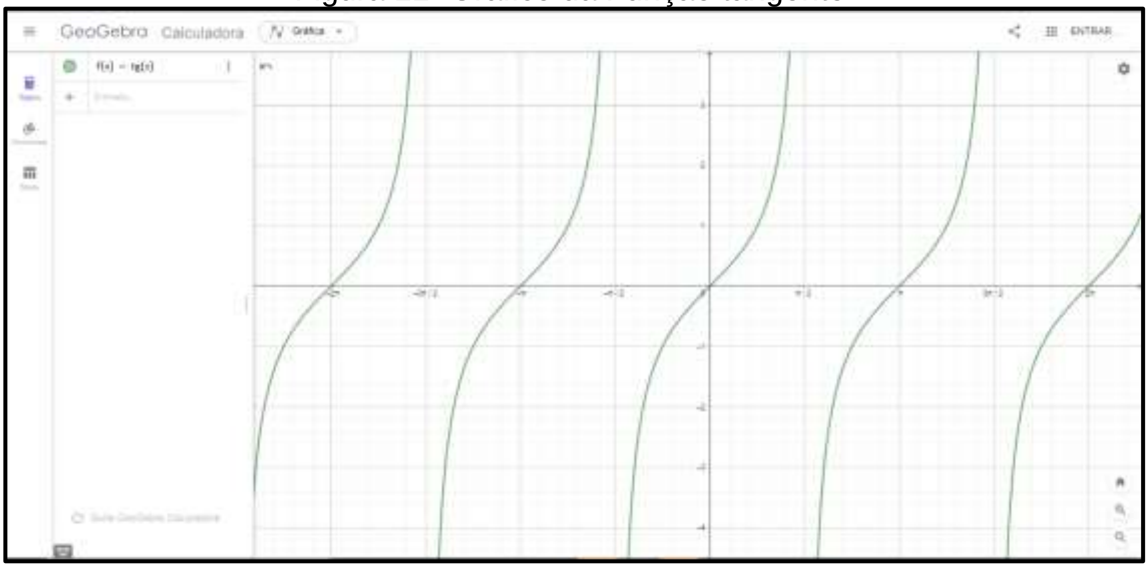
Figura 10- Seleção do eixo e distância dos valores



Fonte: Geogebra.org

Feito isto, o gráfico da Tunção Tangente aparece no plano cartesiano (Figura 11) tal qual foi construído pelos alunos com auxílio da prancha trigonométrica.

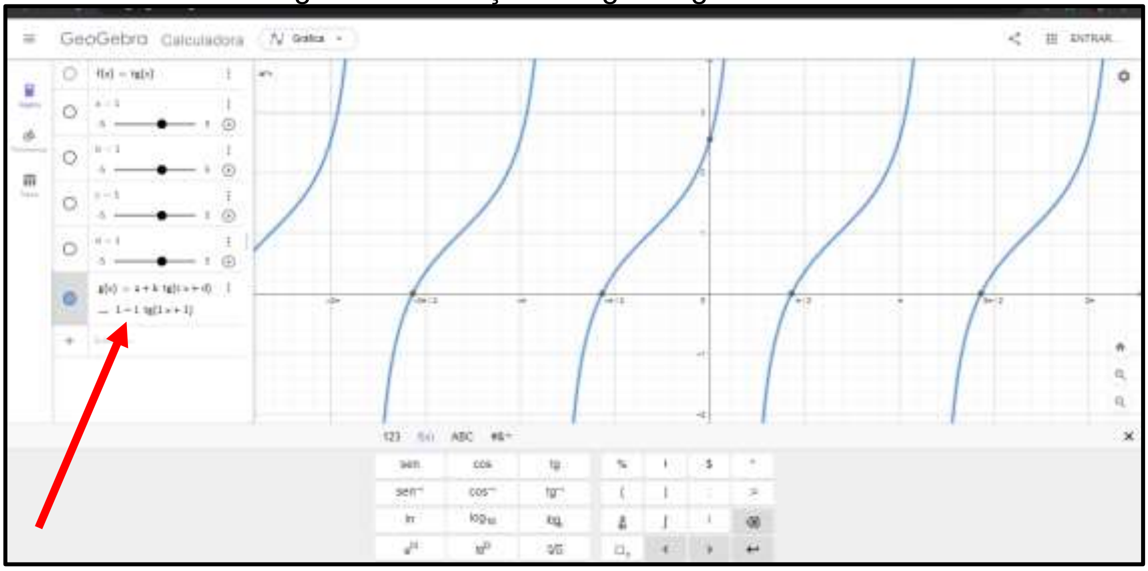
Figura 11- Gráfico da Função tangente



Fonte: Geogebra.org

Na barra de álgebra (seta vermelha) o usuário pode escrever a função Tangente generalizada $f(x) = a + b\, tg(cx + d)$, automaticamente aparecem as barras de rolagem para cada um dos coeficientes, a, b, c e d, conforme ilustra a figura 12.

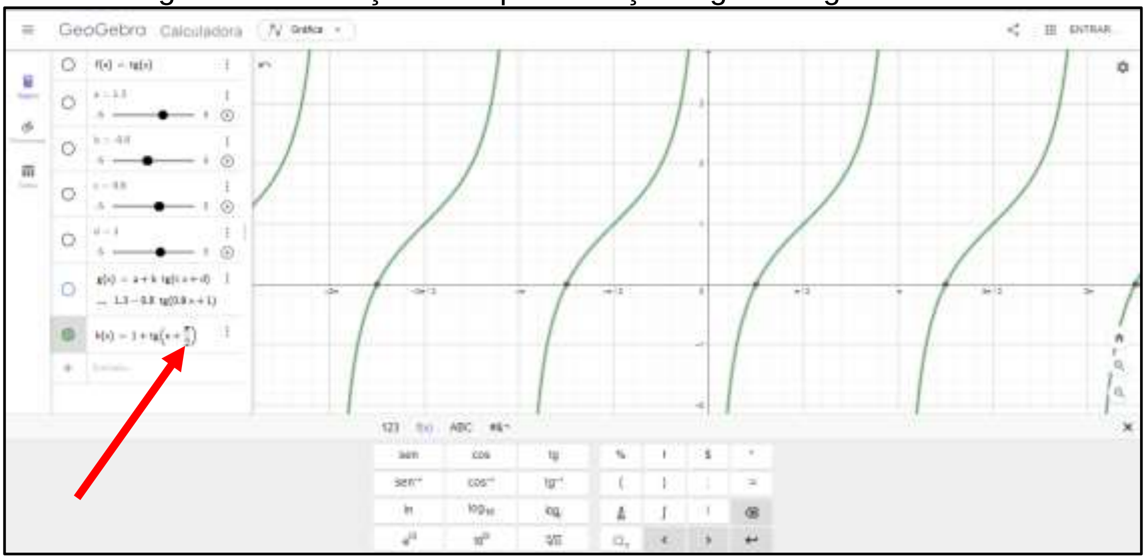
Figura 12 - Função Tangente generalizada



Fonte: Geogebra.org

O professor deve, nesse momento da atividade 4, retomar algumas propriedades verificadas nas atividades anteriores, tais como sobre a existência da função tangente, que implica em $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ e que o coeficiente d deve ser informado em radianos, como indicado (seta vermelha) na figura 13.

Figura 13 - Inserção da representação algébrica generalizada



Fonte: Geogebra.org

O gráfico pode ser alterado tanto pela movimentação dos coeficientes na barra de rolagem quanto pela inserção escrita da forma algébrica com os valores dos coeficientes definidos.

Para melhor síntese do roteiro das atividades apresenta-se no quadro a seguir as informações pertinentes a cada atividade com informação de seu título, objetivo de aprendizagem, material utilizado e tempo estimado de aplicação.

Quadro 1- Resumo do roteiro das atividades

Título	Objetivo	Material	Tempo
ATIVIDADE 1- Tangente Trigonométrica	Introduzir a ideia de tangente trigonométrica	Folha de atividades, régua, lápis, calculadora, Tábua Trigonométrica.	3 h/aula
ATIVIDADE 2- Definição de função tangente.	Definir a função tangente.	Folha de atividades, régua, lápis, calculadora, tábua trigonométrica.	1h/aula
ATIVIDADE 3- Representação gráfica da Função Tangente.	Construir o gráfico da Função Tangente, reconhecendo assíntotas, período e sinal.	Material manipulável concreto estático e folha de atividade.	1h/aula
ATIVIDADE 4- Generalização da função tangente e suas transformações.	Generalizar o comportamento da função tangente a partir da inserção de coeficientes.	Folha de atividade, lápis, borracha, computador ou celular com aplicativo Geogebra.	2h/aula

Fonte: Elaborado pelos autores (2021)

Note que estima-se um tempo maior de aplicação para a primeira atividade devido à familiarização com o material e retomada de conhecimentos base. Nas demais atividades o tempo de aplicação é naturalmente reduzido, sendo que na atividade 4 também é momento de familiarização com o aplicativo, mas os estudantes serão capazes de acessar os conhecimentos das atividades anteriores.

Durante toda a aplicação que pode ser individualizada ou grupo é importante que o professor esteja atento sobre o momento de intervir oralmente, isto é, quando a atividade não avançar apenas com as discussões entre os educandos ou perceber que houve algum equivoco no entendimento conceitual ou procedimental.

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

SEQUÊNCIA DIDÁTICA
FUNÇÃO TANGENTE COM MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Dilson Martins do Nascimento

Natanael Freitas Cabral

2.2 MATERIAL DO PROFESSOR

Belém-PA

2022

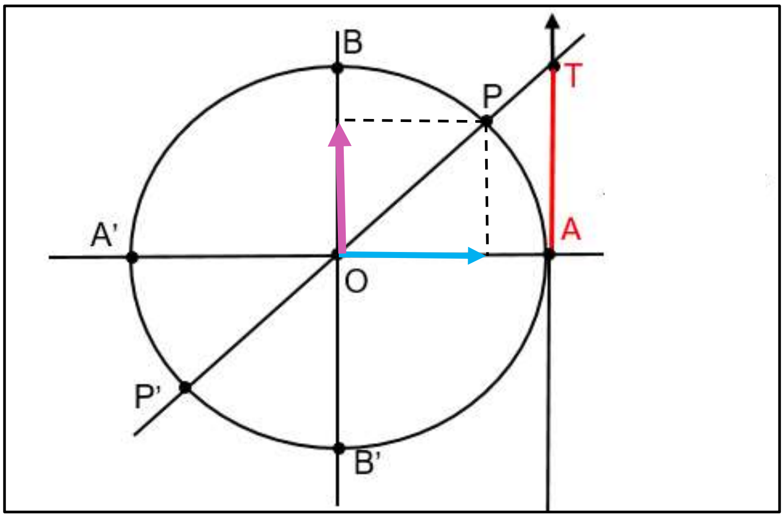
ATIVIDADE 1: Tangente Trigonométrica

Objetivo: Introduzir a ideia de tangente trigonométrica.

Recursos: Folha de atividades, régua, lápis, calculadora, Tábua Trigonométrica.

Orientação para aplicação: O professor deverá formar grupos e disponibilizar os recursos acima descrito. Os alunos preencherão o quadro e por meio de intervenções reflexivas da atividade e mais as orais que o professor julgar necessárias. O professor fará a formalização após perceber que os estudantes alcançaram o conhecimento pré-formal de tangente trigonométrica. Em seguida irá propor intervenções de avaliação de aprendizagem.

Intervenção Inicial: Observe e compare a ilustração a baixo com a configuração da tábua trigonométrica que recebeu.



Intervenção Exploratória: Utilize a tábua trigonométrica e a calculadora, para preencher o quadro, a partir de cada ângulo.

Ângulo(α)		1	2	3	4
$Graus$	Rad	$\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}$	$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}$	$\frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$	Medida da projeção na reta tangente Med. $\overline{AT}$
$0°$	0				
$30°$	$\frac{\pi}{6}$				
$45°$	$\frac{\pi}{4}$				
$60°$	$\frac{\pi}{3}$				
$90°$	$\frac{\pi}{2}$				

$120°$	$\frac{2\pi}{3}$				
$135°$	$\frac{3\pi}{4}$				
$150°$	$\frac{5\pi}{6}$				
$180°$	π				
$210°$	$\frac{7\pi}{6}$				
$225°$	$\frac{5\pi}{4}$				
$240°$	$\frac{4\pi}{3}$				
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$				
$300°$	$\frac{5\pi}{3}$				
$315°$	$\frac{7\pi}{4}$				
$330°$	$\frac{11\pi}{6}$				
$360°$	2π				

Intervenção Reflexiva: Existe alguma regularidade ou padrão entre as colunas 3 e 4? Explique.

Intervenção Reflexiva: Você conseguiu encontrar o valor de $\frac{\boldsymbol{sen\ \alpha}}{\boldsymbol{\cos\alpha}}$ para todos os ângulos da tabela no ciclo? Relate.

