Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

ISRAEL COSTA LIMA

O ENSINO DE INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS POR ATIVIDADE

BELÉM/PA
2022

Israel Costa Lima

O Ensino de Inequações Trigonométricas Por Atividade

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Ensino Médio.

Orientador: Prof. Dr. Ducival Pereira Carvalho.

Co-orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

BELÉM/PA
2022

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Lima, Israel Costa

O ensino de inequações trigonométricas por atividades / Israel Costa Lima; orientador: Ducival Carvalho Pereira; coorientador: Pedro Franco de Sá. - Belém, 2022.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2022.

1. Inequações trigonométricas-Estudo e ensino (Ensino médio) -Imperatriz – MA. 2. Prática de ensino 3.Ensino por atividade. I. Pereira, Ducival Carvalho (orient.). II. Sá, Pedro Franco de. III. Título.

CDD. 23ºed. 512

Regina Coeli A. Ribeiro – CRB-2/739

ISRAEL COSTA LIMA

O ENSINO DE INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS POR ATIVIDADE.

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Gaduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira

Data de aprovação: 09/03/2022

Banca examinadora

________________________________, Orientador

Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira
Doutor em Matemática – Universidade Federal do Rio de Janeiro / UFRJ
Universidade do Estado do Pará

________________________________, Examinador Interno

Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN
Universidade do Estado do Pará

________________________________, Examinador Externo

Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias
Doutor em Engenharia Elétrica – Universidade Federal do Pará / UFPA
Universidade Federal do Pará

Belém – PA

2022

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pelo dom da vida.

Aos meus pais Raimundo Irineu Lima Filho (*in memorian*) e Edith Costa Lima (*in memorian*), pela educação dada ao longo da vida.

A minha esposa Cláudia, por sempre me motivar a não desistir.

Aos meus filhos Lorena e Caio, razão da minha luta diária.

Aos familiares, pela dedicação e paciência.

Aos amigos, pelos momentos de alegria e descontração.

Em especial, aos amigos Samir e Osvaldo, por terem colaboração durante os estudos e produção da dissertação.

Agradeço ao meu orientador, co-orientador e demais professores do curso de Mestrado em Matemática da Universidade Estadual do Pará – UEPA, que compartilharam seu conhecimento e contribuíram em minha formação.

Enfim, a todos que colaboraram direta e indiretamente para a conclusão desse trabalho.

RESUMO

LIMA, Israel Costa. **O ensino de inequações trigonométricas por atividade.** 145 f. Dissertação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2021.

Apresenta-se os resultados de uma pesquisa de mestrado profissional em ensino de matemática sobre o ensino de Inequação Trigonométrica. Foi estabelecido como questão de pesquisa: *Quais efeitos uma sequência didática por atividades tem sobre a aprendizagem de Inequação Trigonométrica?* Como objetivo geral buscou-se *analisar os efeitos de uma sequência didática por atividades sobre a aprendizagem de Inequação Trigonométrica.* Para responder a essa questão e alcançar o objetivo pretendido, adotou-se como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática, composta por fases de análises prévias, construção e análise, experimentação, análise a posteriori e validação. Nas análises prévias constatou-se, por meio da revisão de estudos, que existe uma carência de pesquisas relacionas diretamente ao objeto matemático Inequação Trigonométrica e seu ensino, mas que apesar disso para o ensino de trigonometria de maneira geral há muitas experiências com uso de nova tecnologias e metodologias de ensino que inspiraram a construção do produto educacional desta pesquisa. Sequência didática construída constou de 4 atividades elaboradas conforme os momentos de execução, registro, análise e institucionalização do Ensino por atividades e que envolveram diferentes formas de representar inequação seno, cosseno e tangente. O produto em questão foi experimentado em uma turma do segundo ano do ensino médio da rede pública estadual de ensino em Imperatriz-MA. Os resultados dos dados coletados por meio dos registros escritos dos sujeitos e da comparação de pré-teste e pós-teste levaram a concluir que o produto teve efeitos positivos sobre a aprendizagem e que possibilitou a mobilização de diferentes atividades cognitivas relacionadas aos registros de representações semiótica e que os objetivos dos momentos do Ensino por Atividades foram alcançados, mas com poucos registros da análise e institucionalização, tendo em vista que a modalidade virtual de ensino durante o período da pandemia por COVID-19, quando aconteceu a experimentação, limitou a interação, feedback e coleta de dados.

Palavras-chave: Matemática; Ensino de Matemática; Sequência Didática. Inequação Trigonométrica.

ABSTRACT

LIMA, Israel Coast. **The teaching of trigonometric inequalities by activity**. 145 f. Dissertation of the Graduate Program in Mathematics Teaching – University of the State of Pará, Belém, 2021.

It presents the results of a professional master's research in mathematics education on the teaching of trigonometric inequality. It was established as a research question: What effects does a didactic sequence by activities have on the Trigonometric Inequation learning? As a general objective, we sought to analyze the effects of a didactic sequence by activities on the Trigonometric Inequation learning. To answer this question and achieve the intended objective, Didactic Engineering was adopted as a research methodology, consisting of phases of prior analysis, construction and analysis, experimentation, a posteriori analysis and validation. In previous analyzes it was found, through the review of studies, that there is a lack of research directly related to the mathematical object Trigonometric Inequation and its teaching, but that despite this, for the teaching of trigonometry in general, there are many experiences with the use of new technologies and teaching methodologies that inspired the construction of the educational product of this research. The constructed didactic sequence consisted of 4 activities elaborated according to the moments of execution, registration, analysis and institutionalization of Teaching by activities, which involved different ways of representing sine, cosine and tangent inequality. The product in question was tried in a class of the second year of high school in the state public school system in Imperatriz-MA. The results of the data collected through the written records of the subjects and the comparison of pre-test and post-test led to the conclusion that the product had positive effects on learning and that it enabled the mobilization of different cognitive activities related to records of semiotic representations and that the objectives of the Teaching by Activities moments were achieved, but with few records of analysis and institutionalization, considering that the virtual modality of teaching during the period of the COVID-19 pandemic, when the experimentation took place, limited the interaction, feedback and data collection.

Keywords: Mathematics; Teaching of Mathematics; Following teaching; Trigonometric Inequation.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ao analisar-se na História da Matemática os diversos personagens que participaram da construção do saber Matemático percebe-se os inúmeros obstáculos epistemológicos superados para que os conceitos hoje didaticamente postos nos livros pudessem chegar na sala de aula. Embora as definições e propriedades estejam estabelecidas, não significa que seja simples de se ensinar e aprender, os desafios de outrora são percebidos no ensino de Matemática atualmente.

Esta dissertação é resultado de uma pesquisa realizada no âmbito do mestrado profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. É também resultado de uma busca por aprimoramento profissional do pesquisador que é professor de matemática da rede pública estadual de ensino do Maranhão há mais de 20 anos, onde vivenciou inúmeros momentos de aprendizado, superação e testemunho de muitos de seus educandos alcançando sucesso profissional por meio da educação.

O programa de pós-graduação estabeleceu como tema da pesquisa “O ensino de Inequação Trigonométrica”. Esse conteúdo do ensino médio sempre fez parte da rotina didática deste professor-pesquisador, entretanto a forma de ensinar era um tanto quanto mecanizada com apresentação definições, exemplos e exercícios. A maneira de ensinar de forma interativa, buscando significado, conduzindo os estudantes a fazerem redescobertas sobre seus conhecimentos foi desenvolvido ao longo do curso, nas disciplinas e orientações. Foi um processo complexo de mudança de hábitos didáticos-pedagógicos, buscando também compreender como ocorrem os processos cognitivos de aprendizagem dos educandos, haja vista que:

> O homem é um ser insaciavelmente curioso que pode aprender, se quiser, qualquer coisa através de qualquer método. A questão, portanto, não é “Qual método correto?, mas qual método é mais eficaz?” E a resposta, ainda segundo o bom senso, é provavelmente relativa ao aluno e suas circunstancias imediatas na ocasião da aprendizagem. (SÁ, 2009, p. 9)

Existe uma forte indicação das atuais diretrizes da educação, tais como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), para que cada vez mais os estudantes sejam ativos em sua aprendizagem, que desenvolvam os conhecimentos por meio de investigação e experimentação. Isso é tão latente que uma das competências específicas de matemática e suas tecnologias para o ensino médio foi estabelecida da seguinte forma:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como Observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2017, p. 523).

Ainda que houvesse as indicações curriculares para o ensino de trigonometria no Ensino Médio, sentimos necessidade de investigar quais seriam as dificuldades de ensino e aprendizagem relacionadas a nosso objeto matemático. Para isso, na estrutura de metodologia de pesquisa que adotamos, a Engenharia Didática, em sua fase preliminar, realizamos uma revisão de estudo para identificarmos dificuldades tais dificuldades e buscar metodologias que tenham dado resultados positivos no ensino de Inequações trigonométricas ou de trigonometria. Em Pereira (2011) e Souza (2015), por exemplo ressaltaram a importância dos conhecimentos prévios dos educandos fazendo relação com o que está sendo aprendido. Patriota e Duarte (2015), Pinheiro (2008) e Pereira (2016) evidenciaram que as dificuldades no ensino de trigonometria podem ser superadas ao utilizar a interpretação geométrica e uso de tecnologias. De maneira geral, verificamos em nossas análises iniciais que é importante a formação continuada do professor de matemática para que desenvolva um ensino mediador em que o educando participe ativamente de sua aprendizagem.

Percebemos nessa fase a carência de pesquisas sobre a temática e nas pesquisas de assuntos relacionados dentro da Trigonometria o indício de muitas dificuldades relacionadas a devida compreensão e a articulação entre diferentes formas de representação, o que indicou a relevância científica e educacional desta pesquisa. Entretanto, haviam muitas propostas, metodologias e tecnologias que indicavam êxito na superação de dificuldades, as quais inspiraram a construção de uma sequência didática por atividades.

> A sequência didática é exemplo de estratégia que pode permitir que o estudante construa o conhecimento através de uma sucessão de questionamentos, facilitando o fazer pedagógico.– a problematização, a organização e a aplicação do conhecimento. A problematização consiste em verificar o conhecimento prévio dos estudantes sobre o tema [...]. No momento seguinte, que trata da organização do conhecimento os estudantes estudam os conteúdos necessários para a compreensão do tema e contam com o monitoramento do professor [...] E, para finalizar, temos a aplicação do conhecimento que se destina, sobretudo, a abordar sistematicamente o conhecimento que

> vem sendo incorporado pelo estudante, para analisar e interpretar tanto as situações iniciais que determinaram seu estudo como outras situações que, embora não estejam diretamente ligadas ao motivo inicial, podem ser compreendidas pelo mesmo conhecimento. (RODRIGUES et al, 2018, p. 212-213)

Deste modo, conseguimos traçar uma perspectiva do que poderíamos construir, foi a oportunidade de inovar as práticas já experimentadas por este pesquisador agregando caráter científico e fundamentado. Diante disso vimos na Sequência Didática uma possibilidade de construir um produto que fosse acessível e organizado para ser adotado por professores de Matemática, tendo em vista a importância e o significado que a trigonometria tem para o ensino e suas aplicações em diversas áreas como a Engenharia, Cálculo, Astronomia e Medicina.

Assim, para que se pudesse ter uma pesquisa norteada, estabeleceu-se a seguinte questão de pesquisa: *Quais efeitos uma sequência didática por atividades tem sobre a aprendizagem de Inequação Trigonométrica?* Como objetivo geral buscou-se *analisar os efeitos de uma sequência didática por atividades sobre a aprendizagem de Inequação Trigonométrica.* Para alcançar o objetivo geral foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Fazer um estudo prévio sobre o ensino e aprendizagem do objeto matemático Inequação Trigonométrica;
- Construir uma sequência didática sob a metodologia Ensino por atividades para desenvolver objetivos de aprendizagem sobre Inequação Trigonométrica.
- Investigar as potencialidades e limitações do produto construído, sob os critérios dos aportes adotados na pesquisa.

Após construída a sequência didática, planejava-se experimentá-la presencialmente em uma turma regular do segundo ano do ensino médio. Entretanto, as condições sanitárias restritivas para prevenção do contágio da COVID-19 em 2020, mudou os rumos da pesquisa, que foi realizada remotamente de forma síncrona sem prejuízo para os objetivos almejados. Porém, os dados coletados não permitiram uma análise quantitativa e de desempenho mais criteriosa, de modo que outras metodologias de análise foram agregadas para uma análise qualitativa do processo de ensino por meio do produto educacional construído, tais como o desenvolvimento dos registros de representação semiótica adotados pelos sujeitos da pesquisa, para verificação dos indícios de aprendizagem.

A análise por meio dos critérios do Ensino por atividades, da Teoria dos registros e representações semióticas e da comparação do Pré-teste com pós-teste permitiram o alcance de um resultado válido e positivo sobre a potencialidade do produto experimentado para o ensino de Inequação Trigonométrica.

Ao longo da leitura deste texto será possível entender os aportes teóricos e metodológicos adotados no capítulo 1, as análises prévias realizadas por meio de uma revisão de estudos, análise de livros didáticos e pesquisa diagnóstica com estudantes no capítulo 2. No capítulo 3 apresenta-se a análise a priori da sequência didática que está disponível na íntegra no Apêndice A. O Capítulo 4 apresenta todos os procedimentos da experimentação do produto e no capítulo 5 tem-se as análises e resultados da pesquisa, com indicação das dificuldades e projeções para futuras pesquisas.

1 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Este capítulo dedica-se em apresentar o percurso metodológico desta pesquisa por meio dos aportes teóricos e metodológicos adotados para que fosse possível desenvolver o produto educacional para o ensino de Inequações Trigonométricas, bem como a sua experimentação e análise de resultados.

1.1 ENGENHARIA DIDÁTICA

Por se tratar de uma pesquisa experimental sobre ensino e aprendizagem, adotou-se a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa que estrutura o percurso metodológico que foi seguido. A Engenharia Didática tem como alvo "o estudo do processo de ensino e aprendizagem de um dado conceito e a construção de uma sequência didática com o intuito de proporcionar ao aluno condições favoráveis à construção e compreensão desse conceito" (ALMOULOUD e COUTINHO, 2008, p. 76). Buscou-se a fundamentação, construção, experimentação e validação da sequência didática por meio de comparações entre análise *a priori* e a *análise a posteriori*.

Neste sentido, de acordo com Artigue (1996), como metodologia de investigação, a Engenharia Didática caracteriza-se por um esquema experimental baseado em 'realizações didáticas' na sala de aula, que passa pela concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino. Neste trabalho segue-se as fases da Engenharia Didática que segundo Almouloud (2007) são Análises Prévias; Construção das Situações e Análise a Priori; Experimentação, Análise a posteriori e Validação.

Nas *Análises Prévias* buscou-se definir a questão e os objetivos de pesquisa, dificuldades de aprendizagem, hipóteses, justificativas, analisar a organização didático-pedagógica do objeto matemático Inequações Trigonométricas (Diretrizes curriculares) e estudar a organização do objeto matemático (história e epistemologia). Para tanto, realizou-se uma revisão de literatura para levantamento das dificuldades de ensino e aprendizagem sobre Inequações Trigonométricas e levantamentos de possíveis métodos de ensino que se mostram eficientes, passando também pelo estudo histórico e epistemológico do objeto matemático.

Na fase de *Construção das Situações e Análise a Priori,* com os resultados da fase anterior**,** construiu-se uma sequência didática que considerasse as necessidades de aprendizagem, a mobilização de conhecimento prévios e a construção de uma aprendizagem significativa, mas com uma organização e sintetização das descobertas. Para isso, o produto foi construído com previsões (análise a priori) de possíveis dificuldades ao longo do processo de experimentação que o professor pudesse intervir sem prejudicar a autonomia do educando. Nessa fase adotou-se a metodologia Ensino por Atividades, melhor apresentada mais adiante, como forma de estruturar as interações entre professor, estudantes e objeto matemático.

Na fase de *Experimentação,* descreve-se as condições e o contexto da experimentação, apresenta-se e justifica-se os procedimentos da experimentação. Na *análise a posteriori e Validação* organiza-se os instrumentos de coleta, analisa-se os resultados retomando-se a questão de pesquisa. Nesta fase retoma-se as análises a priori e informações das análises prévias. Nessa fase é comum adotar a análise de pré-teste e pós-teste para uma análise quantitativa de desempenho, o que foi adotado nesta pesquisa. Como metodologia de análise acessória adotou-se a Teoria dos Registros e Representações semióticas, apresentado na seção 1.3.

Em síntese, a estrutura desta pesquisa se deu em fazer uma fundamentação e diagnose do ensino de Inequações Trigonométricas, para realizar a construção de uma sequência didática organizada como Ensino por Atividades, que após experimentação teve seus dados analisados por meio de comparação das análises a priori e a posteriori, bem como dos registros de representações semióticas realizadas pelos sujeitos da pesquisa.

1. 2 ENSINO POR ATIVIDADES

Nesta pesquisa, buscou-se elaborar um produto educacional em que “[...] não basta, por exemplo, saber executar mecanicamente as inequações trigonométricas. É preciso ter o domínio total de sua aplicação em situações” (DANTE, 2010, p. 21). Por esse motivo, escolheu-se uma forma de organizar as atividades elaboradas de modo a promoverem a autonomia e a redescoberta do conhecimento pelo educando, como se propõe o Ensino por atividades: “uma prática metodológica que proporciona ao aluno construir sua aprendizagem, por meio da aquisição de conhecimentos e redescoberta de princípios” (SÁ, 2009, p. 14).

O Ensino por Atividades é uma metodologia de ensino que procura trabalhar os conteúdos Matemáticos, para que o aluno possa descobrir as leis gerais ou um padrão de solução com mediações do professor no processo de aprendizagem. De tal maneira, que por meio das atividades, os alunos descobrem que são sujeitos ativos e contribuintes de seu aprendizado.

Sá (2009, p.14-15) propõe que: “[...] a prática metodológica do ensino de Matemática por atividade dá oportunidade ao aluno de construir sua aprendizagem, por meio da aquisição de conhecimento e redescoberta de princípios”. Esse tipo de abordagem interativa permite ao aluno realizar um grande número de experimentos, interpretá-los, para depois discuti-lo em classe com professores e colegas.

Nessa perspectiva de ensino, o professor não faz sua aula iniciando pela apresentação de conceitos, seguidas de definições, exemplos e exercícios. Neste caso, a aula é direcionada com a apresentação de diversas atividades e os itens interrogativos destas que vão induzindo os alunos a perceberem e descobrirem uma lei geral ou padrão de regularidade que venha auxiliar na compreensão e resolução da atividade. Através desse processo, o aluno vai construindo / descobrindo o objeto matemático estudado a partir do objetivo proposto para cada atividade. Deste modo:

> O professor geralmente, determina a agenda proposta, orienta a construção e valida os resultados, mas ao final das contas é o aluno quem deve fazer as construções. Dessa forma, as avaliações são feitas com o intuito de determinar o que o aluno construiu para que o professor possa determinar como continuar sua orientação (FOSSA, 2009, p. 11)

Essa característica do Ensino por Atividades confirma que o aluno pode desenvolver muitas habilidades como analisar, planejar, testar, concluir e generalizar. No entanto, ao fazer o planejamento e sua execução, alguns cuidados devem ser considerados, para haver aprendizado significativo e sem erros conceituais sobre o objeto de estudo. Por exemplo, devem ser considerados os conhecimentos prévios dos aprendizes, os objetivos de aprendizagem devem estar bem definidos e mediados por meio das questões escritas e orais do professor e a formalização a ser apresentada ao final deve estar compatível com o nível de ensino dos educandos.

Para estruturar a sequência de atividades considerou-se que "uma aula por meio de atividade de redescoberta tem os seguintes momentos: **organização**, **apresentação**, **execução**, **registro**, **análise** e **institucionalização"** (SÁ, 2019, p. 29). Para melhor explicar organiza-se esses momentos no quadro 1:

Quadro 1- Organização do Ensino por Atividade de Redescoberta**.**

Momento	Organização.
Organização	Momento de instruir a formação de equipes podendo também ocorrer de forma individual. O professor deve dirigir as ações, orientar a formação das equipes sem imposições, demonstrar segurança e objetividade quanto ao roteiro a ser seguido.
Apresentação	Momento do professor distribuir o material necessário para a realização da atividade incluindo o roteiro da mesma. O roteiro pode ser impresso ou disponibilizado no quadro o que vai depender das condições estruturais da escola. Para atividades com procedimento mais longo é preferível que o roteiro seja disponibilizado de forma escrita para economizar tempo.
Execução	Corresponde à etapa da experimentação quando o educando manipula os materiais, realiza medidas e/ou cálculo, compara e/ou observa. O professor neste momento deve deixar as equipes trabalharem livremente, supervisionar o desenvolvimento das ações e auxiliar nas dúvidas, quando solicitado ou perceber dificuldade de execução, que possam surgir em cada equipe no ocorrer da realização do procedimento.
Registro	Corresponde ao momento da sistematização das informações na pesquisa cientifica. Neste momento espera-se que cada equipe ou indivíduo registre as informações obtidas durante a execução dos procedimentos no respectivo espaço destinado no roteiro.
Análise	Neste momento espera-se que cada equipe analise as informações que foram registradas e descubram uma relação válida entre as informações registradas. Este momento é crucial para o bom andamento da atividade devido, ser o momento quando os alunos deverão ter o primeiro acesso a informação desejada pelo professor.
Institucionalização	É o momento em que será produzida a conclusão oficial da turma a partir das conclusões que cada equipe elaborou no momento da análise. O momento da institucionalização corresponde grosso modo ao

	momento da elaboração das considerações finais de um trabalho cientifico.

Fonte: Adaptado de Sá (2019)

Portanto, percebemos que o Ensino por atividade como metodologia de ensino é capaz de conduzir o aluno a desenvolver ou ampliar o seu envolvimento pela matemática, uma vez que participa ativamente nos processos de descobertas e generalizações de padrões e leis bem como no desenvolvimento de habilidades previstas no currículo escolar conforme o nível de ensino e faixa etária.

Para o conteúdo de Inequações Trigonométricas o Ensino por Atividades foi adotado por se propor a criar um envolvimento com a matemática, explorando conhecimentos prévios e o entendimento de outros conteúdos matemáticos.

1. 3 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

O objeto matemático desta pesquisa, Inequações Trigonométricas, permite a exploração de diferentes formas de representar esse mesmo objeto, de forma algébrica, que é a mais usualmente encontrada em livros didáticos, mas também como auxiliar no entendimento do comportamento das funções trigonométricas de forma gráfica e geométrica. Explorar isso significa:

> Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático. (BRASIL, 2017, p. 523)

O filósofo, psicólogo de formação de professores Raymund Duval investigou a aprendizagem matemática e o papel dos registros de representação semiótica para a apreensão do conhecimento matemático, na França entre 1970 e 1995, quando publicou sua teoria na obra *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Nessa perspectiva, os estudos de Duval (2004) preconizam que um sistema cognitivo de representação necessita de três atividades cognitivas, as quais chama de semiosis: Formação, tratamento e conversão, e isso se deve ao fato de que:

> a construção de conceitos matemáticos depende muito da capacidade de utilizar vários Registros de Representação Semiótica dos referidos conceitos: representando-os em um dado registro, tratando tais

> representações no interior de um mesmo registro, e fazendo a conversão de um registro para outro". Assim, para o autor, estes três elementos estão profundamente ligados a aquisição conceitual de um objeto matemático, isto é, a noésis (DALLEMOLE, 2010, p. 59).

Ao adotar-se os registros de representações semióticas como forma de analisar os efeitos do produto educacional construído na aprendizagem de Inequações Trigonométricas, deseja-se explorar um nível de compreensão desse objeto sob diferentes perspectivas. Para Duval (2003) a análise semiótica é um importante instrumento de pesquisa para aquisição de conhecimentos matemáticos e organização de situações de aprendizagem por desenvolver capacidades cognitivas que favorecem o uso da linguagem matemática e a sua compreensão. Além disso, "o trânsito entre os diversos registros de representação pode favorecer que os estudantes tenham maior flexibilidade e fluidez na área e, ainda, promover o desenvolvimento do raciocínio" (BRASIL, 2017, p. 519).

As atividades cognitivas ou *Semiosis* que são exploradas em uma atividade que necessite de registros e representações são, segundo Duval (2004) e Dallemole (2010):

a) <u>Formação</u>: atividade em que se estabelece um sistema de representação que permita o reconhecimento das representações como representações, isto é, os registros de representação precisam ser identificáveis seja por meio de um texto em língua natural, de uma figura geométrica, de um gráfico, etc., respeitando regras inerentes a cada sistema de registros.
b) <u>Tratamento</u>: trata-se da transformação ao longo do desenvolvimento de uma mesma representação ou registro, por exemplo, resolver uma equação ou inequação ou reformular um enunciado dado, em outro.
c) <u>Conversão</u>: É a transformação externa, em outro tipo de registro conservando os mesmos objetos matemáticos, como por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica ou passar de uma representação linguística em uma representação figural. A conversão se dá entre os registros, ou seja, é exterior ao registro de partida.

Duval (2011) destaca a necessidade de representações semióticas no conhecimento matemático e ressalta a ocorrência de dois problemas muito diferentes: o primeiro é epistemológico e o segundo é cognitivo. Ambos se referem ao modo de acessar o objeto matemático de estudo. Assim, há uma relação complexa entre as diferentes representações que levam ao reconhecimento de um determinado objeto matemático.

Na construção e na análise da sequência didática por atividades houve o planejamento da realização das atividades cognitivas descritas, em especial das formas algébricas, gráficas, geométricas e em língua natural, para o objeto matemático Inequações Trigonométricas. Ainda que o estudante nem sempre fale ou escreva em língua natural sobre o objeto matemático, o simples fato de interpretar os enunciados demonstra sua capacidade de tratar e converter para outros registros em linguagem matemática. No tratamento das representações é também o momento de se fazer a retomada de conhecimentos prévios, tais como: desigualdade, intervalo, equação trigonométrica, ciclo trigonométrico, etc.

Estando definido o percurso metodológico desta pesquisa, no capítulo a diante apresenta-se as análises prévias que nortearam tal percurso.

2 ANÁLISES PRÉVIAS

Nesta primeira fase da engenharia didática, análises prévias, buscou-se fundamentar as demais fases da pesquisa. Para que essa fundamentação ocorresse, buscou-se realizar uma revisão de estudos em pesquisas que envolvem ensino e aprendizagem na trigonometria.

Somado a isso, também buscou-se investigar como o tema Inequação Trigonométrica é trabalhado nos livros didáticos, considerando tipo de abordagem e volume de conteúdo e exercícios.

E para ter uma diagnose das dificuldades de aprendizagem do objeto matemático em tela, realizou-se uma pesquisa de campo com estudantes em que foram submetidos a um questionário sócio educacional e um teste de conhecimentos.

2. 1 REVISÃO DE ESTUDOS

Durante muitos anos trabalhando no Ensino Médio, principalmente em turma do 3º ano, em uma Escola Pública de Imperatriz–MA, percebeu-se a grande dificuldade que os alunos enfrentam em relação a trigonometria, e, em especial as inequações trigonométricas que é um tema onde os conceitos devem ser dominados de forma que o aluno tenha base suficiente para acompanhá-lo. Muitas vezes, tais dificuldades dos estudantes resultam das dificuldades didáticas de ensino e esta seção vem apresentar como professores e pesquisadores vêm superando tais dificuldades.

No currículo de matemática é possível observar que não há uma valorização do estudo de inequações trigonométricas, restringindo-se o estudo apenas às funções trigonométricas.

> Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. (BRASIL, 1998, p. 44).

No entanto, Brasil (2018) valoriza o estudo de inequações em sua importância para desenvolvimento do pensamento algébrico e para resolução de situações problema. Neste sentido, esta seção se propôs a fazer uma revisão de estudos sobre ensino de Inequações Trigonométricas, para que fosse possível construir uma sequência didática que valorizasse e colaborasse com o ensino desse objeto matemático no ensino médio.

Para tanto, analisou-se dissertações e artigos que abordam sobre o ensino e aprendizagem de inequações e/ou trigonometria, pois em nossas pesquisas não encontramos estudos específicos sobre “Inequações Trigonométricas”, o que nos motiva e ressalta a relevância desta pesquisa para o ensino de matemática no Ensino Médio. Apesar de que nos livros didáticos o estudo de nosso objeto matemático se dá dentro do capítulo de funções trigonométricas.

Assim as referências estudadas tratam dos assuntos relacionados ao objeto matemático de pesquisa, quanto ao ensino, dificuldades de aprendizagem e propostas didáticas e pedagógicas que passaram por experimentação em sala de aula.

Logo, esta revisão de estudos teve caráter bibliográfico qualitativo e para sua realização adotou-se uma estratégia de pesquisa com os seguintes passos:

- Levantamento e seleção de referências;
- Categorização;
- Apresentação e análise de resultados;
- Síntese e discussão de resultados.

Para o *levantamento e seleção* de referências foi feita a busca de dissertações do banco de teses da CAPES, de programas de pós-graduação de universidades públicas e privadas, bem como publicações em revistas científicas de matemática e educação matemática e livros didáticos.

A *categorização* se deu em duas categorias estudos teóricos e estudos experimentais. Nos estudos teóricos foram apresentadas pesquisas investigativas que apresentam conceitos e novas ideias para o ensino e para a aprendizagem em trigonometria. Os estudos experimentais apresentam resultados de experiências em sala de aula como atividades ou propostas metodológicas de ensino de trigonometria. Ao todo foram analisadas 12 referências apresentadas no quadro 2:

Quadro 2- Referências da revisão de estudos.

TIPO DE ESTUDO	AUTOR (ANO)	NATUREZA	TÍTULO
TEÓRICO	PEREIRA (2011)	DISSERTAÇÃO	Aprendizagem em trigonometria no ensino médio: Contribuição da Aprendizagem Significativa.
TEÓRICO	OLIVEIRA (2014)	DISSERTAÇÃO	Trigonometria: o radiano e as funções seno, cosseno e tangente.
TEÓRICO	PATRIOTA E DUARTE (2015)	ARTIGO	A importância das inequações trigonométricas.
EXPERIMENTAL	PINHEIRO (2008)	DISSERTAÇÃO	O ensino de trigonometria na educação básica a partir da visualização e interpretação do ciclo trigonométrico
EXPERIMENTAL	PEREIRA (2016)	ARTIGO	A utilização de aplicativo no Geogebra para aprendizagem da trigonometria
EXPERIMENTAL	SOUZA(2015)	DISSERTAÇÃO	Aplicações teóricas e práticas da trigonometria para ensino significativo e interdisciplinar
EXPERIMENTAL	CANINDÉ(2006)	DISSERTAÇÂO	Dificuldades no processo de ensino de trigonometria por meio de atividades.
EXPERIMENTAL	PEDROSA (2012)	DISSERTAÇÃO	Uma proposta de ensino de trigonometria com o uso do software Geogebra
EXPERIMENTAL	SALDAN (2014)	DISSERTAÇÃO	Equações e inequações trigonométricas com aplicativo de matemática Geogebra
TEÓRICO	OLIVEIRA (2010)	DISSERTAÇÃO	Trigonometria: a mudança da prática docente mediante novos conhecimentos
TEÓRICO	SILVA (2013)	DISSERTAÇÃO	O ensino de trigonometria : perspectiva do ensino fundamental ao médio.
EXPERIENTAL	BARBOSA (2009)	DISSERTAÇÃO	Trajetórias hipotéticas de aprendizagem relacionadas ás razões e as funções trigonométricas ,visando uma perspectiva construtivista.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Na *apresentação e análise de resultados* cada uma das referências selecionadas foi analisada quanto a seus objetivos, metodologia, resultados e ressaltando-se sua relevância e contribuição para esta pesquisa.

Na *síntese e discussão de resultados* destacou-se alguns elementos que foram importantes para esta pesquisa no aspecto de ensino e aprendizagem de inequações trigonométricas no ensino médio que pudessem nortear a continuidade da pesquisa.

Pereira (2011) realizou uma pesquisa teórica sobre ensino em trigonometria no ensino Médio baseado na teoria da Aprendizagem Significativa.

O objetivo do estudo foi avaliar os efeitos da elaboração, aplicação e análise de uma abordagem didática baseada na Teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel e desenvolvida numa turma em uma escola pública zona urbana de Campina grande. O Processo Metodológico constou da construção de um módulo de atividades que enfatizavam as relações entre os conceitos que é o foco da Teoria de Ausubel. A proposta foi desenvolvida com secções realizadas em grupo e individualmente o que permitiu levantar dados baseados na observação e registro do desenvolvimento dos alunos nas atividades e através de um questionário, para auto avaliação impôs-se a condição de observar a reflexão dos alunos sobre a própria aprendizagem.

O autor mostrou com seus resultados a necessidade e a importância dos conhecimentos prévios e a possibilidade de retomada de conceitos de prévios para que haja o processo de ensino e aprendizagem significativo.

Oliveira (2014) realizou uma pesquisa teórica sobre o ensino da Trigonometria, o radiano e as funções seno cosseno e tangente. Analisou esses conteúdos nos parâmetros curriculares Nacional e uma breve análise deste tema em alguns dos livros didáticos adotado pelo guia dos livros didáticos de Matemática – PNLD-2012.

O objetivo foi apresentar um estudo sobre as funções trigonométricas no Ensino Médio, destacando os conceitos de radiano e a definição das funções seno, cosseno e tangente; contextualizando com a história da matemática, além de apresentar as fórmulas da adição e subtração de arcos, que são pouco explorados nos livros didáticos, três atividades embasadas na teoria de aprendizagem significativa de David Ausubel que apontaram caminhos para promover uma aprendizagem significativa.

Sua Metodologia usada para fazer tal pesquisa foi uma sequência didática com várias atividades que contemplam os conteúdos relacionados com o tema. As atividades foram elaboradas tendo como referencial teórico a Teoria da aprendizagem significativa e foi feita uma adaptação ao uso de tecnologias.

O autor falou que um dos fatores que traz a aprendizagem significativa é o uso de material potencialmente significativo, isto é material didático que envolve a participação ativa do aluno e que seja apoiado nos conhecimentos prévios dos mesmos que são características comtempladas nas atividades propostas neste trabalho.

O autor mostrou com sua pesquisa a importância do ensino por atividade e do uso de tecnologias no ensino para ajudar o aluno a participar cada vez mais nas aulas surgindo a vontade de crescer na aprendizagem.

Patriota e Duarte (2015) usaram uma metodologia qualitativa e quantitativa de analise livros didáticos, de currículos de matemática e levantamento bibliográficos no intuito de saber se os autores contemplam as inequações trigonométricas em suas obras. Para isso, elas fizeram um questionário aos professores de Matemática, tendo como motivação principal, as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem segundo a teoria de Ausibel, relativa do campo conceitual trigonométrico.

As autoras identificaram a escassez de produção cientifica voltada para o tema de inequações trigonométricas, adicionada aos obstáculos didáticos na aprendizagem e abordagem dos seus conceitos teóricos e práticos, sendo uma pesquisa exploratória que identificou em um curso de licenciatura em Matemática na UFPE, que os alunos apresentam grandes dificuldades de compreensão dos cálculos em Matemática, e que devido a esse obstáculo apontado pelos professores, em trigonometria, e em especial as inequações trigonométricas.

A pesquisa também constou de um estudo de livros didáticos utilizados pelos sujeitos da pesquisa, em que obteve como resultado os dados apresentados na figura 1:

Figura 1- Abordagem das Inequações Trigonométricas no livro didático.

