



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Wallace do Carmo Muniz

Ensino de Medidas de Variação com uso de Planilha Eletrônica

Belém - PA
2022

Wallace do Carmo Muniz

O Ensino de Medidas de Variação com uso de Planilha Eletrônica

Dissertação apresentado como proposta de pesquisa ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará.

Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dra. Cinthia Maradei Pereira

Coorientador: Prof. Dra. Acylena Coelho Costa

Belém - PA
2022

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém – PA

Muniz, Wallace do Carmo

O ensino de medidas de variação com uso de planilha eletrônica
/ Wallace do Carmo Muniz; orientação de Cinthia Maradei Pereira;
coorientação de Acylena Coelho Costa, Belém – 2022.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática)
Universidade do Estado do Pará, Belém, 2022.

1. Medida de variação. 2. Estatística-Matemática. 3. Educação
matemática. I. Pereira, Cinthia Maradei (orient.). II. Costa, Acylena
Coelho (coorient.). III. Título.

CDD 23 ° ed. 519.5

Elaboração da Ficha Catalográfica: Regina Ribeiro CRB-2/739

O ENSINO DE MEDIDAS DE VARIAÇÃO COM USO DE PLANILHA ELETRÔNICA

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Ensino Médio.

Orientadora: Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira

Data de aprovação: 31/03/2022

Banca examinadora

 , Orientadora

Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira

Doutora em Bioinformática – Universidade Federal do Pará – UFPA

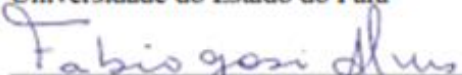
Universidade do Estado do Pará

 , Coorientadora

Profa. Dra. Acylena Coelho Costa

Doutora em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica – PUC/SP

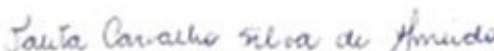
Universidade do Estado do Pará

 , Examinador Interno

Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves

Doutor em Geofísica – Universidade Federal do Pará – UFPA

Universidade do Estado do Pará

 , Examinador Externo

Profa. Dra. Talita Carvalho Silva de Almeida

Doutora em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica – PUC/SP

Universidade Federal do Pará

Belém – PA

2022

AGRADECIMENTO

O caminho da pesquisa é sempre acompanhado de percalços e obstáculos que precisamos transpor. Este é possibilitado por meio do apoio e contribuições valiosas que nos permitem alcançar objetivos e vislumbrar a conquista. Dito isso, é necessário destacar a relevância de pessoas, que de maneira direta ou indireta auxiliaram essa jornada acadêmica.

Devo agradecer aos meus pais, Ernesto e Celina, a meus irmãos, Ulisses e Williams, e aos demais familiares, que de forma afetuosa apoiaram essa trajetória. Agradecimento também especial faço a minha companheira, Aliciane, bem como aos meus amigos Alexandre, Alessandro e Marcos, pelos diversos modos de contribuição e apoio em momentos de dificuldade.

À minha orientadora, Prof. Dra. Cinthia Maradei Pereira, cujo incentivo, paciência e envolvimento com as minhas demandas da pesquisa, possibilitaram o desenvolvimento das etapas desse estudo, sobretudo das questões relacionadas à tecnologia. Agradeço igualmente à Prof. Dra. Acylena Coelho Costa, pela acuidade e sabedoria nas valiosas recomendações, pela disponibilidade e solicitude às minhas requisições, que não foram poucas.

Agradeço ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade Estadual do Pará (UEPA), e aos demais professores que dele fazem parte. De semelhante modo, reconheço a importância da licença concedida pela Secretaria Estadual de Educação (SEDUC-PA), bem como da EEEFM Maestro Waldemar Henrique-Caic, local da coleta de dados e da realização da experimentação para a análise deste trabalho, cuja aplicação teve imprescindível contribuição de alguns estagiários – vinculados ao Programa de Iniciação à Docência (PIBID) e à própria UEPA – para os quais deixo aqui meus agradecimentos.

Torno pública minha gratidão aos colegas de turma, pelo companheirismo e compartilhamento de ideias, críticas e informações fundamentais que embasaram meu percurso na Pós-graduação. Deste grupo, destaco, em especial, a colega Edna que não poupou esforços em ajudar e incentivar, sempre que solicitada, e em diversos momentos durante o curso.

Desse modo, compreende-se que embora o percurso acadêmico tenha sido desafiador, outros fatores amplificaram os obstáculos tornando a trajetória ainda mais árdua. Entretanto, a amizade, o companheirismo e a solidariedade são fatores responsáveis pela reconstrução de um ânimo já desgastado. Assim, como nos ensina o escritor e jornalista mineiro Fernando Sabino, devemos fazer “da interrupção um caminho novo, da queda um passo de dança, do medo uma escada, do sonho uma ponte, da procura um encontro.”

RESUMO

O presente estudo objetivou investigar as contribuições de uma sequência didática desenvolvida para o ensino de Medidas de Variação com o uso de planilha Eletrônica e construída segundo Teoria dos Registros de Representação Semiótica. A revisão de literatura envolveu estudos que enfatizaram, pelo menos, conceitos como média ou variação, devido à escassez de trabalhos voltados especificamente às medidas de variação. Além disso, estes estudos apoiaram-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica e na metodologia da Engenharia Didática. Desenvolveu-se, em seções de estudo, a insuficiência de dados oficiais acerca das dificuldades de aprendizagem em medidas de variação, bem como as contribuições de alguns dos principais teóricos da Educação Matemática e em especial da Educação Estatística. As competências de letramento, raciocínio e pensamento estatístico foram confrontadas às recomendadas pela BNCC para dar suporte às atividades da sequência didática, tratadas neste trabalho. Com essa mesma finalidade, desenvolvemos o objeto matemático medidas de variação. Enfatizou-se as etapas dos cálculos dessas medidas para serem apenas descritas nos registros das atividades da sequência didática, pois, a principal intenção é que o aluno interprete os dados e resultados. Isso justificou o uso da planilha eletrônica; pois, agilizou e facilitou a visualização dos resultados, permitindo aos sujeitos da pesquisa mais tempo para as interpretações e registros necessários. A validação da sequência didática foi verificada a partir das análises sobre os registros escritos dos educandos e a análise do pós-teste realizado de forma auxiliar. A análise dos resultados de nossa experimentação evidenciou contribuições pedagógicas metodológicas, formativas, epistemológicas, além de indicar possíveis desdobramentos para novas pesquisas nas áreas de ensino e de aprendizagem de Matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Educação Estatística. Ensino de Matemática. Medida de Variação.

ABSTRACT

The present study aimed to investigate the contributions of a didactic sequence developed for the teaching of Measures of Variation with the use of spreadsheet and constructed according to the Theory of Records of Semiotic Representation. The literature review involved studies that emphasized at least concepts such as mean or variation, due to the scarcity of studies specifically focused on variation measures. In addition, these studies were based on the Theory of Records of Semiotic Representation and the methodology of Didactic Engineering, as well as our work. We developed in sessions of our study the insufficiency of official data on learning difficulties in measures of variation, as well as the contributions of some of the main theorists of Mathematics Education and especially statistical education. We compared the skills of statistical literacy, reasoning and thinking to those recommended by BNCC, to support the activities of our didactic sequence. For this same purpose, we developed the mathematical object measures of variation. We emphasize the stages of the calculations of these measures to be only described in the records of the activities of the didactic sequence, because our main intention is for the student to interpret the data and results. This justified the use of the spreadsheet; therefore, it streamlined and facilitated the visualization of the results, allowing the research subjects more time for the necessary interpretations and records. The validation of our didactic sequence was verified from analyses on the written records of the students and analysis of the post-test performed in an auxiliary way. The analysis of the results of our experimentation showed methodological, formative and epistemological pedagogical contributions, besides indicating possible developments for new research in the areas of mathematics teaching and learning.

Keywords: Mathematics Education. Statistical Education. Mathematics teaching. Measure of Variation.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1- Função Cognitiva dos Sistemas semióticos.	29
Quadro 2 - Representação tabular	30
Quadro 3 - Classificação dos diferentes registros segundo a natureza.....	33
Quadro 4 - Competências estatísticas e habilidades contidas na SD dessa pesquisa	43
Quadro 5 - Habilidades envolvendo Medidas de Variação e seus conhecimentos prévios	47
Quadro 6 – Habilidades a partir das competências da EE e da BNCC	50
Quadro 7 - Fontes consultadas	52
Quadro 8- Habilidades e Competências desenvolvidas	96
Quadro 9 - Identificação dos Sujeitos da Experimentação.	100
Quadro 10 – Resultado do Pós-teste	110

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama das Principais ideias da Engenharia Didática	22
Figura 2 – Esquema de uma representação semiótica.....	31
Figura 3 – Esquema da estrutura tríade em Matemática.....	32
Figura 4 – Código alfanumérico EF.....	49
Figura 5 – Código alfanumérico EM.....	50
Figura 6 – Motivação de tópicos estatísticos nos livros	56
Figura 7 – Exemplo 1, livro A, p. 11.	57
Figura 8 – Exercício proposto. Livro D, p. 409.	57
Figura 9 – Exercício proposto. Livro B, p. 183.	58
Figura 10 – Tipos de variáveis	59
Figura 11 – Medidas de Posição.....	60
Figura 12 – Resposta do Aluno G	60
Figura 13 – Gráfico de setores e de colunas	61
Figura 14 – Tabela e gráficos.....	62
Figura 15 - Atividade 20	66
Figura 16 - Interpretação de variação como diferença entre frequências	67
Figura 17 – Tabela do Cálculo do erro médio.....	69
Figura 18 – Exemplo de Leitura de dados, de Curcio (1999)	71
Figura 19 – Exemplo de Leitura entre os dados, de Curcio (1999)	71
Figura 20 – Exemplo de Leitura além dos dados, de Curcio (1999).....	72
Figura 21 – Mudança de escala do gráfico	73
Figura 22 – Tabela de distribuição	73
Figura 23 – Gráfico de gênero.....	74
Figura 24: Relações hipotéticas entre as Teorias de Duval e Curcio	75
Figura 25 – Dados dos funcionários.....	75
Figura 26 - Gráfico de linha: Grupo 2.....	76
Figura 27 - Gráfico de setores: Grupo 2.....	77
Figura 28 – Coleta de dados e gráfico de setores	77
Figura 29 – Tabela do grupo 1	78
Figura 30 – Reconhecimento de medidas estatísticas	78
Figura 31 – Proporção das páginas destinadas aos conteúdos da Estatística Descritiva em relação ao número total de páginas da Coleção.....	83
Figura 32 – Histograma com “achatamento”	84

Figura 33 – Histograma sem “achatamento”, construído na proporção de um retângulo quase áureo (7,62cm x 12,62 cm)	85
Figura 34 - Layout da calculadora na Planilha Eletrônica.....	97
Figura 35 - Apoio visual da experimentação.	101
Figura 36 - Questão 1 da atividade 1	101
Figura 37 - Questão 2 da atividade 1	101
Figura 38 - Questão 3 da atividade 1	102
Figura 39 - Questão 4 da atividade 1	102
Figura 40 - Questão 5 da atividade 1	102
Figura 41 - Desenvolvimento da atividade 2	103
Figura 42 – Questão 1 da atividade 2	104
Figura 43 – Questão 2 da atividade 2	104
Figura 44 – Questão 3 da atividade 2	105
Figura 45 – Execução da atividade 3	106
Figura 46 – Questão 1 – Atividade 3 – Bloco I.....	106
Figura 47 – Questão 2 – Atividade 3 – Bloco I.....	107
Figura 48 – Questão 3 – Atividade 3 – Bloco I.....	107
Figura 49 – Questão 4 – Atividade 3 – Bloco I.....	107
Figura 50 – Questão 1 – Atividade 3 – Bloco II.....	108
Figura 51 – Questão 2 – Atividade 3 – Bloco II.....	108
Figura 52 – Questão 3 – Atividade 3 – Bloco II.....	108
Figura 53 – Questão 4 – Atividade 3 – Bloco II.....	109
Figura 54 – Questão 5 – Atividade 3 – Bloco II.....	109
Figura 55 - Resolução da Questão 1 do Pós-teste.	111
Figura 56 - Resolução da Questão 2 do Pós-teste.	112

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Estimativa dos visitantes à Belém de diversos lugares para participar do Círio de Nazaré, nos três meses que antecedem o evento e no próprio mês que ocorre.	30
Gráfico 2 – Linha média	35

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS.....	17
	2.1 ENGENHARIA DIDÁTICA	17
	2.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA	23
	2.3 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA	25
3	ANÁLISES PRÉVIAS	37
	3.1 ENSINO DE ESTATÍSTICA.....	37
	3.1.1 Educação Estatística	37
	3.1.2 Aspectos Curriculares.....	44
	3.2 REVISÃO DE LITERATURA	51
	3.2.1 Estudos Experimentais	53
	3.2.2 Estudos Diagnósticos.....	63
	3.2.3 Análise de Livros Didáticos	78
	3.3 ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO: MEDIDAS DE VARIAÇÃO	87
	3.3.1 Variação	87
	3.3.2 Amplitude.....	87
	3.3.3 Desvio.....	88
	3.3.4 Desvio Absoluto Médio.....	88
	3.3.5 Desvio Padrão	89
	3.3.6 Variância	91
	3.3.7 Notas Importantes	92
	3.3.8 Algumas Considerações	93
4	A SEQUÊNCIA DIDÁTICA	96
	4.1 ANÁLISE A PRIORI	96
	4.1.1 Atividade 1	98
	4.1.2 Atividade 2	98
	4.1.3 Atividade 3	99
	4.2 EXPERIMENTAÇÃO.....	99
	4.3 ANÁLISE A POSTERIORI	100
	4.3.1 Atividade 1	100
	4.3.2 Atividade 2	103
	4.3.3 Atividade 3	105
	4.3.4 Pós-teste.....	109
	4.4 SÍNTESE DE RESULTADOS E VALIDAÇÃO.....	112
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	114
	REFERÊNCIAS.....	116

APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA – PROFESSOR.....	120
APÊNDICE B – SEQUÊNCIA DIDÁTICA – ALUNO	133
APÊNDICE C – FORMALIZAÇÕES	143
APÊNDICE D – PÓS-TESTE	219

1 INTRODUÇÃO

Apresentamos os resultados de uma pesquisa de mestrado em ensino de Matemática realizada no âmbito do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (PPGEM) da Universidade Federal do Pará (UEPA). O tema, ensino de Medidas de Variação, proposto pelo programa veio a colaborar com lacunas formativas e epistemológicas do pesquisador que é professor da rede estadual do Ensino no município de Belém-PA há mais de 20 anos.

As novas orientações curriculares do Ensino Médio tendenciam para um ensino de Matemática que integre os diferentes campos (Aritmética, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística, Grandezas e Medidas). Esses campos precisam ser desenvolvidos segundo os pares, a saber: variação e constância; certeza e incerteza; movimento e posição; relações e inter-relações.

Além disso, a ideia de variação e constância comporta indagações do tipo “e se fosse?”, que mobilizam processos de abstrações, representações e generalizações, essenciais para a criatividade em Matemática [...] As medidas estatísticas também são inter-relações que, por um lado, promovem a ampliação de significado aos tópicos matemáticos e, por outro, propiciam acesso à matemática estrutural, como as relações de equivalência, ordem e semelhança. (BRASIL, 2018, p. 520-521)

A aplicabilidade da Estatística estabeleceu-se de modo gradual ao longo da história e tornou-se essencial para o mundo moderno, uma vez que foi reconhecida sua importância nos últimos tempos no que se refere à formação do cidadão. A partir dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, Brasil (1998), tal conteúdo foi inserido no bloco designado de Tratamento da Informação, com ênfase para sua utilização na sociedade contemporânea.

Como consequência do potencial de aplicação e importância, a Estatística foi introduzida no processo escolar de diversos países. Com a criação pela ISI (International Statistical Institute), em 1948, do Comitê de Educação, que mais tarde viria a se tornar o IASE (*International Association for Statistical Education*), cuja finalidade foi promover a educação estatística, especialmente nos países em desenvolvimento, ocorreram contribuições das mais variadas formas, tais como a produção e disseminação de materiais didáticos, e o treinamento de professores e técnicos estatísticos (BATANERO, 2001).

Conforme Lopes (2008), os currículos escolares de Matemática propõem hoje, no mundo, maior envolvimento com os conhecimentos de Estatística e Probabilidade. A autora enfatiza que atualmente o estudo desses dois temas é imprescindível para que todos possamos “analisar índices de custo de vida, realizar sondagens, escolher amostras e tomar decisões em várias situações do cotidiano” (p. 59).

Os anos de 1970 foram decisivos para o avanço da Educação Estatística, pois se discutia “a influência política e ética da utilização da Estatística na Educação Básica” (WALICHINSKI; JUNIOR; ISHIKAWA, 2014). Nas duas décadas seguintes, conforme Borba *et al.* (2011), a Estatística e a Probabilidade foram introduzidas como tópicos dos currículos nacionais no Ensino Fundamental em muitos países, tais como, Inglaterra e País de Gales, pelo *National Curriculum*, e Brasil, pelos Parâmetros Curriculares Nacionais.

As orientações para o ensino de Estatística no Brasil estão contidas, portanto, nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, Brasil (1997), e no mais recente documento oficial que normatiza o currículo da educação básica, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, Brasil (2018). Segundo Coutinho (2019), os PCN (1997), que previam os conceitos estatísticos desde as séries iniciais, provocaram importante incentivo à novas pesquisas envolvendo Estocástica¹. Já a BNCC (2017), continua a autora, propõe ampliação e melhor distribuição dos conteúdos estatísticos durante a Educação Básica (EB). Exemplo disto, é o caso particular do ensino de Estatística, no qual muitos autores, dentre eles Rumsey (2019), Garfield (1998) e Chance (2002), defendem que seu planejamento esteja organizado em três competências: letramento; raciocínio; e pensamento estatístico (CAMPOS, 2007).

Para Garfield (1999 apud CAMPOS, 2007), o letramento estatístico possibilita entender a linguagem estatística, contida em jornais e outras mídias, assim como adquirir habilidade em interpretar gráficos e tabelas.

Cazorla e Castro (2008), destacam que o não letramento estatístico pode tornar o cidadão comum frágil para contestar discursos, propagandas, manchetes ou notícias veiculadas pela mídia, quando estes são representados em informações estatísticas, como gráficos e tabelas.

¹ Estocástica refere-se ao conjunto articulado de Combinatória, Probabilidade e Estatística (Coutinho, 2019).

Rumsey (2002 apud Campos, 2007) afirma que o conhecimento básico subentende ao raciocínio e ao pensamento estatístico que a autora identifica como competência estatística.

Para Lopes (2012) raciocinar estatisticamente é poder justificar processos estatísticos e ter a capacidade plena de interpretar seus resultados. Silva (2007), apoiada em Wild e Pfannkuch (1999), entende que o pensamento estatístico é um conjunto de estratégias mentais que o indivíduo adota para tomar decisões durante um ciclo investigativo.

O ensino de Estatística possibilita condições para se desenvolver o pensamento estatístico, sendo este, fundamental para o letramento estatístico do cidadão (SILVA, 2007). No âmbito dos estudantes que ingressam nos cursos superiores, o nível de letramento estatístico é insatisfatório, conforme observa Coutinho (2019). A autora reforça que eles desconhecem o uso de conhecimentos estatísticos básicos para desenvolverem uma pesquisa científica ou para uma simples coleta de dados.

A partir do desempenho dos alunos em Matemática podemos estimar seus rendimentos em conhecimentos estatísticos, uma vez que não encontramos indicadores que tratem especificamente de um objeto do conhecimento. Assim, entende-se que a observação de Coutinho expressa a realidade do ensino de Estatística, como mostram os resultados² das três séries pesquisadas pelo SAEB. Em uma escala de 0 a 500 pontos, a média nacional em 2017 ficou em torno dos 224 pontos para o 5º ano, 258 para o 9º ano e 269 para o 3º ano do EM. Conforme os intervalos dos níveis e suas respectivas habilidades desenvolvidas, as proficiências médias estão inseridas como segue: 5º ano no nível 4, isto é, o aluno não adquiriu habilidades, como reconhecer o maior valor em uma tabela; 9º ano no nível 3, o aluno não consegue associar dados em uma tabela com os de um gráfico de setores, nem analisar dados em gráfico de linhas com mais de uma grandeza; 3º ano do EM no nível 2, o aluno apresenta dificuldades em associar gráfico de setores a dados percentuais dispostos textualmente ou em uma tabela (BRASIL, 2018).

A situação se agrava quando observamos o desempenho na aprendizagem de desvio padrão e de variância. Em nossa prática docente – cuja experiência

² Os resultados das pesquisas neste trabalho se referem apenas aos da área urbana, pois o geral pode apresentar elevada dispersão dos dados.

alcança 20 anos, atuando no ensino de Matemática em escolas dos setores privado e público, sendo neste, em período bem maior que no primeiro – constatamos maior deficiência de aprendizagem nesses objetos de conhecimento do que nos demais conteúdos da Estatística.

As causas da baixa aprendizagem dessas duas medidas de variação podem ser as mais diversas, das quais destacamos apenas duas. A primeira, é quando o ensino ocorre com predominância nos cálculos, sem a devida preocupação em interpretá-los. Esse modo de ensinar pode indicar que o docente tende a adotar um ensino mais tradicional³. A outra causa possível, pode decorrer da não aquisição do conceito de medida de variação.

Por observarmos que a não compreensão do objeto de conhecimento Medida de Variação dificulta a aquisição do raciocínio e pensamento estatísticos, com a possibilidade de causar entraves na aprendizagem de duas importantes medidas estatísticas estudadas no EM, é que decidimos apresentar uma proposta de ensino. A intenção dessa proposta é mostrar ser possível garantir que o conceito de Medida de Variação seja assimilado, para só depois se conceituar desvio padrão e variância, de modo que os cálculos e suas fórmulas figurem sem protagonismo diante da interpretação desses conceitos.

Entendemos que para adquirir o conceito de Medida de Variação, seja necessário antecipar o de variação. Nessa pesquisa trataremos como sinônimos os termos variação e dispersão, ao contrário de variação e variabilidade que concordamos serem distintos, conforme Reading e Shaughnessy (2004 apud Silva, 2007, p.20) que entendem variabilidade como uma substantivação do adjetivo variável, e significa que algo está pronto ou tendendo a modificar.

A partir do contexto exposto acima, desenvolvemos nossa proposta para o ensino de Medidas de Variação em sequências didáticas, apoiada na Engenharia Didática como metodologia, e com os pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Adotaremos como norte desse estudo a seguinte questão: Quais as contribuições que uma sequência didática, baseada na Teoria dos Registros de

³ Concordamos com Cabral (2017, p.37), que entende como Ensino Tradicional aquele que converge única e exclusivamente para a exposição didática.

Representação Semiótica, podem trazer para o ensino de medidas de variação no EM?

Traçamos, então, como objetivo geral de nosso estudo o de investigar as contribuições de uma sequência didática desenvolvida para o ensino de Medidas de Variação com o uso de planilha Eletrônica, e construída segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Com o intuito de melhor mensurar as contribuições de nossa sequência didática delineamos alguns objetivos específicos, quais sejam:

- Identificar as dificuldades dos estudantes em Medidas de Variação, por meio de uma análise *a priori* e levantamento bibliográfico de pesquisas já realizadas na área da Educação Matemática;
- Experimentar junto aos estudantes do 3º ano do ensino médio uma Sequência Didática que envolveu noções sobre Medidas de Variação em diferentes registros de representação com uso de planilha eletrônica;
- Verificar as contribuições de uma Sequência Didática para a compreensão do conteúdo de Medidas de Variação.

A organização de nosso trabalho está estruturada conforme descrevemos adiante. No segundo capítulo, desenvolvemos os aportes teóricos necessários à nossa pesquisa, tais como: um breve apanhado histórico da Engenharia Didática e seus princípios fundamentais, bem como suas fases; uma apresentação de como se construíram alguns dos importantes conceitos que definiram a sequência didática; e os suportes que estruturam a teoria dos Registros De Representação Semiótica.

Em seguida, no capítulo 3, apresentamos as principais análises prévias desta pesquisa. As características da Educação Estatística na atualidade, dando ênfase ao entendimento de letramento, raciocínio e pensamento estatístico, além de nos aprofundarmos nos aspectos associados ao currículo da Estatística. Apresentamos também uma revisão de literatura sobre trabalhos que convergem com nossa temática, e que deram apoio à análise dos resultados. Para enriquecimento epistemológico de quem adotar nossa Sequência Didática, desenvolvemos o estudo sobre o objeto matemático, tratando dos conceitos que constroem a ideia de Medidas de Variação, bem como as generalizações para sua obtenção.

Já no capítulo 4, apresentamos nossa sequência didática por meio de uma análise *a priori*, apresentação da experimentação, análise *a posteriori* e validação.

2 APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Abordamos neste capítulo a metodologia de pesquisa que adotamos, a Engenharia Didática; o método de ensino, Sequência Didática, utilizado para construção do produto desta pesquisa, uma opção para organizar e planejar aulas de matemática de forma sequenciada; e, por fim, apresentamos os pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, que adotamos como embasamento para análise de resultados e validação do produto educacional construído e experimentado nesta pesquisa.

2.1 ENGENHARIA DIDÁTICA

Conforme Godino *et al.* (2013), a noção de Engenharia Didática (ED) foi introduzida no começo da década de 1980 na Didática da Matemática francesa. A abordagem envolvia a pesquisa em educação Matemática comparada às atividades de um engenheiro, e sempre esteve relacionada às intervenções didáticas do professor em sala de aula, geralmente sequências de ensino. Assim, a engenharia didática é concebida, segundo esses autores:

como o desenho e a avaliação de sequências teoricamente justificadas do ensino matemático, com a intenção de desencadear o surgimento de alguns fenômenos educacionais, e desenvolver recursos didáticos cientificamente testados (GODINO *et al.*, 2013)

Para Amouloud e Coutinho (2008), a Engenharia Didática pode ser entendida como uma metodologia de pesquisa, e nesse caso apresenta características de um esquema experimental que se fundamenta em atividades didáticas adotadas em sala de aula, como concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Os autores supracitados complementam que essa metodologia também se caracteriza pelo registro que a situa e pelo modo de validação associados a ela, como a comparação entre as análises *a priori* e *a posteriori*. Além disso, esses autores observam que a validação a partir da Engenharia Didática é feita de modo interno, isto é, sem que haja necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste, podendo ser uma análise qualitativa do processo de ensino e de aprendizagem.

Amouloud e Coutinho (2008) destacam as seguintes fases da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa que envolvam processos didáticos em Matemática.

a. Análises prévias.

Esta etapa envolve as análises preliminares, nas quais podem assumir características distintas, quais sejam:

- epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- do ensino usual e seus efeitos;
- das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução;
- das condições e fatores dos quais depende a construção didática efetiva;
- a consideração dos objetivos específicos da pesquisa;
- o estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual insere-se o trabalho.

De acordo com Artigue (1988), cada fase pode ser retomada e aprofundada no decorrer da pesquisa, devido a possíveis imprevistos. O pesquisador não deve considerar que as análises prévias indicam uma fase que deve ser finalizada para só assim iniciar as próximas; elas podem em certo momento ocorrer de modo simultâneo. Essas análises preliminares permitem identificar as variáveis didáticas potenciais a serem esclarecidas e manipuladas nas fases seguintes, ou seja, na análise *a priori* e na construção da sequência de ensino.

Para fundamentar as análises prévias de nossa pesquisa apresentamos inicialmente um estudo sobre o ensino de Estatística, seguido por uma revisão de literatura e finalizado por um estudo sobre o objeto matemático Medidas de Variação.

Em nossa pesquisa, procuramos apoio em pesquisadores atuantes no campo da Educação Matemática e mais especificamente na Educação Estatística, de modo a contribuírem tanto para a construção dos conceitos estatísticos que envolvem as Medidas de Variação, quanto para relacionar esse objeto de conhecimento às competências de letramento, raciocínio e pensamento estatístico. Além desse suporte teórico, buscamos também sustentação em informações e

dados contidos em documentos oficiais, tais como o Brasil (2017)⁴ e Brasil (2018)⁵, entre outros.

b. Construção e análise *a priori*.

Sobre as variáveis potenciais a serem manipuladas pelo pesquisador, Artigue (1988 apud Amouloud e Coutinho, 2008) apresenta dois tipos:

- Variáveis macrodidáticas ou globais relativas à organização global da engenharia; e
- Variáveis microdidáticas ou locais relativas à organização local da engenharia, isto é, a organização de uma sessão ou de uma fase.

Ambas podem ser de ordem geral ou dependente do conteúdo matemático investigado. As observações acerca dessas variáveis podem ocorrer nas seguintes dimensões: epistemológica, relacionada aos saberes; cognitiva, relacionada às estruturas cognitivas do sujeito da aprendizagem; e didática, relacionada ao sistema de ensino, no qual situam-se os sujeitos alvo da aprendizagem.

A análise *a priori* objetiva determinar de que modo as escolhas realizadas possibilitam o controle dos comportamentos dos sujeitos e explicam seu fundamento. Assim, esse tipo de análise nos exige:

- Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação adidática desenvolvida.
- Analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem;
- Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

⁴ BRASIL. MEC/INEP. Relatório do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) – ciclo 1990. Brasília, 2017.

⁵ BRASIL, Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular – BNCC. Brasília, DF, 2018.

Nesta fase elaboramos uma Sequência Didática em torno do conteúdo curricular de matemática do Ensino Médio, Medidas de Variação, sobre o qual verificamos as possíveis respostas de discentes do ensino médio durante a realização das atividades.

c. Experimentação, análise *a posteriori* e validação.

A experimentação é a fase em que se dá início a tudo o que foi construído, fazendo-se os ajustes necessários. Nessa etapa ocorre a possibilidade de se retornar à análise *a priori*, para efeito de complementação.

Sucede à experimentação a fase da *análise a posteriori*. Ela se apoia no conjunto dos dados coletados na fase anterior, isto é, as observações realizadas em relação às sessões de ensino e às produções dos alunos fora ou dentro sala de aula. Algumas vezes esses dados são complementados por outros provenientes do uso de metodologias externas, tais como, questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizadas em diversos momentos do ensino. Assim, a análise *a posteriori* de uma sessão

é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribuem para melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo. (AMOULOU e COUTINHO, 2008, p. 68)

Os autores supracitados afirmam ainda, que não se deve entender a análise *a posteriori* como uma espécie de “crônica da classe”, mas sim como uma análise realizada a partir da análise *a priori*, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa, ao considerar que:

- a observação foi preparada por uma análise *a priori* conhecida do observador.
- os objetivos da observação foram delimitados por ferramentas apropriadas, e estruturados também pela análise *a priori*.

A partir do exposto, Amouloud e Coutinho (2008) lembram que ferramentas técnicas ou material didático, como um vídeo ou um software, e *teóricas*, como a teoria dos registros de representação semiótica ou a análise dos níveis de Curcio⁶,

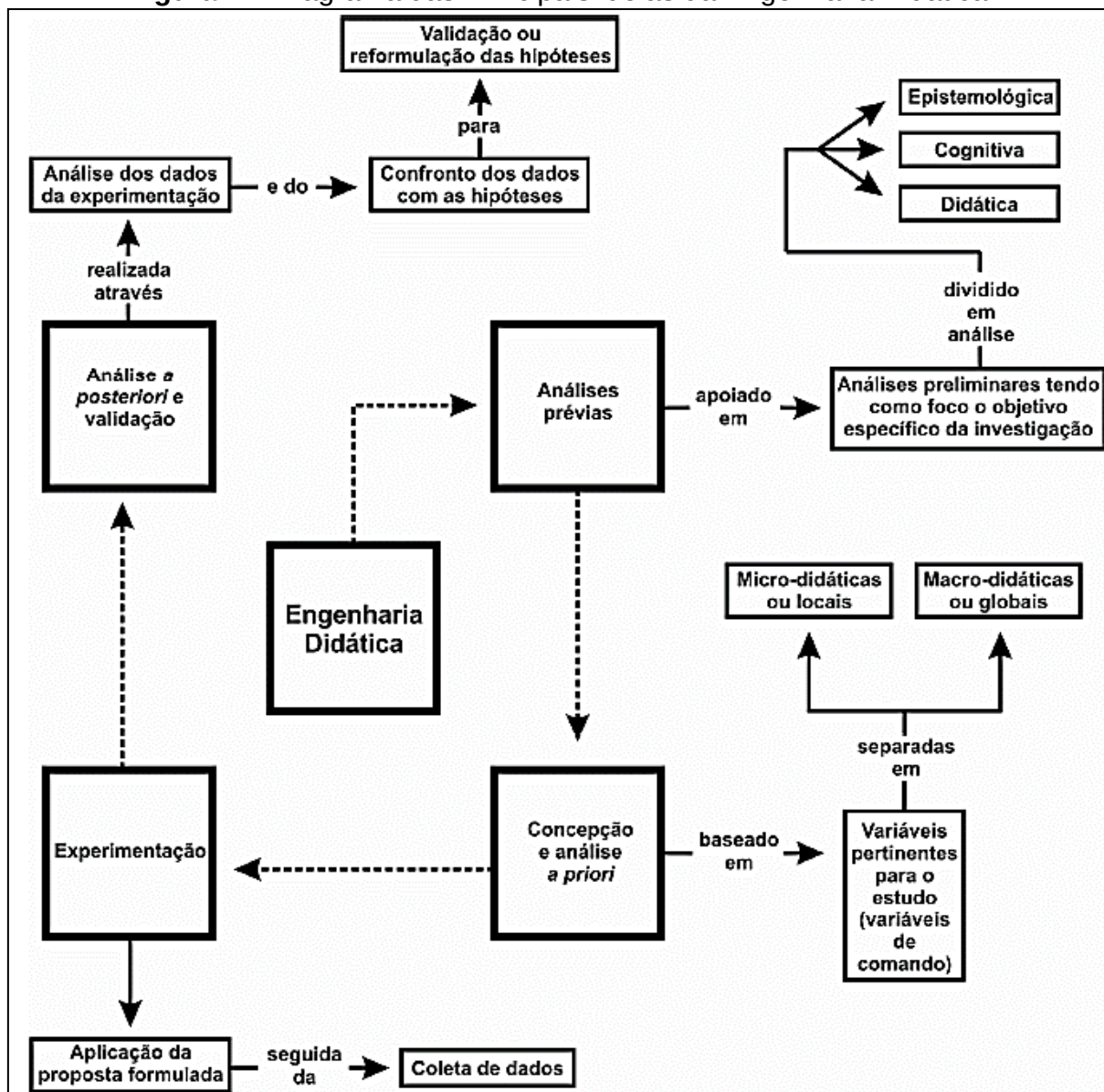
⁶ Para Curcio (1989), os gráficos permitem a comunicação e a classificação dos dados, sendo, pois, possível comparar e evidenciar relações. Ele, então, propõe três níveis para se compreender um gráfico: a leitura de dados; a leitura entre os dados; e a leitura além dos dados.

são necessárias para se efetivar a análise *a posteriori*, e para construir seus protocolos de pesquisa. Tais protocolos, continuam os autores, devem ser submetidos a uma análise apurada pelo pesquisador, sendo as informações obtidas, confrontadas com a análise *a priori*, de modo a validar as hipóteses envolvidas no estudo.

Lutz (2008) apresenta um diagrama⁷ que resume as principais ideias envolvidas na Engenharia Didática.

⁷ Ver figura 1 – Diagrama das Principais ideias da Engenharia Didática, p. 24.

Figura 1 – Diagrama das Principais ideias da Engenharia Didática



Fonte: Lutz (2008, p. 49)

Nesta fase experimentamos a Sequência Didática elaborada para estudantes do 3º ano do Ensino Médio em uma escola pública situada na região metropolitana de Belém do Pará. Para coletar as informações analisadas, adotamos os registros escritos dos alunos no material impresso das atividades.

A Validação do nosso estudo ocorrerá por meio da articulação entre as análises *a priori* e as constatações efetivadas *a posteriori* na realização da Sequência aplicada. Desse modo, relacionaremos os resultados encontrados com os objetivos estabelecidos pré-estabelecidos na análise *a priori*, para assim estimar a regularidade dos fenômenos identificados.

2. 2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta pesquisa nos propusemos a apresentar um produto que pudesse ser utilizado por professores de matemática no ensino de Medidas de Variação com um roteiro planejado e com embasamento teórico e metodológico que ilustrasse uma maneira de organizar aulas de matemática na perspectiva das tendências do Ensino de Matemática e das atuais normativas curriculares estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Nesse sentido é necessário que haja significado para o educando no objeto matemático ensinado, “ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade” (BRASIL, 2017, p. 517).