Intervenção Reflexiva: Você conseguiu encontrar o valor da medida da projeção $\overline{AT}$ (med. $\overline{AT}$) na reta tangente para todos os ângulos dados na tabela? Relate.

Intervenção Reflexiva: Observando as manipulações na tábua trigonométrica e a tabela preenchida, quais os ângulos em que **não houve** valor para o quociente $\frac{\boldsymbol{sen\ \alpha}}{\boldsymbol{\cos\alpha}}$ e a Med.$\overline{AT}$?

Intervenção Reflexiva: Com o material manipulável, partindo do ângulo 0 (em rad), existe alguma regularidade nos ângulos em que **não existem** valores para $\frac{\boldsymbol{sen\ \alpha}}{\boldsymbol{\cos\alpha}}$ e a Med.$\overline{AT}$? Explique como isso acontece.

FORMALIZAÇÃO

Dado um arco qualquer α (medidos em radianos ou em graus), o quociente de razão trigonométrica $tg\ \alpha$ é dada pelo quociente trigonométrico $\frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = \overline{AT}$, sendo $\overline{AT}$ a medida do segmento formado na reta tangente e $\cos\alpha \neq 0$, a partir da origem. Portanto, $\boldsymbol{\frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = tg\ \alpha = \overline{AT}}$ **,** $\boldsymbol{\cos\alpha \neq 0}$**.**

Outras orientações:

Na ficha de atividade do estudante deverá ir em branco o quadro da formalização para que, ao final, o professor disponibilize. O momento de realizar a formalização será quando o estudante enxergar a regularidade da igualdade das medidas algébricas, e compreende o porquê de alguns casos não ser possível aferir essa medida.

Intervenção Avaliativa Restritiva: Dados $sen\ x = 1$ e $cos\ x\ = 2$, calcule $tg\ x$.

Intervenção Avaliativa Restritiva: Dados calcule $tg\ x$ para:

a) $x = 30°$
b) $x = -90°$

Intervenção Avaliativa Aplicativa: Marque para quais valores de β abaixo existe $tg\ x$, para as que não existe, justifique.

a) ( ) $\beta = 90^o$____
b) ( ) $\beta = -30^o$____
c) ( ) $\beta = 120^o$____
d) ( ) $\beta = 180^o$____
e) ( ) $\beta = -90^o$____
f) ( ) $\beta = 450^o$____
g) ( ) $\beta = 0°$ ____
h) ( ) $\beta = 270^o$____

ATIVIDADE 2: Definição de função tangente

Objetivo: Definir a função tangente.

Recursos materiais: Folha de atividades, régua, lápis, calculadora, tábua trigonométrica.

Orientação para aplicação: O professor deverá manter os grupos da atividade anterior e disponibilizar os recursos acima descritos. Os alunos preencherão o quadro e por meio de intervenções reflexivas da atividade e mais as orais que o professor julgar necessárias. O professor fará a formalização após perceber que os estudantes alcançaram o conhecimento pré-formal dos "ingredientes" da função tangente: domínio, imagem e como se relacionam. Em seguida irá propor intervenções de avaliação de aprendizagem.

Intervenção exploratória: Considerando x o valor "variável" do ângulo em graus ou radianos, baseado no quadro da atividade 1 e com apoio da tábua trigonométrica, preencha o quadro.

x		$tg\ (x)$	$Tg\ (x+\pi)$ (+ 1/2 volta)	$Tg\ (x+2\pi)$ (+1 volta)	$Tg\ (x+3\pi)$ (+1 e 1/2 volta)	$Tg\ (x+4\pi)$ (+2 voltas)
$Graus$	Rad					
$0°$	0					
$30°$	$\frac{\pi}{6}$					
$45°$	$\frac{\pi}{4}$					
$60°$	$\frac{\pi}{3}$					
$90°$	$\frac{\pi}{2}$					
$135°$	$\frac{3\pi}{4}$					
$150°$	$\frac{5\pi}{6}$					
$180°$	π					
$225°$	$\frac{5\pi}{4}$					
$240°$	$\frac{4\pi}{3}$					
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$					
$300°$	$\frac{5\pi}{3}$					
$330°$	$\frac{11\pi}{6}$					
$360°$	2π					

Intervenção Reflexiva: É possível dizer que existe $tg(\ x)$ para qualquer valor de x? Explique.

Intervenção Reflexiva: Exceto para os valores de x estabelecidos na questão anterior, para todo valor x existirá um único valor da $tg(x)$?

Intervenção Reflexiva: É possível afirmar que o comportamento estudado sobre a tangente trigonométrica é funcional? Se sim, defina o domínio e a imagem.

FORMALIZAÇÃO
Chamamos de função tangente a função definida por $y = tg(x) = \frac{sen\ (x)}{\cos(x)}$, em que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. O domínio da função tangente é $D: \{x \in \mathbb{R}/x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e a imagem é $Im(f) = \mathbb{R}$.

Outras orientações:

Nessa atividade é possível também explorar regularidades realizando os giros no sentido anti-horário. Ainda que sem o auxílio gráfico, o professor poderá explorar preliminarmente os sinais da função, com o quadro preenchido ou com o material manipulável. É importante frisar a diferença entre o número $tg\ x$ (fixo) e a função $tg\ (x)$ (variável). As intervenções avaliativas deverão ser feitas, preferencialmente sem ajuda da tábua trigonométrica. A ficha do estudante será com o quadro de formalização em branco.

Intervenção Avaliativa Restritiva: Seja $y = tg\ (x)$, para cada intervalo indicado abaixo, informe o valor de x para o qual a função $tg(x)$ não possui imagem.

a) $45° < x < 120°$ - ângulo encontrado: ____________
b) $200° < x < 300°$ - ângulo encontrado: __________
c) $600° < x < 700°$ - ângulo encontrado:__________
d) $-30° < x < -180°$ - ângulo encontrado:__________

Intervenção Avaliativa Aplicativa: Seja $y = tg\ (x)$, de acordo com a definição a função tangente, o seu domínio percorre todo o conjunto dos reais, exceto para quais valores? Explique.

ATIVIDADE 3: Representação gráfica da Função Tangente.

Objetivo: Construir o gráfico da Função Tangente, reconhecendo assíntotas, período e sinal.

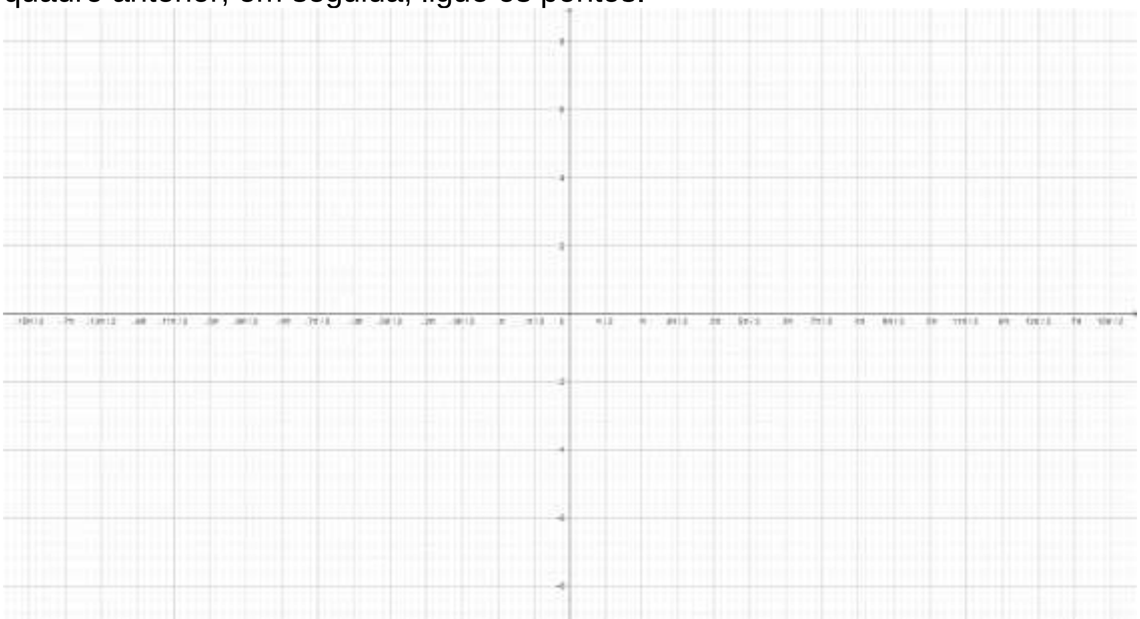
Recursos utilizados**:** Material manipulável concreto e folha de atividade.

Orientação para aplicação: O professor deverá manter os grupos da atividade anterior e disponibilizar os recursos acima descritos. Os alunos preencherão o quadro e por meio de intervenções reflexivas da atividade e mais as orais que o professor julgar necessárias. O professor fará a formalização após perceber que os estudantes alcançaram o conhecimento pré-formal sobre onde e porque ocorrem as assíntotas do gráfico da função tangente e como elas delimitam a periodicidade dessa função. Em seguida irá propor intervenções de avaliação de aprendizagem.

Intervenção Inicial: Transcreva as informações do quadro da atividade 2, para o quadro abaixo.

x		$tg\ (x)$
$Graus$	Rad	
$0°$	0	
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	
$135°$	$\frac{3\pi}{4}$	
$150°$	$\frac{5\pi}{6}$	
$180°$	π	
$225°$	$\frac{5\pi}{4}$	
$240°$	$\frac{4\pi}{3}$	
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$	
$300°$	$\frac{5\pi}{3}$	
$330°$	$\frac{11\pi}{6}$	
$360°$	2π	

Intervenção Exploratória: Localize graficamente os pontos $(x, \overline{OT})$, com x em radianos, no plano cartesiano abaixo, com o auxílio da tábua trigonométrica e do quadro anterior, em seguida, ligue os pontos.



Intervenção Reflexiva: É possível fazer a correspondência por meio de pontos para todos os ângulos do ciclo trigonométrico? Relate.

Intervenção Reflexiva: Em todo o intervalo analisado, você percebeu algum valor x em que ocorre uma "ruptura" do gráfico da $tg(x)$? Baseado nas atividades 1 e 2, em quais situações e por que isso acontece?

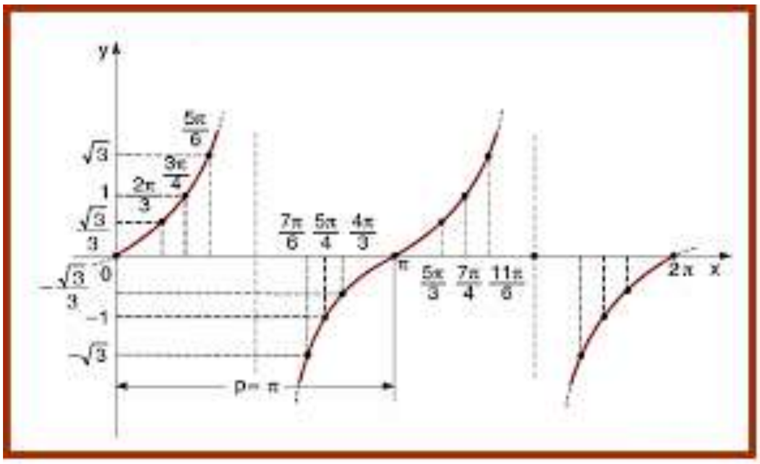
Intervenção Reflexiva: Com o auxílio da tábua trigonométrica e apoio visual do gráfico construído, em quais quadrantes a função tangente é positiva ou negativa?

Intervenção Reflexiva: Observando o comportamento do gráfico a cada "ruptura". Qual o menor intervalo em que você observou a repetição do mesmo comportamento no gráfico da função tangente?

Intervenção Reflexiva: Como você explica o comportamento gráfico da função tangente, considerando a "repetição" e as "rupturas".

FORMALIZAÇÃO

A função tangente é periódica e também assintótica, seu período é $p = \pi$, pois π é o menor número real positivo tal que $tg(x + \pi) = tg(x)$, para todo x no domínio da função. Suas assíntotas (valores para os quais a tangente não existe) estão localizadas nos arcos $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. E o gráfico é positivo no primeiro e terceiro quadrantes e negativo no segundo e quarto quadrantes.



Intervenção Avaliativa Restritiva: A partir da formalização anterior, sabendo que a função tangente tem período π, e que $tg(x+\pi) = tg(x)$, preencha os parênteses com os ângulos e os valores das tangentes que tem mesmo valor no período **seguinte ou anterior**, conforme o caso. A primeira serve de exemplo.