ÊNFASE	PERCENTAGEM	QUANTITATIVO POR PROFESSOR
Regular	17,5%	07
Pouca	30%	12
Nenhuma	52,5%	21
TOTAL	100%	40

Fonte: Patriota e Duarte (2015)

As autoras concluíram sobre esses resultados que o ensino de inequações trigonométricas não está recebendo muita ênfase nas escolhas dos professores dos livros didáticos de edições recentes, contudo observou que existem conceitos como o em foco que na vida do estudante, principalmente aquele que irá fazer cursos das exatas precisa ser revisitado.

Essa foram informações importantes para esta pesquisa porque mostra onde as inequações trigonométricas devem ser estudadas e que deve ser abordada de maneira mais eficiente pelos professores e pelos livros didáticos, de forma que venha diminuir os obstáculos didáticos encontrados pelos alunos e contribuir de maneira significativa para o processo de ensino e aprendizagem desse objeto matemático.

Pinheiro (2008) realizou uma pesquisa sobre o ensino de trigonometria na educação básica a partir da visualização e interpretação geométrica no ciclo trigonométrico. O objetivo desta pesquisa é apresentar uma forma de ensinar, sem o uso excessivo de formula que geralmente faz os alunos perderem a motivação. Sua metodologia foi usar a Engenharia Didática como referencial teórico que usou a elaboração de uma sequência didática de forma que venha contribuir para uma melhoria do ensino e aprendizagem de trigonometria.

Nessa pesquisa de caráter investigativo, o autor usou a visualização e a interpretação geométrica do ciclo trigonométrico como objeto de ampliação das possibilidades para o estudo das propriedades trigonométricas e suas funções básicas como seno, cosseno e tangente.

O autor construiu as atividades de acordo com os fundamentos metodológicos das concepções investigativas de integração de conteúdos e estão vinculados aos conceitos específicos de desenho, da formalização e ainda proporcionando aos alunos as atitudes necessárias para o desenvolvimento dos objetivos de aprendizagem.

O autor tem como resultado da pesquisa uma nova alternativa para o ensino de trigonometria e também a melhora no processo de aprendizagem dos alunos com relação a compreensão dos conceitos desse conteúdo.

Na avaliação feita pelo professor colaborador, com relação à metodologia aplicada, houve aceitação da proposta. A interpretação geométrica, através da construção e visualização da circunferência trigonométrica, que foi proporcionada pelas atividades numa perspectiva investigativa, foi o diferencial na didática de ensino nessa proposta metodológica.

Pereira (2016) realizou uma pesquisa sobre a utilização de aplicativo usando o software Geogebra para aprendizagem da trigonometria no ensino médio. O objetivo desse estudo foi a criação, execução e a análise de uma sequência didática de caráter interativo e dinâmico que tenha uma aprendizagem dos conceitos fundamentais da trigonometria no ensino médio. A intervenção metodológica foi feita com alunos do segundo ano do ensino médio de uma escola pública da cidade de Marechal Deodoro, AL.

A ideia teve como base os referenciais teóricos metodológicos Engenharia Didática de MICHELE ARTIGUE, Teoria das situações Didáticas de GUY BROUSSEAU e teoria de registros de representação Semiótica de Raymond Duval. O autor mostrou que os resultados após a análise das atividades apontam que os APPLETS são um recurso Didático que tornam as aulas mais dinâmicas, motivando os alunos e favorecendo as conjecturas de construção de propriedades e de relações trigonométricas.

O autor conclui que de modo geral, somente o uso de lousa e giz em aulas expositivas dificulta a aprendizagem desse conteúdo matemático por parte dos estudantes da educação básica. Essa constatação implícita deu motivo para uma busca de método alternativo, mais interativo, que permitisse uma maior participação dos estudantes.

Dessa forma, nasceu a ideia da utilização de um software de geometria dinâmica e constatou-se que seria uma ferramenta de grande utilidade para atingir os objetivos desejados, haja vista que ele possibilita a valorização dinâmica dos objetos matemáticos e permite que, ativamente, o aluno analise, conjecture, generalize e assimile.

Foi constatado durante a realização deste trabalho que uma sequência didática, com base na teoria representações semióticas de Duval é capaz de produzir efeitos relevantes no processo de ensino de Trigonometria. Ela contribuiu efetivamente na motivação e na redução das dificuldades dos alunos em relação à Trigonometria. A utilização das representações semióticas de Duval juntamente com o uso do GeoGebra que auxiliou os alunos na superação das dificuldades de aprendizagem em trigonometria.

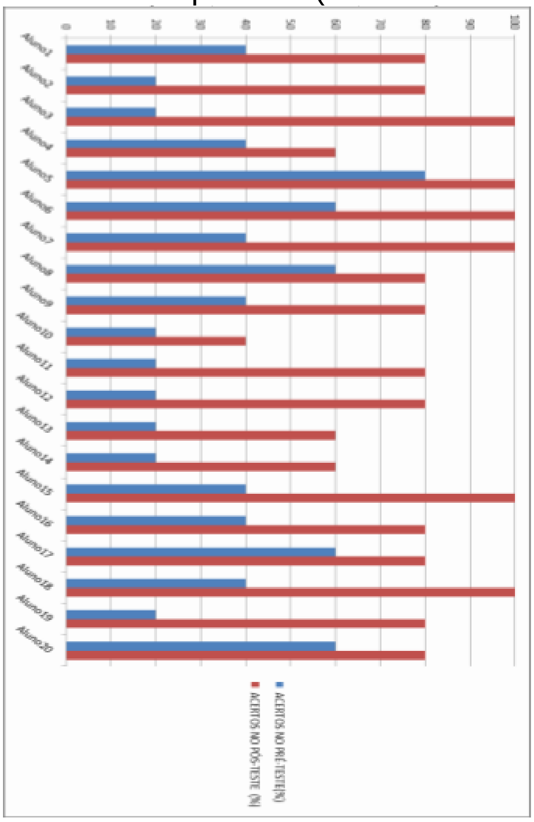
O autor constatou que durante a realização desse trabalho que uma sequência didática, com base na teoria das situações didáticas de BROUSSEAU e da teoria das representações semióticas de DUVAL é capaz de produzir efeitos relevantes no processo de ensino de trigonometria. Ela contribui de maneira efetiva na motivação e na resolução de dificuldades dos alunos em relação a trigonometria.

Souza (2015) realizou uma pesquisa sobre aplicação teórica e prática da trigonometria com uma perspectiva de um ensino significativo e interdisciplinar. O objetivo do estudo foi verificar que a trigonometria pode ser aplicada em diversas disciplinas e não somente em si mesma e sem a mínima atração para os alunos. A metodologia utilizada foi a engenharia didática para ser elaborada uma sequência didática com atividades próximas a realidade do estudante.

O autor colocou uma situação problema para os alunos e a partir dela foi explanando os conceitos referentes às soluções, e percebeu que essa estratégia pode vir a ser uma ferramenta poderosa para o ensino de matemática, pois desta maneira o aluno foi encorajado a descobrir o que está envolvido por trás dos problemas, pois esses se encontram presentes no seu cotidiano e não tão distantes de sua realidade.

Ao comparau-se os resultados do pré-teste e pós-teste na Figura 2:

Figura 2- Análise comparativa (Pré-Teste e Pós-Teste)



Fonte: Souza (2015)

Desses dados o autor inferiu que com a aplicação da sequência didática houve uma melhora significativa da aprendizagem e concluiu que a proposta pedagógica atingiu o seu objetivo: contribuir de forma significante para o aprendizado dos alunos detectou algumas dificuldades apresentadas.

Essa pesquisa ressaltou a importância de se desenvolver no aluno a capacidade de relacionar o aprendido com o observado e a teoria com suas consequências e aplicações práticas.

Canindé (2006) realizou uma pesquisa sobre as dificuldades que os professores do ensino médio enfrentam no processo de ensino de trigonometria através de atividades dentro de um enfoque construtivista. Com o objetivo de analisar algumas publicações e dissertações relacionadas com o estudo de trigonometria elaborada nos últimos anos por diversos autores. Utilizou como metodologia de pesquisa a Engenharia didática, apresentando um conjunto de atividades que serviu de amostra para outros professores de matemática, e apontou caminhos para a superação das dificuldades encontradas.

O autor concluiu que o ensino por atividades produz resultados positivos para a aprendizagem e o crescimento de competências do aluno. O autor mostrou também uma comparação entre o ensino por atividades e o ensino tradicional, em turmas diferentes, ficando de maneira clara as diferenças no processo de ensino e aprendizagem e o diferencial na melhora da aprendizagem quando se adota o ensino por atividades como metodologia de ensino.

Pedrosa (2012) desenvolveu um conjunto de atividades que compõe uma sequência de ensino. Optou pela elaboração dessa sequência, sua aplicação e posterior análise, embasada pela teoria dos campos conceituais, teve como objetivos principais: testar uma atividade didática que pudesse contribuir para a melhoria do ensino e fortalecer uma discussão ao longo do desenvolvimento da pesquisa em relação ao tema. A autora não tinha a intenção de verificar e analisar problemas relativos a aprendizagem e ao ensino, mas construir uma alternativa didática como uma sugestão de material para outros professores utilizarem com seus alunos, fazendo alterações conforme as suas necessidades.

O caráter inovador dessa experiência de ensino está relacionado ao uso do software Geogebra, um programa que permite estudar álgebra e geometria com apoio visual. O uso do Geogebra mostrou-se eficaz como auxílio na elaboração de situações de aprendizagem ricas em possibilidades de construção de conhecimentos. As manipulações das figuras apresentadas para os alunos, bem como as construções realizadas por eles, promoveram um dinamismo nas atividades, possibilitando por tentativas e erros, confirmações de hipóteses, observações entre os objetos variáveis e fixos.

No levantamento realizado constatou-se que os temas relacionados a trigonometria são pouco abordados, e trazem de forma nítida uma desvalorização dos trabalhos feitos pelos Matemáticos do passado, e percebeu-se que mesmo diante de suas contribuições para o desenvolvimento social e cientifico, seu estudo é pouco explorado no cotidiano dos alunos, sem ligação com a sua realidade.

Por isso o autor construiu uma sequência de ensino que proporcionou aos alunos a manipulação de figuras, a observação de variações, relações e propriedades das construções geométricas. Permitiu a eles criar hipóteses e testá-las, confirmando-as ou reformulando-as quando necessário. Esse dinamismo e interatividade beneficiou sua aprendizagem, pois o grupo saiu da postura de ouvinte de explicações para uma postura de investigador de hipóteses de padrões, de relações, ou seja, os exercícios eram dados e eles tinham que buscar e/ou elaborar as explicações e as respostas. Com a experiência, os alunos assumiram o papel de construtores do seu próprio conhecimento e a professora assumiu o papel de mediadora.

A sequência de ensino trouxe outro benefício, além da mudança de papéis no processo de ensino, que não era esperado, e relação afetiva entre o professor e os alunos mudou.

A experiência dessa pesquisa mostrou-se como alternativa interessante para o ensino da trigonometria por ter instigado os alunos a pensarem sobre a trigonometria de forma diferente e colocando o professor no papel de mediador de aprendizagem e não mero transmissor de conhecimento.

Saldan (2014) a forma sistemática de apresentação de conteúdo de equações e inequações trigonométricas, faz um estudo detalhado do objeto matemático que muito pode contribuir para a formação de professores, trazendo a compreensão do tema, além de estimular professores a procurar novos caminhos para a aprendizagem.

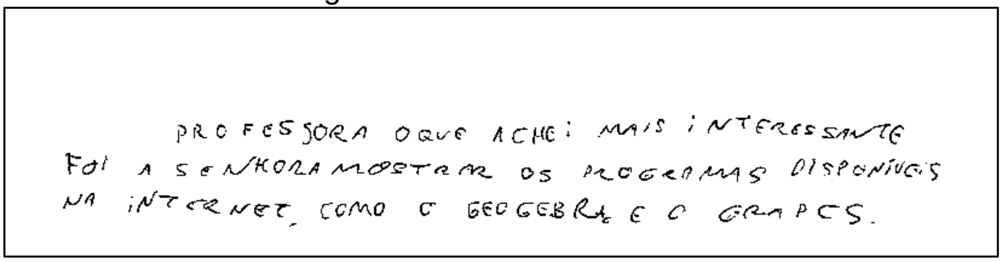
O objetivo dessa pesquisa foi apresentar ferramentas apropriadas e fundamentadas para que professores e alunos logrem êxito com o desenvolvimento, entendimento e aplicação dos temas propostos, tanto na resolução de problemas relativos ao ensino médio (processos seletivos, provas e vestibulares) quanto na vida acadêmica que porventura almejem.

O autor faz inicialmente um relato histórico do objeto matemático equações e inequações trigonométricas e em seguida faz uma fundamentação teórica e metodológica, para ao longo da pesquisa fazer uma fundamentação matemática detalhada do objeto de pesquisa. Ao final o autor propõe uma aplicação na física para movimento harmônico e movimento circular.

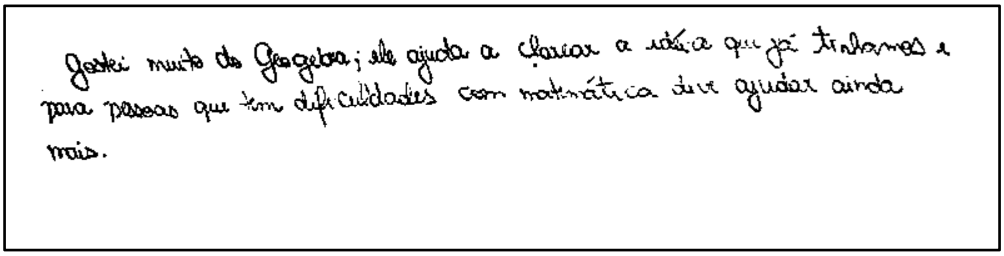
Esse trabalho se mostra relevante ao que tange a formação e capacitação de professores no ensino de equações trigonométrica dando ênfase ao estudo desse objeto matemático e colaborando para possíveis obstáculos epistemológicos de sua formação.

Oliveira (2010) utilizou o software Geogebra como ferramenta no processo de ensino de trigonometria o que trouxe para os alunos um mundo novo, abrindo sua compreensão do tema e tirando o professor da aula tradicional, contribuindo de maneira significativa para o desenvolvimento da aprendizagem da trigonometria, conforme relato dos alunos, diante dos depoimentos abaixo

Figura 3- Relatos dos alunos



PROFESSORA O QUE ACHEI MAIS INTERESSANTE FOI A SENHORA MOSTRAR OS PROGRAMAS DISPONÍVEIS NA INTERNET COMO O GEOGEBRA E O GRAPCS.



Gostei muito do Geogebra; ele ajuda a clarear a idéia que já tínhamos e para pessoas que tem dificuldades com matemática deve ajudar ainda mais.

Fonte: Oliveira (2010)

Os dados da pesquisa revelaram também que nem todos os professores conseguem trabalhar com as tecnologias de informação pela falta de treinamento e capacitação. Essa pesquisa, portanto, trata-se de uma contribuição inovadora que além de mudar o dinamismo das aulas, dá um caráter diferenciado. E a tecnologia na educação, quando usada de maneira planejada, é capaz de atingir resultados significativos na busca de formar um cidadão capazes de raciocinar e habilitado a enfrentar o mercado de trabalho, aproveitando as oportunidades. O Mestrado profissional surge com grande eficácia em aprimorar a prática docente do professor. É um momento de grande importância no sentido colaborativo, pois há contato com diversos profissionais da mesma área que compartilham com experiências diferentes. Ao mesmo tempo, por continuar o seu trabalho, o professor pesquisador tem um laboratório diário do qual pode tirar reflexões e análises do seu próprio trabalho.

Silva (2013) fez investigações sobre o ensino de trigonometria do ensino fundamental ao médio, mostra claramente que a trigonometria pode ser desenvolvida de maneira interessante, interativa e significativa para os alunos em todos os níveis de escolaridade.

O objetivo do trabalho é propor uma abordagem no ensino de trigonometria desde o 9◦ ano do ensino fundamental até o final do ensino médio, respeitando o currículo básico da matemática e o nível de aprofundamento do conteúdo de acordo com a faixa etária dos estudantes.

Para isso ele usou uma série de atividades envolvendo desde o triângulo retângulo, passando pelo contexto histórico, mergulhando no ciclo trigonométrico, de forma que o aluno fosse observador, investigador, analista e testador na resolução de problemas, formando uma visão ampla e científica da realidade.

O autor mostrou também que as razões trigonométricas e as leis do seno e cosseno podem ser úteis para calcular distancias inacessíveis. Outras características desse processo de ensino por atividades, mostra que a trigonometria pode ser aplicada em diversos fenômenos periódicos como comportamento ondulatório, variação de temperatura, passando pelas equações e inequações trigonométricas.

Barbosa (2009) baseou-se numa visão construtivista por trazer grandes contribuições para o processo de ensino e aprendizagem, dando indícios de como se processam as diferentes formas de aprendizagem.

Durante a aplicação da metodologia, os alunos não tiveram muitas dificuldades em relação a leitura e interpretação dos textos, pois as atividades em textos simples de fácil compreensão da maioria dos alunos. Os professores orientavam os alunos para se organizarem em grupos, de modo que as atividades eram distribuídas para rapidamente serem feitas.

Os alunos mostraram uma participação ativa em praticamente todas as atividades, com exceção da atividade 4, sendo necessária a intervenção do professor, que percebeu que a atividade envolvia muitos conceitos, dificultando sua interpretação. Os estudantes sujeitos da pesquisa teceram diversos comentários relatando a importância e a contribuição que as atividades trouxeram para o seu aprimoramento em trigonometria.

A parte mais interessante foi que o trabalho pôde ser feio em grupo dando oportunidade de os alunos discutirem os resultados e assim chegar a uma solução, uma forma de aprender com a colaboração e ajuda dos colegas.

Alguns relatos dos estudantes:

> -O trabalho foi muito interessante, nós descobrimos novas técnicas para fazer os cálculos e aprimorarmos o nosso conhecimento sobre o assunto.
>
> -Não tenho nenhuma crítica a fazer sobre as atividades a não ser a atividade número 7, que estava meio complicada, tinha um grau de dificuldade maior que as outras.
>
> - As atividades propostas foram muito interessantes, pois mostraram um modo diferente de calcularmos seno e cosseno, vimos como é fácil descobrir ângulos a partir de medidas de um lado de um triangulo e, percebermos que razão entre os lados sempre a mesma quando o angulo é o mesmo, não importando o comprimento de seus lados, uma nova forma de ver a matemática.
>
> - O ponto forte foi a participação da sala, mas o ponto fraco foi as questões tem o mesmo sentido tanto na pergunta como na resposta.
>
> -Eu gostei demais das atividades foram bem legais, participei de todas, aprendi bastante sobre trigonometria, tive um bom desempenho, conheci coisa que eu nem sabia que existia, foi muito bom, se tivesse de novo eu participaria com maior prazer, pois aprender nunca é demais.

Assim, essa pesquisa ressaltou a importância de se promover atividades de ensino que instiguem a participação ativa dos estudantes mostrando que a proposta construtivista é uma potencial teoria ser adotada também para o ensino de inequações trigonométricas.

Diante das treze análises apresentadas construiu-se uma análise global de modo a sintetizar a relevância e contribuição de cada pesquisa para esta, como apresentado no quadro 3:

Quadro 3- Contribuições dos estudos.

Autor	**Contribuição**
Pereira (2011)	Ressalta a importância dos conhecimentos prévios antecipadamente para que haja o processo de ensino e aprendizagem significativo.
Oliveira (2014)	Mostrou a importância do ensino por atividade e do uso de tecnologias no ensino para ajudar o aluno a participar cada vez mais nas aulas surgindo a vontade de crescer na aprendizagem.
Patriota e Duarte (2015)	Mostrou que as inequações trigonométricas devem ser abordadas de maneira mais eficiente pelos professores e nos livros didáticos, de forma que venha diminuir os obstáculos didáticos encontrados pelos alunos e contribuir de maneira significativa para o processo de ensino e aprendizagem desse objeto matemático.
Pinheiro (2008)	Aplicou atividades realizando interpretação geométrica, através da construção e visualização da circunferência trigonométrica, que foi proporcionada pelas atividades numa perspectiva investigativa.
Pereira (2016)	Considerou o uso de tecnologias e as teorias das situações didáticas e das representações semióticas na construção de propostas de ensino de inequações trigonométricas.
Souza (2015)	Ressaltou a importância de se desenvolver no aluno a capacidade de relacionar o aprendido com o observado e a teoria com suas consequências e aplicações práticas.
Canindé (2006)	Indicou o ensino por atividades como uma forma de ensino de trigonometria e utilizou uma metodologia que comparou em turmas diferentes o ensino tradicional e o ensino por atividades.
Pedrosa (2012)	A experiência dessa pesquisa mostrou-se como alternativa interessante para o ensino da trigonometria por ter instigado os alunos a pensarem sobre a trigonometria de forma diferente e colocando o professor no papel de mediador de aprendizagem e não mero transmissor de conhecimento, além de estimular a investigação e aprendizagem colaborativa.
Saldan (2014)	Esse trabalho se mostra relevante ao que tange a formação e capacitação de professores no ensino de equações trigonométrica dando ênfase ao estudo desse objeto matemático e colaborando para possíveis obstáculos epistemológicos de sua formação.
Oliveira (2010)	Ressaltou a importância do Mestrado profissional em aprimorar a prática docente bem como a potencialidade de recursos de tecnologia para o ensino de trigonometria.
Barbosa (2009)	Ressaltou a importância de se promover atividades de ensino que instiguem a participação ativa dos estudantes mostrando que a proposta construtivista é uma potencial teoria ser adotada também para o ensino de inequações trigonométricas.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Em todas as pesquisas estudadas, analisando a observação da prática do professor, constatou-se que somente aulas expositivas com quadro e giz e sem uma interação significativa e afetiva com os alunos o ensino de matemática se tornou cada vez mais distante de uma aprendizagem considerada razoável, pois é preciso que o professor possa ter uma criatividade aguçada no sentido de impactar o aluno e de maneira consistente e persistente na melhora do processo de ensino a aprendizagem.

As várias experiências aqui relatadas revelam uma carência de atividades de ensino especificamente para o ensino de Inequações Trigonométricas. No entanto, há muitos estudos que abordam funções trigonométricas que comtemplam objeto matemático de estudo desta pesquisa. Nessas pesquisas evidenciou-se uma tendência pela adoção da engenharia didática como metodologia de pesquisa e por metodologias de ensino que envolvam ensino por atividades, tecnologias, análise semiótica e aprendizagem significativa, além de experiências bem-sucedidas de sequências didáticas que agucem no educando a capacidade investigativa e argumentativa no processo de construção autônoma de seu conhecimento.

De todo modo, com os resultados dessa revisão de estudos esta pesquisa teve continuidade com várias possibilidades de metodologias de didático-pedagógicas que pudessem ser utilizadas na construção da sequência didática para o ensino de Inequação Trigonométrica.

Sobre tudo, identificou-se a relevância de se investir em propostas que promovam e instiguem o interesse dos estudantes em aprender, reconhecendo que a construção do saber também é coletiva fruto de discussão e valorização dos conhecimentos previamente adquiridos pelo estudante.

2. 2 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

A seguir é apresentada a análise de 5 livros do PNLD dos anos de 2013 a 2017, sobre o objeto matemático Inequações Trigonométricas no ensino médio, a respeito das descrições básicas de cada obra, sobre os descritores atendidos no SISPAE e PROVA BRASIL em seus exercícios e problemas, bem como a análise de questões por nível da Taxionomia de Bloom.

Embora nos descritores encontrados não haja a descrição direta do assunto Inequação Trigonométrica, os temas funções trigonométricas e equações trigonométricas estão diretamente ligados ao assunto em questão, por esse motivo apresenta-se o quadro 4:

Quadro 4- Descritores que envolvem Inequação Trigonométrica

Descritores da prova Brasil atendidos	**D30** Identificar gráficos de funções trigonométricas, seno, cosseno e tangentes, reconhecendo suas propriedades e desigualdades**.**
Descritores do SISPAE atendidos	H13 Resolver equações trigonométricas simples, compreendendo o significado das condições e dos resultados obtidos em problemas diversos.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Os livros abaixo descritos são referentes ao 2º ano do ensino médio, apenas cinco foram analisados, haja vista que em alguns livros o tema Inequação Trigonométrica não é encontrado.

Quadro 5- Descrição dos Livros

Livro 1	**Título:** Conexões com a Matemática- Volume 2 **Autor:** Fábio Martins de Leonardo **Editora:** Moderna **Ano:** Publicação 2013, PNLD 2015-2017
Livro 2	**Título:** Curso Prático de Matemática – volume 1 **Autor:** Paulo Bucchi **Editora:** Moderna **Ano:** Publicação 1998
Livro 3	**Título:** Matemática por Assunto -volume 3 **Autor:** Fernando do Coltro Antunes **Editora:** Scipione **Ano:** 1988
Livro 4	**Título:** Elementos da Matemática –volume5 **Autor:** Marcelo Rufino de Oliveira **Editora:** Ximango **Ano:** 2017
Livro 5	**Título:** Curso de Matemática **Autor:** Edvaldo Bianchini e Herval Pacola **Editora: Ano:** editora Moderna – PNLD 2003-2006

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Ao fazermos a busca dos livros didáticos, percebemos que ao longo dos anos o assunto Inequação Trigonométrica tem sido pouco abordado e que há anos atrás era um tópico exclusivo dentro dos livros didáticos, a exemplo dos livros 2, 3 e 5.

Esse é um dado preocupante, tendo em vista os trabalhos apresentados na revisão de estudos na seção 2.2 em que se evidencia o objeto matemático desta pesquisa como assunto frequente em questões de concursos militares e demais processos seletivos que proporcionam ascensão social. Tal constatação leva a uma indagação e inquietação que pode ficar para os leitores e professores que participam da escolha dos livros didáticos: Por que os livros didáticos mais recentes pouco valorizam o assunto Inequação Trigonométrica?

Analisando os cinco livros elencados, apresenta-se no seguinte quadro uma apresentação quantitativa de páginas, questões por tipo ou estilo, questões quanto a necessidade de informações.

Quadro 6- Análise de Livros Didáticos

CRITÉRIOS	Livro 1	Livro 2	Livro 3	Livro 4	Livro 5
Quantidade de páginas sobre o assunto	3	9	1	18	9
Quantidade de questões sobre o assunto	17	17	3	39	9
Quantidade de questões de Múltipla escolha	0	7	2	30	5
Quantidade de questões do tipo prova Brasil ou SISPAE	11	7	2	30	5
Quantidade de questões do tipo prova Brasil ou SISPAE por descritor	11	7	2	30	5
Quantidade de questões por descritor SISPAE	11	7	2	30	5
Questões com informações desnecessárias	0	0	0	0	0
Questões com falta de informações	0	0	0	0	0
Questões com possibilidades de mais de uma solução	0	0	0	0	0

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Analisando o quadro com as informações quantitativas sobre os livros analisados percebe-se que quanto ao número de páginas dedicadas ao assunto Inequação Trigonométrica o livro 4 supera os demais, entretanto não se trata apenas de um livro didático escolar, é um livro que pode ser consultado inclusive por estudantes de ensino superior. Verifica-se que os livros do PNLD, livros 1 e 6, dedicam menos página ao assunto havendo uma redução de 9 para 3 páginas ao longo de um pouco mais de uma década.

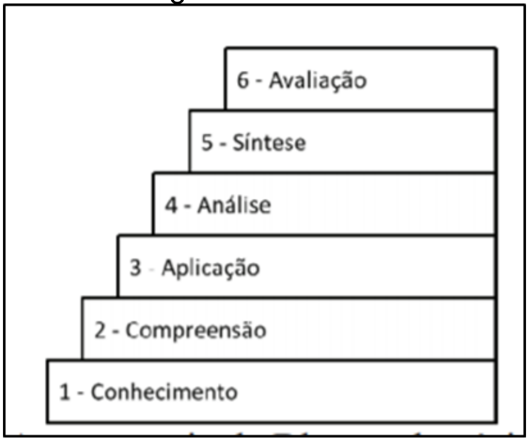
Quanto ao número de questões sobre Inequações Trigonométricas, os livros 4, 1 e 2 são os que mais se destacam. Quanto ao número de questões objetivas os livros 2 e 4 possuem maior número de questões. Esses dados mostram que os livros 2 e 4, que não são do PNLD, apresentam uma oportunidade melhor de aprofundamento do assunto por meio de problemas e exercícios.

Quanto ao quantitativo de questões por estilo SISPAE e Prova Brasil e por descritor, percebe-se que todos os livros comtemplam esses critérios embora em quantidade diferente, tendo maior quantitativo de questões os livros 1 e 4, que são os mais recentes, o que mostra uma tendência das novas edições em se adequarem as atuais diretrizes educacionais curriculares.

Quanto ao quantitativo com falta ou excesso de informação ou mais de uma possibilidade de resposta, não houve ocorrência, sendo estes fatores positivos, pois significa que as questões não induzem a interpretações equivocadas.

As questões dos livros analisados também foram analisadas segundo ao domínio cognitivo exigido para sua resolução. Essa análise foi feita segundo a Taxionomia de Bloom, que avalia esse domínio cognitivo em níveis de: conhecimento, compreensão, aplicação, análise, síntese e avaliação.

Figura 4- Níveis cognitivos da taxonomia de Bloom.



Fonte: Bloom (1973)

Ferraz e Belhot (2010) definem as dimensões dos níveis de Taxionomia Bloom pelos seguintes critérios:

> 1. Lembrar: Relacionado a reconhecer e reproduzir ideias e conteúdos. Reconhecer requer distinguir e selecionar uma determinada informação e reproduzir ou recordar está mais relacionado à busca por uma informação relevante memorizada.
> 2. Entender: Relacionado a estabelecer uma conexão entre o novo e o conhecimento previamente adquirido. A informação é entendida quando o aprendiz consegue reproduzi-la com suas "próprias palavras".
> 3. Aplicar: Relacionado a executar ou usar um procedimento numa situação específica e pode também abordar a aplicação de um conhecimento numa situação nova.
> 4. Analisar: Relacionado a dividir a informação em partes relevantes e irrelevantes, importantes e menos importantes e entender a inter-relação existente entre as partes.
> 5. Avaliar: Relacionado a realizar julgamentos baseados em critérios e padrões qualitativos e quantitativos ou de eficiência e eficácia.

> 6. Criar: Significa colocar elementos junto com o objetivo de criar uma nova visão, uma nova solução, estrutura ou modelo utilizando conhecimentos e habilidades previamente adquiridos. Envolve o desenvolvimento de ideias novas e originais, produtos e métodos por meio da percepção da interdisciplinaridade e da interdependência de conceitos. (Ferraz e Belhot, 2010, p. 429)

A seguir, apresento o nível de taxionomia das questões encontradas nos livros didáticos analisados, envolvendo os níveis cognitivos: Conhecimento (Lembrar), Compreensão (Entender), Aplicação (Aplicar), Análise (Analisar), Síntese (Criar) e Avaliação (Avaliar).

Quadro 7- Níveis cognitivos das questões dos livros analisados

Livro	**Níveis da Taxionomia**					
	Conhecimento	**Compreensão**	**Aplicação**	**Análise**	**Síntese**	**Avaliação**
Livro 1	17	17	17	1	-	-
Livro 2	17	17	17	1		
Livro 3	2	2	2	1		
Livro 4	30	30	30	1		
Livro 5	5	5	5	1		

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Analisando os dados do quadro 7, temos que nenhum dos livros apresentam questões a nível de síntese e de avaliação, isto é, não permitem que se estabeleça relações e critérios de resolução e não permite o desenvolvimento de ideias originais e interdisciplinares. Cada um dos livros apresentou exatamente uma questão de análise, ou seja, questão que requer ser resolvida por partes realizando interpelações.

Em quantidades diferentes todos os livros analisados apresentaram questões em que os estudantes precisariam lembrar, entender e aplicar os conhecimentos sobre inequação trigonométrica, tendo destaque para o livro 4 que apresentou maior número de questões.

Registra-se que o tema de inequações trigonométricas não aparece nas olimpíadas brasileiras de matemática das escolas públicas (OBMEP) desde o ano de 2005 quando teve a sua primeira edição, isso mostra um sinal claro de que alguns conteúdos do ensino médio estão em processo de extinção. Tal fato mostra de maneira bastante significativa a preocupação como professor em tomar ciência de uma mudança profunda nos temas de matemática do ensino médio e uma reflexão em relação a trigonometria, assunto fundamental para se entender novos temas que tem a tem como suporte, como funções trigonométricas, números complexos, cálculo etc.

2. 3 ESTUDO DIAGNÓSTICO COM ESTUDANTES

Tem surgido, a cada dia, grandes discussões ligadas ao fracasso da matemática no ensino básico, como as apresentadas na revisão de estudos e sobre a relação com o desenvolvimento das competências e habilidades que norteiam, tais como a BNCC e os PCN que são referências oficiais no ensino básico neste país. De maneira contínua são verificados os fracos resultados dos alunos nos Exames Nacionais do ensino Básico como PROVA BRASIL (Ensino Fundamental) e (PISA) Programa Internacional de Avaliação de Alunos. Embora haja um esforço de alguns programas de capacitação, formação continuada de professores, é difícil alcançar os níveis de desempenho considerados aceitáveis.

Atualmente orienta-se no sentido de um ensino de Matemática planejado que passa por um Currículo da disciplina, onde cada professor toma para si a responsabilidade de mediador da aprendizagem por meio de suas ações e interações com o educando. E quando fala-se em Currículo diz-se que “Currículo é tudo aquilo que uma sociedade considera importante para que os alunos tenham uma aprendizagem significativa ao longo de sua vida escolar ’’ (MELO, 2014, p.72).

Ao longo da História o currículo e o ensino da Matemática veio ganhando estruturação, seja no campo internacional ou nacional, nesse cenário tem se observado segundo Santos (2008) que a partir das ressonância do movimento da matemática moderna (MMM) que teve uma ruptura de ideias relacionadas ás estruturas curriculares e ao processo de ensino da Matemática, chegando no ápice das posições e concepções que daria um novo cenário.

O currículo, enquanto instrumentação da cidadania democrática, deve contemplar conteúdos e estratégias de aprendizagem que capacitem o ser humano para a realização de atividades nos três domínios da ação humana: a vida em sociedade, a atividade produtiva e a experiência subjetiva, visando a integração de homens e mulheres no tríplice universo das relações políticas, do trabalho e da simbolização subjetiva.

Em relação ao objeto matemático Inequação Trigonométrica, as atuais normativas curriculares tais como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), não indicam ênfase nessa temática, que faz parte do conteúdo de Trigonometria do ciclo trigonométrico do Ensino Médio de forma indireta, vejamos:

> (EM13MAT404) Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2017, p. 531)

Ocorre que a ideia de desigualdade e intervalo no ciclo trigonométrico pode ser elemento fundamental na compreensão da periodicidade, domínio e imagem das funções trigonométricas. Além disso, percebe-se que a função tangente, sequer é citada na habilidade acima citada. Tais constatações evidenciam lacunas no currículo de Matemática, que é necessário que o professor preencha para que seu educando possa ter a oportunidade de estudar os conteúdos de forma mais completa.