Embora a matemática escolar precise estar inteligível na realidade do educando, este não deve ser privado da formalização da matemática científica. Para Brousseau (1996) essa aproximação da matemática científica com a matemática escolar por meio da atuação pedagógica do professor chama-se Transposição Didática. Segundo Brousseau (1996, p. 36), explicar ao aluno noções e propriedades como aplicações de um assunto mais amplo do que aquele simples tópico trabalhado em uma certa aula parece sempre inviabilizar a didática. Por outro lado, parece complicado discordar que tal prática dificulte a possibilidade de o aluno obter uma compreensão macro do assunto, o que a distância do “verdadeiro funcionamento da ciência”. O autor resume tal conflito ao afirmar que a transposição didática

tem sua utilidade, os seus inconvenientes e o seu papel, inclusivamente para a construção da ciência. É, simultaneamente, necessária e, num certo sentido, lamentável, e tem de ser colocada sob vigilância. (BROUSSEAU 1996, p. 36)

Zabala (1998), porém, nos conforta ao justificar que os processos educativos são tão complexos que seus fatores são difíceis de reconhecer, e que sua prática é volúvel e possui tantas variáveis que

é algo fluido, fugidio, difícil de limitar com coordenadas simples e, além do mais, complexa, já que nela se expressam múltiplos fatores, ideias, valores, hábitos pedagógicos, etc. (ZABALA, 1998, p. 16)

O autor enfatiza a necessidade de que a prática pedagógica seja dinâmica e reflexiva, isto é, os processos educacionais não podem ser retidos ao momento de atuação em sala de aula. Desse modo, defende ele, que deve existir um “antes e um

depois” para constituir a prática, que neste caso são o planejamento e a avaliação. Assim, Zabala (1998), reforça que

Por pouco explícitos que sejam os processos de planejamento prévio ou os de avaliação da intervenção pedagógica, esta não pode ser analisada sem ser observada dinamicamente desde um modelo de percepção da realidade da aula, onde estão estreitamente vinculados o planejamento, a aplicação e a avaliação. (p. 17)

A partir dessa tríade – planejamento, aplicação e avaliação – o autor sustenta a necessidade de uma unidade que represente esses três componentes como um processo. Ele a define como uma atividade ou tarefa. O próprio autor, porém, entende que a atividade, em si, não é suficiente para tamanha função pedagógica, pois, pode assumir valores distintos no planejamento e na avaliação. Para isso, sustenta que as atividades sejam ordenadas de acordo com o valor que podem receber por suas características relativas ao ensino e a aprendizagem. Assim, as atividades, por terem sua função pedagógica ampliada quando seriadas ou sequenciadas, são denominadas de sequências de atividades ou sequências didáticas. O mesmo autor as define como

“um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (Zabala, 1998, p.18)

Por sua vez, Cabral (2017), define uma sequência didática como “um conjunto de atividades escolares organizadas, de maneira sistemática, em torno de um gênero textual oral ou escrito” e que apresenta procedimento metodológico estruturado em quatro fases, descritas a seguir.

Na primeira fase, ocorre apresentação da situação de ensino, isto é, o professor descreve em detalhes a importância do objeto de ensino estudado, apresenta sua estrutura e condições coletivas de produção envolvidas, bem como seus objetivos. A segunda fase, a produção inicial, trata das intervenções que pretendem diagnosticar as capacidades anteriores adquiridas sobre o gênero objeto em questão, de modo a adequá-las às ações posteriores. Na terceira fase, são desenvolvidos os módulos onde ocorrem oficinas com diversas atividades, cuja finalidade é desenvolver as capacidades de linguagem de modo a se adequar às dificuldades percebidas. O professor nessa etapa deve variar as formas de avaliação. Já na quarta e última fase, a produção final, o aluno põe em prática os

conhecimentos adquiridos, participando com o professor da avaliação de seu desempenho.

Cabral (2017, p.35) explicou que a ênfase desse modelo de intervenção de ensino está em um maior envolvimento entre os próprios alunos, e entre estes e o professor, bem como a construção de maior capacidade argumentativa dos estudantes. Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004) e Leal, Brandão e Albuquerque (2012) corroboram com a ideia de que as decisões do professor precisam envolver princípios didáticos como a valorização dos conhecimentos prévios dos alunos, o ensino reflexivo (ênfase na explicação verbal), um ensino pautado na interação e organização sistemática dos saberes, e no uso diverso e desafiador de atividades organizadas conforme seus níveis de complexidade.

Nesse contexto, Cabral (2017) defende que no ensino de Matemática é necessário que o professor em sua prática pedagógica aborde os objetos de conhecimento de forma articulada, focando na presença de “padrões sistêmicos” que permitam estabelecer generalizações.

Assim, entendemos que a importância das potencialidades pedagógicas de um ensino estabelecido a partir dos princípios que envolvem uma Sequência Didática favorecem a aprendizagem, principalmente de conteúdos que exigem dos sujeitos competências além do letramento matemático, isto é, solicitam que eles raciocinem e pensem matematicamente. É o que ocorre com os conhecimentos envolvidos nos conteúdos estatísticos, objeto de nossa pesquisa.

2. 3 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

No Ensino de Matemática atual há uma tendência em promover no educando competências que favoreçam a comunicação em linguagem matemática e o desenvolvimento do raciocínio matemático, isto é, o educando precisa “compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.)” (BRASIL, 2017, p. 523). Nesta seção abordamos uma das principais linhas de estudo da semiótica e que integra nossos pressupostos teóricos: a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Antes, apresentamos algumas noções gerais da semiótica.

A Sequência Didática de nossa pesquisa exigiu dos alunos, além do entendimento dos comandos textuais e de conhecimentos prévios, que eles explorassem dados contidos em gráficos e tabelas, e os interpretassem para compreenderem o objeto matemático exigido. Desse modo, a teoria que entendemos ser a que acomoda um objeto com tantos signos, como o de nosso estudo, é a de registros e representações semióticas.

Para Santaella (2008b), Semiótica é a ciência que objetiva investigar todas as linguagens possíveis; de examinar como se constituem todos os fenômenos que possam produzir significado e sentido. A autora salienta a distinção entre língua e linguagem, e o domínio aparente da primeira. A língua que falamos nos possibilita escrever, e pode ser nativa, materna ou pátria, porém, não é a única forma de linguagem. O uso predominante da língua, nos confunde de tal modo que subestimamos que na realidade nos comunicamos com maior frequência por outras linguagens., tal como reforça a autora.

[...] nos comunicamos também através da leitura e/ou produção de formas, volumes, massas, interações de forças, movimentos; que somos também leitores e/ou produtores de dimensões e direções de linhas, traços, cores... Enfim, também nos comunicamos e nos orientamos através de imagens, gráficos, sinais, setas, números, luzes...Através de objetos, sons musicais, gestos, expressões, cheiro e tato, através do olhar, do sentir e do apalpar. (SANTAELLA, 2008b, p. 2)

A exclusividade da língua – verbal, oral ou escrita – como principal forma de comunicação não é, conforme a autora, via única para conhecer, saber e interpretar o mundo. As linguagens não-verbais também podem nos conduzir aos mais variados saberes. Em suma, nós operamos “o processo de alteração dos sinais (qualquer estímulo emitido pelos objetos do mundo) em signos ou linguagens (produtos da consciência)” (SANTAELLA, 2008b, p.2). Portanto, continua a autora, seja qual for o fenômeno, a semiótica tenta esclarecer e tornar explícito sua ação como signo ou linguagem.

Segundo Fernandes (2011), a semiótica pode ser entendida como uma ciência que investiga a vida dos signos dentro das relações sociais. Conforme o autor, “ela vai das mecânicas relativas ao conhecimento até as reorientações formais e, por consequência, às apropriações de conteúdo, ou de sentido”. Para explicar a abrangência desta teoria, Fernandes (2011, p.161) afirma que

A posição privilegiada da semiótica nesse processo, como teoria geral dos signos, deve ao fato de que ela investiga explicitamente todos os signos, as

relações s gnicas e as operações s gnicas, que são usadas implícita, intuitiva e automaticamente.

Dessa forma, a semiótica se apresenta como uma ciência cuja abrangência de aplicações se estende a diferentes áreas do conhecimento. Algumas linhas de pesquisa da semiótica tratam de objetos matemáticos, dentre as quais destaca-se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Raymond Duval. Para este autor, é fundamental a compreensão da natureza das dificuldades que muitos alunos apresentam para entender conhecimentos matemáticos. Porém, a aquisição desses conhecimentos ocorre por processos tão complexos que se torna inevitável diferentes abordagens didáticas (DUVAL, 2006). A  rea educacional, segundo o autor, é uma das que mais faz uso da noção de **representação** para caracterizar um fen meno.

O conceito de representação tem sofrido diversas atualizações desde o período medieval, quando era associado a imagens, signos, símbolos entre outras formas de substituição, conforme Santaella e N th (1998). Esses autores apontam que o significado de representação abrange de imaginação e apresentação   relação s gnica ou a conceitos semióticos.

Atualmente, o debate sobre conceito de representação está relacionado aos processos cognitivos, que, nesse caso, é entendido como representação mental. Para a semiótica, portanto, segundo Santaella e N th (1998), as representações cognitivas são signos e operações mentais que ocorrem como processos s gnicos.

Para Colombo (2008)

A semiótica passa a ser então, na modernidade, a ciência que explica os processos das representações no ato de conhecer. Em consequência disso, as representações semióticas, enquanto parte concreta que relacionam o objeto do conhecimento e o sujeito que aprende, se estabelecem como elemento importante no processo de ensino e de aprendizagem desse conhecimento. (p. 22)

Segundo essa autora, as representações em geral podem ser:

- Internas ou representações mentais, quando criadas na mente do indivíduo, e podem se manifestar como mental ou computacional. São exemplos, a língua natural adotada pelo aluno, as estratégias pensadas para resolução de problemas, as imaginações que estes fazem de objetos como os geométricos, entre outros.

- Externas, quando produzidas pelo indivíduo ou por um sistema semiótico. São exemplos, as notações de funções, as expressões algébricas, os sistemas gráficos como os histogramas, entre outros.

Assim, a representação semiótica (ou externa) de um objeto matemático apresenta uma relação intrínseca com as representações mentais (ou internas) do indivíduo. Portanto, ambas interferem no processo de aprendizagem dos conteúdos matemáticos, pois, é a partir das representações semióticas que o objeto matemático ganha significado. (COLOMBO, 2008).

Em nossa temática de estudo, as dificuldades de aprendizagem de conteúdos matemáticos nos impõem buscar estratégias de ensino que possibilitem melhores resultados para as práticas em sala de aula. Compreender como as dificuldades surgem ou são processadas mentalmente, é essencial ao trabalho didático/pedagógico do professor. Nesse sentido, Duval (2006, p. 104) defende que, se queremos “determinar a origem da incompreensão dos alunos, devemos primeiro determinar as condições cognitivas que tornam possível a compreensão”. Para isso, o autor, questiona se o modo de pensar em Matemática coincide com o de outras áreas do conhecimento, isto é,

[...] a atividade matemática requer apenas os processos cognitivos comuns ou, de fato, certas estruturas cognitivas muito específicas, cujo desenvolvimento deve ser cuidado no ensino? (DUVAL, 2006, p.105)

Para responder tal questionamento, Duval (2006) afirma que, se intencionamos que a aprendizagem de conhecimentos matemáticos tenha significado, ela deve ser direcionada ao desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, análise e visualização do aluno. Além disso, continua o autor, as representações semióticas devem ser consideradas em nível das estruturas mentais, e não somente como uma exigência epistemológica para ingressar ao objeto do conhecimento.

Duval (2006) orienta que

Nenhum tipo de processamento matemático pode ser realizado sem o uso de um **sistema semiótico de representação**, porque o processamento matemático sempre envolve a substituição de alguma representação semiótica por outra. O papel principal dos sinais não é representar objetos matemáticos, mas fornecer a capacidade de substituir alguns sinais por outros. (p. 107, grifo nosso)

O autor aponta que um possível indicativo das dificuldades de aprendizagem de conceitos matemáticos pelos alunos, situa-se no fato de podermos usar

diferentes representações semióticas para um mesmo objeto e em diversos sistemas de representação. Cada um desses sistemas semióticos apresenta uma capacidade específica de realizar processos matemáticos, e cumprem funções cognitivas de comunicação, objetivação e tratamento, ou de transmissão e categorização. Duval (1999 apud Amouloud, 2007) os diferencia conforme os níveis de funcionamento, isto é: se consciente ou se não-consciente. Assim, as representações em um sistema semiótico podem ser um registro ou um código. O quadro 1 mostra como se distribuem e se caracterizam essas funções de acordo com o sistema.

Quadro 1- Função Cognitiva dos Sistemas semióticos.

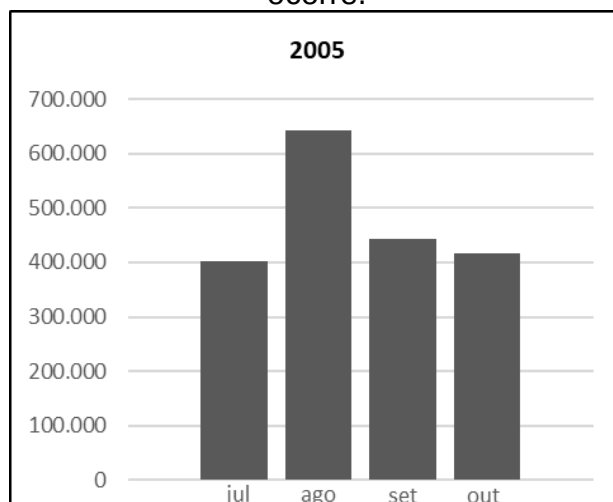
SISTEMAS SEMIÓTICOS	FUNÇÃO COGNITIVA	NÍVEL DE FUNCIONAMENTO
Registros De Representação	• Comunicação • Objetivação • Tratamento	CONSCIENTE
Códigos	• Transmissão • Categorização (dados)	NÃO-CONSCIENTE

Fonte: Adaptado de Duval (1999)

Funcionalmente os códigos apresentam mais restrições que os registros de representação. Uma importante característica dos códigos é não permitir a determinação ou representação direta de um conteúdo do conhecimento. Já os registros têm importância fundamental no processo de aprendizagem quando ocorrem mudança e coordenação deles.

Para ilustrar, podemos indicar como exemplo quando o aluno é solicitado a aprender o conceito do objeto desvio, ele pode inicialmente representá-lo a partir de um registro gráfico.

Gráfico 1 - Estimativa dos visitantes à Belém de diversos lugares para participar do Círio de Nazaré⁸, nos três meses que antecedem o evento e no próprio mês que ocorre.



Fonte: Elaborado pelo autor

A visualização gráfica (gráfico 2) possibilita de imediato que o aluno perceba as diferenças entre as colunas, podendo relacioná-las ao termo desvio. Mas o simples argumento de que os mesmos deveriam ser combinados a cada coluna, dificulta defender tal entendimento. O professor então pode direcionar para a necessidade de associar as diferenças a um único referencial: a média ($\bar{x}$) entre os dados (conceito prévio). Após as observações que provoquem a visualização da média no gráfico o professor pode modificar para um segundo registro: o tabular (quadro 2). A finalidade desse registro é de facilitar a visualização de todos os valores envolvidos, especialmente as diferenças que definem o desvio.

Quadro 2 - Representação tabular

Mês	Julho	Agosto		Setembro	outubro
Número de visitantes	401.857	643.461		442.250	416.513
Média		476.020,3			
Diferença	74.163	-167.441		33.770	59.507

Fonte: elaborado pelo autor

Após as observações, como a ocorrência de sinais negativos, entre outras, o professor muda para o último registro: o algébrico, cuja intenção é generalizar o

⁸ Círio de Nazaré é uma festa tradicional da capital paraense, sempre realizada no mês de outubro.

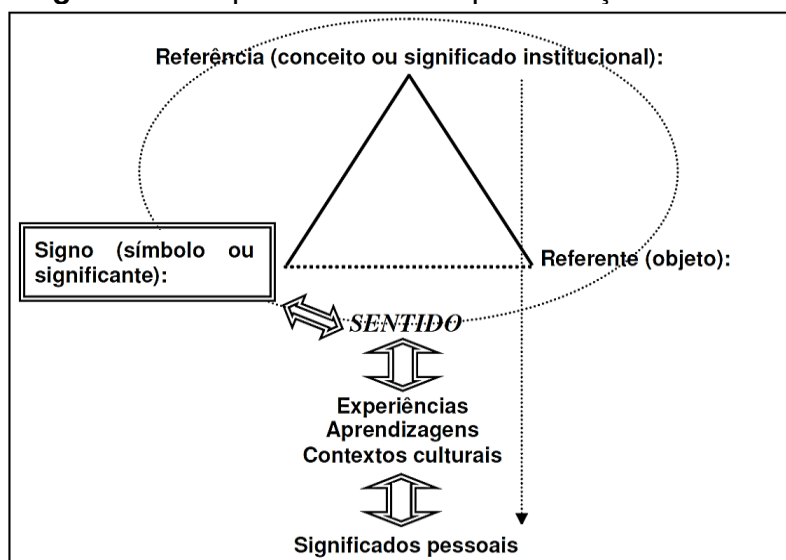
conceito do ente desvio, uma vez que nos registros anteriores isso seria mais dificultoso. Assim, o conceito de desvio pode ser definido como a diferença entre um dado x_i e a média $\bar{x}$ dos dados observados, representado algebricamente como $x_i - \bar{x}$.

Mas Duval (1993) destaca que o objeto não deve ser confundido com sua representação. Isso enfatiza a importância de usar diversos registros, tornando-o reconhecido em cada representação utilizada. Ou seja, os entendimentos do ente *desvio* são válidos em quaisquer dos registros adotados. Portanto, é fundamental que o professor incentive os alunos a associarem o conceito definido no último registro, aos anteriores.

A necessidade de coordenar a passagem de um registro para outro é essencial para garantir a construção do conceito. Isso fica evidente na mudança do primeiro para o segundo registro. Foi preciso, nesse caso, contar com a intervenção do professor quando este usou o registro gráfico para mostrar ao aluno que o objeto exige detalhes não presentes no visual.

Para melhor ilustrar a construção de um conceito, adotamos a sugestão de Colombo (2008, p 101), que propôs uma tríade semiótica específica (figura 2)

Figura 2 – Esquema de uma representação semiótica



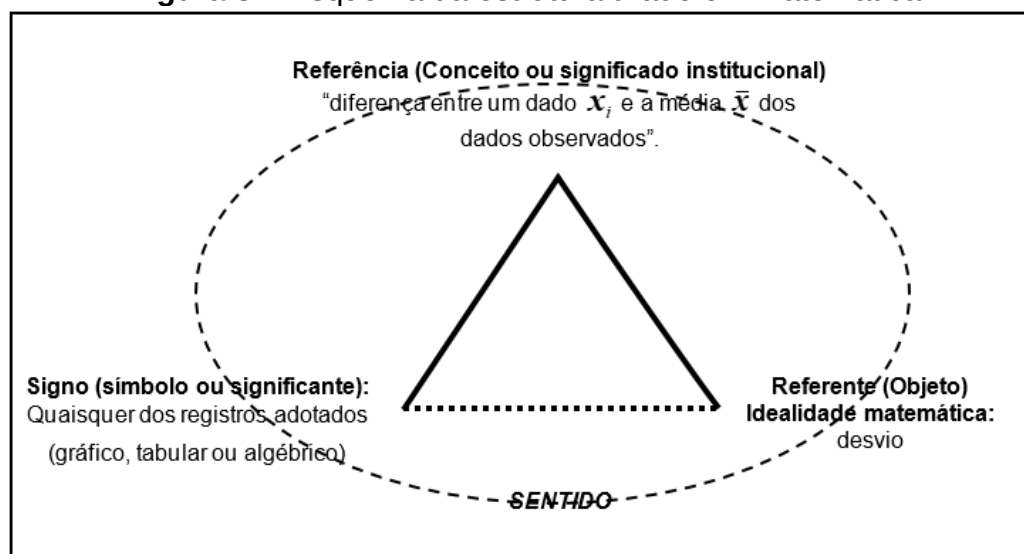
Fonte: Colombo (2008, p. 101)

Para Colombo (2008), os vértices do triângulo mantêm a estrutura do triângulo epistemológico de Steinbring e da clássica tríade semiótica, resultante da

contribuição de Frege, Peirce, Ogden e Richards. Colombo (2008) acrescentou no vértice superior, o conceito de significado institucional e na base do triângulo, abaixo da linha tracejada, os significados pessoais do aluno, conceitos de acordo com Godino e Batanero (2001). Na base também se situa o sentido, determinando as relações que se estabelecem entre signo, referente e objeto.

Em nosso exemplo, a tríade assume a forma mostrada na figura 3.

Figura 3 – Esquema da estrutura tríade em Matemática



Fonte: Elaborada pelo autor.

Segundo Colombo (2008), é preciso compreender que todas as representações tiveram como referência uma única ideia, sendo o referente, o mesmo objeto matemático (desvio). Além disso, enfatiza a autora, cada representação assume um sentido distinto, e que mobiliza diferentes tratamentos que permitem ao aluno apreender o objeto a partir de quaisquer das representações ao qual foi confrontado.

Lembramos que para Duval (1993), o objeto não deve ser confundido com sua representação. Mas como seria possível não os confundir, se as atividades que envolvem esse objeto só se tornam possíveis a partir das representações semióticas, sendo que a apreensão do objeto matemático é uma apreensão de seu conceito?

A esse conflito, Duval (1993) chama de "paradoxo cognitivo do pensamento". Esse autor, então, afirma que a apreensão do conceito de um objeto, sempre vem acompanhada da apreensão e produção de uma representação semiótica. A apreensão do conceito, o autor chama de *noesis*, e à apreensão e produção de uma

representação, de *semiosis*. Portanto, segundo Duval (1993, p.40), não há “*noesis* sem *semiosis*”.

Para suportar os efeitos desse paradoxo cognitivo sobre o ensino dos conhecimentos matemáticos, Duval (2006, p. 109) propõe o uso de vários sistemas de representação semiótica, com capacidades específicas para realizarem os processos matemáticos. Alguns desses sistemas apresentam somente uma função cognitiva (processamento matemático), que o autor denomina de monofuncionais. Outros, porém, podem cumprir diversas funções, tais como imaginação, comunicação, conscientização, entre outras. A estes sistemas, o autor denomina de multifuncionais. A diferença entre eles é que no primeiro, a maior parte dos processos assume a forma de algoritmos. Já no segundo, tais processos jamais assumem forma algorítmica.

Duval (2000) classifica esses sistemas de representação semiótica em quatro tipos, de acordo com o quadro 3.

Quadro 3 - Classificação dos diferentes registros segundo a natureza

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). • cálculo	Gráficos cartesianos. • mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação

Fonte: Duval (2003, p. 12)

A apreensão do que basicamente envolve uma representação ocorre em apenas um dos níveis dos sistemas de representação semiótica. Além disso, para produzir tais representações os sistemas devem apoiar-se em regras, cujas atividades cognitivas Duval (2003) chama de Formação de representação identificável. Entretanto, nem todo sistema semiótico é um registro (DUVAL, 2006, p.

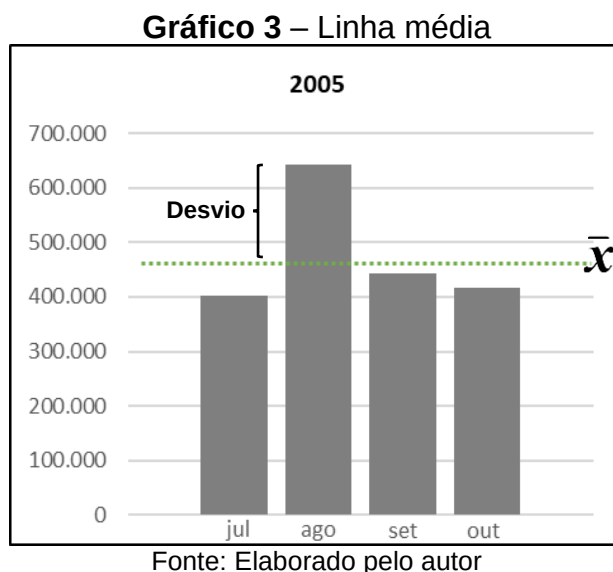
111), para sê-lo, ele deve permitir uma transformação de representações. Esta, segundo o autor, pode ser de tratamento ou de conversão.

Portanto, esclarece Duval (1993, p.41), para ser um registro, um sistema semiótico de representação precisa, com base na *semiosis*, estar relacionado a três atividades cognitivas fundamentais: a formação de uma representação identificável; ao tratamento; e à conversão.

A formação é uma atividade que busca identificar que objeto matemático está sendo referenciado a partir de um registro. Conforme atesta Colombo (2008), a *formação* precisa respeitar regras que assegurem as funções cognitivas de objetivação e de tratamento. Isto é, primeiro as condições que identifiquem e reconheçam uma representação, depois sua utilização para tratamentos. Com base nesse entendimento, é possível apreender que todos os sistemas monofuncionais que obedecem a características matemáticas, se baseiam nas regras de formação (DUVAL, 2006, p. 110).

Assim, respeitadas essas regras, as representações podem ser identificadas como sendo de um determinado registro. Isto é, ao ser confrontado com uma representação em um sistema semiótico, o aluno é capaz de afirmar a que ela se refere. Como exemplo, ao ver um círculo fatiado que lembra uma pizza ele identifica como um gráfico de setores; ou ao estar diante da média de uma soma quadrática de diferenças relacionadas à média ele identifica como variância.

Os tratamentos, de acordo com Duval (2006, p. 111), são transformações de representações que ocorrem dentro de um mesmo registro. Como exemplo, retomamos o caso do *desvio*, usado anteriormente: se, ao apresentar o registro gráfico para realizar o conceito de desvio e quando se decide determinar a média ($\bar{x}$) como elemento único a ser relacionado aos dados, decide-se por representar essa média no gráfico (como uma linha auxiliar), e não em um registro tabular ou algébrico. E após essas etapas iniciais, procede-se com a institucionalização do significado do objeto utilizando-se do próprio registro gráfico, ou seja, com a identificação dos desvios como a diferença entre o “comprimento” de um dado e o valor associado à “linha” da média (diferença entre ordenadas), conforme mostra, para um dado, o gráfico 2.



Para Duval (2006), os procedimentos para a realização de uma transformação são tão importantes quanto as propriedades matemáticas envolvidas.

Colombo (2008) observa que quanto mais cuidadosa for a coordenação dos diferentes registros de representação semiótica de um mesmo objeto, maiores serão as possibilidades de apreender esse objeto.

As Conversões, segundo Duval (2006), são transformações de representações que alteram um registro mantendo inalterados os objetos que se intenciona denotar. A conversão difere do tratamento, pois ela ocorre entre sistemas de registros distintos, enquanto o tratamento acontece no interior do registro.

Para exemplificar, retomamos o caso do desvio, porém na forma como o apresentamos, pois as etapas enunciadas eram, em si, conversões de registros. Para evitar excessivas repetições, apresentamos apenas seu resumo. Assim, para conceituar o objeto desvio utilizamos inicialmente o registro gráfico; convertemos, em seguida, para o registro tabular, e incluímos a média; e finalizamos com a conversão para o registro algébrico, para instituir o significado do objeto. Reforçamos que em cada passagem de registro, enquanto o sentido da representação era atualizado, o objeto permanecia inalterado, pois em cada uma a finalidade foi de conceituar o ente desvio.

Colombo (2008, p.113) atenta para esses diferentes aspectos que o objeto mostra durante as conversões, ao citar Duval (1993) que afirma que a conversão se apresenta de diversos modos, tais como: ilustração, tradução e descrição. Assim, de acordo com esse autor

A ilustração é a conversão de uma representação lingüística em uma representação figural. A tradução é a conversão de uma representação lingüística numa língua dada em uma representação lingüística de uma outra língua ou em outro tipo de língua. A descrição é a conversão de uma representação não verbal (esquema, figura, gráfico) em uma representação lingüística (p. 42).

A mobilidade dos registros é fundamental para a atividade Matemática, e pode ser realizada por meio de gráficos, figuras, escritos, língua natural, entre outros. Além disso, conhecer diferentes formas como se apresentam as conversões é relevante às intenções de nosso estudo, especialmente a descrição, uma vez que eles envolvem registros gráficos, tabulares e algébricos, além da língua natural.

No próximo capítulo, apontaremos sobre o ensino da Estatística e seus aspectos curriculares, bem como as relações entre as competências definidas por alguns dos importantes teóricos da Educação Estatística e as definidas na BNCC.

3 ANÁLISES PRÉVIAS

Neste capítulo apresentamos o estudo feito na fase preliminar da Engenharia Didática chamada Análises Prévias. Aqui apresentamos um panorama do ensino de estatística dentro do currículo de Matemática da Educação Básica, uma revisão de literatura com estudos experimentais e estudos diagnósticos sobre o ensino de estatística em especial as Medidas de Variação.

3.1 ENSINO DE ESTATÍSTICA

Com a finalidade de direcionar nossos objetivos específicos, possibilitar a elaboração das atividades de nossa SD, dar suporte teórico à análise dos resultados dessa pesquisa entre outros, tratamos neste capítulo da Educação Estatística (EE), especialmente de suas principais competências: letramento; raciocínio; e pensamento estatístico. Não priorizamos o processo histórico da Educação Estatística; nossa atenção está voltada às interseções entre Matemática, Estatística e Educação.

3.1. 1 Educação Estatística

Sobre a tríade Matemática, Estatística e Educação, Lopes (2003) usa D'Ambrósio (1996) para afirmar que a Educação Estatística nasce da relação recíproca de dependência entre Matemática e Educação, tal como o fez D'Ambrósio, ao considerá-las como estratégias contextualizadas e plenamente interdependentes.

O próprio D'Ambrósio (2009) esclarece que a linha de interesse comum entre os componentes de nossa tríade situa-se fora de tudo que possa desvalorizar o ser humano e a importância de suas relações. O autor identifica que a prática da Educação na cultura ocidental normalmente privilegia o intelecto ao mesmo tempo que negligencia as funções vitais. O mesmo, lembra que essa prioridade pelo preparo do intelecto arrasta-se na filosofia ocidental desde René Descartes, quando o comportamento humano era dicotomizado, por exemplo, entre trabalho intelectual e manual, ou o saber e o fazer. Esse pensamento serve de referência às teorias de

aprendizagem que diferenciam “um saber / fazer repetitivo do saber / fazer dinâmico, privilegiando o repetitivo” (p. 66).

Lopes (2003) afirma que o discurso do conhecimento deve focalizar uma Matemática que veja o mundo e pense sobre ele, sem deixar de priorizar o processo de Matematização⁹. Com isso, enfatiza a autora, uma aula deve se centrar no exercício constante do diálogo. Entretanto, os conhecimentos matemáticos parecem ser ensinados a partir de uma hierarquização de seus conteúdos, de modo que cada etapa se volta para tão somente a ordem estabelecida e ao cumprimento da programação pré-determinada. Uma das consequências é a divisão da realidade em dois ambientes: o da aula e o de fora dela (D’Ambrósio (2009, p. 83).

A Estatística, por ser interdependente da Matemática, apresenta conflitos semelhantes ao exposto, especialmente no contexto escolar, que, conforme Campos (2007), é uma parte da Matemática, uma vez que ambas apresentam desenvolvimentos didáticos/pedagógicos que se assemelham. Nesse contexto, a EE assume função fundamental para tratar de questões relevantes aos princípios da Estatística, e que interferem no ensino dos conhecimentos estatísticos, tais como os citados: incerteza, aleatoriedade, determinismo matemático, entre outros.

Para Lopes (2003), o determinismo tem sido hegemônico nas leituras de mundo, o que provoca ausência de opiniões que defendam as incertezas e as diversas possibilidades de entendimento de um contexto matemático.

Em Cordani (2001), encontramos a seguinte reflexão de Barnett (1973): “Estatística é o estado de como informação deveria ser empregada para reflexão e ação em uma situação prática envolvendo incerteza”.

Ainda que alguns aspectos matemáticos, como cálculos aritméticos ou complexos procedimentos algébricos, estejam presentes com frequência na Estatística, não possuem, para esta, o mesmo valor de princípios como os da aleatoriedade e da incerteza. Tais princípios eximem-se da formalidade lógica ou do determinismo matemático (CAMPOS, 2007).

Assim, Ben-Zavi e Garfield (2004) defendem a Estatística como uma disciplina que não pode ser confundida com a Matemática, e nem restrita aos conceitos que esta abrange. Para esses autores

⁹ Skovsmove (1990 apud Lopes, 2003, p. 16) define que “matematizar significa, em princípio, formular, criticar e desenvolver modos de compreensão. Para que esse processo se efetive é necessário que tanto alunos quanto professores estejam no domínio da situação de aprendizagem”.

As estatísticas são um método intelectual geral que se aplica onde quer que os dados, variação e chance apareçam. É um método fundamental porque dados, variação e chance são onipresentes na vida moderna. É uma disciplina independente com suas próprias ideias fundamentais em vez de, por exemplo, um ramo da matemática (p. 5)

Campos (2007), afirma que a partir da constatação de que organizar dados, interpretá-los e analisá-los, estava fora do foco da Matemática, tornou-se inevitável não reconhecer a Estatística “como uma ciência em franca evolução, que experimenta mudanças progressivas tanto do ponto de vista de seu conteúdo como de suas demandas de formação”. Com tantas carências sociais que exigem interpretação e análise cuidadosa de informações provenientes de diversas mídias, e com recursos tecnológicos em expansão, especialmente na informática, a exigência de novas competências torna-se obrigatória. Para Batanero (2001), isso nos leva ao desafio de ensinar conteúdos estatísticos para alunos que possuem habilidades e atitudes diversas. Assim, a evolução da Estatística provocou mudanças no ensino de seus conteúdos, e consequentemente, obrigou novas discussões acerca das competências que essa disciplina exige dos alunos.

Conforme Ben-Zavi e Garfield (2004), dentre as principais metas para a EE do ensino fundamental e do médio, está o esforço em fazer com que os alunos possam desenvolver a compreensão e a familiaridade com a análise de dados, evitando o ensino de várias habilidades separadas de seus procedimentos. Assim, novos currículos de Estatística estabelecem metas mais ambiciosas, definidas ao longo de eventos em diversos países, como A Conferência Internacional sobre o Ensino de Estatística realizada em Cingapura, em 1998. Nela, segundo Ben-Zavi e Garfield (2004), foram debatidos variados temas, incluindo sobre o desenvolvimento das competências mais importantes para o ensino de Estatística, quais sejam: letramento; raciocínio; e pensamento estatísticos.

3.1.1 Letramento, Raciocínio e Pensamento Estatísticos

Para esclarecer e tentar encontrar definições em comum, bem como metas e procedimentos de avaliação sobre currículo e competências estatísticas, foi realizado em 1999, em Israel, o primeiro Fórum Internacional de Pesquisa sobre Raciocínio, Pensamento e Alfabetização Estatística, e um segundo, em 2001, na Austrália. Segundo (Garfield, delMas e Chance, 2003, apud Ben-Zavi e Garfield,

2004, p. 6), não se chegou a uma definição formal de cada uma dessas competências, porém, esses autores expuseram um resumo do que consideram seu entendimento mais atual.

A Alfabetização Estatística envolve as habilidades básicas e importantes que podem ser usadas para compreender informações estatísticas ou resultados de uma pesquisa. Nessas habilidades estão incluídas a capacidade de organizar dados, de construir e de exibir tabelas, e de trabalhar com diferentes representações de dados. Também estão incluídas a compreensão de conceitos, do vocabulário e de símbolos, além da probabilidade como medida de incerteza.

Adotaremos nesse texto o termo Letramento ou, por vezes, seu sinônimo *Literácia*, em substituição à Alfabetização. Conforme Campos (2007), Letramento remete à habilidade em leitura, compreensão, interpretação, análise e avaliação de textos na linguagem escrita. Assim, o Letramento Estatístico estuda os argumentos que utilizam adequadamente a terminologia estatística.