$tg(0°) = tg(180°) = 0$

$tg(30°) = tg(\quad\quad) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$tg(\quad\quad) = tg(225°) = 1$

$tg(60°) = tg(\quad\quad) = \sqrt{3}$

$tg(\quad\quad) = tg(\quad\quad) = \nexists$

$tg(\quad\quad) = tg(300°\,) = -\sqrt{3}$

$tg(135) = tg(315°) =$

$tg(150) = tg(\quad\quad) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$tg(180) = tg(\quad\quad) = 0$

Intervenção Avaliativa Aplicativa: A partir do gráfico que você construiu, identifique para cada item abaixo o próximo valor de x cuja imagem $tg(x)$ terá sinal oposto:

Exemplo: $tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ ➡ $Tg\ (x) = -\sqrt{3}$ ➡ $x = \frac{2}{3}\pi$

a) $tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $tg(135°) = -1$

c) $tg\left(\frac{15\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

d) $tg(-120°) = \sqrt{3}$

ATIVIDADE 4: Generalização da função tangente e suas transformações.

Objetivo: Generalizar o comportamento da função tangente a partir da inserção de coeficientes.

Material: Folha de atividade, lápis, borracha, computador ou celular com aplicativo Geogebra.

Orientação para aplicação: O professor deverá manter os grupos da atividade anterior e disponibilizar os recursos acima descritos. O professor vai retomar os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores, fazendo manipulações através do aplicativo Geogebra, na função $f(x) = tg\ x$. Os alunos preencherão os quadros e as intervenções relativas a eles, por meio dessas intervenções, orais e escritas, deverão observar que tipo de transformações ocorrem no comportamento do gráfico da função tangente a cada alteração de valores dos coeficientes a, b , c e d na forma geral da função tangente $f(x) = a + b\ tg(cx + d)$. O professor fará a formalização após perceber que os estudantes alcançaram o conhecimento pré-formal sobre as transformações geométricas percebidas no gráfico. Em seguida irá propor intervenções de avaliação de aprendizagem, preferencialmente sem o recurso virtual do Geogebra.

Intervenção Inicial: Ao abrir a janela de calculadora gráfica do Geogebra, escreva no espaço destinado a função: " $f(x) = tg\ x$" . Observe todas as características estudadas nas atividades anteriores: Domínio, Imagem assíntotas, período, sinal, forma geométrica do gráfico.

Intervenção Exploratória: Acrescente o coeficiente à forma algébrica da função tangente, conforme indicado e faça as substituições de valores indicados para observar e registrar as transformações geométricas ocorridas.

$\boldsymbol{f(x) = a + tg\ x}$	**Transformação geométrica**	**Mudou o domínio**	**Mudou o período**
a>0			
a<0			

$\boldsymbol{f(x) = b\ tg\ x}$	**Transformação geométrica**	**Mudou o domínio**	**Mudou o período**
b>0			
b<0			
$\boldsymbol{\|b\|}$ **>1 crescente**			
$\boldsymbol{\|b\|}$ **<1 se aproximando de zero**			

$f(x) = tg\ cx$	Transformação geométrica	Mudou o domínio	Mudou o período
c>0			
c<0			
$\lvert c \rvert$ >1 crescente			
$\lvert c \rvert$ <1 se aproximando de zero			

$f(x) = tg\ (x + d)$	Transformação geométrica	Mudou o domínio	Mudou o período
d>0			
d<0			

Intervenção reflexiva: Quais coeficientes promovem translação do gráfico? Em relação a abscissa ou a ordenada? Relate.

Intervenção reflexiva: Quais coeficientes promovem reflexão do gráfico? Em relação a abscissa ou a ordenada? Relate.

Intervenção reflexiva: Quais coeficientes promovem deformação? Como ocorre?

Intervenção reflexiva: Quais coeficientes alteram domínio e quais alteram o período da função tangente. Como ocorre?

FORMALIZAÇÃO

A função tangente tem como forma algébrica generalizada a expressão $f(x) = a + b\ tg\ (cx + d), a, b, c, d \in \mathbb{R}$, b ≠0 e $D = \left\{x \in \mathbb{R}/x \neq \left[\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)c^{-1}\right] + d, (k \in \mathbb{Z})\right\}$ e $p = \pi c^{-1}$. De modo que asvariações nos coeficientes promovem as seguintes transformações geométrica em seu gráfico:

Coeficientes	Transformação
a	Translação vertical
b	Reflexão no eixo vertical (sinal) Deformação bidimensional (módulo)
c	Reflexão no eixo horizontal (sinal) Deformação no eixo horizontal (módulo) Interfere no domínio e no período
d	Translação horizontal Interfere no período

Intervenção Avaliativa Restritiva: A partir do gráfico da função $f(x) = tg(x)$ e da função geral $f(x) = a + b.tg(c.x + d)$, indique, nos itens abaixo, em qual coeficiente houve a variação.

$$f(x) = tg(x)$$

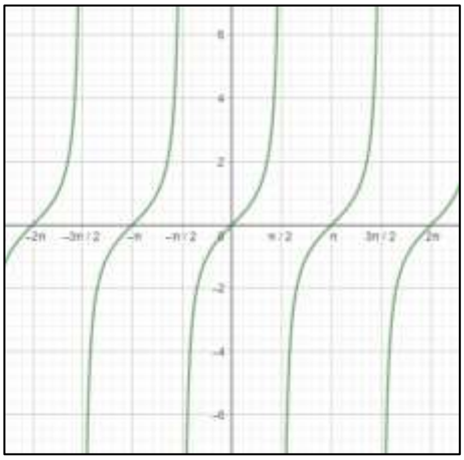
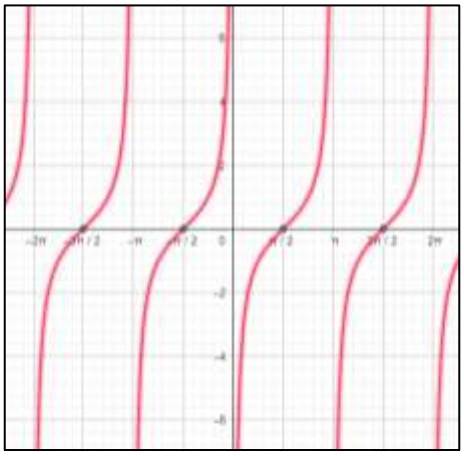
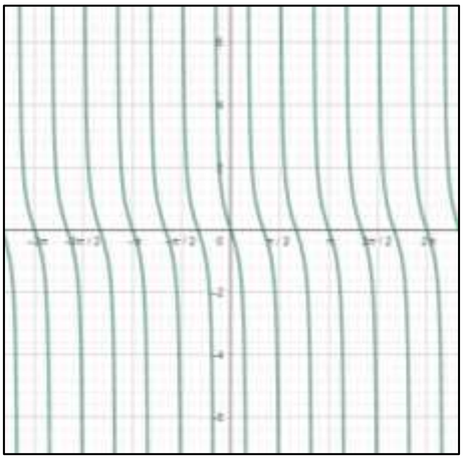


Gráfico 1



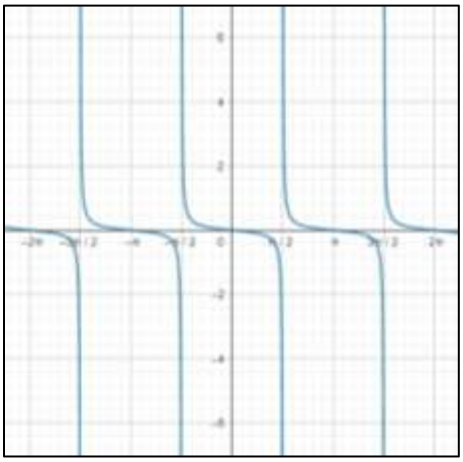
( ) a ( ) b ( ) c ( ) d

Gráfico 2



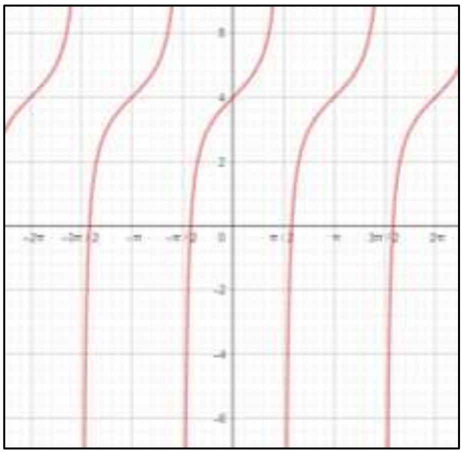
( ) a ( ) b ( ) c ( ) d

Gráfico 1



( ) a ( ) b ( ) c ( ) d

Gráfico 2



( ) a ( ) b ( ) c ( ) d

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

SEQUÊNCIA DIDÁTICA
FUNÇÃO TANGENTE COM MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Dilson Martins do Nascimento
Natanael Freitas Cabral

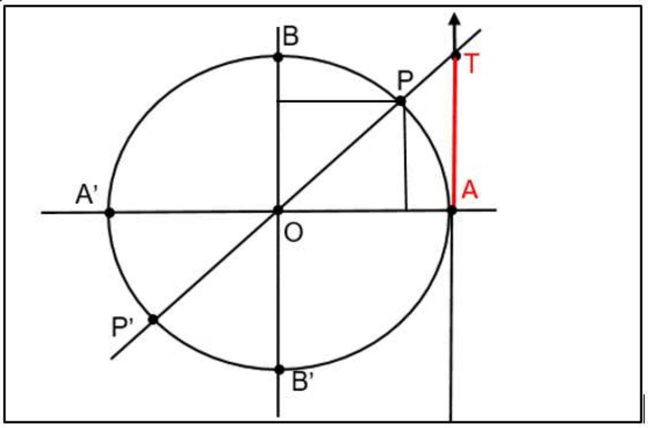
2. 3 MATERIAL DO ESTUDANTE

Belém-PA
2022

ATIVIDADE 1: Tangente Trigonométrica

Objetivo: Introduzir a ideia de tangente trigonométrica.

Questão 1: Observe e compare a ilustração abaixo com a configuração da prancha trigonométrica que recebeu.



Questão 2: Utilize a prancha trigonométrica e a calculadora, para preencher o quadro, a partir de cada ângulo.

Ângulo(α)		1	2	3	4
$Graus$	Rad	$\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}$	$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}$	$\frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$	Medida da projeção na reta tangente Med. $\overline{AT}$
$0°$	0				
$30°$	$\frac{\pi}{6}$				
$45°$	$\frac{\pi}{4}$				
$60°$	$\frac{\pi}{3}$				
$90°$	$\frac{\pi}{2}$				
$120°$	$\frac{2\pi}{3}$				
$135°$	$\frac{3\pi}{4}$				
$150°$	$\frac{5\pi}{6}$				
$180°$	π				
$210°$	$\frac{7\pi}{6}$				

$225°$	$\frac{5\pi}{4}$				
$240°$	$\frac{4\pi}{3}$				
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$				
$300°$	$\frac{5\pi}{3}$				
$315°$	$\frac{7\pi}{4}$				
$330°$	$\frac{11\pi}{6}$				
$360°$	2π				

Questão 3: Existe alguma regularidade ou padrão entre as colunas 3 e 4? Explique.

Questão 4: Você conseguiu encontrar o valor de $\frac{\boldsymbol{sen\ \alpha}}{\boldsymbol{\cos \alpha}}$ para todos os ângulos da tabela no ciclo? Relate.

Questão 5: Você conseguiu encontrar o valor da medida da projeção $\overline{AT}$ (med. $\overline{AT}$) na reta tangente para todos os ângulos dados na tabela? Relate.

Questão 6: Observando as manipulações na tábua trigonométrica e a tabela preenchida, quais os ângulos em que **não houve** valor para o quociente $\frac{\boldsymbol{sen\ \alpha}}{\boldsymbol{\cos \alpha}}$ e a Med.$\overline{AT}$?

Questão 7: Com o material manipulável, partindo do ângulo 0 (em rad), existe alguma regularidade nos ângulos em que **não existem** valores para $\frac{\boldsymbol{sen\,\alpha}}{\boldsymbol{\cos\alpha}}$ e a Med.$\overline{AT}$? Explique como isso acontece.

FORMALIZAÇÃO 1

Questão 9: Dados os ângulos, calcule $tg\ x$ para:

c) $x = 30°$

d) $x = -90°$

Questão 10: Dentre os ângulos β a seguir, para alguns deles não existirá a $tg\ \beta$. Identifique esses ângulos e justifique porquê não existe a $tg\ \beta$.

$\beta = 90^o$	$\beta = -30^o$	$\beta = 120^o$	$\beta = 180^o$
$\beta = -90^o$	$\beta = 450^o$	$\beta = 0°$	$\beta = 270^o$

ATIVIDADE 2: Definição de função tangente

Objetivo: Definir a função tangente.

Recursos materiais: Folha de atividades, régua, lápis, calculadora, prancha trigonométrica.