Nesta fase da pesquisa busca-se investigar como está a aprendizagem de Inequação Trigonométrica e para isso realizou-se o estudo diagnóstico de dificuldades na aprendizagem desse conteúdo em uma turma do terceiro do Ensino Médio de uma escola pública de Imperatriz - MA, ou seja, com estudantes egressos do segundo ano, série em que se estuda o objeto matemático em questão.

Dessa pesquisa de campo participaram 100 estudantes em 14/5/2018, por cerca de 2 h/aula de 45 minutos onde foram aplicados um questionário, um quadro de dificuldades relacionado a aprendizagem de Inequações Trigonométricas e um teste de verificação de aprendizagem, em que foi preservado o anonimato dos estudantes que participaram de forma voluntária firmando essa participação voluntária por meio de termo de consentimento livre e esclarecido. Após a coleta de dados, foi feita a tabulação e análise dos resultados.

O questionário foi feito em três partes, a primeira mostrou a relação pedagógica entre as partes envolvidas no processo de ensino e aprendizagem e outras questões pertinentes. A segunda parte mostrou um quadro de dificuldades sobre tópicos relacionados e suas divisões sobre as inequações trigonométricas. A última parte do questionário é um teste com questões subjetivas que aborda os tópicos trabalhados no quadro de dificuldades.

O gráfico 1 trata do gosto por estudar Matemática.

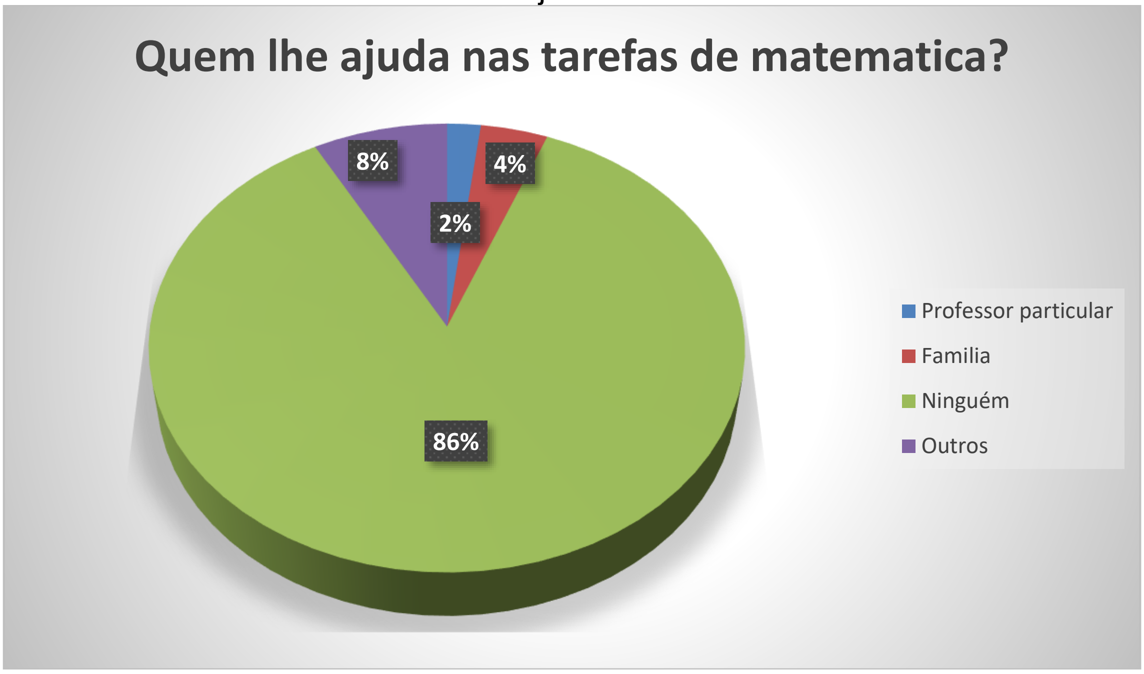
Gráfico 1- Gosto pela matemática.

Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

Pode-se verificar que a maioria dos estudantes consultados, 61%, gosta um pouco de Matemática e segundo lugar aparece os alunos que suportam a Matemática, 24%. Isso mostra uma baixa afetividade dos sujeitos em relação a Matemática o que, segundo Santos (2017) pode ser influência da dificuldade de aprendizagem em matemática que os sujeitos tenham.

A seguir apresenta-se algumas discussões sobre as respostas dos sujeitos da pesquisa. O seguinte gráfico da participação da família da realização das tarefas de matemática.

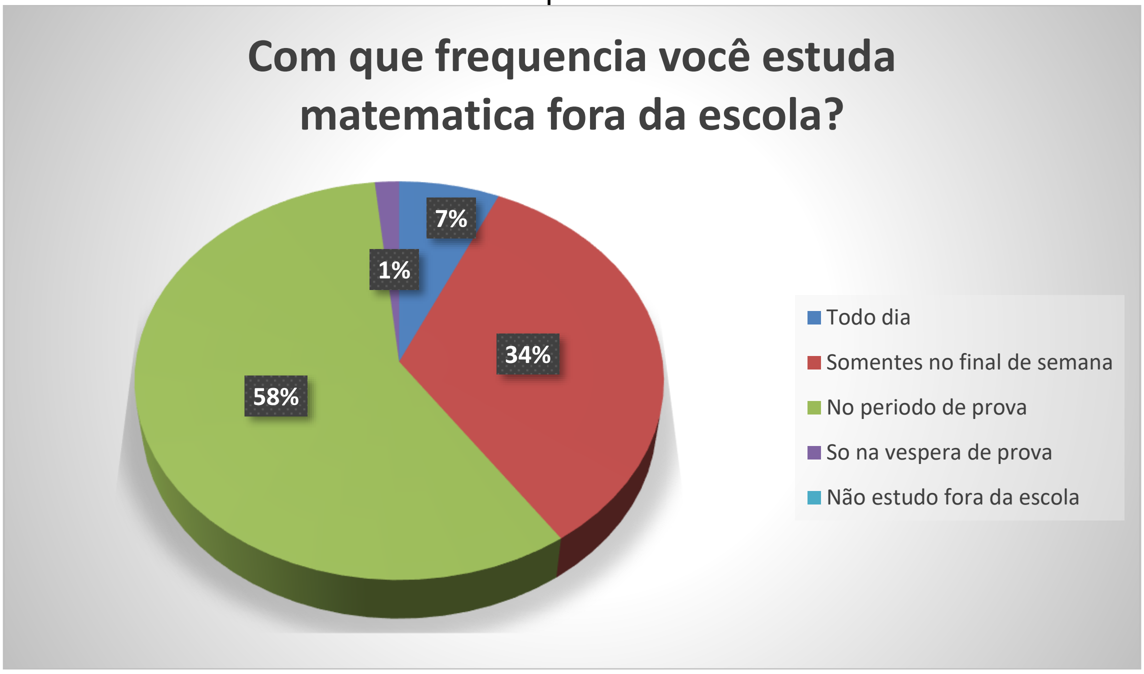
Gráfico 2- Ajuda nas tarefas.



Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

Ao analisar o gráfico anterior, pode-se constatar que os estudantes não recebem ajuda nos estudos em casa, haja vista que 86% dos sujeitos afirmam que ninguém os ajuda nas tarefas de Matemática. Isso pode implicar numa falta de rotina de estudo fora do ambiente escolar, afetando no aprofundamento dos estudos que serviram para preparar o indivíduo para a vida adulta e estimular o reconhecimento fundamental da Matemática em nossa sociedade, como alude Godoy (2012, p.256).

Gráfico 3- Frequência de estudo.



Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

Ao analisar o gráfico sobre o período de estudo dos sujeitos, percebe-se que a maioria, 58%, estuda Matemática no período de provas ,34% somente nos finais de semana,1% só na véspera de prova, 7% estuda todos os dias. Mais uma vez evidencia-se que os sujeitos não possuem uma rotina de estudo que, conforme Godoy (2012), os permita desenvolver competências matemáticas que os prepare para a vida adulta, reconhecendo a utilidade da Matemática na sociedade.

A segunda parte da pesquisa diagnóstica com estudantes foi o questionário onde foi verificado alguns tópicos que envolvem temas conceitos e definições no ensino de trigonometria e consequentemente o ensino de Inequações Trigonométricas. Foi perguntado aos estudantes se lembravam do conteúdo e sobre o grau de dificuldades para aprendê-lo MF (muito fácil), F (fácil), R (regular), D (difícil), MD (Muito difícil). No total foram 16 tópicos, dos quais os 10 primeiros eram conhecimentos prévios ao objeto matemático Inequação Trigonométrica e os demais diretamente relativos a esse objeto. Como respostas obteve-se os seguintes dados percentuais, em que se destaca em negrito os resultados que prevaleceram em relação aos demais:

Quadro 8- Quadro de dificuldade de aprendizagem.

CONTEÚDO	**Você lembra de ter estudado?**		**Qual grau de dificuldade que você teve para aprender?**				
	Sim	**Não**	**MF**	**F**	**R**	**D**	**MD**
1-Definição de função seno, cosseno, tangente.	95%	5%	2%	**75%**		19%	4%
2-Domínio das funções, seno, cosseno e tangentes.	77%	23%	1%	**63%**		28%	8%
3-Imagem das funções seno, cosseno e tangente	78%	22%	2%	**64%**		27%	7%
4-Sinais das funções seno, cosseno e tangente.	80%	20%	6%	**60%**		25%	9%
5-Redução dos quadrantes das funções seno, cosseno e tangente.	74%	26%	4%	**58%**		27%	11%
6-Conversão de radiano para grau.	67%	33%	6%	**56%**		27%	11%
7-Conversão de grau para radiano.	70%	30%	4%	**57%**		30%	9%
8-Equações básicas envolvendo seno, cosseno.	91%	9%	3%	**62%**		27%	8%
9-Equações básicas envolvendo tangente ,	85%	15%	1%	**57%**		35%	7%
10-Expressões envolvendo, seno, cosseno e tangente.	73%	27%	1%	**45%**		43%	11%
11-Inequações envolvendo seno	71%	29%	3%	25%		**62%**	10%
12-Inequações envolvendo cosseno	66%	34%	4%	30%		**53%**	13%
13-Inequações envolvendo tangente	65%	35%	3%	31%		**56%**	10%
14-Inequações envolvendo forma fatorada de seno, cosseno.	50%	50%	1%	30%		**53%**	16%
15-Inequação do segundo grau com seno, cosseno.	54%	46%	1%	25%		**58%**	16%
16-Inequação do segundo grau com tangente.	47%	53%	2%	21%		**55%**	22%

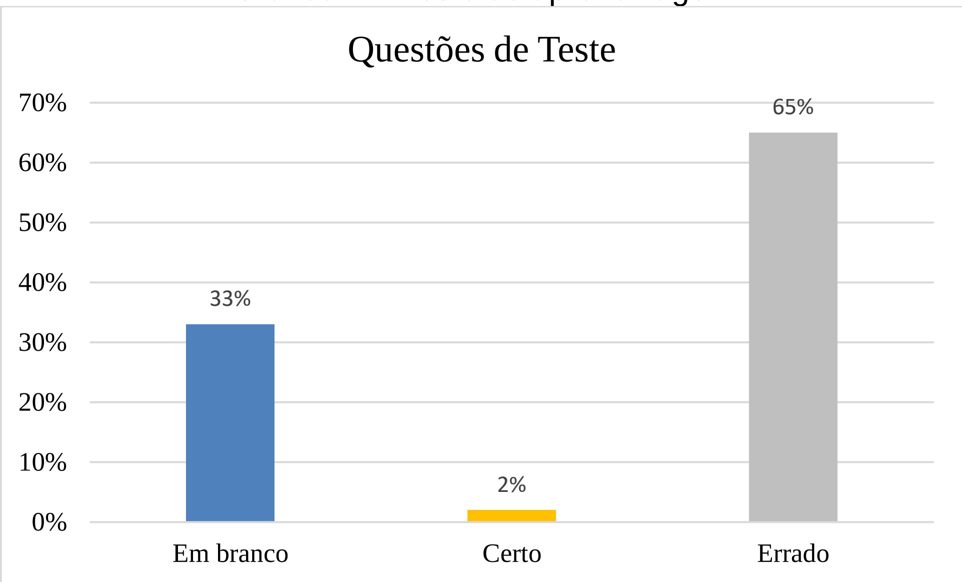
Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

É perceptível no quadro que a frequência em não lembrar é maior nos tópicos relacionados a Inequação Trigonométrica, de 11 a 16, em que dos que lembram a maioria afirma ser de difícil aprendizagem, entre 53% e 62% dos entrevistados. Em contrapartida, nos tópicos referentes aos conhecimentos prévios a Inequação Trigonométrica, de 1 a 10, a maioria entre 67% e 95% lembra dos tópicos, sendo que destes prevalece os que consideram de fácil aprendizagem, entre 45% e 75%.

Esses dados mostram que talvez o assunto Inequação Trigonométrica nem tenha sido ensinado a alguns desses educandos e que por isso não lembrem dos tópicos relacionados. Um dos fatores que pode ter levado a esses resultados pode ser o constatado na seção 2. 2 sobre os livros didáticos, em que constatou a diminuição na abordagem do assunto ao longo dos anos, haja vista que o livro didático é também um recurso muito adotado pelo professor na rede pública de ensino do município lócus da pesquisa.

Na terceira fase da pesquisa com estudantes, aplicou-se um teste de conhecimentos sobre Inequação Trigonométrica e seus conhecimentos prévios. O Teste foi elaborado com 10 questões abertas envolvendo os temas do quadro de dificuldades. Todas as questões foram de objetivo puramente diagnóstico e o gráfico a seguir ilustra o percentual de acertos e erros, bem como o percentual de questões deixadas em branco pelos sujeitos da pesquisa.

Gráfico 4 – Teste de aprendizagem



Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

O resultado do Teste não foi muito positivo em função das respostas encontradas pelos alunos e vários deixaram de responder tópicos que eles não lembraram, sendo que houve apenas 2% de acertos, 33% de questões em branco e 65% questões erradas.

Os dados da pesquisa revelam que os alunos da Escola Pública da cidade de Imperatriz- MA, não apresenta uma aprendizagem significativa em relação ao ensino de Inequações Trigonométricas. Os conceitos e definições básicas tais como ângulos, redução de quadrantes, equações trigonométricas, etc, não foram verificados como apreendidos pelos sujeitos e, consequentemente, os tópicos subsequentes como os Inequação Trigonométrica se quer houve qualquer evidência de aprendizagem.

Neste sentido é relevante considerar o que Patriota e Duarte apontam e sua pesquisa, que as inequações trigonométricas devem ser abordadas de maneira mais eficiente pelos professores e em livros didáticos de modo a minimizar os obstáculos didáticos e para isso, reforçando o que foi apresentado na seção 2.1 por Saldan (2014), devem ser observados e minimizados os obstáculos epistemológicos de professores por meio de formação e capacitação continuada.

Existem muitos fatores que contribuem para resultados negativos sobre a aprendizagem de matemática no município lócus da pesquisa, tais como falta de professores, estrutura inadequada das escolas, alunos desmotivados com processo de ensino, falta de perspectiva para os jovens, todos esses ingredientes mostram que é preciso tomar medidas rápidas no que se refere as escolas Públicas no sentido de promover uma melhora significativa no processo de ensino e aprendizagem.

2. 4 ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO: Inequações Trigonométricas

Nesta seção, dando continuidade as análises prévias desta pesquisa, apresenta-se o estudo sobre Inequações Trigonométricas, o objeto matemático sobre o qual o produto educacional desta pesquisa foi desenvolvido.

2. 4. 1 Estudo Histórico

Para apresentar um estudo mais minucioso sobre o objeto matemático Inequações Trigonométricas realizou-se uma pesquisa inicial um resgate da construção histórica do desenvolvimento da trigonometria, por ser a base para o ensino de Inequações Trigonométricas considerando sua importância para a constituição do saber matemático e, do ponto de vista didático-pedagógico, por promover a capacidade de relacionar raciocínio algébrico, geométrico e gráfico proporcionando também o desenvolvimento da capacidade de abstração, necessária para diversas circunstâncias (Feijó, 2018, p. 53).

Brasil (2017) desafia professores de matemática a mediarem em seus alunos habilidades de resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com apoio da geometria, bem como identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos.

Para que essas habilidades de realizar e interpretar diferentes registros e representações possam ser adquiridas pelo aluno, é necessário também que tais elementos do ensino de temas de trigonometria não sejam obstáculos epistemológicos para o professor de Matemática ensinar os assuntos subsequentes.

Valendo-nos da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval e da análise dos obstáculos também vividos pelos matemáticos no passado, foi possível fundamentar os objetivos de aprendizagem do produto educacional construído a partir desta investigação sob o olhar da História da Matemática.

Para tanto, inicialmente, realizou-se um levantamento bibliográfico sobre história da trigonometria por meio dos obstáculos epistemológicos dos registros e representações semióticas. Em seguida traçou-se uma linha do tempo onde destaca-se os personagens que marcaram a construção histórica da trigonometria no que tange a semiótica desse objeto matemático.

Por fim, faz-se a síntese e análise dos resultados obtidos ressaltando as contribuições de cada personagem para a compreensão de como os obstáculos de aprendizagem se dão e como isso pode ajudar professores de matemática que lerem este trabalho a entenderem as dificuldades de aprendizagem de seus alunos ao ensinarem temas de trigonometria, em especial Inequação Trigonométrica.

Na seção 1.3 desta dissertação fala-se da teoria dos registros e representações semióticas, que se retoma aqui. Raymund Duval é filósofo, psicólogo de formação de professores e investigou a aprendizagem matemática e o papel dos registros de representação semiótica para a apreensão do conhecimento matemático, na França entre 1970 e 1995, quando publicou sua teoria na obra *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.*

Em síntese e para o que diz respeito desta pesquisa, Duval defendia que:

> para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, ele deve permitir as três atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiosis: formação (identificação do objeto matemático representado), tratamento (operação cognitiva que vai compreender uma transformação do registro representação no interior do mesmo sistema semiótico de representação em que foi formado) e conversão (transformação de um dado registro de representação, pertencente a um sistema semiótico em outro registro, pertencente a outro sistema semiótico). (DIONÍZIO e BRANDT, 2011, p.4411)

Neste sentido, faz-se uma discussão acerca dos elementos das *semiosis,* que ao longo da descrição histórica caracteriza como elementos de *formação* (F), *tratamento* (T) e *conversão* (C) dos registros e representações dos estudos de trigonometria feitas ao longo da história, em especial aquelas tidas nas diretrizes da educação como fundamentais, tais como: resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (F); Realizar (T) e comparar (C) representações com funções periódicas nos ciclos trigonométricos, no plano cartesiano, com apoio da geometria; identificar as características fundamentais das funções trigonométricas (F) por meio da Realização (T) e comparação (C) das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, geometricamente e em linguagem materna.

Aliado a isso, também se dá destaque à História da Matemática como recurso enriquecedor dos conhecimentos docentes, na perspectiva de compreender que a matemática, nasceu de necessidades práticas de cada povo, a cada nova situação, impulsionando o progresso científico da humanidade como afirma D'Ambrósio:

> As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber. (D'AMBRÓSIO, 1999, p. 97 apud CHAQUIAM, 2017, p. 16).

É nessa perspectiva de D'Ambrósio, de que a História desempenha na formação do professor um revestimento de significado a seu saber matemático e a sua prática de ensino. Assim traça-se a seguir uma linha do tempo, destacando alguns personagens específicos que de alguma forma trouxeram contribuições importantes para nosso objeto.

Ao longo da apresentação dos personagens destacados nos períodos históricos, faz-se discussões acerca dos obstáculos epistemológicos encontrados e/ou superados sob a óptica da semiótica.

Para cada período histórico destaca-se personagens cujos desafios e descobertas contribuíram para a formação epistemológica no que tange a formação, tratamento e conversão de registros e representações semióticas que levaram a constituição de estudos em trigonometria.

Os personagens aos que se dá destaque a seguir representam um marco ao longo da história no que tange aos obstáculos epistemológicos superados e ao novo registro de representação semiótica por eles utilizados. Situa-se pelo menos um personagem em cada período histórico, em que também discorre-se sobre o cenário sócio-cultural da época, para enfatizar de que maneira sua contribuição marcou na construção das representações semióticas da trigonometria.

Antiguidade

A antiguidade, marcada pelo desenvolvimento da escrita a cerca de 4000 a. C., foi um período de notável progresso cultural trazendo uso da roda e dos metais, e, tendo seu término marcado pela queda do império romano em 476 d. C.

A origem das noções de funções trigonométricas não é precisa. Seu surgimento veio com primeiros estudos em trigonometria pela necessidade de se medir distâncias inacessíveis em problemas que sugiram na agricultura, agronomia, navegação e medicina. Os primeiros registros de representações trigonométricas dedicam-se a babilônios e egípcios.

Na Babilônia havia grande interesse pela Astronomia, por suas ligações com os conceitos religiosos e por suas conexões com o calendário, as épocas de plantio e estações do ano. Em 28 a. C. foi construído um calendário astrológico e elaboraram uma tábua de eclipses lunares.

No Egito, a trigonometria foi utilizada nas medições das pirâmides e em 1500 a.C., aproximadamente, a ideia de associar sombras projetadas por uma vara vertical a sequências numéricas cujos comprimentos representavam a passagem das horas (relógios de sol ou gnômon), anunciando a chegada, séculos depois, das funções tangente e cotangente. (Costa, 1997, p. 10).

Segundo Mineiro (2019), nesse contexto, ao realizarem relações entre grandezas por meio dos termos “maior que” e ”menor que” deu-se início aos estudos de análise sobre os números reais, adotando-se intervalos numéricos ao estabelecerem as desigualdades, o que entendemos ser a gênese das relações de inequação.

- **Eratóstenes de Cirene (276 - 196 a.C.) -** O grego Eratóstenes, por volta de 200 a. C., ao medir a circunferência da Terra, fez o tratamento e conversão de registros representativos utilizando relações entre ângulos e cordas, semelhança de triângulos e razões trigonométricas. Com esse feito, Eratóstenes marcou o fechamento de dois séculos de lentos avanços na trigonometria.

Para Boyer (2012, p. 124), de Hipócrates a Eratóstenes, embora os gregos estudassem as relações entre retas e círculos e as aplicassem na Astronomia, disso não resultou uma trigonometria sistemática, indicando que muito se precisava avançar no que diz respeito a formalização de estudos em trigonometria, sendo este um obstáculo para que se avançasse mais.

- **Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.) -** Hiparco ficou conhecido como "o pai da trigonometria" quando ampliou a ideia de Hipísicles (180 a. C.) de dividir qualquer círculo em 360 partes e a partir disso construir a primeira tabela da trigonometria, mais uma forma de representação e registro trigonométrico.

Para formular tais tabelas ele olhava para o céu e imaginava triângulos traçados sobre a esfera e assim relacionava corpos celestes uns com os outros.

> Hiparco considerava que cada triângulo estava inscrito dentro de um círculo e desenvolveu um sistema para calcular ângulos a partir de cordas. Ele compilou tabelas de cordas produzidas desenhando-se ângulos de diferentes tamanhos que se relacionavam com o conceito moderno de senos e cossenos. (ROONEY, 2012, p. 89)

A formulação da trigonometria de Hiparco, fazia o tratamento, isto é, operações cognitivas, baseado na ideia de função ao associar cada arco de circunferência de raio arbitrário a uma respectiva corda, tendo, por assim dizer, gerado o "embrião" das funções seno e cosseno.

Idade média

Esse período é datado 476 até 1453, quando Constantinopla foi tomada pelos turcos otomanos. Iniciou com uma fase de pouco progresso científico, considerada "idade das trevas". Entre séculos XII e XIII surgiram as primeiras universidades, tendo suas contribuições entendidas como um prolongamento do saber das correntes filosóficas platônicas e aristotélicas (Roque e Carvalho, 2012, p. 188).

- **AL Battani (aproximadamente 850 a 929 d.C.) -** Dos séculos VIII até o século XI, o Império Muçulmano ou Árabe teve uma expansão econômica e avanços em diversos campos das artes e da ciência, em ao século IX, devido também a difusão da língua árabe em substituição ao grego, permitindo a preservação do saber por eles constituído.

Al Battani, também conhecido como Ptolomeu de Bagdad, para calcular a altitude do sol usou razões trigonométricas e construiu tábuas de senos, naquela época chamada de *Jiva* ou meias-cordas, caracterizando a formulação do objeto matemático.

Sua genialidade se mostrou no tratamento do registro das representações semióticas utilizadas, a partir da introdução do círculo de raio unitário e com isso demonstrando e generalizando que a razão *jiva* é válida para qualquer triângulo retângulo, independentemente do valor da medida da hipotenusa, propondo uma conversão geométrica e algébrica das relações trigonométricas do círculo para o retângulo, diferente de como se ensina na escola, onde primeiro se faz o estudo das relações no triângulo e muito depois, sem fazer associações, fala-se do ciclo trigonométrico.

De acordo com Alvarenga, Barbosa e Ferreira (2014, p. 168), as contribuições do árabe Al Battani podem ser observadas nos trabalhos de Euler, que se baseava em relações entre lados de um triângulo retângulo e sintetizou fórmulas trigonométricas, tomando o seno inteiro igual a 1, proporcionando também aplicações na física como, por exemplo, a propagação do som.

Idade moderna

Período de 1453 a 1789, ano da revolução francesa. A idade moderna é marcada por uma ampla disseminação do conhecimento matemático de caráter mais significativo e pela comercialização dos livros, devido à invenção da impressão de tipos móveis.

A Itália se destacou no desenvolvimento dos conceitos matemáticos, aritmética, álgebra e trigonometria. A população volta a ter interesse pela educação e os livros apresentam uma linguagem matemática mais acessível às massas populares. Nesse período também ocorreu um maior desenvolvimento das funções.

- **Johann Müller (Regiomontanus) (1436-1475) -** Este matemático é um dos maiores século XV, cujo trabalho teve grande importância, estabeleceu a Trigonometria como uma ciência independente da Astronomia. O primeiro trabalho impresso em trigonometria foi a “Tabula Directionum” de Regiomontanus, publicado em Nuremberg em 1485.

Segundo Costa (1997), a Trigonometria de Regiomontanus não diferia basicamente da que se faz hoje em dia, ele calculou novas tábuas trigonométricas, aperfeiçoando a dos senos e introduziu na trigonometria europeia o uso das tangentes, incluindo-as em suas tábuas.

Em suas formulações houve uma mudança no tratamento dos registros de representação, pois as seis funções trigonométricas foram definidas como funções do ângulo, em vez de funções do arco, e subentendidas como razões. Deduz-se que neste momento houve uma ruptura entre a trigonometria do triângulo retângulo e a trigonometria do ciclo trigonométrico.

- **François Viète (1540-1603) -** François Viète não era matemático de profissão, era advogado do Estado, por seu amor pela matemática dedicava horas de seu descanso ao estudo e investigação matemática. Em 1579 utilizou como registro e representação, fórmulas que determinam funções trigonométricas de múltiplos de um ângulo, quando se conhecem as funções trigonométricas do mesmo.

Segundo Chaquiam (2017, p. 168), na sua obra Canon Mathematicus, Viète desenvolveu o tratamento sistemático de métodos para resolver problemas com triângulos planos ou esféricos, com o auxílio das seis funções trigonométricas, uma vez que John Wallis tabulou as seis, mas só tratava as do seno.

- **Pierre de Fermat (1601-1665).** Traz-se Fermat para este estudo, não por ter desenvolvido contribuições diretas a trigonometria, mas sim com a introdução da ideia de desigualdade no estudo de funções. De acordo com Boyer e Merzbach (1991), desde 1629 Fermat estivera considerando lugares geométricos numa notação baseada em equações da forma $y = x^n$, definindo uma geometria analítica de curvas planas de grau superior. Fermat denotou para curvas polinomiais da forma $y = f(x)$, que a função assume um máximo ou o um mínimo. Ele comparou o valor de $f(x)$ em um ponto como valor $f(x + E)$ com variação quase imperceptível, tornando-os quase iguais, uma pseudoigualdade, o que fez chegar a definição de máximos e mínimos e a essência do que hoje chama-se de derivação.

Nesse sentido percebe-se que a ideia de inequação utilizada por Fermat por meio de desigualdade trouxe um tratamento diferente ao pensamento algébrico e uma definição analítica de função que alcançasse também as funções trigonométricas.

- **Sir Isaac Newton (1642-1727) -** John Wallis (1616-1703), fazia registros e representações das seis fórmulas trigonométricas usando equações e séries infinitas em vez de proporções. Esse avanço contribuiu com os estudos de Sir

Isaac Newton (1642-1727) sobre cálculo infinitesimal na geometria do movimento.

Newton observando o movimento dos planetas, teve uma nova concepção do universo regido por leis mecânicas de uma assombrosa precisão. Fazia representações com séries infinitas, tendo expandido $arcsen\ x$ em séries e, por reversão, deduzido a série para $sen\ x$. Além disso, comunicou a Leibniz a fórmula geral para representar $sen\ (nx)$ e $cos\ (nx)$ tendo, com isso, aberto a perspectiva para o $sen\ x$ e o $cos\ x$ surgirem como números e não como grandezas.

Segundo Alvarenga, Barbosa e Ferreira (2014, p. 174), Joseph Fourier (1768-1830) utilizou as séries definidas por Newton para representar fenômenos físicos (transmissão do som, e fluxo do calor), manifestando a certeza de que qualquer função, ainda que "descontínua", podia ser representada por uma série soma de senos e cossenos, uma vontade que Euler, tinha rejeitado, "isto mostra que a definição anterior de continuidade era inadequada" (ROQUE e CARVALHO, 2012, p. 336).

Nota-se aqui que Newton superou o obstáculo antigo da homogeneidade, a partir dele Fourrier superou o da descontinuidade, porém este último teve obstáculos de generalização, pois sua definição de função contemplava apenas aquelas consideradas convergentes.

Período contemporâneo

A Idade Contemporânea é estudada de 1789, época da Revolução Francesa, até os dias atuais. Dentro desse período, vários acontecimentos políticos, econômicos, sociais, científicos e tecnológicos, como a Revolução Industrial, receberam influência da evolução da matemática e em específico das funções trigonométricas. Por exemplo, os arquivos em MP3 hoje são possíveis por causa de matemáticos como Fourrier e Euler que definiram função analiticamente como sendo uma série trigonométrica complexa e composta. (Rooney, 2012)

- **Leonard Euler (1707-1783) -** A trigonometria toma a sua forma atual quando Euler (1707-1783) adota, em 1748, a medida do raio de um círculo como uma unidade e representa funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo como era feito até então. Neste sentido percebe-se que Euler realizou a conversão do registro de uma representação geométrica baseada no ângulo para outra cartesiana baseada no número, tal conversão permitiu estabelecer melhor caracterização da periodicidade das funções trigonométricas.

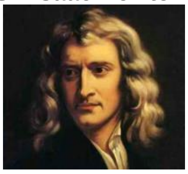
Segundo Roque e Carvalho (2012) Euler generalizou função como sendo uma expressão analítica que pode ser formada pela aplicação de finitas ou infinitas operações algébricas de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, integrando também ao escopo das funções admissíveis aquelas que são transcendentes, ou seja, que podem não ser algébricas, como a exponencial, a logarítmica e as trigonométricas.

A transição das razões trigonométricas para as funções periódicas começou com Viète no século XVI, teve novo impulso com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal no século XVII com Newton e culminou com a figura de Euler que desenvolveu também a análise de Fourier que permitiu a Newton “encontrar valores necessários para modelar a propagação do calor para qualquer distribuição inicial de temperatura” (ROONEY, 2012, p. 164), convergente ou não, superando assim um obstáculo de generalização.

Para melhor organizar as análises apresentadas ilustra-se no quadro a seguir uma síntese do que foi discutido sobre os registros e representações semióticas utilizadas por alguns personagens ao longo dos períodos históricos no estudo da trigonometria.

Quadro 9- Síntese dos resultados

PERÍODO HISTÓRICO	**PERSONAGEM**	**REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO**	**CONTRIBUIÇÃO**
Antiguidade (4000 a.C.- 476) Desenvolvimento da escrita e primeiros registros da trigonometria	**Eratóstenes**  **(276 - 196 a.C.)**	Relações entre ângulos e cordas, semelhança de triângulos e razões trigonométricas.	Utilizou trigonometria (não formalizada) para calcular a circunferência da Terra e com aplicações na Astronomia.
	Hiparco  **(180 - 125 a.C.)**	Formulava, tratava e convertia registos de representação geométricos em tabelas trigonométricas.	Dividir círculo em 360 partes para construir a primeira tabela trigonométrica utilizando a ideia intuitiva de função.
Idade Média (476-1453) Primeiras universidades e gênese círculo trigonométrico	**AL Battani**  **(850 a 929)**	Fazia representações semióticas geométrica e algébrica do círculo para o triângulo.	Introduziu o círculo de raio unitário a trigonometria e com isso generalizou que a razão *jiva* (seno) é válida para qualquer triângulo retângulo.

Idade Moderna (1453-1789) Ampla disseminação de conhecimento através da editoração e impressão e comercialização de livros.	**Johann Müller (Regiomontanus)**  **(1436-1475)**	Formulou seis funções trigonométricas tratadas como função do ângulo e não do arco.	Publicou o primeiro trabalho impresso em trigonometria, reuniu seis relações trigonométricas em função do ângulo, desassociando triângulo retângulo do ciclo trigonométrico.
	François Viète  **(1540-1603)**	Determinava funções trigonométricas de múltiplos de um ângulo, quando se conhecem as funções trigonométricas do mesmo.	Desenvolveu o tratamento sistemático de métodos para resolver triângulos planos ou esféricos, com o auxílio das seis funções trigonométricas.
	Pierre de Fermat  **(1601-1665)**	Desenvolveu a ideia de desigualdade no estudo de comportamento funcional.	Desenvolveu um tratamento diferente da representação algébrica de funções por meio de inequações.
	Sir Isaac Newton  **(1642-1727)**	Fez tratamento das seis fórmulas trigonométricas usando equações e séries infinitas em vez de proporções.	Contribuiu com os estudos de John Wallis (1616-1703) sobre cálculo infinitesimal na geometria do movimento, superou o obstáculo da homogeneidade.
Contemporâneo (1789 - atual) Revolução industrial e científica com várias contribuições das novas definições de funções trigonométricas	**Leonard Euler**  **(1707-1783)**	Realizou a conversão do registro de uma representação geométrica baseada no ângulo para outra cartesiana baseada no número.	Caracterizou a periodicidade das funções trigonométricas e superou os problemas de convergência ao generalizar funções sendo convergentes ou não.

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Dos recortes da história da matemática e das contribuições dos personagens destacou-se a construção semiótica dos estudos de trigonometria, chama-se a atenção para os seguintes aspectos da funcionalidade dos registros como propõe Duval.

> A originalidade da abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situações de ensino. (DUVAL, 2003, p. 12).

Observa-se ao longo da história representações multifuncionais, como por exemplo o $sen\,x$ que hora é dado como número e hora como grandeza, um obstáculo superado por Newton e que o professor de matemática precisa ter cuidado e clareza tanto quanto a representação discursiva (associações verbais, argumentações e deduções) como quanto a representação não-discursiva (operações, figuras geométricas, modelagem) .