Gal (2004) propõe que o Letramento Estatístico deva se referir aos dois componentes seguintes:

- (a) à capacidade das pessoas de interpretar e avaliar criticamente informações estatísticas, argumentos relacionados a dados ou estocástica, fenômenos, que eles podem encontrar em contextos diversos, e quando relevante;
- (b) à sua capacidade de discutir ou comunicar suas reações a tais informações estatísticas, como sua compreensão acerca de seu significado, suas opiniões sobre as implicações dessas informações, ou suas preocupações em relação à aceitabilidade de determinadas conclusões. (p. 49)

São muitas as incertezas acerca da definição de letramento estatístico. Conforme Sabbag, Garfield e Zieffler (2018), há diversas sobreposições entre essa competência e o raciocínio estatístico, causando confusões sobre as delimitações e abrangência de cada uma delas. Assumiremos nesse estudo o entendimento de Sabbag, Garfield e Zieffler (2018) que investigaram o letramento e o raciocínio estatístico a partir de itens dos conteúdos da Estatística. Assim, para eles, o letramento estatístico apresenta itens que “avaliam a capacidade dos alunos de recordar uma definição, descrever ou interpretar informações estatísticas básicas”.

Os autores observam que os itens dessa competência abordam um único conceito estatístico.

O Raciocínio Estatístico pode ser entendido como o modo com que os indivíduos raciocinam a partir de ideias estatísticas e dão sentido às informações estatísticas. Isso inclui interpretar informações baseadas em conjuntos, representações ou resumos de dados estatísticos. Além disso, essa competência possibilita ao indivíduo conectar um conceito a outro ou combinar ideias sobre dados ao acaso. Raciocinar estatisticamente indica compreender, e ser capaz de explicar e interpretar processos estatísticos e seus resultados.

Da mesma forma que procedemos com a competência anterior, faremos para o raciocínio estatístico. Assim, adotaremos nessa pesquisa o entendimento de Sabbag, Garfield e Zieffler (2018), que compreendem que o raciocínio estatístico apresenta itens que “avaliam a capacidade dos alunos de fazer conexões entre conceitos estatísticos, criar representações mentais de problemas estatísticos e explicar relações entre conceitos estatísticos”. Para esses autores, essa competência geralmente aborda mais de um conceito estatístico e exigem fazer conexões entre eles. Devido ao número de conceitos abordados, continuam eles, itens de raciocínio estatístico requerem maior pensamento de ordem e maior carga cognitiva do que os itens estatísticos de alfabetização.

O Pensamento Estatístico significa compreender por que e como as investigações estatísticas são desenvolvidas, bem como as "grandes ideias" por trás dessas investigações. Estão inseridos nessas ideias a característica onipresente da variação e os métodos apropriados para a análise dos dados. Essa competência inclui, entre outros, o entendimento da natureza da amostra e a realização de inferências amostrais ou populacionais. Pensar estatisticamente também envolve a capacidade de compreender e utilizar o contexto de um problema na formação de investigações, tirar conclusões, reconhecer e entender todo o processo da pesquisa (o problema, a coleta de dados, as análises para testar suposições etc.). Os pensadores estatísticos, pois, são capazes de inferir e avaliar os resultados de um problema ou de uma pesquisa estatística.

Adotaremos nessa pesquisa, o entendimento de Wild e Pfannkuch (2004), que diante de tantas divergências e indefinições acerca da compreensão dessa competência, propuseram sua própria leitura sobre o que seria o pensamento

estatístico. O trabalho dos autores identificou cinco tipos de pensamento que consideram fundamentais para o desenvolvimento da Estatística, quais sejam:

Reconhecimento da Necessidade de Dados. Os fundamentos da investigação estatística repousam sobre o pressuposto de que muitas situações reais não podem ser julgadas sem a coleta e análise de dados devidamente coletados. Portanto, os dados devidamente coletados são considerados um requisito primordial para julgamentos confiáveis sobre situações reais.

Transnumeração. Os autores criaram a palavra transnumeração, que significa "mudar as representações para conceber a compreensão". A transnumeração ocorre em três instâncias específicas. Assim, a partir de uma perspectiva de modelagem, o pensamento de transnumeração ocorre quando (1) medidas que "capturam" qualidades ou características da situação real são encontradas; (2) os dados coletados são transformados de dados brutos em representações gráficas, resumos estatísticos entre outros, de modo a obter o significado dos dados; e (3) o significado dos dados deve ser comunicado de forma que possa ser compreendido por outros.

Considerações sobre Variação. A coleta adequada dos dados e a realização de julgamentos sólidos a partir deles exigem que se compreenda como a variação surge e é transmitida por meio desses dados, e a incerteza causada por variação inexplicável. É um tipo de pensamento que percebe a variação em uma situação real e influencia as estratégias adotadas nas etapas de organização de dados quando, por exemplo, são eliminadas ou reduzidas fontes conhecidas de variabilidade. Nas etapas seguintes, de análise e conclusão, o pesquisador é solicitado a ignorar, planejar ou controlar a variação. As estatísticas aplicadas são sobre fazer previsões, buscar explicações, encontrar causas e aprender a partir de um contexto. Portanto, a busca é encontrar e caracterizar padrões na variação, objetivando resolver o problema. A consideração dos efeitos da variação influencia todo o pensamento em todas as etapas do ciclo investigativo.

Raciocinando com Modelos Estatísticos: Os modelos estatísticos predominantes são os desenvolvidos para a análise dos dados. Gráficos estatísticos, por exemplo, podem ser considerados modelos estatísticos, pois, são formas estatísticas de representar e pensar sobre a realidade. Nos modelos estatísticos usados para raciocinar, o foco é mais em raciocínio baseado em agregação e não individual, embora ambos os tipos sejam usados. Um diálogo é estabelecido entre

os dados e os modelos estatísticos. Estes, podem permitir encontrar padrões nos dados ou ver variação sobre esses padrões através da ideia de distribuição. Os modelos nos permitem resumir dados de várias maneiras, dependendo da natureza dos dados.

Integrando a Estatística ao contexto. Embora os tipos de pensamento mencionados acima relacionem-se ao conhecimento contextual, a integração deste conhecimento com o estatístico é fundamental para identificar o pensamento estatístico. Como as informações sobre a situação real estão contidas nos resumos estatísticos, uma síntese de conhecimentos estatísticos e contextuais deve funcionar para extrair o que pode ser aprendido com os dados sobre a esfera do contexto.

Nesse contexto, compreendemos que as atividades de nossa SD envolvem as três competências descritas acima da seguinte forma: 1) a interpretação de dados a partir de tabelas ou gráficos exigem o letramento estatístico; 2) a significação de um conceito relacionando a outros, por exemplo, o conceito de variação relacionado ao de medida de variação, ou aos contidos na interpretação dos dados representados em tabelas ou gráficos, e aos significados que envolvem os procedimentos de obtenção ou cálculo, exigem o raciocínio estatístico; e 3) a compreensão dos conceitos de variação e de suas medidas exigem o pensamento estatístico. O quadro 4 resume essa descrição.

Quadro 4 - Competências estatísticas e habilidades contidas na SD dessa pesquisa

COMPETÊNCIA	HABILIDADES DA SD	Sabbag, Garfield e Zieffler (2018)	Wild e Pfannkuch (2004)
Letramento	Leitura, compreensão, interpretação, análise e avaliação de textos na linguagem escrita. Organizar, coletar e interpretar dados a partir de tabelas ou gráficos.	Capacidade de: • Recordar uma definição; • Descrever e interpretar informações estatísticas básicas;	—
Raciocínio	Compreender a significação de outro conceito (desvio, por exemplo) a partir da interpretação dos dados contidos em tabelas ou gráficos e estender os conceitos neles envolvidos aos	• Avaliação da capacidade dos alunos de fazer conexões entre conceitos estatísticos; • criação de representações mentais de problemas estatísticos; • explicação de relações entre conceitos estatísticos.	—

	processos de obtenção (cálculos e/ou procedimentos).		
Pensamento	Compreender o conceito de variação e o de suas medidas, bem como relacioná-los, a partir dos conceitos e significados envolvidos na interpretação dos dados representados em tabelas ou gráficos, dentro de um contexto real vivido pelo aluno.	—	• Considerações sobre Variação; • Raciocínio a partir de Modelos Estatísticos; • Integração entre a Estatística e o contexto.

Fonte: Elaborado pelo autor

As habilidades de letramento destacadas no quadro 4 para nossa SD (segunda coluna), são consideradas conhecimentos prévios, pois integram o currículo do EF. Além disso, objetivo de nossa SD é o ensino de medidas de variação, que é objeto de conhecimento integrante do currículo do EM, conforme a BNCC (BRASIL, 2018). Salientamos que as habilidades de nossa SD, relativas ao raciocínio e ao pensamento estatístico, mostrados no quadro 4, foram elaboradas a partir do entendimento dos autores adotados nesta seção, contudo, serão adequadas ao conjunto das habilidades contidas na BNCC, que apresentamos na seção seguinte.

Todos os itens considerados por Sabbag, Garfield e Zieffler (2018) para o letramento e para o raciocínio estatístico, entendemos serem necessários para nossa SD. O mesmo não ocorre para os cinco pensamentos descritos por Wild e Pfannkuch (2004), pois consideramos que são necessários às nossas atividades apenas os mostrados no quadro 4, ou seja: considerações sobre variação; raciocínio a partir de Modelos Estatísticos; e integração entre a Estatística e o contexto.

Assim, entender como ocorrem as semelhanças e diferenças entre essas competências é fundamental para que o professor possa formular metas de aprendizagem, planejar atividades e avaliar o aprendizado com os instrumentos adequados, conforme apontam Ben-Zavi e Garfield (2004, p. 6).

3.1.2 Aspectos Curriculares

Em 1997, foram regulamentados os primeiros PCN, particularmente do ensino fundamental para as séries iniciais (EF I) e no ano seguinte, os das séries finais (EF II). De 1999 a 2006, vieram os PCN do ensino médio e suas orientações curriculares, respectivamente, denominados PCNEM e PCNEM+. A Estatística nos documentos para o EF faz parte do bloco Tratamento da Informação, de modo que seus conteúdos e procedimentos estão distribuídos gradualmente do primeiro ciclo do ensino fundamental (EF) ao ensino médio (EM), segundo Brasil (1997 e 1998).

Os objetivos gerais da Estatística para o EF são:

[...] fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem frequentemente em seu dia-a-dia. Além disso, calcular algumas medidas estatísticas como média, mediana e moda com o objetivo de fornecer novos elementos para interpretar dados estatísticos. (BRASIL, 1998, p. 52).

Para o EM, a Estatística encontra-se como unidade temática no eixo ou tema estruturador Análise de Dados (BRASIL, 2002, p.126), e seus conteúdos estão divididos em: descrição de dados; representações gráficas; e análise de dados (médias, moda e mediana, variância e desvio padrão). Para a 1ª série propõe-se descrição de dados e representações gráficas, ficando para a 2ª série a análise de dados, ou seja, os conteúdos dessa unidade não se prolongam para a 3ª série.

Ainda que os PCN sejam apenas propostas, sua influência resultou nas discussões que culminaram na BNCC, homologada em 2017.

Após a promulgação do Plano Nacional de Educação (PNE), em 2014, firmou-se a necessidade de uma base nacional comum curricular, o que alterou a LDB em 2017. Nesta, o Artigo 35 define que: “A Base Nacional Comum Curricular definirá direitos e objetivos de aprendizagem do ensino médio conforme diretrizes do Conselho Nacional de Educação [...]” (BRASIL, 2018, p. 10). Com a homologação em dezembro de 2017, a BNCC tornou-se o documento oficial curricular mais recente e o único a normatizar o currículo escolar de toda a EB.

A Estatística neste documento compõe o campo temático Probabilidade e Estatística, na qual a proposta para o EF é a de abordar

conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a

fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e prever fenômenos. (BRASIL, 2017, p. 270)

Os conteúdos ou objetos de conhecimentos estatísticos foram distribuídos tal qual nos PCN, isto é, gradualmente das séries iniciais do EF ao EM. Para o EF foram definidas oito competências específicas, fundamentadas no desenvolvimento do letramento matemático e articuladas às competências gerais da EB (BRASIL, 2018, p.267). A partir das ideias fundamentais, construídas com base nos documentos curriculares recentes, que envolvem os conhecimentos matemáticos de equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação, a BNCC propõe cinco unidades temáticas correlacionadas, cujo objetivo é orientar a formulação de habilidades para o EF. São elas: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; e Probabilidade e Estatística. Este último, conforme Brasil (2018),

propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e prever fenômenos. (p. 274)

O texto da BNCC destaca ainda, sobre a unidade Probabilidade e Estatística, a importância do uso de tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, para avaliar e comparar resultados, ajudar na construção de gráficos e nos cálculos de medidas de tendência central (BRASIL, 2018, p. 270). Para os anos iniciais do EF, apenas em relação à Estatística, esse documento curricular propõe que sejam abordados: coleta e a organização de dados, a leitura, a interpretação e a construção de tabelas e gráficos, bem como a forma de produção de texto escrito para a comunicação de dados. Já para os anos finais, ela sugere: medidas de tendência central e de *dispersão* (apenas o conceito de dispersão de dados e amplitude como medida), e construção de tabelas e diversos tipos de gráfico. Todos os objetos de conhecimento propostos para o EF foram organizados por ano de ensino, ou seja, do 1º ao 9º ano. Portanto, de acordo com a BNCC, o conteúdo estatístico Medidas de Variação, objeto de interesse de nossa pesquisa, é iniciado no EF e completado no EM, conforme o quadro 4.

Sobre o EM, a cada uma das cinco competências específicas na Área de Matemática e suas Tecnologias estão associadas habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Os pressupostos são os mesmos do EF, quanto ao letramento matemático e à articulação com as competências gerais da EB. A proposta é de consolidar, ampliar e aprofundar as aprendizagens essenciais desenvolvidas no EF. Quanto aos objetos de conhecimento, não foram definidos para as séries dessa etapa de ensino como feito para o EF. Assim, conforme Brasil (2017):

Além da organização das habilidades por competências, elas podem ser organizadas na elaboração de currículos em unidades temáticas, como proposto no Ensino Fundamental. [...] Outras unidades temáticas poderão ser organizadas, reunindo tanto as habilidades definidas nesta BNCC quanto outras que sejam necessárias e que contemplem especificidades e demandas próprias dos sistemas de ensino e escolas. (p. 534 e 535).

Na BNCC, portanto, a organização curricular para o EM segue as necessidades dos sistemas escolares. Quanto às unidades temáticas o documento recomenda que sejam adotadas as mesmas do EF, ou seja, Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; e Probabilidade e Estatística (BRASIL, 2018, p. 542).

Na unidade Probabilidade e Estatística, em relação à Estatística, são retomados os conteúdos essenciais do EF. O quadro 5, mostra as habilidades do EF e do EM que envolvem os conhecimentos diretamente relacionados às Medidas de Variação, que é o tema interesse de nosso estudo.

Quadro 5 - Habilidades envolvendo Medidas de Variação e seus conhecimentos prévios

Conhecimentos envolvidos	Habilidades
Conhecimentos prévios (tabelas, gráficos de colunas e média)	(EF01MA21) Ler dados expressos em tabelas e em gráficos de colunas simples.
	(EF01MA22) Realizar pesquisa, envolvendo até duas variáveis categóricas de seu interesse e universo de até 30 elementos, e organizar dados por meio de representações pessoais.
	(EF02MA22) Comparar informações de pesquisas apresentadas por meio de tabelas de dupla entrada e em gráficos de colunas simples ou barras, para melhor compreender aspectos da realidade próxima. (EF02MA23) Realizar pesquisa em universo de até 30 elementos, escolhendo até três variáveis categóricas de seu interesse, organizando os dados coletados em listas, tabelas e gráficos de colunas simples.

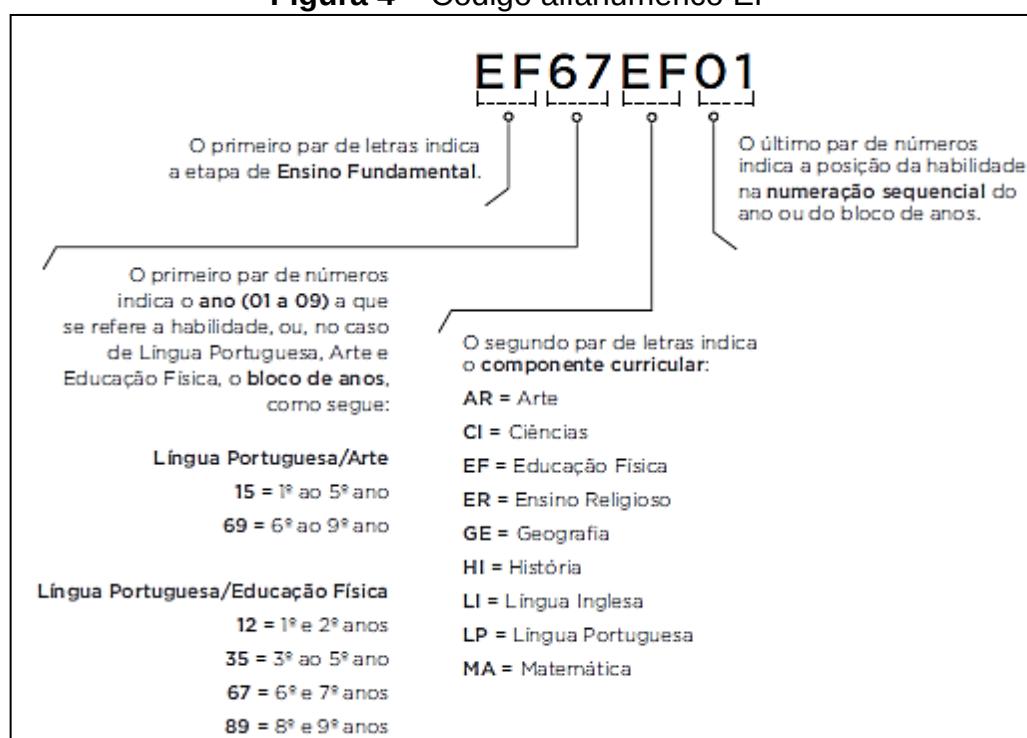
	(EF03MA26) Resolver problemas cujos dados estão apresentados em tabelas de dupla entrada, gráficos de barras ou de colunas. (EF03MA27) Ler, interpretar e comparar dados apresentados em tabelas de dupla entrada, gráficos de barras ou de colunas, envolvendo resultados de pesquisas significativas, utilizando termos como maior e menor frequência, apropriando-se desse tipo de linguagem para compreender aspectos da realidade sociocultural significativos. (EF03MA28) Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas em um universo de até 50 elementos, organizar os dados coletados utilizando listas, tabelas simples ou de dupla entrada e representá-los em gráficos de colunas simples, com e sem uso de tecnologias digitais.
	(EF04MA27) Analisar dados apresentados em tabelas simples ou de dupla entrada e em gráficos de colunas ou pictóricos, com base em informações das diferentes áreas do conhecimento, e produzir texto com a síntese de sua análise. (EF04MA28) Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas e numéricas e organizar dados coletados por meio de tabelas e gráficos de colunas simples ou agrupadas, com e sem uso de tecnologias digitais.
	(EF05MA24) Interpretar dados estatísticos apresentados em textos, tabelas e gráficos (colunas ou linhas), referentes a outras áreas do conhecimento ou a outros contextos, como saúde e trânsito, e produzir textos com o objetivo de sintetizar conclusões. (EF05MA25) Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas e numéricas, organizar dados coletados por meio de tabelas, gráficos de colunas, pictóricos e de linhas, com e sem uso de tecnologias digitais, e apresentar texto escrito sobre a finalidade da pesquisa e a síntese dos resultados.
	(EF06MA32) Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões.
	(EF07MA35) Compreender, em contextos significativos, o significado de média estatística como indicador da tendência de uma pesquisa, calcular seu valor e relacioná-lo, intuitivamente, com a amplitude do conjunto de dados. (EF07MA36) Planejar e realizar pesquisa envolvendo tema da realidade social, identificando a necessidade de ser censitária ou de usar amostra, e interpretar os dados para comunicá-los por meio de relatório escrito, tabelas e gráficos, com o apoio de planilhas eletrônicas.
	(EF08MA23) Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.
	(EF09MA21) Analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros. (EF09MA22) Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.
Medidas de Variação (Amplitude, desvio, desvio padrão e variância)	(EF08MA25) Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicada pela amplitude. (EF09MA23) Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas. (EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos. (EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

Fonte: Elaborado pelo autor e adaptado de Brasil (2018, pp. 315, 319 e 546)

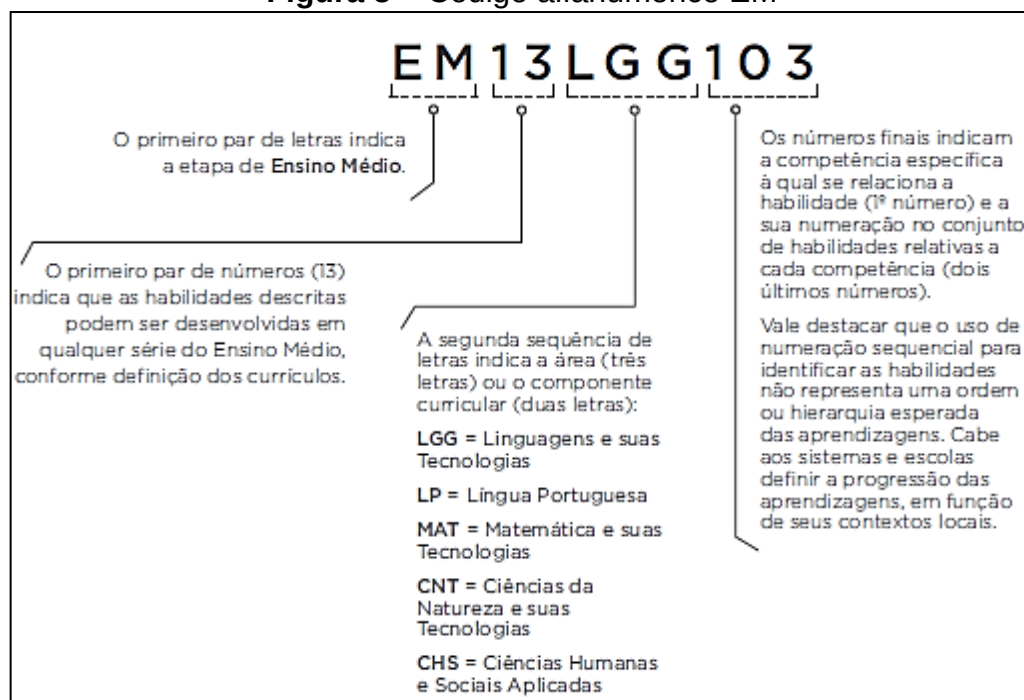
As duas primeiras habilidades, identificadas no quadro 5, como (EF08MA25) e (EF09MA23), integram o 8º e o 9º ano do EF. As duas seguintes, (EM13MAT202) e (EM13MAT316) pertencem ao EM. No EF as medidas de variação são apenas introduzidas, para que no EM o professor possa finalizar com as duas principais, o desvio padrão e a variância.

Para esclarecer o significado dos códigos de habilidades usados no quadro 4, apresentamos as figura 4 e 5, disponibilizadas na BNCC.

Figura 4 – Código alfanumérico EF



Fonte: Brasil (2018, p. 30)

Figura 5 – Código alfanumérico EM

Fonte: Brasil (2018, p. 34)

A partir dos quadros 5 e 6, respectivamente situados, na seção anterior e nesta, elaboramos o quadro 6 com as adequações que consideramos estarem de acordo com as exigências de nossa SD.

Quadro 6 – Habilidades a partir das competências da EE e da BNCC

COMPETÊNCIA SEGUNDO A EE	HABILIDADES DE NOSSA SD, SEGUNDO	
	BNCC	EE – Sabbag, Garfield e Zieffler (2018), e Wild e Pfannkuch (2004)
Letramento	(EF03MA26) Resolver problemas cujos dados estão apresentados em tabelas de dupla entrada, gráficos de barras ou de colunas. (EF03MA27) Ler, interpretar e comparar dados apresentados em tabelas de dupla entrada, gráficos de barras ou de colunas, envolvendo resultados de pesquisas significativas, utilizando termos como maior e menor frequência, apropriando-se desse tipo de linguagem para compreender aspectos da realidade sociocultural significativos. (EF04MA27) Analisar dados apresentados em tabelas simples ou de dupla entrada e em gráficos de colunas ou pictóricos, com base em informações das diferentes áreas do conhecimento, e produzir texto com a síntese de sua análise. (EF06MA32) Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões.	Capacidade de: 1) Recordar uma definição; 2) Descrever e interpretar informações estatísticas básicas;

Raciocínio	(EF05MA24) Interpretar dados estatísticos apresentados em textos, tabelas e gráficos (colunas ou linhas), referentes a outras áreas do conhecimento ou a outros contextos, como saúde e trânsito, e produzir textos com o objetivo de sintetizar conclusões. (EF07MA35) Compreender, em contextos significativos, o significado de média estatística como indicador da tendência de uma pesquisa, calcular seu valor e relacioná-lo, intuitivamente, com a amplitude do conjunto de dados.	1) Avaliação da capacidade dos alunos de fazer conexões entre conceitos estatísticos; 2) criação de representações mentais de problemas estatísticos; 3) explicação de relações entre conceitos estatísticos.
Pensamento	(EF08MA25) Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados , indicada pela amplitude. (EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).	1) Considerações sobre Variação; 2) Raciocínio a partir de Modelos Estatísticos; 3) Integração entre a Estatística e o contexto.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Não descrevemos no quadro 6 as competências da BNCC devido a extensão com que são apresentadas nesse documento curricular, pois nossa intenção foi dar maior ênfase à relação entre as principais competências definidas pela EE e as habilidades conforme a BNCC.

Entendemos que as habilidades (EF01MA21) e (EF01MA22) são contempladas por (EF03MA27), conforme o quadro 4. Portanto, decidimos inserir no quadro 6 apenas esta última.

No próximo capítulo realizaremos uma revisão dos estudos já realizados na área da Educação Matemática, em particular da Educação Estatística, dando ênfase às Medidas de Variação e aos conceitos estatísticos envolvidos.

3.2 REVISÃO DE LITERATURA

Para responder aos questionamentos que delimitaram nossos objetivos específicos, condicionar a elaboração das metodologias que adotamos na sequência didática e respaldar a análise dos resultados a que essa pesquisa intencionou, organizamos nesta seção uma revisão da literatura relacionada a nossa temática.

De acordo com o interesse de nossa pesquisa, os trabalhos foram selecionados obedecendo às seguintes condições: (1) tratar de medidas de variação usando planilha eletrônica para o ensino de estatística no ensino médio; (2) adotar a metodologia da engenharia didática; e (3) apoiar-se na Teoria das Representações Semióticas de Duval. Não encontramos qualquer trabalho sob essas condições,

simultaneamente. Reduzimos, então, as restrições, e aceitamos os que satisfizessem pelo menos dois dos três critérios. Verificamos em diversas plataformas e não encontramos nenhum estudo de nosso interesse, mesmo após restringir a busca. Apenas quando buscamos pelo termo “variação”, pudemos encontrar trabalhos dentro de nosso campo de pesquisa. A partir de então, usando expressões menos específicas, como “semiótica e variação”, “engenharia didática e educação Estatística”, “planilha eletrônica e variação estatística” entre outros, conseguimos os quatro trabalhos destacados no quadro 7.

A busca seguiu em arquivos pessoais impressos, internet, em bancos de Teses e dissertações e em bibliotecas públicas. O título, o autor, a natureza de pesquisa, e a categoria de cada trabalho selecionado estão organizados no quadro 7.

Quadro 7 - Fontes consultadas

Autor	Título	Natureza	Categorização
LUTZ (2012)	Uma Sequência Didática para o ensino de Estatística a alunos do Ensino Médio na modalidade PROEJA.	Dissertação	Experimental
COUTINHO (2019)	O Livro Didático e a Abordagem da Estatística: o olhar do Professor	Artigo	Livro didático
MORENO (2010)	Ensino e aprendizagem de Estatística com ênfase na variabilidade: um estudo com alunos de um curso de licenciatura em Matemática	Dissertação	Diagnóstico
VIEIRA (2008)	Análise exploratória dos dados: uma abordagem com alunos do Ensino Médio	Dissertação	Diagnóstico

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

A seguir, tratamos da revisão de cada trabalho selecionado. Demos ênfase detalhada aos pontos que convergiram com nossa pesquisa. As seções ou partes quaisquer que se distanciaram em demasia, de nossa linha de estudo, decidimos por não analisar, decisão essa, que deixamos expressa sempre que necessário.

O primeiro trabalho que apresentamos nesta subseção é o estudo experimental realizado por Lutz (2012). Em seguida, um estudo na categoria de livro didático de Coutinho (2019), seguido pelos dois últimos na categoria de estudo diagnóstico, sendo o penúltimo de Moreno (2010) e o último, de Vieira (2008). Assim, de acordo com as categorias, seguindo a ordem no quadro 7, seguem as revisões.

3. 2. 1 Estudos Experimentais

Lutz (2012) realizou uma pesquisa qualitativa com a intenção de investigar os efeitos de uma sequência didática para o ensino de conteúdos estatísticos. Estes, envolveram habilidades como: coletar dados, tratar, interpretar e discutir informações extraídas do contexto do aluno ou provenientes de meios de comunicação. O público-alvo da pesquisa foi uma turma de 24 alunos do PROEJA, de um curso técnico em Informática do Instituto Federal de Farroupilha, em Campus Alegre/RS. O autor norteou seu estudo por meio das seguintes questões: 1) Que contribuições ao meio vivido pelo aluno podem decorrer de uma SD para o ensino de Estatística ao ser aplicada no cotidiano do aluno? 2) O pensamento estatístico pode surgir de tomadas de decisão a partir de tarefas e atividades? 3) Estas, podem contribuir para o letramento estatístico?

A partir de tais questionamentos, Lutz (2012) definiu os seguintes objetivos específicos: elaborar, implementar e analisar uma SD que envolva atividades de ensino de Estatística para o EM, na modalidade PROEJA; e, desenvolver e verificar as habilidades necessárias à aquisição de conhecimentos estatísticos. O autor justifica sua pesquisa, entre outros motivos, como sendo o de sanar a carência do uso de recursos didáticos com conteúdos estatísticos voltados à EJA e PROEJA, e enfatiza a necessidade desses conteúdos no EM ao citar o professor emérito do IMPA (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada), Elon Lages Lima. Quando este foi indagado sobre a ampliação ou não de conteúdos matemáticos no EM, o mesmo afirmou: “[...] a única restrição que eu faço é que eu acho que deveria ter um pouco mais de Estatística [...]” (LIMA, 2012).

Como suporte teórico aos aspectos cognitivos da aprendizagem do objeto matemático, Lutz (2012) adotou a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, e definiu a Engenharia Didática de Michelle Artigue como metodologia para seu estudo. Na seção sobre o Ensino de Estatística, o autor trouxe relevantes discussões desenvolvidas por autores importantes para nossa pesquisa, e que não foram abordados na seção em que tratamos do mesmo tema.

De Pagan (2010) e Bayer *et al.* (2004a), por exemplo, Lutz (2012) traz o tema da inclusão da Estatística nos currículos das escolas brasileiras, especialmente nos PCN. De Anro e Skovsmose (2010), ele traz o debate sobre a insuficiência de saber

ler e escrever diante da necessidade de se aprender a coletar, classificar e interpretar informações contidas em situações cotidianas, e levadas ao aluno por meio dos diversos meios de comunicação, que utilizam dados estatísticos em suas várias representações. Esses mesmos autores reforçam o quanto é preciso estimular o potencial interdisciplinar da disciplina Estatística.

De Brignol (2004), o autor destaca as considerações sobre os obstáculos na aprendizagem de conhecimentos estatísticos, causados pelas abstrações de alguns conteúdos, pelas suas notações complexas, ambíguas ou confusas. Segundo Lutz (2012), para Brignol (2004)

O ensino tradicional de Estatística segue o modelo de aulas expositivas baseadas em apostilas ou livros clássicos no ensino de Estatística. Neste modelo, a distribuição dos conteúdos é linear e a prática na maioria das vezes é feita com exercícios e exemplos desses livros que não raro são distantes da realidade e experiência do aluno e do professor. (p. 34)

Brignol (2004), conforme Lutz (2012), ressalta a atualização tecnológica como essencial para a relação ensino – aprendizagem dos conteúdos estatísticos, pois, possibilitam ao aluno envolver-se com as interpretações solicitadas pelos problemas estatísticos, e não com os cálculos; estes, podem ser realizados pela tecnologia, sendo seu desenvolvimento de pouco interesse ao entendimento dos conhecimentos estatísticos. Tal pensamento de Brignol (2004) coaduna com o que defendemos na seção sobre o objeto matemático de nossa pesquisa.

Brignol (2004), Bayer *et al.* (2004b), Costa e Pamplona (2011) e Vendramini (1998) também acentuam, de acordo com Lutz (2004), a importância do professor de Estatística não ser apenas licenciado em Matemática. O autor faz referência ao trabalho “Formação em Matemática x Estatística na Escola: estamos preparados?” de Bater *et al.* (2004), para destacar que o despreparo do professor de Matemática, para tratar de conteúdos estatísticos, pode causar nele próprio a decisão de não ensinar tais conteúdos. Costa e Pamplona (2011) sugere que os cursos de licenciatura em Matemática, além de formarem educadores matemáticos, também formem educadores estatísticos. Vendramini (1998) propõe que os professores atentem para a busca do letramento estatístico no currículo de Estatística.

De Rosetti Junior (2007), Lutz (2004) destaca a integração entre as práticas pedagógicas relacionadas aos conteúdos estatísticos e os aspectos vividos pelo aluno como integrante da sociedade. O autor acrescenta ainda, por meio de Conti e

Carvalho (2010), a significância das propostas de ensino na relação com a realidade do aluno.

Lutz (2004) traz diversos autores para esclarecerem as características das dimensões epistemológicas e didáticas. Quanto às cognitivas, ele descreve um resumo de suas decisões relativas às SD aplicadas.

Sobre as dimensões epistemológicas, o autor cita ainda Viali e Sebastiani (2010). Para estes autores, o ensino de Estatística e Probabilidade na EB deve priorizar a prática dos discentes. Assim, atividades de coleta de dados, por exemplo, devem ser realizadas pelos próprios alunos, e os dados devem ser preferencialmente reais. Conforme Lutz (2004), a escola atual não deve mais ficar subordinada a um ensino pautado no enciclopedismo, ela deve possibilitar o desenvolvimento de competências e habilidades que ampliem a investigação, a compreensão, a comunicação, a representação e a contextualização sociocultural. No caso do ensino de Estatística, ele defende a construção e representação de gráficos e tabelas, e lembra que no EM os estudos dessa disciplina devem estar direcionados ao aprendizado de medidas de posição e de dispersão, conforme Brasil (2006a).

Quanto às dimensões cognitivas, o autor aplicou a SD em sua própria turma de alunos, sendo assim, já era de seu conhecimento as dificuldades cognitivas apresentadas. Para verificar as dimensões cognitivas, assim como os conhecimentos prévios dos alunos, relativos à aprendizagem dos conteúdos estatísticos, ele iniciou com a pergunta: Em sua opinião, o que é Estatística? A partir disso, discutiu os resultados para aplicar as SD.

Nas dimensões didáticas, Lutz (2004) traz a afirmação de Santos *et al.* (2008) de que vivemos um momento histórico na qual o fluxo de informações é constante, crescente, e facilmente acessível. E nas mídias de comunicação a Estatística está quase sempre presente, por meio de gráficos, tabelas ou outras representações. Para Rotundo, (2007), as metodologias empregadas nos livros didáticos tornam os conceitos simples como de difícil compreensão.

Lutz (2004) analisou sete livros didáticos, e os identificou com as letras de A à G. Não traremos das análises feitas pelo autor para cada livro; usaremos os casos que considerarmos mais pertinentes a nossa pesquisa.

Na figura 6, Lutz (2004) observa a presença e o grau de motivação com que cada livro tratou alguns conceitos estatísticos.

Figura 6 – Motivação de tópicos estatísticos nos livros

	Assunto	Livros analisados						
		A	B	C	D	E	F	G
Organização e apresentação dos dados	Tabelas	⊖	⊖	∇	⊖	⊖	∇	⊖
	Gráficos	⊖	⊖	∇	⊖	⊖	∇	⊖
Medidas de posição	Média	⊖	⊖	∇	⊖	⊖	∇	∇
	Moda	⊖	⊖	∇	⊖	⊖	∇	∇
	Mediana	⊖	∇	∇	⊖	⊖	∇	∇
Medidas de dispersão	Variância	⊖	∇	∇	⊖	ϕ	∇	∇
	Desvio padrão	⊖	∇	∇	⊖	ϕ	∇	∇
	Desvio médio	⊖	ϕ	∇	⊖	ϕ	∇	ϕ
Legenda:								
Assunto ausente: ϕ Pouca motivação: ∇ Motivação satisfatória: $\ominus$								

Fonte: Lutz (2012, p.54)

O autor destaca a ausência do “desvio médio” no livro B, e de “medidas de dispersão” em E, como mostra a figura 6. Ele justifica tal ausência devido ambos apresentarem média de páginas abaixo dos outros capítulos. Lutz (2004) acrescenta que os autores desses dois livros, se posicionaram contrários às orientações curriculares para o EM, que propõe intensificação nos estudos de medidas, tanto de posição como de dispersão. Porém, Santos (2008), citado por Lutz (2004), afirma que apesar de que o Ministério da Educação (MEC) faz recomendações apropriadas para o ensino de Estatística, muitos livros didáticos o fazem aquém dessas indicações.