Intervenção exploratória: Considerando x o valor "variável" do ângulo em graus ou radianos, baseado no quadro da atividade 1 e com apoio da prancha trigonométrica, preencha o quadro.

x		$tg\ (x)$	$tg\ (x+\pi)$	$tg\ (x+2\pi)$	$tg\ (x+3\pi)$	$tg\ (x+4\pi)$
$Graus$	Rad					
$0°$	0					
$30°$	$\frac{\pi}{6}$					
$45°$	$\frac{\pi}{4}$					
$60°$	$\frac{\pi}{3}$					
$90°$	$\frac{\pi}{2}$					
$120°$	$\frac{2\pi}{3}$					
$135°$	$\frac{3\pi}{4}$					
$150°$	$\frac{5\pi}{6}$					
$180°$	π					
$210°$	$\frac{7\pi}{6}$					
$225°$	$\frac{5\pi}{4}$					
$240°$	$\frac{4\pi}{3}$					
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$					
$300°$	$\frac{5\pi}{3}$					
$315°$	$\frac{7\pi}{4}$					
$330°$	$\frac{11\pi}{6}$					
$360°$	2π					

Questão 1: É possível dizer que existe $tg(\ x)$ para qualquer valor de x? Explique.

Questão 2: Exceto para os valores de x estabelecidos na questão anterior, para todo valor x existirá um único valor da $tg(x)$?

Questão 3: É possível afirmar que o comportamento estudado sobre a tangente trigonométrica é funcional? Se sim, defina o domínio e a imagem.

Questão 4: Em quais quadrantes observados na prancha trigonométrica os valores da tangente são positivos e em quais são negativos?

FORMALIZAÇÃO 2

Questão 5: Seja $y = tg\ (x)$, para cada intervalo indicado abaixo, informe o valor de x para o qual a função $tg(x)$ não possui imagem.

e) $45° < x < 120°$ - ângulo encontrado: ____________

f) $200° < x < 300°$ - ângulo encontrado: __________

g) $600° < x < 700°$ - ângulo encontrado:__________

h) $-30° < x < -180°$ - ângulo encontrado:__________

Questão 6: Seja $y = tg\ (x)$, de acordo com a definição a função tangente, o seu domínio percorre todo o conjunto dos reais, exceto para quais valores? Explique.

Questão 7: Os arcos notáveis de uma volta completa, de 0° a 2π estão distribuídos de acordo com sua posição nos quadrantes (do 1º ao 4º quadrante). Determine o sinal (positivo ou negativo) desses arcos.

Ângulo		Quadrante	Sinal da tangente
Graus	π rad		
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	1º	
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	1º	
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	1º	
$120°$	$\frac{2\pi}{3}$	2º	
$135°$	$\frac{3\pi}{4}$	2º	
$150°$	$\frac{5\pi}{6}$	2º	
$210°$	$\frac{7\pi}{6}$	3º	
$225°$	$\frac{5\pi}{4}$	3º	
$240°$	$\frac{4\pi}{3}$	3º	
$300°$	$\frac{5\pi}{3}$	4º	
$315°$	$\frac{7\pi}{4}$	4º	
$330°$	$\frac{11\pi}{6}$	4º	

ATIVIDADE 3: Representação gráfica da Função Tangente.

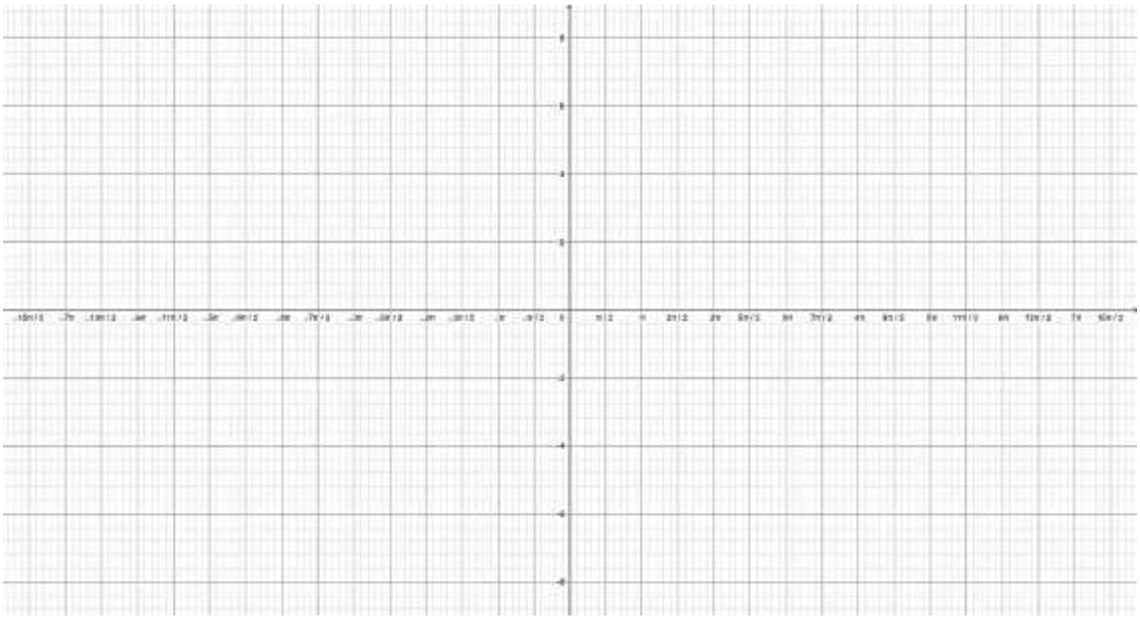
Objetivo: Construir o gráfico da Função Tangente, reconhecendo assíntotas, período e sinal.

Recursos utilizados**:** Material manipulável concreto estático e folha de atividade.

Intervenção Inicial: Transcreva as informações do quadro da atividade 2, para o quadro abaixo.

$\boldsymbol{x}$		$\boldsymbol{tg\ (x)}$
$\boldsymbol{Graus}$	$\boldsymbol{Rad}$	
$0°$	0	
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	
$120°$	$\frac{2\pi}{3}$	
$135°$	$\frac{3\pi}{4}$	
$150°$	$\frac{5\pi}{6}$	
$180°$	π	
$210°$	$\frac{7\pi}{6}$	
$225°$	$\frac{5\pi}{4}$	
$240°$	$\frac{4\pi}{3}$	
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$	
$300°$	$\frac{5\pi}{3}$	
$315°$	$\frac{7\pi}{4}$	
$330°$	$\frac{11\pi}{6}$	
$360°$	2π	

Intervenção Exploratória: Localize graficamente os pontos $(x, \overline{AT})$, com x em radianos, no plano cartesiano abaixo, com o auxílio da tábua trigonométrica e do quadro anterior, em seguida, ligue os pontos.



Intervenção Reflexiva: Sobre a questão anterior que você realizou, responda:

a) É possível fazer a correspondência por meio de pontos para todos os ângulos do ciclo trigonométrico? Relate.

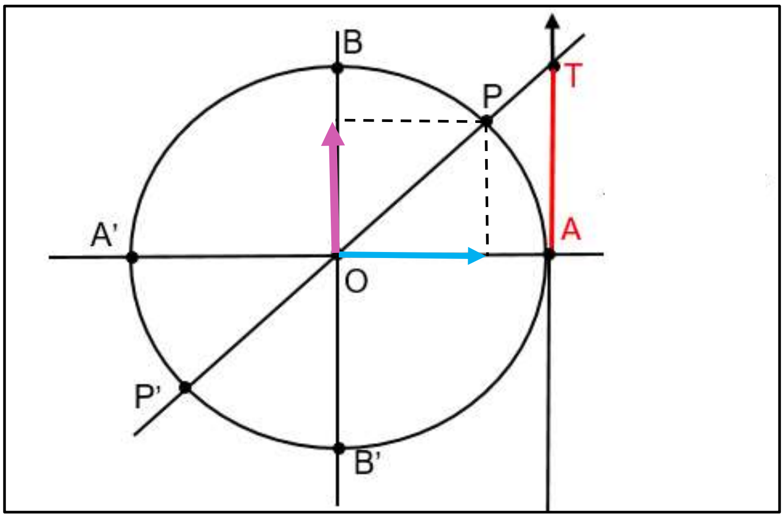
b) Em todo o intervalo analisado, você percebeu algum valor x em que ocorre uma “ruptura” do gráfico da $tg(x)$? Baseado nas atividades 1 e 2, em quais situações e por que isso acontece?

c) Com o auxílio da tábua trigonométrica e apoio visual do gráfico construído, em quais quadrantes a função tangente é positiva ou negativa?

d) Observando o comportamento do gráfico a cada “ruptura”. Qual o menor intervalo em que você observou a repetição do mesmo comportamento no gráfico da função tangente?

e) Como você explica o comportamento gráfico da função tangente, considerando a “repetição” e as “rupturas”.

FORMALIZAÇÃO 3



Intervenção Avaliativa Restritiva: A partir da formalização anterior, sabendo que a função tangente tem período π, e que $tg(x+\pi) = tg(x)$, preencha os parênteses com os ângulos e os valores das tangentes que tem mesmo valor no período **seguinte ou anterior**, conforme o caso. A primeira serve de exemplo.

$tg(0°) = tg(180°) = 0$

$tg(30°) = tg(\quad\quad) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$tg(\quad\quad) = tg(225°) = 1$

$tg(60°) = tg(\quad\quad) = \sqrt{3}$

$tg(\quad\quad) = tg(\quad\quad) = \nexists$

$tg(\quad\quad) = tg(300°\,) = -\sqrt{3}$

$tg(135) = tg(315°) =$

$tg(150) = tg(\quad\quad) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$tg(180) = tg(\quad\quad) = 0$

Intervenção Avaliativa Aplicativa: A partir do gráfico que você construiu, identifique para cada item abaixo o próximo valor de x cuja imagem $tg(x)$ terá sinal oposto:

Exemplo: $tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow$ Para que $Tg\ (x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad x = \frac{5}{6}\pi$ $\Rightarrow$

e) $tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

f) $tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

g) $tg\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$

h) $tg\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

ATIVIDADE 4: Generalização da função tangente e suas transformações.

Objetivo: Generalizar o comportamento da função tangente a partir da inserção de coeficientes.

Material: Folha de atividade, lápis, borracha, computador ou celular com aplicativo Geogebra.

Intervenção Inicial: Ao abrir a janela de calculadora gráfica do Geogebra, escreva no espaço destinado a função: "$f(x) = tg\, x$". Observe todas as características estudadas nas atividades anteriores: Domínio, Imagem assíntotas, período, sinal, forma geométrica do gráfico.

Intervenção Exploratória: Acrescente o coeficiente à forma algébrica da função tangente, conforme indicado e faça as substituições de valores indicados para observar e registrar as transformações geométricas ocorridas.

$\boldsymbol{f(x) = a + tg\, x}$	**Transformação geométrica**	**Mudou o domínio**	**Mudou o período**
a > 1			
a < 1			

$\boldsymbol{f(x) = b\, tg\, x}$	**Transformação geométrica**	**Mudou o domínio**	**Mudou o período**
b > 1			
b < 1			
$\lvert b \rvert$ >1 crescente			

$\|b\|$ <1 se aproximando de zero			

$f(x) = \ tg\ cx$	Transformação geométrica	Mudou o domínio	Mudou o período
c > 1			
c < 1			
$\|c\|$ >1 crescente			
$\|c\|$ <1 se aproximando de zero			

$f(x) = tg\ (x + d)$	Transformação geométrica	Mudou o domínio	Mudou o período
d > 0			
d < 0			

Intervenção reflexiva: Quais coeficientes promovem translação do gráfico? Em relação a abscissa ou a ordenada? Relate.

Intervenção reflexiva: Quais coeficientes promovem reflexão do gráfico? Em relação a abscissa ou a ordenada? Relate.

Intervenção reflexiva: Quais coeficientes promovem deformação? Como ocorre?

Intervenção reflexiva: Quais coeficientes alteram domínio e quais alteram o período da função tangente. Como ocorre?