Foi possível também constatar que os personagens, ora usavam triângulos (Eratóstenes), ora triângulos inscritos em círculos (Hiparco) e ora passaram a utilizar o círculo trigonométrico desassociado da trigonometria do triângulo retângulo (Regiomontanus). Esses passos das formações e tratamentos das representações elucidam o surgimento do círculo unitário a partir do triângulo retângulo, o que pode ser também utilizado por professores de matemática com funcionalidade tanto discursiva como não-discursiva.

Também se constatou de que modo as relações proporcionais entre lados de um triângulo retângulo se transformaram em funções trigonométricas, ao longo de cada necessidade da humanidade e em cada período histórico. Isso revelou a utilidade social, cultural e científica desse saber matemático.

Essas conversões semióticas razão/proporção - equação/inequação - função, que aconteceram ao longo da história, elucidam como os personagens superaram os obstáculos epistemológicos de proporção (Al Battani), homogeneidade (Newton), separação entre números e grandezas (Newton), generalização (Euler, Al Battani), continuidade (Fourrier) e convergência (Euler).

Tais obstáculos superados pelos personagens apesentados elucidaram como os estudos de trigonometria aliado a ideia de inequação contribuíram para uma definição mais ampla de função. Em certas circunstâncias essas formas de tratamento algébrico na forma de razão, proporção, equação, inequação e função e suas respectivas interpretações geométrica e gráfica no ensino de Matemática são tratadas de forma monofuncional, assim como na história, mas a consideração que se faz aqui segundo a teoria das representações semióticas de Duval, é:

> A existência de diferentes representações semióticas para um mesmo objeto matemático possibilita a escolha da melhor e mais adequada ao que se pretende trabalhar. Certas vezes, um objeto se apresenta em uma forma de representação que possui um custo cognitivo muito alto para realização de raciocínios e procedimentos de cálculo necessários,

> logo, a possibilidade de usar outra representação que proporcione tratamentos menos trabalhosos é de extrema importância (DIONÍZIO e BRANDT, 2012, p. 3)

Neste sentido a sequência didática que se construiu nesta pesquisa considerou a articulação de todas as formulações semióticas possíveis para uma melhor aprendizagem de Inequações Trigonométricas, tendo em vista que é válido começar por aquela que tenha menor custo cognitivo e que se avance progressivamente no tratamento dos registros e representações para apreensão das habilidades e objetivos de aprendizagem pretendidos.

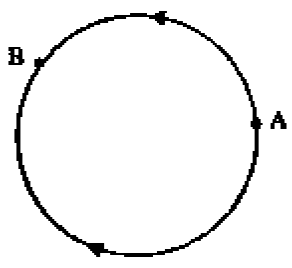
2. 4. 2 Estudo Epistemológico

Nesta parte do estudo sobre o objeto Inequações Trigonométricas, apresenta-se um estudo epistemológico que funciona também como um organizador de conteúdos e objetivos de aprendizagem do objeto com o rigor das definições matemáticas inerentes ao objeto como conteúdo curricular da educação básica. As definições e propriedades a seguir apresentadas foram embasadas por Machado (1986), Antar Neto (2010), Murakami e Iezzi (2013), Dante (2010), Oliveira (2017).

2. 3. 2. 1 Medidas de arcos

Considerando uma circunferência. Sobre esta circunferência tome dois pontos A e B, conforme a figura abaixo. A circunferência fica dividida em duas partes, cada uma é chamada de arco da circunferência AB.

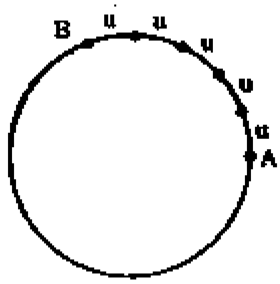
Figura 5- Arco da Circunferência AB.



Perceba que a simples simbologia AB não determina o arco, sendo necessário designar um sentido de medidas, horário ou anti-horário, de modo a especificar que dos dois arcos em que a circunferência ficou dividida é realmente o arco AB desejado.

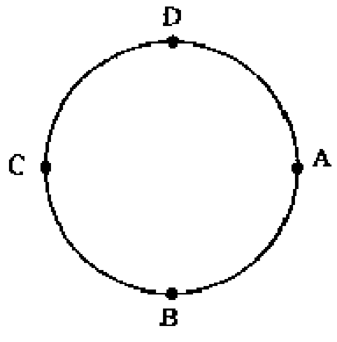
Para calcular a medida do arco de circunferência, deve-se determinar sobre a circunferência uma unidade fundamental de medida e calcular a quantidade destas unidades de medidas que estão contidas no arco. Por exemplo, na figura a baixo definiu-se a unidade de medida u. Perceba que o arco AB, destacado na figura existem exatamente 5 unidades u, fazendo com que AB = 5u.

Figura 6- Unidades u de uma arco.



Se essa circunferência for dividida em 360 partes iguais, dizemos que cada uma dessas partes possui um grau (º) como medida de cada um destes arcos menores em que a circunferência foi dividida. Em outras palavras, 1º (um grau) é igual a medida $\frac{1}{360}$ de um arco completo. Deste modo, um arco completo posssui 360º. Por exemplo, considere que os pontos A, B, C e D dividem uma circunferência em 4 partes iguais. Assim, cada um dos menores arcos AB, BC, CD e DA vale $\frac{360°}{4}$ = 90°.

Figura 7- Pontos que dividem a circunferência em 4 partes iguais.



Um radiano (1 rad) é o ângulo definido em uma circunferência por um arco com o mesmo comprimento que o raio da referida circunferência. É possível demonstrar que em uma circunferência existe 2π radianos em um arco completo.

Das definições de grau e radianos é possível identificar uma relação linear entre ambos. Assim, para fazer a conversão basta resolver uma regra de 3 simples. Para converter um ângulo conhecido θ, com a medida dada em graus, para radianos deve-se fazer da seguinte forma:

GRAU	RADIANOS
180°	π
θ	x

$$x = \frac{\theta\pi}{180°} \text{rad } (\theta \text{ em grau})$$

Para converter de radianos para graus.

GRAU	RADIANOS
180°	π
x	θ

$$x = \frac{\theta.180°}{\pi} \text{rad } (\theta \text{ em grau})$$

2. 3. 2. 2 Ciclo trigonométrico

Considere um sistema de eixo cartesianos xOy, suponha que λ é uma circunferência de raio 1, centrada na origem O. Observe que o comprimento desta circunferência é 2π. A é o ponto da circunferência λ intercepta o eixo x. A partir desde ponto A todos os arcos são medidas ao longo de λ.

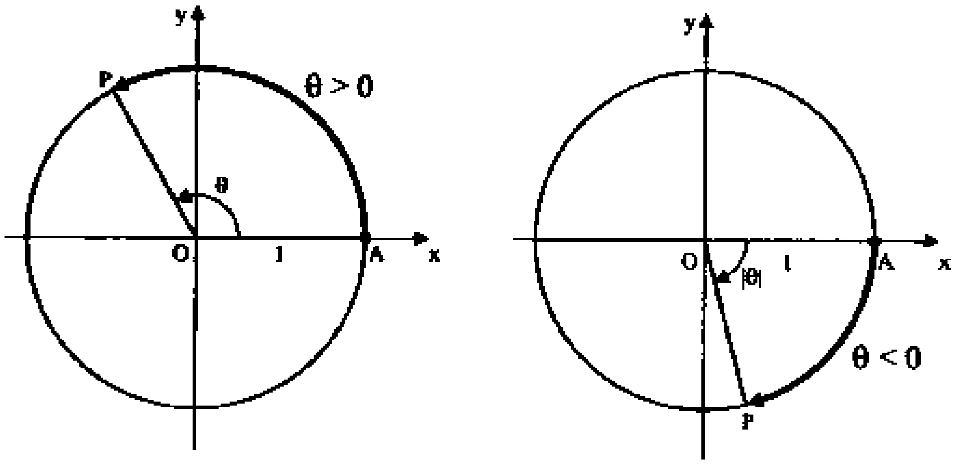
Seja $f(\theta)$ uma função que associa para cada θ um ponto P na circunferência de moo que:

i) Se θ = 0, o ponto P coincide com o ponto A

ii) Se $\theta > 0$, a partir do ponto A e no sentido anti-horário, é contado um arco de comprimento θ. O ponto P é outro extremo deste arco.

iii) Se $\theta < 0$, a partir do ponto A e no sentido horário, é contado um arco de comprimento $|\theta|$. O ponto P é o outro extremo deste arco.

Figura 8- Arcos no sentido horário e anti-horário.



Afirma-se que o ponto P é a imagem de θ pela função f. Quando a função f é associada a uma circunferência λ de raio unitário afirma-se que λ é o ciclo trigonométrico. Como o raio da circunferência é igual a 1, o comprimento do arco AP, em unidades de comprimento é igual ao valor do ângulo central θ, em radianos.

Assim, é possível identificar a posição de P para determinados valores de θ, como exemplificado abaixo:

Figura 9- Posição de P para valores de $\boldsymbol{\theta}$ no sentido anti-horário.

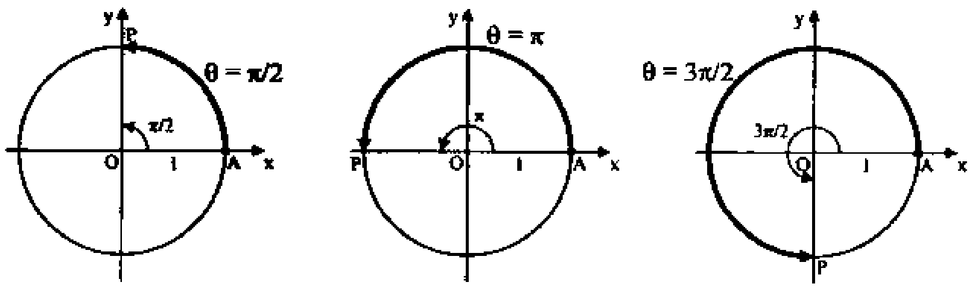
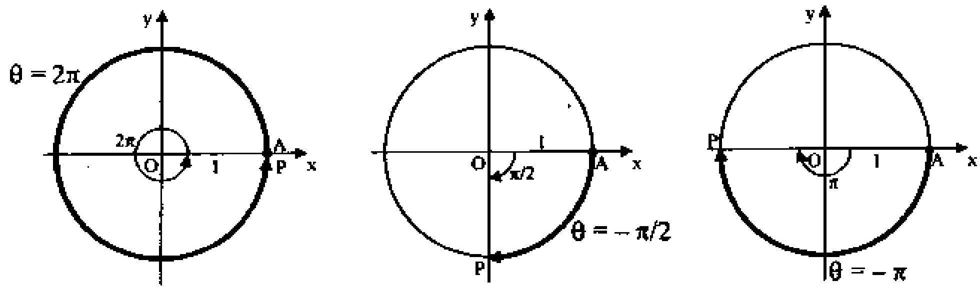


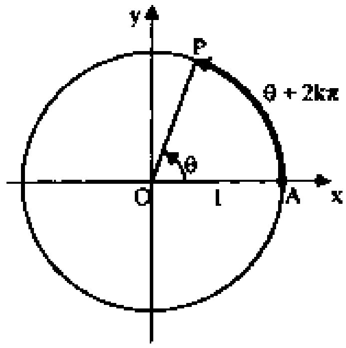
Figura 10- Posição de P para valores de $\boldsymbol{\theta}$ no sentido horário.



Observe que a função f é uma função periódica, uma vez que:

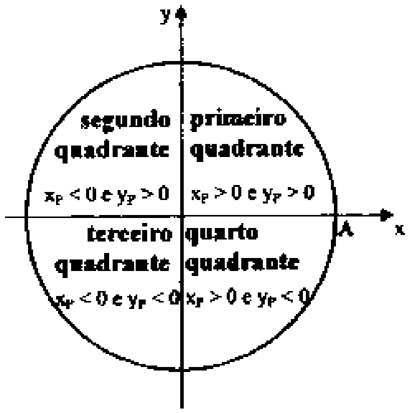
$f(\theta) = (\theta \pm 2\pi) = f(\theta \pm 4\pi) = f(\theta \pm 6\pi)\ldots = f(\theta \pm 2k\pi)\, k \in \mathbb{N}$. Desta maneira, caso dois arcos θ_1 e θ_2 sejam tais θ_1 - θ_2 = 2kπ, k ∈ $\mathbb{N}$, segue que θ_1 e θ_2 possuem a mesma imagem pela função f. Neste caso, θ_1 e θ_2 são chamados de arcos côngruos. Assim, qualquer ponto P no ciclo trigonométrico é a imagem de infinitos arcos, todos côngruos entre si.

Figura 11- P como imagem de infinitos arcos côngruos entre si.



Todos os arcos da forma $\theta \pm$ 2kπ, k ∈ $\mathbb{Z}$, θ positivo ou negativo, são associados ao mesmo ponto P do ciclo trigonométrico. Os eixos x e y dividem o ciclo trigonométrico em quatro setores, denominados de quadrantes, conforme mostra a figura a seguir. Em cada quadrante é possível identificar as coordenadas do ponto P.

Figura 12- Quadrantes do ciclo trigonométrico.



Assim, podemos afirmar que:

i) x ∈ 1º Q ⇔ θ + 2kπ $< \theta < \frac{\pi}{2}$ + 2kπ

ii) x ∈ 2º Q ⇔ $\frac{\pi}{2}$ + 2kπ $< \theta < \pi$ + 2kπ

iii) x ∈ 3º Q ⇔ π + 2kπ $< \theta < \frac{3\pi}{2}$ + 2kπ

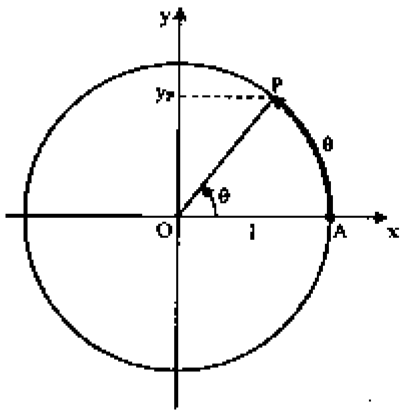
iv) x ∈ 4º Q ⇔ $\frac{3\pi}{2}$ + 2kπ $< \theta <$ 2π + 2kπ, onde k ∈ $\mathbb{Z}$.

2. 3. 2. 3 Seno de um arco.

Considerando o ciclo trigonométrico e o ponto P, imagem de um arco de comprimento θ. Define-se a função seno de um arco θ como $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada θ a ordenada do ponto P.

$$f(\theta) = sen\,\theta = y_p.$$

Figura 13- Relação seno.



Observações

1) A imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$, ou seja -1 $\leq$ sen $\theta \leq$ 1 para todo arco θ.

2) sen $\theta > 0$ no I e II Q; sen $\theta < 0$ no III Q e IV Q.

3) sen θ = 0, para θ = kπ, k ∈ $\mathbb{Z}$.

4) sen θ = 1, para $\theta = \frac{\pi}{2}$+ 2kπ, k ∈ $\mathbb{Z}$.

5) sen θ = -1, para $\theta = \frac{3\pi}{2}$+ 2kπ, k ∈ $\mathbb{Z}$.

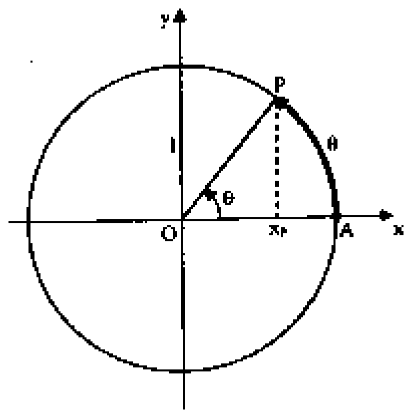
6) A função $f(\theta) = sen(\theta)$ é periódico de periodo 2π, k ∈ $\mathbb{Z}$ $|sen\theta = sen(\theta + 2k\pi)|$

2. 3. 2. 4 Cosseno de um arco

Considerando o ciclo trigonométrico e o ponto P, imagem de um arco de comprimento θ. Define-se a função cosseno de um arco θ como f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada θ a abscissa do ponto P.

$$f(\theta) = cos\,\theta = x_p.$$

Figura 14- Relação cosseno.



Observações

i) A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1\,]$, ou seja; -1 ≤ cosθ ≤ 1 para todo arco θ

ii) cos$\theta > 0$, para θ ∈ IQ e IVQ, cos$\theta < 0$, θ ∈ IIQ e IIIQ.

iii) cos θ = 0, para $\theta = \frac{\pi}{2}$ + kπ, k∈ $\mathbb{Z}$.

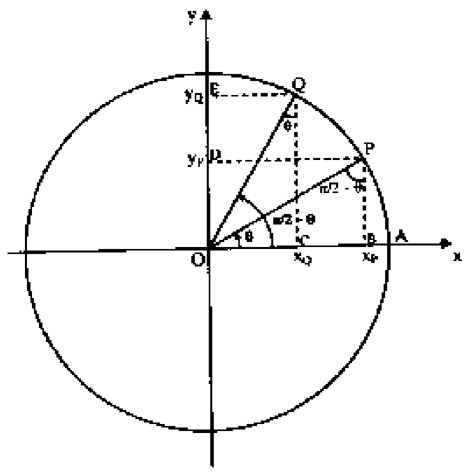
iv) cos θ = 1, para θ = 2kπ, k∈ $\mathbb{Z}$.

v) cos θ = -1, para $\theta = \pi$ + 2kπ, k∈ $\mathbb{Z}$.

vi) A função $f(\theta) = cos\,\theta$ é períodica de período 2π.

cos θ = cos(θ + 2kπ), k∈ $\mathbb{Z}$.

Figura 15 – Projeções de P e Q.



Em um ciclo trigonométrico sejam os pontos P e Q imagens de θ e $\frac{\pi}{2} - \theta$, respectivamente. Os pontos B, C, D e E são as projeções de P e Q sobre os eixos x e y, conforme a figura acima.

Observe que os triângulos OPB e OQC são congruentes logo:

OC = PB ⟹ $x_Q = y_P$ ⟹ cos($\frac{\pi}{2} - \theta$) = sen θ

QC = OB ⟹ $y_Q = x_P$ ⟹ sen($\frac{\pi}{2} - \theta$) = sen θ

2. 3. 2. 5 Tangente de um arco

Considere um eixo t, com origem em A e paralelo ao eixo y. Esse eixo é conhecido como eixo das t. O ponto P é a imagem do arco θ sobre a circunferência trigométrica. A reta OP intercepta o eixo t em um ponto de posição t_p.

A função tangente é definida coo f: $\mathbb{R} - (\frac{\pi}{2} + k\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada θ a posição t_p sobre o eixo das tangentes. Assim temos f(θ) = tg θ = t_p observe que $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ a reta OP é paralela ao eixo das tangentes, não interceptando-a. Por isso a função tangente não é definida para $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Propriedades:

1) A imagem da função tangente é $\mathbb{R}$.

2) tg $\theta > 0$, para $\theta \in$ 1°Q e 3°Q.

3) tg $\theta < 0$, para $\theta \in$ 2°Q e 4°Q.

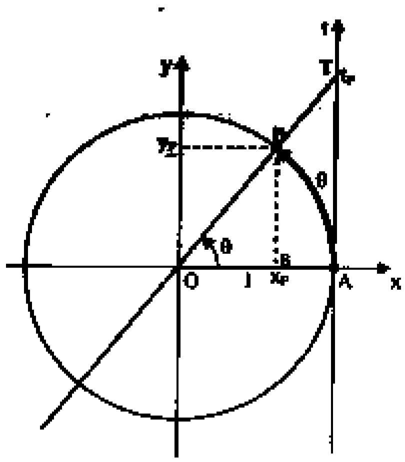
4) A função tangente e periódica de período π.

tg θ = tg $(\theta + k\pi)$, k $\in \mathbb{Z}$.

2. 3. 2. 6 Relações entre as funções trigonométricas

Teorema: Para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, tem-se tg $\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$

Figura 16 - Relação Tangente.



Demonstração:

Suponha que P é a imagem do arco θ sobre o ciclo trigonométrico. B é a projeção de P sobre o eixo x . T é a intersecção de OP com o eixo t das tangentes.

Observe que o ΔOAT e ΔOBP possuem os mesmos ângulos. Assim ΔOBP.

$$\frac{AT}{PB} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{|t_p|}{|y_p|} = \frac{1}{|x_p|} \Rightarrow \frac{|tg\theta|}{|sen\theta|} = \frac{1}{|cos\theta|} \Rightarrow tg\theta = \frac{|sen\theta|}{|cos\theta|}$$

O quadro mostra como variam os sinais de tg θ, sen θ e cos θ conforme os quadrantes no ciclo trigonométrico.

Figura 17 – Sinal das funções trigonométricas.

Quadrante	**Sinal de tg θ**	**Sinal de sen θ**	**Sinal de cos θ**	**Sinal de $\frac{sen\,\theta}{cos\,\theta}$**
1º	+	+	+	+
2º	–	+	–	–
3º	+	–	–	+
4º	–	–	+	–

Como o sinal de tgθ coincide, em cada quandrante, com o sinal de $\frac{sen\theta}{cos\theta}$, então pode-se afirmar que tgθ = $\frac{sen\theta}{cos\theta}$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ + kπ, k $\in \mathbb{Z}$.

Há outras relações trigonométricas que podem ser estudadas por meio do ciclo trigonométrico, tais como a cotangente, secante e cossecante, que não são objeto de estudo nesta pesquisa por não serem desenvolvidas na sequência didática construída.

2. 3. 2. 7 Equações Trigonométricas

Seja $f(x)$ uma função que envolve apenas constantes reais e operações com funções trigonométricas. Resolver uma equação trigonométrica f(x) = 0 significa determinar todas os valores de α tais que f(α) = 0. Estes valores α formam um conjunto denomminado conjunto solução da equação $f(x) = 0$. Note que, para pertencer ao conjunto solução da equação $f(x) = 0$, todos os valores de α devem pertencer ao domínio da função $f(x)$.

De maneira geral, as equações trigonométricas são dadas originalmente por expressões envolvendo várias funções trigonométricas que, após a devida manipulação algébrica, se reduzem a resolver uma das equações fundamentais abaixo:

i) sen α = sen β

ii) cos α = cos β

iii) tg α = tg β

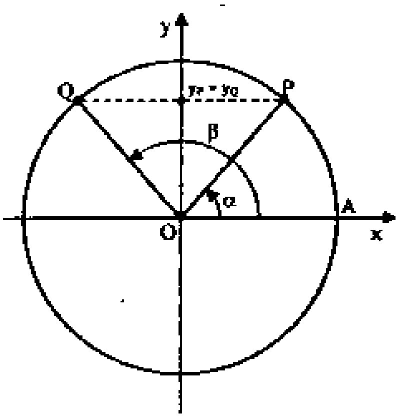
Portanto, é importante estudar com detalhes o conjunto solução destas equações trigonométricas fundamentais.

a) EQUAÇÃO DA FORMA sen α = sen β

De modo que as imagens dos arcos α e β, sobre o ciclo trigonmétrico, respectivamente os pontos P e Q, devem possuir a mesma ordenada:

$$y_P = y_Q$$

Figura 18 – Equação seno.



Isso é possível em duas possibilidades:

i) α e β são côngruos : $\alpha = \beta + 2k\pi$, k ∈ $\mathbb{Z}$

ii) α e β são côngruos : $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi$, k ∈ $\mathbb{Z}$

Portanto, conclui-se que:

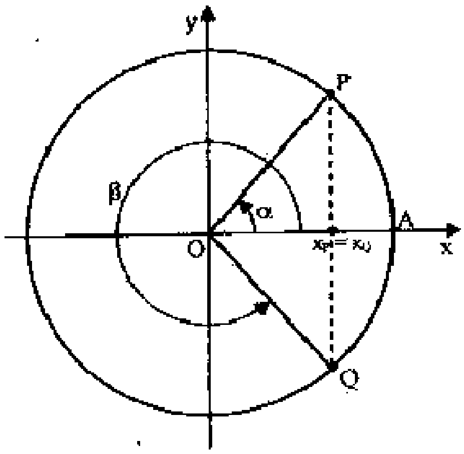
$$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$$

b) EQUAÇÃO DA FORMA cos α = cos β

De modo que cos α = cos β, as imagens dos arcos α e β sobre o ciclo trigonométrico, respectivamente os pontos P e Q, devem possuir a mesma abscissa:

$$x_P = x_Q$$

Figura 19 – Equação cosseno.



Isto ocorre em duas possibilidades:

i) α e β são côngruos : $\alpha = \beta + 2k\pi$, k ∈ $\mathbb{Z}$

ii) α e $2\pi - \beta$ são côngruos : $\alpha = 2\pi - \beta + 2k\pi$, k ∈ $\mathbb{Z}$

Logo, conclui-se que:

cos α = cos β $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = 2\pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$

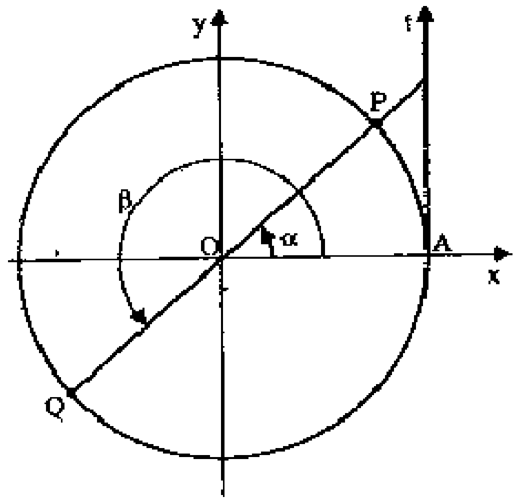
Observação: É muito comum utilizar no lugar de $2\pi - \beta$ o arco côngruo $-\beta$:

cos α = cos β $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$ ou $\Leftrightarrow \alpha = \pm\beta + 2k\pi$

c) EQUAÇÃO DA FORMA tg α = tg β

De modo que tg α = tg β, as imagens dos arcos α e β sobre o ciclo trigonométrico, respectivamente os pontos P e Q, devem estar alinhadas com o centro O do ciclo. Isto ocorre em duas possibilidades:

Figura 20- Equação tangente.



i) α e β são côngruos : $\alpha = \beta + 2k\pi$, k ∈ $\mathbb{Z}$

ii) α e $\pi + \beta$ são côngruos : $\alpha = \pi + \beta + 2k\pi$, k ∈ $\mathbb{Z}$

Logo, conclui-se que:

tg α = tg $\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \end{cases}$

2. 3. 2. 8 Inequações Trigonométricas

Considere $f(x)$ e $g(x)$ expressões que envolvem apenas operações com funções trigonométricas. Uma inequação trigonométrica é qualquer expressão do tipo $f(x) > g(x)$ ou $f(x) \geq g(x)$. De modo a simplificar a análise, serão considerados os caos de $> ou <$, caso o sinal de desigualdade seja $\geq ou \leq$, a análise é identicam bastando trocar $> por \geq$ e $< por \leq$. O conjunto solução de uma inequação trigonométrica do tipo $f(x) > g(x)$ é o conjunto dos arcos θ tais que a inequação é satisfeita, ou seja $f(\theta) > g(\theta)$.

De maneira geral, as Inequações Trigonométricas são dadas, originalmente, com várias operações com funções trigonométricas que, depois da devida manipulação algébrica, se reduz a resolver uma das inequações fundamentais (k ∈ $\mathbb{R}$):

i) senx $>$ k; senx $<$ k

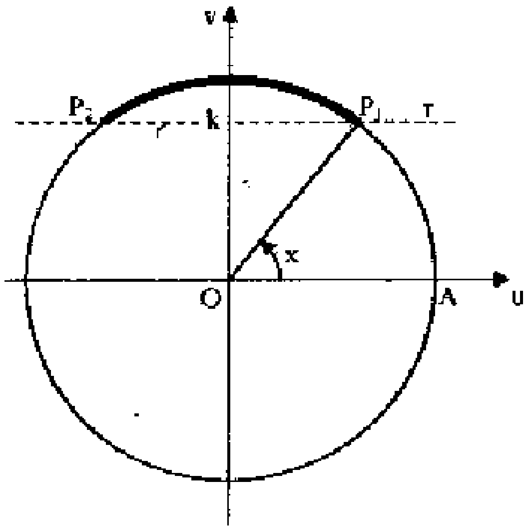
ii) cosx > k; cosx < k

iii) tgx > k; tgx < k

Devido a importância destas inequações fundamentais, suas soluções serão estudadas nos itens a seguir.

Solução de $Sen\,x > k$:

Figura 21 – Inequação Seno



Marcam-se no eixo v o ponto de ordenada k. Uma reta horizontal r é traçada passando por este ponto. Esta reta intersecta o ciclo trigonométrico em dois pontos, P_1 e P_2. Considere o arco de circunferência P_1P_2 sobre o ciclo trigonométrico que está acima da reta r.

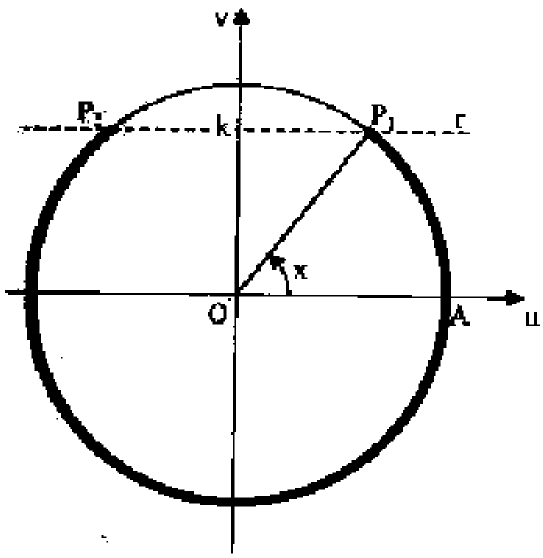
Todos os arcos do ciclo trigonométrico que pertencem a P_1P_2 são solução da inequação $senx > k$. Deste modo, identificando o arco x de modo que $x = arcsenk$, o conjunto solução da inequação $senx > k$ é :

$$S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x = arcsenk + 2k\pi < x < \pi - arcsenx + 2k\pi\}$$

Solução de $senx < k$:

Marca-se no eixo v o ponto de ordenada k. Uma reta horizontal r é traçada passando por este ponto. Esta reta intersecta o ciclo trigonométrico em dois pontos, P_1 e P_2. Considerando o arco de circunferência P_1P_2, sobre o ciclo trigonométrico que está abaixo da reta r . Todos os arcos do ciclo trigonométrico que pertencem a P_1P_2 são solução da inequação senx < k.

Figura 22- Inequação Cosseno.



Deste modo, identificando o arco x de modo que $x = arcsenk$, o conjunto solução da inequação $senx < k$.

$$S = \{x \in \mathbb{R}/\ 2k\pi \leq x < arcsenk + 2k\pi\ ou\ \pi - arcsenk < x < 2\pi + 2k\pi\}$$

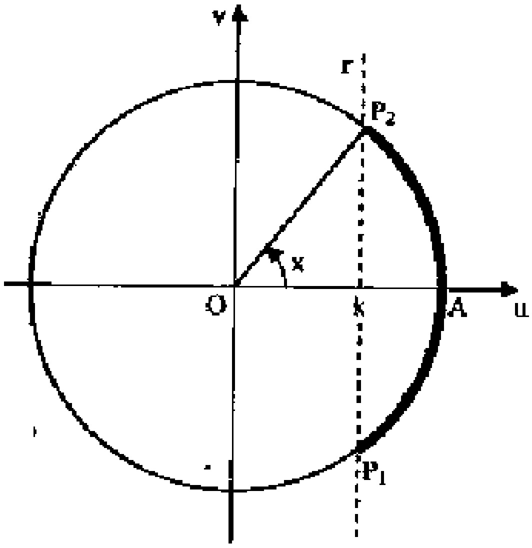
De maneira equivalente, utilizando arcos negativos, é possível escrever o conjunto solução em apenas um intervalo.

$$S = \{x \in \mathbb{R}/ -\pi \mathrm{arc\,cos} k + 2k\pi < x < \mathrm{arc\,cos} x + 2k\pi\}$$

Solução de cosx > k:

Marca-se no eixo v o ponto de abscissa k. Uma reta vertical r é traçada passando por este ponto. Esta reta intersecta o ciclo trigonométrico em dois pontos, P_1 e P_2. Considerando o arco de circunferência P_1P_2, sobre o ciclo trigonométrico que está abaixo da reta r . Todos os arcos do ciclo trigonométrico que pertencem a P_1P_2 são solução da inequação $cosx < k$. Deste modo, identificano o arco x de modo que $x = arc\,cosk$, o conjunto solução da inequação $cosx > k$ é:

Figura 23 – conjunto solução da inequação $\boldsymbol{cosx > k}$



S = $\{x \in \mathbb{R}/\ 2\text{k}\pi \leq \text{x} < \text{arc cosk} + 2\text{k}\pi \text{ ou } 2\pi - \text{arc cosk} + 2\text{k}\pi < \text{x} < 2\pi + 2\text{k}\pi\}$

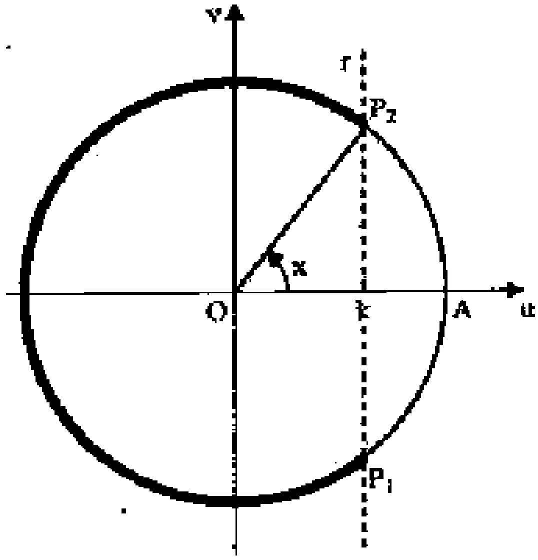
De maneira equivalente, utilizando arcos negativos, e possível escrever o conjunto solução em apenas um intervalo real.

S = $\{x \in \mathbb{R}/{-\text{arc cosk}} + 2\text{k}\pi < \text{x} < \text{arc cosx} + 2\text{k}\pi\}$

Solução de cosx $<$ k:

Marca-se no eixo v o ponto de abscissa k. Uma reta vertical r é traçada passando por este ponto. Esta reta intersecta o ciclo trigonométrico em dois pontos, P_1 e P_2. Considerando o arco de circunferência P_1P_2, sobre o ciclo trigonométrico que está esquerda da reta r . Todos os arcos do ciclo trigonométrico que pertencem a P_1P_2 são solução da inequação cosx $<$ k. Deste modo, identificano o arco x de modo que x = arc cosk, o conjunto solução da inequação cosx $<$ k é:

Figura 24 - conjunto solução da inequação cosx $<$ k

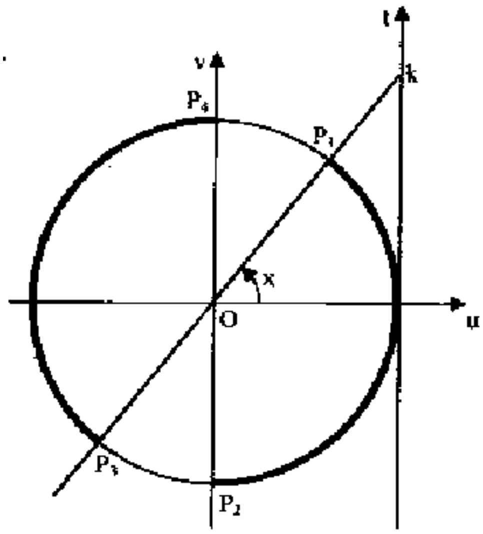


S = $\{x \in \mathbb{R} /\ \text{arc}\cos\text{k} + 2\text{k}\pi\ < \text{x}\ < 2\pi - \ \text{arc}\cos\text{x} + \ 2\text{k}\pi\}$

Solução de tgx $>$ k:

Marca-se sobre o eixo t das tangentes o ponto com posição igual a k. A reta que passa por este ponto e o ponto O corta o ciclo trigonométrico em $P_1\ e\ P_3$.O arco x é identificado no ciclo de modo que x = arc tgk. Sejam $P_2\ e\ P_4$ os pontos onde o ciclo corta o eixo V conforme a figura. A solução da inequação tgx $>$ k é o conjunto dos arcos x que pertencem á união entre P_1P_2 e P_3P_4, ou seja,

Figura 25 - Conjunto solução da inequação tgx $>$ k.