Lutz (2004) destaca os livros A e D por abordarem os assuntos de forma contextualizada, e justifica que o aluno pode estabelecer conexões entre a Matemática e o seu cotidiano, conforme as figuras 8 e 9.

Figura 7 – Exemplo 1, livro A, p. 11.

Exemplo 1

Os dois sistemas

As diferenças entre escolas convencionais e cooperativas de ensino

ESCOLAS PARTICULARES	COOPERATIVAS EDUCACIONAIS MONTADAS PELOS PAIS
1 São em geral empresas cujo objetivo é o lucro.	1 Formadas pelos pais, não visam lucros.
2 O dono da instituição define o método de ensino e contrata professores e funcionários.	2 Os pais definem o método de ensino e escolhem professores e funcionários.
3 O aluno só paga as mensalidades. Todo o investimento é feito pela escola.	3 Os pais compram uma cota de participação na sociedade. Também pagam mensalidades.
4 A mensalidade leva em conta o custo de manutenção e a margem de lucro.	4 A mensalidade é calculada de acordo com as despesas. Costuma ser 40% mais barata que a de uma escola particular similar.
5 A participação dos pais nas atividades do colégio é limitada.	5 O conselho de pais toma todas as decisões administrativas e pedagógicas.

Fonte: Reprodução de Veja, 6 de outubro de 2012 (Maria Cristina Pompermayer/Organização das Cooperativas Brasileira).

A partir do quadro acima, podemos observar que as escolas particulares contrapõem-se às cooperativas. As escolas visam ao lucro, estão centralizadas no dono e a participação dos pais é limitada. Já as cooperativas educacionais são montadas pelos pais e não visam ao lucro.

Fonte: Lutz (2012, p.56)

O autor observa que as questões das figuras 8 e 9 exigem raciocínio, e não apenas aplicação de fórmulas.

Figura 8 – Exercício proposto. Livro D, p. 409.

27. Em uma pesquisa as rodovias brasileiras podiam ser classificadas em: com pavimento bom ou ótimo ou com pavimento deficiente, ruim ou péssimo.

Ano	Porcentagem	Classificação	Extensão
2001	47,7%	com pavimento bom ou ótimo	? ≈ 22.467 km
2002	38,8%	com pavimento deficiente, ruim ou péssimo	18.275 km

Fonte: Confederação Nacional do Transporte.

a) Complete a tabela e calcule a extensão correspondente ao pavimento deficiente, ruim ou péssimo em 2001. Extensão correspondente ao pavimento deficiente, ruim ou péssimo em 2001: ≈ 24.534 km

b) Que conclusão você pode tirar em relação à pavimentação das estradas, sabendo que, em 1999, 62,2% das estradas foram classificadas com pavimento bom ou ótimo? Ver resolução no Guia do professor.

Fonte: Lutz (2012, p.56)

A maioria dos livros, porém, apresentou os exercícios de modo imediato, ou seja, os alunos deveriam aplicar as fórmulas sem questionar os resultados. Um exemplo é o caso do livro B, conforme mostra a figura 10.

Figura 9 – Exercício proposto. Livro B, p. 183.

Exercícios propostos	
27. Durante os sete primeiros jogos de um campeonato, um time marcou, respectivamente, 3, 2, 1, 1, 4, 3 e 2 gols. Determine: a) a média de gols por partida (MA); b) a moda (Mo); c) a mediana (Me).	28. De segunda-feira a sábado, os gastos com alimentação de uma pessoa foram 15, 13, 12, 10, 14 e 14 reais. Determine: a) a média diária de gastos (MA); b) a moda (Mo); c) a mediana (Me).

Fonte: Lutz (2012, p.57)

O autor observa que os exercícios não apresentam conversões envolvendo registros em tabela, gráfico ou linguagem natural, pois, continua ele, tornaria o exercício mais rico, possibilitando diferentes representações.

Dos dados colhidos das respostas ao Questionário para verificação do perfil dos 24 alunos da turma selecionada, Lutz (2012) observou, dentre outras, que a faixa etária variou entre 18 e 53 anos, ou seja, com média de 32 anos. Em torno de 50% dos alunos estavam entre 18 e 30 anos. Os mais jovens eram solteiros, representando cerca de 41,5%. Em relação à atividade remunerada, apenas 10 alunos possuem emprego fixo ou trabalho autônomo. Os mais jovens, geralmente não trabalham e são mantidos pela família. Todos eles são oriundos de escola pública. Segundo o autor os alunos demonstram satisfatório interesse em participar das atividades propostas, especialmente aquelas que apresentam nova metodologia de ensino.

A partir da pergunta: Em sua opinião, o que é Estatística? O autor pôde verificar os conhecimentos estatísticos prévios dos alunos, e elaborar sequências didáticas mais adequadas à pesquisa. Estas, foram divididas em quatro aulas (com total de 8 horas) e uma atividade extra que exigiu 2 horas a mais. Cada um dos 24 alunos foi identificado com uma letra maiúscula: A, B, C etc.

Na primeira aula, foram exigidos os conceitos estatísticos básicos de população, amostra e variável por meio de 5 atividades, das quais destacamos duas, pois apresentam pontos de interesse a nossa pesquisa. Na atividade 1 desta aula, foram disponibilizadas situações representadas em língua natural, das quais o aluno foi solicitado a identificar as variáveis e classificar seus tipos: quantitativa (discreta ou contínua); e qualitativa. Um exemplo é a seguinte situação: “Os números de telefones em uma lista telefônica”. A maioria obteve a resposta desejada. O autor, porém, destaca a confusão entre o termo “tipo” e o entendimento de quantidade, o

que gerou um interessante debate em um grupo de alunos. Outro destaque foi de três itens onde mais ocorreram erros. Tratavam de tamanho de roupa, estatura de jogadores e preço de carros, dos quais não conseguiam distinguir quantidade e quantidade. Na atividade 3, os alunos foram solicitados a identificar os tipos de variáveis, tal qual a atividade 1. A diferença é que dessa vez os dados foram dispostos em uma tabela (figura 10).

Figura 10 – Tipos de variáveis

Tabela 01 – Cadastro dos funcionários da empresa Brass Ltda. – 2010.				
Nome	Sexo	Salário (R\$)	Grau de escolaridade	Tempo de serviço
Antonio	Masculino	1.345,00	Ensino médio	3 anos
José	Masculino	1.267,00	Especialização	2,5 anos
Marcos	Masculino	2.543,00	Ensino médio	5 anos
Maria	Feminino	2.100,00	Graduação	4 anos
Pedro	Masculino	1.945,00	Graduação	6 anos
Fonte: RH empresa Brass Ltda.				

Fonte: Lutz (2012, p.67)

Não foram grandes as dificuldades percebidas pelo autor (op.cit), porém os acertos chegaram a 63%, como é o caso de um aluno que se equivocou ao responder sobre as variáveis “salário” e “tempo de serviço” como sendo discretas.

Na segunda, as definições de frequência, frequência relativa, frequência acumulada, frequência relativa acumulada, classe, amplitude e construção de tabelas de distribuição de frequências. Esta aula contou com 3 atividades, das quais encontramos pontos insuficientes ao interesse de nossa pesquisa. Portanto, não a desenvolveremos.

Na terceira, foi tratado o conceito de medidas de tendência central. Distribuída em três atividades, essa aula apresenta logo na primeira atividade elementos essenciais para nosso estudo. Já na seguinte, o procedimento se repete; nada acrescentando em relação à primeira. Na última atividade, é trabalhado apenas o uso de fórmulas e cálculos, que também nada acrescenta à nossa pesquisa. Assim, na atividade 1, o aluno é confrontado com uma tabela (figura 11) e solicitado a determinar a mediana, a moda e a média dos dados.

Figura 11 – Medidas de Posição

Tabela 04 – Números de filhos de 100 famílias de Alegrete - 2010

Números de filhos	Quantidade de famílias (f_i)
0	17
1	25
2	28
3	19
4	7
5	4

Fonte: Secretaria de Bem Estar Social.

Fonte: Lutz (2012, p.77)

As transformações de registros nessa atividade assemelham-se às propostas em nossa SD. O autor apresenta dados em tabela e pede que os alunos convertam o que foi pedido em símbolos matemáticos como Mo , Me , e $\bar{x}$, respectivamente, moda, mediana e média. Em seguida, para determinar cada um desses valores é preciso que sejam convertidos para a linguagem algébrica. Os resultados, conforme Lutz (2012), não foram satisfatórios, pois, poucos alunos responderam toda essa atividade, e os demais encontraram valores diferentes para a média. Entre os erros mais comuns, o autor destaca o do aluno G (figura 11) que adicionou as frequências para dividir pelo número de classes.

Figura 12 – Resposta do Aluno G

b) Média

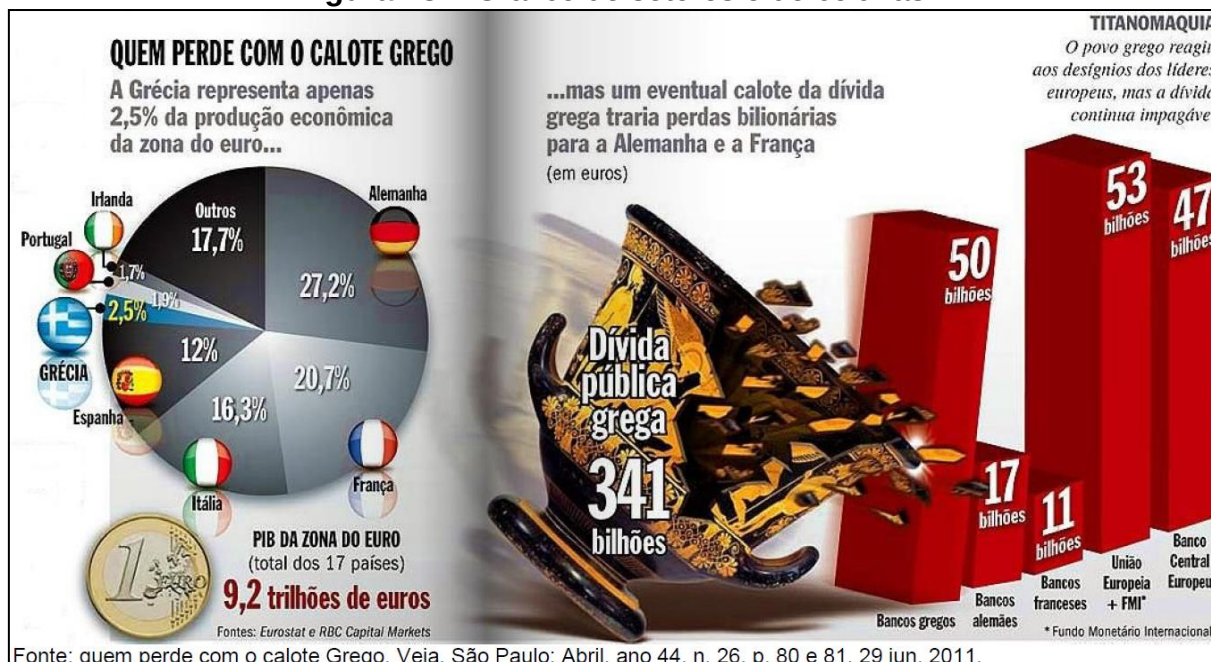
$$\frac{17+25+28+19+7+4}{6} = 26,66 \quad \times$$

Fonte: Lutz (2012, p.78)

A confusão com as classes também se estendeu para determinar a mediana, que, tal como o anterior, ocorreu em 38% dos alunos.

Na quarta aula o autor intencionou reunir os conceitos exigidos das atividades anteriores, de modo a levar os alunos ao letramento estatístico por meio de representações gráficas e interpretação dos dados. Ele organizou esta aula em cinco atividades. Na primeira, o autor expôs uma figura com diversas informações estatísticas contextualizadas e atuais (figura 12), acompanhada de questões sobre as informações contidas na imagem.

Figura 13 – Gráfico de setores e de colunas



Um dos alunos apresentou quase todas as respostas dentro do esperado, exceto ao afirmar que seria possível determinar o número de empresas vítimas do “calote grego” a partir do gráfico de colunas. Outro erro desse mesmo aluno foi na questão sobre o gráfico mais adequado para representar a situação. Sua resposta foi o gráfico de setores, e justificou por apresentar “uma noção mais real do assunto”. Segundo Lutz (2012), porém, este tipo de gráfico não é o mais adequado para representar muitas informações. Nesse caso, conclui o autor, o mais indicado seria o de colunas. Nesse item específico do gráfico mais apropriado, as repostas foram variadas, indicando uma lacuna, porém, o raciocínio e a interpretação do que foi exposto foram coerentes.

As atividades 2, 3 e 4 são similares à primeira, porém, estendem-se a tópicos que se desviam acentuadamente de nosso objeto de estudo. Passaremos, pois, à análise do autor sobre a quinta atividade. Assim, na atividade 5, Lutz (2012) intencionou o uso do laboratório de informática para aplicar o que solicitou nesta atividade. Ele dispôs uma tabela (figura 14), sobre a qual pediu que os alunos construíssem gráficos de linha, de coluna, de barra e de setores, além de três perguntas sobre comparação de dados e média.

Figura 14 – Tabela e gráficos

Contas quitadas				
Mês	Consumo kWh	Consumo kVAh	Valor R\$	Vencimento
Ago	205	-	93,86	25/08/2011
Jul	179	-	84,85	26/07/2011
Jun	194	-	95,08	27/06/2011
Mai	197	-	95,62	25/05/2011
Abr	192	-	87,21	27/04/2011
Mar	262	-	117,13	28/03/2011
Fev	315	-	137,60	24/02/2011
Jan	314	-	135,78	26/01/2011
Dez	236	-	103,13	27/12/2010
Nov	215	-	95,44	25/11/2010
Out	181	-	80,52	26/10/2010
Set	180	-	77,68	27/09/2010

Fonte: Lutz (2012, p.90)

O autor, então, dividiu a turma em três grandes grupos. Cada um escolheu e defendeu o tipo de gráfico que considerou mais adequado. O autor acredita que essa etapa permitiu clareza sobre a indicação de um gráfico para determinada situação. Todas as respostas foram esperadas ao definirem que seria indiferente usar o de barras ou o de colunas. Quanto as três questões propostas, o autor não dispôs sua análise.

A atividade extra encerrou com três atividades complementares visando verificar o aprendizado ocorrido. A resolução poderia ser feita a partir do material que o autor trabalhou em sala. Na atividade 1, o autor retomou os conceitos de população, amostra e variável. Em torno de 25% apresentou confusões apenas para identificar os tipos de variáveis quantitativas, o mesmo não ocorreu para distinguir quantitativa e qualitativa. Na atividade 2, foram retomadas medidas de tendência central, por meio de uma tabela. Alguns dos erros de cálculos, cometidos nas atividades das aulas 2 e 3, se repetiram, assim como do uso inadequado do número de classes, em vez do número total de elementos. Já na atividade 3, Lutz (2012) retomou análise e interpretação de dados por meio de gráficos. O autor observa as repostas dadas ao item que questionou sobre o gráfico mais apropriado para a situação exposta: os acertos alcançaram 89%. Conclui o autor, que os alunos devem treinar a argumentação ao discutirem os resultados investigados, e não apenas no caso de conteúdos estatísticos.

Quanto à análise *a posteriori* e à validação, Lutz (2012) verificou por meio da pergunta “o que você achou do material didático trabalhado em sala de aula?”, que

os alunos consideraram o material didático trabalhado, em geral como satisfatório, porém, entenderam ter sido extenso e cansativo. De acordo com o autor, a SD foi pensada de início em 10 horas/aula, mas terminou com 16, o que equivale a 20% da carga horaria anual da disciplina de Matemática para o PROEJA. Ele entende que seria necessário reduzir o número de atividades por aula, ou seja, 3 questões por encontro, pois, quando ocorreram 5, a aula tornou-se muito extensa. Contudo, continua o autor, o material produzido atingiu o objetivo que ele buscava, tal como confirma o desempenho dos alunos nas atividades.

O autor, então, sugere algumas adaptações ou correções em algumas atividades. Um exemplo, é no item que questiona “qual variável foi estudada nessa pesquisa?”. Ele propõe mudar para “qual o tipo de variável estudada nessa pesquisa?”. De fato, ocorreram erros nas repostas a esse item, devido a ambiguidade. A fixação dos conteúdos proposta na atividade extra, Lutz (2012) considera também satisfatória, pois apresentou sucesso de 75%. O autor observa que suas considerações são baseadas empiricamente na prática pedagógica, uma vez que o material não foi submetido a outra linha metodológica para efeito de comparação.

Lutz (2012) retoma suas questões norteadoras para finalizar a discussão sobre os objetivos atingidos. Ele entende que as três questões que nortearam seu trabalho integram o mesmo campo semântico, e, portanto, podem ser resumidas em uma única questão: “como os conhecimentos, se adquiridos, podem ser usados fora da sala de aula, ou seja, no cotidiano dos alunos?”. O autor, então, conclui que o letramento estatístico é fundamental para o processo cognitivo que envolve o pensamento estatístico.

3. 2. 2 Estudos Diagnósticos

Moreno (2010) estudou as características das atividades de uma formação de alunos de um curso de licenciatura em Matemática que favoreçam a aprendizagem do conceito de variabilidade. Definiu como sua questão norteadora: quais as características de uma formação continuada em estatística que aborde a análise exploratória de dados para possibilitar a construção do entendimento de variabilidade pelos alunos de licenciatura Matemática?

Com isso, o autor propôs uma sequência didática, apoiada nas dimensões da análise de conteúdo e na elaboração de cenários de Robert (1998), e a dividiu em: introdução e construção do conceito de média aritmética; construção do conceito de variabilidade pelo uso de medidas de dispersão; e aplicação do conceito de variação para tomada de decisões. A metodologia empregada foi a Engenharia Didática.

Das quatro dimensões propostas por Robert, apenas três interessam ao trabalho do autor, quais sejam: a Dialética Ferramenta-Objeto e Mudança de Quadros; os Registros de Representação Semiótica; e os Níveis de Funcionamento dos conhecimentos dos alunos. Neste caso, o uso da Teoria Semiótica de Duval coincide com os pressupostos de nossa pesquisa. Sobre essa teoria o autor faz comentário relevante também para nossa pesquisa:

Tendo em vista que a Estatística necessita do ferramental matemático para suas análises e que seus objetos, assim como os da Matemática são abstratos e carecem de representação para sua apreensão, defendemos que as conclusões da teoria dos Registros de Representação Semiótica podem ser aplicadas à Estatística. (MORENO, 2010, p. 32)

Outro importante tema de coincidência entre o estudo do autor e nossa pesquisa está no Pensamento Estatístico, do qual destaca seus três elementos trazidos por Snee (1999) e da relação da tecnologia com o desenvolvimento da Estatística.

Para estruturar suas SD, o autor apoia-se na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, outro importante pressuposto teórico que tem relevância para a nossa pesquisa. Assim, foram previstas 37 tarefas em 7 situações didáticas, porém, algumas tarefas tiveram adaptações ao longo do curso, estendendo ao final para 43. As SD possibilitaram autonomia aos alunos obedecendo as fases propostas por Brousseau: ação, formulação e validação.

O autor intencionou provocar nos alunos debates que solicitassem seus conhecimentos anteriores, e com isso criar um movimento para que se pudesse construir um novo conhecimento. Ao final de cada bloco de atividades, o aprendizado foi socializado e institucionalizado com toda a turma. As tarefas foram resolvidas em grupos de alunos, sendo 17 participantes no total, todos do quarto semestre de licenciatura em Matemática de uma universidade da rede privada de Caraguatatuba, em São Paulo. Com 11 encontros semanais, de 3 horas cada, a formação foi ministrada pelo próprio autor. No primeiro encontro, os alunos responderam um questionário sobre o perfil do grupo e três questões diagnósticas

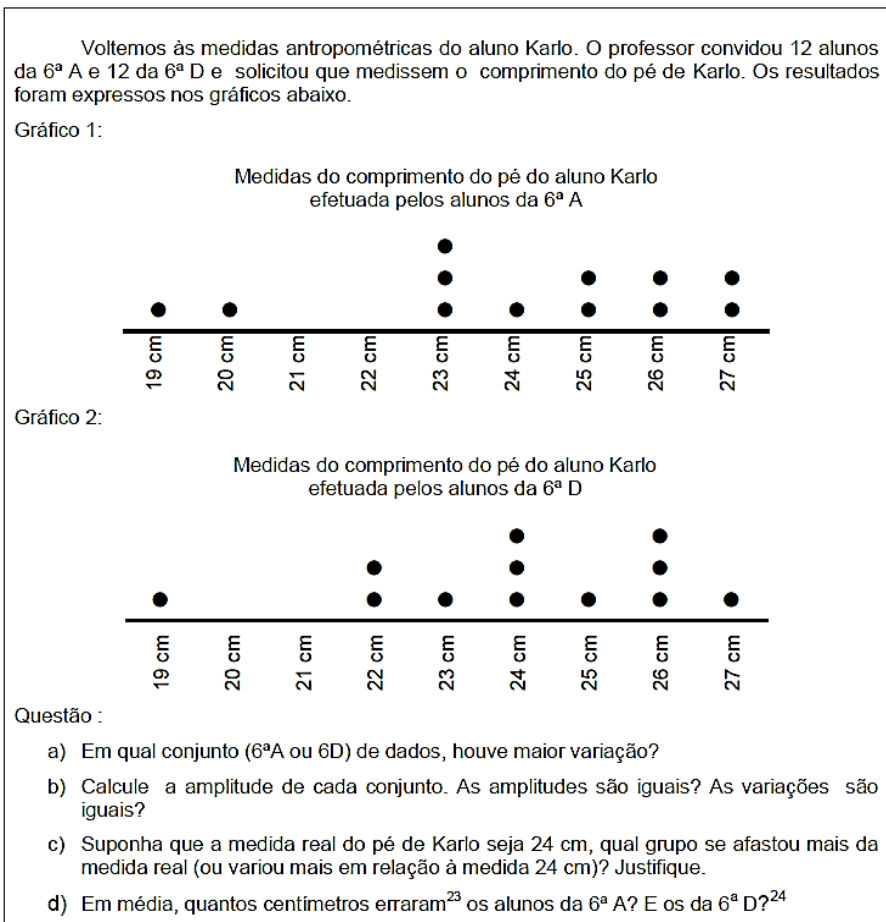
de média, mediana e variabilidade. Estas, foram retomadas no último para efeito de comparação de desempenho. Em dois desses encontros, o autor fez uso de uma planilha eletrônica, tal como decidimos adotar em nossa pesquisa. O que se intencionou com a planilha foi explorar um maior quantitativo de dados reais, agilizar os cálculos e tranquilizar os alunos para realizarem suas interpretações dos resultados.

Para possibilitar a percepção da variabilidade e suas medidas, ideia central da pesquisa, o autor optou por construir o conceito de desvio padrão de modo a provocar a discussão pela insuficiência da média, e com efeito, a necessidade de uma medida de variação que a ela se relacione. Neste ponto, a intenção do autor coincide em exato com o início de nossa sequência de atividades, o que volta a ocorrer nas próximas etapas das situações propostas por ele. Isto é, ele provoca que o aluno perceba que a amplitude é uma medida de variação e que possui restrições. Ele também, como em nosso trabalho, mostra em suas atividades que o desvio médio supera a utilidade da amplitude como medida e contempla todos os dados envolvidos, assim como sua maior importância passa a ser de poder definir desvio padrão. Por fim, o autor propõe algumas aplicações do desvio padrão. Devido sua abordagem direcionar-se ao ensino superior, o autor estende-se para outros conteúdos estatísticos além de nosso campo de pesquisa.

Para avaliar e diagnosticar como ocorreu a aprendizagem dos conhecimentos estatísticos exigidos nas SD, o autor selecionou três tarefas para análise dos resultados. Em cada uma, tratou de dois modos: teórico e *a posteriori*. E finaliza com uma comparação entre os momentos inicial e final. Porém, dessas três tarefas, apenas a de número 20 trata de conteúdos abordados na EB. Portanto, trataremos apenas da análise desta tarefa.

A tarefa de número 20, trata da limitação da amplitude como medida, e a busca de outra mais abrangente, conforme a figura 15.

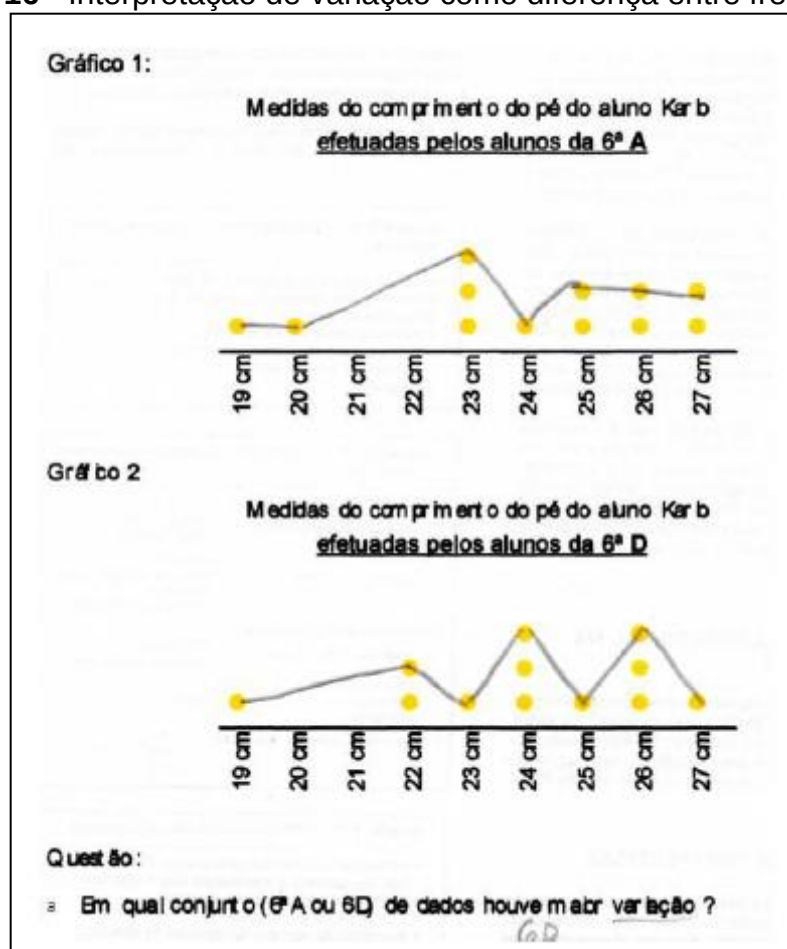
Figura 15 - Atividade 20



Fonte: Moreno (2010, p. 75)

Na análise teórica, o autor observa que, como conhecimento prévio, as habilidades esperadas são: leitura e interpretação de gráfico de pontos; cálculo de amplitude e de média aritmética. E os conhecimentos visados são: percepção da insuficiência da amplitude como medida de variação; e construção da noção de desvio médio.

Na análise *a posteriori*, o autor registra que parte dos alunos observou a variação entre os dados e não nas proximidades de alguma medida de centro. Outros confundiram variação com diferença de frequência entre medidas. Para constatar, ele identifica o caso de um aluno que ao traçar uma linha pelos pontos, escolhe erroneamente um dos gráficos como sendo o de maior variação, conforme a figura 16.

Figura 16 - Interpretação de variação como diferença entre frequências

Fonte: Moreno (2010, p. 81)

Quando na socialização, Moreno atenta para o caso de uma aluna ao observar que discutir a variação entre os dados não era um erro, pois o enunciado não indicava que se deveria analisar a dispersão dos dados. O autor concorda com a aluna, pois no item “a” não há menção à medida, mas sim à variação. Nesse ponto, ele conclui que é necessário esclarecer aos alunos que as medidas de variação se referem às dispersões relativas às medidas de tendência central. Destacamos aqui a citação do autor sobre essa discussão:

Não se deve separar o estudo das medidas de tendência central das medidas de dispersão. É frequente em situações de aprendizagem, os professores negligenciarem totalmente o estudo da propagação ou artificialmente separá-lo para o estudo de tendência central. Os educadores precisam incentivar discussões que levem além das medidas de centro, articulando, tanto quanto possível, raciocínio sobre variação com o de tendência central. (READING; SHAUGHNESSY, 2004, p. 223, tradução do autor, grifo nosso)

Moreno (2010) observa ter havido mais dificuldades em resolver o item “c” do que os itens “a” e “b”. Um exemplo foi determinarem a frequência de cada ponto, ou seja, se a frequência de 23 cm era três, eles consideravam somente uma vez. Nesse momento, o autor levanta discussão sobre ter adotado gráficos de pontos e não de colunas, uma vez que ele entende que a persistência nesses erros está no fato dos alunos perceberem os pontos como colunas. O autor então questiona se o uso do gráfico de colunas, desde as séries iniciais, causa um obstáculo didático, devido os alunos usarem todos os pontos ao determinarem a variação.

Contudo, um número considerável de alunos mediu corretamente os desvios em relação ao ponto de referência (24 cm). Um caso destacado pelo autor, é de um aluno que somou os desvios nos dois lados da média, e concluiu que a 6ªA apresentava maior variação, pois a soma dos desvios de cada lado era maior que a da 6ªB, associando a variação aos afastamentos. Porém, não houve aluno que calculou o afastamento médio para decidir o item “c”.

Sobre esse item, o autor assume, apoiado em Bussab e Morettin (2010), que poderia ter disposto os gráficos com quantidades distintas, pois a soma dos desvios não seria suficiente para determinar qual maior variação, o que possibilitaria melhor reflexão sobre o uso da média dos afastamentos e o entendimento que ela seria o próprio desvio médio.

Sobre o item “d”, Moreno (2010) observa que não houve dificuldades para sua resolução, ainda que tenham ocorrido alguns equívocos, como o de alguns alunos que desconsideraram o desvio igual a zero no cálculo da média. Este equívoco, conforme o autor, é apontado por Batanero (2001) como um dos erros cometidos pelos alunos no cálculo da média ao ignorarem a frequência igual a zero. Entretanto, um grupo levantou dúvida sobre o termo “erraram” no item “d”, ao interpretar corretamente erro zero como acerto ao considerar ou não o zero, em relação ao erro (médio) solicitado. O autor então, na figura de instrutor, questionou sobre o uso do zero no cálculo da média dos erros, o que possibilitou que concluíssem que era necessário o uso do zero. O autor sugere ainda, que a resolução deste item foi facilitada pela apresentação de tabelas (figura 17) para que os alunos dispusessem os dados e os erros médios de cada turma.

Figura 17 – Tabela do Cálculo do erro médio

Gráfico 1: 6A			Gráfico 2: 6D		
Medida	Tamanho real	Erro como distância ou variação em relação ao 24	Medida	Tamanho real	Erro como distância ou variação em relação ao 24
19	24	5	19	24	5
20	24	4	22	24	2
23	24	1	22	24	2
23	24	1	23	24	1
23	24	1	24	24	0
24	24	0	24	24	0
25	24	1	24	24	0
25	24	1	25	24	1
26	24	2	26	24	2
26	24	2	26	24	2
27	24	3	26	24	2
27	24	3	27	24	3
Soma		24	Soma		20
Erro médio		2	Erro médio		1,67

Fonte: Moreno (2010, p.80)

Ao final, Moreno (2010) reforça que as dificuldades apresentadas pelos alunos foram apontadas por Batanero (2001) e Silva (2007). Concorde que os conhecimentos prévios dos alunos são importantes ferramentas para resolverem certos aspectos de um problema, contudo, insuficientes para alcançarem a resolução completa. Ainda assim, os conhecimentos prévios contribuíram para que os alunos encontrassem uma medida de variação que considera todos os dados. Sobre a atividade, porém, o autor não considera que tenha sido satisfatória para que o conceito de desvio médio fosse institucionalizado.

Vieira (2008) objetivou estudar as interações entre o aluno e um ambiente de estatística dinâmica. Com a finalidade de observar a capacidade do aluno analisar, organizar e interpretar dados, a autora desenvolveu uma SD para o ensino de exploração de dados aplicada a uma turma do segundo ano do EM.

O desenvolvimento da SD ocorreu em um ambiente computacional, em particular de estatística dinâmica com uso do *software Fathom*. Este ambiente é propício à mobilização simultânea de diferentes registros de representação semiótica de um conjunto de dados, tais como gráficos, tabelas e medidas. Para isso, a autora levantou as seguintes questões norteadoras: 1) Em que medida as articulações

entre os diferentes tipos de registros de representação semiótica tornam-se um meio para compreender conceitos estatísticos? 2) Um software de estatística dinâmica pode gerar a necessidade de diversos registros de representação semiótica, e de permitir ao sujeito o desenvolvimento e a capacidade de organizar, analisar e interpretar dados? 3) Que tipos de articulações entre os registros de representações semióticas de um conjunto de dados podem ser identificadas, a partir do uso do ambiente computacional, para se fazer a análise dos dados?

A autora fundamentou sua pesquisa na Teoria Dos Registros De Representação Semiótica de Duval (1994, 1998, 2003, 2004), nos pressupostos da Engenharia Didática como metodologia e, para analisar a compreensão gráfica pelos alunos no contexto da pesquisa, apoiou-se nos Níveis de Compreensão Gráfica de Frances R. Curcio (1989, 2001).

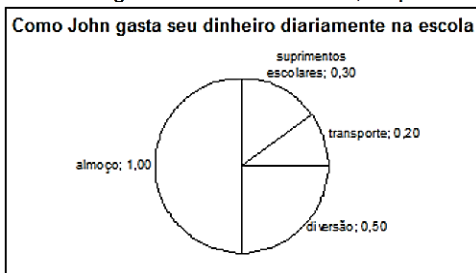
Embora os Níveis de Curcio não façam parte de nossa linha de pesquisa, abordaremos seu entendimento a partir do trabalho de Viera (2008), uma vez que eles apresentam elementos que favorecem a análise dos resultados de nosso estudo.

Assim, conforme a autora, para Curcio (1989) as leituras são:

Leitura de dados. Quando o entendimento de uma representação gráfica exige apenas sua leitura literal, ou seja, o leitor “levanta” os fatos que se mostram explícitos, tais como os rótulos dos eixos. Esta é uma etapa que pouco exige cognitivamente, o que é percebido no exemplo (figura 18).

Figura 18 – Exemplo de Leitura de dados, de Curcio (1999)

Exemplo: Dado o diagrama de setores abaixo, responda o que se pede.



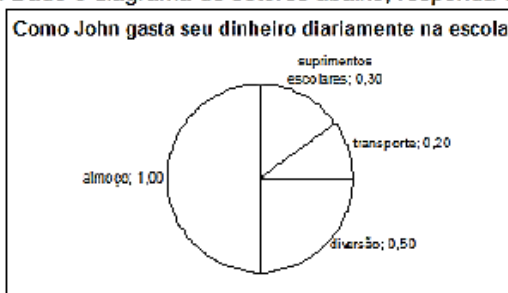
- 1) O que o gráfico conta para você?
 - a) Como John gasta seu dinheiro nos finais de semana
 - b) Como John gasta seu dinheiro durante uma semana completa
 - c) Como John gasta seu dinheiro durante as férias
 - d) Como John gasta seu dinheiro durante um dia na escola.
- 2) Quanto John gasta em suprlmentos escolares em um dia?
 - a) R\$0,20
 - b) R\$0,30
 - c) R\$0,50
 - d) R\$1,00

Fonte: Viera (2008, p. 21)

Leitura entre os dados, exige interpretar e integrar os dados contidos no gráfico. Requer comparar quantidades, como “maior que” ou “mais alto que”, bem como de conceitos matemáticos. Um exemplo é o das quatro operações fundamentais, que possibilitam a integração e combinação dos dados, além da identificação de conceitos matemáticos expressos no gráfico. Esta fase exige pelo menos um estágio de inferência lógica ou pragmática, condição que permite a passagem do problema à sua resposta (CURCIO, 1989). Este autor exemplifica, conforme mostra a figura 19.