FORMALIZAÇÃO 4

Intervenção Avaliativa Restritiva: A partir do gráfico da função $f(x) = tg(x)$, e da função geral $f(x) = a + b.tg(c.x + d)$, indicar, nos itens abaixo, em qual coeficiente houve a variação.

$$f(x) = tg(x)$$

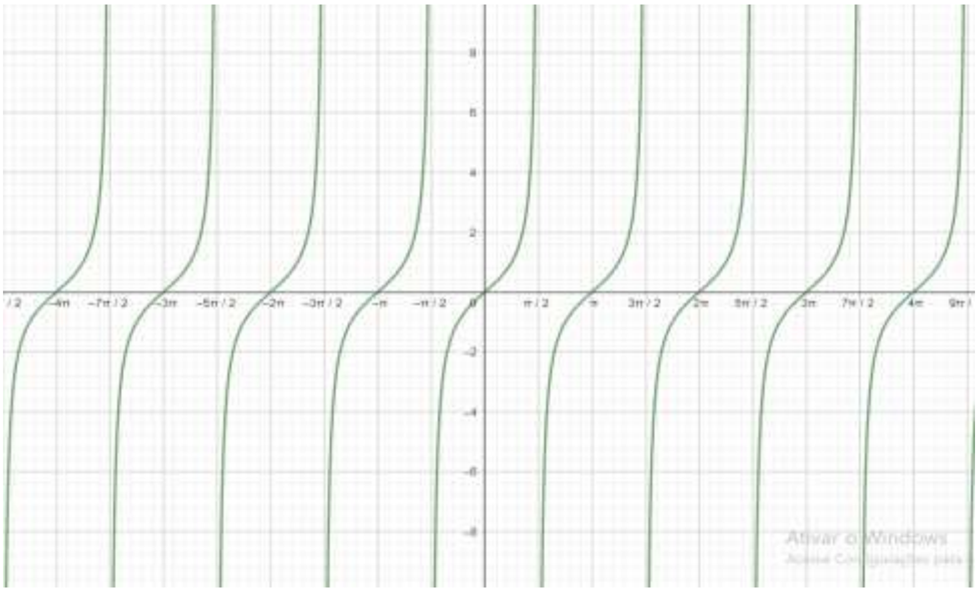
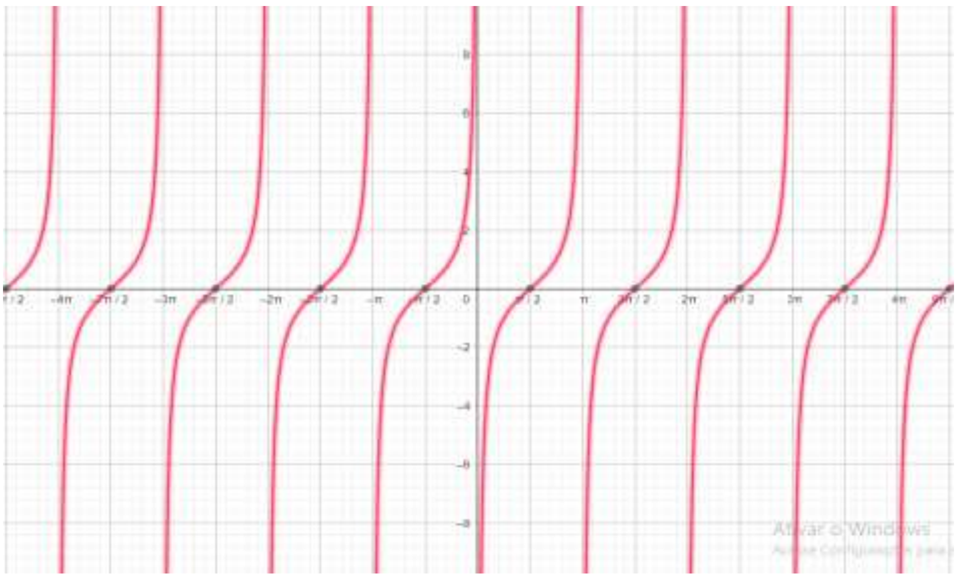


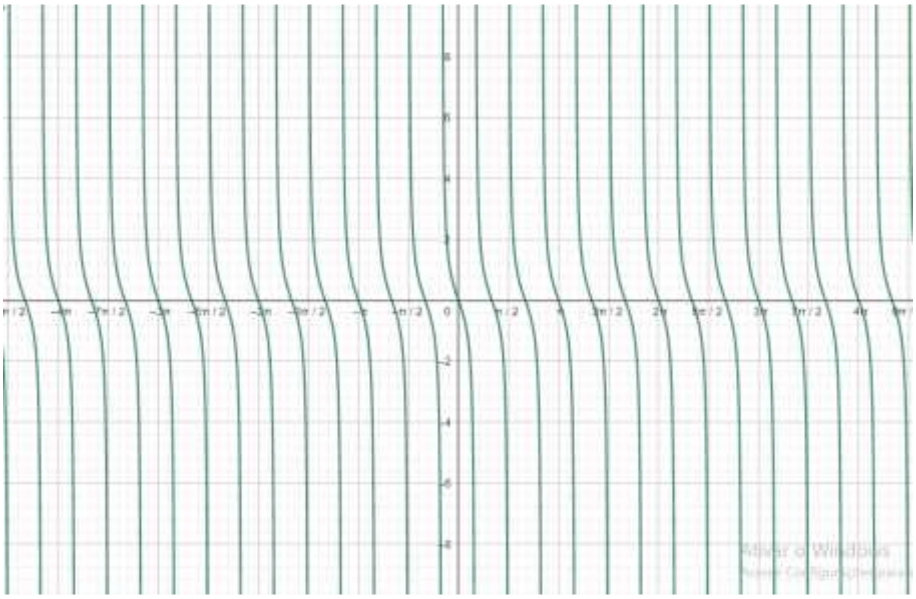
Gráfico 1



Coeficiente em que houve a variação.

( ) a ( ) b ( ) c ( ) d

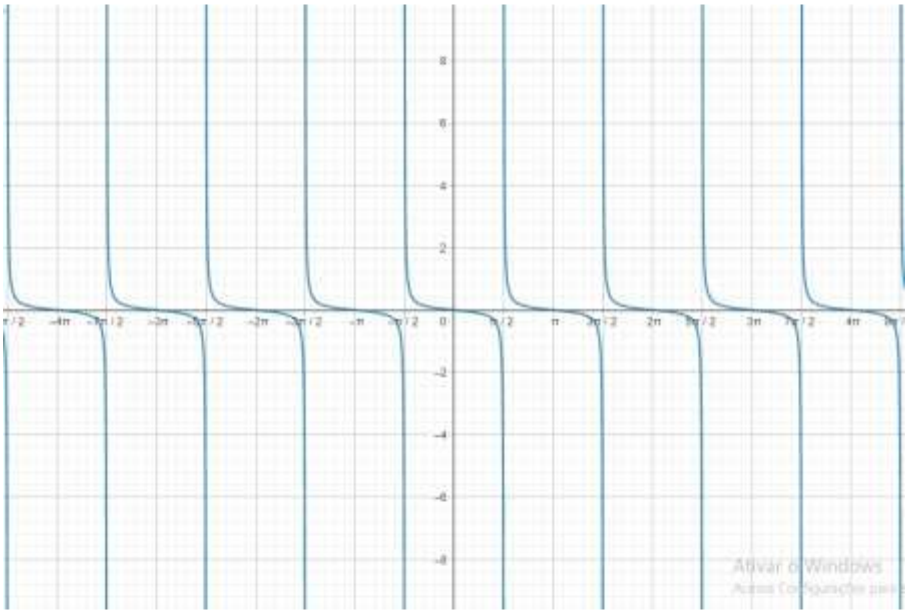
Gráfico 2



Coeficiente em que houve a variação.

(   ) a   (   ) b   (   ) c   (   ) d

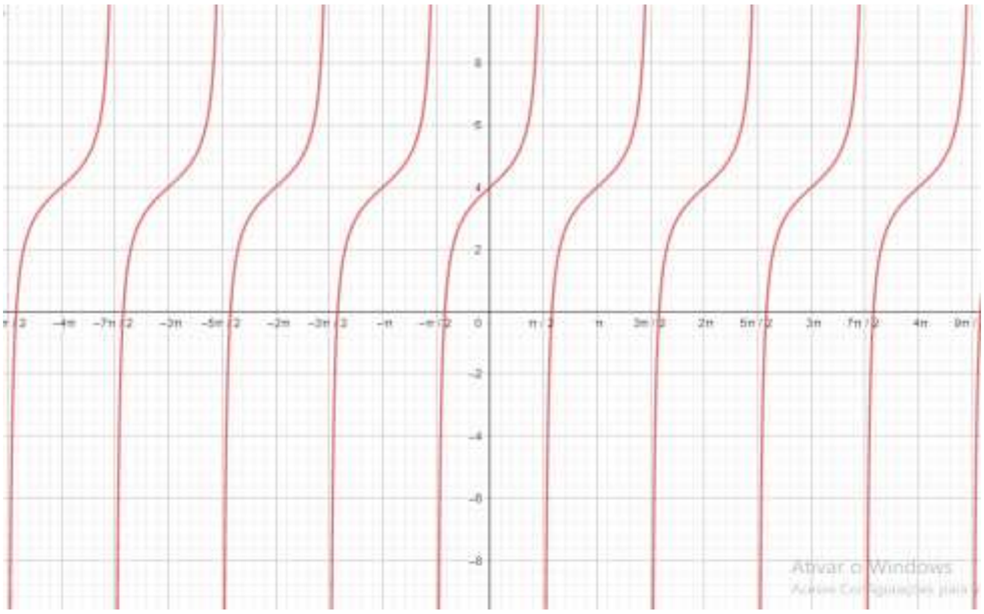
Gráfico 3.



Coeficiente em que houve a variação.

(   ) a   (   ) b   (   ) c   (   ) d

1. Gráfico 4.

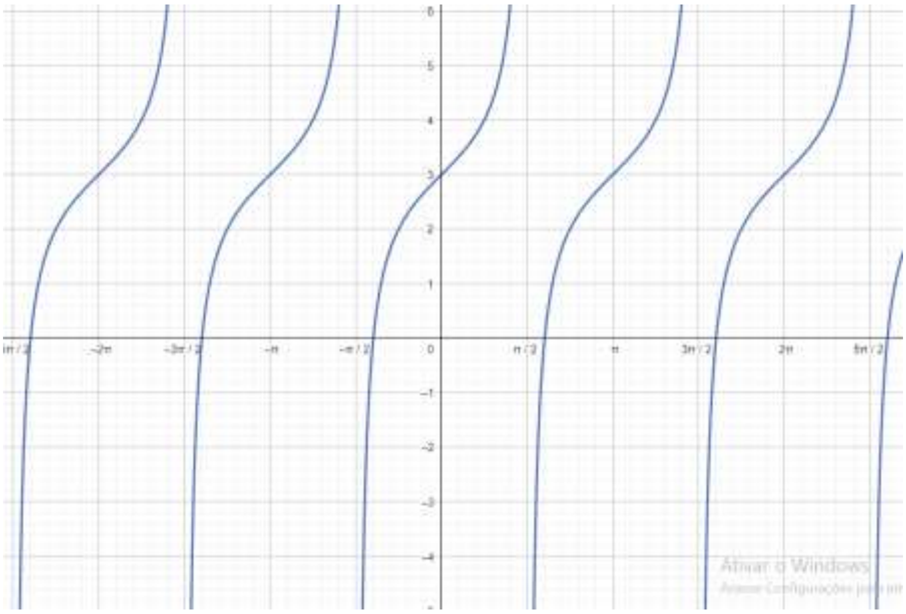


Coeficiente em que houve a variação.

(   ) a   (   ) b   (   ) c   (   ) d

Intervenção Avaliativa Aplicativa: Marque a função representada pelo gráfico abaixo.

Gráfico



a) $f(x) = tg(3x)$
b) $f(x) = 3 + tg(x)$
c) $f(x) = 3.tg(x)$
d) $f(x) = tg(x + \frac{\pi}{3})$
e) $f(x) = 3.tg(3x)$

3 FUNÇÃO TANGENTE

Nesta seção, faço a apresentação do objeto matemático Função Tangente, agora tratando-o numa perspectiva científica de rigor e aprofundamento matemático, considerando os fatos e personagens históricos que contribuíram para o desenvolvimento de seus estudos, bem como a epistemologia do objeto, tendo em vista as dificuldades de aprendizagem diagnosticadas nas seções anteriores e para apresentar subsídios da sequência didática construída.

3. 1. EVOLUÇÃO HISTÓRICA

O objeto matemático desta pesquisa é um conteúdo pouco explorado no currículo brasileiro e com poucas propostas pedagógicas para seu ensino, conforme apresentado no capítulo anterior, no entanto possui um milenar histórico de seus usos e contribuições para a humanidade. Entender como o conceito de Função Tangente foi construído ao longo da história, pode ser um fator de superação de obstáculos epistemológicos de professores formados e em formação, bem como indicar possibilidades de abordagem em sala de aula sobre o tema, uma vez que:

> Para que cada elemento novo de um campo conceitual seja agregado foi necessário superar obstáculos epistemológicos explicados por Bachelard, que em sua teoria buscou esclarecer durante o processo de aprendizagem os professores devem estar atentos para que os obstáculos epistemológicos não estejam presentes na sua forma de ensinar, e ter um olhar especial também nos recursos didáticos utilizados em sala de aula que impeçam a formação do espírito científico ou até mesmo o seu retrocesso (SILVA, MIRANDA e CABRAL, 2019, p. 491)

Neste sentido, vou apresentar alguns marcos históricos de superação de obstáculos epistemológicos na evolução do conceito de função tangente. Para tanto chamo atenção para a composição do nome do objeto “Função Tangente”, ambas as palavras da composição possuem um significado evolutivo concomitante, que promoveu a fusão de função e trigonometria.

3. 1. 1. Antiguidade

A ideia intuitiva de tangente teve seu surgimento com primeiros estudos em trigonometria pela necessidade de se medir distâncias inacessíveis em problemas que sugiram na agricultura, agronomia, navegação e medicina com primeiros registros entre os babilônios e egípcios.