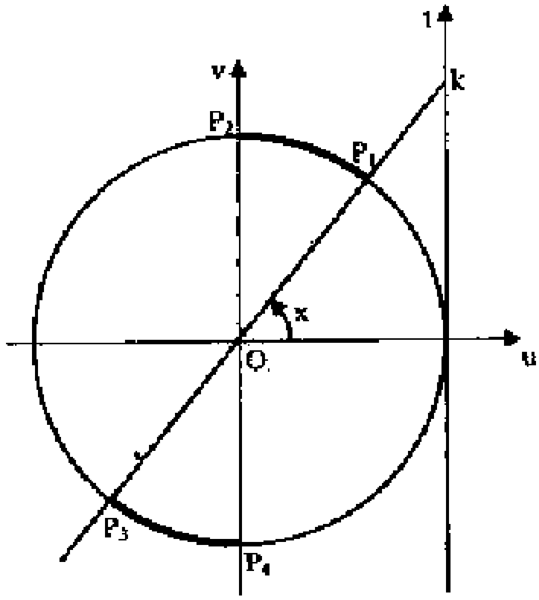


S = $\left\{x \in \mathbb{R} /\ \ \text{arctg}\,\text{k} + 2\text{k}\pi < \text{x}\ < \frac{\pi}{2} + 2\text{k}\pi\ \text{ou}\ \pi + \text{arctg}\,\text{k} + \ 2\text{k}\pi < \text{x}\ < \frac{3\pi}{2}\ + 2\text{k}\pi\right\}$

Solução de tgx < k:

Marca-se sobre o eixo t das tangentes o ponto com posição igual a k. A reta que passa por este ponto e o ponto O corta o ciclo trigonométrico em $P_1\ e\ P_3$.O arco x é identificado no ciclo de modo que x = arc tgk. Sejam $P_2\ e\ P_4$ os pontos onde o ciclo corta o eixo V conforme a figura. A solução da inequação tgx < k é o conjunto dos arcos x que pertencem á união entre P_2P_1 e P_4P_3, ou seja,

Figura 26- Conjunto solução da inequação tgx < k.

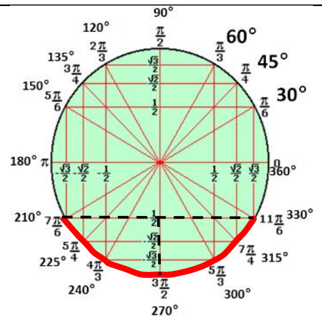
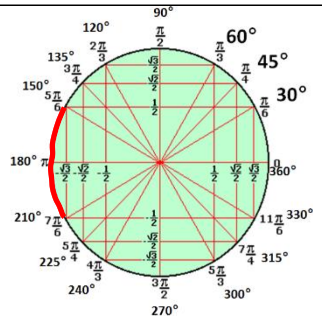
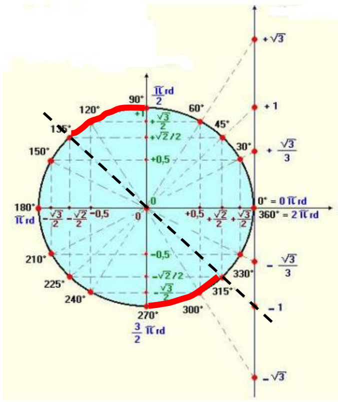


S = $\left\{x \in \mathbb{R} / -\frac{\pi}{2} + 2\mathrm{k}\pi < \mathrm{x} < \mathrm{arctg\,k} + 2\mathrm{k}\pi \text{ ou } \frac{\pi}{2} + 2\mathrm{k}\pi < \mathrm{x} < \pi + \mathrm{arctg\,k} + 2\mathrm{k}\pi\right\}$

Note que ao desenvolver a solução algébrica de um Inequação Trigonométrica é possível de forma auxiliar ou não também expressar a solução de forma gráfica e geométrica simultaneamente no ciclo trigonométrico e também converter para a representação de intervalos. Essas possibilidades de registros de representação semiótica das Inequações Trigonométricas permite um estudo mais detalhado sobre esse objeto.

Exemplo:

Quadro 10 – Possíveis representações de inequações trigonométricas.

Inequação	Ciclo trigonométrico	Solução algébrica e Solução no intervalo
$sen\,x < -\frac{1}{2}$		$\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} / \frac{7\pi}{6} < \mathbf{x} < \frac{11\pi}{6}\}$
		$S =]\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}[$
$Cos\,2x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} / \frac{5\pi}{12} < \mathbf{x} < \frac{7\pi}{12}\}$
		$S =]\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}[$
$Tg\,x < -1$		$\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{2} < \mathbf{x} < \frac{2\pi}{3} \cup \frac{3\pi}{2} < \mathbf{x} < \frac{7\pi}{4}\}$
		$S =]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}[\ ou\ ]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}[$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Chega-se ao final do estudo sobre o objeto matemático e sobre as análises prévias desta pesquisa, nessa fase foi possível estabelecer os elementos necessários para a construção da sequência didática a seguir apresentada.

3 CONSTRUÇÃO DAS SITUAÇÕES E ANÁLISE A PRIORI

Neste capítulo, apresenta-se como foi construída a sequência didática para o ensino de Inequação Trigonométrica. A construção e análise a priori das atividades é uma fase da Engenharia Didática apresentada na seção 1.1 desta dissertação, em que se apresenta os objetivos de aprendizagem que foram previstos para cada atividade e uma previsão das possíveis situações e dificuldades que possam ocorrer ao longo do processo de experimentação do produto educacional que possui a estrutura apresentada no quadro 11.

Quadro 11 – Estrutura das atividades da Sequência Didática

ATIVIDADE	OBJETIVO	MATERIAL	TEMPO
1- Inequação seno	Descobrir uma relação entre as soluções de inequação do seno	-Ciclo Trigonométrico -Folha de atividade.; -Caneta lápis e borracha.	2 h/aula
2- Inequação cosseno	Descobrir uma relação entre as soluções de inequação do seno	-Ciclo Trigonométrico -Folha de atividade.; -Caneta lápis e borracha.	1 h/aula
3- Inequação Tangente	Descobrir uma relação entre as soluções de inequação do seno	-Ciclo Trigonométrico -Folha de atividade.; -Caneta lápis e borracha.	1 h/aula
4- Soluções de Inequações Trigonométricas	Desenvolver a conversão entre as representações das soluções da inequação trigonométrica, as quais sejam: No ciclo trigonométrico (geométrica e gáfica), na solução particular algébrica e no intervalo.	-Folha de atividade.; -Caneta lápis e borracha.	1 h/aula

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Perceba que na primeira atividade foi estimado um tempo maior por ser uma atividade em que os estudantes começariam a mobilizar os conhecimentos prévios que precisariam para compreender o novo assunto. Os conhecimentos prévios estão relacionados a conceitos básicos da trigonometria, tais como: razões trigonométricas, equações trigonométricas e reconhecimento e manipulação do ciclo trigonométrico como forma de representação geométrica e gráfica.

As quatro atividades foram construídas de modo a fazer os estudantes manipularem estaticamente o ciclo trigonométrico traçando sobre ele os intervalos de arcos para compreensão da solução da Inequação Trigonométrica. Essa solução é também explorada em diferentes registros de representação semiótica, explicado na seção 1.3, podendo ser escrito como representação algébrica, gráfica, geométrica e em intervalo.

Na construção da sequência didática foram dispostos diferentes momentos orientados pelo material impresso disponível no apêndice A, conforme o exposto na seção 1.2, momentos de **organização, apresentação**, **execução**, **registro**, **análise** e **institucionalização,** em que a organização e apresentação deve ser realizada oralmente pelo professor, orientando a formação de grupos ou não e as instruções iniciais do roteiro da atividade**.** Assim segue a análise a priori de cada uma das atividades.

3. 1 ANÁLISE A PRIORI DA ATIVIDADE 1

A atividade 1 tem o objetivo de descobrir uma relação entre as soluções da inequação seno, é possível por meio dessa atividade explorar a representação algébrica, gráfica e geométrica da inequação seno.

Na primeira questão da atividade 1 pede-se que com o auxílio do ciclo trigonométrico, determine-se a solução algébrica de cada inequação $sen\ a > k$ ou $sen\ a < k$ dada, no intervalo de [0, 2π]. É disponibilizado em cada item um ciclo trigonométrico para dar apoio visual na solução da inequação proposta. Os itens estão dispostos de forma a levar a percepção de que diferenças ocorrem quando se muda a desigualdade ou quando se muda o sinal de k.

Estimou-se que os estudantes precisavam de mediação do professor para relembrarem dos conhecimentos prévios, em especial as equações trigonométricas.

O reconhecimento do ciclo trigonométrico de raio unitário e sua divisão em quadrantes também foi uma dificuldade prevista na elaboração deste material. O eixo a que deveria se considerar com relação a inequação seno poderia ser uma dúvida dos educandos, para isso indicou-se enfatizar que a relação estabelecida deveria voltar o olhar para o eixo das ordenadas (eixo de “y”).

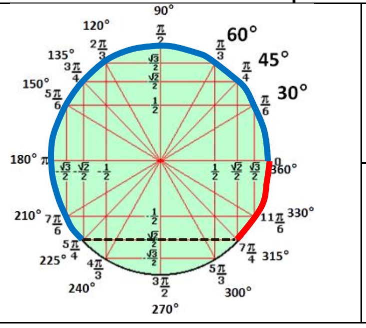
Na questão 2 solicita-se que com as informações obtidas na questão 1 fosse preenchido um quadro com as soluções. Caso os alunos não consegam, o professor deve ajudar a completar devidamente o quadro. A intenção dessa questão é promover uma melhor observação do comportamento das soluções e assim poder estabelecer relações, semelhanças e diferenças entre os diferentes tipos de inequação seno e como esse comportamento interferia na representação da sua solução, na forma algébrica e na forma de intervalo. Esse momento seria para o educando um exercício da linguagem matemática adequada, com uso do simbolismo próprio e formal e com a explicação de seu significado. Como na questão 1 explora-se a representação algébrica da solução, presumiu-se que os estudantes não teriam grandes dificuldades em realizar a representação da solução em intervalo.

A questão 3 foi elaborada com a intenção de estimular a capacidade de observação e análise. Deseja-se que o estudante perceba o intervalo ou intervalos que satisfazem a solução na inequação seno, isto é, quando a desigualdade for (>k) deve ser observado o arcsenk acima de k no eixo y e quando a desigualdade for (< k) deve ser observado o arcsenk abaixo de k no eixo y.

Também foram previstas as situações em que a solução seria a união de dois intervalos, quando o arco alcança parte do quarto quadrante, é necessário que se represente o intervalo que pertence no quarto quadrante unido com o outro intervalo, acompanhando a ordem do sentido anti-horário.

Exemplo:

Quadro 12 – Possível erro de representação da Inequação Seno.

$Sen\, x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\mathbf{S = \{x \in \mathbb{R}/0 < x < \frac{5\pi}{4} \cup \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\}}$
		$\mathbf{S =]0, \frac{5\pi}{4}[\cup]\frac{7\pi}{4}, 2\pi[}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Nessa situação o educando pode fazer equivocamente $\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} / \frac{7\pi}{4} < \mathbf{x} < \frac{5\pi}{4}\}$ ou $\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} / \frac{5\pi}{4} < \mathbf{x} < \frac{7\pi}{4}\}$, que é a solução de $\boldsymbol{Sen\,x} < -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, nessa situação, caso a discussão entre os educandos não levasse a essa compreensão o professor deveria mediar a discussão para que realizassem a união dos intervalos de solução devidamente.

A questão 4 é o momento de socialização das discuções em que os estudantes deveriam chegar a um consenso que levasse a uma conclusão que demonstre a redescoberta sobre o que seria uma inequação seno e sua solução em diferentes representações. Ao final ocorre a formalização pelo professor, organizando a definição e a generalização de sua solução da inequação seno.

3. 2 ANÁLISE A PRIORI DA ATIVIDADE 2

A atividade 2 foi elaborada com o objetivo de descobrir uma relação entre as soluções de inequação do cosseno. Na primeira questão da atividade 1 pede-se que com o auxílio do ciclo trigonométrico, determine-se a solução algébrica de cada inequação $cos\ a > k$ ou $cos\ a < k$ dada, no intervalo de [0, 2π]. É disponibilizado em cada item um ciclo trigonométrico para dar apoio visual na solução da inequação proposta. Os itens estão dispostos de forma a levar a percepção de que diferenças ocorrem quando se muda a desigualdade ou quando se muda o sinal de k.

Nesta atividade estimou-se que os estudantes não tivessem mais dificuldades em manipular o ciclo trigonométrico e recorrer aos conhecimentos prévios.

O eixo a que se deva considerar com relação a inequação cosseno poderia ser uma dúvida dos educandos, para isso indica-se enfatizar que a relação estabelecida deveria voltar o olhar para o eixo das abscissas (eixo de “x”).

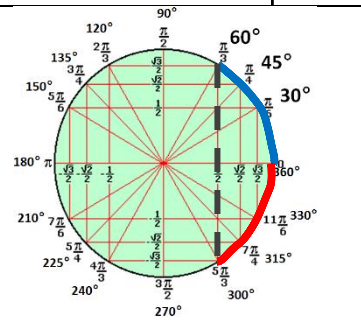
Na questão 2 solicita-se que com as informações obtidas na questão 1 fosse preenchido um quadro com as soluções. A intenção dessa questão é promover uma melhor observação do comportamento das soluções e assim poder estabelecer relações, semelhanças e diferenças entre os diferentes tipos de inequação cosseno e como esse comportamento interferia na representação da sua solução, na forma algébrica e na forma de intervalo.

A questão 3 foi elaborada com a intenção de estimular a capacidade de observação e análise. Desejou-se que o estudante percebesse o intervalo ou intervalos que satisfazem a solução na inequação cosseno, isto é, quando a desigualdade for (>k) deve ser observado o arccosk a direita de k no eixo x e quando a desigualdade for (< k) deve ser observado o arccosk a esquerda de k no eixo x.

Também foram consideradas as situações em que a solução é a união de dois intervalos, talvez pela experiência na atividade anterior o educando percebesse que quando o arco alcança primeiro e quarto quadrante passando ou não pelo segundo e terceiro quadrante de forma descontínua, é necessário que represente na ordem do sentido anti-horário a união do primeiro intervalo da solução com o segundo intervalo da solução.

Exemplo:

Quadro 13 - Possível erro de representação da Inequação Cosseno

<table>
<tr>
<td rowspan="2">$Cos\,x > \frac{1}{2}$</td>
<td rowspan="2">
</td>
<td>$\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}/\mathbf{0} < \mathbf{x} < \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}} \cup \frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{3}} < \mathbf{x} < \mathbf{2\pi}\}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\mathbf{S} =]\mathbf{0}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}[\cup]\frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{3}}, \mathbf{2\pi}[$</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Nessa situação o professor deve observar se equivocamente o educando estabeleceu $\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}/\frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{3}} < \mathbf{x} < \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\}$. Assim, nessa situação, caso a discussão entre os educandos não levasse a essa compreensão o professor deveria mediar a discussão para que realizassem a união dos intervalos de solução devidamente.

Na questão 4 os estudantes socializam as discuções e deveriam chegar um consenso que leve a uma conclusão que demonstre a redescoberta sobre o que seria uma inequação cosseno. Ao final o professor formaliza e organiza essa definição e a generalização da solução da inequação cosseno.

3. 3 ANÁLISE A PRIORI DA ATIVIDADE 3

A atividade 3 foi elaborada com a intenção de descobrir uma relação entre as soluções de inequação tangente. Nesta atividade é possível que seja necessário explorar os conhecimentos prévios sobre a representação da equação seno no ciclo trigonométrico, haja vista que agora o olhar sobre a correspondência do arco é voltado para a reta tangente ao ciclo e paralela ao eixo de y.

Na primeira questão da atividade 3 pede-se que com o auxílio do ciclo trigonométrico, determine-se a solução algébrica de cada inequação $tg\ a > k$ ou $tg\ a < k$ dada, no intervalo de [0, 2π]. É disponibilizado em cada item um ciclo trigonométrico para dar apoio visual na solução da inequação proposta. Os itens estão dispostos de forma a levar a percepção de que diferenças ocorrem quando se muda a desigualdade ou quando se muda o sinal de k.

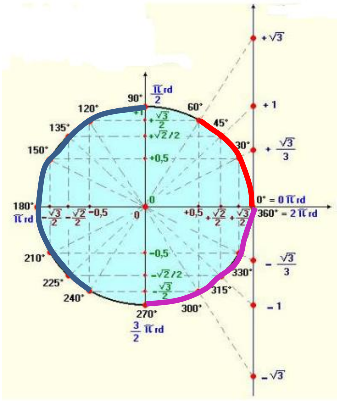
Na questão 2 solicita-se que com as informações obtidas na questão 1 fosse preenchido um quadro com as soluções. A intenção dessa questão é promover uma melhor observação do comportamento das soluções e assim poder estabelecer relações, semelhanças e diferenças entre os diferentes tipos de inequação tangente e como esse comportamento interferia na representação da sua solução, na forma algébrica e na forma de intervalo.

A questão 3 foi elaborada com a intenção de estimular a capacidade de observação e análise. Desejou-se que o estudante percebesse o intervalo ou intervalos que satisfazem a solução na inequação tangente, isto é, quando a desigualdade for (>k) deve ser observado o arccosk a direita de k no eixo x e quando a desigualdade for (< k) deve ser observado o arccosk a esquerda de k no eixo x.

Em tratando-se da inequação tangente o estudante deveria perceber a solução pode ter até três intervalos, entretanto, presumiu-se que por consta das experiências com as atividades anteriores represente naturalmente cada intervalo na ordem do sentido anti-horário.

Exemplo:

Quadro 14- Possível erro de representação da Inequação Tangente.

$Tg\ x < \sqrt{3}$		$S = \{x \in \mathbb{R} \ /\ 0 < x < \frac{\pi}{3} \cup \frac{\pi}{2} < x < \frac{4\pi}{3} \cup \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\}$
		$S =]0, \frac{\pi}{3}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Assim, nessa situação, caso a discussão entre os educandos não levasse a compreensão desejado o professor deve mediar a discussão para que realizassem a união dos intervalos de solução devidamente.

Na questão 4 os estudantes socializam as discuções e deveriam chegar um consenso que leve a uma conclusão que demonstre a redescoberta sobre o que seria uma inequação tangente. Ao final o professor formaliza e organiza essa definição e a generalização da solução da inequação tangente.

3. 4 ANÁLISE A PRIORI DA ATIVIDADE 4

A atividade 4 tem o objetivo de desenvolver a conversão entre as representações das soluções da inequação trigonométrica, as quais sejam: no ciclo trigonométrico (geométrica e gráfica), na solução particular algébrica e no intervalo. Aliado a isso, nessa atividade, o estudante recorreria ao conteúdo das três atividades anteriores, aprofundando as formas de calcular e representar diferentes inequações trigonométricas sabendo qual se refere ao eixo x, qual se refere ao eixo y e qual se refere a reta tangente ao ciclo.

Na atividade 4, os momentos de execução e registro estão na questão 1, onde o educando poderia converter a representação de modo inverso a que se estava fazendo nas atividades anteriores, isto é, agora explora-se a conversão da representação algébrica para a gráfica e geométrica e da solução da inequação para a inequação, sendo esta última situação a que pudessem ter maior dificuldade em realizar.

Na questão 2, o professor poderia verificar por meio do registro em língua materna quais as estratégias adotadas pelos educandos e se não haveria equívocos em sua maneira de resolver cada inequação. Na questão 3, as dúvidas deveriam estar sanadas e a turma ter chegado a um consenso de como reconhecer cada uma das inequações e como estabelecer e converter suas soluções em diferentes representações.

3. 5 SÍNTESE DA ANÁLISE A PRIORI

Nesta seção apenas sintetiza-se as possíveis dificuldades que poderiam acontecer ao longo da experimentação da sequência didática disposta na íntegra no apêndice A, bem como indicações de como o professor poderia mediar a superação dessas dificuldades conduzindo para o alcance dos objetivos de aprendizagem desejados.

Quadro 15 – Síntese da análise a priori.

Atividade	Possíveis dificuldades	Formas de mediação
1-Inequação seno	-Retomada dos conhecimentos prévios sobre equação seno. -Manipulação do ciclo trigonométrico. -Compreensão da referência ao eixo y -Reconhecimento de que a solução possa ter mais de um intervalo. -Definição da ordem de representação dos intervalos da solução.	-Retomada do reconhecimento do ciclo trigonométrico unitário e suas características. (quadrantes, arcos, eixos, etc); - Ênfase no olhar para o eixo y. -Ênfase na ordem dos quadrantes pelo sentido anti-horário.
2-Inequação cosseno	-Retomada dos conhecimentos prévios sobre equação cosseno. -Compreensão da referência ao eixo x. -Reconhecimento de que a solução possa ter mais de um intervalo. -Definição da ordem de representação dos intervalos da solução.	-Diferenciar da atividade 1. - Ênfase no olhar para o eixo x.
3-Inequação Tangente	-Retomada dos conhecimentos prévios sobre equação tangente. -Compreensão da referência à reta tangente ao ciclo.	-Retomada do reconhecimento sobre equação tangente;

	-Reconhecimento de que a solução possa ter até três intervalos.	- Ênfase no olhar para o eixo da reta tangente ao ciclo trigonométrico.
4-Soluções de Inequações Trigonométricas	-Recorrência ao conteúdo das três atividades anteriores. -Decisão sobre qual eixo de referência: x, y ou reta tangente. -Realizar a o processo inverso de conversão, da solução para a inequação.	- Discussão sobre o que foi estudado nas atividades anteriores, suas diferenças e semelhanças.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Note no quadro acima que se previu que algumas dificuldades poderiam ser minimizadas ao longo da execução das atividades e que, portanto, a intensidade de interferência do professor nas redescobertas dos educandos também tenderia a diminuir. De modo que essa interferência seria não em diretamente em responder as dúvidas dos educandos, mas levá-los a recorrerem aos conhecimentos que os conduziriam para o alcance de tais respostas.

4 EXPERIMENTAÇÃO

A sequência didática ora apresentada, foi construída para ser experimentada com estudantes do 2º ano do Ensino Médio, série estabelecida no currículo de Matemática para o conteúdo de Inequação Trigonométrica. Entretanto, ao longo da pesquisa inicial e de sua construção, anos 2018/2019, ainda não se vivenciava a pandemia de COVID-19. Em 2020, quando as atividades da sequência didática estavam em conformidade com as recomendações da banca examinadora de qualificação da pesquisa, as aulas de toda rede de ensino do Brasil foram suspensas.

Nesse momento, chegou-se a um conflito e a muitas dúvidas sobre como proceder com experimentação do produto desta pesquisa. Devia-se esperar o retorno das aulas presenciais? Faria-se um estudo de caso? Enfrentaria-se as dificuldades do pesquisador com a tecnologia e daria-se continuidade a pesquisa e experimentar-se-ia o produto de forma virtual? Decidiu-se pela última opção.

Na rede estadual de ensino do Maranhão as aulas permaneciam de forma remota em junho de 2021, quando realizou-se a experimentação. Numa escola da rede estadual de ensino de Imperatriz-MA, foi realizada a experimentação da sequência didática para o ensino de Inequação Trigonométrica em duas turmas do 2º ano do Ensino Médio.

A modalidade de ensino remota possibilitou a realização da pesquisa, mas não garantiu uma participação de todos os sujeitos da pesquisa em todas as fases da experimentação e não permitiu uma interação grupal entre os estudantes, sendo realizada de forma individual síncrona via plataforma Meet, com interação entre o professor-pesquisador e estudantes, sem prejuízo aos critérios do método de ensino adotado.

Os estudantes eram alunos do professor-pesquisador na escola onde ele trabalha, assim havia estabelecida uma relação didático pedagógica em que o professor já havia ministrado ele mesmo os conteúdos referentes aos conhecimentos prévios para os educandos também de forma remota. Logo, a sequência didática foi aplicada no momento que sequencialmente os estudantes iriam ter o primeiro contado com o conteúdo Inequação Trigonométrica.

Antes da experimentação das atividades foi aplicado um pré-teste (Anexo X) e após a experimentação um pós-teste com as mesmas questões para verificar os efeitos na aprendizagem após a experimentação do produto. Sendo que ao todo participaram 37 estudantes, que receberam o material impresso na escola, mas foram orientados a fazerem as atividades durante a aula on-line. Todo esse processo ocorreu entre o dia 07 e 17 de junho de 2021 em 5 encontros de 2h/aula de 45 minutos cada, conforme o cronograma abaixo:

Quadro 16- Cronograma da Experimentação.

Data	**Atividade**
07/06/2021	Aplicação do Pré-teste
10/06/2021	Aplicação da atividade 1- Inequação Seno.
14/06/2021	Aplicação da atividade 2- Inequação Cosseno
15/06/2021	Aplicação da atividade 3- Inequação Tangente Aplicação da atividade 4- Soluções da Inequações trigonométricas
17/06/2021	Aplicação do Pós-teste

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Os estudantes foram orientados a fazerem as atividades durante a aula on-line, mediante instruções do professor-pesquisador e enviar no mesmo dia o material escaneado por e-mail, sendo que apenas para as atividades da sequência didática foi necessário 6h/aula ao todo. Durante a experimentação ocorreram dificuldades que foram comuns ao ensino remoto: pouca participação espontânea dos estudantes, câmeras e microfones desligados, necessitando-se que o professor-pesquisador estivesse constantemente instigando a participação para que a atividade ocorresse como desejada.

Após cada atividade nem todos os estudantes enviaram as atividades e testes, de modo que a coleta de dados aconteceu apenas daqueles que enviaram os registros escritos por e-mail, embora a maioria dos estudantes tenham frequentado as aulas remotamente, entretanto não foi possível fazer um levantamento preciso da frequência por dificuldades técnicas do pesquisador.

Os estudantes que não entregaram as atividades relataram dificuldades de acesso à internet no dia da entrega, o qual foi definido que seria logo após a realização do teste ou atividade, para que minimizasse a possibilidade de recorrerem a ajuda de terceiros e nesse sentido também solicitou-se o apoio dos responsáveis. Essas medidas foram para garantir a confiabilidade dos resultados.

Apresenta-se no quadro a seguir quais estudantes e quais atividades e testes foram entregues pelos estudantes, que estão codificados como E01, E02, E03, etc, para preservar o anonimato dos sujeitos:

Quadro 17- Atividades entregues pelos estudantes.

Identificação	**Pré-teste**	**Atividade 1**	**Atividade 2**	**Atividade 3**	**Atividade 4**	**Pós-teste**
E01						X
E02					X	
E03	X		X			X
E04		X	X	X		X
E05	X	X		X		X
E06		X				
E07		X				
E08	X					X
E09	X	X				X
E10	X	X				X
E11						
E12		X				X

E13						X
E14		X				
E15		X				X
E16	X	X				X
E17		X				X
E18	X	X				X
E19	X		X			X
E20						X
E21	X	X	X			X
E22	X					X
E23	X		X			X
E24						X
E25			X	X		
E26	X	X	X			X
E27	X					X
E28		X	X			X
E29						X
E30						X
E31	X					X
E32		X				X
E33		X				X
E34						X
E35						X
E36	X		X			X
E37						X

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

O quadro 17 ilustra apenas quem entregou as atividades e testes por e-mail, entretanto todos os 37 estudantes participaram de alguma das atividades de ensino remoto da experimentação da sequência didática para o ensino de Inequação Trigonométrica.

5 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

Nesta fase da pesquisa, apresenta-se os resultados da experimentação descrita anteriormente. Para tanto foi feita uma análise da experiência com cada uma das atividades, sob a ótica dos objetivos metodológicos do Ensino por Atividades e da Teoria dos registros e representações semiótica, descritos no capítulo 1.

Na realização da análise também buscou-se responder à questão de pesquisa: Quais efeitos uma sequência didática por atividades tem sobre a aprendizagem de Inequação Trigonométrica? Também, buscou-se alcançar o objetivo de analisar os efeitos da sequência didática por atividades sobre a aprendizagem de Inequação Trigonométrica.

Para tanto estabeleceu-se como critérios de análise se os momentos do Ensino por atividades aconteceram de forma satisfatória, isto é: No momento de execução, os educandos conseguiram fazer as observações, comparações e cálculos? No momento de registro, os educandos conseguiram sistematizar as informações e registrar seu raciocínio? No momento de análise, os educandos descobriram uma relação válida entre as informações registradas? No momento de institucionalização, a turma conseguiu produzir uma conclusão final?

Aliado aos critérios da metodologia de ensino adotada, também se analisou os efeitos do produto educacional sob a ótica dos registros e representações semióticas, tendo em vista a possibilidade que o objeto matemático Inequação Trigonométrica tem em ser representado em diferentes registros (Geométrica, gráfica, algébrica, em intervalo e língua natural). Assim, como critério de análise também verificou-se em cada atividade quais tipos de representações foram adotadas pelos educandos, como foram tratadas e se houve conversão entre diferentes registros.

Para uma análise quantitativa do desempenho também comparou-se os resultados do pré-teste e pós-teste, com questões disponíveis no Apêndice B.

5. 1 ATIVIDADE 1

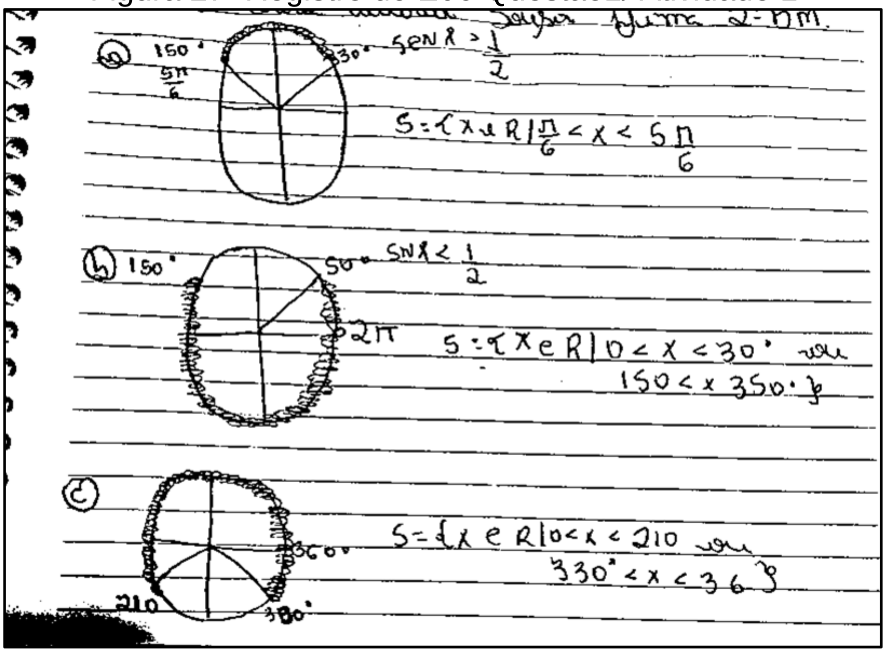
A atividade 1, foi experimentada no dia 10/06/2021, em 2 h/aula, via plataforma Meet, com o material impresso antecipadamente entregue aos estudantes para ser utilizado durante a aula on-line. A atividade 1 teve o objetivo de descobrir uma relação entre as soluções da inequação seno e apenas 18 estudantes dos 37 enviaram os arquivos de seus registros, dos quais selecionamos alguns que ficaram legíveis para análise.

Embora os estudantes fossem alunos do pesquisador, ficaram um tanto quanto inseguros ou tímidos em falar, sendo difícil estimular a interação. Ao estimulá-los a lembrar as relações no ciclo trigonométrico e o assunto equação trigonométrica, foram ficando mais à vontade e aos poucos interagindo, poucos alunos, cerca de cinco alunos respondiam aos chamamentos que eram feitos para que se tivesse um feedback de seu entendimento.

Assim, pelo fato de atividade ter sido elaborada para ser realizada de forma interativa e colaborativa, o meio virtual em que foi experimentada dificultou que os estudantes discutissem e trocassem ideia, o que não prejudicou os critérios da metodologia de ensino adotada, que também pode ser aplicada de forma individualizada entre os estudantes, com mediação do professor, o que ocorreu por parte do pesquisador.