Figura 19 – Exemplo de Leitura entre os dados, de Curcio (1999)

Exemplo: Dado o diagrama de setores abaixo, responda o que se pede.



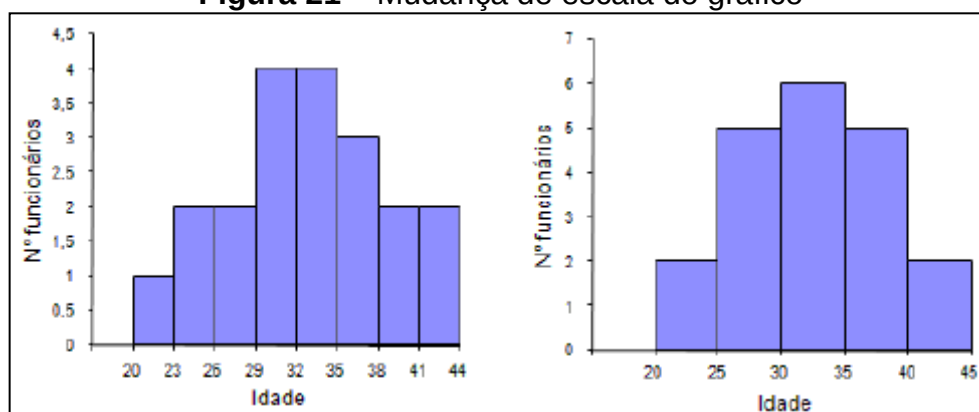
- 1) Qual o total de gastos na escola permitidos a John diariamente?

a) R\$ 1,90	c) R\$ 3,00
b) R\$ 2,00	d) R\$ 4,00
- 2) Quanto a mais John gasta no almoço do que no transporte?

Fonte: Viera (2008, p. 22)

do registro Tratamento, ela faz uso dos seguintes exemplos: uma tabela de dupla entrada com as duas variáveis sendo categóricas nominais, dentro do mesmo registro, para uma tabela de distribuição de frequências; mudança de escalas em um gráfico, causada pela amplitude das classes consideradas, bem como pela mudança na escala do eixo das frequências, conforme figura 21.

Figura 21 – Mudança de escala do gráfico



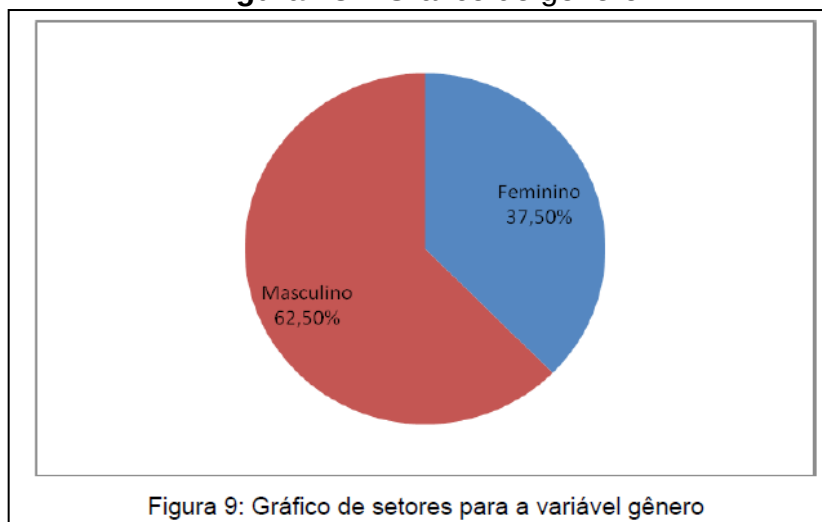
Fonte: Viera (2008, p. 28)

Para a transformação Conversão, Vieira (2008) recorre a dois exemplos de diferentes objetos matemáticos. O primeiro é a conversão da parábola na forma da expressão $y = 2x^2$ para sua forma gráfica. O segundo, mais relevante para nosso estudo, é a conversão dos dados de uma tabela para um gráfico de setores, conforme as figuras 22 e 23.

Figura 22 – Tabela de distribuição

TABELA 4 – DISTRIBUIÇÃO DOS ESTUDANTES DE ENSINO MÉDIO, POR GÊNERO	
GENÊRO	Nº ALUNOS
Feminino	15
Masculino	25
TOTAL	40

Fonte: Viera (2008, p. 29)

Figura 23 – Gráfico de gênero

Fonte: Viera (2008, p. 29)

A autora destaca a importância da congruência e não-congruência, conforme Duval (1994). Como exemplo em Estatística, ela mostra que na passagem de uma tabela de distribuição de frequências para seu gráfico, ocorre congruência, pois tal passagem pode ser realizada de forma direta pelo aluno. Porém, ao ser realizada a passagem inversa, do gráfico para a tabela, pode ou não haver congruência, a depender do tipo de gráfico.

Na sequência, Vieira (2008) aborda as diferentes apreensões percebidas pelo indivíduo diante de uma figura. Concordamos com a autora ao afirmar que a representação de uma figura pode ser estendida aos objetos do conhecimento estatístico. Conforme ela, as apreensões são: perceptiva, permite prontamente identificar ou reconhecer um objeto matemático, como a identificação do que representa cada coluna em um gráfico de colunas de modo a permitir a leitura direta dos eixos; discursiva, ficam explícitas propriedades matemáticas da figura, como ao se localizar medidas pelas suas posições em um gráfico *Box-plot*; sequencial, refere-se à ordem de construção de uma figura, e está subordinada às propriedades matemáticas, às técnicas e aos instrumentos usados, como ocorre na sequência de passos para construção de um gráfico *Box-plot*; operatória, refere-se à transformação de uma figura em outras possíveis, como na passagem de um histograma para um polígono de frequências acumuladas.

Vieira (2008) relaciona os níveis de compreensão gráfica de Curcio (1989) aos tipos de apreensões de Duval (1994), conforme o quadro da figura (24).

Figura 24: Relações hipotéticas entre as Teorias de Duval e Curcio

Tipos de apreensões possíveis de uma figura	Níveis de Compreensão Gráfica
Apreensão Perceptiva	Nível 1: Leitura dos Dados
Apreensão Discursiva	Nível 1: Leitura dos Dados + Nível 2: Leitura entre os Dados
Apreensão Operatória Apreensão Seqüencial	Nível 1: Leitura dos Dados + Nível 2: Leitura entre os Dados + Nível 3: Leitura além dos Dados

Fonte: Viera (2008, p. 39)

A autora ressalta que as informações contidas nesse quadro são apenas hipóteses, e que exigem maior aprofundamento.

A parte experimental da pesquisa, Vieira (2008) compôs de um teste-diagnóstico com quatro questões de 45 minutos no total, e de uma SD com uso do *software Fathom*. O teste-diagnóstico objetivou verificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre conceitos estatísticos. Já a SD, foi composta pelas partes A e B, com seis aulas de 45 min cada, sendo três aulas por dia. Na A, o aluno aproximou-se do *Fathom*. Na B, ele preparou um relatório com tabelas, gráficos e textos explicativos. A aplicação desse experimento ocorreu entre maio e junho de 2008, com alunos do 2º ano do ensino médio noturno, de uma escola estadual no município de Santo André, em São Paulo.

A 1ª questão da SD solicitou que o aluno respondesse, a partir da tabela identificada na figura 25, questões do item a ao k, das quais destacaremos as mais relevantes ao nosso trabalho.

Figura 25 – Dados dos funcionários

Cargo	Gênero	Nº de funcionários	Salário (em R\$)
Gerente	Masculino	1	3500
Auxiliar Administrativo	Masculino	3	820
Auxiliar Administrativo	Feminino	5	820
Vendedores	Masculino	12	540
Vendedores	Feminino	10	540
Serventes	Masculino	3	400
Serventes	Feminino	3	400

Fonte: Viera (2008, p. 73)

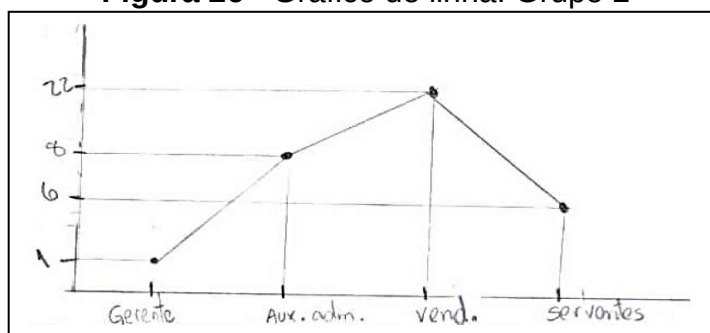
Os itens a, b e c solicitavam, respectivamente, o total de funcionários, a quantidade do gênero feminino e a porcentagem dos funcionários do gênero masculino. As respostas foram corretas, e corresponderam com o esperado, incluindo os cálculos percentuais.

No item d, sobre os tipos de variáveis estatísticas, dois grupos responderam corretamente, ainda que não conhecessem o termo “variável estatística”. O outro grupo tentou estabelecer relação entre os dados da tabela que explicasse as variáveis. No item e, sobre as variáveis serem de diferentes tipos ou não, dois grupos não responderam e o outro errou. As perguntas desses dois itens (d, e) continham o termo características associadas às “variáveis estatísticas”, o que ocasionou confusão na identificação e diferenciação das variáveis.

No item f, um grupo resolveu corretamente a solicitação sobre média aritmética. Os dois outros grupos erraram ao desconsiderar a frequência em cada salário. Vieira (2008) cita Batanero (2001) para justificar o quanto esse tipo de erro é comum.

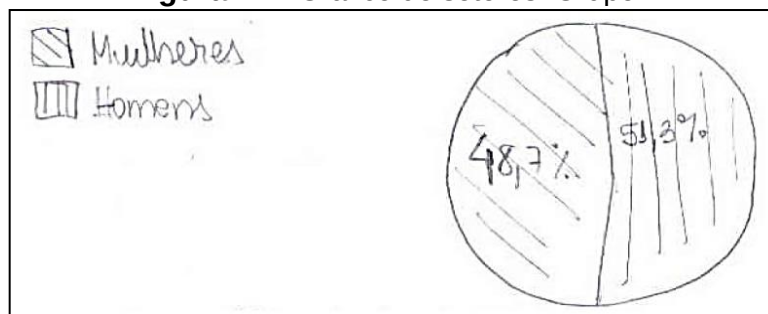
O item g, que exigiu a noção intuitiva de mediana, teve acerto de apenas um dos grupos. Os demais, não responderam. No item i, cuja solicitação foi a construção de um gráfico representativo dos cargos da empresa, todos os grupos construíram um de pontos para uma variável qualitativa, associando ao de uma função. Diante dessa situação, a autora enfatiza a confusão entre Estatística e Matemática. A figura 26 mostra o gráfico construído pelo grupo 2.

Figura 26 - Gráfico de linha: Grupo 2



Fonte: Vieira (2008, p. 78)

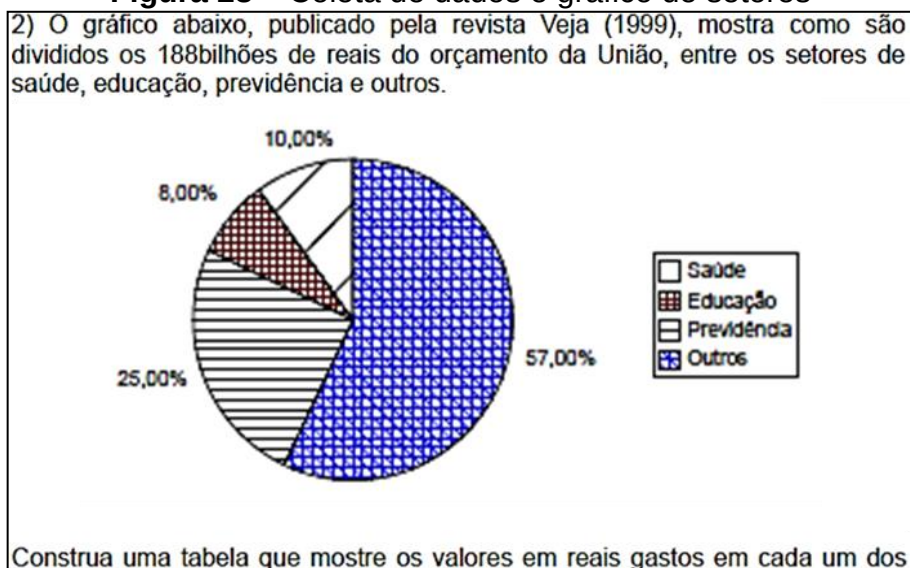
Apenas no item j, ao serem solicitados a construírem um gráfico que representasse o gênero dos funcionários, o grupo 2 construiu um gráfico de setores (figura 27).

Figura 27 - Gráfico de setores: Grupo 2

Fonte: Viera (2008, p. 79)

Conforme Viera (2008), ainda que os alunos conheçam os tipos de gráficos pedidos, eles tendem a ligar pontos e construir gráficos de função.

Na 2ª questão (figura 28), foi exigida a coleta dos dados em forma de porcentagem, e a construção de uma tabela onde deveriam inserir os valores. Conforme Viera (2008), trata-se da conversão de registros de representação semiótica de Duval (2003), do figural para o numérico.

Figura 28 – Coleta de dados e gráfico de setores

Fonte: Viera (2008, p. 81)

Apenas o grupo 1 apresentou dificuldade para os cálculos percentuais. Na apresentação da tabela, todos os grupos omitiram alguns dados, como fonte, título, entre outros. A figura 29, mostra a tabela do grupo 1.

Figura 29 – Tabela do grupo 1

150,00	→	educação
188,00	-	saúde
470,00	-	previdência
1 071,600	-	outros

Fonte: Viera (2008, p. 83)

Conforme a autora, os alunos não estão ainda habituados a construir tabelas como a exigida, confirmando o não aprendizado dessa representação em séries anteriores.

Na 3ª questão (figura 30), o aluno foi solicitado reconhecer algumas medidas estatísticas.

Figura 30 – Reconhecimento de medidas estatísticas

3) Para analisar um conjunto de dados, podemos utilizar medidas que resumem os dados e descrevem suas características, permitindo assim a análise da variação destes dados. Abaixo, indique quais destas medidas que você conhece:

☐ Média Aritmética	☐ Mediana
☐ Moda	☐ Quartis

Fonte: Viera (2008, p. 84)

Os grupos 2 e 3 não reconheceram qualquer uma das medidas. Já o grupo 1, reconheceu média e mediana, o que, conforme a autora, concorda com os resultados dos itens (f) e (g) da 1ª questão.

A 4ª questão foge do contexto de nossa pesquisa, assim como as análises *a posteriori*, envolvidas com o software Fathom. Portanto não trataremos deste em nossas observações.

3. 2. 3 Análise de Livros Didáticos

Coutinho (2013) propõe o debate sobre as condições didáticas que favoreçam desenvolver o letramento estatístico por alunos de EM. A autora definiu o tema gráficos estatísticos e desenvolveu sua pesquisa a partir do Guia do PNLD2012 e de uma coleção de livros didáticos que foi aprovada no respectivo edital. Seu objetivo foi identificar se as coleções aprovadas nesse Guia, para o EM, apresentavam

conteúdos que permitissem a abordagem por ele sugerida. Realizou, pois, um estudo da organização praxeológica deste material didático, a fim de identificar que elementos possibilitavam inferir como o letramento estatístico é desenvolvido pelo estudante. A autora esclarece que a expectativa dessa competência é que os alunos possam: reconhecer o contexto em que os dados estão inseridos; planejar e executar a coleta de dados a fim de responder questionamentos; e, organizar e analisar os dados por meio da utilização de mais de um registro de representação semiótica. Nesse sentido, a autora cita Graham (2006) e Batanero, Estepa e Godino (1991), que defendem que o ensino dos conteúdos estatísticos deva privilegiar os conceitos, e assim dar significado aos resultados de cálculos e à representações gráficas ou tabulares. Em um de seus exemplos, Coutinho (2013) enfatizou a necessidade dos alunos aprenderem a adequar um gráfico à situação a ele associada, bem como as confusões, observadas por este autor, nas respostas dos alunos à identificação dos tipos de variáveis quantitativas.

A autora justifica o interesse pelos conhecimentos estatísticos, em seu estudo, devido à abrangência e à importância crescente da Estatística no mundo todo. Para isso, ela constata o potencial de aplicação que essa disciplina apresenta em diversas áreas científicas e no ambiente social; destaca a inclusão de conteúdos estatísticos nos currículos escolares, desde as séries iniciais e em vários países, bem como sua relevância nos exames de larga escala. Fundamentando-se em Moore (1992), quando este apresentou a Estatística como uma ciência dos dados dentro de um contexto, Coutinho (2013) a denomina “ciência do número em contexto”, e guia seus argumentos para este texto, a partir deste ponto de vista teórico. Além deste apoio teórico, Coutinho (2013) sustenta-se na Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1996). Este autor defende que cada tarefa está associada a pelo menos uma técnica: a forma de se realizar tal tarefa. Nesse estudo, a autora adotou como tarefa, a ação.

Coutinho (2013) argumenta que devido o compromisso do professor em possibilitar o acesso dos sujeitos aos conhecimentos produzidos pela humanidade, os livros didáticos tornam-se instrumento fundamental para o sucesso desse intento. Porém, continua a autora, muitas vezes esses conhecimentos integram processos tão complexos que se torna inviável seu ensino escolar. Para a autora, esses processos configuram o “saber sábio”, e cita Gay (2008), que defende a

transposição didática como meio de tornar este “saber sábio” em “saber a ensinar”. Para esclarecer esses conceitos de saberes, Coutinho cita Friolani (2007) que define:

saber sábio: é a produção científica resultante de uma pesquisa, porém, sem expor o processo de desenvolvimento do conceito em questão, nem o problema que gerou a pesquisa. Saber a ensinar: é aquele que o professor escolhe para ensinar e está presente no currículo e nos manuais escolares. É geralmente adaptado pelos professores em aula, de modo que exista uma transposição (interna à instituição) entre o saber a ensinar e o saber efetivamente ensinado em aula. Saber disponível: é o saber aprendido, construído pelo aluno e que pode ser usado como ferramenta para novas aprendizagens. (p.52).

Nesse contexto, Coutinho (2013) esclarece que os livros didáticos assumem a função de apresentar essa transposição de saberes de modo claro e coerente com o contexto que originou o “saber sábio”, adotando uma linguagem acessível ao público-alvo. A autora cita Fernandes e Morais (2011) para reforçar a importância do livro didático para a construção dos conceitos estatísticos. Estes autores, afirmam que as dificuldades para a aprendizagem dos referidos objetos do conhecimento estatísticos são agravadas conforme a exigência dos conceitos e interpretações de medidas de tendência central, análise e interpretação gráfica e seleção de medidas que melhor representam uma distribuição. Os mesmos autores argumentam ainda, citando Fernandes, Carvalho e Ribeiro (2007), que a causa dessas dificuldades originam-se em um “ensino superficial e desadequado”, pois simplificam apenas ao conhecimento de tipos gráficos, ao uso de algoritmos para cálculos de medidas e a procedimentos, desprivilegiando seus significados. Enfatizamos a importância dessas argumentações para o desenvolvimento de nossa pesquisa. Porém, consideramos mais agravantes as dificuldades no ensino e aprendizagem do conceito de medidas de variação para o EM, e que não foram mencionadas pelos autores anteriormente citados.

Conforme Coutinho (2013), é o tratamento conceitual que possibilita ao aluno desenvolver o letramento estatístico. Nesse sentido, a mobilização de diferentes registros de representação semiótica apresenta-se como fundamental para a aprendizagem de conceitos estatísticos. A abordagem dos livros didáticos acerca do uso desses registros articulados ao letramento estatístico é objeto da discussão que a autora definiu para desenvolver esse estudo.

Em relação ao letramento estatístico, a autora apoia-se em Ben-Zavi e Garfield (2004), e Garfield, DelMas e Chance (2003) que entendem que essa competência inclui habilidades básicas como compreender informações estatísticas ou resultados de pesquisa. Além dos citados, a autora concorda com Shamos (1995) que propõe que o letramento se desenvolve nos seguintes níveis hierárquicos: cultural, quando a mobilização de seus conhecimentos estatísticos se limita ao uso de termos básicos naturalmente utilizados na mídia para comunicação de temas científicos; funcional, exige alguma substância a mais nessa mobilização de conhecimentos, pois além do uso de termos usuais, o sujeito deve também ser capaz de conversar, ler e escrever de forma coerente, podendo mesmo usar termos não técnicos, mas sempre dentro de um contexto significativo; e científico, mais elevado, exige do sujeito uma ampla compreensão do método científico, de forma integrada com a compreensão dos processos científicos e investigativos.

Segundo Coutinho (2013), a análise de livros didáticos possibilita identificar que condições didáticas permitem desenvolver o letramento dos alunos. Para a autora, ainda que seja uma etapa inicial, pode condicionar o aluno a atingir o nível funcional de letramento ao fim do EM. Entretanto, ela constatou ausência de pesquisas voltadas ao exame de livros didáticos sobre Estatística e seu ensino.

Diante desse contexto que Coutinho (2013) decidiu discutir o modo de distribuição e seleção dos conteúdos estatísticos nos livros didáticos de Matemática para o EM, aprovados pelo PNLD 2012. Conforme Brasil (2012), a realização dessa tarefa se deu por um estudo de sumários e resenhas que constam neste plano, que objetiva dar suporte pedagógico ao docente, utilizando-se da distribuição de coleções de livros didáticos às escolas da educação básica brasileira. Quando avaliadas, o Ministério da Educação (MEC) publica o Guia dos Livros Didáticos, acompanhado da resenha das coleções aprovadas. Em seguida, este Guia é encaminhado às unidades escolares para decidirem pela escolha. O MEC, por fim, adquire as coleções escolhidas e as distribui aos alunos.

No edital referente ao plano de 2012 foram aprovados, segundo a autora, somente sete coleções. Ela observa que o cenário da Estatística para as séries finais do EF no Guia do PNLD é desfavorável aos conteúdos estatísticos; somente 7% do total da coleção são dedicados ao bloco Tratamento da Informação (BRASIL, 2007). A autora cita Coutinho, Silva e Almouloud (2009), que observam que parte

considerável das coleções aprovadas detém maior enfoque em cálculos, gráficos simples, além de conterem dados sem informação suficientes. O agravamento acentua-se quando observadas as coleções aprovadas para o EM; apenas 5% voltam-se ao Tratamento da Informação, além de problemas semelhantes aos relatados pela autora. Junta-se ao exposto, que tais obras não apresentam preocupação com o letramento estatístico, como constata a autora ao citar o trecho de Brasil (2011).

Gráficos e tabelas estão presentes em todas as coleções aprovadas, em menor ou maior grau, em textos distribuídos ao longo dos capítulos. Além disso, algumas delas reservam capítulos específicos para o estudo mais detalhado desses tipos de representação. Em contrapartida, são poucas as coleções que exploram aspectos importantes da estatística, associados à análise dos gráficos: a população pesquisada (se é uma amostragem ou uma pesquisa censitária); a opção por apresentar frequência absoluta ou relativa e suas consequências; a escolha de escalas adequadas para cada eixo; as variáveis que estão sendo relacionadas em um mesmo gráfico; a necessidade ou não do uso de legenda; entre outros. (p. 36)

Assim, atesta a autora, como a Estatística Descritiva, voltada para o EM, está aquém dos resultados obtidos pelas pesquisas na área da Educação Estatística, especialmente de letramento, os livros didáticos também estão.

O levantamento para aprofundar essa discussão foi feito a partir dos sumários de cada coleção. O objetivo aqui foi de identificar a proporção relativa aos conteúdos de Estatística Descritiva. De acordo com a autora, apenas uma coleção trata deste conteúdo nos três volumes do EM, e três o fazem em apenas um dos volumes. A Estatística Descritiva ocupa em média 5,6% das páginas de toda a coleção, conforme a figura 31.

Figura 31 – Proporção das páginas destinadas aos conteúdos da Estatística Descritiva em relação ao número total de páginas da Coleção

Coleção	Proporção
C1	7,09%
C2	2,95%
C3	2,86%
C4	4,13%
C5	6,62%
C6	8,37%
C7	7,17%

Fonte: Coutinho (2013, p.79)

A autora, entretanto, aponta que a proporção indicada não garante que a abordagem de um conteúdo foi realizada de modo adequado ao desenvolvimento do letramento.

Para analisar a abordagem dos conteúdos estatísticos nas coleções, Coutinho (2013) escolheu a C4, como exemplo. Já a escolha do tema “gráficos estatísticos” deveu-se por considerá-lo como “porta de entrada” para a construção do pensamento estatístico, e por conseguinte do letramento.

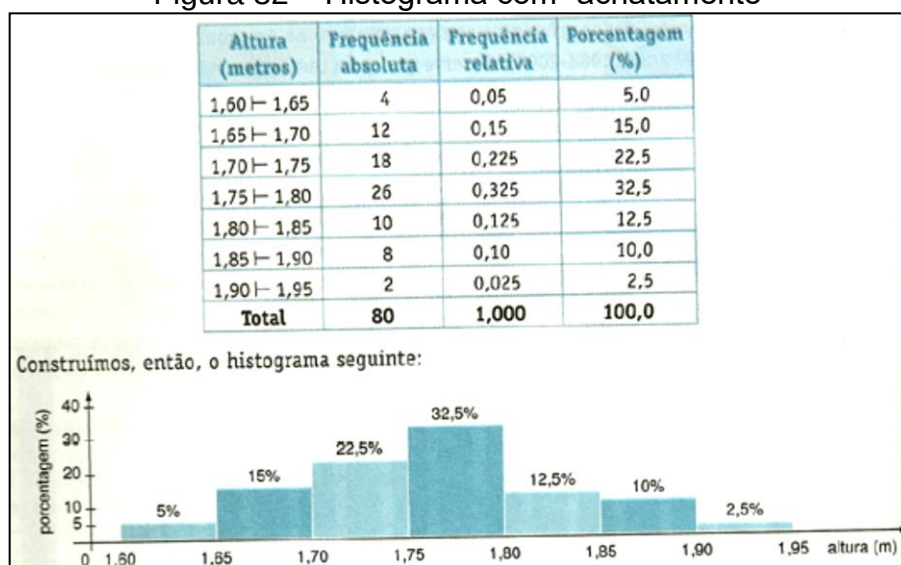
Os gráficos dessa coleção constam no último capítulo do volume 3. A introdução à Estatística mostra esta ciência voltada ao objetivo de planejar uma pesquisa em todas as suas etapas, ou seja, caracterização do objeto da pesquisa, da população, da amostra, da coleta de dados, sua organização e análise para o levantamento de tendências e previsões. Os enunciados dos exercícios direcionam o aluno para esse tratamento, em especial a caracterização da população/amostra e levantamento de tendências, deixando claro que o capítulo desenvolve somente organização e representação dos dados com uso de tabelas, gráficos e medidas-resumo.

Nessa perspectiva de coleta de dados, o capítulo continua com os conceitos de variável, usando exemplos para identificar a diferença entre os seus tipos. O tratamento das frequências é feito de forma implícita sem nomeá-las, ou seja, construindo seus conceitos. Desse item em particular, a autora evidencia o seguinte trecho “para cada variável estudada, contamos o número de vezes que cada um de seus valores (realizações) ocorre” (C4, p.202). Além das frequências, esse item também aborda os dados agrupados em classes ou intervalos, porém, sem categorizar os tipos e variáveis, que, segundo Coutinho (2013), intenciona apenas o

conceito dos tipos de variáveis para que os alunos atentem para os procedimentos envolvidos. Neste capítulo, são disponibilizados 22 exercícios propostos sobre gráficos, o que equivale a 31% de um contexto de 71 exercícios. Os primeiros a serem abordados são os de setores, utilizando-se de um exemplo, e dos procedimentos para determinar o ângulo central por setor circular. A comparação parte-todo não foi feita na leitura dos dados do exemplo.

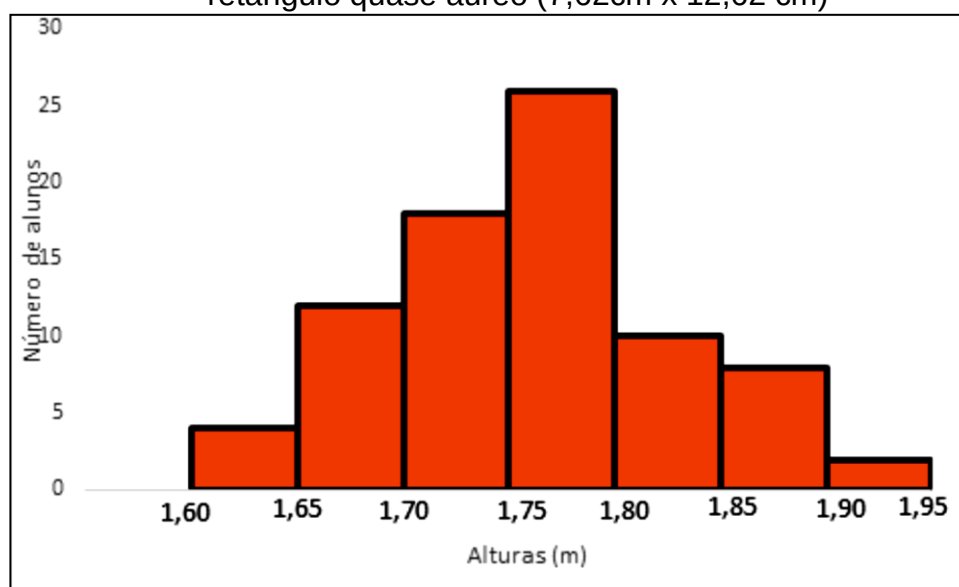
Segundo Coutinho (2013), a construção do gráfico de setores é recomendada a partir do uso de transferidor ou programas de computador, o que não foi indicado no problema. No geral, as mesmas etapas ocorreram com a abordagem do gráfico de barras. No exemplo apresentado consta um questionamento que possibilita o professor conduzir o aluno a uma postura crítica em relação ao seu lugar no mundo: trata-se do tema “desmatamento”. Contudo, o processo didático da atividade se resume em cálculos ineficazes ao aluno: relação da área de um campo de futebol com a área total desmatada. Em seguida, são tratados os histogramas, cuja abordagem se inicia por definir o conteúdo, seguida de um exemplo exigindo a leitura dos dados contidos no gráfico, de modo a relacioná-los a uma tabela de frequências. A autora observa que não houve relevância quanto à forma do gráfico, o que possibilita que o aluno deforme sua representação. As figuras 32 e 33, mostram o mesmo gráfico construído com e sem deformação, respectivamente.

Figura 32 – Histograma com “achatamento”



Fonte: Coutinho (2013, p. 82)

Figura 33 – Histograma sem “achatamento”, construído na proporção de um retângulo quase áureo (7,62cm x 12,62 cm)



Fonte: Coutinho (2013, p.82)

Conforme a autora, a discussão sobre os efeitos do “achatamento” ou deformação deve ser incentivada pelo professor e conduzem ao letramento estatístico, pois, dizem respeito ao conhecimento onde os dados estavam inseridos, acrescentam Gal (2004) e Batanero, Estepa e Godino (1991). Coutinho (2013) atenta para o fato de a leitura dos dados não ficar restrita aos eixos, pois estaria no nível mais elementar, de acordo com Friel, Curcio, Bright (2001). A parte seguinte trata dos gráficos de linhas que recebem análise similar às anteriores. Nos exercícios propostos, a autora identificou seis tipos de tarefas envolvendo gráficos de barras, histogramas e de linhas, sendo duas exigindo a construção de um histograma e de um gráfico de barras horizontais. As outras envolviam leitura de dados que iam além da simples leitura dos eixos. Os conhecimentos necessários para resolução dessas tarefas envolviam: adição, subtração, regra de três simples, além da proporcionalidade nos eixos dos gráficos, e conhecimento sobre funções e sua representação gráfica.

Coutinho (2013) retoma Friel, Curcio e Bright (2001) ao observar que os exercícios propostos exigiam dos alunos uma leitura entre os dados e além dos dados. Para esclarecer os níveis de leitura, a autora cita a seguinte afirmação desses autores

A leitura entre os dados requer a interpretação e a integração da informação que é apresentada no gráfico – o leitor completa pelo menos um passo de inferência lógica ou pragmática para sair da questão para a resposta. A leitura além dos dados requer estender, predizer ou inferir da representação para as respostas às questões – o leitor dá uma resposta que requer um conhecimento maior sobre a questão que está relacionada ao gráfico. (FRIEL, CURCIO e BRIGHT, 2001, p.130).

A autora concluiu que foi possível, a partir da ação docente, identificar elementos que possibilitaram a obtenção de habilidades relacionadas à construção de gráficos e sua leitura. Satisfeitas essas habilidades, considerou que o letramento estatístico foi desenvolvido para a compreensão do que foi solicitado.

Na análise dessa coleção C4, percebemos que a autora não trouxe para discussão as transformações de registros, tratamento ou conversão. Em nenhum momento identificamos, nesta parte da discussão, referências às representações semióticas presentes na coleção abordada. Evitamos dar ênfase à análise da autora em relação à transnumeração, pois esta não faz parte de nossa linha de pesquisa. Destacamos, contudo, os Níveis de Curcio, relevantes para nossa pesquisa, por fazer uso de gráficos. Tais ideias de Curcio também são abordadas por Vieira (2008), cujo trabalho também integra esta seção de Revisão de Estudos.

3. 3 ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO: MEDIDAS DE VARIAÇÃO

Tratamos nesta seção dos conceitos estatísticos que consideramos mais relevantes para nossa pesquisa, e que compõem o objeto de conhecimento Medidas de Variação.

Para Triola (1998), uma medida de variação é um número que reflete “o grau de dispersão entre os valores de um conjunto de dados”. Este mesmo autor considera como medidas de variação: amplitude; desvio-padrão; desvio médio; e variância. Antes de desenvolvermos cada uma, abordaremos os conceitos de variação e de desvio, pois são fundamentais tanto para as sequências de atividades de nossa pesquisa como para o entendimento das referidas medidas.

3. 3. 1 Variação

Para Triola (1998), “a variação se refere a quanto os valores podem diferir entre si e pode ser medida por números específicos”. Consequentemente, quando os números mantêm relativa proximidade uns dos outros, apresentam baixas medidas de variação, enquanto os valores mais afastados (dispersos) têm maior medida de variação.

A presença de variação em um evento é o que o torna incerto. “A variação está em toda parte. Os indivíduos variam; medidas repetidas variam; quase tudo varia com o tempo” (MOORE; NOTZ; FLIGNER, 2017). Compreender a variação é o primeiro passo para o letramento estatístico, com a possibilidade de atingir o raciocínio estatístico, e mais adiante o pensamento estatístico.

3. 3.2 Amplitude

A primeira medida de variação é também a mais simples, seja quanto a sua definição e, a seu cálculo. A amplitude total (A_T) ou somente amplitude de um conjunto de dados é a diferença entre o maior e o menor valor dentre esses dados.

Assim, se entre todos os dados o maior valor é X_2 e o menor é X_1 , a amplitude é obtida por $X_2 - X_1$, isto é:

$$A_T = x_2 - x_1$$

Vê-se que a amplitude só pode assumir valores não negativos.

Para Triola (1998), o fato dessa medida adotar apenas valores extremos, torna-a uma medida limitada em comparação as outras que consideram todos os valores.

3. 3. 3 Desvio

Outro importante conceito para o estudo das medidas de variação é o de *Desvio* (D), definido como a diferença entre um valor (x) e a média ($\bar{x}$) dos dados. Assim:

$$D = x - \bar{x}$$

O desvio não serve como medida. Sua importância está em seu uso nas definições das medidas de variação a serem abordadas nas próximas seções. Apesar disso, ele apresenta uma importante propriedade, em que a soma de todos os valores dos desvios de uma amostra resulta sempre zero, isto é: $\sum_{i=1}^n (x - \bar{x}) = 0$.

Tal como fez Triola (1998), simplificaremos o símbolo $\sum_{i=1}^n$, e adotaremos nesse trabalho somente $\sum$.

3. 3. 4 Desvio Absoluto Médio

A segunda medida de variação, denominada Desvio Absoluto Médio (DAM) ou simplesmente Desvio Médio é uma medida definida como a média dos desvios

absolutos. Considerar os valores dos desvios apenas como positivos é consequência da propriedade observada na seção anterior. Assim:

$$\boxed{DAM = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n}}$$
, sendo n a quantidade de dados da amostra

O valor absoluto do desvio também pode ser entendido graficamente como a distância entre um dado e a média dos dados. Assim, o DAM pode ser interpretado como a média dessas distâncias.