Segundo Lima, Nascimento e Silva (2019) No Egito, a ideia intuitiva de tangente foi utilizada nas medições das pirâmides e em 1500 a.C., aproximadamente, a ideia de associar sombras projetadas por uma vara vertical a sequências numéricas cujos comprimentos representavam a passagem das horas em relógios de solares conhecidos como gnômon.

Figura 14: Gnômon

Fonte: http://senhorahistoria.blogspot.com/2011/04/historia-do-relogio-de-sol-gnomon.html

Na Babilônia havia grande interesse pela Astronomia, por suas ligações com os conceitos religiosos e por suas conexões com o calendário, as épocas de plantio e estações do ano. Em 28 a. C. foi construído um calendário astrológico e elaboraram uma tábua de eclipses lunares.

Segundo Silva, Miranda e Cabral, Pitágoras de Samus (542-497 a. C.) apresentou a interdependência entre número, espaço e harmonia, em um experimento chamado monocórdio, que representou um avanço quanto a ideia de função, relacionando variáveis de naturezas diferentes, o que exemplifica a superação do obstáculo da homogeneidade, pois até então só se podia comparar elementos de mesma natureza ou dimensão.

Séculos depois, o grego Eratóstenes de Cirene (276 - 196 a.C.), por volta de 200 a. C., se apropriou dessa possibilidade de relacionar grandezas diferentes ao medir a circunferência da Terra, utilizava relações entre ângulos e cordas, semelhança de triângulos e razões trigonométricas. Com esse feito, Eratóstenes marcou o fechamento de dois séculos de lentos avanços na trigonometria.

Para Boyer (2012, p. 124), embora os gregos estudassem as relações entre retas e círculos e as aplicassem na Astronomia, disso não resultou uma trigonometria sistemática, indicando que muito se precisava avançar no que diz respeito a formalização de nosso objeto matemático, sendo este um obstáculo para que se avançasse mais.

3. 1. 2. Idade Média

Na idade Média, período datado 476 até 1453, quando Constantinopla foi tomada pelos turcos otomanos, iniciou com uma fase de pouco progresso científico, considerada “idade das trevas”. Entre séculos XII e XIII surgiram as primeiras universidades, tendo suas contribuições entendidas como um prolongamento do saber das correntes filosóficas platônicas e aristotélicas (Roque e Carvalho, 2012, p. 188).

Dos séculos VIII até o século XI, o Império Muçulmano ou Árabe teve uma expansão econômica e avanços em diversos campos das artes e da ciência, em relação ao século IX, devido também à difusão da língua árabe em substituição ao grego, permitindo a preservação do saber por eles constituído.

Nesse contexto AL Battani (aproximadamente 850 a 929 d.C.), também conhecido como Ptolomeu de Bagdad, introduziu o círculo de raio unitário ao estudo da trigonometria e com isso demonstrou e generalizou que a razão *jiva* (seno) é válida para qualquer triângulo retângulo, independentemente do valor da medida da hipotenusa, propondo uma conversão geométrica e algébrica das relações trigonométricas do círculo para o retângulo, diferente de como fazemos na escola, onde primeiro se faz o estudo das relações no triângulo e muito depois, sem fazer associações, fala-se do ciclo trigonométrico, utilizado atualmente para o ensino de Função Tangente.

De acordo com Alvarenga, Barbosa e Ferreira (2014, p. 168), as contribuições do árabe Al Battani podem ser observadas nos trabalhos de Euler, que se baseava em relações entre lados de um triângulo retângulo e sintetizou fórmulas trigonométricas, tomando o seno inteiro igual a 1, proporcionando também aplicações na física como, por exemplo, a propagação do som.

3. 1. 3. Idade Moderna

Na Idade Moderna, período de 1453 a 1789, ano da revolução francesa. A idade moderna é marcada por uma ampla disseminação do conhecimento matemático de caráter mais significativo e pela comercialização dos livros, devido à invenção da impressão de tipos móveis.

A Itália se destacou no desenvolvimento dos conceitos matemáticos, aritmética, álgebra e trigonometria. A população voltou a ter interesse pela educação e os livros apresentam uma linguagem matemática mais acessível às massas populares. Nesse período também ocorreu um maior desenvolvimento das funções, inclusive função tangente.

Johann Müller (Regiomontanus) (1436-1475) foi um dos maiores matemáticos do século XV, cujo trabalho teve grande importância, estabeleceu a Trigonometria como uma ciência independente da Astronomia. O primeiro trabalho impresso em trigonometria foi a “Tabula Directionum” de Regiomontanus, publicado em Nuremberg em 1485.

Segundo Costa (1997), a Trigonometria de Regiomontanus não diferia basicamente da que se faz hoje em dia. Ele calculou novas tábuas trigonométricas, aperfeiçoando a dos senos e introduziu na trigonometria europeia o uso das tangentes, incluindo-as em suas tábuas.

Em suas formulações, as seis funções trigonométricas foram definidas como funções do ângulo, em vez de funções do arco, e subentendidas como razões. Neste momento houve uma ruptura entre a trigonometria do triângulo retângulo e a trigonometria do ciclo trigonométrico.

3. 1. 4. Idade Contemporânea

A Idade Contemporânea é estudada de 1789, época da Revolução Francesa, até os dias atuais. Dentro desse período, vários acontecimentos políticos, econômicos, sociais, científicos e tecnológicos, como a Revolução Industrial, receberam influência da evolução da matemática e em específico das funções trigonométricas. Por exemplo, os arquivos em MP3 hoje são possíveis por causa de matemáticos como Fourrier e Euler que definiram função analiticamente como sendo uma série trigonométrica complexa e composta. (Rooney, 2012)

Com Leonard Euler (1707-1783), trigonometria toma a sua forma atual quando adota, em 1748, a medida do raio de um círculo como uma unidade e representa funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo como era feito até então. Neste sentido, percebeu-se que Euler realizou a conversão do registro de uma representação geométrica, baseada no ângulo para outra cartesiana baseada no número. Tal conversão permitiu estabelecer melhor caracterização da periodicidade das funções trigonométricas, incluindo a função tangente.

A transição das razões trigonométricas para as funções periódicas começou com Viète no século XVI, teve novo impulso com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal no século XVII com Newton e culminou com a figura de Euler que desenvolveu também a análise de Fourier que permitiu a Newton “encontrar valores necessários para modelar a propagação do calor para qualquer distribuição inicial de temperatura” (ROONEY, 2012, p. 164), convergente ou não.

3. 1. 5. Síntese da evolução histórica

A apresentação evolutiva de função e da trigonometria proporcionaram a superação de obstáculos e deram condições para que se formalizasse o conceito de Função Tangente. No quadro a seguir apresento uma síntese, dando destaque aos personagens que marcaram cada período da evolução histórica de Função Tangente.

Figura 15: Evolução da Função Tangente

Período	Personagem	Contribuição para a Evolução de Função Tangente
Antiguidade (Até 476)	**Eratóstenes de Cirene** (276 - 196 a.C.)	Apropriou-se da possibilidade de relacionar grandezas diferentes, promovendo avanços na trigonometria em manipulações de relações entre ângulos e cordas, semelhança de triângulos e razões trigonométricas
Idade Média (476-1453)	**AL Battani** (aproximadamente 850 a 929 d.C.)	Introduziu o círculo de raio unitário ao estudo da trigonometria, propondo uma conversão geométrica e algébrica das relações trigonométricas do círculo para o retângulo.
Idade Moderna (1453-1789)	**Johann Müller** (1436-1475	Introduziu na trigonometria europeia o uso das tangentes, incluindo-as em suas tábuas e primeiro material impresso em trigonometria.
Idade Contemporânea (1789 à atualidade)	**Leonard Euler** (1707-1783)	Adotou, em 1748, a medida do raio de um círculo como uma unidade e representou funções aplicadas a um número (cartesiana) e não mais a um ângulo (geométrica), o que permitiu estabelecer melhor caracterização da periodicidade das funções trigonométricas, incluindo a função tangente.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota-se que, no percurso evolutivo de função tangente, os personagens ora usavam triângulos (Eratóstenes), ora triângulos inscritos em círculos (Al Battani) e ora passaram a utilizar o círculo trigonométrico desassociado da trigonometria do triângulo retângulo (Regiomontanus). Esses passos representativos elucidam o surgimento do círculo unitário a partir do triângulo retângulo, o que pode ser também utilizado por professores de matemática com funcionalidade tanto discursiva (associações verbais, argumentações e deduções), como não-discursiva (operações, figuras geométricas, modelagem).

Também constatou-se como relações proporcionais entre lados de um triângulo retângulo se transformaram em funções trigonométricas, ao longo de cada necessidade da humanidade e em cada período histórico. Isso revelou a utilidade social, cultural e científica desse saber matemático.

Existiu também uma mudança de invariantes na sequência razão-proporção – equação - função, que aconteceram respectivamente na Antiguidade - Idade Média - Idade moderna – Idade contemporânea, que elucidam como nossos personagens superaram ao longo da história os obstáculo epistemológicos de Homogeneidade (Eratóstenes), proporção (Al Battani), generalização (Jhon Muller) e convergência (Euler).

Assim, reforço a importância desta investigação histórica como recurso enriquecedor desta pesquisa, na perspectiva de compreender que a matemática, em especial Função Tangente, nasceu de necessidades práticas de cada povo, a cada nova situação, impulsionando o progresso científico da humanidade como afirma D'Ambrósio:

> As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber. (D'AMBRÓSIO, 1999, p. 97 apud CHAQUIAM, 2017, p. 16).

É nessa perspectiva de D'Ambrósio, de que a História desempenha na formação do professor um revestimento de significado a seu saber matemático e a sua prática de ensino. Logo esta seção dá um significado diferenciado as seções e capítulos a seguir.

3. 2. DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

Como apresentado na seção anterior na evolução histórica de função tangente, este objeto matemático se constuiu a medida que o conceito de função evoluiu. Deste modo podemos partir dessa definição para dar prosseguimento às formalizações que se pretende fazer.

Definição 1: *Sejam A e B conjuntos não vazios. Diz-se que f é uma função de A em B quando para todo elemento $x \in A$ existe um único elemento $y \in B$.*

Da defição de função denota-se que o conjunto A é chamado domínio e ao conjunto B de Contradomínio da função f. “Deve-se ainda observar que uma função conta de três ingredientes: domínio, contra-domínio e a lei de correspondência $x \to f(x)$" (LIMA et al, 1997, p. 39)

Além disso, Lima el al (1997) também destaca que a essência da definição de função está sujeita a apenas duas condições a saber:

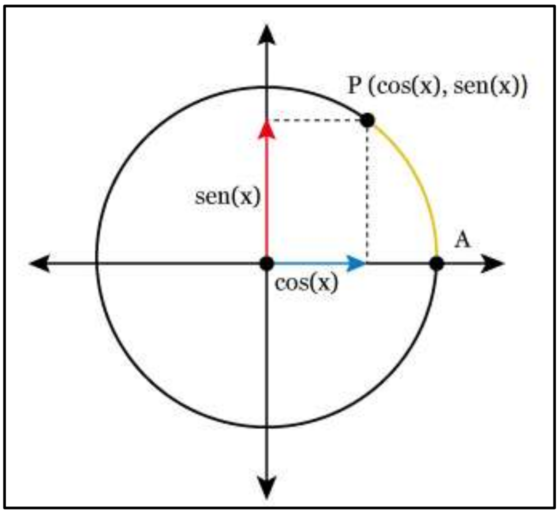
> a) Não deve haver exceções: afim de que a função f tenha o conjunto X como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$, seja qual for $x \in X$ dado.
> b) Não pode haver ambiguidades: a cada $x \in X$, a regra deve fazer corresponder um único $f(x)$ em Y. (LIMA et al 1997, p. 41)

Assim, a seguir apresento as características do comportamento de função tangente retomando tais implicações da definição de função.

3.2.1. Tangente trigonométrica

As Funções Trigonométricas $cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $sen: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamadas função cosseno e função seno respectivamente, são definidas pondo-se, para cada $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = (\cos x\,, sen\ x)$$



Noutras palavras, $\cos x$ e $sen\ x$ são respectivamente a abcissa e a ordenada do ponto $P(x)$ da circunferência unitária.