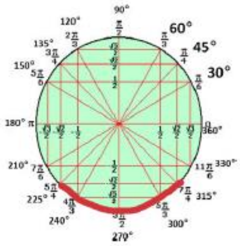
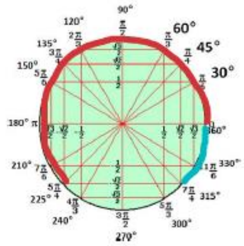
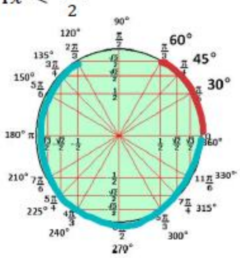
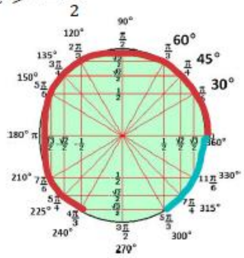
A questão 1, foi realizada de maneira satisfatória pelos estudantes, sendo que fizeram diretamente no arquivo da atividade ou no caderno. Apresenta-se a seguir três registros da mesma questão feita por diferentes estudantes:

Figura 27- Registro do E06 Questão1/ Atividade 1



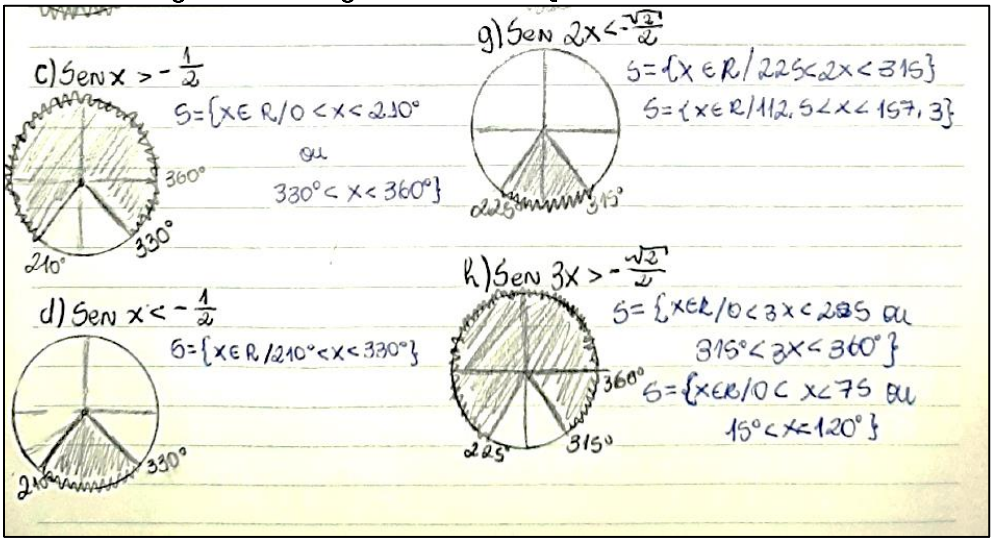
Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Figura 28- Registro do E07 Questão1/ Atividade 1

g) $Sen\ 2x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 	h) $Sen\ 3x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 
i) $Sen\ 4x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 	j) $Sen\ 5x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 

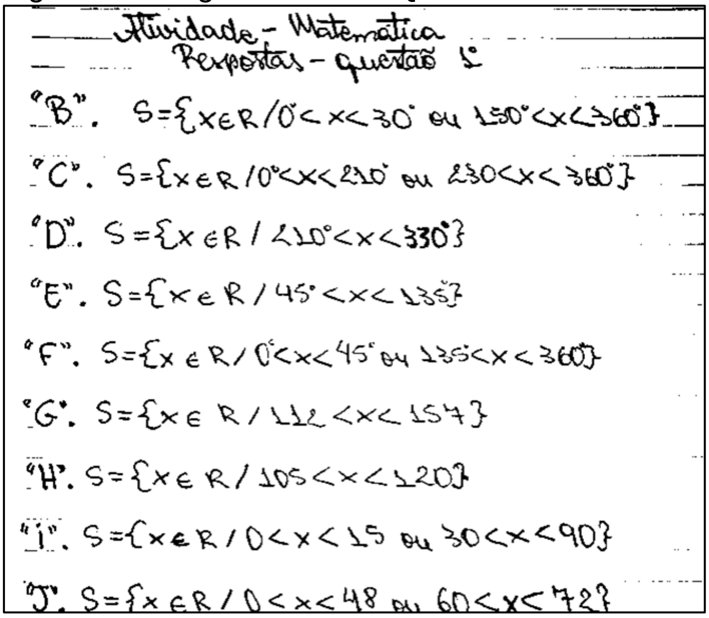
Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Figura 29- Registro do E09 Questão1/ Atividade 1



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Figura 30- Registro do E11 Questão1/ Atividade 1



Atividade - Matemática
Respostas - questão 1°

"B". S={x∈R/0°<x<30° ou 150°<x<360°}

"C". S={x∈R/0°<x<210° ou 230<x<360°}

"D". S={x∈R/210°<x<330°}

"E". S={x∈R/45°<x<135°}

"F". S={x∈R/0°<x<45° ou 135<x<360°}

"G". S={x∈R/112<x<157}

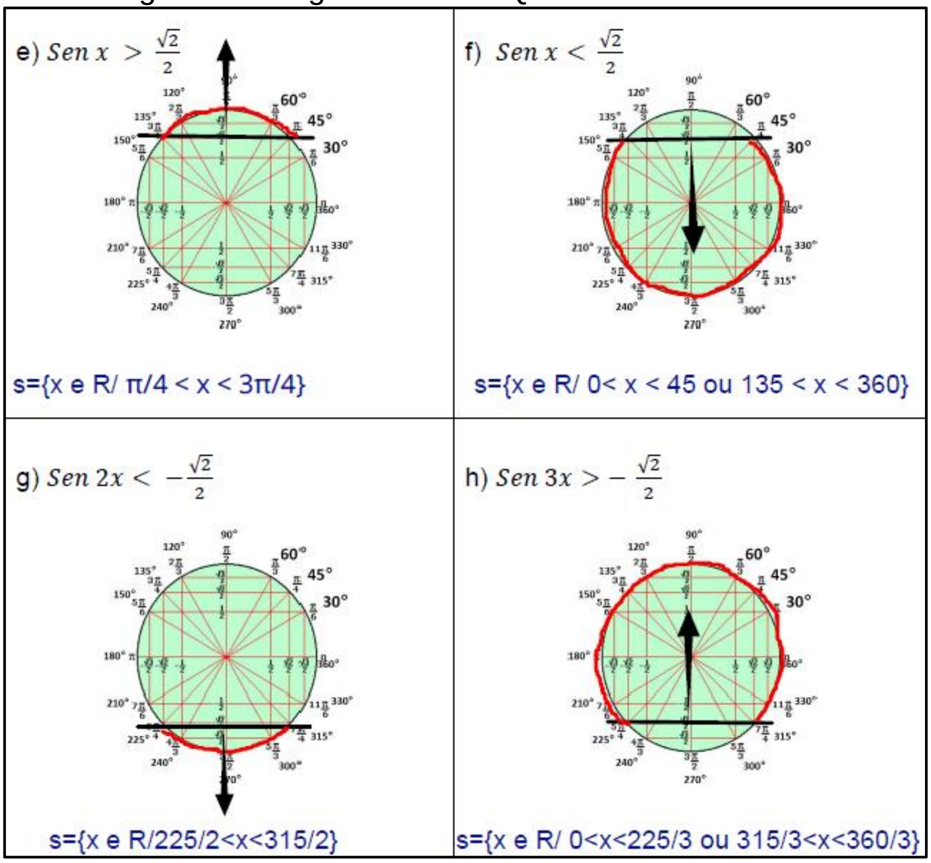
"H". S={x∈R/105<x<120}

"I". S={x∈R/0<x<15 ou 30<x<90}

"J". S={x∈R/0<x<48 ou 60<x<72}

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Figura 31- Registro do E15 Questão1/ Atividade 1



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

As figuras apresentadas ilustram os registros dos estudantes na resolução da questão 1, da atividade, realizados de maneira própria para cada estudante. Percebe-se que os estudantes E6 e E9 desenvolveram a representação gráfica, geométrica e algébrica e que o estudante E7, não apresentou a resolução algébrica, possivelmente por uma limitação tecnológica para escrever sobre o arquivo em PDF, embora tenha realizado a questão de maneira satisfatória.

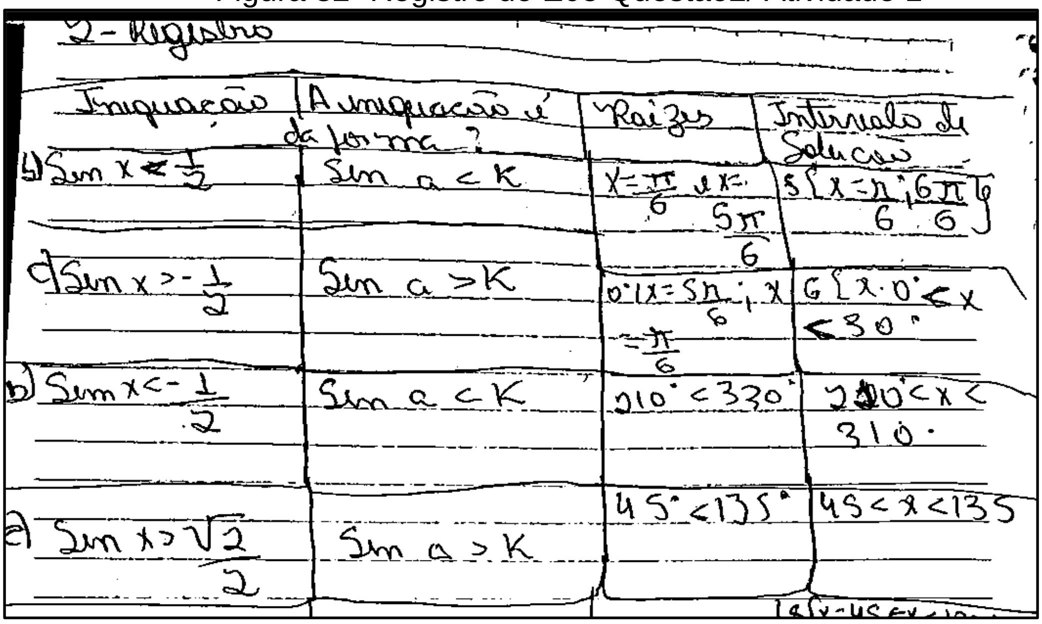
A estudante A11, por outro lado, apresentou apenas o registro algébrico da solução de cada item. De maneira geral, a questão 1 foi realizada de maneira satisfatória, haja vista que os estudantes definiram bem o eixo a que deveria se considerar com relação a inequação seno, estabelecendo a referência para o eixo das ordenadas (eixo de “y”), tanto que a estudante E15 ilustrou com uma seta a referência a esse eixo, conseguindo fazer também o registro algébrico da solução diretamente no arquivo da atividade.

Além disso também observa-se que os estudantes conseguiram desenvolver os itens em que a solução era a união de dois intervalos, o que foi devidamente mediado durante as interações entre o professor-pesquisador e os alunos durante a explicação dada durante a experimentação, quando estudantes demonstravam não entender ou entender de maneira equivocada.

Com isso, pode-se afirmar que na questão 1 os estudantes conseguiram realizar as observações e cálculos e que conseguiram formar, tratar e converter as soluções da inequação seno em linguagem gráfica, algébrica e geométrica.

Sobre a questão 2, em que os estudantes precisariam desenvolver também a representação em intervalos da solução da inequação seno, apresenta-se alguns dos registros coletados nas figuras a seguir:

Figura 32- Registro do E05 Questão2/ Atividade 1



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Figura 33- Registro do E09 Questão2/ Atividade 1

2º)

Inequação	A inequação é de forma:		Raízes	Intervalo da Solução
	$sen\,a > K$	$sen\,a < K$		
a) $sen\,x > \frac{1}{2}$	X		$x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$	$S =]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}[$
b) $sen\,x < \frac{1}{2}$		X	$x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$	$S = [x = \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}]$
c) $sen\,x > -\frac{1}{2}$	X		$0° / x = \frac{5\pi}{6}; x = \frac{\pi}{6}$	$S = [x = 0° < x < 30°]$
d) $sen\,x < -\frac{1}{2}$		X	$210° < 330°$	$S = [210° < x < 310°]$
e) $sen\,x > \frac{\sqrt{2}}{2}$	X		$45° < 135°$	$S[40° < x < 135°]$
f) $sen\,x < \frac{\sqrt{2}}{2}$		X	$\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$	$S[x = 45° < x < 135°]$
g) $sen\,2x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$		X	$\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$	$S = [0 < x < 15$ ou $70° < x < 90°$
h) $sen\,3x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	X		$\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}$	$S = [112,2 < 157,3]$
i) $sen\,4x > \frac{\sqrt{3}}{2}$		X	$\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}$	$S = [0° < x < 30° < x]$
j) $sen\,5x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$	X		$\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$	$S[0° < x < 60° < 72°]$

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Percebe-se das resoluções dos estudantes que não tiveram dificuldade em representar na forma de intervalo a solução da inequação seno, realizando a conversão das representações utilizadas na questão anterior sem dificuldades. Percebe-se pelos registros coletados que os educandos conseguiram sistematizar as informações e registrar seu raciocínio sobre a solução da inequação seno.

Nas questões 3 e 4, em que os estudantes precisariam expressar em língua natural o seu raciocínio, poucos estudantes conseguiram desenvolver a questão e os que resolveram não foi de maneira satisfatória como ilustram a os registros a seguir:

Figura 34- Registro do E04 Questão3/ Atividade 1

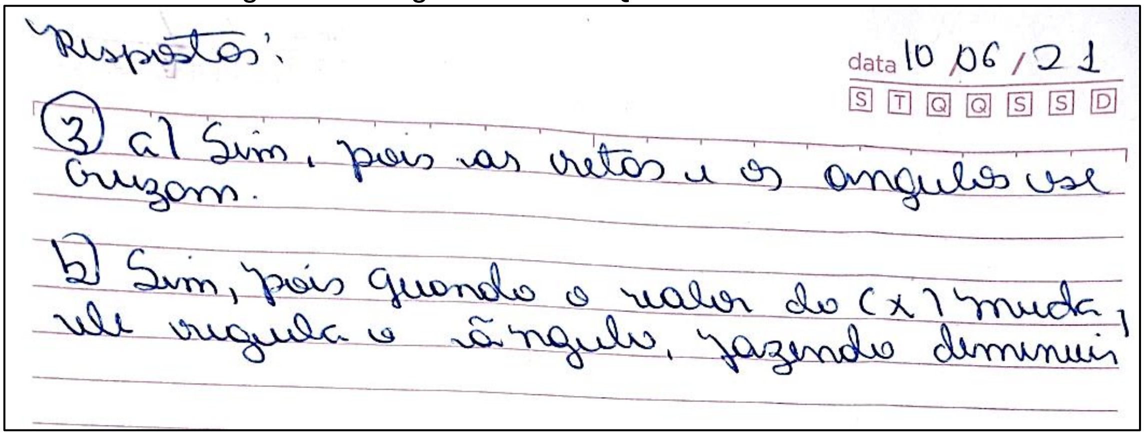
3º)
a) Não existe uma relação.

b) O valor de um número "Ex: As alternativas G, h, i, j tem uma diferença.

4º) A inequação do seno é um assunto que merece ser estudado.

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Figura 35- Registro do E06 Questão2/ Atividade 1


Respostas:
data 10/06/21
S T Q Q S S D
3) a) Sim, pois as retas e os angulos se cruzam.
b) Sim, pois quando o valor do (x) muda, ele regula o ângulo, fazendo diminuir

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Deveriam desenvolver a capacidade de análise e chegar a uma conclusão válida sendo que a resposta do item b da estudante E6 demonstrou certa proximidade com o que se esperava como conclusão, quando fala da regulagem do “ângulo x” mas sem fazer relação com o tipo de desigualdade.

Logo, pode-se afirmar que apesar de os estudantes não conseguirem expressar em língua materna seu raciocínio e entendimento sobre a solução da inequação seno, os demais registros mobilizados nas questões anteriores puderam levar a conclusão de que a atividade 1 alcançou o objetivo de aprendizagem desejado.

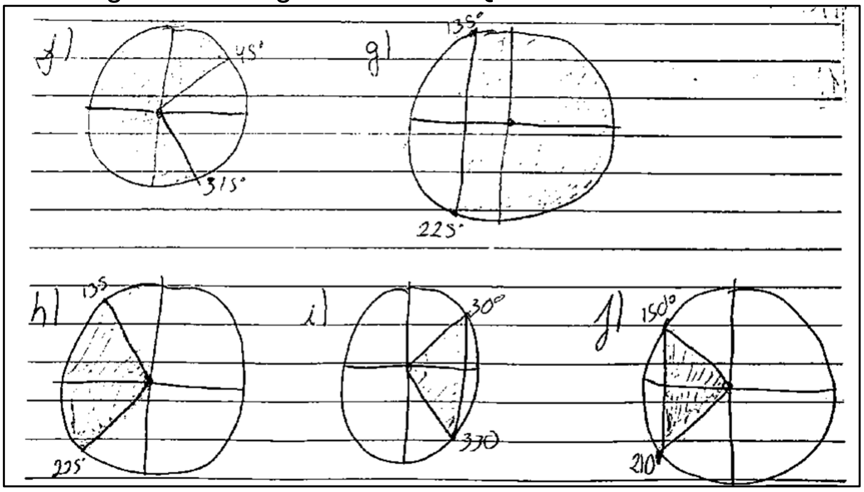
5. 2 ATIVIDADE 2

A atividade 2 foi realizada no dia 14/06/2021, em 2h/aula, tendo como objetivo descobrir uma relação entre as soluções de inequação do cosseno. Essa atividade tomou o mesmo tempo da atividade anterior, entretanto os estudantes conseguiam acessar de forma mais rápida os conhecimentos prévios sobre equação trigonométrica, sendo a dificuldade maior lembrar de fazer referência ao eixo das abscissas.

Apesar de a turma manter a quase o mesmo quantitativo de alunos presentes na aula on-line, o retorno do material dos registros foi bem menor que na atividade anterior, tendo apenas 9 estudantes devolvido a atividade com seus registros.

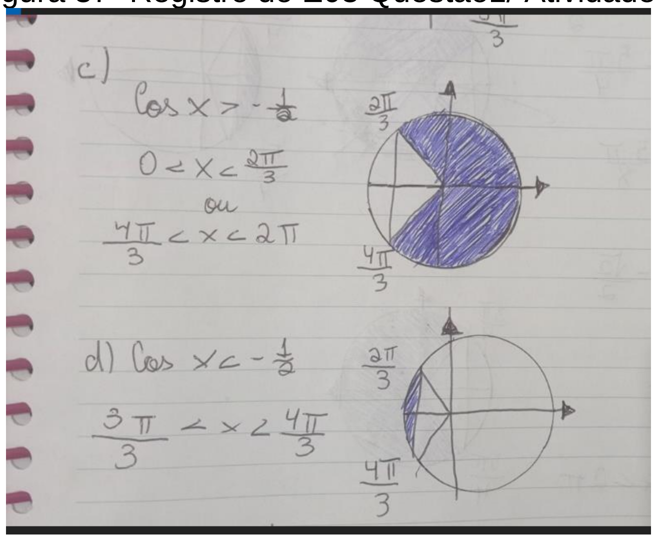
Embora os dados fossem mais escassos que na atividade anterior, foi possível uma coleta suficiente para verificação da aprendizagem da atividade 2 como ilustra-se a seguir:

Figura 36- Registro do E14 Questão1/ Atividade 2



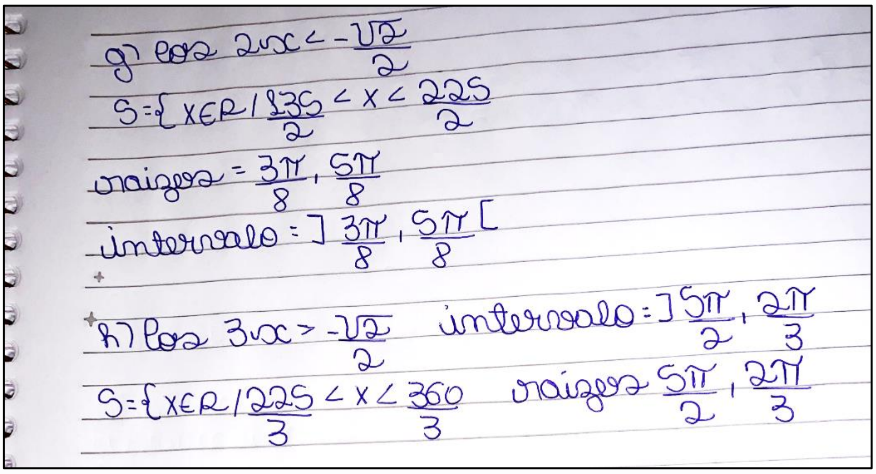
Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Figura 37- Registro do E03 Questão1/ Atividade 2



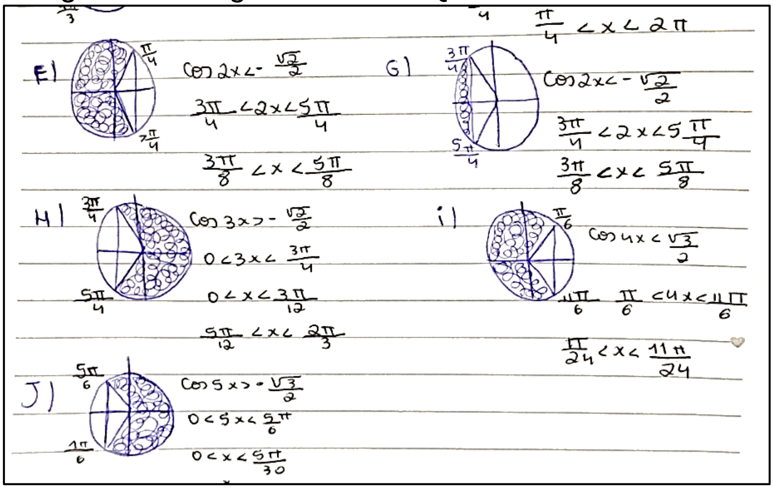
Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Figura 38- Registro do E04 Questão1/ Atividade 2



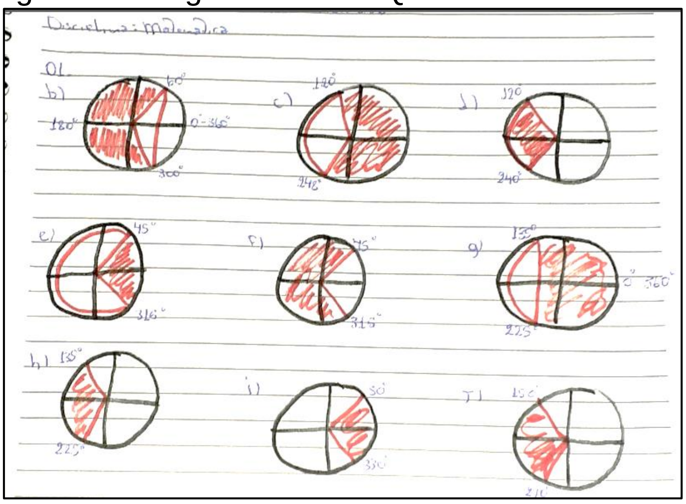
Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Figura 39- Registro do E19 Questão1/ Atividade 2



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Figura 40- Registro do E28 Questão1/ Atividade 2



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

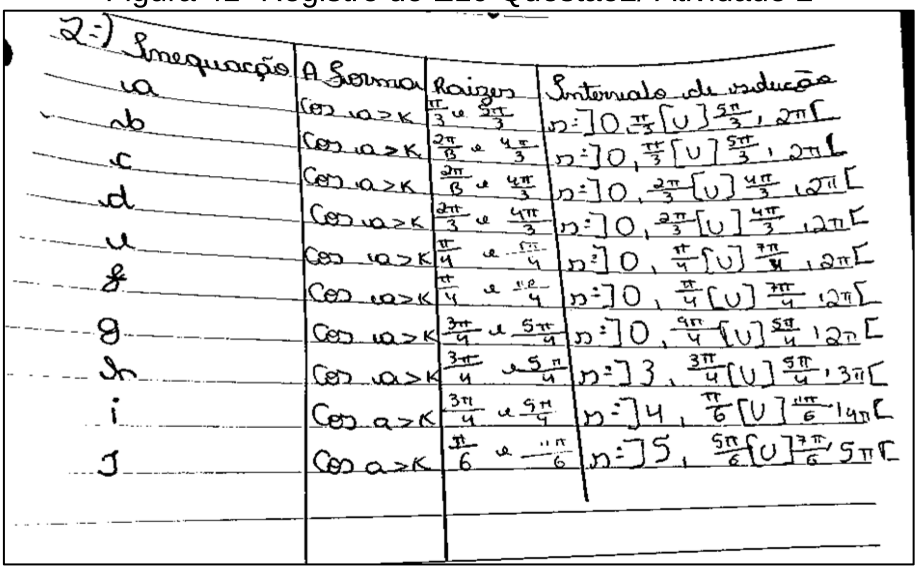
Os registros sobre a primeira questão da atividade 2 revelam que a sua execução individualizada permite ao professor uma análise mais personalizada da aprendizagem do educando, haja vista que a forma de registrar de cada um, embora mais ou menos elaborada, revela se de fato houve compreensão do assunto estudado e como isso ocorreu.

Percebe-se nos registros apresentados que os estudantes conseguiram estabelecer a referência com o eixo das abscissas e que perceberam quando a solução da inequação cosseno possui mais de um intervalo, como evidencia-se nos registros dos estudantes E03 e E19 em que formaram, trataram e converteram devidamente a solução da inequação cosseno em linguagem algébrica, gráfica e geométrica. Isso mostra que os sujeitos foram capazes, por meio da questão, de desenvolver observações e cálculos de forma satisfatória.

Embora o estudante E14 tenha desenvolvido apenas as representações gráfica e geométrica e o estudante E04 apenas as representações algébricas e em intervalo, isso não implica que não saibam desenvolver outros tipos de representação, mas que essas representações eleitas por eles facilitem sua compreensão sobre o objeto de estudo.

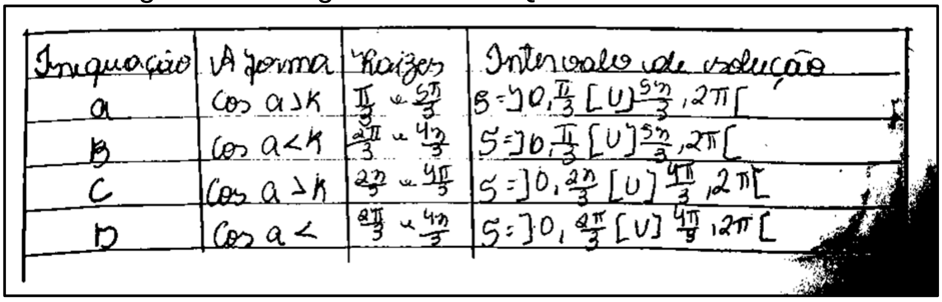
Na questão 2 em que desejava-se desenvolver a conversão das soluções estabelecidas na questão para a representação em intervalo, percebe-se alguns equívocos na aprendizagem como ilustra-se a seguir:

Figura 41- Registro do E19 Questão2/ Atividade 2



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Figura 42 - Registro do E24 Questão2/ Atividade 2



Inquação	A forma	Raizes	Intervalo de solução
a	Cos a > k	$\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$	$S =]0, \frac{\pi}{3}[\cup]\frac{5\pi}{3}, 2\pi[$
b	Cos a < k	$\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$	$S =]0, \frac{\pi}{3}[\cup]\frac{5\pi}{3}, 2\pi[$
c	Cos a > k	$\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$	$S =]0, \frac{2\pi}{3}[\cup]\frac{4\pi}{3}, 2\pi[$
d	Cos a <	$\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$	$S =]0, \frac{2\pi}{3}[\cup]\frac{4\pi}{3}, 2\pi[$

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Nos registros apresentados verifica-se a ocorrência de erros procedimentais na resolução da questão que implicam em lacunas na compreensão sobre o objeto inequação cosseno. Tanto o estudante E19 quanto E24 passaram a adotar equivocamente dois intervalos para todas as soluções.

Caso a atividade fosse realizada de forma presencial, talvez o professor tivesse a oportunidade de identificar o equívoco e intervir fazendo o educando compreender quando de fato a solução apresentaria mais de um intervalo. Essa não foi uma situação prevista na análise a priori, onde se esperava o contrário, que não verificassem a necessidade de dois intervalos em alguns itens da questão, escrevendo equivocamente em um só intervalo.

Assim, apenas com os dados coletados da experimentação da atividade, não foi possível inferir com segurança se algum estudante conseguiu desenvolver de forma satisfatória a atividade 2, haja vista que nenhum educando apresentou registro das questões 3 e 4 onde poderiam expressar sua compreensão em língua natural e revelar indícios de que os objetivos de aprendizagem foram alcançados.

5. 3 ATIVIDADE 3

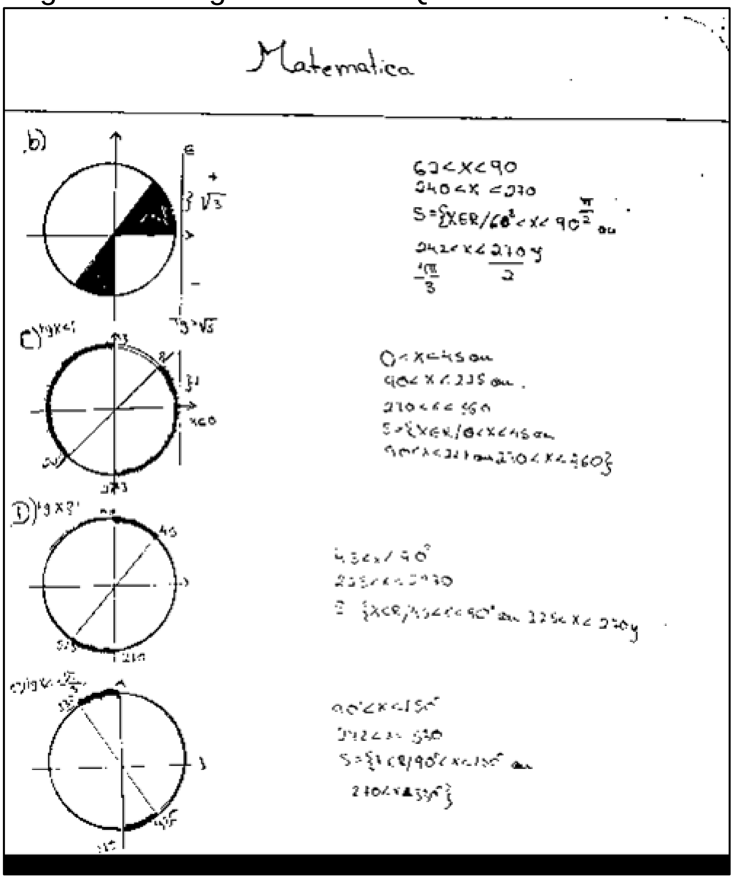
A atividade 3 foi experimentada no dia 15/06/2021, em 1h/aula e dela foram coletados os registros de apenas 3 estudantes. Percebeu-se neste momento a dificuldade de se realizar atividades que levem a reflexão e investigação em ambiente virtual. Percebeu-se de forma mais evidente nesta atividade um desconforto nos estudantes, que antes estavam apenas recebendo e enviando atividades por força das condições impostas pela pandemia.

Ter que mudar da dinâmica passiva para a ativa da aprendizagem começou a causar desinteresse, haja vista que não havia troca de ideias entre os estudantes, pois pouco interagiam entre si durante as aulas, apesar de estarem lá com suas câmeras e microfones desligados, o que desestimulava também o educador.

Deste modo, entende-se que o baixo retorno da atividade 3 deva-se a tensão cognitiva que os estímulos do ensino por atividade provoquem no educando, essa tensão poderia ser minimizada se a atividade fosse em grupo de forma colaborativa. Apesar disso os poucos dados coletados permitiram uma análise sobre sua capacidade de encontrar a solução da inequação tangente.

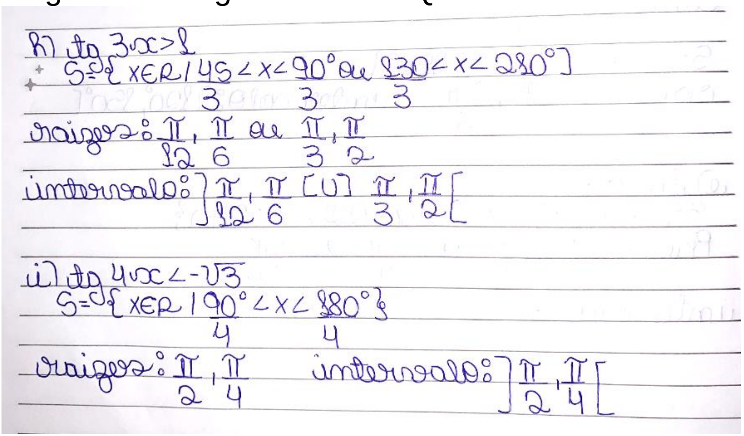
Na questão 1, os itens estão dispostos de forma a levar a percepção das mudanças que ocorrem quando se inverte a desigualdade ou o sinal de k, como vemos nas figuras a seguir:

Figura 43- Registro do E05 Questão1/ Atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Figura 44- Registro do E04 Questão1/ Atividade 3

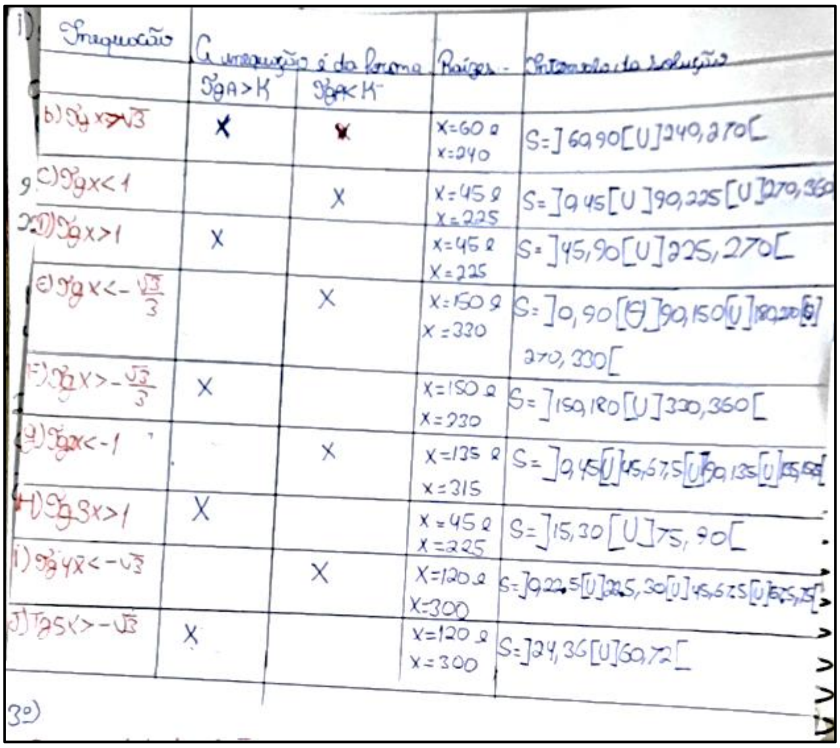


Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Nessas figuras tem-se a evidência de que os sujeitos foram capazes de reconhecer o comportamento da solução da inequação tangente, fazendo seu registro de representação geométrica e gráfica onde se percebe a referência a reta tangente ao ciclo trigonométrico feito de forma válida e satisfatória pela pelo estudante E05 e o registro de representação algébrica e por intervalo feito pela estudante E04, também de forma válida e satisfatória. Logo, conseguiram fazer as observações e cálculos esperados para este momento da atividade.

Na questão 2 as informações obtidas na questão 1 foram preenchidas no quadro com as soluções para melhor observação do comportamento das soluções, estabelecendo diferenças entre os diferentes tipos de inequação tangente e seu comportamento na representação da solução. A figura a seguir, ilustra o registro do estudante E05.

Figura 45- Registro do E05 Questão2/ Atividade 3



1)

Inequação	A inequação é da forma		Raízes	Intervalo da solução
	tg A > K	tg A < K		
b) tg x > √3	X	X	x=60 e x=240	S=]60,90[U]240,270[
c) tg x < 1		X	x=45 e x=225	S=]0,45[U]90,225[U]270,360[
d) tg x > 1	X		x=45 e x=225	S=]45,90[U]225,270[
e) tg x < - √3/3		X	x=150 e x=330	S=]0,90[U]90,150[U]180,270[U]270,330[
f) tg x > - √3/3	X		x=150 e x=330	S=]150,180[U]330,360[
g) tg x < -1		X	x=135 e x=315	S=]0,45[U]45,67,5[U]90,135[U]135,150[
h) tg 3x > 1	X		x=45 e x=225	S=]15,30[U]75,90[
i) tg 4x < -√3		X	x=120 e x=300	S=]0,22,5[U]22,5,30[U]45,67,5[U]67,5,75[
j) tg 5x > -√3	X		x=120 e x=300	S=]24,36[U]60,72[

3º)

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Além da representação em intervalo de forma satisfatória, percebe-se, por exemplo, que o estudante E05 optou por adotar os arcos em graus, o que não prejudica a resolução da questão. Na verdade, os estudantes foram incentivados a usar a notação em grau ou em radianos conforme tivessem maior facilidade, haja vista que o foco da atividade era o reconhecimento e a representação do intervalo da solução, o que foi feito.