Distinguiremos a partir das duas medidas de variação a seguir, que um conjunto de dados a ser pesquisado pode ser amostral ou populacional. Para cada um, haverá uma indicação específica.

3. 3. 5 Desvio Padrão

Segundo Triola (1998), o Desvio Padrão é a mais importante das medidas de variação, e pode ser entendida como uma espécie de desvio médio. Indica-se o desvio padrão conforme o tipo de dados trabalhados. Assim:

- ❖ quando os dados forem amostrais, o desvio padrão amostral é indicado por s ;
- ❖ quando os dados forem populacionais, o desvio padrão populacional é indicado por σ .

Triola (1998) define desvio padrão como um conjunto de valores em torno da média, uma espécie de desvio médio dos valores em relação à média. Seu valor pode ser obtido pelas fórmulas identificadas em cada um dos dois casos abaixo:

3.3.5.1 Desvio Padrão Amostral

Fórmula (I) $\boxed{s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}}}$ desvio padrão amostral

Fórmula (II) $\boxed{s = \sqrt{\frac{n \sum (x^2) - (\sum x)^2}{n(n - 1)}}}$ desvio padrão amostral (abreviação de I)

Os alunos realizarão os cálculos nas atividades propostas em nossa pesquisa com o uso de Planilha Eletrônica, porém, não os isentaremos de conhecer os procedimentos para tal. Adotaremos os passos sugeridos por Triola (1998, p.77)

Passo 1: calcule a média $\bar{x}$;

Passo 2: subtraia a média de cada valor individual para obter uma lista de desvios da forma $(x - \bar{x})$;

Passo 3: eleve ao quadrado cada uma das diferenças obtidas no Passo 2.

Isso resulta em números da forma $(x - \bar{x})^2$;

Passo 4: Adicione todos os quadrados obtidos no Passo 3. Esse é o valor de

$$\sum (x - \bar{x})^2;$$

Passo 5: Divida o total do Passo 4 pelo número $(n-1)$, que é 1 unidade menor do que o total de valores presentes.

Passo 6: Ache a raiz quadrada do resultado do Passo 5.

O mesmo autor destaca importantes propriedades do desvio padrão, quais sejam:

- ❖ O desvio padrão mede a variação de todos os valores a partir da média;
- ❖ Seu valor (s) é usualmente positivo. Será zero somente quando todos os valores dos dados forem iguais a um mesmo número, portanto, nunca será negativo;
- ❖ Maiores valores de s indicam maior variação dos dados;
- ❖ O valor de s pode crescer drasticamente se incluído um ou mais *outliers* (valores de dados muito afastados dos demais);
- ❖ As unidades de s coincidem com as dos dados originais.

3.3.5.2 Desvio Padrão Populacional

A fórmula para o cálculo do desvio padrão, com dados de uma população, é definida de forma muito próxima que no amostral. As diferenças estão: nas adaptações de algumas notações; no entendimento dessas notações; e no denominador que agora é N .

Fórmula (III) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \mu)^2}{N}}$ desvio padrão populacional

Na fórmula (III) $\left\{ \begin{array}{l} \sigma \text{ é o desvio padrão populacional} \\ \mu \text{ é a média} \\ N \text{ expressa o tamanho da população} \end{array} \right.$

3.3.6 Variância

O termo variância possui uma definição específica. A seguir, dois modos de se apresentar essa definição.

Para Triola (1998), variância de um conjunto de dados é uma medida da variação igual ao quadrado do desvio padrão. Assim, tal como ocorreu com o desvio padrão, segue o cálculo da variância conforme a situação dos dados:

Fórmula (IV) $s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n-1}$ variância amostral

Fórmula (V) $s^2 = \frac{n \sum (x^2) - (\sum x)^2}{n(n-1)}$ variância amostral (abreviação de IV)

Fórmula (VI) $\sigma^2 = \frac{\sum (x - \mu)^2}{N}$ variância populacional

A forma de apresentação de Triola, seja da definição ou das fórmulas de variância, são semelhantes às apresentadas nos livros didáticos utilizados na educação básica. Vejamos a outra forma de fazê-los:

Para Moore; Notz; Fligner (2017), a variância de um conjunto de observações é uma média dos quadrados dos desvios das observações a partir de sua média. Eles tratam o termo observação como sinônimo do termo dado. Assim, para n observações, a variância pode ser obtida por:

Fórmula (VII)
$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$$

ou

Fórmula (VIII)
$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x - \bar{x})^2$$
 abreviação de (VII)

3. 3. 7 Notas Importantes

Organizamos algumas observações que consideramos importantes para o desenvolvimento de nossa pesquisa, uma vez que refletem na prática pedagógica do professor, e nos livros didáticos adotados para o EM.

Nota 1: As aplicações das medidas de variação são mais comuns em casos, cujos dados (observações) são amostrais do que em populacionais. Por esse motivo, nas atividades propostas em nossa pesquisa adotaremos dados amostrais.

Nota 2: A fórmula VIII é apenas um rearranjo algébrico de (VI).

Nota 3: Da mesma forma que a mediana é mais limitada que a média para medir o comportamento da maioria das distribuições de dados, e igualmente a média em relação ao desvio padrão e a variância, para medir distribuições contendo variações com desvios consideráveis, as principais medidas de variação também apresentam suas limitações.

O uso do desvio padrão é mais adequado em relação à variância, pois, apresenta a mesma unidade de medida que os dados observados. Assim, se for observada uma amostra, cuja unidade seja em *km*, o desvio padrão também será em *km*, ao contrário da variância, que nesse caso teria unidade em *km*².

Porém, conforme Moore; Notz; Fligner (2017), o desvio padrão é a medida natural de variabilidade para um caso específico das distribuições simétricas: as distribuições normais. Os autores reforçam que a presença de *outliers* nas observações, tornam o desvio padrão uma medida não resistente, isto é, sensível às observações extremas, ainda que poucas.

Nota 4: As fórmulas (I) e (IV) são mais utilizadas nos cursos da educação básica e nos livros didáticos desta etapa de ensino, porém, com o denominador *n*, ao invés de *(n-1)* como em todas as fórmulas descritas para dados amostrais.

Abaixo seguem as fórmulas (I) e (IV) tal como adotadas na educação básica e nos livros didáticos:

$$\text{Fórmula (XIX)} \quad s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{desvio padrão amostral}$$

$$\text{Fórmula (X)} \quad s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} \quad \text{variância amostral}$$

As justificativas para esse uso diferem entre alguns autores. Vejamos como tratam os dois, que estamos adotando nesse texto:

Para Triola (1998, p.83), a divisão por $(n-1)$ se justifica por existirem apenas $n-1$ valores independentes, ou seja, a média de n dados apresenta somente $n-1$ valores que podem ser “associados a qualquer número antes que o último seja determinado”. A consequência do uso de n é que o valor σ^2 da variância fica subestimado, de modo a diminuição em 1 unidade no denominador compensa essa perda.

Já para Moore; Notz; Fligner (2017), o uso de $n-1$ se justifica pela soma dos desvios resultar sempre 0 (zero), pois, sendo conhecidos $n-1$ deles, é possível determinar o último. Conforme os autores, somente $n-1$ dos desvios quadráticos $(x - \bar{x})^2$, podem variar com liberdade, o que conduz o cálculo da média ser dividida pelo total $n-1$. O número $n-1$ indica o grau de liberdade da variância e do desvio padrão.

3. 3. 8 Algumas Considerações

Os cálculos para obtenção das principais medidas de variação, como desvio padrão e variância, são demasiadamente trabalhosos, e diante das diversas opções tecnológicas que possibilitam um cálculo facilitado, faz-se necessário voltar-se ao mais importante desse conteúdo: a interpretação de seus resultados. Triola ensina que

A tecnologia nos tem permitido apreciar o seguinte princípio da estatística: Não é tão importante memorizarmos fórmulas ou fazermos manualmente cálculos aritméticos tão complexos. Em vez disso, podemos nos concentrar na obtenção de resultados com auxílio de alguma forma de tecnologia (calculadora ou programas), obtendo, então, o sentido prático desses resultados através de um pensamento crítico. (TRIOLA, 1998, p. 62)

O entendimento do autor converge com a importância do desenvolvimento do letramento, do raciocínio e do pensamento estatísticos, e, portanto, com os anseios de nossa pesquisa.

Um outro aspecto importante sobre essas duas medidas, é que muitas vezes elas são consideradas como os únicos meios para se medir variação de dados. No entanto, Moore; Notz; Fligner (2017, p.44) apontam os procedimentos do Resumo dos Cinco Números, que consiste na menor observação (Mínimo), no primeiro quartil¹¹ (Q_1), na mediana (M), no terceiro quartil (Q_3) e na maior observação (Máximo). Conforme os autores, esses números dispõem uma descrição quase completa de centro e variabilidade. Devido não serem abordados na EB, de acordo com a BNCC, não nos aprofundaremos em seu entendimento, contudo, concordamos com os autores de que tal Resumo é excelente medidor de variação de dados, e que poderia ser trabalhado como conceito estatístico fundamental para variabilidade na EB.

O desvio padrão sofre uma generalização semelhante; muitas vezes ele é associado a uma medida que melhor interpreta qualquer tipo de distribuição que apresente variação acentuada dos dados. Porém, Moore; Notz; Fligner (2017) e Bussab e Morettin (2010) afirmam que essa medida, tal como a média, é afetada acentuadamente por valores extremos. Portanto, conforme estes autores, o desvio padrão é apropriado para medir variabilidade de dados, cuja distribuição é simétrica, conhecidas como distribuições normais.

Até aqui, neste capítulo, apresentamos as análises prévias desta pesquisa, cuja finalidade foi de fundamentar as próximas fases da engenharia didática aqui adotada. No capítulo a seguir, trataremos de nossa SD, bem como das atividades elaboradas para o ensino de medidas de variação estatística no ensino médio, das análises *a priori* e *a posteriori* e da validação de nosso produto.

¹¹ Moore; Notz; Fligner (2017, p.44) Quartil é uma medida que delimita a metade central de uma distribuição de dados.

4 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo, apresentamos a Sequência Didática construída para o ensino de Medidas de Variação. Para verificação das potencialidades desse produto, e, conforme a estrutura da Engenharia Didática, apresentamos a seguir: a análise *a priori*; como se deu a experimentação; o tratamento de dados; a análise *a posteriori*; e a validação de nosso constructo.

4.1 ANÁLISE A PRIORI

A seguir, realizamos a construção e a análise *a priori* da sequência didática para o ensino de Medidas de Variação Estatística no Ensino Médio, bem como a apresentação de suas atividades. Seu desenvolvimento ocorre sob os fundamentos descritos nas seções anteriores. A organização de nossa SD segue os passos metodológicos da Engenharia Didática.

Definimos um total de três atividades. A primeira objetiva mostrar que a variação dos dados possibilita comparar distribuições quando as médias são iguais. A segunda pretende mostrar que o conceito de desvio possibilita medir a variação dos dados. Por fim, a terceira tem como objetivo mostrar que os desvios de uma amostra podem ser representados por um único número e conceituar a medida de variação. De maneira geral, as habilidades e competências desenvolvidas em nossa sequência didática são:

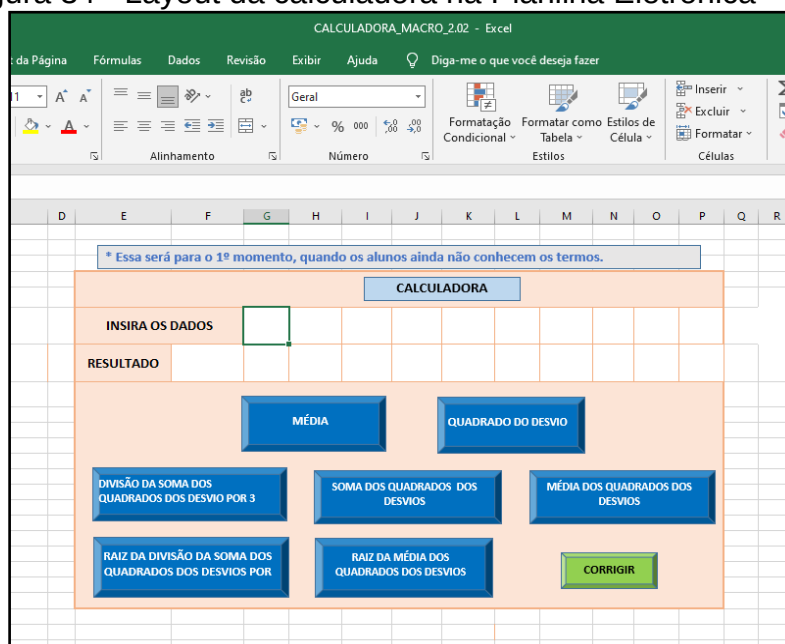
Quadro 8- Habilidades e Competências desenvolvidas

COMPETÊNCIA	HABILIDADES
Letramento	Organizar, coletar e interpretar dados a partir de tabelas ou gráficos.
Raciocínio	Compreender a significação de outro conceito (desvio, por exemplo) a partir da interpretação dos dados contidos em tabelas ou gráficos e estender os conceitos neles envolvidos aos processos de obtenção (cálculos e/ou procedimentos).
Pensamento	Compreender o conceito de variação e o de suas medidas, bem como relacioná-los, a partir dos conceitos e significados envolvidos na interpretação dos dados representados em tabelas ou gráficos, dentro de um contexto real vivido pelo aluno.

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Cada uma das atividades exigirá que o aluno determine valores que necessitam de cálculos. Porém, como recurso didático adota-se como calculadora a planilha eletrônica¹², conforme exposto na figura 34, como facilitador no processo de aprendizagem, haja vista que o foco da atividade é desenvolver a linguagem matemática e o pensamento estatístico que envolve o objeto matemático Medidas de Variação.

Figura 34 - Layout da calculadora na Planilha Eletrônica



Fonte: Recurso didático Sequência Didática (2021)

Assim, as atividades de nossa Sequência Didática não obrigam o aluno a efetuar os cálculos, entretanto, exigimos que eles executem todas as etapas que o desenvolvimento do cálculo envolve, conforme Triola (1998). Isto é, para determinar a média, por exemplo, exige-se que o aluno: 1) apresente a fórmula; 2) realize as substituições; e 3) apresente o resultado obtido a partir da planilha. De modo análogo, deverá ocorrer com as demais solicitações que requisitam fórmulas.

Nossa expectativa foi de que cada uma das duas primeiras atividades durassem uma aula de 45 min, e que a terceira e última, durasse até duas aulas de 45 min, totalizando 90 min.

¹² Disponível em:
<https://drive.google.com/file/d/1byx70wFIWK_XhdVa_ioFBWFrcvOLbGxX/view?usp=sharing>.

Ao apresentarmos cada atividade (disponíveis na íntegra nos apêndices B e C) fazemos a análise *a priori* de como deveria ocorrer o processo de sua experimentação. Isto tudo, a fim de inferir as abordagens do professor ao longo do processo, explorar a capacidade dos estudantes em realizar representações semióticas internas e externas, bem como sua capacidade de raciocínio, análise e visualização.

4.1. 1 Atividade 1

Esta atividade está de acordo com o letramento e o raciocínio estatístico. Ela objetiva promover a visualização e análise da variação dos dados, o que possibilita realizar comparações das distribuições quando as médias são iguais.

Nesta atividade deve ser evidenciada a insuficiência da média, o que torna necessário retornar a média como conhecimento prévio. Sobretudo, nas questões 4 e 5, é explorado o exercício da formação, tratamento e conversão de representações externas com gráficos e tabelas, bem como as representações mentais realizadas a partir das respostas da questão 5.

Sendo desenvolvida preferencialmente em grupo, deve-se estimular a interação entre os estudantes. Além disso, o professor deve instigá-los a externalizarem suas dúvidas, para verificar quais dificuldades podem estar impedindo o andamento da atividade.

4. 1. 2 Atividade 2

Esta atividade comporta tanto o letramento estatístico quanto a conversão do objeto desvio de um registro em linguagem natural, passando por um registro gráfico e outro registro tabular, até chegar no registro algébrico (fórmula). É a mobilidade de registros, conforme Duval (2006).

O estudante deve perceber que o conceito de desvio possibilita medir a variação dos dados e realizar uma análise qualitativa disso a respeito do que é financeiramente mais vantajoso. É importante perceber o custo cognitivo que houve em cada uma das representações utilizadas, e se foi possível visualizar em cada uma delas a variação dos dados.

4. 1. 3 Atividade 3

Esta atividade está dividida em três blocos, devido terem o mesmo objetivo: Mostrar que os desvios podem ser representados por um único número e conceituar medidas de variação. Envolve o raciocínio estatístico e a conversão do objeto (DAM, DP e Variância) de um registro em linguagem natural, passando por um registro gráfico e outro registro tabular, até chegar no registro algébrico (fórmula). É a mobilidade de registros, conforme Duval (2006).

Ao final de cada atividade e de cada bloco da atividade 3, é necessário estabelecer uma formalização (Apêndice D) de cada uma das expressões ou representações algébricas que definem cada um dos conceitos abordados, a fim de sintetizar os conhecimentos apreendidos.

4. 2 EXPERIMENTAÇÃO

Antes de explicarmos como se deu a experimentação da Sequência Didática apresentada, faz-se necessário esclarecer o contexto que nos foi possível realizá-la. Considerando o contexto de pandemia por COVID-19, que paralisou as aulas presenciais desde 2020 nas escolas públicas, onde desenvolvemos nossas atividades docentes, só retomamos nossas atividades presenciais no segundo semestre de 2021. Assim, conseguimos realizar a experimentação de nosso constructo em janeiro de 2022, ao final da 4ª avaliação escolar.

Com a autorização da gestão da escola, realizamos nossa pesquisa experimental em uma escola pública estadual do município de Belém-PA, com uma turma regular do 3º ano do Ensino Médio. Os estudantes tiveram sua participação autorizada por meio de assinatura de um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TECLE).

Participaram do experimento 26 estudantes divididos em 4 grupos com 5 alunos e 2 grupos com 3 alunos. Para preservar o anonimato dos participantes foram codificadas suas identificações da seguinte forma:

Quadro 9 - Identificação dos Sujeitos da Experimentação.

Grupo	Grupo A		Grupo B		Grupo C		Grupo D		Grupo E		Grupo F	
Identificação Dos sujeitos	A1,	A2,	B1,	B2,	C1,	C2,	D1,	D2,	E1,	E2,	F1,	F2,
	A3,	A4,	B3,	B4,	C3,	C4,	D3,	D4,	E3		F3	
	A5		B5		C5		D5					

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Todos os estudantes receberam o material do aluno impresso disponível no Apêndice B. Entretanto, por falta de um laboratório de informática na escola, a calculadora em planilha eletrônica foi acessada em um notebook que os sujeitos acessavam durante o experimento. Ao todo foram 2 encontros de 2 h/a de 45 min, totalizando 3h de tempo, sendo que no último encontro também foi aplicado um pós-teste para verificação de aprendizagem.

4. 3 ANÁLISE A POSTERIORI

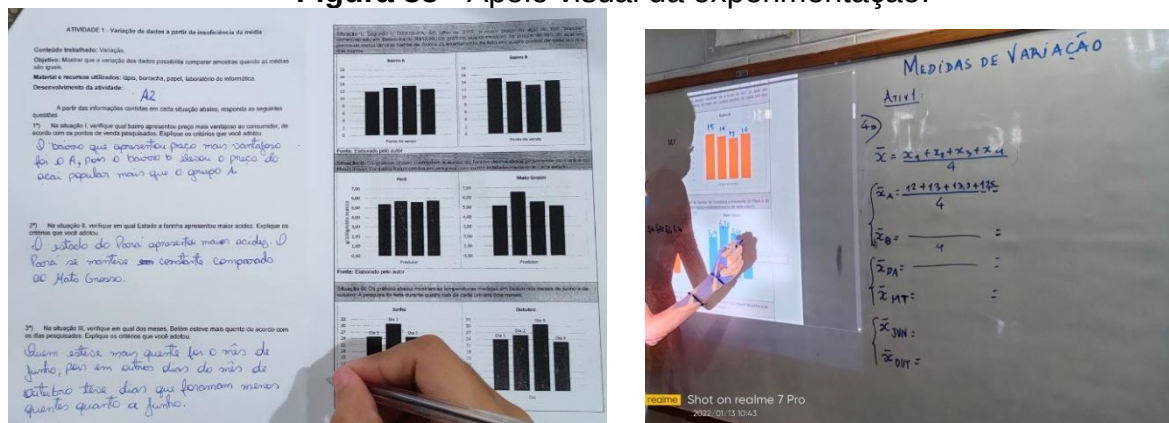
Após a experimentação foram recolhidos os registros escritos dos educandos no material impresso. Tendo em vista o embasamento teórico de nosso constructo, foi selecionado para análise os registros onde se verificou indícios de aprendizagem nas representações matemáticas utilizadas pelos educandos. Os registros em língua natural também foram coletados para análise de representações discursivas.

A seguir, apresentam-se as análises dos registros de representação adotados pelos sujeitos participantes da fase experimental de nossa pesquisa.

4. 3.1 Atividade 1

A atividade 1, aplicada no dia 13 de janeiro de 2022, objetivou mostrar que a variação dos dados possibilita comparar distribuições quando as médias são iguais. A análise dos gráficos apresentados que ilustram temas regionais como temperatura e venda de açaí e farinha sobre a venda de açaí nos bairros do município de Belém-PA. Apresentamos a seguir as respostas sobre as quatro perguntas da atividade 1 feita por diferentes educandos, para ilustrar como se deu o processo de construção de conhecimentos. Para essa atividade, foram usados também lousa e projetor de imagens, a fim de facilitar as discussões durante a execução de atividades.

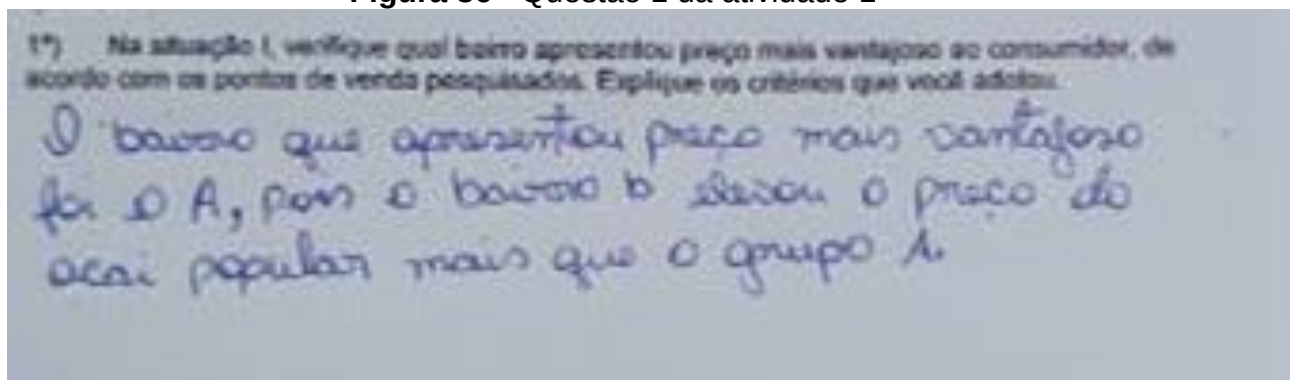
Figura 35 - Apoio visual da experimentação.



Fonte: Dados da experimentação (2022)

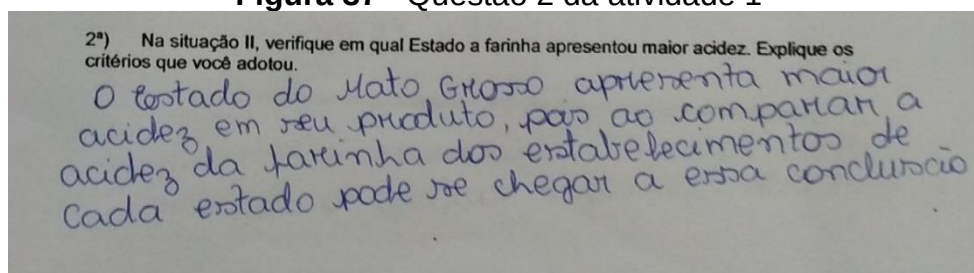
A imagem à direita, na figura 35, mostra o momento em que tratamos de assuntos prévios, especialmente a média. Já nas figura 36, 37, 38 e 40, percebemos que as respostas dos sujeitos, A2, C5 e D1, satisfazem a leitura e interpretação de informações estatísticas, básicas (texto escrito e em tabulação), isto é, a competência letramento estatístico, conforme Sabbag, Garfield e Zieffler (2018).

Figura 36 - Questão 1 da atividade 1



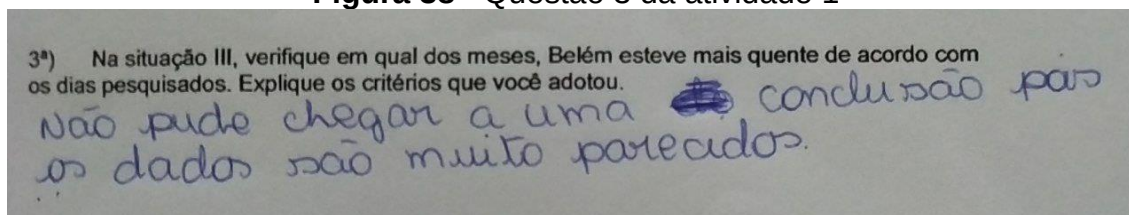
Fonte: Registro do Sujeito A2

Figura 37 - Questão 2 da atividade 1



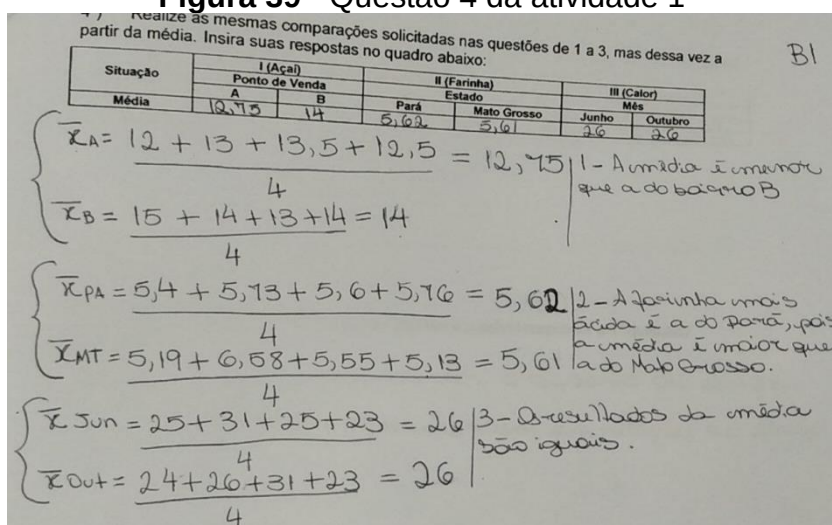
Fonte: Registro do Sujeito C5

Figura 38 - Questão 3 da atividade 1



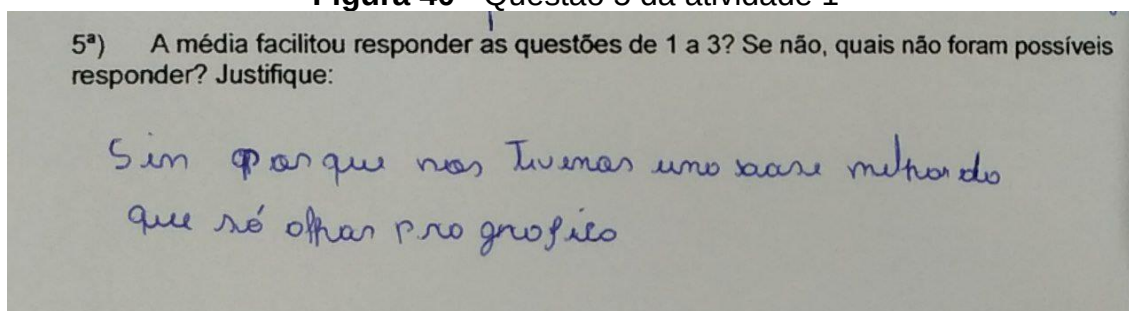
Fonte: Registro do Sujeito C5

Figura 39 - Questão 4 da atividade 1



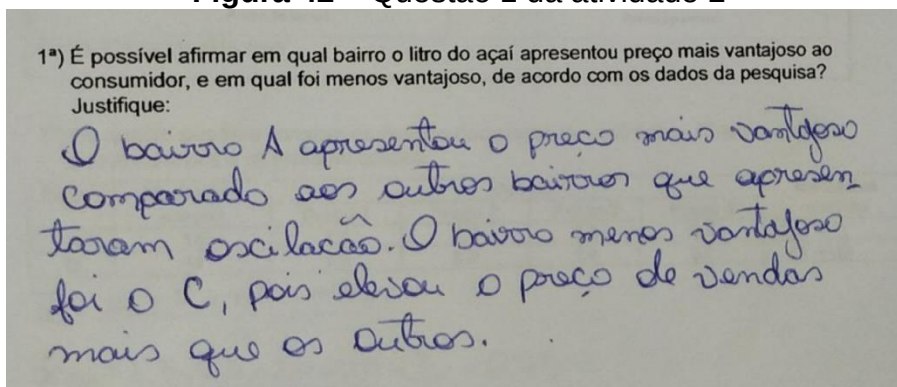
Fonte: Registro do Sujeito B1

Figura 40 - Questão 5 da atividade 1



Fonte: Registro do Sujeito D1

Assim, observamos nas figuras de números 36 ao 40, que os sujeitos demonstraram capacidade de ler dados expressos em gráficos de colunas simples, bem como comparar informações de pesquisas apresentadas por meio de gráficos para compreensão da realidade e tomada de decisão sobre o preço mais vantajoso, por exemplo.

Figura 42 – Questão 1 da atividade 2

Fonte: Registro do Sujeito D1

A figura 42 ilustra que na execução da atividade 2 os sujeitos foram capazes de interpretar dados estatísticos apresentados em textos, tabelas e gráficos (colunas ou linhas), referentes a outras áreas do conhecimento ou a outros contextos, com o objetivo de sintetizar conclusões. Aqui, há semelhante resultado observado por Moreno (2010), que tratamos na seção 3.2.1. Este autor, na tarefa 20, identifica uma aluna que atentou para a variação dos dados e não para os seus valores, conforme o autor esperava. Contudo, ele concordou com a observação da aluna.

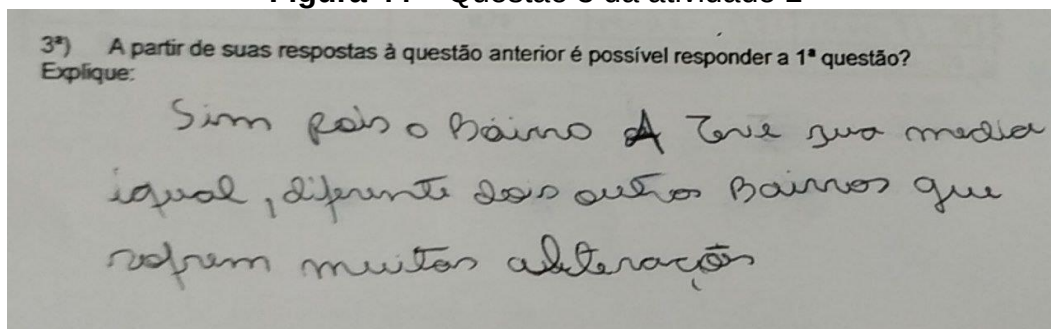
Figura 43 – Questão 2 da atividade 2

2ª) No quadro abaixo, preencha o quanto cada preço é igual, está acima, ou está abaixo da média dos preços pesquisados para cada bairro:

Bairro	Média	Preço 1	Preço 2	Preço 3
A	12	IGUAL	IGUAL	IGUAL
B	12	2 abaixo	2,5 acima	0,5 abaixo
C	12	3,5 abaixo	4 acima	0,5 abaixo

Fonte: Registro do Sujeito E3

A figura 43 indica que os sujeitos compreenderam o significado de média estatística como indicador da tendência de uma pesquisa, calcular seu valor e relacioná-lo, intuitivamente, à amplitude do conjunto de dados, chegando ao conceito pré-formal do desvio padrão.

Figura 44 – Questão 3 da atividade 2

Fonte: Registro do Sujeito A1

A figura 44 demonstra que os sujeitos interpretaram e resolveram situações que envolveram dados de pesquisas sobre contextos como consumo responsável, apresentadas em tabelas e em diferentes tipos de gráficos, além de redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões.

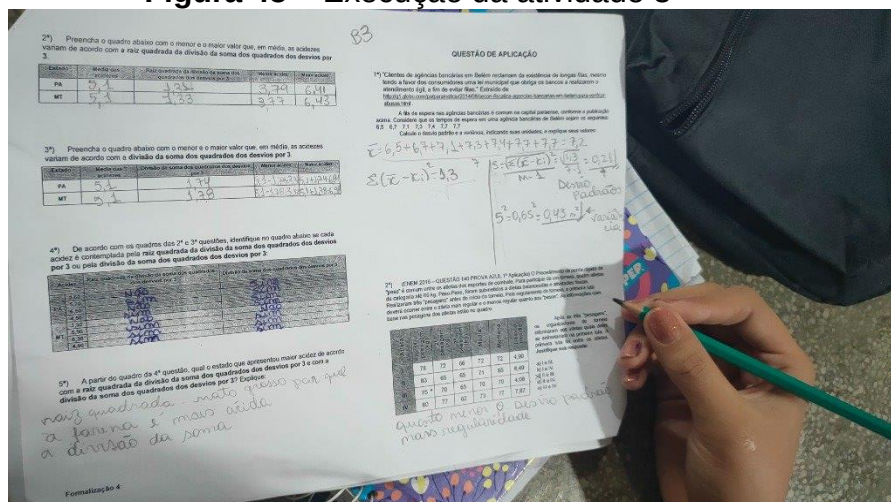
Os resultados nessa atividade assemelham-se aos obtidos por Lutz (2012), mostrados na seção 3.2.1 de nossa pesquisa. Em sua quarta aula, na atividade 5, Lutz (2012) dispôs uma tabela (figura 14), e pediu aos alunos a construção de gráficos. O autor também obteve as conversões esperadas.

Na execução da atividade houve a conversão da representação gráfica para a representação tabular. Essa conversão indica que os sujeitos desenvolveram uma função cognitiva de processamento matemático mais complexo que na atividade anterior, de modo a relacionar o significado de média Estatística, calcular seu valor e relacioná-lo, intuitivamente, com a amplitude do conjunto de dados. Assim, conforme Sabbag, Garfield e Zieffler (2018), ao ocorrer associação entre dois conceitos estatísticos, há indício da competência raciocínio estatístico.

4. 3. 3 Atividade 3

A atividade 3 foi a mais longa, pois apresenta-se dividida em 2 blocos de questões, conforme os tipos de medidas de variação. Foi aplicado no segundo dia de experimentação, com objetivo de mostrar que os desvios de uma amostra podem ser representados por um único número, além de conceituar a medida de variação.

Figura 45 – Execução da atividade 3



Fonte: Dados da experimentação

BLOCO I

Este bloco está voltado para à construção do conceito de desvio absoluto médio (DAM). A importância deste conceito está na relação entre a média e os desvios de uma distribuição de dados. A partir da percepção desta relação, há o primeiro momento em que se pode representar a variação dos dados por um único número. As questões a seguir foram elaboradas objetivando essa construção.