Segue-se imediatamente desta definição que vale, para todo $t \in \mathbb{R}$, a relação fundamental:

$$cos^2x + sen^2x = 1$$

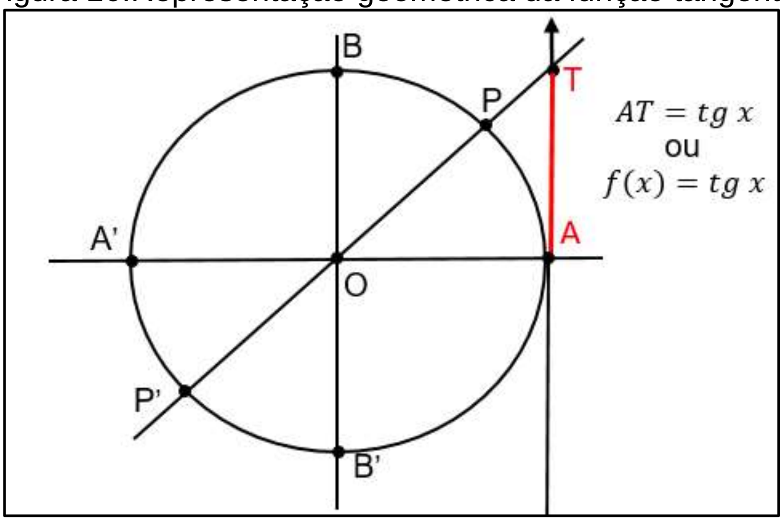
Das funções seno e cosseno derivam as outras funções trigonométricas quocientes a saber: $tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x}$, $cotg\ x = \frac{\cos x}{sen\ x}$, $sec\ x = \frac{1}{\cos x}$, $cossec\ x = \frac{1}{sen\ x}$. Chamadas tangente, cotangente, secante e cossecante, mas o nosso interesse está em estudar a Função Tangente. Até aqui, o que temos é a relação *tangente trigonométrica* obtida pelo quociente das funções seno e cosseno. Então, o que falta para que se chegue a definição função tangente?

Voltemos a consequência do conceito de função expressa anteriormente por Lima et al (1997) de que função é composta de três elementos: domínio, contradomínio e como se relacionam, o que apresento a seguir.

3.2.2. Definição de Função Tangente

Dado um número real $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja T sua intesecção com o eixo das tangentes. Denomina-se tangente de x (e indica-se $tg\ x$) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$.

Figura 16:Representação geométrica da função tangente



Fonte:Elaborado pelo autor (2020)

Definição 2: *A função tangente é definida po* $f: D \rightarrow R$ *que associa a cada real* x*,* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$*, o real* $AT = tg\ x$*, isto é,* $f(x) = tg\ x$.

Note que, para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, P está em B ou B' e então a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das tangentes, não existindo neste caso o ponto T, a $tg\ x$ não é definida. Perceba que essa situação implica na restrição no domínio da função $f(x) = tg\ x$, para que se atenda a condição de não exceção que preconiza a definição de função.

Existe uma outra maneira de definir função tangente, e mais utilizada em livros didáticos da educação básica, é considerando-a algébicamente igual a tangente trigonométrica $tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x}$, em que $\cos\ x \neq 0.$ Nesta definição a retrição no domínio se deve ao fato de que quando P está em B ou B' tem-se $cos\ x\ =\ 0$ e, portanto uma indeterminação.

Desse modo, mostramos a seguir que $tg\ x = m(AT)$, em que $m(AT)$ significa a medida algébrica do segmento AT.

a) Se P está no primeiro ou terceiro quadrante.

Suponhamos que x seja um arco do primeiro quadrante, e portanto, $x + \pi$, do terceiro. Os triângulos OCB, OSB, $OC'B'$ e $OS'B'$ são congruentes, e semelhantes ao triângulo OAT. Portanto, $tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AT}}{1} = mAT$,

e $tg\ (x + \pi) = \frac{sen\ (x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\overline{OS'}}{-\overline{OC'}} = \frac{\overline{C'B'}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = mAT$

b) Se B está no segundo ou quarto quadrante.

Suponhamos que x seja um arco do segundo quadrante, e portanto, $x + \pi$, do quarto quadrante.

$tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x} = \frac{\overline{OS}}{-\overline{OC}} = \frac{\overline{CB}}{-\overline{OC}} = \frac{-\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{-\overline{AT}}{1} = -\overline{AT} = mAT$,

e

$tg\ (x + \pi) = \frac{sen\ (x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\overline{OS'}}{\overline{OC'}} = \frac{-\overline{C'B'}}{\overline{OC'}} = \frac{-\overline{AT}}{\overline{OA}} = -\overline{AT} = mAT$

Assim, concluí-se que a $tg\ x$ pode ser vista como a medida algébrica de um segmento AT, ou que

$$f(x) = tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x} = mAT; \cos x \neq 0\ ou\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Daqui, tem-se definido o elemento “lei de correspondência”, isto é, a regra que faz corresponder cada elemento do domínio a um único elemento do contra-domínio.

3. 2. 3. “Ingredientes” da Função Tangente

Agora, apresento a correspondência estabelecida entre domínio e contradomínio da função tangente de modo que aconteça a não exceção e a não ambiguidade.

1ª) O domínio da função tangente é $D = \left\{x \in \mathbb{R}/x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (\ k \in \mathbb{Z})\right\}$ onde estão excluídos os reais x para os quais $\cos x = 0$.

Cumpre observar que tais funções, sendo definidas por meio de quocientes, têm seus domínios restritos aos números reais para os quais o denominador é diferente de zero.

Assim, por exemplo, a função tangente, dada pela expressão $tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x}$, tem como domínio o conjunto dos números reais que não são múltiplos ímpares de $\frac{\pi}{2}$ pois $\cos x = 0$ se, e somente se, $x = (2k+1)\frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ onde $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, o domínio da função $x \to tg\ x$ é formado pela reunião dos intervalos abertos $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Em cada um desses intervalos [por exemplo, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$] a função tangente é crescente e, na realidade, $x \to tg\ x$ é uma correspondência biunívoca (não exceção e não ambiguidade) entre um intervalo aberto de comprimento π e a reta inteira $\mathbb{R}$.

Imagem

A imagem da função tangente é $\mathbb{R}$, isto é, para todo y real existe um x real tal que $tg\ x = y$. De fato, dado $y \in \mathbb{R}$, consideremos sobre o eixo das tangentes o ponto T tal que $mAT = y$. Construindo a reta que passa por O e T, observemos que ela intercepta o círculo unitário em dois pontos B e B', imagens dos reais x cuja tangente é y.

3ª) Período

A função tangente, embora não esteja definida para todo número real $\mathbb{R}$, pode ser considerada como uma função periódica, de período π, pois π é o menor número real positivo tal que $tg(x+\pi) = tg\ x$ para todo x no domínio da função.

A restrição da função tangente no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, sendo uma correspondência biunívoca $tg: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, possui uma função inversa, chamada *arco tangente*, indicada com a notação $arctg: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a qual é uma correspondência biunívoca de domínio $\mathbb{R}$ e imagem igual ao intervalo aberto $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

3. 2. 4. Gráfico da Função Tangente

Observando, inicialmente, que para todo x do domínio D da função

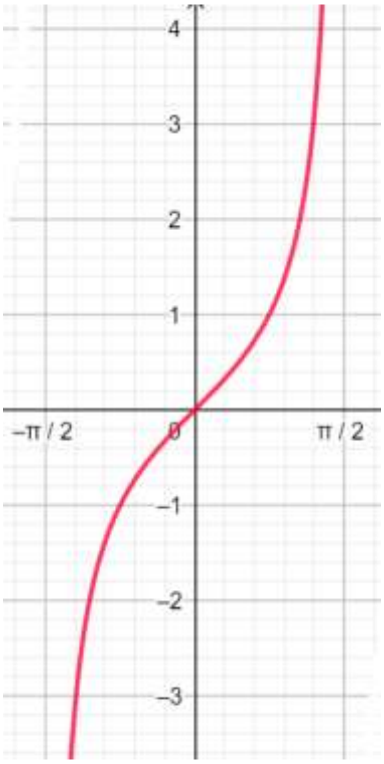
$$tg\ x = tg\ (x+\pi) = tg\ (x+2\pi) = tg\ (x+3\pi) = \ldots = tg\ (x+k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Veremos que a função tangente é periódica e seu período é $p = \pi$. Vamos verificar isto, fazendo

$$tg\ (x+\pi) = \frac{tg\ x + tg\ (k\pi)}{1 - tg\ x.tg(k\pi)} = \frac{tg\ x + 0}{1 - tg\ x.0} = tg\ x$$

Pela definição dada, temos $T = k\pi$, de onde tiramos, para $k = 1$, o período π da função tangente.

Construiremos, então, o gráfico de $f(x) = tg\ x$ no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e, em seguida, o ampliaremos para o domínio D.



O leitor deve perceber que, quando x percorre o intervalo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, a tangente cresce indefinidamente, percorrendo todo o conjunto imagem $\mathbb{R}$, de $-\infty$ a $+\infty$.

3.2.5 Generalização algébrica e gráfica

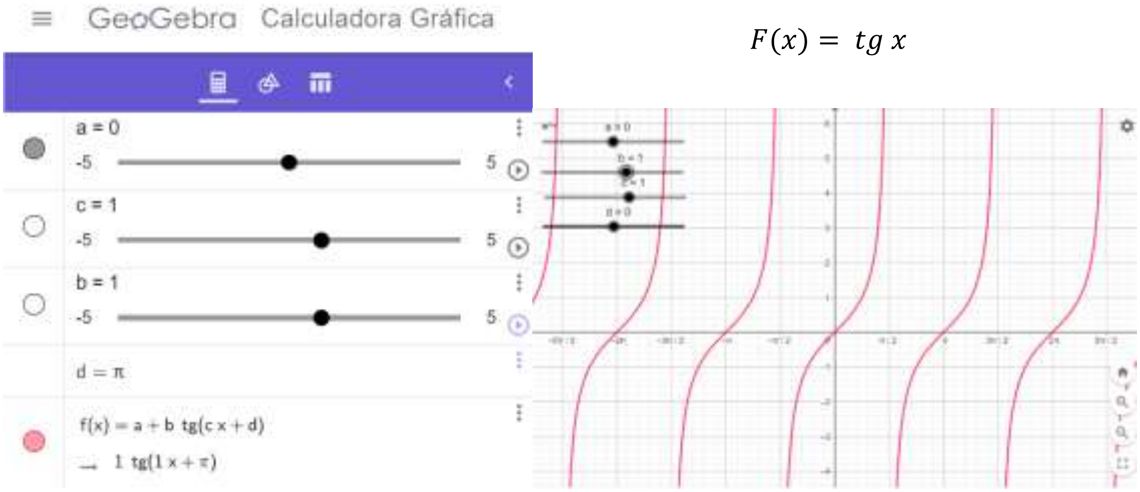
Às funções trigonométricas podem ser atribuídos coeficientes que provocam transformações algébricas e geométricas, que geram novas funções, pois "uma transformação geométrica é uma função". (LIMA, 2007, p. 141). A função tangente, não é diferente, tem como generalização a forma:

$$f(x) = a + b\,tg(cx + d); a, b, c, d \in \mathbb{R},\ b \neq 0$$

Todos esse coeficientes vão variar a imagem da função tangente, porém os coeficientes c e d alteram as características relacionadas ao domínio e ao período da função tangente.

As figuras abaixo foram geradas no aplicativo Geogebra para ilustrar o comportamento geométrico promovido pelos coeficientes da generalização da função tangente:

Figura 17: Função tangente sem influência dos coeficientes

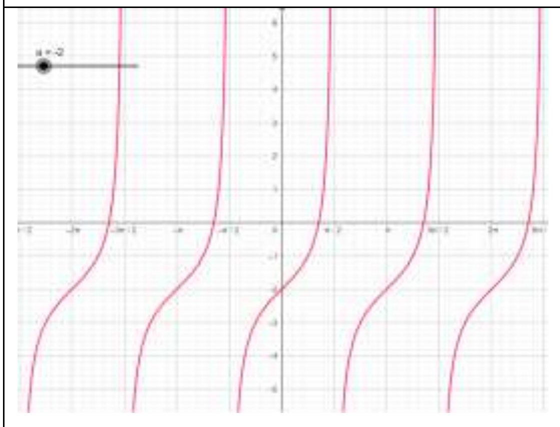
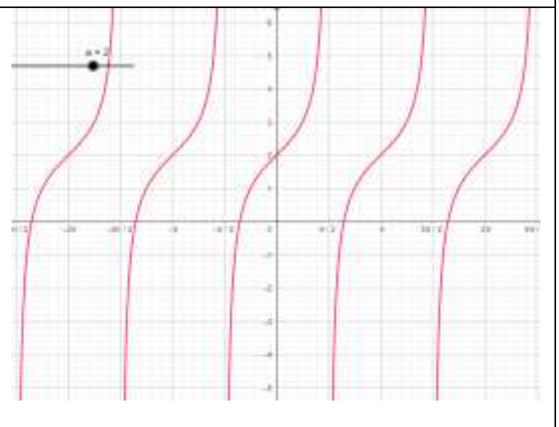


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Note que para que não haja a influência dos coeficientes a e c, que somam, é necessário serem iguais a “zero” (elemento neutro da adição). Os coeficientes b e d, que multiplicam, devem ser iguais a “um” (elemento neutro da multiplicação).