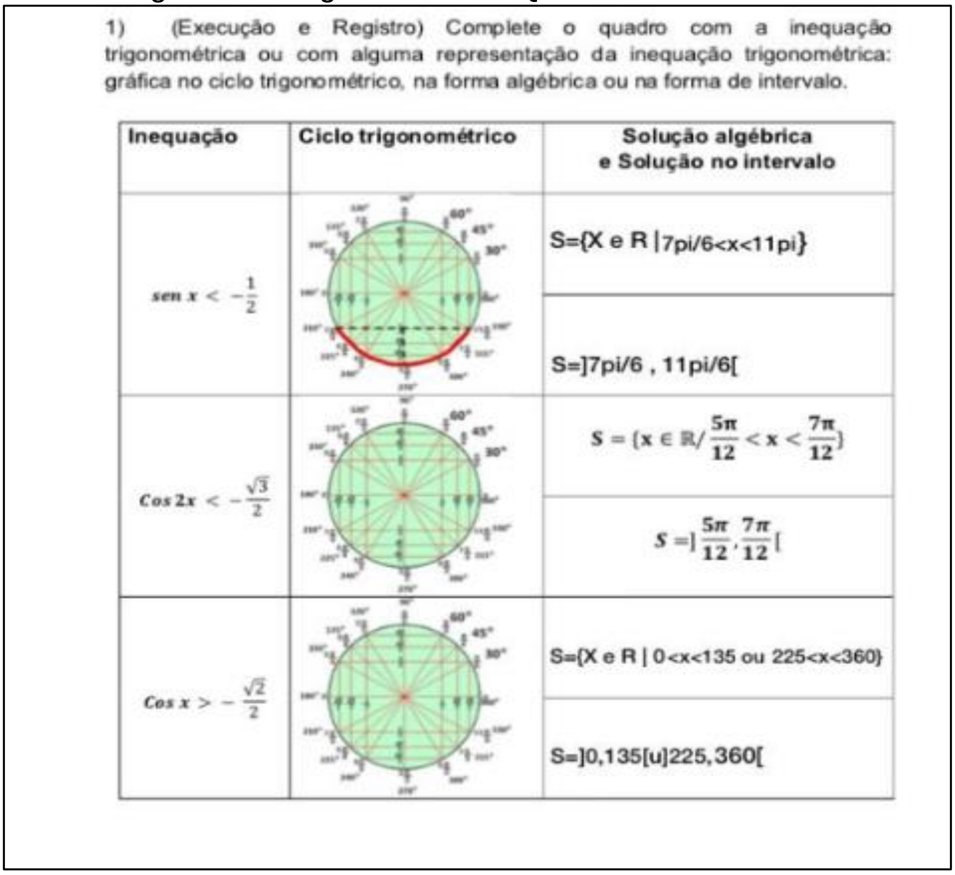
Nas questões 3 e 4 seria o momento de estimular a capacidade de análise e conclusão, percebendo o intervalo ou intervalos que satisfizeram a solução da inequação tangente. Não foram coletados registros dessas questões, entretanto, pelas questões 1 e 2 feitas pelos três estudantes que enviaram o material em PDF por e-mail foi possível verificar que eles perceberam o que acontece com a solução quando a desigualdade for (>k) ou (< k) e perceberam as situações em a solução poderia ter até três intervalos, representando naturalmente cada intervalo na ordem do sentido anti-horário, devido as instruções das atividades anteriores.

Logo, considera-se que o objetivo da atividade 4 foi parcialmente contemplado pela ótica do Ensino de Atividades, haja vista que os dados coletados apresentam indícios frágeis sobre a compreensão dos estudantes, mas sob a ótica dos registros de representações semióticas, pode-se afirmar que as atividades cognitivas realizadas pelos educandos os fizeram alcançar o objetivo de aprendizagem desejado para inequação tangente.

5. 4 ATIVIDADE 4

A Atividade 4 foi realizada também no dia 15/06/2021 logo após a atividade 3, em 1h/aula e dela foram coletados os registros de apenas uma estudante, identificada como E02, apresentado a seguir.

Figura 46- Registro do E02 Questão1/ Atividade 4



1) (Execução e Registro) Complete o quadro com a inequação trigonométrica ou com alguma representação da inequação trigonométrica: gráfica no ciclo trigonométrico, na forma algébrica ou na forma de intervalo.

Inequação	Ciclo trigonométrico	Solução algébrica e Solução no intervalo
$sen\ x < -\frac{1}{2}$		S={X e R |7pi/6<x<11pi}
		S=]7pi/6 , 11pi/6[
$Cos\ 2x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$		$S = \{x \in \mathbb{R} / \frac{5\pi}{12} < x < \frac{7\pi}{12}\}$
		$S =]\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}[$
$Cos\ x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$		S={X e R | 0<x<135 ou 225<x<360}
		S=]0,135[u]225,360[

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Nessa questão desejava-se que os estudantes convertessem em diferentes registros de representação de forma autônoma independentemente se as inequações trigonométricas fossem seno, cosseno ou tangente, uma vez que foram desenvolvidas nas atividades anteriores. Por mais que isso não tenha sido evidenciado por meio dos registros de representação e pela execução de todos os momentos do Ensino por Atividade do material escrito, houve boa interação dialógica no momento da experimentação que indicaram a apreensão de conhecimentos sobre Inequações Trigonométricas por boa parte dos estudantes.

Ao longo da execução de todas as atividades foram resolvidas questões de aprofundamento disponível no apêndice C, de forma dialogada os estudantes foram expressando suas conclusões, dúvidas e soluções, o que nos permitiu corrigir algum mal-entendido durante a experimentação da sequência didática.

5. 5 ANÁLISE DO TESTE E PÓS TESTE

A análise de resultado por meio de comparação entre pré-teste e pós-teste poderia ser um instrumento de validação do produto educacional experimentado, entretanto tendo em vista a quantidade de dados coletados essa comparação não seria suficiente para validar a sequência didática experimentada. Assim, a análise desta seção é para uma validação conjunta com as análises antes apresentadas segundo a teoria dos registros e representações semióticas e segundo o cumprimento ou não dos momentos da metodologia de ensino adotada, Ensino por Atividades.

Os estudantes foram submetidos a uma mesma atividade antes e depois da experimentação da sequência didática para o ensino de Inequação Trigonométrica. Esse teste está no apêndice B e foi intitulado como “Atividade diagnóstica de aprendizagem”. Esse teste continha questões relativas ao conteúdo de Inequação seno, cosseno e tangente e ao ser aplicado antes da experimentação tinha o objetivo de verificar se os estudantes conseguiriam apenas com seus conhecimentos prévios desenvolver de forma intuitiva ou autônoma as cinco questões propostas.

Ao ser aplicada após a experimentação, a mesma atividade diagnóstica de aprendizagem, possuía o objetivo de verificar os efeitos da sequência didática sobre a aprendizagem dos sujeitos, uma análise a posteriori. O pré-teste foi realizado em aula remota síncrona pela plataforma Meet no dia 07/10/2021 em 2h/aula e foi enviada em formato PDF logo após a sua aplicação. O pós-teste foi aplicado no dia 17/10/2021 em 2h/aula na mesma modalidade do pré-teste e logo enviado, não sendo aceitos os que foram enviados posteriormente para minimizar a possibilidade de os estudantes buscarem ajuda de terceiros e assim comprometer a confiabilidade da pesquisa.

O teste com cinco questões teve seu resultado apresentado no quadro a seguir em que cada questão correta foi pontuada com nota 2, totalizando 10 pontos, os códigos são para “não enviou atividade” (NEA), “não fez a questão” (NF).

Quadro 18- Quadro comparativo de desempenho Pré-teste e pós-teste.

Sujeito	Questão 01		Questão 02		Questão 03		Questão 04		Questão 05		Total	
	Pré-teste	Pós-Teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-Teste	Pós-Teste	Pré-Teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-Teste
E01	NEA	1	NEA	NF	NEA	2	NEA	NF	NEA	2	NEA	5
E02	0	NEA	0	NEA	0	NEA	0	NEA	0	NEA	0	NEA
E03	0,5	2	1	2	0,5	2	1	2	NF	NF	3	8
E04	NEA	1,5	NEA	1,5	NEA	2	NEA	2	NEA	2	NEA	9
E05	1	2	0,5	2	0,5	2	1	2	NF	2	3	10
E06	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA
E07	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA
E08	0,5	1	0	1	NF	NF	0,5	1	NF	NF	1	3
E09	1	2	0	2	0,5	2	1	2	0,5	2	3	10
E10	0,5	2	NF	2	0,5	2	0	2	0	NF	1	8
E11	NEA	2	NEA	1	NEA	2	NEA	2	NEA	0,5	NEA	7,5
E12	NEA	2	NEA	0	NEA	1	NEA	2	NEA	1	NEA	6
E13	NEA	1	NEA	2	NEA	2	NEA	0	NEA	1	NEA	6
E14	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA	NEA
E15	NEA	1	NEA	2	NEA	0	NEA	0	NEA	0	NEA	3
E16	1	2	0	2	0	2	0	2	NF	2	1	10
E17	NEA	2	NEA	2	NEA	2	NEA	1	NEA	2	NEA	9
E18	1	2	NF	2	0,5	2	NF	2	NF	2	1,5	10
E19	1	2	0,5	2	0	2	NF	2	NF	2	1,5	10
E20	NEA	2	NEA	1	NEA	1	NEA	1	NEA	1	NEA	6
E21	NF	2	NF	2	0,5	2	0,5	2	0,5	2	1,5	8
E22	1	2	NF	2	0,5	2	0,5	2	0,5	NF	1,5	8
E23	1	1	2	2	0	2	0	1	2	2	5	8
E24	NEA	1	NEA	1	NEA	1	NEA	2	NEA	1	NEA	6
E25	NEA	2	NEA	2	NEA	2	NEA	2	NEA	2	NEA	10
E26	0,5	1	0	2	0,5	2	0,5	2	0,5	1	2	8
E27	1	1	0,5	2	1	2	0	2	0	2	2	9
E28	NEA	1	NEA	0	NEA	2	NEA	2	NEA	1	NEA	6
E29	NEA	1	NEA	2	NEA	0	NEA	0	NEA	0	NEA	3
E30	NEA	NF	NEA	NF	NEA	NF	NEA	NF	NEA	NF	NEA	0
E31	1	2	0,5	1	0	2	0	1	0	2	1,5	8
E32	NEA	2	NEA	2	NEA	2	NEA	2	NEA	2	NEA	10
E33	NEA	1	NEA	2	NEA	1,5	NEA	2	NEA	1	NEA	7,5
E34	0	2	0	1	0	2	0	2	0	2	0	9
E35	0	2	0	2	0	2	0	2	0	NF	0	8

E36	**1**	**2**	**0**	**1**	**0,5**	**2**	**0,5**	**1**	**0,5**	**2**	**2,5**	**8**
E37	NEA	2	NEA	2	NEA	2	NEA	0	NEA	2	NEA	8

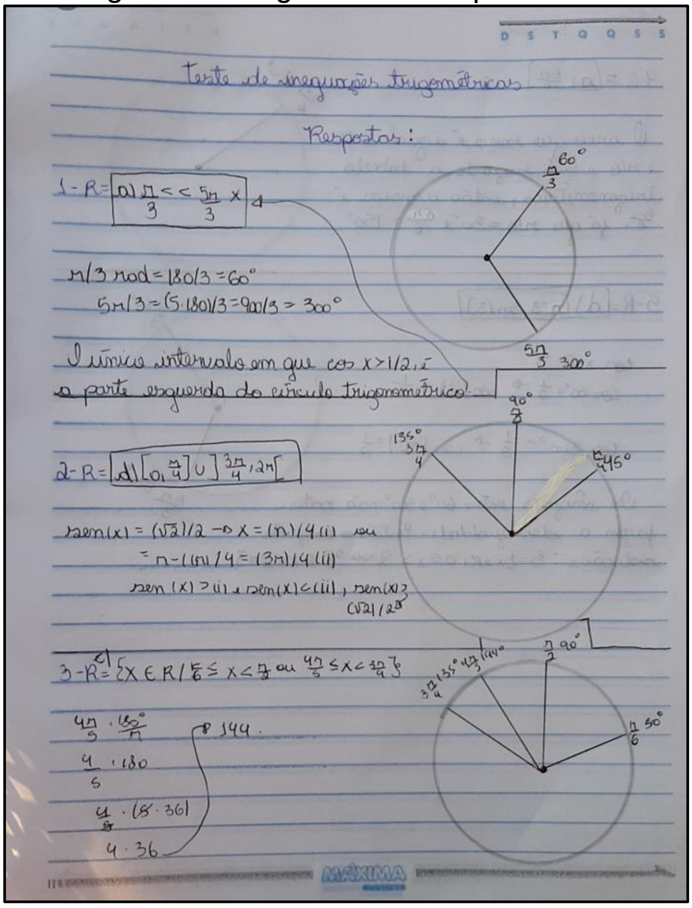
Fonte: Dados da pesquisa (2021)

No quadro comparativo de pré-teste e pós-teste verifica-se que apenas 17 sujeitos participaram de ambos os testes, os que estão com pontuação em negrito no quadro. Todos os sujeitos apresentaram significava melhora no desempenho quantitativo e aqueles que apresentaram baixo desempenho no pós-teste, no pré-teste sequer fizeram algumas questões a exemplo dos sujeitos E03, E10, E18, E21, que fizeram as questões ainda que não fosse de forma satisfatória.

Apesar das questões serem objetivas, só alcançavam a nota máxima da questão aqueles que fizessem a representação no ciclo trigonométrico de forma satisfatória. Alguns sujeitos apresentaram desempenho excelente, entre 9 e 10, após a experimentação como foi o caso dos estudantes E04, E05, E09, E16, E17, E18, E19, E25, E32 e E34. Na faixa de 5 a 8 pontos 17 estudantes estiveram contemplados. Esses são resultados animadores, tendo em vista que a qualidade do processo de ensino não teve condições desejáveis, com interação e feedback, que significa que o material construído desempenhou seu papel como recurso na mediação da aprendizagem pelo professor.

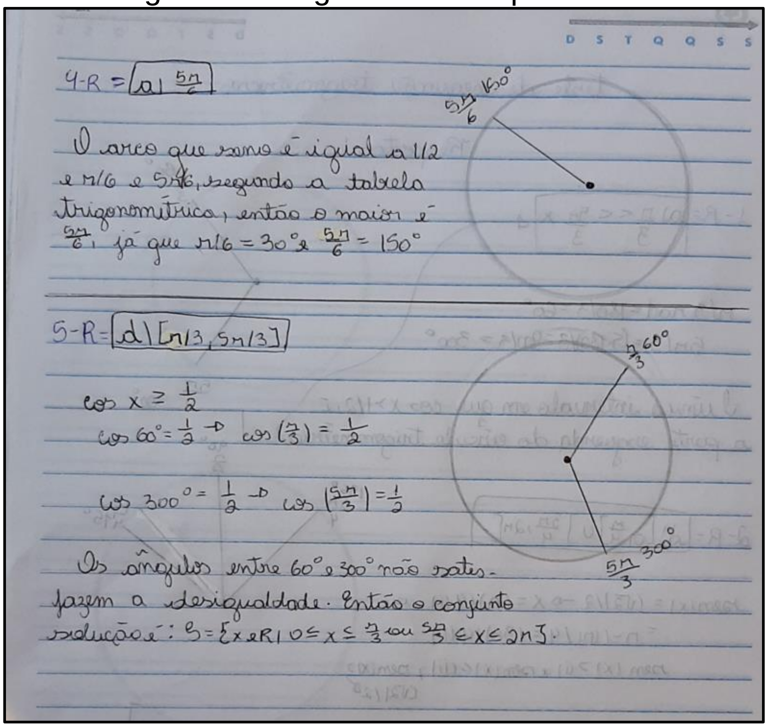
Foi possível extrair alguns registros escritos que os estudantes enviaram junto com as respostas objetivas, como apresenta-se a seguir:

Figura 47- Registro E23 do pós-teste.



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Figura 48- Registro E23 do pós-teste.



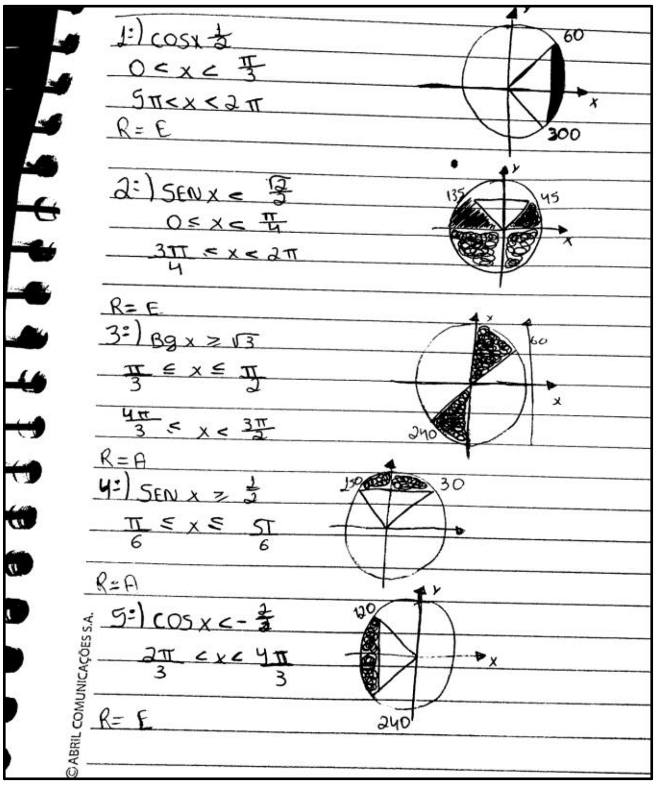
Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Foi surpreendente a forma como a estudante E23 resolveu as questões do teste após a experimentação, externalizando seu raciocínio por meio de língua natural. Embora algumas de suas repostas sejam válidas, cometeu equívocos como na questão 1 em que não separou os dois intervalos da solução, mas percebeu que essa solução estaria na “parte esquerda”, o que revela que abstraiu o significado da inequação trigonométrica.

A maneira como E23 apresentou suas respostas inspirou para que numa próxima aplicação, seja acrescido ao teste questões subjetivas que possam explorar melhor a língua natural.

Muitos estudantes que apresentaram baixo rendimento no pré-teste passaram para um desempenho excelente, como foi o caso do sujeito E19 que acertou todas as questões e ainda formou, tratou e converteu os registros de representação de forma gráfica, geométrica e algébrica, o que também foi realizado por todos os estudantes que alcançaram nota excelente entre 9 e 10, haja vista que não foi considerado na correção apenas a marcação, mas também a representação realizada pelo educando. A figura a seguir ilustra um exemplo disso:

Figura 49 - Registro E19 do pós-teste.



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Fica evidente na resolução apresentada na figura acima que o sujeito compreendeu o assunto de forma eficaz, sendo capaz de demonstrar por meio do ciclo trigonométrico a configuração geométrica da solução na parte hachurada e o significado gráfico disso que depois converteu em representação algébrica.

5. 6 VALIDAÇÃO

Nesta seção realiza-se uma síntese de resultados que possam validar a sequência didática para o ensino de Inequação Trigonométrica apresentada e experimentada. Retomando-se a questão desta pesquisa *“Quais efeitos uma sequência didática por atividades tem sobre a aprendizagem de Inequação Trigonométrica?”* e seu objetivo geral *“analisar os efeitos de uma sequência didática por atividades sobre a aprendizagem de Inequação Trigonométrica”.* Apresenta-se, inicialmente algumas considerações a serem pontuadas:

- Mudança do planejamento de experimentação em decorrência das condições pandêmicas;
- Dificuldades do professor-pesquisador com o uso de tecnologia no ambiente virtual;
- Dificuldades dos estudantes em enviar suas atividades por limitações da internet e equipamento, bem como a falta habilidade tecnológica, que ocasionou inclusive baixa nitidez em alguns registros que ficaram ilegíveis;
- Dificuldades do professor-pesquisador em administrar pessoalmente o ensino, coleta de dados, controle de frequência durante a experimentação;
- Pouca interação e feedback por parte dos estudantes;
- Apesar de satisfatório, o tratamento de dados aliado a análise por meio dos aportes adotados mobilizou de forma grandiosa uma expertise, que só foi possível por conta do aprendizado adquirido durante as disciplinas do curso de mestrado profissional em ensino de Matemática, juntamente com orientações e co-orientações, bem como as recomendações da banca examinadora no momento do exame de qualificação;
- O fato de os estudantes sujeitos da pesquisa serem educandos do professor-pesquisador colaborou para a relação pedagógica e reconhecimento das habilidades e conhecimentos prévios individuais.

Ao investigar as potencialidades e limitações do produto construído, sob os critérios dos aportes adotados na pesquisa estabelecidos no início do capítulo 5 sintetiza-se no quadro 19 os que dizem respeito a metodologia de ensino adotada, Ensino por atividades, considerando apenas os escritos coletados.

Quadro 19 – Análise sob os critérios do Ensino por atividades.

Critério do momento da atividade.	**Atividade 1**	**Atividade 2**	**Atividade 3**	**Atividade 4**
No momento de execução, os educandos conseguiram fazer as observações, comparações e cálculos?	SIM De forma satisfatória autônoma e autêntica.	SIM De forma satisfatória autônoma e autêntica, mas com casos em que verificou-se	SIM De forma autônoma e autêntica	SIM De forma autônoma e autêntica

		representação de soluções em dois intervalos quando deveria ser um, o previsto foi o contrário		
No momento de registro, os educandos conseguiram sistematizar as informações e registrar seu raciocínio?	SIM De forma satisfatória autônoma e autêntica	SIM De forma satisfatória autônoma e autêntica	SIM De forma satisfatória autônoma e autêntica	SIM De forma satisfatória autônoma e autêntica
No momento de análise, os educandos descobriram uma relação válida entre as informações registradas?	SIM De forma inválida	NÃO HOUVE DADOS	NÃO HOUVE DADOS	NÃO HOUVE DADOS
No momento de institucionalização, a turma conseguiu produzir uma conclusão final?	SIM De forma inválida	NÃO HOUVE DADOS	NÃO HOUVE DADOS	NÃO HOUVE DADOS

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

No quadro síntese sobre os critérios da metodologia de ensino, não se pode afirmar que não foram totalmente contemplados, haja vista que isso pode ter acontecido meramente pelo não envio da atividade. Entretanto, o professor-pesquisador pode afirmar que durante as interações da aula os estudantes, ainda que poucos, conseguiram apresentar uma conclusão de forma oral.

A respeito da autenticidade levantada para os momentos de execução e registro, se deu em decorrência das atividades terem sido realizadas de forma individualizada, o que permitiu que cada educando fizesse seus registros de forma autônoma e própria, revelando o seu nível de apreensão sobre o objeto matemático Inequação Trigonométrica.

Agora com relação aos critérios da análise por meio da teoria dos registros de representação semiótica, o quadro 20 sintetiza as atividades cognitivas realizadas durante cada atividade.

Quadro 20 – Análises segundo a Teoria dos Registros de Representação.

Representação	Formação	Tratamento	Conversão
Geométrica	Todas as atividades	Todas as atividades	Todas as atividades
Gráfica	Todas as atividades	Todas as atividades	Todas as atividades
Algébrica	Todas as atividades	Todas as atividades	Todas as atividades
Intervalo	Todas as atividades	Todas as atividades	Todas as atividades
Língua natural	Apenas de forma oral	Apenas de forma oral	Apenas de forma oral

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Do quadro síntese das representações e atividades cognitivas desenvolvidas pelos educandos por meio das atividades, conclui-se que os registros coletados indicam que houve aprendizagem satisfatória do objeto matemático Inequação Trigonométrica para os educandos sujeitos da pesquisa. Destaca-se nesse ponto que uma das atividades mais complexas indicadas por Duval (2003) é a conversão, o que é verificado em pesquisas da revisão de estudos, tais como Pereira (2016), entretanto, ao longo de todas as atividades observou-se a ocorrência da conversão entre as representações algébrica, gráfica e geométrica.

Sobre a comparação do pré-teste e pós-teste, os dados quantitativos revelaram outra potencialidade da sequência didática para o ensino de Inequação Trigonométrica, uma vez que todos os educandos que fizeram o pré-teste apresentaram melhora no pós-teste. Além disso, apenas 1% dos sujeitos que realizaram pós-teste obtiveram nota menor que 5, fato que reforça os efeitos positivos sobre a aprendizagem dos educandos.

Deste modo, considerando os resultados apresentados sob a ótica dos aportes teóricos adotados conclui-se que a sequência didática para o ensino de Inequação Trigonométrica por atividades está validada, podendo ser adotada em aulas de matemática no Ensino Médio como produto educacional.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ensinar Matemática é desafiador, mas a busca pela qualificação profissional sem dúvida ajuda a diligencias as dificuldades da prática docente e da aprendizagem do educando. Quando iniciada não era possível imaginar quão complexa é a pesquisa e o quanto ela ensina. Desenvolver um produto para o ensino de Inequação Trigonométrica poderia ser algo quase impossível devido a carência de material didático e pesquisas sobre o ensino desse objeto matemático, mas o desejo de colaborar com o ensino de Matemática foi maior que os obstáculos, ora superados.

Com o tema ensino de Inequação Trigonométrica foi definido como método de pesquisa a Engenharia Didática, que norteou todas as fases da pesquisa desde as análises prévias a até a validação do produto construído. Esse método de pesquisa possibilitou a construção de uma sequência fundamentada em pesquisas assessórias de revisão de estudo, análise de livros didáticos, pesquisa com estudantes e estudo do objeto matemático.

Na revisão de estudos foi encontrada apenas uma pesquisa diretamente relacionada ao ensino de Inequação Trigonométrica e as demais foram sobre a trigonometria de maneira geral, que deu para entender as necessidades de ensino e aprendizagem do objeto em questão. Na análise de livros didáticos constatou-se uma diminuição de volume de conteúdo e de exercícios voltados para o conteúdo do Ensino Médio Inequação Trigonométrica.

Na pesquisa com estudantes foram apresentadas algumas informações sobre currículo e avaliação em Matemática no Ensino Médio. Também foram apresentados os resultados de uma pesquisa de campo realizada com 100 estudantes da rede estadual de ensino do Imperatriz-MA em que o desempenho dos estudantes foi muito baixo e deu um panorama da realidade educacional dos estudantes em relação a matemática.

Ainda para fundamentar o produto construído também realizou-se uma pesquisa sobre o objeto matemático, desde a sua concepção ao longo da história ao que se estudada na atualidade a respeito de definições e propriedades com o rigor que a Matemática como ciência exige.

Passando para a concepção do produto educacional para o ensino de Inequação Trigonométrica foram elaboradas quatro atividades sequenciadas conforme a metodologia de Ensino por Atividades estruturada com diferentes momentos nos quais se desenvolve habilidades de execução, registro, análise e conclusão do que foi apreendido. Essas atividades exploravam o objeto matemático por meio do ciclo trigonométrico também foram elaboradas para desenvolver a formação, tratamento e conversão da representação gráfica, geométrica, algébrica, em intervalo e língua natural, conforme critérios da teoria de Registros de Representação Semiótica.

A experimentação se deu em três aulas de 2h/aula cada, sendo que participaram 37 estudantes da rede pública estadual de Imperatriz-MA, de forma remota síncrona via plataforma Meet e os estudantes enviavam os registros escritos e resoluções por e-mail logo após o termino da aula. Da mesma forma foi aplicado um teste antes da experimentação e depois da experimentação para diagnosticar a aprendizagem.

Na análise a posteriori e validação da sequência didática estabeleceu-se como critério de análise a ocorrência dos momentos do Ensino por atividades e a realização das atividades cognitivas de diferentes registros de representação semiótica pelos sujeitos da pesquisa. Aliado a isso, também realizou-se uma comparação de desempenho quantitativo dos estudantes entre pré-teste e pós-teste. Os resultados mostraram por meio dos critérios adotados que a Sequência didática por atividades para o ensino de Inequação trigonométrica teve efeitos positivos sobre a aprendizagem dos educandos, que demonstraram ter apreendido o assunto estudado por meio dos registros escritos, testes e oralidade durante a experimentação, o que levou a conclusão de que o produto foi validado.

Além das dificuldades naturais da pesquisa, a situação pandêmica da COVID-19 desmotivou em determinados momentos, mas também ensinou que não se pode desistir da educação, que é necessário continuar acreditando no potencial de professores e estudantes para desenvolvimento do saber matemático. Inovar, readaptar, persistir e acreditar foram os verbos que tornaram essa pesquisa possível e sua conclusão uma realidade.

Sugere-se para uma próxima aplicação do produto ora validado a realização presencial com formação de grupos, intensa interação e elaboração de questões subjetivas. Não é uma tarefa fácil se colocar na condição de professor e pesquisador, melhor seria ter a ajuda de um professor colaborador nesse tipo de pesquisa.

As dificuldades da experimentação foram minimizadas pelo fato de os sujeitos da pesquisa serem educandos do professor-pesquisador, que permitiu que ele tivesse um controle dos conhecimentos prévios que poderiam ser mobilizados por eles, o que foi um fator de crucial na devida utilização do produto apresentado.

A formação continuada vivenciada no Mestrado Profissional em ensino de Matemática mudou a prática educativa deste professor-pesquisador para melhor. Deseja-se que esta pesquisa possa colaborar com o ensino de matemática e inspirar outras pesquisas de mesmo caráter.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. Ag. **Fundamentos da didática Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos. **REVEMAT** - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V3.6, p.62-77, UFSC: 2008.

ARTIGUE, Michelle. **Engenharia didáctica**. In: BRUN, Jean (Org.). Didáctica das matemáticas. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

ALVARENGA, Karly; BARBOSA, Celso Viana; FERREIRA, Gislaine Maria Ferreira. O conceito de função: o desenvolvimento baseado em alguns modelos desde o ano de 2000 a. C até o século XX. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.9, n. 1, p. 159-178, 2014.

ANTAR NETO, Aref. **Noções de Matemática**. Volume 3, 1ª – Edição. Editora Vestseller,2010.

BARBOSA, Américo Augusto. **Trajetórias hipotéticas de aprendizagem relacionadas ás razões e as funções trigonométricas, visando uma perspectiva construtivista .** (Dissertação de mestrado). PUC-SP. 2009.

BLOOM, Benjamim S.; KRATHWOHL, David R., MASIA, Bertram B. **Taxonomia dos objetivos educacionais**. vol.1 (domínio cognitivo). Porto Alegre: Globo, 1973.

BOYER, C. B. ; MERZBACH, U. C. **History of mathematics.** 2. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1991.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de Helena Castro, Ed. Blücher Ltda, São Paulo, 2012.

BRASIL. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep).** Relatório SAEB (ANEB e ANRESC) 2005- 2015: panorama da década. – Brasília: Inep, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular.** Brasília, DF, 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática**-** ensino médio**-**Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEM, 1998.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaios temáticos**: história e matemática em sala de aula. Belém: SBEM/SBEM-PA, 2017.

COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da. **Funções seno e cosseno**: Uma sequência de ensino a partir dos Contextos do “mundo experimental” e do computador. 197 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). – PUC/SP. São Paulo, 1997.

DALLEMOLE, Joseide Justin. **Registros de Representação Semiótica**: Uma experiência com ambiente virtual SIENA. Canoas: ULBRA, 2010. Dissertação(Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2010

DANTE, L. R. **Volume único**,- 1ª ed. São Paulo: Ártica, 2010.

DANTE, Luis Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Editora Ática, 2015.

DIONÍZIO, Fátima Queiroz; BRANDT, Célia Finck. Análise das dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio em trigonometria. X Congresso Nacional de Educação. **EDUCERE**. PUC/PR. Curitiba, 2011.

DUVAL, R . Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S.D.A. (Org.) **Aprendizagem em matemática**: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, p. 11-33. 2003.

DUVAL, R. **Les problemas fundamentales en el aprendizaje matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo**. Tradução de Myrian V. Restrepo. Cali: Universidade del Valle: 2004.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas / organização. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2011.

FEIJÓ, Rachel Saffir Aráujo Alves. **Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria:** Um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal. 108 f. Dissertação (Mestrado Matemática em Rede Nacional). - Universidade de Brasília. Brasília, 2018.

FERRAZ, A. P. C. M.; BELHOT, R. V. **Taxonomia de Bloom**: revisão teórica e apresentação das adequações do instrumento para definição de objetivos instrucionais. Gestão & Produção, São Carlos, v. 17, n. 2, p. 421-431, 2010.

FOSSA, John Andrew. Prefácio. In: SÁ, Pedro Franco de. **Atividades para o Ensino de Matemática no Nível Fundamental**. Belém: EDUEPA, 2009.

GODOY, Elenilton Vieira; SANTOS, Vinício de Macedo. O Cenário do Ensino de Matemática e o Debate sobre o Currículo de Matemática. **Práxis Educacional**, v. 8, n. 13, p.253-280.Vitória da Conquista-BA, 2012.

MACHADO, Antonio dos Santos. **Matemática**: Trigonometria e progressões. São Paulo: Atual, 1986.

MELO, Guiomar Namo de. **Currículo da Educação Básica no Brasil: concepções e políticas.** Setembro de 2014. Disponível em www.ceesp.sp.gov.br/comunicado.php?id=321. Acesso em 13 de julho de 2018.

MINEIRO, R. M. **Construção de um Percurso de Estudo e Pesquisa para o Estudo de Inequações**. 2019. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.

MURAKAMI,Carlos e IEZZI, Gelson **FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR,** Volume 3, 9ª Edição 2013 - Editora Atual.

OLIVEIRA ,Marcelo Rufino de.**Elementos da matemática-**Trigonometria e Geometria Espacial-1 ed- Belém. Gráfica GTR.2017.

OLIVEIRA, Carlos André Carneiro de et al. **Trigonometria**: o radiano e as funções seno, cosseno e tangente. 2014.

OLIVEIRA, Tais de. **Trigonometria: A mudança da prática docente mediante novos conhecimentos**. (Disseratação de Mestrado). Universidade Federal de São Carlos. 2010.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**. São Paulo: Editora Moderna, 1995. Pará. Belém, 2017.

PATRIOTA, Maria do Rosário Alves; DUARTE, Vania de Moura Barbosa. A importância das inequações trigonométricas: reflexões com relação ao ensino e aprendizagem. **Revista Diálogos**, v. 14, p. 291, 2015.

PEDROSA, Leonor Wierzynski. **Uma proposta de ensino da trigonometria com uso do software** GeoGebra. 2012.

PEREIRA, Cícero da Silva. **Aprendizagem em trigonometria no ensino médio: Contribuição da Aprendizagem Significativ**a. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemáticas). Universidade Estadual da Paraíba. Grande. 2011

PEREIRA, Edcarlos; GUERRA, Ediel Azevedo. A utilização de applets no geogebra para a aprendizagem da trigonometria no ensino médio. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 7, n. 3, p. 53-72, 2016.

PINHEIRO, Evandro. **O ensino de trigonometria na educação básica a partir da visualização e interpretação geométrica do ciclo trigonométrico**. (Dissertação de mestrado). Universidade Federal de Belo Horizonte. 2008.