Figura 46 – Questão 1 – Atividade 3 – Bloco I

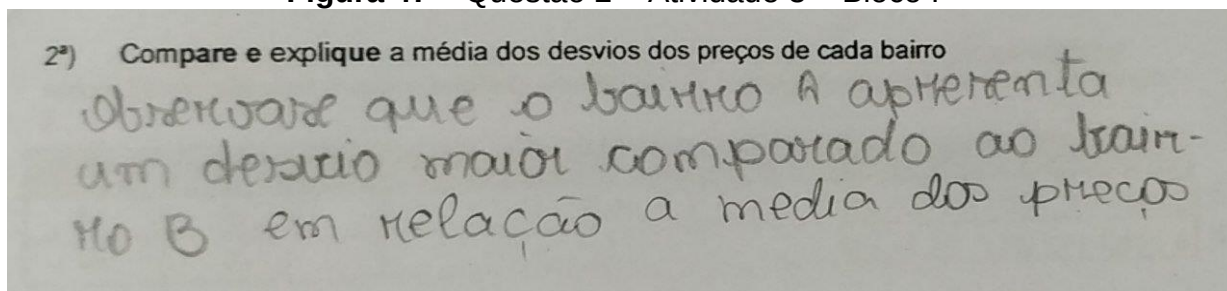
1ª) No quadro seguinte constam os desvios dos preços de cada bairro. Obtenha a média desses desvios e os insira no quadro:

Bairro	Media dos preços	Desvio				Media dos desvios
		Preço 1	Preço 2	Preço 3	Preço 4	
A	14	1,5	0,5	1,0	0,0	0,175
B	14	1,0	0,0	1,0	0,0	0,5

$$x_A = \frac{1,5 + 0,5 + 1,0 + 0,0}{4} = 0,175$$

$$x_B = \frac{1,0 + 0,0 + 1,0 + 0,0}{4} = 0,5$$

Fonte: Registro do Sujeito F3

Figura 47 – Questão 2 – Atividade 3 – Bloco I

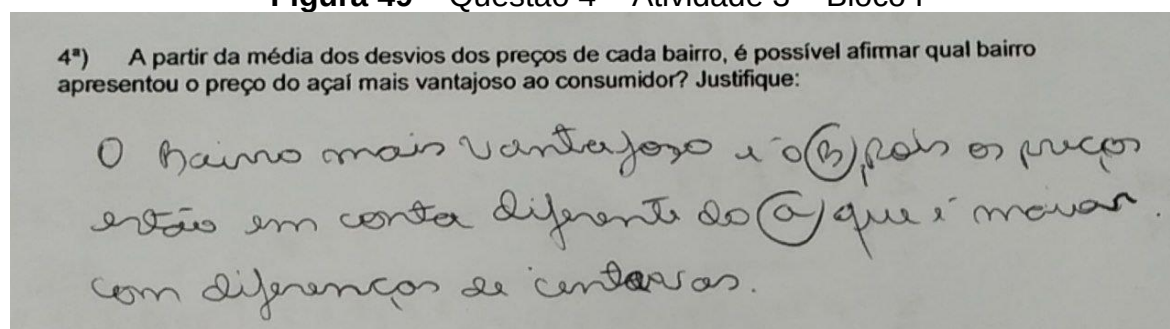
Fonte: Registro do Sujeito C5

Figura 48 – Questão 3 – Atividade 3 – Bloco I

3ª) Preencha o quadro abaixo com o menor e o maior valor que, em média, os preços variam de acordo com a média dos desvios.

Bairro	Media dos preços	Media dos desvios	Menor preço	Maior preço
A	14	0,75	$14 - 0,75 = 13,25$	14,75
B	14	0,50	$14 - 0,50 = 13,50$	14,50

Fonte: Registro do Sujeito B2

Figura 49 – Questão 4 – Atividade 3 – Bloco I

Fonte: Registro do Sujeito A1

Nas figuras de 46 a 49 observamos que os sujeitos desenvolveram funções cognitivas multifuncionais, tais como comunicação e conscientização, além da algorítmica. Deste modo, conclui-se que os sujeitos foram capazes de comunicar os resultados por meio da língua natural e da observação adequada de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos, calculados por meio de apoio de calculadora da planilha eletrônica.

Assim, os sujeitos indicaram compreender o conceito de desvio e seu significado relacionando-o com a dispersão de dados, indicada pela amplitude.

BLOCO II

Já, neste bloco, apresenta-se a compreensão das principais medidas de variação: desvio padrão; e variância. As questões estão organizadas objetivando-se identificar os elementos de cálculo, a relação com a medida anterior (DAM), e a formatação da fórmula de cada medida.

Figura 50 – Questão 1 – Atividade 3 – Bloco II

1*) Obtenha os quadrados dos desvios das acidez, a raiz quadrada da divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3 e a divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3. Faça isso para cada Estado, e preencha o quadro abaixo:

Estado	Acidez 1	Acidez 2	Acidez 3	Acidez 4	Quadrados dos desvios	Soma dos quadrados dos desvios	Raiz quadrada da divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3	Divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3
PA	2,75	0,36	2,75	0,36	5,22	1,319091	4,74	
MT	3,24	0,64	1,44	0,04	5,36	1,336663	4,78	

$PA = x = 3,6 + 5,7 + 6,6 + 4,5 = 5,1$
 $D1 = (x - x_1) = (5,1 - 3,6) = 2,25$
 $D2 = (x - x_2) = (5,1 - 5,7) = 0,76$
 $D3 = (x - x_3) = (5,1 - 6,6) = 2,25$
 $D4 = (x - x_4) = (5,1 - 4,5) = 0,36$
 $Soma PA = 5,22$
 $MT = x = 3,3 + 1,6 + 4,9 = 5,1$
 $D1 = (5,1 - 3,3) = 3,24$
 $D2 = (5,1 - 5,9) = 0,64$
 $D3 = (5,1 - 6,3) = 1,44$
 $D4 = (5,1 - 4,5) = 0,04$
 $Soma MT = 5,36$

Fonte: Registro do Sujeito D5

Figura 51 – Questão 2 – Atividade 3 – Bloco II

2*) Preencha o quadro abaixo com o menor e o maior valor que, em média, as acidez variam de acordo com a raiz quadrada da divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3.

Estado	Média das acidez	Raiz quadrada da divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3	Menor acidez	Maior acidez
PA	5,1	4,74	3,78	6,22
MT	5,1	4,78	3,78	6,43

Fonte: Registro do Sujeito E3

Figura 52 – Questão 3 – Atividade 3 – Bloco II

3*) Preencha o quadro abaixo com o menor e o maior valor que, em média, as acidez variam de acordo com a divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3.

Estado	Média das acidez	Divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3	Menor acidez	Maior acidez
PA	5,1	1,74	5,1 - 1,74 = 3,36	5,1 + 1,74 = 6,84
MT	5,1	1,78	5,1 - 1,78 = 3,32	5,1 + 1,78 = 6,88

Fonte: Registro do Sujeito B3

Figura 53 – Questão 4 – Atividade 3 – Bloco II

4ª) De acordo com os quadros das 2ª e 3ª questões, identifique no quadro abaixo se cada acidez é contemplada pela **raiz quadrada da divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3** ou pela **divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3**:

Acidez		Raiz quadrada da divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3	Divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3
PA	3,60	NÃO	SIM
	5,70	SIM	SIM
	6,60	NÃO	SIM
	4,50	SIM	SIM
MT	3,30	NÃO	SIM
	5,90	SIM	SIM
	6,30	SIM	SIM
	4,90	SIM	SIM

Fonte: Registro do Sujeito C1

Figura 54 – Questão 5 – Atividade 3 – Bloco II

5ª) A partir do quadro da 4ª questão, qual o estado que apresentou maior acidez de acordo com a **raiz quadrada da divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3** e com a **divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3**? Explique:

Raiz quad.: MT
 Divi. da soma: MT

Os dados nos mostram ao calcular as raízes e dividir a soma dos quadrados o MT apresenta maior acidez.

Formalização 4:

Fonte: Registro do Sujeito F3

As figuras de 50 a 54 indicam que os sujeitos foram capazes de resolver problemas, em diferentes contextos, que envolveram cálculo e interpretação das medidas de tendência central e medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão). Deste modo, percebemos que os sujeitos adotaram linguagem estatística algébrica com boa desenvoltura aritmética, articulada com a linguagem gráfica estatística.

Sobre a estrutura de sequência didática, verificamos que a abordagem sobre o objeto de conhecimento Medidas de Variação levou os sujeitos à observação de sistematização padrões que permitiram estabelecer as generalizações matemáticas e as habilidades para as quais ela foi construída.

4. 3. 4 Pós-teste

Para uma melhor verificação de aprendizagem e de desenvolvimento de habilidades, relacionadas a dados estatísticos e Medidas de Variação, aplicamos um

pós-teste disponível no Apêndice D. Como os estudantes estiveram muito tempo sem aula e não haviam estudado o objeto de estudo, não fizemos análise de pré-teste, haja vista que o foco de nossa análise se deu em torno da qualidade do processor de ensino.

O resultado dos acertos dos 26 sujeitos está apresentado no quadro 10, sendo que são 2 questões, cada uma valendo 5 pontos, totalizando 10 pontos.

Quadro 10 – Resultado do Pós-teste

SUJEITO	QUESTÃO 1	QUESTÃO 2	TOTAL
A1	5	5	10
A2	2,5	5	7,5
A3	5	5	10
A4	0	0	0
A5	5	0	5
B1	0	0	0
B2	5	5	10
B3	2,5	5	7,5
B4	5	5	10
B5	2,5	5	7,5
C1	2,5	5	7,5
C2	5	5	10
C3	5	5	10
C4	0	5	5
C5	5	5	10
D1	5	5	10
D2	0	0	0
D3	5	5	10
D4	5	0	5
D5	5	5	10
E1	5	0	5
E2	5	5	10
E3	5	5	10
F1	2,5	5	7,5

F2	5	0	5
F3	5	0	5
MÉDIA GERAL DA TURMA			7,2

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Percebemos pelo apresentado no quadro 10 que, embora a experimentação tenha promovido uma aprendizagem colaborativa por meio da formação de grupos, houve sujeitos com resultados excelentes e outros com resultados insuficientes. Assim, a média geral da turma, de 7,2, indicou um bom desempenho pós experimentação.

Deste modo, consideramos a ocorrência de indícios de aprendizagem por meio da experimentação da Sequência Didática desenvolvida para o ensino de Medidas de Variação, sendo possível constatar que tal aprendizagem é verificada também pelo uso correto dos conceitos construídos e das representações matemáticas em diferentes níveis de complexidade.

Para uma melhor percepção dos resultados do Pós-teste ilustramos a seguir alguns registros das resoluções dos sujeitos nas figuras 55 e 56.

Figura 55 - Resolução da Questão 1 do Pós-teste.

1*) "Clientes de agências bancárias em Belém reclamam da existência de longas filas, mesmo tendo a favor dos consumidores uma lei municipal que obriga os bancos a realizarem o atendimento ágil, a fim de evitar filas." Extraído de <http://g1.globo.com/pa/para/noticia/2014/08/secon-fiscaliza-agencias-bancarias-em-belem-para-verificar-abusos.html>.

A fila de espera nas agências bancárias é comum na capital paraense, conforme a publicação acima. Considere que os tempos de espera em uma agência bancária de Belém sejam os seguintes: 6,5 6,7 7,1 7,3 7,4 7,7 7,7

Calcule o desvio padrão e a variância, indicando suas unidades, e explique seus valores:

$$\bar{x} = \frac{6,5 + 6,7 + 7,1 + 7,3 + 7,4 + 7,7 + 7,7}{7} = 7,2$$

$$\sum (\bar{x} - x)^2 = 1,3$$

a Variância e desvio mais do que a do desvio padrão

$$s = \sqrt{\frac{\sum (\bar{x} - x)^2}{n-1}}$$

$$s = \sqrt{\frac{1,3}{7-1}} = 0,46$$

$$s^2 = 0,65 = 0,43^2$$

variança

Fonte: Registro do Sujeito A1

Figura 56 - Resolução da Questão 2 do Pós-teste.

2ª) (ENEM 2016 – QUESTÃO 140 PROVA AZUL 1ª Aplicação) O Procedimento de perda rápida de "peso" é comum entre os atletas dos esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas da categoria até 66 kg, Peso-Pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas. Realizaram três "pesagens" antes do início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos "pesos". As informações com base nas pesagens dos atletas estão no quadro.

Atleta	1ª pesagem (kg)	2ª pesagem (kg)	3ª pesagem (kg)	Média	Mediana	Desvio padrão
I	78	72	66	72	72	4,90
II	83	65	65	71	65	8,49
III	75	70	65	70	70	4,08
IV	80	77	62	73	77	7,87

Após as três "pesagens", os organizadores do torneio informaram aos atletas quais deles se enfrentariam na primeira luta. A primeira luta foi entre os atletas. **Justifique sua resposta:**

a) I e III.
 b) I e IV.
☒ c) II e III.
 d) II e IV.
 e) III e IV

*quanto menor desvio padrão mais regular
 quanto maior desvio padrão menos regular*

Fonte: Registro do Sujeito E1

Verificou-se que os sujeitos foram capazes de resolver problemas em diferentes contextos, que envolveram cálculo e interpretação das medidas de tendência central e medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão), ao adotarem linguagem algébrica por meio da análise de gráficos e quadros, e ao analisarem informações necessárias para tomada de decisão.

As representações escritas em língua natural indicaram que os sujeitos realizaram argumentações verbais que expressaram o raciocínio por meio da observação de dados estatísticos e das generalizações realizadas durante a experimentação da SD.

4. 4 SÍNTESE DE RESULTADOS E VALIDAÇÃO

Nesta seção, destacamos alguns pontos dos resultados ora apresentados na experimentação de nossa sequência didática para o ensino de Medidas de Variação. Retomando-se a questão de pesquisa: Quais as contribuições que uma sequência didática baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, pode trazer

para o ensino de medidas de variação no EM? E o objetivo de pesquisa: investigar as contribuições de uma sequência didática desenvolvida para o ensino de Medidas de Variação com o uso de planilha Eletrônica e construída segundo Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Consideramos que as contribuições de nossa sequência didática foram de ordem pedagógica, metodológica, epistemológica e formativa, no sentido de que desenvolveu as habilidades e competências previstas no currículo de Matemática da Educação Básica, bem como apresentou uma metodologia de planejamento de aulas de matemática por meio de Sequências Didáticas.

A metodologia de pesquisa adotada, Engenharia Didática, mostrou-se eficiente como estruturante para pesquisa na área de Educação Matemática, trazendo uma visão mais profunda sobre a epistemologia do objeto matemático e uma investigação mais minuciosa sobre as dificuldades e necessidades cognitivas dos educandos. Sobre a adoção da Teoria dos Registros e Representações Semióticas, tratando-se do objeto matemático Medidas de Variação, agregou outros olhares mais sutis sobre o objeto, bem como maneiras de reconhecer o raciocínio e construção de conhecimentos do educando.

Entretanto, com relação ao uso de planilha eletrônica, enfatizamos a carência formativa de professores e infraestrutural das escolas da rede pública, no sentido de fomentar o uso mais efetivo de recursos tecnológicos no ensino de matemática, o que se torna um limitador em sua plena aplicação. Assim, em nossa pesquisa, demonstramos a relevância de se investir em recursos didáticos com ou sem uso de tecnologia, que possam favorecer e otimizar o fazer pedagógico do professor de Matemática.

De maneira geral, o tema que envolve o pensamento e letramento estatístico agrega outras ferramentas de avaliação de apreensão de conhecimentos. Deste modo, consideramos válida a sequência didática construída para o Ensino de Medidas de Variação. Entendemos, ainda, que possa ter desdobramentos de caráter científico e educacional para outras pesquisas de mesmo teor.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos os resultados de uma pesquisa de mestrado sobre Ensino de Medidas de Variação, realizada sob a estrutura da Engenharia Didática, em que construímos uma sequência didática baseada na Teoria dos Registros de Representação semiótica, e adotou-se como recurso didático uma calculadora criada em planilha eletrônica. Nessa pesquisa tivemos o objetivo de investigar as contribuições que a sequência didática traz para o ensino de Medidas de Variação com o uso de Planilha.

A baixa aprendizagem de Medidas de Variação é o condutor de nossa pesquisa. Consideramos que, dentre as diversas causas, as duas principais estão relacionadas à exigência de efetivação dos cálculos e uso das fórmulas, e ao ensino deficiente e despreocupado da construção do conceito de Medida de Variação. Mostramos que é importante o professor conhecer as competências da matriz curricular definida na BNCC, mas também deve estar familiarizado com as competências de letramento, de raciocínio e de pensamento estatísticos, conforme os princípios da Educação Estatística.

Preliminarmente, realizamos um estudo bibliográfico sobre o ensino e aprendizagem de Medidas de Variação e o objeto matemático. A partir de tal estudo, verificamos os objetivos de aprendizagem a serem desenvolvidos em nossa Sequência Didática, e que estivessem relacionados à compreensão de desvio, e ao conceito de medidas de variação. Nos utilizamos, para isso, da interpretação de dados contidos em tabelas e gráficos, desenvolvendo generalizações e procedimentos algorítmicos, bem como os registros de linguagem matemática e língua materna.

A experimentação do produto educacional deu-se em dois episódios didáticos, suficientes para validá-lo; são eles, desenvolvimento das atividades da sequência didática e aplicação do pós-teste. Quando foram realizadas as atividades, foi possível observar importantes contribuições nas falas de alguns alunos, confirmadas em seus registros escritos. Tal êxito confirma indícios de aprendizagem suficientes para concluirmos a validade de nossa sequência didática.

Além disso, o pós-teste, ao trazer aplicações contextualizadas sobre o objeto matemático, em questão, coadunou com os resultados observados nas atividades da sequência didática. A partir disso, também concluímos haver sinais de aprendizagem satisfatórios da aplicação de nosso produto, confirmando sua validação.

Diante do exposto, propomos o uso da Engenharia Didática, pois suas etapas contribuem tanto para a aplicação e construção de sequências didáticas, quanto para as análises necessárias ao desenvolvimento da pesquisa. Recomendamos também, aos pesquisadores de temas de quaisquer áreas da Matemática, a adotarem a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval, pois os processos cognitivos são melhor compreendidos a partir dos conceitos de conversões de registros de representações. A mesma observação vale aos professores, pois, entender como ocorrem as representações e as transformações para um ou mais conceitos matemáticos, facilita identificar as dificuldades de aprendizagem e planejar com mais segurança as aulas.

Há que se considerar, no entanto, algumas importantes dificuldades enfrentadas no seu desenvolvimento. Aos pesquisadores, sugerimos determinar que as atividades da sequência didática sejam breves e em número suficiente para a quantidade de aulas previstas, atentando-se para imprevistos. As atividades, em si, tendem a durar mais do que o esperado. Um dos efeitos disso, é a insatisfação e cansaço do aluno.

A experiência vivenciada no Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática mudou nossa conduta profissional no sentido de que nossa maneira de planejar nossa aula e de reconhecer os desafios e avanços de nossos educandos se tornou mais atenta e sistêmica. Assim, diante dos resultados positivos evidenciados na pesquisa, consideramos que o produto ora apresentado e experimentado é válido e potencial para o Ensino de Medidas de Variação, além de trazer outras contribuições para pesquisas futuras em Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática Matemática**. Curitiba. Ed UFPR, 2007. 218 p.
- ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 3, n. 1, p. 62-77, 2008.
- BARNETT, V.D. Comparative statistical inference. Wiley. Chicheste. 1973.
- BATANERO, C. **Didáctica de la Estadística**. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidade de Granada. 2001. 219 p.
- GODINO, J. D. y BATANERO, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. Sierpiska y J. Kilpatrick (Eds.), **Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity** (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.
- BORBA, R.; MONTEIRO, C.; GUIMARÃES, G.; COUTINHO, C.; KATAOKA. V. Educação Estatística no Ensino Básico: Currículo, pesquisa e prática em sala de aula. EM TEIA: **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v.2, 1 – 18, 2011.
- BRASIL.**Guia dos livros didáticos**: PNLD2012. Brasília: Secretaria da Básica. 2011.
- BRASIL. MEC/INEP. **Relatório do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB)** – ciclo 1990. Brasília, 2017.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. Ministérios da Educação. **Lei de diretrizes e Bases da Educação Brasileira**. Brasília: MEC/SEM, 1996.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática- ensino médio-Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEM, 1998.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**. Brasília, DF, 2018.
- BROUSSEAU, G. **Fundamentos e Métodos da Didactica Matemática**. In: BRUN, J. (Org.). Didáctica das Matemáticas. Trad. de MJF Lisboa: Instituto Piaget, p.35-113. 1996.

BUSSAB, W. O; MORETTIN, P. A.; **Estatística Básica**. 6ª edição. São Paulo: Saraiva, 2010.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas**: estrutura e elaboração. 104 p. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

CAMPOS, C. R. **A Educação estatística**: uma investigação acerca dos aspectos relevantes à didática da estatística em cursos de graduação. 2007. 242f. Tese (Doutorado em Educação) -Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2007.

CAZORLA, I. M.; CASTRO, F. C. **O papel da Estatística na leitura do mundo**: o letramento estatístico. Publ. UEPG Ci. Hum., Ci. Soc. Apl., Ling., Letras e Artes, Ponta Grossa, n.16, p.45-53, jun. 2008.

CHANCE, B. L. Components of statistical thinking and implications for instruction and assessment. **Journal of Statistics Education**, v. 10, n.3, 2002.

CHANCE, B., DELMAS, R., & GARFIELD, J. (2004). **Reasoning about sampling distributions**. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking (pp. 295-323). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

COLOMBO, J.A.A. **Representações semióticas no ensino**: contribuições para reflexões acerca dos currículos de Matemática Escolar. Florianópolis, 2008. 252 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Centro de Educação, Ciências Físicas, Biológicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina.

CORDANI, L. K. (2001). **O ensino da Estatística na Universidade e a controvérsia sobre os fundamentos da inferência**. Tese de Doutorado. São Paulo, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo.

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva; GIORDANO, Cassio Cristino. **Conhecimentos Prévios de alunos do Ensino Médio a respeito de Estocástica**: uma análise com o auxílio do software CHIC. Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online, v. 9, n. 2, 2019

DOLZ, Joaquim; NOVERRAZ, Michele; SCHNEUWLY, Bernard. Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento. . In: SCHNEUWLY, Bernard.; DOLZ, Joaquim. e colaboradores. **Gêneros orais e escritos na escola**. [Tradução e organização: Roxane Rojo e Gláís Sales Cordeiro]. Campinas-SP: Mercado de Letras, 2004.

DUVAL, R. 2006. A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, 61, pp. 103-131.

Duval R, Semiosis et Noesis. Préprint. 1993.

FERNANDES, J. D. C. **Introdução à semiótica**. In: ALDRIGUE, A. C. de S.; LEITE, J. E. R. (Org.). Linguagens: usos e reflexões. 1 ed. João Pessoa: Editora da UFPB, 2011, v. 8, p. 159-185.

GAL, Iddo. **Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities**. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 295-323). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 2004.

GARFIELD, J. **The statistical reasoning assessment: development and validation of a research tool**. In: *Proceedings of the fifth international conference on teaching statistics*, pp. 781-786, International Statistical Institute. Mendoza, Voorburg, Holanda: Ed. L. Pereira, 1998.

GODINO, J. D. y BATANERO, C. Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. Sierpiska y J. Kilpatrick (Eds.), **Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity** (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P. 1998.

INEP. **Relatório técnico do Sistema Nacional de Avaliação Básica - SAEB**, 2017. Brasília: INEP/Ministério da Educação, 2019

LOPES, C. A. E. **O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores**. Cad. Cedes, Campinas, v. 28, n. 74, p. 57-73, jan./abr. 2008.

LOPES, Celi E. A educação estocástica na infância. **Revista Eletrônica de Educação – UFSCar**, São Carlos, SP, v. 6, n. 1, p.160-174, maio 2012.

LUTZ, Mauricio Ramos. **Uma Sequência Didática para o Ensino de Estatística a Alunos do Ensino Médio na Modalidade PROEJA**. Porto Alegre: UFRGS, 2012. 151 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

MORENO, Marcelo Marcos Bueno. **Ensino e aprendizagem de estatística com ênfase na variabilidade: um estudo com alunos de um curso de licenciatura em matemática**. 2010. 157 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

MOORE, S.D.; NOTZ, W.I.; FLIGNER, A.M. **A Estatística Básica e sua prática**. Tradução: Ana Maria Lima. 7ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2017. POMMER, M. W. **A Engenharia Didática em sala de aula: elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares**. São Paulo, 2017.

RUMSEY, D. J. Statistical literacy as a goal for introductory statistics courses. **Journal of Statistics Education**, Alexandria, v. 10, n. 3, 2002. Disponível em: <<http://www.amstat.org/publications/jse/v10n3/rumsey2.html>>. Acesso em: 23 nov. 2019.

SABBAG, A., GARFIELD, J., and ZIEFFLER, A. (2018). Assessing statistical literacy and statistical reasoning: The REALI instrument. *Statistics Education Research Journal*, 17(2):141–160.

SANTAELLA, Lucia. **O que é semiótica?** 27. reimpr. da 1. ed. de 1983. v. 103. São Paulo: Brasiliense, 2008b. (Coleção Primeiros Passos).

SANTAELLA; NÖTH, Winfried. **Imagem**: cognição, semiótica, mídia. SP: Iluminuras. 1998.

SILVA, C. B. **Pensamento estatístico e raciocínio sobre variação**: um estudo com professores de matemática. São Paulo, 2007. 354. f. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica, 2007.

TRIOLA, M.F. **Introdução à Estatística**. 7ª edição. Rio de Janeiro: LTC Editora, 1998.

VIEIRA, Márcia. **Análise exploratória de dados: uma abordagem com alunos do ensino médio**. 2008. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

WALICHINSKI, D.; SANTO JUNIOR, G.; ISHIKAWA, E. C. M. Educação estatística e parâmetros curriculares nacionais: algumas considerações. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 7, n. 3, 2014.

WILD, C.; PFANNKUCH, M. Statistical Thinking in Empirical Enquiry. **International Statistical Review**, Auckland, v. 67, n. 3, p. 223-265, 1999.

WILD, C.; PFANNKUCH, M. (2004). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), **The Challenge of developing statistical literacy**, reasoning, and thinking (pp. 295-323). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar; tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998. 224 p.

APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA – PROFESSOR

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

SEQUÊNCIA DIDÁTICA
O ENSINO DE MEDIDAS DE VARIAÇÃO COM USO DE PLANILHA
ELETRÔNICA

Wallace do Carmo Muniz
Cinthia Maradei Pereira
Acylena Coelho Costa

Belém- PA

2022

ATIVIDADE 1 - Variação de dados a partir da insuficiência da média

Conteúdo trabalhado: Variação.

Objetivo: Mostrar que a variação dos dados possibilita comparar amostras quando as médias são iguais.

Material e recursos utilizados: lápis, borracha, papel, laboratório de informática.

Desenvolvimento da atividade:

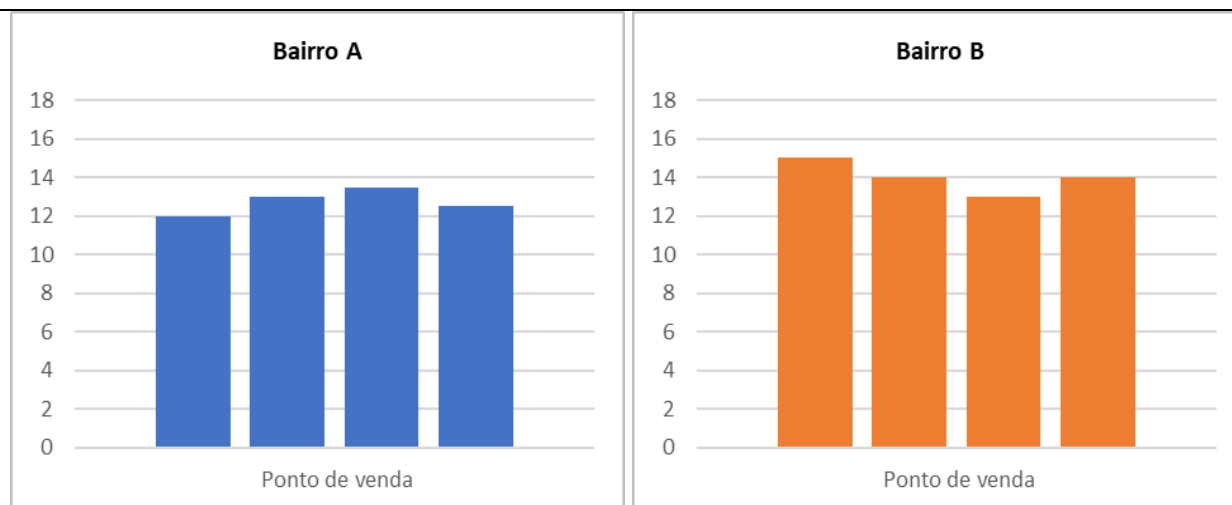
A partir das informações contidas em cada situação abaixo, responda as seguintes questões

1ª) Na situação I, verifique qual bairro apresentou preço mais vantajoso ao consumidor, de acordo com os pontos de venda pesquisados. Explique os critérios que você adotou.

2ª) Na situação II, verifique em qual Estado a farinha apresentou maior acidez. Explique os critérios que você adotou.

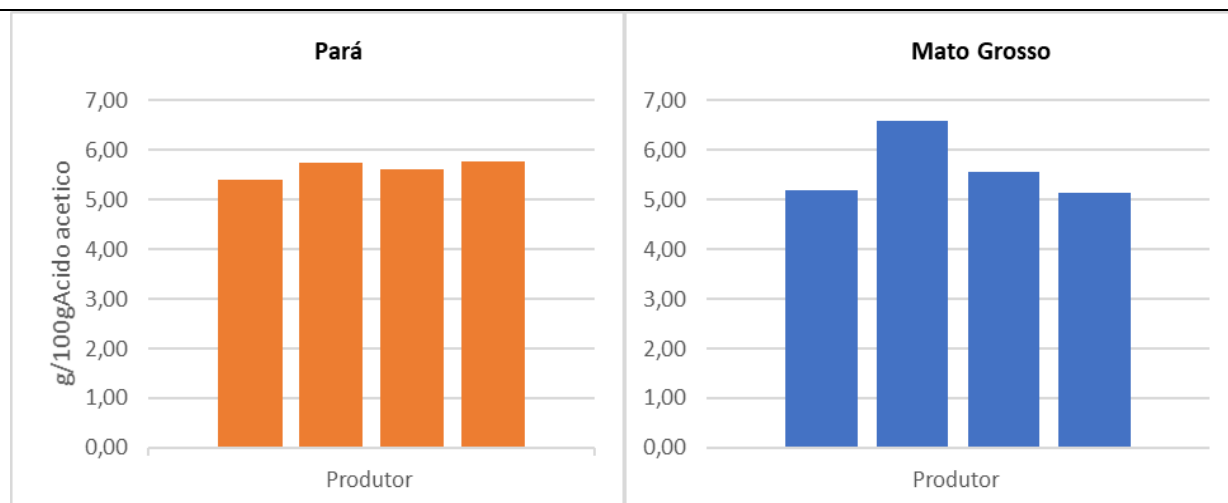
3ª) Na situação III, verifique em qual dos meses, Belém esteve mais quente de acordo com os dias pesquisados. Explique os critérios que você adotou.

Situação I: Segundo o DIEESE-PA, em julho de 2018, o maior preço do açaí do tipo “popular” comercializado em Belém foi de **R\$12,00**. Os gráficos abaixo mostram os preços do litro do açaí em pontos de venda de dois bairros de Belém. O levantamento foi feito em quatro pontos de cada um dos dois bairros.



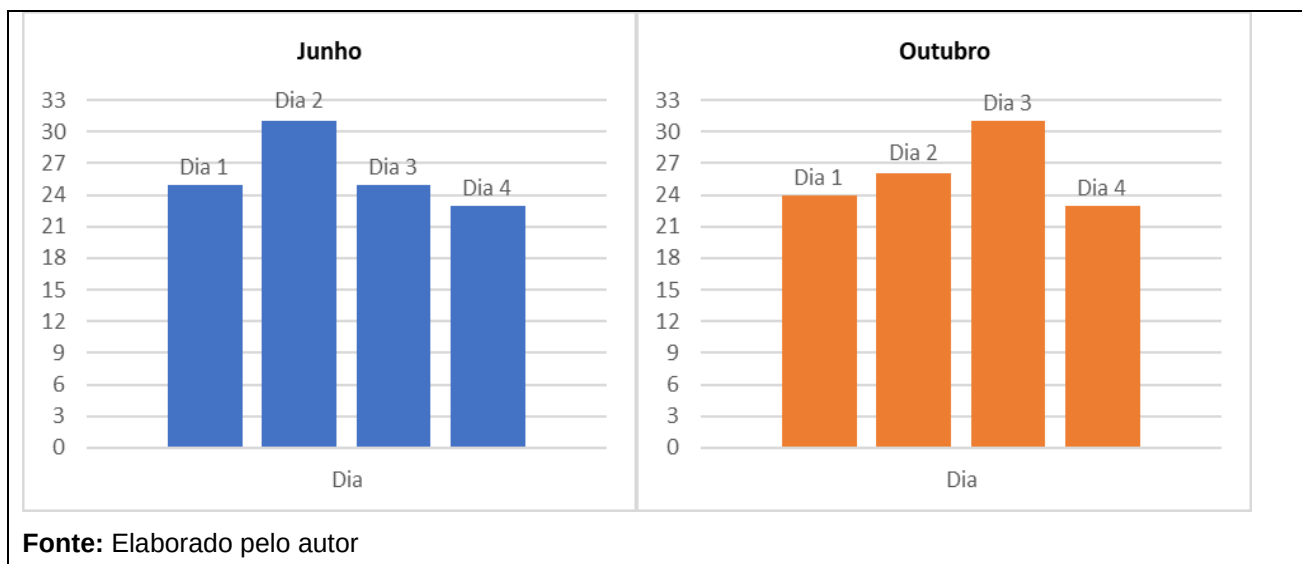
Fonte: Elaborado pelo autor

Situação II: Os gráficos abaixo confrontam a acidez da farinha de mandioca proveniente do Pará e do Mato Grosso. Os dados foram obtidos em pesquisa com quatro estabelecimentos de cada estado.



Fonte: Elaborado pelo autor

Situação III: Os gráficos abaixo mostram as temperaturas medidas em Belém nos meses de junho e de outubro. A pesquisa foi feita durante quatro dias de cada um dos dois meses.



4ª) Realize as mesmas comparações solicitadas nas questões de 1 a 3, mas dessa vez a partir da média. Insira suas respostas no quadro abaixo:

Situação	I (Açaí)		II (Farinha)		III (Calor)	
	Ponto de Venda		Estado		Mês	
	A	B	Pará	Mato Grosso	Junho	Outubro
Média						

5ª) A média facilitou responder as questões de 1 a 3? Se não, quais não foram possíveis responder? Justifique:

FORMALIZAÇÃO

A média nem sempre possibilita decidirmos qual amostra é mais adequada em determinada situação, como nos casos em que as médias são iguais para mais de duas amostras. Nesses casos, a variação dos dados pode ajudar a decidir. Porém, se ela for associada a um número, possibilitará uma melhor comparação entre as amostras.

ATIVIDADE 2 – Desvio e a medida de variação

Conteúdo trabalhado: Desvio

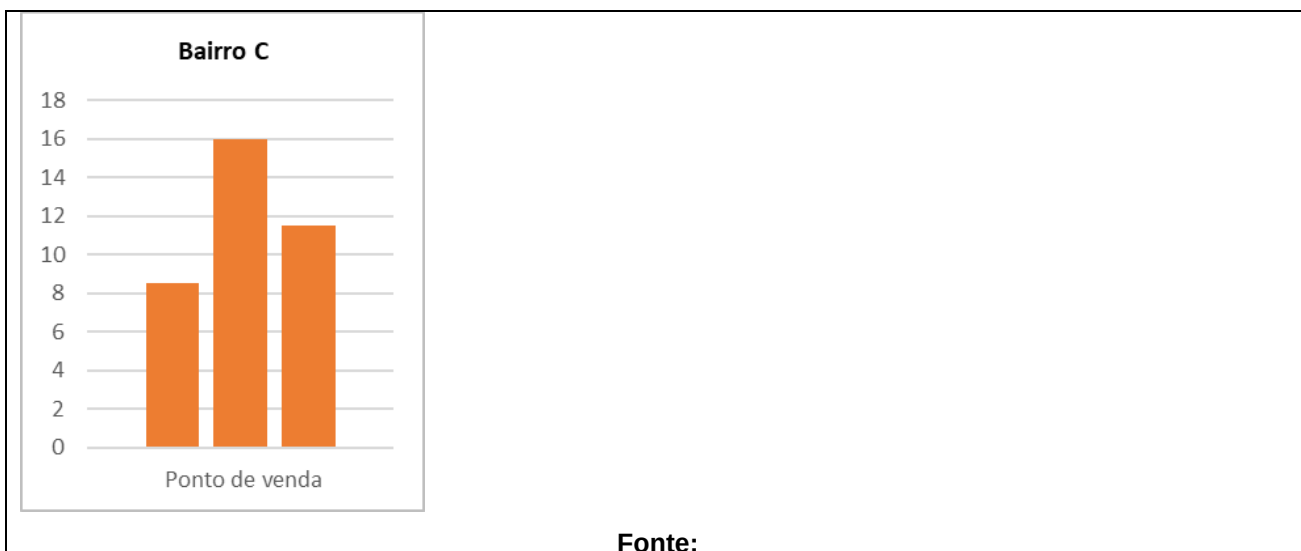
Objetivo: Conceituar desvio e mostrar que ele possibilita medir a variação dos dados de uma amostra.

Material e recursos utilizados: lápis, borracha, papel, laboratório de informática.

Desenvolvimento da atividade:

Situação: Segundo o DIEESE-PA, o maior preço do açaí do tipo médio comercializado em Belém, em 2018, foi de **R\$12,00** no mês de julho. Os gráficos abaixo mostram o resultado do levantamento dos preços do litro do açaí em três pontos de venda de três bairros da capital paraense.





A partir das informações contidas na situação abaixo, responda as seguintes questões:

1ª) É possível afirmar em qual bairro o litro do açaí apresentou preço mais vantajoso ao consumidor, e em qual foi menos vantajoso, de acordo com os dados da pesquisa? Justifique:

2ª) No quadro abaixo, preencha o quanto cada preço é igual, está acima, ou está abaixo da média dos preços pesquisados para cada bairro:

Bairro	Média	Preço 1	Preço 2	Preço 3
A				
B				
C				

3ª) A partir de suas respostas à questão anterior é possível responder a 1ª questão? Explique:

FORMALIZAÇÃO

A diferença entre um dado e outro é denominada variação ou dispersão. Já a diferença (afastamento) entre um dado(x_i) da amostra e a média($\bar{x}$) é denominada **Desvio (D)**

$$D = x - \bar{x}$$

Como o desvio pode ser negativo, modulamos a diferença para ter seu **valor absoluto**, ou seja, sempre positivo. Assim:

$$D = |\bar{x} - x_i|$$

* Pode-se relacionar cada dado de uma amostra com a média deles, a partir do desvio. Evita-se, portanto, com

parar os dados entre si, o que gera muitas combinações.

* Para tentar responder à pergunta foi preciso observar mais de um valor (os desvios abaixo e acima da média). Para amostras com mais dados, fazer tal análise pode ser inviável. Portanto, os desvios precisam ser associados a um único número, definido como

ATIVIDADE 3 – As medidas de variação

Conteúdo trabalhado: Desvio Absoluto Médio, Desvio Padrão e Variância

Objetivos: Mostrar que os desvios podem ser representados por um único número, permitindo conceituar as medidas de variação.

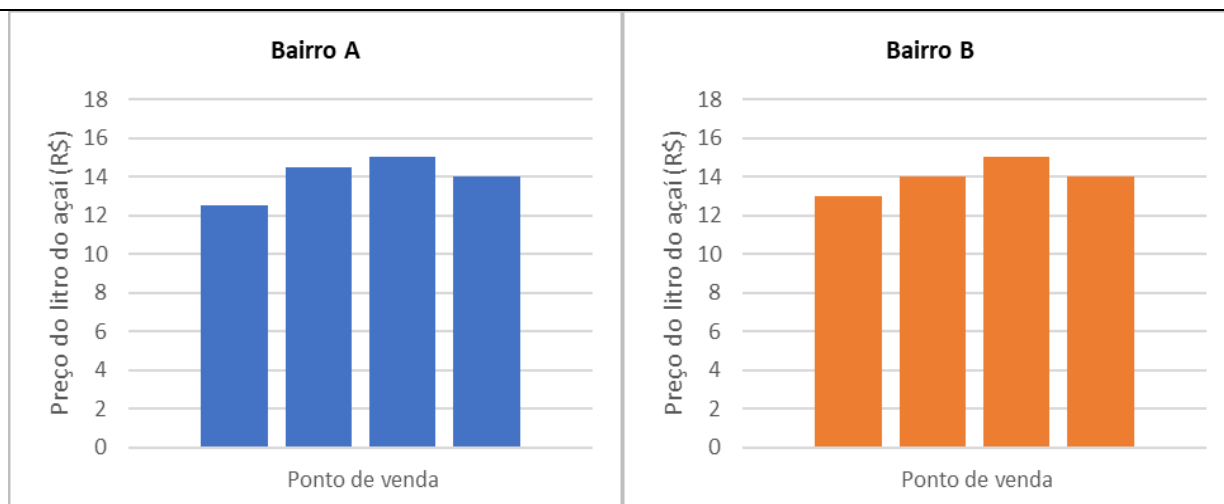
Material e recursos utilizados: lápis, borracha, papel, laboratório de informática.

Desenvolvimento da atividade:

Bloco I

A partir das informações contidas na situação I abaixo, responda as seguintes questões:

Situação I: Os gráficos abaixo mostram os preços do litro do açaí em pontos de venda de dois bairros de Belém. O levantamento foi feito em quatro pontos de cada um dos dois bairros.



Fonte: Elaborado pelo autor

1ª) No quadro seguinte constam os desvios dos preços de cada bairro. Obtenha a média desses desvios e os insira no quadro:

Bairro	Média dos preços	Desvio				Média dos desvios
		Preço 1	Preço 2	Preço 3	Preço 4	
A	14	1,5	0,5	1,0	0,0	
B	14	1,0	0,0	1,0	0,0	

2ª) Compare e explique a média dos desvios dos preços de cada bairro

4ª) Preencha o quadro abaixo com o menor e o maior valor que, em média, os preços variam de acordo com a média dos desvios.

Bairro	Média dos preços	Média dos desvios	Menor preço	Maior preço
A	14	0,75		
B	14	0,50		

5ª) A partir da média dos desvios dos preços de cada bairro, é possível afirmar qual bairro apresentou o preço do açaí mais vantajoso ao consumidor? Justifique:

FORMALIZAÇÃO

Desvio Absoluto Médio (DAM) ou simplesmente *Desvio Médio* é uma medida definida como a média dos desvios absolutos. Considerar os valores dos desvios apenas como positivos é consequência da propriedade dos desvios, na qual a soma dos desvios

sempre é nula, ou seja: $\sum_{i=1}^n (x - \bar{x}) = 0$

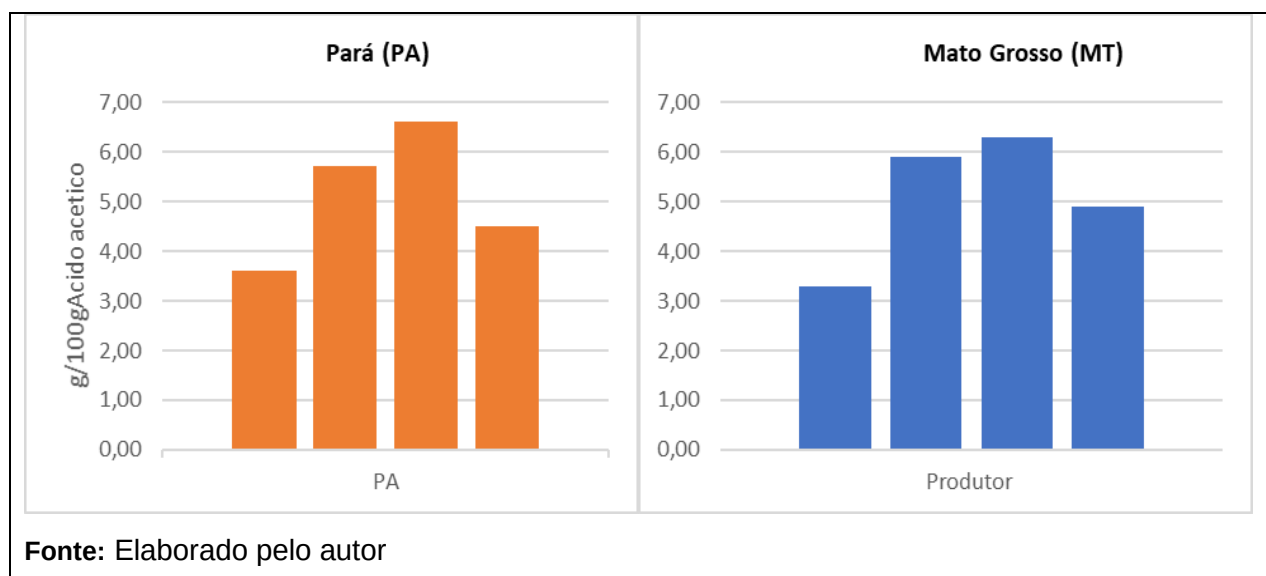
Assim, o **DAM** é obtido por:

$$\boxed{DAM = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n}}$$
 , sendo n a quantidade de dados da amostra

Bloco II

A partir das informações contidas na situação II abaixo, responda as seguintes questões:

Situação II: Os gráficos abaixo confrontam a acidez da farinha de mandioca proveniente do Pará e do Mato Grosso. Os dados foram obtidos em pesquisa com quatro estabelecimentos de cada estado.



6ª) Obtenha os **quadrados dos desvios das acidez**, a **raiz quadrada da divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3** e a **divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3**. Faça isso para cada Estado, e preencha o quadro abaixo:

Estado	Quadrados dos Desvios				Soma dos quadrados dos desvios	Raiz quadrada da divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3	Divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3
	Acidez 1	Acidez 2	Acidez 3	Acidez 4			
PA							
MT							

7ª) Preencha o quadro abaixo com o menor e o maior valor que, em média, as acidez variam de acordo com **a raiz quadrada da divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3**.

Estado	Média das acidez	Raiz quadrada da divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3	Menor acidez	Maior acidez
PA				
MT				

8ª) Preencha o quadro abaixo com o menor e o maior valor que, em média, as acidez variam de acordo com **a divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3**.

Estado	Média das acidez	Divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3	Menor acidez	Maior acidez
PA				
MT				

9ª) De acordo com os quadros das 2ª e 3ª questões, identifique no quadro abaixo se cada acidez é contemplada pela **raiz quadrada da divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3** ou pela **divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3**:

Acidez		Raiz quadrada da divisão da soma dos quadrados	Divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3
PA	3,60		
	5,70		
	6,60		

	4,50		
MT	3,30		
	5,90		
	6,30		
	4,90		

10ª) A partir do quadro da 4ª questão, qual o estado que apresentou maior acidez de acordo com a **raiz quadrada da divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3** e com a **divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3**? Explique:

FORMALIZAÇÃO

FORMALIZAÇÃO 4:

O **Desvio Padrão** é a mais importante das medidas de variação, e pode ser entendida como uma espécie de desvio médio. É indicado conforme o tipo de dados trabalhados, amostrais ou populacionais. Aqui, trataremos apenas dos amostrais. Assim, o *desvio padrão amostral* é indicado por s ;

O desvio padrão é definido como um conjunto de valores em torno da média, uma espécie de desvio médio dos valores em relação à média. Seu valor pode ser obtido por:

$$S = \sqrt{\frac{\sum(X - \bar{X})^2}{n-1}}$$

Passos para o cálculo de s :

Passo 1: calcule a média $\bar{x}$;

Passo 2: subtraia a média de cada valor individual para obter uma lista de desvios da forma $(X - \bar{X})$;

Passo 3: eleve ao quadrado cada uma das diferenças obtidas no Passo 2.

Isso resulta em números da forma $(X - \bar{X})^2$;

Passo 4: Adicione todos os quadrados obtidos no Passo 3. Esse é o valor de $\sum(X - \bar{X})^2$;

Passo 5: Divida o total do Passo 4 pelo número $(n-1)$, que é 1 unidade menor do que o total de valores presentes.

Passo 6: Ache a raiz quadrada do resultado do Passo 5

A **Variância** de um conjunto de dados é uma medida de variação igual ao quadrado do desvio padrão, indicado por s^2 . Assim: $S^2 = \frac{\sum(X - \bar{X})^2}{n-1}$

APÊNDICE B – SEQUÊNCIA DIDÁTICA – ALUNO

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

SEQUÊNCIA DIDÁTICA
O ENSINO DE MEDIDAS DE VARIAÇÃO COM USO DE PLANILHA
ELETRÔNICA

Wallace do Carmo Muniz
Cinthia Maradei Pereira
Acylena Coelho Costa

Versão do aluno

ATIVIDADE 1 - Variação de dados a partir da insuficiência da média

Conteúdo trabalhado: Variação.

Objetivo: Mostrar que a variação dos dados possibilita comparar amostras quando as médias são iguais.

Material e recursos utilizados: lápis, borracha, papel, laboratório de informática.

Desenvolvimento da atividade:

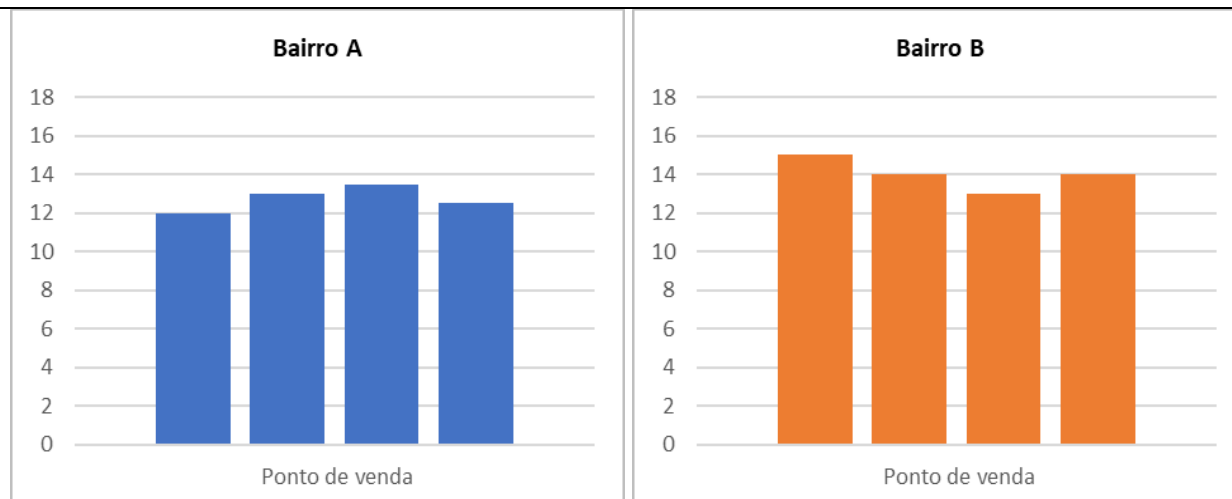
A partir das informações contidas em cada situação abaixo, responda as seguintes questões

1ª) Na situação I, verifique qual bairro apresentou preço mais vantajoso ao consumidor, de acordo com os pontos de venda pesquisados. Explique os critérios que você adotou.

2ª) Na situação II, verifique em qual Estado a farinha apresentou maior acidez. Explique os critérios que você adotou.

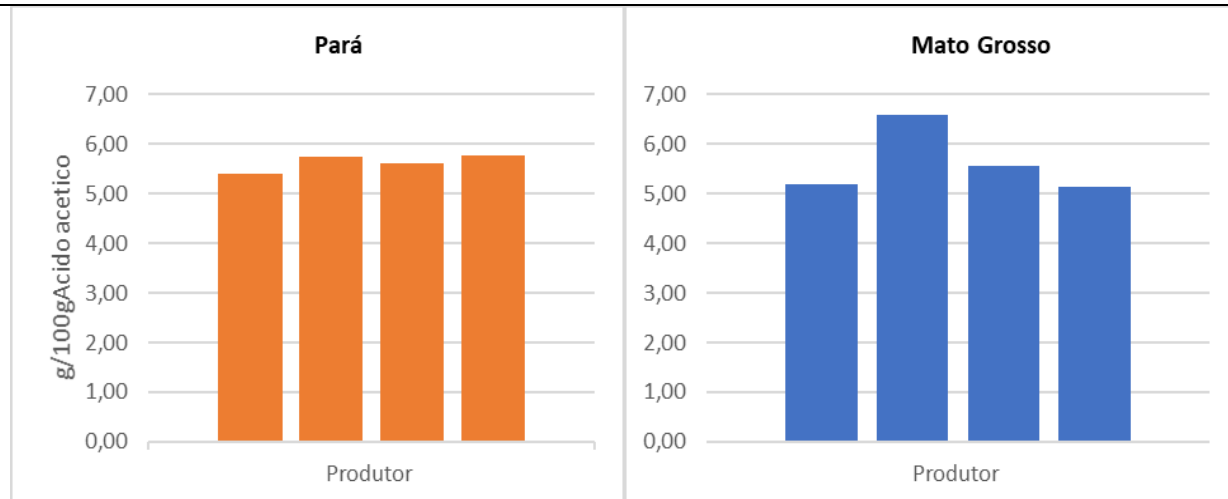
3ª) Na situação III, verifique em qual dos meses, Belém esteve mais quente de acordo com os dias pesquisados. Explique os critérios que você adotou.

Situação I: Segundo o DIEESE-PA, em julho de 2018, o maior preço do açaí do tipo “popular” comercializado em Belém foi de **R\$12,00**. Os gráficos abaixo mostram os preços do litro do açaí em pontos de venda de dois bairros de Belém. O levantamento foi feito em quatro pontos de cada um dos dois bairros.



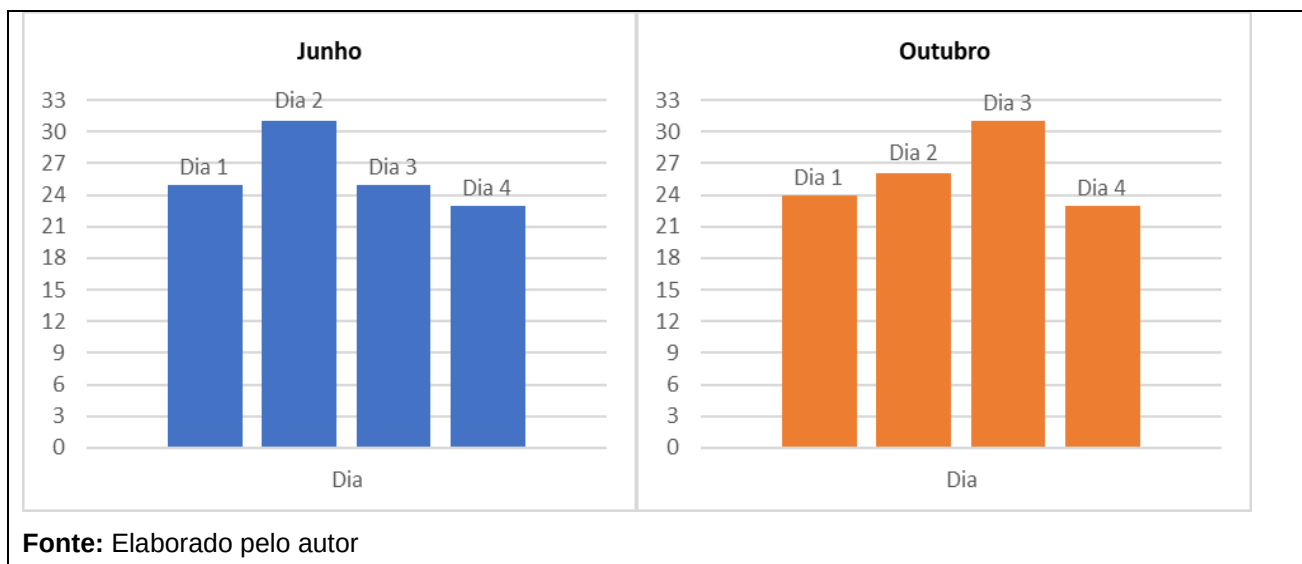
Fonte: Elaborado pelo autor

Situação II: Os gráficos abaixo confrontam a acidez da farinha de mandioca proveniente do Pará e do Mato Grosso. Os dados foram obtidos em pesquisa com quatro estabelecimentos de cada estado.



Fonte: Elaborado pelo autor

Situação III: Os gráficos abaixo mostram as temperaturas medidas em Belém nos meses de junho e de outubro. A pesquisa foi feita durante quatro dias de cada um dos dois meses.



4ª) Realize as mesmas comparações solicitadas nas questões de 1 a 3, mas dessa vez a partir da média. Insira suas respostas no quadro abaixo:

Situação	I (Açaí)		II (Farinha)		III (Calor)	
	Ponto de Venda		Estado		Mês	
	A	B	Pará	Mato Grosso	Junho	Outubro
Média						

5ª) A média facilitou responder as questões de 1 a 3? Se não, quais não foram possíveis responder? Justifique:

ATIVIDADE 2 – Desvio e a medida de variação

Conteúdo trabalhado: Desvio

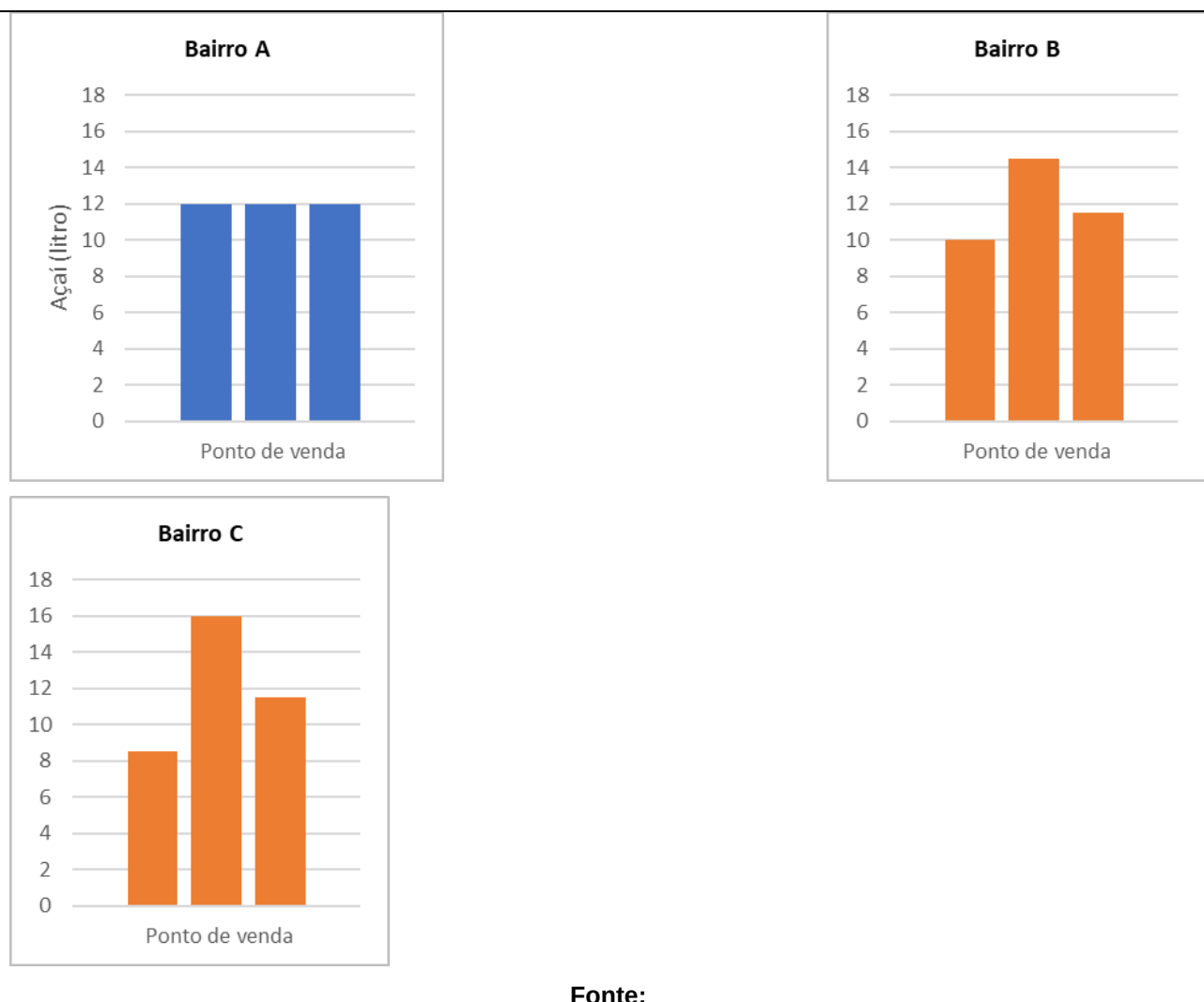
Objetivo: Conceituar desvio e mostrar que ele possibilita medir a variação dos dados de uma amostra.

Material e recursos utilizados: lápis, borracha, papel, laboratório de informática.

Desenvolvimento da atividade:

A partir das informações contidas na situação abaixo, responda as seguintes questões:

Situação: Segundo o DIEESE-PA, o maior preço do açaí do tipo médio comercializado em Belém, em 2018, foi de **R\$12,00** no mês de julho. Os gráficos abaixo mostram o resultado do levantamento dos preços do litro do açaí em três pontos de venda de três bairros da capital paraense.



1ª) É possível afirmar em qual bairro o litro do açaí apresentou preço mais vantajoso ao consumidor, e em qual foi menos vantajoso, de acordo com os dados da pesquisa? Justifique:

2ª) No quadro abaixo, preencha o quanto cada preço é igual, está acima, ou está abaixo da média dos preços pesquisados para cada bairro:

Bairro	Média	Preço 1	Preço 2	Preço 3
A				
B				
C				

3ª) A partir de suas respostas à questão anterior é possível responder a 1ª questão? Explique:

ATIVIDADE 3 – As medidas de variação

Conteúdo trabalhado: Desvio Absoluto Médio, Desvio Padrão e Variância

Objetivos: Mostrar que os desvios podem ser representados por um único número, permitindo conceituar as medidas de variação.

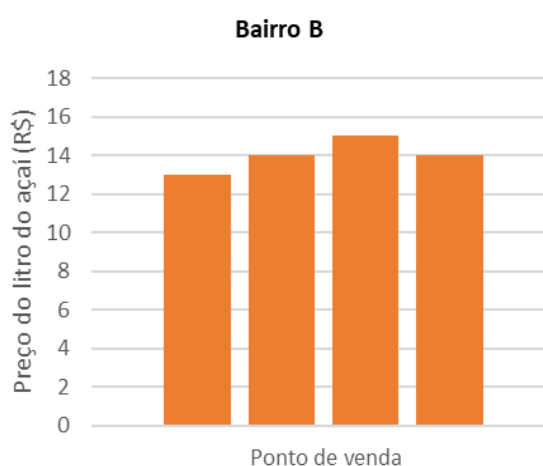
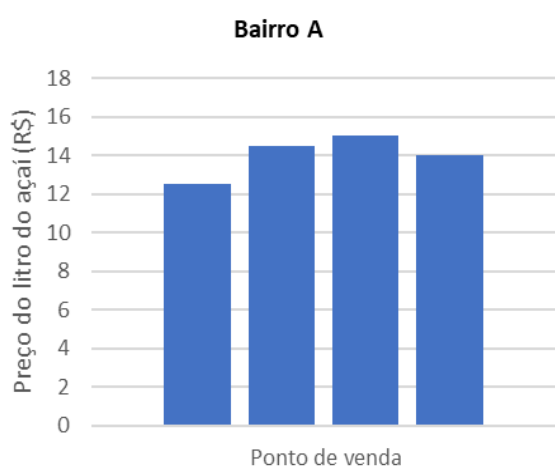
Material e recursos utilizados: lápis, borracha, papel, laboratório de informática.

Desenvolvimento da atividade:

Bloco I

A partir das informações contidas na situação I abaixo, responda as seguintes questões:

Situação I: Os gráficos abaixo mostram os preços do litro do açaí em pontos de venda de dois bairros de Belém. O levantamento foi feito em quatro pontos de cada um dos dois bairros.



Fonte: Elaborado pelo autor

1ª) No quadro seguinte constam os desvios dos preços de cada bairro. Obtenha a média desses desvios e os insira no quadro:

Bairro	Média dos preços	Desvio				Média dos desvios
		Preço 1	Preço 2	Preço 3	Preço 4	
A	14	1,5	0,5	1,0	0,0	
B	14	1,0	0,0	1,0	0,0	

2ª) Compare e explique a média dos desvios dos preços de cada bairro

3ª) Preencha o quadro abaixo com o menor e o maior valor que, em média, os preços variam de acordo com a média dos desvios.

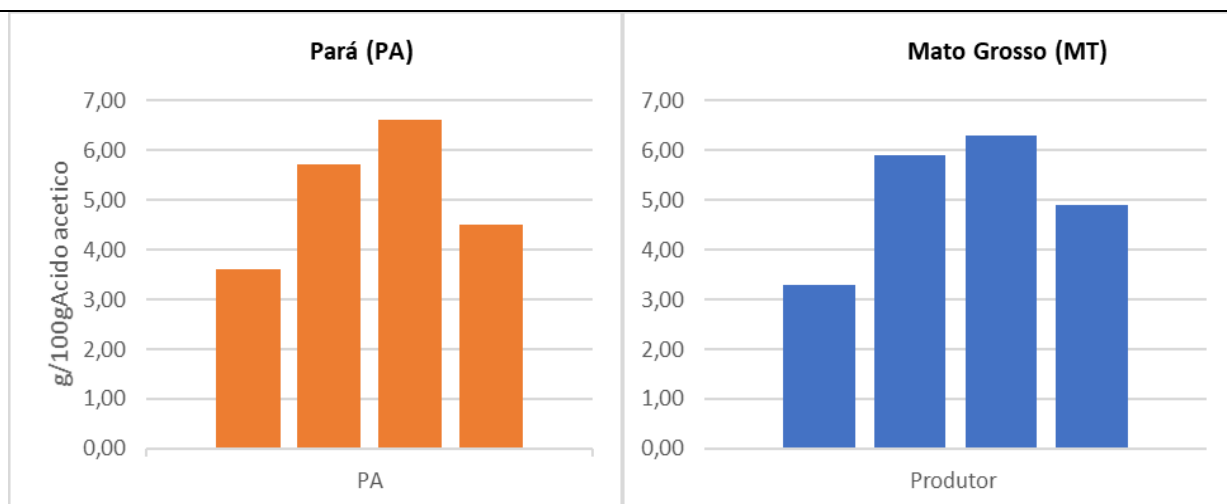
Bairro	Média dos preços	Média dos desvios	Menor preço	Maior preço
A	14	0,75		
B	14	0,50		

4ª) A partir da média dos desvios dos preços de cada bairro, é possível afirmar qual bairro apresentou o preço do açaí mais vantajoso ao consumidor? Justifique:

Bloco II

A partir das informações contidas na situação II abaixo, responda as seguintes questões:

Situação II: Os gráficos abaixo confrontam a acidez da farinha de mandioca proveniente do Pará e do Mato Grosso. Os dados foram obtidos em pesquisa com quatro estabelecimentos de cada estado.



Fonte: Elaborado pelo autor

1ª) Obtenha os **quadrados dos desvios das acidez**, a **raiz quadrada da divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3** e a **divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3**. Faça isso para cada Estado, e preencha o quadro abaixo:

Estado	Quadrados dos Desvios				Soma dos quadrados dos desvios	Raiz quadrada da divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3	Divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3
	Acidez 1	Acidez 2	Acidez 3	Acidez 4			
PA							
MT							

2ª) Preencha o quadro abaixo com o menor e o maior valor que, em média, as acidez variam de acordo com a **raiz quadrada da divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3**.

Estado	Média das acidez	Raiz quadrada da divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3	Menor acidez	Maior acidez
PA				
MT				

3ª) Preencha o quadro abaixo com o menor e o maior valor que, em média, as acidez variam de acordo com a **divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3**.

Estado	Média das acidez	Divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3	Menor acidez	Maior acidez
PA				
MT				

4ª) De acordo com os quadros das 2ª e 3ª questões, identifique no quadro abaixo se cada acidez é contemplada pela **raiz quadrada da divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3** ou pela **divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3**:

Acidez		Raiz quadrada da divisão da soma dos quadrados	Divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3
PA	3,60		
	5,70		
	6,60		
	4,50		
MT	3,30		
	5,90		
	6,30		
	4,90		

5ª) A partir do quadro da 4ª questão, qual o estado que apresentou maior acidez de acordo com a **raiz quadrada da divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3** e com a **divisão da soma dos quadrados dos desvios por 3**? Explique:

APÊNDICE C – FORMALIZAÇÕES

FORMALIZAÇÃO

A média nem sempre possibilita decidirmos qual amostra é mais adequada em determinada situação, como nos casos em que as médias são iguais para mais de duas amostras. Nesses casos, a variação dos dados pode ajudar a decidir. Porém, se ela for associada a um número, possibilitará uma melhor comparação entre as amostras.

FORMALIZAÇÃO

A diferença entre um dado e outro é denominada variação ou dispersão. Já a diferença (afastamento) entre um dado(x_i) da amostra e a média($\bar{x}$) é denominada **Desvio (D)**

$$D = x - \bar{x}$$

Como o desvio pode ser negativo, modulamos a diferença para ter seu **valor absoluto**, ou seja, sempre positivo. Assim:

$$D = |\bar{x} - x_i|$$

* Pode-se relacionar cada dado de uma amostra com a média deles, a partir do desvio. Evita-se, portanto, com

parar os dados entre si, o que gera muitas combinações.

* Para tentar responder à pergunta foi preciso observar mais de um valor (os desvios abaixo e acima da média). Para amostras com mais dados, fazer tal análise pode ser inviável. Portanto, os desvios precisam ser associados a um único número, definido como **medida de variação** dos dados.

FORMALIZAÇÃO

Desvio Absoluto Médio (DAM) ou simplesmente *Desvio Médio* é uma medida definida como a média dos desvios absolutos. Considerar os valores dos desvios apenas como positivos é consequência da propriedade dos desvios, na qual a soma dos desvios

sempre é nula, ou seja: $\sum_{i=1}^n (x - \bar{x}) = 0$

Assim, o **DAM** é obtido por:

$$\boxed{DAM = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n}}$$
 , sendo n a quantidade de dados da amostra

FORMALIZAÇÃO

O **Desvio Padrão** é a mais importante das medidas de variação, e pode ser entendida como uma espécie de desvio médio. É indicado conforme o tipo de dados trabalhados, amostrais ou populacionais. Aqui, trataremos apenas dos amostrais. Assim, o *desvio padrão amostral* é indicado por s ;

O desvio padrão é definido como um conjunto de valores em torno da média, uma espécie de desvio médio dos valores em relação à média. Seu valor pode ser obtido por:

$$S = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n-1}}$$

Passos para o cálculo de s :

Passo 1: calcule a média $\bar{x}$;

Passo 2: subtraia a média de cada valor individual para obter uma lista de desvios da forma $(X - \bar{X})$;

Passo 3: eleve ao quadrado cada uma das diferenças obtidas no Passo 2.

Isso resulta em números da forma $(X - \bar{X})^2$;

Passo 4: Adicione todos os quadrados obtidos no Passo 3. Esse é o valor de $\sum (X - \bar{X})^2$;

Passo 5: Divida o total do Passo 4 pelo número $(n-1)$, que é 1 unidade menor do que o total de valores presentes.

Passo 6: Ache a raiz quadrada do resultado do Passo 5

A **Variância** de um conjunto de dados é uma medida de variação igual ao quadrado do desvio padrão, indicado por s^2 . Assim: $S^2 = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n-1}$

APÊNDICE D – PÓS-TESTE

1ª) “Clientes de agências bancárias em Belém reclamam da existência de longas filas, mesmo tendo a favor dos consumidores uma lei municipal que obriga os bancos a realizarem o atendimento ágil, a fim de evitar filas.” Extraído de <http://g1.globo.com/pa/para/noticia/2014/08/secon-fiscaliza-agencias-bancarias-em-belem-para-verificar-abusos.html>.

A fila de espera nas agências bancárias é comum na capital paraense, conforme a publicação acima. Considere que os tempos de espera em uma agência bancárias de Belém sejam os seguintes: 6,5 6,7 7,1 7,3 7,4 7,7 7,7

Calcule o desvio padrão e a variância, indicando suas unidades, e explique seus valores:

2ª) (ENEM 2016 – QUESTÃO 140 PROVA AZUL 1ª Aplicação) O Procedimento de perda rápida de "peso" é comum entre os atletas dos esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas da categoria até 66 kg, Peso-Pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas. Realizaram três "pesagens" antes do início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos "pesos". As informações com base nas pesagens dos atletas estão no quadro.

Atleta	1ª pesagem (kg)	2ª pesagem (kg)	3ª pesagem (kg)	Média	Mediana	Desvio padrão
I	78	72	66	72	72	4,90
II	83	65	65	71	65	8,49
III	75	70	65	70	70	4,08
IV	80	77	62	73	77	7,87

Após as três "pesagens", os organizadores do torneio informaram aos atletas quais deles se enfrentariam na primeira luta. A primeira luta foi entre os atletas. **Justifique sua resposta:**

- a) I e III.
- b) I e IV.
- c) II e III.
- d) II e IV.
- e) III e IV



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Trav. Djalma Dutra, s/nº – Telégrafo
66113-010 Belém-PA
www.uepa.br