- Transformações geométricas da variação dos coeficientes a e b

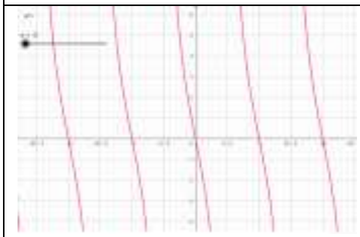
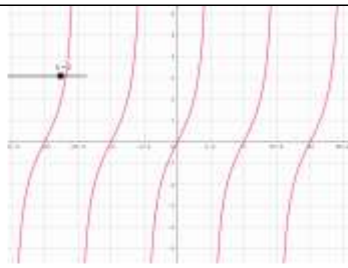
Quadro 2: Transformações sobre o coeficiente a

a<0	**a>0**
	

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Note que ocorre uma translação na direção do eixo y, de modo que se $a < 0$, o ponto de inflexão do gráfico é transladado a unidades para baixo.Caso $a > 0$ o ponto de inflexão é transladado a unidades para cima, o que para Oliveira e Pinheiro (2010) é um tipo de translação vertical.

Quadro 3: Transformações sobre o coeficiente b

b<-1	-1<b<1	b>1
		

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

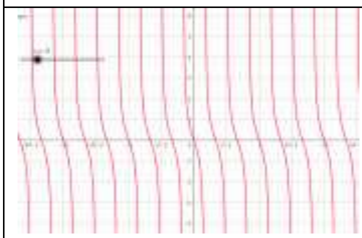
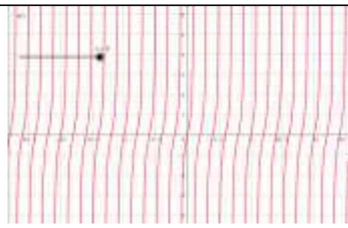
O coeficiente b promove transformações com e sem deformação. Olhando apenas pela perspectiva do sinal, quando $b < 0$ ocorre uma reflexão do gráfico na direção do eixo x, que Oliveira e Pinheiro (2010) chamam de reflexão de f em relação ao eixo das ordenadas.

Agora, olhando para a magnitude do valor absoluto, isto é $|b|$, se $|b| < 1$ se aproxima de zero, ocorre uma deformação do gráfico provocada pela rotação dos pontos de curvatura do gráfico em torno do ponto de inflexão do gráfico, e consequente diminuição de seu ângulo de curvatura, que tende a se aproximar de 90º; se $|b|$>1, a medida que aumenta, ocorre uma deformação do gráfico causada pela a rotação dos pontos de curvatura do gráfico em torno do ponto de inflexão do gráfico, aumentando o ângulo de curvatura, de modo que o gráfico da função tangente tende a se aproximar de uma reta.

- Transformações geométricas provocadas pelos coeficientes c e d.

Estas transformações precisam de uma análise mais criteriosa, pois interferem diretamente no domínio e no período da função tangente.

Quadro 4: Transformações sobre o coeficiente c

c<-1	-1<c<1	c>1
		

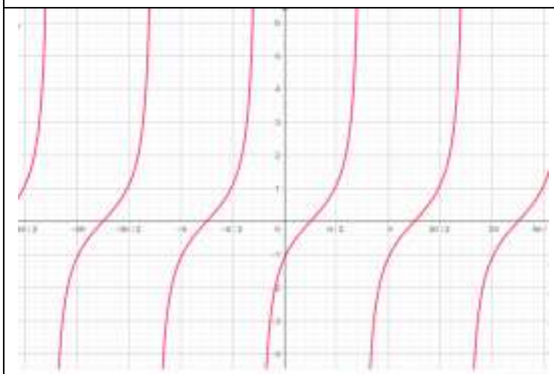
Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Com relação ao sinal do coeficiente c, quando $c < 0$ ocorre uma reflexão do gráfico na direção do eixo x ou reflexão de $f(x) = tg\ x$ em relação ao eixo das ordenadas.

Analisando a magnitude de $|c|$, quando $|c| < 1$ tende a zero, ocorre uma transformação por deformação do gráfico da função tangente com expansão na direção do eixo das abscissas. Quando $|c| > 1$, ocorre uma transformação com deformação do gráfico da função tangente por contração na direção do eixo das abscissas.

Em consequência das transformações provocadas pela variação do coeficiente c da generalização da função $f(x) = tg\ x$, ocorrem também variações no domínio e período da função tangente podendo ser generalizada de modo que o domínio $D = \left\{x \in \mathbb{R}\ /x \neq \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)c^{-1}, (\ k \in \mathbb{Z})\right\}$ e o período $p = \pi c^{-1}$.

Quadro 5: Transformações sobre o coeficiente d

d<0	**d>0**
	
$d = -\pi/4$	$d = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Pelo fato de d ser um parâmetro que se adiciona aos valores x do domínio, deve estar convertido em graus ou radianos conforme esteja $x \in D(f)$.

Em decorrência da variação do coeficiente d da generalização da função tangente, a transformação que ocorre no gráfico é a translação na direção do eixo x , de modo que se $|d| < 0$ o gráfico translada para o sentido direito e se $|d| > 0$, o gráfico translada para o sentido esquerdo.

Assim, a influência disso para o domínio da função ocorre de modo que o domínio $D = \left\{x \in \mathbb{R}/x \neq \left[\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) c^{-1}\right] + d, (\, k \in \mathbb{Z})\right\}$

Em síntese:

Quadro 6: Síntese das transformações decorrentes da generalização

Transformações	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$
Translação no eixo x				Para direita se d<0; Para esquerda se d> 0.
Translação no eixo y	Para baixo se a<0; Para cima se a>0			
Reflexão através do eixo x		Se b<0	Se c<0	
Deformação por Rotação do ponto de curvatura em torno do ponto de inflexão .		O ângulo de curvatura diminui, se $\lvert b\rvert < 1$ se aproxima de 0; O ângulo de curvatura aumenta, se $\lvert b\rvert > 1$ aumenta.		
Deformação por expansão no eixo x			Se $\lvert c\rvert < 1$ aproxima-se de 0	
Deformação por contração no eixo x			Se $\lvert c\rvert > 1$ aumenta	

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Logo, infere-se que os coeficiente a e d, de soma, promovem apenas transformações sem deformação, com translação nos eixos y e x, respectivamente. Os coeficientes multiplicativos, b e c, causam transformações com deformação, decorrentes da magnitude de seus valores absolutos, e, reflexões, decorrentes da mudança de seus sinais.

Além, disso os coeficientes c e d alteram o domínio e período da função tangente podendo ser expressos da seguinte forma:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R}/x \neq \left[\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) c^{-1}\right] + d, (\, k \in \mathbb{Z})\right\} \text{ e } p = \pi c^{-1}.$$

No trato do ensino na educação básica, quando os estudantes ainda não conhecem definição de ponto de inflexão e ponto de curvatura, indica-se conversão da linguagem de “deformação por rotação do ponto de curvatura em torno do ponto de inflexão” para “ deformação por expansão e contração nas direções x e y ”

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva; ARTIGUE, Michelle. **Engenharia didáctica**. Didáctica das matemáticas. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

ALVARENGA, Karly; BARBOSA, Celso Viana; FERREIRA, Gislaine Maria Ferreira. O conceito de função: o desenvolvimento baseado em alguns modelos desde o ano de 2000 a. C até o século XX. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.9, n. 1, p. 159-178, 2014.

BARROS, Elaine Maria Pereira; TEIXEIRA, Helisangela Ramos da Costa Teixeira. **O uso de jogos para o ensino da trigonometria nos 2° anos do ensino médio.** Universidade do Estado do Amazonas – UEA. 2015.

BLOOM, Benjamim S.; KRATHWOHL, David R., MASIA, Bertram B. **Taxonomia dos objetivos educacionais**. vol.1 (domínio cognitivo). Porto Alegre: Globo, 1973.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de Helena Castro, Ed. Blücher Ltda, São Paulo, 2012.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** – BNCC. Brasília, DF, 2017.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**. Brasília, DF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **PDE**: Plano de Desenvolvimento da Educação: SAEB: ensino médio: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC, SEB; Inep, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Lei de Diretrizes e Bases**. Brasília, DF, 1998.

BROUSSEAU, Guy. **Fundamentos e métodos da didáctica da matemática**. In: BRUM, J. (Org.). Didáctica das matemáticas. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas**: estrutura e elaboração. 104 p. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

CAJUELA, Renata Ferreira. **Funções Trigonométricas**. (Dissertação de Mestrado em Rede Nacional). UNESP. São José do Rio Preto. 2013.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaios temáticos**: história e matemática em sala de aula. Belém: SBEM/SBEM-PA, 2017.

CORRÊA, Rosana dos Passos. **O Ensino de Funções Trigonométricas por Atividades**. 2016. 390 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2016.

COSTA, Felipe de Almeida; ALMEIDA, Marcio Vieira de. **Função tangente**: desenvolvendo esse tipo de função com a Modelagem matemática. Horizontes – Revista de Educação, Dourados-MS, v. 5, n. 10, p. 114-130, jul./dez. 2017.

COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da. **Funções seno e cosseno**: Uma sequência de ensino a partir dos Contextos do “mundo experimental” e do computador. 197 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). – PUC/SP. São Paulo, 1997.

D’AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática**: Da Teoria à Prática. Campinas/SP: Editora Papirus, 2003.

FEIJÓ, Rachel Saffir Aráujo Alves. **Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria:** Um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal. 108 f. Dissertação (Mestrado Matemática em Rede Nacional). - Universidade de Brasília. Brasília, 2018.

FERRAZ, A. P. C. M.; BELHOT, R. V. **Taxonomia de Bloom**: revisão teórica e apresentação das adequações do instrumento para definição de objetivos instrucionais. Gestão & Produção, São Carlos, v. 17, n. 2, p. 421-431, 2010.

GOÉS, Maria Cecília Rafael de. **A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural:** uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. v. 20, Campinas: Cadernos Cedes, 2000.

LUCCHESI, Ivana Lima; LIMA, Valderez Marina do Rosário; GESSINGER, Rosana Maria. A autonomia de estudantes e o ensino de matemática. **Zetetiké** – FE/Unicamp – v. 20, n. 37 – jan/jun 2012.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do ensino Médio**. Vol. 1. Coleção do professor de matemática. SBM. Rio de janeiro, 1997.

LIMA, Israel Costa; NASCIMENTO, Dilson Martins do; SILVA, Edna Machado. **Um histórico semiótico das funções trigonométricas**. Anais. XIII Seminário Nacional de História da Matemática – Fortaleza: SBHMat, 2019.

LOPES, Maria Maroni. **Contribuições do software Geogebra no ensino e aprendizagem de trigonometria**. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.
MELLO, Guiomar Namo de. Currículo da educação básica no Brasil: concepções e políticas. São Paulo: CEESP, 2014

MORTIMER, Eduardo F. & SCOTT, Phill. **Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o**

ensino. Investigações no ensino de ciências, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2002.

NASCIMENTO, Dilson Martins do; PANTOJA, Cleidivaldo Corrêa; SANTOS, Maria de Lourdes Silva. **Aprendizagem de função tangente no ensino médio**. Seminário de Cognição e Educação Matemática: Pesquisa em educação matemática e Práticas pedagógicas. Belém, 2019.

OLIVEIRA, Marcelo Rufino de; PINHEIRO, Marcio Rodrigues da Rocha. **Coleção Elementos da Matemática:** Conjuntos funções, aritmética. – 2 ed. Editora VestSeiller. Fortaleza, 2010.

PEDROSA, Leonor Wierzynski. **Uma proposta de ensino da trigonometria com uso do software GeoGebra**. 2012.

PEREIRA, Caroline Subirá. **Material manipulável e manipulável virtual para o ensino de estimativa de proporção populacional na formação inicial de professores.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia) - Programa de PósGraduação em Ensino de Ciência e Tecnologia. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2017

PEREIRA, Cícero da Silva. **Aprendizagem em Trigonometria no Ensino Médio**: Contribuições da Teoria da Aprendizagem Significativa. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande: 2011.

PIVA, Cláudio. DORNELES, Lecir D. SPILIMBERGO, Patrícia. **Utilizando softwares livres para explorar conceitos de trigonometria. X Encontro Nacional de Educação Matemática Educação Matemática, Cultura e Diversidade**. Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul - UNIJUÍ . Salvador – BA. 2010.

RIBEIRO, Márcia Regina Ramos Costa. **Possibilidades e dificuldades no desenvolvimento de situações de aprendizagem envolvendo funções trigonométricas**. 119 f. Dissertação (Mestrado). – Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2011.

RODRIGUES, Fredy Coelho; GAZIRE, Elaine Scheid. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. **Revista Revemat**. Florianópolis: v. 07, n. 2, p. 187-196, 2012.

ROCHA, Avani Maria Calmon. **Uso do software Winplot para o estudo de Trigonometria**. Polyphonía. v. 21/1, jan./jun. 2010.

ROONEY, Anne. **A História da Matemática**. M. Books do Brasil Editora Ltda. São Paulo, 2012.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de história da matemática**. Rio de janeiro: SBM, 2012.

SANTOS, Jonata Souza dos; HOMA Agostinho Iaqchan Ryokiti. **Tecnologias digitais no estudo de trigonometria no ensino médio**. Educação Matemática em Revista - número 19- v. 1- pp. 125 a 137 – RS. 2018.

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo 66113 – 200
Belém-Pa