RODRIGUES, Julyana Cosme et al. **Elaboração e aplicação de uma sequência didática sobre a química dos cosméticos**. Revista eletrônica. Experiências em Ensino de Ciências V.13, No.1. 2018.

ROONEY, Anne. **A História da Matemática**. M. Books do Brasil Editora Ltda. São Paulo, 2012.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de história da matemática**. Rio de janeiro: SBM, 2012.

RUFINO, Marcelo de Oliveira. **Coleção elementos da matemática**: trigonometria espacial. São Paulo: Editora Ximango, 2018.

SÁ, Pedro Franco de. **Atividades para o ensino de Matemática no Nível Fundamental** – Belém: EDUEPA, 2009.

SÁ, Pedro Franco de. **Possibilidades do ensino de matemática por atividades**. Organizador Demetrius Gonçalves de Araújo. SBEM-PA. Belém, 2019.

SALDAN, CLAUDIO. Equações e inequações trigonométricas: uma abordagem com o aplicativo de matemática dinâmica GeoGebra. 2014.

SANTOS, Robério Valente. **O ensino de problemas envolvendo as quatro operações fundamentais com números naturais.** 393f. Dissertação (Mestrado Profissional em ensino de Matemática). Universidade do Estado do Pará. Belém, 2017.

SILVA, Wellington. **O ensino de trigonometria: perspectivas do ensino fundamental ao médio**. (Dissertação de mestrado). Rede Nacional. 2013.

SOUZA, Irlan Cordeiro de; SILVA, Marinaldo Felipe da. **Aplicações teóricas e práticas da trigonometria para um ensino significativo e interdisciplinar**. 2015.

APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

SEQUENCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Identificação da Escola: ____

Identificação do estudante: _____________________________________

Data: ____/_____/_____.

Atividade 1- Inequação do seno

Objetivo: Descobrir uma relação entre as soluções de inequação do seno

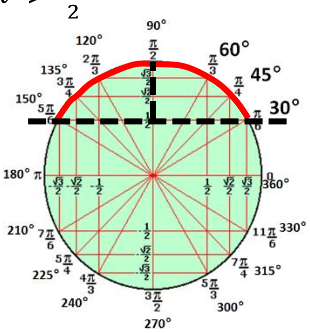
Material: Ciclo Trigonométrico e folha de atividade.

Procedimento: Os estudantes formarão duplas ou trios e deverão resolver as questões a seguir com o apoio visual do ciclo trigonométrico.

1. (Execução) Com o auxílio do ciclo trigonométrico, determine a solução algébrica de cada inequação $sen\ a > k$ ou $sen\ a < k$ dada, no intervalo de [0, 2π].

<table>
<tr>
<td>

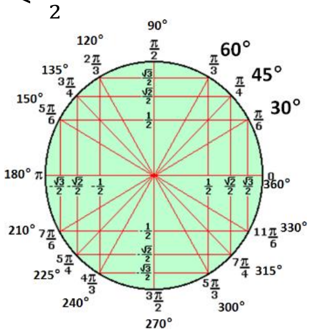
a) $Sen\ x > \frac{1}{2}$



$S = \{x \in \mathbb{R}\ /\ \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}\}$

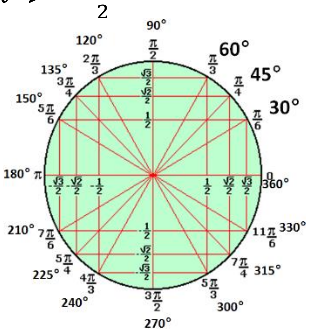
</td>
<td>

b) $Sen\ x < \frac{1}{2}$



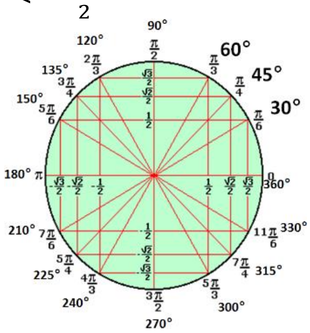
</td>
</tr>
<tr>
<td>

c) $Sen\ x > -\frac{1}{2}$



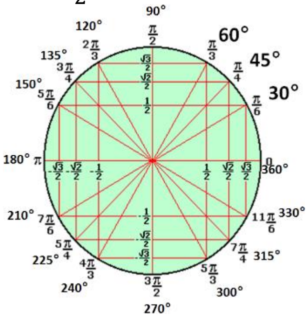
</td>
<td>

d) $Sen\ x < -\frac{1}{2}$

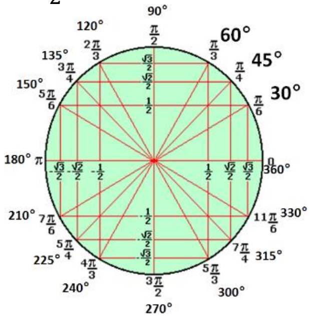


</td>
</tr>
</table>

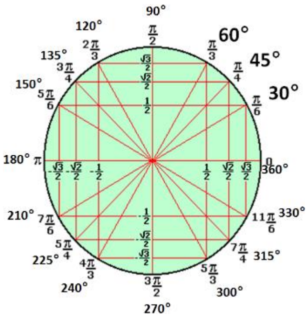
e) $Sen\ x\ > \frac{\sqrt{2}}{2}$



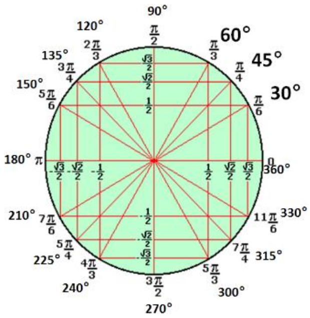
f) $Sen\ x < \frac{\sqrt{2}}{2}$



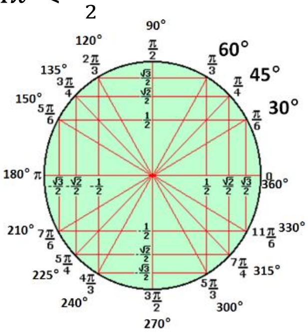
g) $Sen\ 2x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$



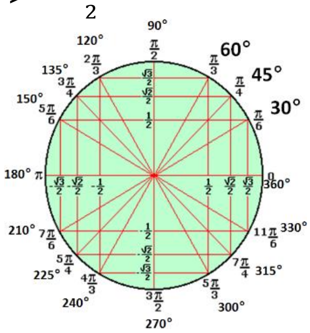
h) $Sen\ 3x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$



i) $Sen\ 4x < \frac{\sqrt{3}}{2}$



j) $Sen\ 5x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$



2. (Registro) Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

Inequação	**A inequação é da forma:**		**Raízes**	**Intervalo da solução**
	$sen\, a > k$	$sen\, a < k$		
$a)\ Sen\, x > \frac{1}{2}$	X		$x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$	S= $]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}[$
$b)\ Sen\, x < \frac{1}{2}$				
$c)\ Sen\, x > -\frac{1}{2}$				
$d)\ Sen\, x < -\frac{1}{2}$				
$e)\ Sen\, x > \frac{\sqrt{2}}{2}$				
$f)\ Sen\, x < \frac{\sqrt{2}}{2}$				
$g)\ Sen\, 2x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$				
$h)\ Sen\, 3x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$				
$i)\ Sen\, 4x > \frac{\sqrt{3}}{2}$				
$j)\ Sen\, 5x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$				

3) (Análise) Analise o quadro e responda:

a) Você consegue observar alguma relação comum entre as inequações seno de mesma forma? Qual?

b) Consegue analisar o que muda na solução quando muda apenas a desigualdade?

4) (Institucionalização) Discuta com seus colegas, depois sintetize uma conclusão.

Formalização do Professor

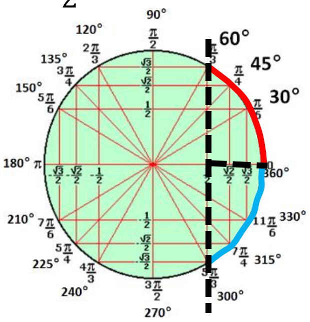
Atividade 2: Inequação do Cosseno

Objetivo: Descobrir uma relação entre as soluções de inequações do cosseno
Material: Ciclo Trigonométrico e folha de atividade.
Procedimento: Os estudantes formarão duplas ou trios e deverão resolver as questões a seguir com o apoio visual do ciclo trigonométrico.

1)(Execução) Com o auxílio geométrico do ciclo trigonométrico determine a solução de cada inequação $cos\ a > k$ ou $cos\ a < k$ dada, no intervalo de [0, 2π].

<table>
<tr>
<td>

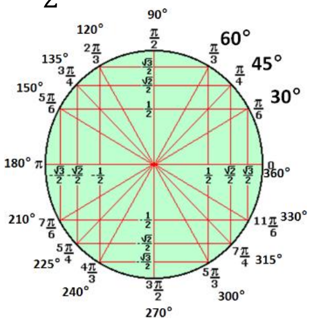
$a) Cos\ x\ > \frac{1}{2}$



$S = \{x \epsilon \mathbb{R}\ /\ 0 < x < \frac{\pi}{3} \cup \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\}$

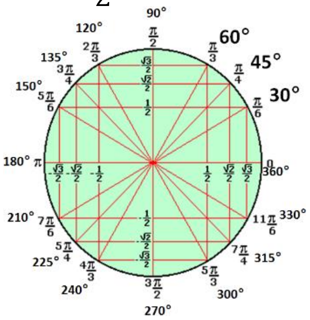
</td>
<td>

$b) Cos\ x\ < \frac{1}{2}$



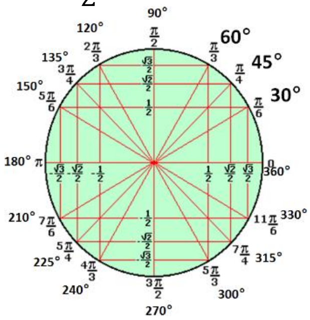
</td>
</tr>
<tr>
<td>

$c)\ Cos\ x\ > -\frac{1}{2}$



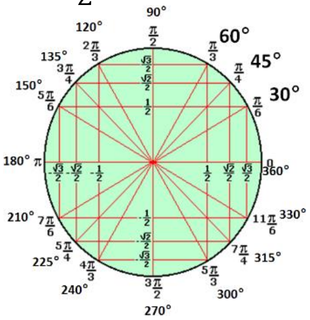
</td>
<td>

$d)\ Cos\ x\ < -\frac{1}{2}$



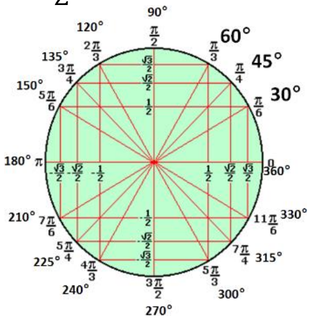
</td>
</tr>
<tr>
<td>

$e)\ Cos\ x\ > \frac{\sqrt{2}}{2}$

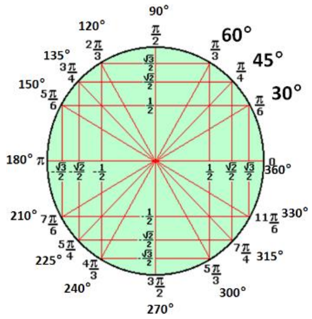
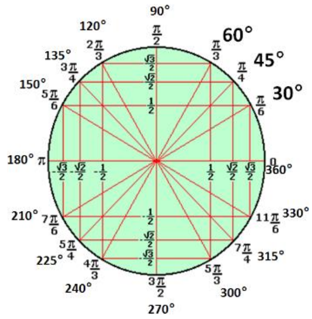
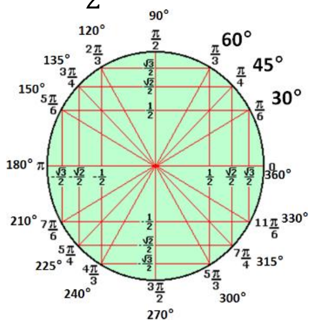
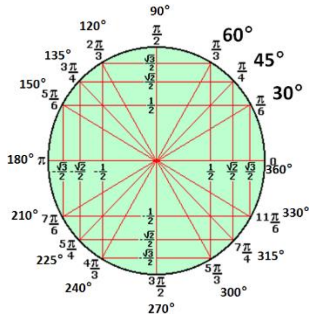


</td>
<td>

$f)\ Cos\ x < \frac{\sqrt{2}}{2}$



</td>
</tr>
</table>

$g)\ Cos\ 2x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 	$h)\ Cos\ 3x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 
$i)\ Cos\ 4x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 	$j)\ Cos\ 5x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 

2. (Registro) Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

Inequação	**A inequação é da forma:**		**Raízes**	**Intervalo da solução**
	$sen\ a\ >\ k$	$sen\ a\ <\ k$		
$a)\ Cos\ x\ >\ \frac{1}{2}$	X		$x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{5\pi}{3}$	$S =]\ 0\ , \frac{\pi}{3}\ [\cup]\ \frac{5\pi}{3}, 2\pi[$
$b)\ Cos\ x < \frac{1}{2}$				
$c)\ Cos\ x\ > -\frac{1}{2}$				
$d)\ Cos\ x < -\frac{1}{2}$				
$e)\ Cos\ x\ > \frac{\sqrt{2}}{2}$				
$f)\ Cos\ x < \frac{\sqrt{2}}{2}$				

$g)\ Cos\ 2x\ > -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$				
$h)\ Cos\ 3x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$				
$i)\ Cos\ 4x\ > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$				
$j)\ Cos\ 5x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$				

(Análise) Analise o quadro e responda:

a) Você consegue observar alguma relação comum entre as inequações cosseno de mesma forma? Qual?

b) Consegue analisar o que muda na solução quando muda apenas a desigualdade?

4) (Institucionalização) Discuta com seus colegas, depois sintetize uma conclusão.

Formalização do Professor

Atividade 3: Inequação da Tangente

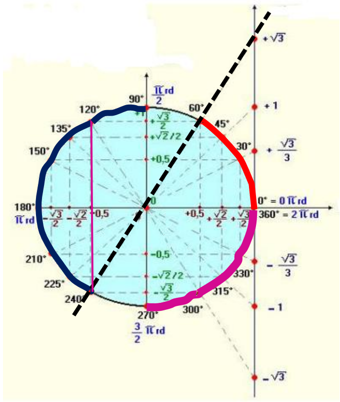
Objetivo: Descobrir uma relação entre as soluções de inequações tangentes.

Material: Ciclo Trigonométrico e folha de atividade.

Procedimento: Os estudantes formarão duplas ou trios e deverão resolver as questões a seguir com o apoio visual do ciclo trigonométrico e do gráfico da função tangente.

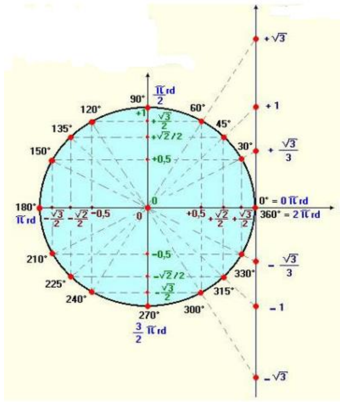
1. (Execução) Com o auxílio geométrico do ciclo trigonométrico determine a solução de cada inequação $tg\ a > k$ ou $tg\ a < k$ dada, no intervalo [0,2π].

a) $Tg\ x < \sqrt{3}$

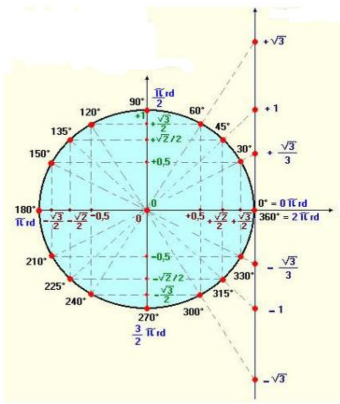


$$S = \{x \in \mathbb{R}\ /\ 0 < x < \frac{\pi}{3} \cup \frac{\pi}{2} < x < \frac{4\pi}{3} \cup \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\}$$

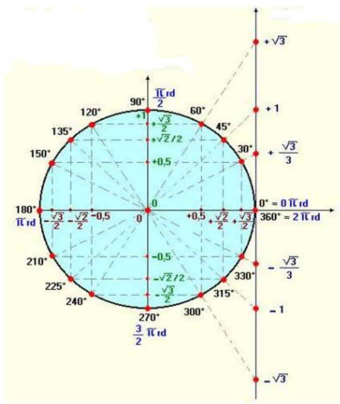
b) $Tg\ x > \sqrt{3}$



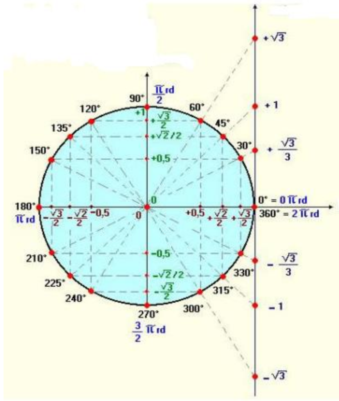
c) $Tg\ x < 1$



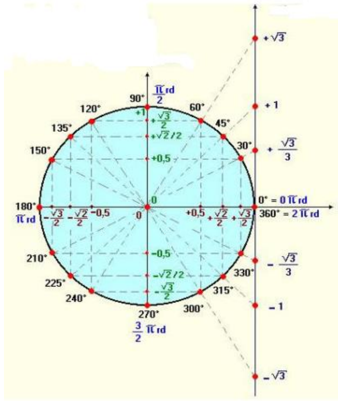
d) $Tg\ x > 1$



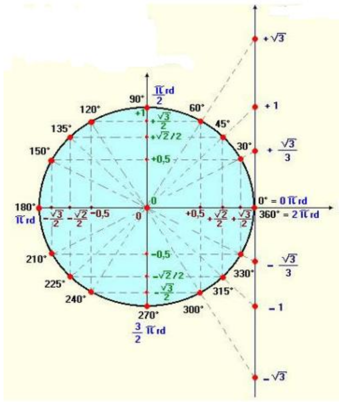
e) $Tg\ x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$



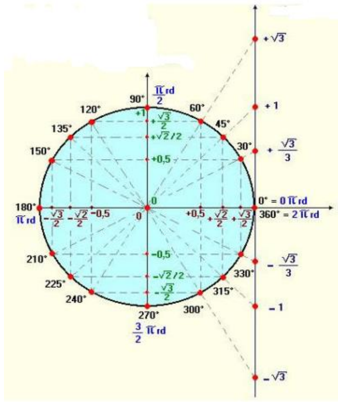
f) $Tg\ x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$



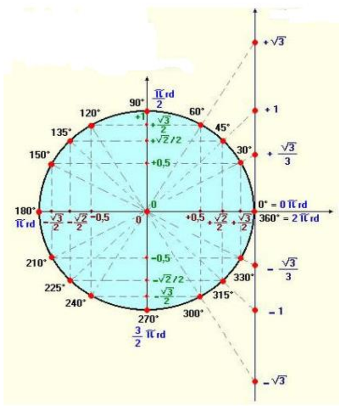
g) $Tg\ 2\ x < -1$



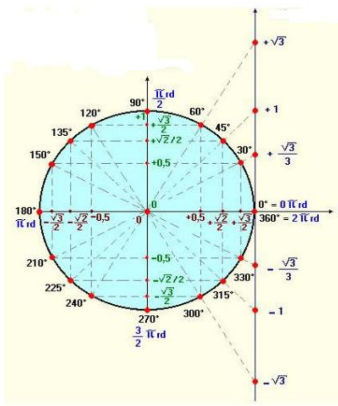
h) $Tg\ 3x > 1$



i) $Tg\ 4x < -\sqrt{3}$



j) $Tg\ 5x > -\sqrt{3}$



2) (Registro) Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

Inequação	**A inequação é da forma:**		**Raízes**	**Intervalo da solução**
	$Tg\ a > k$	$Tg\ a < k$		
a) $Tg\ x < \sqrt{3}$		X	$x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{4\pi}{3}$	$S =]0, \frac{\pi}{3}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$
b) $Tg\ x < \sqrt{3}$				
c) $Tg\ x < 1$				
d) $Tg\ x > 1$				
e) $Tg\ x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$				
f) $Tg\ x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$				
g) $Tg\ 2x < -1$				
h) $Tg\ 3x > 1$				
i) $Tg\ 4x < -\sqrt{3}$				
j) $Tg\ 5x > -\sqrt{3}$				

(Análise) Analise o quadro e responda:

a) Você consegue observar alguma relação comum entre as inequações cosseno de mesma forma? Qual?

b) Consegue analisar o que muda na solução quando muda apenas a desigualdade?

4) (Institucionalização) Discuta com seus colegas, depois sintetize uma conclusão.

Formalização do Professor

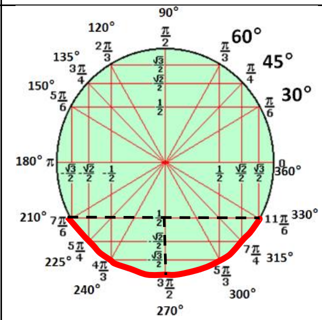
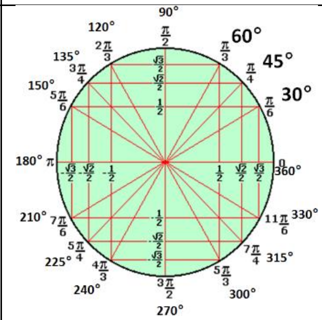
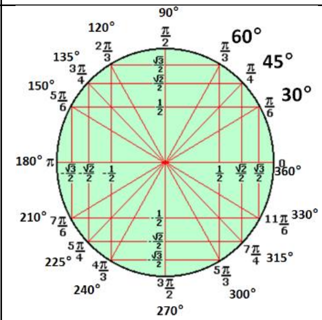
Atividade 4- Soluções de Inequações Trigonométricas

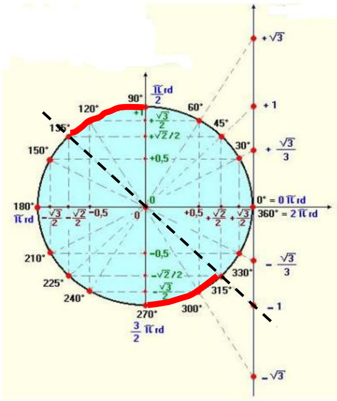
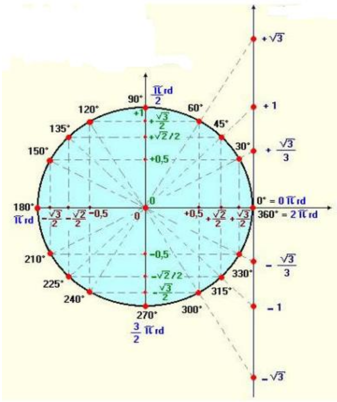
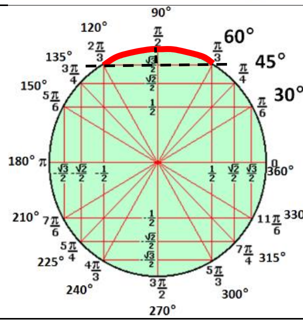
Objetivo: Desenvolver a conversão entre as representações das soluções da inequação trigonométrica, as quais sejam: No ciclo trigonométrico (geométrica e gráfica), na solução particular algébrica e no intervalo.

Material: Folha de atividade e caneta.

Procedimento: O professor disponibilizará para cada estudante (ou grupo de estudantes) a folha de atividade que apresenta um quadro a ser completado com um ou mais tipos de representação conforme o que foi estudado nas atividades anteriores.

1) (Execução e Registro) Complete o quadro com a inequação trigonométrica ou com alguma representação da inequação trigonométrica: gráfica no ciclo trigonométrico, na forma algébrica ou na forma de intervalo.

<table>
<tr><th>Inequação</th><th>Ciclo trigonométrico</th><th>Solução algébrica
e Solução no intervalo</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$sen\, x < -\frac{1}{2}$</td><td rowspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$Cos\, 2x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td rowspan="2"></td><td>$\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} / \frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{12}} < \mathbf{x} < \frac{\mathbf{7\pi}}{\mathbf{12}}\}$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{S} =]\frac{\boldsymbol{5\pi}}{\mathbf{12}}, \frac{\boldsymbol{7\pi}}{\mathbf{12}}[$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$Cos\, x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td rowspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td>$\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} / \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} < \mathbf{x} < \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}} \cup \frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{2}} < \mathbf{x} < \frac{\mathbf{7\pi}}{\mathbf{4}}\}$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{S} =]\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}}[\ \boldsymbol{ou}\ ]\frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{7\pi}}{\mathbf{4}}[$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\boldsymbol{Tg}\ \mathbf{2}\boldsymbol{x} < \sqrt{\mathbf{3}}$</td><td rowspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

2) (Análise) Você conseguiu criar uma estratégia para reconhecer e fazer a conversão das representações das solução nas inequações trigonométricas do quadro? Explique.

3) (Institucionalização) Discuta com seus colegas, depois sintetize uma conclusão.

Formalização do Professor

APÊNDICE B – PRÉ TESTE E PÓS TESTE

SEQUENCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Identificação da Escola: ____

Identificação do estudante: _____________________________________

Data: ____/_____/_____.

ATIVIDADE DIAGNÓSTICA DE APRENDIZAGEM

1 - Se x $\in [0,2\pi]$, então cos x $> \frac{1}{2}$ se , e somente se, x satisfazer à condição, ilustre no ciclo trigonométrico sua resposta.

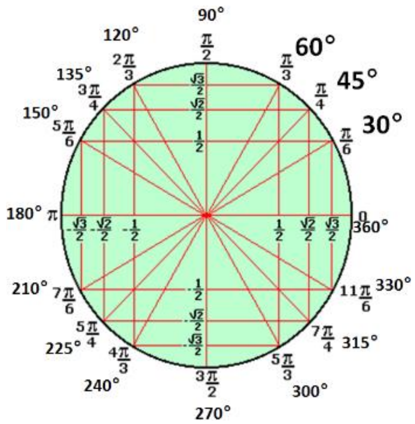
a) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$

c) $\pi < x < 2\pi$

d) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ou $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$

e) $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3} < x \leq 2\pi$

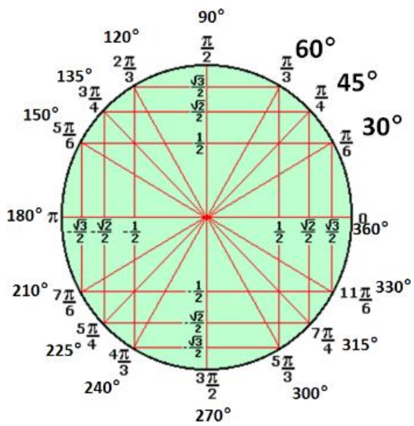


2) Encontre o conjunto solução da inequação sen x $< \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ilustre sua resposta no ciclo trigonométrico.

a) $[0,\pi] \cup \left[\frac{4\pi}{5}, 2\pi\right]$

b) $\left[0,\frac{\pi}{5}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{5}, 2\pi\right[$

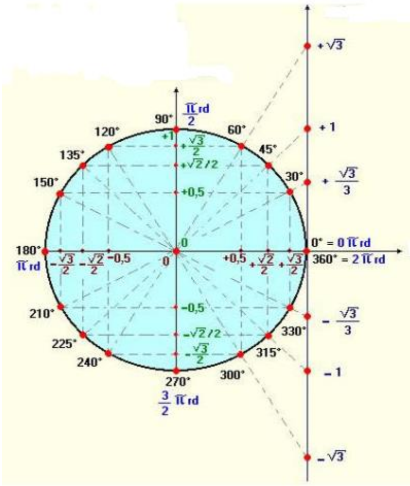
c) $\left[0,\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$



d) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{3\pi}{4}, 2\pi\right[$

e) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{3\pi}{4}, 2\pi\right]$

3) Resolva a inequação Tg x $\geq \sqrt{3}$ para $0 \leq$ x $\leq 2\pi$. Ilustre no ciclo trigonométrico.



a) S = $\left\{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2} \;\; ou \; \frac{4\pi}{3} \leq x < \frac{3\pi}{2}\right\}$

b) S = $\left\{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{3} \;\; ou \; \frac{4\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{5}\right\}$

c) S = $\left\{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{2} \;\; ou \; \frac{4\pi}{5} \leq x < \frac{3\pi}{4}\right\}$

d) S = $\left\{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2} \;\; ou \; \frac{2\pi}{3} \leq x < \frac{4\pi}{2}\right\}$

e) S = $\left\{x \in \mathbb{R} / \frac{2\pi}{3} \leq x < \frac{3\pi}{2} \;\; ou \; \frac{4\pi}{3} \leq x < \frac{5\pi}{2}\right\}$

4) Marque o item que apresenta o maior valor de x, com 0 ≤ x ≤ 2π , tal que sen x $\geq$ 1/2 . Ilustre.

a) $\frac{5\pi}{6}$

b) $\frac{2\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{6}$

d) $\frac{5\pi}{4}$

e) $\frac{3\pi}{2}$

5) Resolva a inequação $\cos x < -\frac{1}{2}$ no intervalo [0,2π]. Ilustre sua resposta no ciclo trigonométrico.

a) [π/3,5 π/3]
b) [π/4, π/3]
c) [π/3, π/2]
d) [π/3,5 π/3]
e)]2 π/3,4 π/3[
e)]0, π/3[U]3 π/2,2 π[

APÊNDICE C – QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO

SEQUENCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Identificação da Escola: ______________________________________

Identificação do estudante: ___________________________________

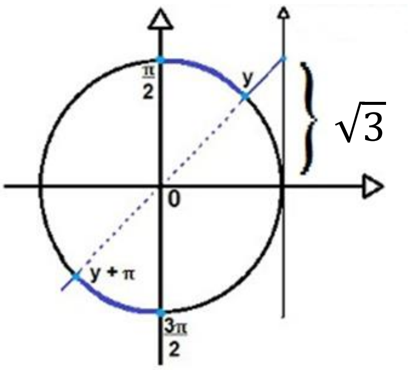
Data: ____/_____/_____.

ATIVIDADE DE APROFUNDAMENTO

3) Dada a inequação $Cos\,\frac{x}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}\ x \in [0, 2\pi]$, para quais valores de x a solução é negativa? Responda e ilustre sua resposta.

4) Dada a inequação $sen\ 2x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, com $x \in [0, 2\pi]$, para quais valores a solução é positiva? Responda e ilustre sua resposta.

5) Represente a inequação tangente que tem a solução x, para $0 \leq x \leq 2\pi$, ilustrada na figura.



6) Represente uma inequação seno cuja solução x, para $0 \leq x \leq 2\pi$, seja negativa. Responda e ilustre sua resposta.

5) Resolva a inequação $tg\, x \geq \sqrt{3}$ para $0 \leq x \leq 2\pi$. Ilustre no ciclo trigonométrico.

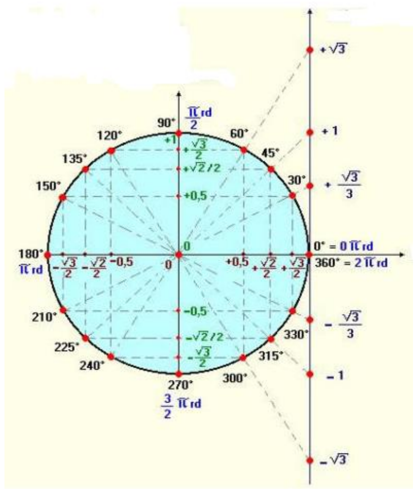
a) S = $\left\{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2} \; ou \; \frac{4\pi}{3} \leq x < \frac{3\pi}{2}\right\}$

b) S = $\left\{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{3} \; ou \; \frac{4\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{5}\right\}$

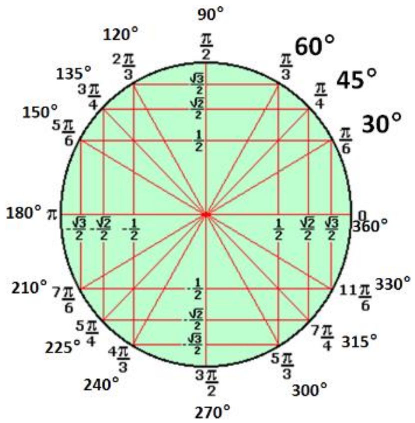
c) S = $\left\{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{2} \; ou \; \frac{4\pi}{5} \leq x < \frac{3\pi}{4}\right\}$

d) S = $\left\{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2} \; ou \; \frac{2\pi}{3} \leq x < \frac{4\pi}{2}\right\}$

e) S = $\left\{x \in \mathbb{R} / \frac{2\pi}{3} \leq x < \frac{3\pi}{2} \; ou \; \frac{4\pi}{3} \leq x < \frac{5\pi}{2}\right\}$



6) Resolva a inequação $\cos x < -\frac{1}{2}$ no intervalo $[0,2\pi]$. Ilustre sua resposta no ciclo trigonométrico.



a) [π/3,5 π/3]

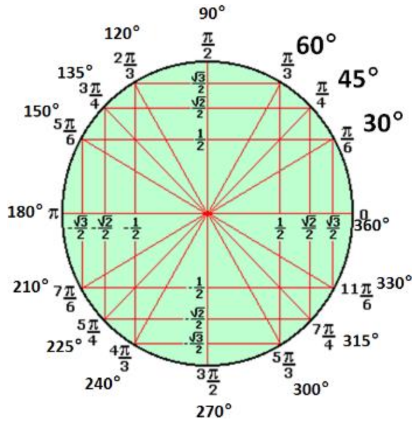
b) [π/4, π/3]

c) [π/3. π/2]

d) [π/3,5 π/3]

e)]2 π/3,4 π/3[

7) As soluções de $\frac{1}{2} < sen\ x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ no intervalo $[0\ ,2\pi\ [$, são todas as medidas x , em radianos, tais que:



a) $\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} \leq x < \frac{5\pi}{6}$

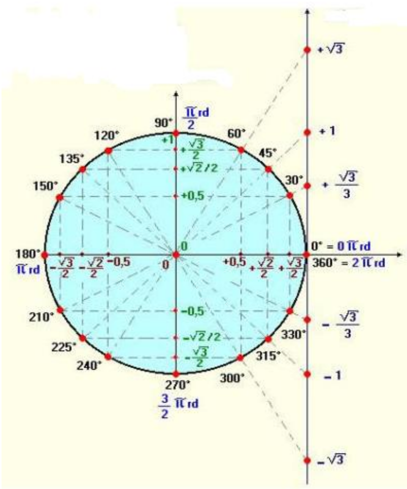
b) $\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} < x \leq \frac{5\pi}{6}$

c) $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} < x \leq \frac{3\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{3}$

e) $\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}$

8) Determinar a solução da inequação $\tan 2x < \sqrt{3}$. Ilustre no ciclo trigonométrico.



a) [0, π/6[U[7 π/6,3 π/2[

b) [π/2, π]U[3 π/2,2 π[

c) [0, π/4[U] π/2,5 π/4[

d)]0, π/3[U] π/2,4 π/3[

e)]0, π/3[U]3 π/2,2 π[

9) Marque o item que apresenta o maior valor de x, com $0 \leq x \leq 2\pi$, tal que $cos\ x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ilustre.

$a)\ \frac{3\pi}{4}$

$b)\ \frac{2\pi}{3}$

$c)\ \frac{\pi}{4}$

$d)\ \frac{5\pi}{4}$

$e)\ \frac{3\pi}{2}$

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem