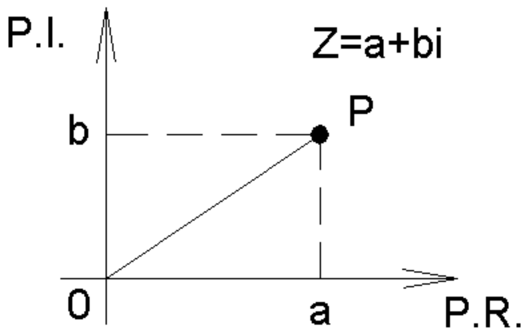
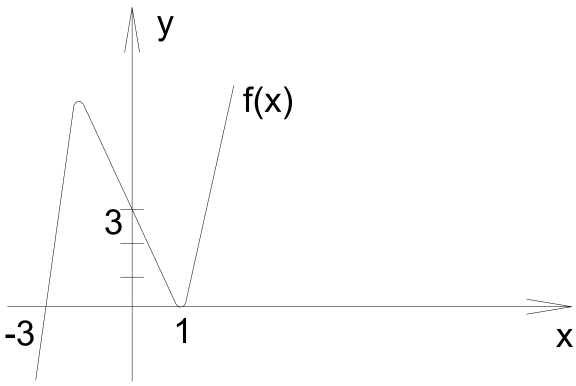
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA**
**Colégio Técnico Industrial de Santa Maria**

***Caderno Didático 3***

# <u>Números Complexos e Polinômios</u>




***Série: Matemática III***

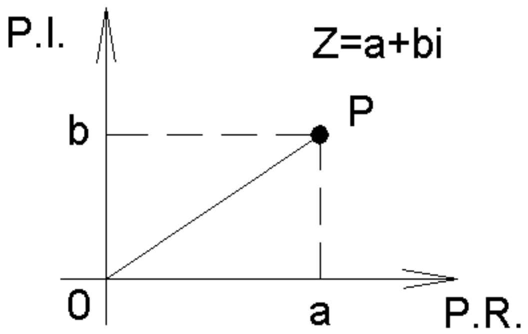
Por:
Professora Elisia L. Chiapinotto
Professor Mauricio R. Lutz

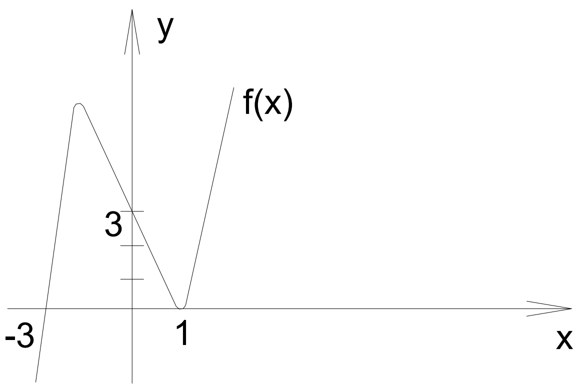
Fevereiro de 2020

***UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA***
***Colégio Técnico Industrial de Santa Maria***

***Caderno Didático 3***

# ***Números Complexos e Polinômios***




***Série: Matemática III***

Por:
Professora Elisia L. Chiapinotto
Professor Mauricio R. Lutz

Fevereiro de 2020

C532c

Chiapinotto, Elisia L.

Caderno didático 3 : números complexos e polinômios / por Elisia Lorenzoni Chiapinotto, Mauricio Ramos Lutz. – Santa Maria , 2004.
52 f. : il. (Série Matemática III)

1. Matemática 2. Números complexos 3. Operações 4. Polinômios 5. Igualdade 6. Divisão I. Lutz, Mauricio Ramos II. Título

CDU: 511.176

Ficha catalográfica elaborada por
Luiz Marchiotti Fernandes CRB 10/1160
Biblioteca Setorial do Centro de Ciências Rurais/UFSM

## *SUMÁRIO*

# NÚMEROS COMPLEXOS

Até o momento, utilizamos o conjunto dos números reais que satisfaz a solução de quase todas as equações desenvolvidas.

Vamos admitir, agora, a existência da equação $x^2+1=0$, que muito preocupou os matemáticos durante o século XV. Como sabemos, esta equação não possui solução no campo dos números reais, pois não existe nesse campo raiz quadrada de número negativo ( $x=\pm\sqrt{-1}$ ).

Para que as equações fossem sempre possíveis, houve a necessidade de ampliar o universo dos números.

Criou-se então um número cujo quadrado é –1. Este número é representado pela letra *i*, denominado unidade imaginária, e é definido por :

$$i^2=-1 \Rightarrow i=\sqrt{-1}$$

A partir desta definição, surge um nono conjunto de números denominado conjunto dos números complexos, que indicaremos por $\mathbb{C}$.

## 1 FORMA ALGÉBRICA

Todo número complexo pode ser escrito na forma $Z=a+bi$, com $a, b \in \Re$, denominada forma algébrica.

O número real *a* é denominado parte real de *Z*, e o número real *b* é o coeficiente da parte imaginária e *i* é a unidade imaginária.

$$Z=a+bi\begin{cases} a \Rightarrow \text{coeficiente real ou parte real;} \\ bi \Rightarrow \text{parte imaginária;} \\ b \Rightarrow \text{coeficiente imaginário;} \\ i \Rightarrow \text{unidade imaginária} \end{cases}$$

Portanto, um número é real quando a parte imaginária do número complexo é nulo, e imaginário puro, quando a parte real do número complexo é nulo e $b\neq 0$.

$$Z=a+bi\begin{cases} Z=a+(0)i=a \Rightarrow \text{é um número real;} \\ Z=0+bi=bi \Rightarrow \text{é um número imaginário puro.} \end{cases}$$

**Exemplos:** 1. $Z=4+3i$ $\Rightarrow$ é um número imaginário;

2. $Z = 2 \Rightarrow$ é um número real;

3. $Z = 7i \Rightarrow$ é um número imaginário puro.

4. Considerando o número complexo $Z = (m-3) + (n^2 - 25)i$, determinar *m* e *n* de modo que *Z* seja:

a) um numero real.

Resolução:

Para que *Z* seja real, devemos ter:

$n^2 - 25 = 0 \Rightarrow n^2 = 25 \Rightarrow n = \pm 5$

$(m-3) \in \Re \Rightarrow m \in \Re$

b) um número imaginário puro.

Resolução:

Para que *Z* seja imaginário puro, devemos ter:

$m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$

$n^2 - 25 \neq 0 \Rightarrow n^2 \neq 25 \Rightarrow n \neq \pm 5$

**(1) Exercícios**

1. Determine k de modo que o número complexo $Z = (k+5) - 4i$ seja imaginário puro.

2. Ache *m* para que o número complexo $Z = 1 + (m^2 - 81)i$ seja um número real.

3. Determine *x* e *y*, para que o número complexo $Z = (x+6) - (y^2 - 16)i$ seja:

a) um número real; b) um número imaginário puro.

4. Sendo $Z = (4m-5) + (n-1)i$, determine os números reais *m* e *n* tal que $Z = 0$.

5. Resolva as equações no universo dos números complexos:

a) $x^2+25=0$ b) $x^2-6x+13=0$ c) $4x^2-4x+5=0$

6. Determine os valores de x para que os complexos sejam reais.

a) *2+(3x –1)i*

b) *(x+2) – (x*$^2$ *–5x)i*

c) *(5x –10)+ (2x –4)i*

## 2 IGUALDADE DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Dois números complexos $Z' = a + bi$ e $Z'' = c + di$, são iguais se, e somente se, suas respectivas partes reais são iguais, e as respectivas partes imaginárias são iguais.

$$Z' = Z'' \Rightarrow a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ e \\ b = d \end{cases}$$

**Exemplo:** Determinar *a* e *b* de modo que os números complexos $Z' = a + bi$ e $Z'' = 5 + 3i$ sejam iguais.

Resolução:

Usando a relação $a + bi = c + di$, temos:

$a = 5$

$b = 3$

**(2) Exercícios**

1. Determine *a* e *b* de modo que $a - bi = 2 + 4i$.

2. Ache *a* e *b* de modo que $2a - b + (3a + 2b)i = -8 + 9i$.

3. Sabendo que $Z' = x^2 - 1 + (4 - y)i$ e $Z'' = 3 - 10i$, determine *x* e *y*, para que *Z'* seja igual a *Z''*.

## 3 CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Sendo $Z = a + bi$, defini-se como complexo conjugado de *Z* o complexo $\overline{Z} = a - bi$. Observe que as partes reais dos dois complexos $Z$ e $\overline{Z}$

são <u>iguais</u> e as partes imaginárias, <u>simétricas</u>.

**<u>Exemplo:</u>** $Z = 3 + 4i \Rightarrow \overline{Z} = 3 - 4i$;

$Z = 5i \Rightarrow \overline{Z} = -5i$;

$Z = 2 \Rightarrow \overline{Z} = 2$

**3.1 Propriedades do conjugado**

$P_1 \Rightarrow \overline{\overline{Z}} = Z$

Se $Z = a + bi$, então $\overline{Z} = a - bi \Rightarrow \overline{\overline{Z}} = \overline{a - bi} = a + bi$.

$P_2 \Rightarrow \overline{Z' + Z''} = \overline{Z'} + \overline{Z''}$

O conjugado da soma é igual à soma dos conjugados.

$P_3 \Rightarrow \overline{Z'.Z''} = \overline{Z'}.\overline{Z''}$

O conjugado do produto é igual ao produto dos conjugados.

$P_4 \Rightarrow \overline{Z^n} = \overline{Z}^n \ (n \in N)$

O conjugado de uma potência é igual à potência de um conjugado.

**<u>(3) Exercícios</u>**

1. Dê o conjugado dos seguintes números complexos:

a) $Z = 6 + \sqrt{2}i$ b) $Z = -4 + 3i$ c) $Z = \sqrt{3} - \sqrt{5}i$

2. Determine o conjugado do números complexos a seguir:

a) $Z = i + 4$ b) $Z = -\sqrt{3}i$ c) $Z = \sqrt{10}i$

# 4 OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS

## 4.1 Adição e subtração

Somamos ou subtraímos números complexos, somando ou subtraindo, respectivamente, suas partes reais e imaginárias, separadamente. Isto é:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

**<u>Exemplo:</u>** Efetuar: a) $(2+3i)+(6+4i)$

Resolução:

$$(2+3i)+(6+4i)=2+3i+6+4i=8+7i$$

b) $(6+5i)-(2+3i)$

Resolução:

$$(6+5i)-(2+3i)=6+5i-2-3i=4+2i$$

## 4.2 Multiplicação

Multiplicando dois números complexos de acordo com a regra da multiplicação de binômios e sabendo que $i^2=-1$, temos:

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2 \Rightarrow (a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

**<u>Exemplo:</u>** Efetue a multiplicação $(2+4i)(1+3i)$.

Resolução:

$$(2+4i)(1+3i)=2+6i+4i+12i^2=2+6i+4i-12=-10+10i$$

## 4.3 Divisão

A divisão de dois números complexos $Z'=a+bi$ e $Z''=c+di$ pode ser obtida, escrevendo-se o quociente sob a forma de fração; a seguir, procedendo-se de modo análogo ao utilizado na racionalização do denominador de uma fração, multiplicam-se ambos os termos da fração pelo número complexo conjugado do denominador. Isto é:

$$\frac{Z'}{Z''}=\frac{Z'.\overline{Z''}}{Z''.\overline{Z''}}$$

**<u>Exemplo:</u>** Sendo $Z'=3+2i$ e $Z''=1+i$, obter $\dfrac{Z'}{Z''}$

Resolução:

$$\frac{Z'}{Z''}=\frac{3+2i}{1+i}\Rightarrow\frac{Z'}{Z''}=\frac{3+2i}{1+i}.\frac{1-i}{1-i}=\frac{3-3i+2i-2i^2}{1-i^2}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$$

## <u>(4) Exercícios</u>

1. Calcule:

a) $(6+5i)+(2-i)$

b) $(6-i)+(4+2i)-(5-3i)$

c) $\left(\frac{2}{3}+i\right)-\left(\frac{1}{2}-i\right)+(4-2i)$

d) $(5+i)(2-i)$

e) $(-1+2i)(3+i)$

f) $(-3i+4)(-2+5i)$

g) $\dfrac{2+i}{5-3i}$

h) $\dfrac{5+i}{i}$

i) $\dfrac{i}{2+3i}$

2. Calcule *a* e *b*, para que: $(4+5i)-(-1+3i)=a+bi$.

3. Determine o número complexo *Z* tal que $2Z+3\overline{Z}=4-i$.

4. Dados $Z'=4+i$, $Z''=-1+2i$ e $Z'''=5-3i$, calcule:

a) $Z'+Z''-Z'''$

b) $2Z'-4Z''+\frac{1}{2}Z'''$

5. Determine o número complexo *Z* que satisfaz a igualdade $\dfrac{Z}{2}-\dfrac{\overline{Z}}{4}=-\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{3}i$.

6. Sabendo que $Z = 4 + i$, determine os números reais *m* e *n* de modo que $mZ - 6 = ni + \overline{Z}$.

7. Determine *x* e *y* de modo que $(4+i)(x-2i) = y + \frac{1}{2}i$.

8. Consideres os complexos $a = 2 + i$, $b = i - 3$, $c = 1 + i$ e $d = -3 - 2i$, calcule:

a) (a+b)(c+d)

b) (a–b)(c–d)

c) ab–cd

d) abcd

9. Coloque na forma *a*+*bi* a expressão $\frac{1-i}{1+i} + \frac{i}{i-2}$.

10. Dada as funções $f(x) = x^2 - 2x + 1$ e $g(x) = x^2 + x$, calcule $\frac{f(2+i)}{g(1-i)}$.

11. Calcule $\left(\frac{-1+5i}{2+3i}\right)^2$.

12. Determine *a* e *b*, de modo que $a + bi = \frac{4+3i}{5-2i}$.

## 5 POTÊNCIAS DE *i*

Vejamos algumas potências de *i*. Observando os resultados abaixo, verificamos que eles se repetem a cada grupo de quatro potências, assumindo os valores *1, i*, *-1* e *–i*. Podemos concluir que expoente maior que 4, divide-se por 4 e considera-se o resto.

$$\left[\begin{array}{l}
\sqrt{-1} = i \\
i^2 = i.i = (-1)^{\frac{1}{2}}.(-1)^{\frac{1}{2}} = -1 \\
i^3 = i^2.i = -1.i = -i \\
i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1 \\
i^5 = i^4.i = 1.i = i \\
. \\
. \\
.
\end{array}\right.$$

**<u>Exemplo:</u>** $i^{77}=i^1=i$

$$\begin{array}{rl|l}
 & 77 & 4 \\ \cline{3-3}
- & \underline{4\phantom{0}} & 19 \\
 & 37 & \\
 & 36 & \\
 & \boxed{01} \Rightarrow \text{Resto} &
\end{array}$$

## <u>(5) Exercícios</u>

1. O conjugado do número complexo $Z = \frac{(1+i)^2}{1-i^{43}}$ é:

a) 1-i b) –1-i c) –1+i d) –i e) i

2. Se o complexo Z é tal que Z=3-2i, então $(\bar{Z})^2$ é igual:

a) 5 b) 5-61 c) 5+12i d) 9+4i e) 13+12i

3. A soma dos números complexos $\frac{5+5i}{1+i}$ e $\frac{20}{1-i}$ é:

a) (25+5i)/2 b) 15+10i c) –10-10i d) 15-10i e) 30+20i

4. Encontre a, se $\frac{2-ai}{2+ai}$ é um imaginário puro:

a) $\pm 2$ b) 4 c) $\pm 1$ d) $\pm 4$ e) -3

5. Para que (a+3)+(3b-a)i seja igual ao conjugado de 2a-3i, o valor de a+b é:

a) –2 b) 1 c) 2 d) 3 e) 5

6. Dê o valor do produto: $P=i.i^2.i^3.i^4...i^{100}$, sendo $i^2=-1$.

a) 1 b) –1 c) i d) –i d) -25

7. O valor da expressão $y=i+i^2+i^3+...i^{1001}$ é:

a) 1 b) i c) –i c) –1 e) 1+i

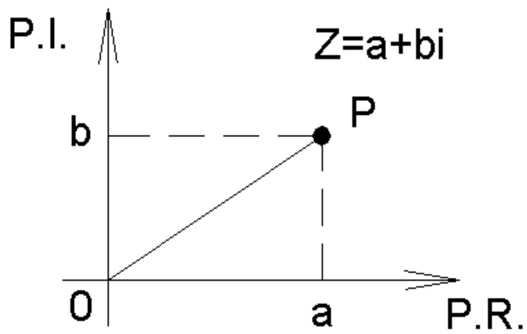
8. Para que o número Z=(x-2i).(2+xi) seja real, devemos ter ($x \in \Re$) tal que:

a) x=0 b) x=±½ c) x=±2 d) x=±4 e) n.d.a.

## 6. REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

Todo complexo $Z = a + bi$ pode ser representado por um par ordenado (a, b). A este par associamos um ponto P de um plano.

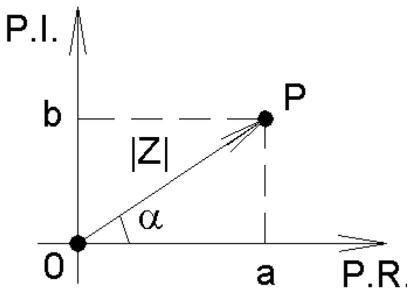
Este plano é chamado de plano de Argand-Gauss. O Ponto P é chamado de afixo ou imagem geométrica de *Z*. Assim, no plano x0y, no eixo das abscissas representa-se a parte real de *Z*; no eixo das ordenadas, a parte imaginária de *Z*.




**Obs:** Não é definido para o campo dos complexos a relação de ordem, isto é, não existe um complexo maior ou menor que outro.

## 7 MÓDULO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Ao representarmos graficamente um número complexo $Z = a + bi$, podemos calcular a distância entre a origem 0 do sistema e o afixo *P* de *Z*. A essa distância $d_{0P}$ denominamos módulo de *Z* e indicamos por |*Z*| ou $\rho$.




Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo 0Pa, temos:

$d_{0P}^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d_{0P} = \sqrt{a^2 + b^2}$ , isto é

$|Z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

**<u>Exemplo:</u>** Determinar o módulo do complexo $Z = 3 + 4i$.

Resolução:

$$|Z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

### 7.1 Propriedades do módulo

O módulo de um número complexo, verifica as seguintes propriedades:

P1 $\Rightarrow |Z| \geq 0$

O módulo de um número complexo é um número, é um número real não-negativo.

P2 $\Rightarrow |Z_1.Z_2| = |Z_1|.|Z_2|$

O módulo do produto de dois ou mais números complexos é igual ao produto dos números complexos fatores.

P3 $\Rightarrow \left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| = \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}$

O módulo do quociente de dois números complexos é igual ao quociente do módulo do complexo dividindo pelo módulo do complexo divisor.

$P_4 \Rightarrow |Z| = |\overline{Z}|$

O módulo de um número complexo e de seu conjugado são iguais.

**<u>Exemplo:</u>** O módulo do número complexo $Z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2 + 2i\sqrt{3}}$ é:

Resolução:

Utilizando a propriedade $P_3$, temos:

$$\frac{|1 - i\sqrt{3}|}{|2 + 2i\sqrt{3}|} = \frac{\sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{1+3}}{\sqrt{4+12}}\ \frac{1}{2}$$

**<u>(6) Exercícios</u>**

1. O módulo de $\dfrac{a+bi}{a-bi}$ para a, b reais é:

a) $a^2+b^2$ b) 2 c) 1 d) $a^2-b^2$ e) n.d.a.

2. Se Z é um complexo tal que Z. $\overline{Z}$=25, então o módulo de Z é:

a) $\sqrt{5}$ b) 5 c) $5\sqrt{5}$ d) 25 e) 50

3. O módulo do número complexo $Z = (1 - 3i).\left(\dfrac{2}{i} - 1\right)$ é:

a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $5\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{2}$ e) 15/2

4. Calcule $\left|\dfrac{(-3-4i).(2+2i)}{1+i}\right|$

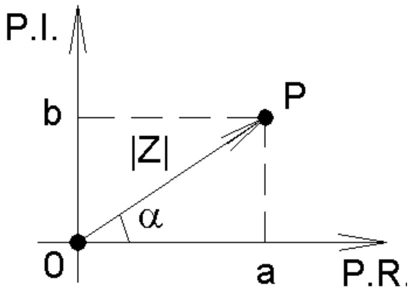
a) 2 b) 4 c)6 d)8 e)10

5. O módulo do número complexo cos$\alpha$-isen$\alpha$ é:

a) –1 b) –i c) i d) $i^4$ e) n.d.a.

## 8 Argumento de um número complexo

Consideremos o número complexo $Z = a + bi$ e o ponto P que o represente.




Denomina-se <u>argumento</u> do complexo *i* a medida do angulo $\alpha$, formado por $\overline{0P}$ como o eixo 0X, medido no sentido anti-horário, conforme indica a figura.

$$\alpha = \arg(z)$$

Esse ângulo α deve satisfazer a condição $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Dado um número complexo $Z = a + bi$, obtemos $\alpha$ a partir de duas relações que podemos estabelecer entre os valores de *a, b* e |*Z*|.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{|Z|} \text{ e } \cos\alpha = \frac{a}{|Z|}$$

**<u>Exemplo:</u>** Determinar o argumento do complexo $Z = \sqrt{3} + i$.

Resolução:

$$|Z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{|Z|} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{|Z|} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$$

Logo $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

**<u>(7) Exercícios</u>**

1. Determine o módulo dos seguintes números complexos:

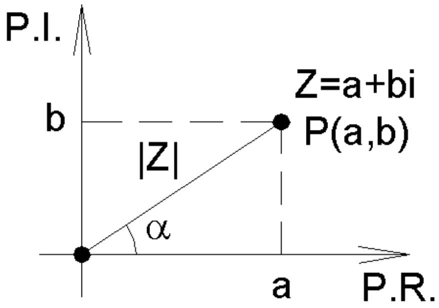
a) $Z = 4 - i$ b) $Z = -5i$ c) $Z = \sqrt{2} + i$ d) $Z = 8$

2. Determine o argumento dos complexos a seguir e faça sua representação geométrica:

a) $Z = 1 - i$ b) $Z = 2 + 2\sqrt{3}i$ c) $Z = 4i$ d) $Z = 2 + 2\sqrt{3}i$

# 9 FORMA TRIGONOMÉTRICA OU POLAR

A qualquer número complexo $Z = a + bi$ podemos associar um par ordenado *(a,b)*.




⇒ O ângulo α é denominado de argumento de Z.

⇒ O ponto P(a,b) é denominado de afixado e é também é imagem de Z=a+bi

⇒ $0 \le \alpha \le 2\pi$.

⇒ Está representação geométrica chama-se de plano de Argand-Gauss.

## 9.1 Desenvolvimento da forma trigonométrica ou polar

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{b}{|Z|} \Rightarrow b = |Z| \operatorname{sen}\alpha \\ \cos\alpha = \dfrac{a}{|Z|} \Rightarrow a = |Z| \cos\alpha \end{cases}$$

Substituindo em $a + bi$;

$$|Z|\cos\alpha + i|Z|\operatorname{sen}\alpha \therefore Z = |Z|.(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$$

$Z = |Z|.(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ ⇒ Forma trigonométrica do complexo Z.

**<u>Exemplo:</u>** O número complexo $Z = 1 + i$ na forma trigonométrica.

Resolução:

$$|Z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$\cos\alpha = \dfrac{a}{|Z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, nete caso α ∈ 1ºQ. Logo $\alpha = \dfrac{\pi}{4} rad$

Então: $Z = |Z|.(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) \Rightarrow Z = \sqrt{2}.\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i.\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

## 9.2 Operações na forma trigonométrica

Dados os números complexos Z' e Z" na forma trigonométrica:

$Z' = |Z'|(\cos\alpha' + i\,\mathrm{sen}\,\alpha')$

$Z'' = |Z''|(\cos\alpha'' + i\,\mathrm{sen}\,\alpha'')$

*a) Multiplicação:*

$Z'.Z'' = |Z'||Z''|(\cos(\alpha'+\alpha'') + i\,\mathrm{sen}(\alpha'+\alpha''))$

*b) Divisão:*

$\frac{Z'}{Z''} = \frac{|Z'|}{|Z''|}(\cos(\alpha'-\alpha'') + i\,\mathrm{sen}(\alpha'-\alpha''))$

*c) Potenciação:*

$Z^n = |Z|^n(\cos(n\alpha) + i\,\mathrm{sen}(n\alpha))$

**(8) Exercícios**

1. O complexo $\frac{1}{(1-i)^{12}}$ é igual a:

a) –1/64 b) –1/32 c) (1+i) d) 1/12 e) 1/12i

2. Sejam os números complexos $Z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right)$ e $W = i^3 + i^2 + i$. Achar $y = Z^6 + W^6$.

3. O módulo do número complexo $(1+3i)^4$ é:

a) 256 b) 100 c) 81 d) 64 e) 16

4. Quando $Z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ e $Z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$ tem-se que $Z_1+Z_2$ e $Z_1.Z_2$ valem respectivamente:

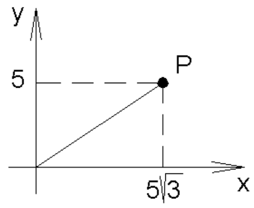
a) 0 e 0 b) $\sqrt{3i}$ e 0 c) $2\sqrt{2i}$ e –4

d) $4\sqrt{2i}$ e –4 e) $2\sqrt{2}+2\sqrt{2i}$ e 4

5. O número complexo Z=a+bi é tal que $\left|\frac{Z-i}{Z-1}\right|=1$.

a) a=-b b) a=b c) a=2b d) a=3b$^2$ e)a=-7b

6. Considere o ponto P($5\sqrt{3}$,5) representado no gráfico abaixo:




A forma trigonométrica no nº complexo Z, representado pelo ponto p é:

a) 10.(cos30º+isen30º)

b) 5.(cos30º+isen30º)

c) 10.(cos45º+isen45º)

d) 5.(cos45º+isen45º)

e) 5.(cos90º+isen90º)

7. O produto dos três números complexos

$Z_1 = 2.(\cos 40º + i\,\mathrm{sen}\,40º)$

$Z_2 = 3.(\cos 135º + i\,\mathrm{sen}\,135º)$

$Z_3 = 1.(\cos 125º + i\,\mathrm{sen}\,125º)$ é igual a:

a) 3-$\sqrt{3}$ i b) 3-3$\sqrt{3}$ i c) 2+2$\sqrt{2}$ i d) 6+$\sqrt{3}$ i e) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ i

8. Passe para a forma trigonométrica os seguintes números complexos:

a) $Z=-4\sqrt{3}-4i$ b) $Z=8i$ c) $Z=-7-7i$

d) $Z=1-\sqrt{3}i$ e) $z=-5$ f) $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

9. Passe para a forma algébrica os complexos:

a) $Z = 2\sqrt{2}.(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3})$ b) $Z = 2.(\cos 315^{o} + i\,\text{sen}\,315^{o})$

c) $Z = 2.(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{6})$ d) $Z = \sqrt{3}.(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3})$

10. Coloque o número complexo *Z* na forma trigonométrica:

a) $Z = \frac{1+i^3}{1+i}$ b) $Z = \frac{i}{1+i} - \frac{3}{1-i}$

## (9) Exercícios complementares

1. É dado um número complexo $Z = (x-2)+(x+3)i$, onde x é um número real positivo. Se |Z| = 5, então:

a) Z é um imaginário puro.

b) Z é um número real positivo.

c) o ponto imagem de Z é (-1;2).

d) o conjugado de Z é $-1+2i$.

e) o argumento principal de Z é 180º

2. Seja o número complexo $Z = (5-3i)^2 - [-2i - 7i(4+i)]$.Escrevendo Z na forma $a+bi$, com a e b reais é correto concluir que:

a) Z é um número imaginário puro

b) Z é um número real

c) a = b

d) a = -b

e) $Z^3 = -1$

3. A condição para que o número complexo da forma $\frac{a+bi}{c+di}$ seja real é que:

a) $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$ b) bc = 0 c) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ d) ad = 0 e) $Z = 2+i$

4. Seja $Z = 1 + i$, onde *i* é a unidade imaginária. Pode se afirmar que $Z^8$ é igual a:

a) 16 b)16i c)32 d) 32i e) 32 + 16i

5. Uma das raízes quadradas do número complexo 4*i* é:

a)-2i b) $\sqrt{2} + i$ c) $-\sqrt{2} - i$ d) $\sqrt{2}(1+i)$ e) $\sqrt{2}(1-i)$

6. A representação trigonométrica do número complexo $Z = 1 + i$ é:

a) $2(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$ b) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})$

c) $2(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})$ d) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2})$

e) $2(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2})$

7. Se $Z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})$, então $Z^8$ vale:

a) –16i b) -16 c) 8i d) 16 e) 1 + i

8. Dado o número complexo $Z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, podemos afirmar que o número complexo $Z^{100}$ é:

a) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ b) $2^{100}(-\frac{1}{2} + \sqrt{3}i)$ c) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}i$

d) $\frac{1}{2} + 50\sqrt{3}i$ e) 1 + i

9. A expressão $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} - \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$ é igual a:

a) 0 b) 1 c) i d) $\sqrt{3}$ e) $\sqrt{3}i$

10. O número $Z=(m-3)+(m^2-9)i$ será um número real não nulo para:

a) m=-3. b) m<-3 ou m>3. c) –3<m<3. d) m=3. e) m>0.

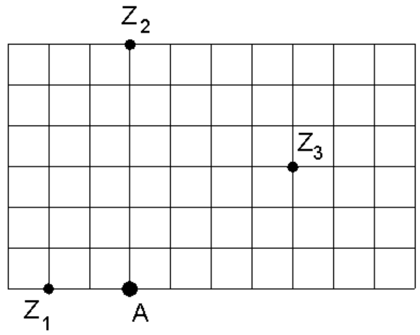
11. Considere $Z_1 = -3 + 2i$ e $Z_2 = 4 + i$. A representação trigonométrica de $Z_1 + \overline{Z_2}$ é:

a) $\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ b) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

c) $\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$ d) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

e) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

12. (UFSM/1996)




$Z_1$, $Z_2$ e $Z_3$ são números complexos conforme a figura e A é a origem do plano coordenado xy.

Então $Z_3$ é igual a:

a) $3Z_1+Z_2$. b) $3Z_1-(1/3)Z_2$. c) $\frac{1}{2}Z_2-2Z_1$.

d) $2Z_2-\frac{1}{2}Z_1$. e) $Z_1-Z_2$.

13. (UFSM/1997) Seja a matriz $\begin{bmatrix} \overline{Z} & Z \\ -1 & Z \end{bmatrix}$, onde $Z = \cos\frac{2\pi}{3} - i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3}$.

Então o determinante de A é:

a) 0 b) $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ d) $-\sqrt{3}$ e) $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

14. (UFSM/1998) Seja Z=a+bi um número complexo, onde $b \neq 0$. Então a expressão $y = \frac{(Z+|Z|)^2}{2a+2|Z|}$ é igual a

a) $\frac{-Z}{|Z|}$ b) $Z.\overline{Z}$ c) Z d) 1/Z e) $Z^2$

15. (UFSM/1999) Seja Z=a+bi um número complexo, onde a, b$\in\Re$, a$\neq$0 e b$\neq$0. A área do polígono, cujos vértices são $Z_1$=Z, $Z_2$=$\overline{Z}$, $Z_3$= -Z, $Z_4$=bi, é igual a

a) ab b) (3/2)a/b c) 2ab d) 3ab e) 6ab

16. (UFSM/2000) Considerando o número complexo Z=1+$\sqrt{3}$i, numere a 1º coluna de acordo com a 2º.

( ) Z ( ) $\overline{Z}$ ( ) $Z^2$ ( ) 2Z

1. $2\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$ 2. $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

3. $4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$ 4. $4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

5. $4\left(\cos^2\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}^2\frac{\pi}{3}\right)$ 6. $2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

A seqüência correta é

a) 2 – 6 – 3 – 4. b) 2 – 1 – 5 – 3. c) 6 – 4 – 3 – 5.

d) 2 – 6 – 1 – 3. e) 6 – 2 – 5 – 4.

17. (UFSM/2001) Se (1+ai)(b-i)=5+5i, com a e b$\in\Re$, então a e b são raízes da equação

a) $x^2$-x-6=0 b) $x^2$-5x-6=0 c) $x^2$+x-6=0

d) $x^2$+5x+6=0 e) $x^2$-5x+6=0

18. (UFSM/2002) Dados dois números complexos na forma z=r(cos$\alpha$+isen$\alpha$) e w=s(cos$\beta$+isen$\beta$), pode-se afirmar que z.w é igual a

a) rs[cos($\alpha\beta$)-sen($\alpha\beta$)]

b) rs[cos($\alpha$+$\beta$)-isen($\alpha$+$\beta$)]

c) rs[cos($\alpha$-$\beta$)-isen($\alpha$-$\beta$)]

d) (r+s)(cos$\alpha$.cos$\beta$-isen$\alpha$sen$\beta$)

e) (r+s)[cos($\alpha$+$\beta$)+isen($\alpha$+$\beta$)]

19. (UFSM–PEIES/1998) A soma das raízes cúbicas do número complexo Z=8i é

a) –4i

b) $-2\sqrt{3}\,i$

c) 0

d) $2\sqrt{3}\,i$

e) 4i

20. (UFSM–PEIES/1999) Considere o número complexo $Z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Sua representação na forma trigonométrica é _____. O valor de $Z^6$ é igual a ____.

Assinale a alternativa que completa, corretamente, as lacunas.

a) $\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}$; -1.

b) $\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}$; 1.

c) $\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}$; -1.

d) $\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}$; -1.

e) $\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}$; i.

# POLINÔMIOS

## 10 DEFINIÇÃO

Chama-se polinômio toda função do tipo:

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_2x^2+a_1x+a_0,\ n\in N$

No polinômio P(x):

$\Rightarrow$ $a_1$, $a_2$, ... $a_n$ são os coeficientes.

$\Rightarrow$ $a_p.x^{n-p}$ é um terno do polinômio

$\Rightarrow$ O grau do polinômio é o maior expoente de x no polinômio.

**Exemplos:** $P(x)=7$ ou $P(x)=7x^0$ é um polinômio constante;

$P(x)=2x-1$ é um polinômio de 1º grau;

$P(x)=3x^5+ix^4$ é um polinômio de 5º grau.

## 11 VALOR NUMÉRICO

Valor numérico de um polinômio P(x), para x=a, é o número que se obtém substituindo-se x por a e efetuando-se todas as operações indicadas pela forma do polinômio.

**Exemplo:** Se $P(x)=x^3+2x^2-x-1$, o valor numérico de P(x), para x=2, é:

Resolução:

$P(x)=x^3+2x^2-x-1 \Rightarrow P(2)=2^3+2.2^2-2-1 \Rightarrow P(2)=8+8-2-1 \Rightarrow P(2)=13$

### 11.1 Raiz de um polinômio

Quando o valor numérico para P(x) resulta zero.

**Exemplos:** 1. $P(x)=x^2-7x+10$

$P(-3)=9+21+10=40\neq0$, não é raiz

$P(5) = 25-35+10=0$, logo 5 é raiz de P(x)

2. Sabendo-se que –2 e 3 são raízes de $P(x)=x^3+ax^2+b$, calcular os valores de a e b.

Resolução:

Como –2 e 3 são raízes de P(x), temos:

$P(-2)=0 \Rightarrow (-2)^3+-2a+b=0 \Rightarrow -2a+b=8$ (1)

$P(3)=0 \Rightarrow 3^3+3a+b=0 \Rightarrow 3a+b=-27$ (2)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (1) e (2), obtemos:

a= -7 e b= -6

## 12 GRAU DE UM POLINÔMIO

Dado um polinômio P(x), dizemos que o grau do polinômio é o maior expoente da variável x que apresenta coeficiente diferente de zero. Indicamos por **gr(P)** o grau do polinômio.

**<u>Exemplos:</u>** 1. $P(x)=x^5-3 \Rightarrow gr(P)=5$

2. $P(x)=3x^9+4x^3+x^2+x \Rightarrow gr(P)=9$

3. $P(x)=5x^2+2x+4 \Rightarrow gr(P)=2$

4. $P(x)=3 \Rightarrow gr(P)=0$

5. $P(x)=0.x^3+0.x^2+0x \Rightarrow$ não se define o grau

6. Calcular $m\in\Re$, para que o polinômio $P(x)=(m^2-1)x^3+(m+1)x^2-x+4$ seja:

a) do 3º grau; b) do 2º grau; c) do 1º grau.

Resolução:

Fazendo os coeficientes de $x^3$ e $x^2$ iguais a zero, temos:

$m^2-1=0$ $m+1=0$

$m= \pm 1$ $m= -1$

a) se $m\neq 1$ e $m\neq -1$, o polinômio é do 3º grau;

b) se m=1, o polinômio é do 2º grau;

c) se m= -1, o polinômio é do 1º grau.

## (10) Exercícios

1. Considere os polinômios $A(x)=x^2-x+1$; $B(x)= -2x^2+3$ e $C(x)=x^3-x+2$. Represente sob a forma de polinômio reduzido e dê o grau de:

a) A-2B+C b) $(A–B)^2 -3(C+B)$

2. Transforme num polinômio reduzido e ordenado segundo as potências decrescentes de x para cada um dos polinômios:

a) $P_1(x)=5x+1-[(x+1)^2 -x(3-x)^2]$

b) $P_2(x)=4(x-½)(1/4 –x)-2(2-x)^2$

3. Dado o polinômio $P(x)=2x^3-x^2+x+3$, calcular [P(2)-2P(-1)] / P(½).

4. Dados os polinômios $A(x)= x^3-x^2+x-1$ e $B(x)= -3x^2+x+2$, calcule:

a) A(½)-B(-1)

b) A(0)+B(1)

5. Sendo $P(x)=x^2-2x+1$, calcule:

a) P(i)

b) P(1+i)

c) P(2-i)

6. Sabendo que –3 é raiz de $P(x)=x^3+4x^2-ax+1$, calcule o valor de a.

7. Seja o polinômio $P(a+2)=2a^2 -3a+1$.

a) Calcule P(-1) e P(4).

b) Determine P(a).

## 13 IGUALDADE ENTRE POLINÔMIOS OU POLINÔMIOS IDÊNTICOS

Dois polinômios A(x) e B(x) são iguais (ou idênticos) quando assumem valores numéricos iguais para qualquer valor comum atribuído à variável x.

A condição necessária e suficiente para que dois polinômios A(x) e B(x) sejam iguais é que os coeficientes dos termos correspondentes sejam iguais.

$A(x) \equiv B(x) \Leftrightarrow A(\alpha)=B(\alpha), \forall \alpha \in$ complexos.

**<u>Exemplos:</u>** 1. Calcular a, b e c, sabendo que $x^2-2x+1 \equiv a(x^2+x+1)+(bx+c)(x+1)$.

Resolução:

Eliminando os parênteses e somando os termos semelhantes no 2º membro, temos:

$x^2-2x+1+ax^2+ax+a+bx^2+bx+cx+c$

$1x^2-2x+1=(a+b)x^2+(a+b+c)x+(a+c)$

Igualando-se os coeficientes correspondentes, vem:

$a+b=1 \quad \Rightarrow 1$

$a+b+c=-2 \quad \Rightarrow 2$

$a+c=1 \quad \Rightarrow 3$

Resolvendo o sistema, obtemos:

a=4, b=-3 e c=-3.

2. Sabendo-se que $\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-1} \equiv \frac{5x+10}{x^2+3x-4}$, calcular A e B.

Resolução:

Observamos que $(x+4)(x-1) \equiv x^2+3x-4$; portanto, temos:

$$\frac{A(x-1)+B(x+4)}{(x+4)(x-1)} \equiv \frac{5x+10}{x^2+3x-4} \Rightarrow \frac{Ax-A+Bx+4B}{(x+4)(x-1)} \equiv \frac{5x+10}{x^2+3x-4}$$

$$\frac{(A+B)x+(-A+4B)}{(x+4)(x-1)} \equiv \frac{5x+10}{x^2+3x-4}, \log o \begin{cases} A+B=5 \\ -A+4B=10 \end{cases}$$

Logo A=2 e B=-3.

3. Calcular o valor de a, para que o polinômio $P(x)=x^2+\frac{8}{3}x+a$ seja um “quadrado perfeito”.

Resolução:

Se P(x) é do 2º grau, ele deve ser identificado ao quadrado de um binômio de forma (mx+n), isto é:

P(x)≡(mx+n)$^2$ ⇒ $1x^2+\frac{8}{3}x+a=m^2x^2+2mnx+n^2$

Igualando-se os coeficientes, vem:

$$\begin{cases} m^2=1 \Rightarrow m=\pm 1 \\ 2mn=\frac{8}{3} \Rightarrow n=\pm\frac{4}{3} \\ n^2=a \end{cases}$$

Como $a=n^2 \Rightarrow n=\frac{16}{9}$.

**(11) Exercícios**

1. Determine m, n e p, de modo que $(mx^2+nx+p)(x+1)\equiv 2x^3+3x^2-2x-3$.

2. Sendo $x^3+1\equiv(x+1)(x^2+ax+b)$, para todo x real, determine os valores de a e b.

3. Calcule a, b e c pertencentes ao conjunto dos números reais de modo que para todo valor real de x se tenha $3x^2+ax+b=(x-b)^2+cx^2+x$.

4. Considere os polinômios $A(x)=x^2-3x+1$, $B(x)=(x+4)(2-5x)$ e $C(x)=mx^2+(n+4)x-2p$. Determine m, n e p de modo que A(x)+B(x)=C(x).

5. Determine A, B e C na decomposição $\frac{1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$.

6. Determine A,B e C, sabendo que $\frac{5-3x}{x^3-5x^2+6x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$.

## 14 POLINÔMIO IDENTICAMENTE NULO

Denomina-se polinômio identicamente nulo aquele cujos coeficientes são todos iguais a zero.

$$P(x)\equiv 0 \Leftrightarrow P(x)=0,\ \forall\ x.$$

**Obs:** Não se atribui grau a polinômio identicamente nulo.

**Exemplo:** Calcular a, b e c para os quais o polinômio $P(x)=(a+b)x^2+(a-b-4)x+(b+2c-6)$ seja identicamente nulo.

Resolução:

Se $P(x)=0$

$a+b=0 \Rightarrow (1)$

$a-b-4=0 \Rightarrow (2)$

$b+2c-6=0 \Rightarrow (3)$

De (1) e (2) vem:

$a+b=0$ e $a-b=4 \Rightarrow a=2$ e $b=-2$

Substituindo-se $b=-2$ na equação (3), vem:

$-2+2c+6=0 \Rightarrow c=4$.

**(12) Exercícios**

1. Calcule a, b, c e d, de modo que:

a) $(a-b-c+d)x^3+(2b-c)x^2+(c-d)x+4d-8=0$

b) $(a+b+c)x^3+(b-d)x^2+cx+d=0$

2. Dados $A(x)=(a+1)x^2+(b-1)x+c$ e $B(x)=ax^2+bx-3c$, calcule a, b e c, para que $A(x)+B(x)=0$.

**(13) Exercícios complementares**

1. Calcule os valores de a, b, c para os quais o polinômio $P(x)=(2a-1)x^3-(5b-2)x^2+(3-2c)$ seja identicamente nulo.

2. Dado o polinômio $P(x)=x^n+x^{n-1}+...+x^2+x+3$, se n for ímpar, então P(-1) vale:

a) –1 b) 0 c) 2 d) 1 e) 3

3. Se $\frac{x+1}{x^2+2x-24}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+6}$, então 2A+B é igual a:

a) –3/2 b) ½ c) 1 d) 3/2 e) -1

4. O polinômio $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ é idêntico a $Q(x)=5x^2-3x+4$. Então podemos dizer que a+b+c+d é igual a:

a) 6 b) 5 c)4 d) 0 e) 4

5. O polinômio $P(x)=2x^3+4x^2-4x+c$ é idêntico ao polinômio $Q(x)=(a+b)x^3+(c+2)x^2-ax+(a-2)$. Então a soma a+b+c é:

a) 8 b) 4 c) 0 d) 6 e) -2

6. A equação $6x^2-5x+m=0$ admite uma raiz igual a ½. O valor de m, na equação, é:

a) 1 b) –1 c) 3 d) 1/9 e) 1/3

## 15 OPERAÇÕES COM OS POLINÔMIOS

### 15.1 Soma e Subtração

Para somar ou subtrair dois ou mais polinômios, basta reunir os termos de mesmo graus.

**Exemplo:** $P_1(x)= 3x^4-2x+7$ e $P_2(x)=2x^3-x^4-x^2-3x-8$

Resolução:

$P_1(x)+P_2(x)=2x^4 +2x^3-x^2-5x-1$

### 15.2 Multiplicação

Para multiplicarmos 2 polinômios entre si, operamos de forma trivial, ou seja, todos os termos multiplicam-se entre si.

**Exemplo:** $A(x)=x^2-3x+8$ e $B(x)$ $x+5$

Resolução:

$A(x).B(X)= (x^2-3x+8)(x+5)=x^3+5x^2-3x^2-15x+8x+40=x^3+2x^2-7x+40.$

## 15.3 Divisão

Efetuar a divisão do polinômio A(x) pelo polinômio B(x), com B(x)≠0, é determinar dois polinômios Q(x) e R(x) que satisfazem as seguintes condições:

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

⇒ 1º) A(x)≡Q(x).B(x)+R(x)

⇒ gr(R)<gr(B) ou R(x)=0

onde A(x) é o dividendo, B(x) é o divisor, Q(x) é o quociente e R(x) é o resto da divisão.

### 15.3.1 Método da chave

Vejamos alguns exemplos de divisão de polinômios pelo método da chave.

Exemplos: 1. Determinar o quociente de $A(X)=X^3+4x^2+x-6$ por $B(x)=x+2$.

Resolução:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +4x^2 & +x & -6 & x+2 \\ \cline{5-5} -x^3 & -2x^2 & & & x^2+2x-3 \quad \Rightarrow \text{Quociente: } Q(x) \\ \cline{1-4} & 2x^2 & +x & -6 & \\ & -2x^2 & -4x & & \\ \cline{2-4} & & -3x & -6 & \\ & & +3x & +6 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \Rightarrow \text{Resto: } R(x) \end{array}$$

Verificamos, facilmente que:

$$\underbrace{x^3+4x^2+x-6}_{A(x)}\equiv\underbrace{(x+2)}_{B(x)}\underbrace{(x^2+2x-3)}_{Q(x)}$$

Logo o produto da divisão é $x^2+2x-3$.

2. Determinar o quociente de $A(x)=x^4+x^3-7x^2+9x-1$ por $B(x)=x^2+3x-2$.

Resolução:

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +x^3 & -7x^2 & +9x & -1 & X^2+3x-2 \\ \cline{6-6} -x^4 & -3x^3 & 2x^2 & & & X^2-2x+1 \quad \text{Quociente: } Q(x) \\ \cline{1-5} \end{array}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-2x^3$ | $-5x^2$ | $9x$ | $-1$ | |
| $+2x^3$ | $+6x^2$ | $-4x$ | | |
| | $X^2$ | $+5x$ | $-1$ | |
| | $X^2$ | $-3x$ | $+2$ | |
| | | $2x$ | $+1$ | $\Rightarrow$ Resto: R(x) |

Verificamos, facilmente que:

$$\underbrace{x^4+x^3-7x^2+9x-1}_{A(x)}\equiv\underbrace{(x^2+3x-2)}_{B(x)}\underbrace{(x^2-2x+1)}_{Q(x)}+\underbrace{(2x+1)}_{R(x)}$$

Logo o produto da divisão é $x^2-2x+1$.

Logo podemos concluir que:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x-a \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

$P(x)=(x-a).Q(x)+R(x)$

### 15.3.2 Método de Descarte ou método dos coeficientes a determinar

Baseado na identidade de polinômios, vamos estudar um novo método para determinar o quociente e o resto de uma divisão de polinômios.

**Exemplos:** Determinar o quociente e o resto da divisão de $A(x)=x^4+x^3-7x^2+9x-1$ por $B(x)=x^2+3x-2$.

Resolução:

O grau do quociente é dado por:

$gr(Q)=gr(A)-gr(B) \Rightarrow gr(Q)=4-2 \Rightarrow gr(Q)=2$

Se o quociente tem grau 2, ele é do 2º grau, logo:

$Q(x)=ax^2+bx+c$

O resto tem grau máximo igual a 1 [gr(R)<gr(B)], logo:

$R(x)=dx+e$

Aplicando a definição, temos:

$A(x)=B(x).Q(x)+R(x)$

$x^4+x^3-7x^2+9x-1\equiv(x^2+3x-2)(\ ax^2+bx+c)+(dx+e)$

$x^4+x^3-7x^2+9x-1\equiv ax^4+(b+3a)x^3+(c+3b-2a)x^2+(3c-2b+d)x+(-2c+e)$

Igualando-se os coeficientes, vem:

$a=1$

b+3a=1 $\Rightarrow$ b+3(1)=1 $\Rightarrow$ b=1-3 $\Rightarrow$ b= -2

c+3b-2a=-7 $\Rightarrow$ c+3(-2)-2(1)=7 $\Rightarrow$ c=1

3c-2b+d=9 $\Rightarrow$ 3(1)-2(-2)+d=9 $\Rightarrow$ d=2

-2c+e= -1 $\Rightarrow$ -2(1)+e= -1 $\Rightarrow$ e=1

Se:

Q(x)= $ax^2$+bx+c $\Rightarrow$ Q(x)= $x^2$-2x+1

R(x)=dx+e $\Rightarrow$ R(x)= 2x+1

**<u>(14) Exercícios</u>**

1. Determine o quociente e o resto da divisão de f(x)=$2x^3+x^2-x+2$ por g(x)=$x^2+3x+1$.

2. Ache Q(x) e R(x) na divisão de A(x)=$x^4-1$ por B(x)=x+1.

3. Determine $\alpha$ e $\beta$ para que seja exata a divisão de A(x)=$2x^3+\alpha x^2+\beta x-1$ por B(x)=$2x^2-x-1$.

## 16 DIVISÃO DE UM POLINÔMIO POR UM BINÔMIO DE 1º GRAU

O resto da divisão de um polinômio P(x) pelo binômio (ax+b) é igual a $P\left(-\frac{b}{a}\right)=R(x)$.

**<u>Demonstração:</u>**

$$\begin{array}{r|l} P(x) & ax+b \\ \cline{2-2} r & Q(x) \end{array}$$

Como o resto da divisão é independente de x, isto é, é igual a uma constante, chamaremos R(x) de r.

Sabemos que P(x)=(ax+b).Q(x)+r

Se x for igual à raiz do divisor, isto é, $x=\left(-\frac{b}{a}\right)$, vem:

$$P\left(-\frac{b}{a}\right)=\left(a.\frac{-b}{a}+b\right).Q(x)+r \Rightarrow P\left(-\frac{b}{a}\right)=(-b+b).Q\left(\frac{-b}{a}\right)+r$$

$$P\left(-\frac{b}{a}\right)=r$$

**<u>Exemplo:</u>** Calcular o resto da divisão de $P(x)=4x^2-2x+3$ por $B(x)=2x-1$.

Resolução:

$$P\left(-\frac{b}{a}\right)\Rightarrow P\left(\frac{1}{2}\right)$$

P(½)=r

P(½)=1-1+3=3

R(x)=3

**<u>(15) Exercícios</u>**

1. Calcule o resto da divisão de:

a) $x^2+5x-1$ por $x+1$

b) $x^4-x^2+4x$ por $x-2$

c) $x^5+2$ por $2x-1$

d) $6a^3+2a^2-a+3$ por $2a$

2. Dê o resto da divisão de $P(x)=x^3+7x^2-2x+1$ por:

a) x-3 b) x+3 c) 2x-5

**16.1 Dispositivo de Briott-Ruffini**

Vamos utilizar um dispositivo muito simples e prático para efetuar a divisão de um polinômio por um binômio de 1º grau da forma ax+b. Vejamos o roteiro da divisão abaixo..

$(3x^3-5x^2+x-2)\div(x-2)$

1º Colocamos a raiz do divisor e os coeficientes do dividendo (ordenadamente) no seguinte dispositivo.

Raiz do divisor Coeficientes do dividendo

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | -5 | 1 | -2 |
| | | | | |

Observação: Se o polinômio P(x) não tivesse o termo em $x^2$, o coeficiente desse termo seria igual a 0 (zero).

2º Repetimos (abaixando) o primeiro coeficiente do dividendo.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | -5 | 1 | -2 |
| | $\Downarrow$ | | | |
| | 3 | | | |

3º Multiplicamos a raiz do divisor pelo coeficiente repetido e somamos o produto com o segundo coeficiente do dividendo, colocando o resultado abaixo deste.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | -5 | 1 | -2 |
| | 3 | 1 | $\Rightarrow$2.3-5=1 | |

4º Multiplicaremos a raiz do divisor pelo número colocado abaixo do segundo coeficiente e somamos o produto com o 3º coeficiente, colocando o resultado abaixo deste, e assim sucessivamente.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | -5 | 1 | -2 |
| | 3 | 1 | 3 | $\Rightarrow$2.1+1=3 |

5º Separamos o último número formado, que é igual ao resto da divisão; os números que ficam à esquerda deste são os coeficientes do quociente.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | -5 | 1 | -2 |
| | 3 | 1 | 3 | 4 |
| | Coeficiente do quociente | | | Resto |

Portanto, $Q(x)=3x^2+x+3$ e $R(x)=4$.

Ou ainda $P(x)=(x-2)( 3x^2+x+3)+4$.

Logo conclui-se que $P(x)=(ax+b).Q(x)+R(x)$

Observação:

$\Rightarrow$ Na divisão por ax+b, o elemento $-b/a$ é chamado raiz do divisor.

$\Rightarrow$ No dispositivo de Briott-Ruffini o último elemento (coeficiente) já é o resto da divisão.

**16.2 Teorema do resto**

O resto da divisão de P(x) por x-a é P(a).

**<u>Demonstração:</u>**

Devemos ter $P(x) \equiv (x-a)Q(x)+R(x)$.

Como o divisor x-a é de grau 1, o resto será de grau0, ou seja, uma constante.

Fazendo R(x)=r, constante, temos:

$P(x) \equiv (x-a).Q(x)+r$

Para x=a, vem:

$P(a)=(a-a).Q(a) +r \Rightarrow P(a)=0.Q(x)+r \Rightarrow r=P(a)$.

**<u>Exemplos:</u>** 1. Utilizando o exemplo anterior sem aplicar o dispositivo de Briott-Ruffini qual é o resto da divisão $(3x^3-5x^2+x-2)\div(x-2)$.

Resolução:

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

$P(2)=R(X) \Rightarrow 3.(2)^3-5.(2)^2+2-2=4$

Logo o resto é 4.

2. Determinar k, de modo que o resto da divisão de $P(x)=x^3+3x^2-kx+4$ por (x-2) seja 10.

Resolução:

Pelo teorema do resto, devemos ter

P(2)=10, ou seja:

$(2)^3+3.(2)^2-k(2)+4=10 \Rightarrow 8+12-2k+4=10 \Rightarrow 24-2k=10 \Rightarrow k=7$

## (16) Exercícios

1. Determine o resto da divisão de:

a) $x^2+x+2$ por $x-1$

b) $5x^3+2x^2-x+4$ por $x$

c) $x^7-x^6$ por $x+1$

d) $x^6-x^4+x^2$ por $x+2$

2. Determine a de modo que:

a) $x^3+2ax^2-(a+1)x-990$ seja divisível por $(x-10)$;

b) $(a+3)x^2-x+2a$ seja divisível por $(x+2)$.

3. Determine o resto da divisão do polinômio $P(x)=x^8-5x^3+x^2-1$ por $x+\frac{1}{2}$.

4. Determine o valor de a, para que o resto da divisão do polinômio $P(x)=ax^3-2x+1$ por $x-3$ seja 4

5. O polinômio $P(x)=5x^3-4x^2+px+q$ é divisível por $x-2$, e $P(\frac{1}{2})=213/8$. Calcule p e q.

## 17 DECOMPOSIÇÃO DE UM POLINÔMIOS EM FATORES

1º Caso: O polinômio é do 2º grau.

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$

Onde $\alpha_1$ e $\alpha_2$ são as raízes da equação.

2º Caso: O polinômio é de 3º grau.

$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$

Onde $\alpha_1$, $\alpha_2$ e $\alpha_3$ são as raízes da equação.

3º Caso: Polinômios com grau $\geq$ a 4.

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$

Onde $\alpha_1$, $\alpha_2...\alpha_n$ são as raízes da equação

**Exemplo:** Transformar o polinômio $P(x)=x^4+2x^3-9x^2-2x+8$ num produto de fatores de 1º grau, sabendo-se que 2 e –1 são duas raízes do polinômio.

Resolução:

Utilizando o dispositivo de Briott-Ruffini, temos:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 | -9 | -2 | 8 |
| -1 | 1 | 4 | -1 | -4 | 0 |
| | 1 | 3 | -4 | 0 | |

Logo: $P(x)=(x-2)(x+1)(x^2+3x-4)$

As raízes de $Q(x)= x^2+3x-4$ são 1 e –4

Portanto $x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$

Substituindo-se, vem $P(x)=(x-2)(x+1)(x-1)(x+4)$.

**(17) Exercícios**

1. Escreva como um produto de fatores de 1º grau os seguintes polinômios:

a) $x^2-x-20$

b) $x^2+6x-7$

c) $x^2+13x+30$

d) $-x^2-10x-9$

2. Decompor em fatores do 1º grau:

a) $x^3-x$

b) $x^3-3x^2-10x$

3. Fatore o polinômio $P(x)=x^3+8x^2+4x-48$, sabendo que –4 é uma de suas raízes.

4. Decomponha $2x^3-6x^2-12x+16$ em fatores do 1º grau, sabendo que 1 é raiz do polinômio.

5. Decomponha o polinômio $P(x)=x^5-3x^4-5x^3+27x^2-32x+12$ num produto de fatores lineares, sabendo que 1 é uma raiz dupla e –3 é uma raiz simples.

## 18 MULTIPLICIDADE DE UMA RAIZ

Significa quantas vezes a raiz será a mesma no polinômio considerado.

Se duas, três ou mais raízes forem iguais, dizemos que são raízes duplas, triplas, etc.

**Exemplo:** Dê a multiplicidade da raiz 3 do polinômio $P(x)=x^4-7x^3+13x^2+3x-18$.

Resolução:

Aplicando-se o dispositivo de Briott-Ruffini, vem:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | -7 | 13 | 3 | -18 | |
| 3 | 1 | -4 | 1 | 6 | 0 | resto |
| 3 | 1 | -1 | -2 | 0 | resto | |
| | 1 | 2 | 4 | resto | | |

Na terceira aplicação da regra o resto é $4\neq0$; logo, 3 é raiz dupla do polinômio.

## 19 EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Toda equação algébrica $P(x)=0$, de grau $n(n\geq1)$, tem pelo menos uma raiz real ou complexa.

**Exemplos:** 1. Seja a equação algébrica $x(x-2)^4(x+1)^3=0$.

$\Rightarrow$ Quantas raízes tem a equação?

Resolução:

A equação tem 8 raízes, sendo:

$x=0 \Rightarrow$ raiz simples; $x=2\Rightarrow$ raiz quádrupla;

$x=-1 \Rightarrow$ raiz tripla.

$\Rightarrow$ Determinar o conjunto solução da equação;

Resolução:

$S=\{-1,0,2\}$

2. Sabendo-se que –1 é raiz dupla da equação $x^4-3x^3-3x^2+7x+6=0$, determinar o seu conjunto solução.

Resolução:

A equação dada pode ser indicada da seguinte forma:

$(x+1)^2.Q(x)=0$

Para determinarmos Q(x), que é do 2º grau, aplicaremos duas vezes o dispositivo de Briott-Ruffini, abaixando para 2º grau da equação dada.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 1 | -3 | -3 | 7 | 6 |
| -1 | 1 | -4 | 1 | 6 | 0 |
| | 1 | -5 | 6 | 0 | |

Coeficiente de Q(x)

Logo, $Q(x)=x^2-5x+6$.

As outras raízes soluções da equação são 2 e 3

Logo S={-1,2,3}

3. Sabendo que 2 é raiz da equação $x^3+2x^2-5x+c=0$. Determinar o conjunto solução.

Resolução:

Se x=2 é raiz, temos:

$2^3+2.2^2-5.2+c=0 \Rightarrow c=-6$

Aplicando Ruffini, obtemos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 | -5 | -6 |
| | 1 | 4 | +3 | 0 |

Logo o quociente é $x^2+4x+3$ que tem as raízes 3 e 1.

Portanto o conjunto solução é S={1,2,3}.

## (18) Exercícios

1. Resolva as equações:

a) $x^3+3x^2-x-3=0$

b) $x^3+2x^2+25x+50=0$

2. Utilizando a fatoração, resolva as equações polinomiais:

a) $x^3-4x^2+3x=0$

b) $x^3+2x^2+9x+18=0$

3. Sabendo que 2 é uma raiz simples da equação $x^3+2x^2-13x+10=0$, determine o seu conjunto solução.

4. Resolva a equação $x^3+5x^2-18x-72=0$ sabendo que –3 é uma de suas raízes.

5. Sabendo que 1 e 3 são raízes da equação $x^4-8x^3+24x^2-32x+15=0$, determine o seu conjunto solução.

6. Resolva a equação polinomial $x^4-7x^3+13x^2+3x-18=0$, sabendo que 3 é raiz dupla da equação.

## 20 RAÍZES COMPLEXAS

Considere o polinômio

$P(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$

**Teorema:** Se um número complexo (a+bi) é raiz da equação algébrica P(x)=0, de coeficientes reais, o complexo conjugado (a-bi) é também raiz da mesma equação.

**Exemplo:** Sendo 3+i uma raiz do polinômio $P(x)=x^4-9x^3+30x^2+42x+20$, encontre as outras raízes.

Resolução:

Pelo teorema das raízes o conjugado 3-i também é raiz.

Aplicando Briott-Ruffini para abaixar o grau da equação, vem:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3+i | 1 | -9 | 30 | -42 | 20 |
| 3–i | 1 | -6+i | +11-3i | -6+2i | 0 |
| | 1 | -3 | 2 | 0 | |

Coeficiente de Q(x)

$[x-(3+i)][x-(3-i)].Q(x)=0$

$[x-(3+i)][x-(3-i)].(x^2-3x+2)=0$

As outras raízes são determinadas fazendo Q(x)=0.

São 1 e 2

Logo o conjunto solução é $S=\{1,2,3+i,3-i\}$

## (19) Exercícios

1. Determine o conjunto solução da equação $x^4-x^3-11x^2-x-12=0$, sabendo que i é uma de suas raízes.

2. Determine o valor de m, para que a equação $x^4-3x^3+6x^2+mx+8=0$ tenha como uma de suas raízes 2i.

3. Resolva a equação $3x^3-7x^2+8x-2=0$, sabendo que uma de suas raízes é 1-i.

## (20) Exercícios complementares

1. Se $p(x)=3x^3-cx^2+4x+2c$ é divisível por x+1, então

a) c=-1/3  b) c=1/3  c) c=7  d) c=39  e) c=-7

2. O resto da divisão do polinômio $p(x)=2x^4-3x+1$ por $g(x)=2x-1$, é:

a) 4/5  b) –4/5  c) 3/8  d) –3/8  e) 2/5

3. Se o número 2 é raiz de multiplicidade 3 da equação $x^5-4x^4-3x^3+34x^2-52x+24=0$, então a soma das outras duas raízes vale

a) 4  b) 6  c) –2  d) 0  e) –6

4. A equação $3x^3+20x^2+11x-6=0$, admite uma raiz igual a –1. Então as outras raízes são:

a) –1/3 e 6 b) 1 e –3 c) –2 e 1 d) 1/3 e –6 e) n.d.a.

5. Resolva a equação $x^5+5x^4+6x^3-2x^2-7x-3=0$, sabendo que –1 é raiz tripla de equação.

6. Sabe-se que 5 é raiz da equação $x^3-5x^2+x+m=0$.

a) determine o valor de m.

b) Resolva a equação.

7. Resolva a equação polinomial $x^4-7x^3+13x^2+3x-18=0$, sabendo-se que 3 é raiz dupla da equação.

8. Resolva a equação $x^3+5x^2-18x-72=0$, sabendo que –3 é uma de suas raízes.

9. Sabendo que 1 e 3 são raízes da equação $x^4-8x^3+24x^2-32x+15=0$, determine o seu conjunto solução.

10. Determine k, de modo que 2 seja uma das raízes da equação $x^3+kx^2+20x-12=0$.

## 21 RAÍZES RACIONAIS

**Propriedade:** Se a fração racional p/q for raiz da equação algébrica de grau n e de coeficiente inteiros, $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0=0$, então p é um divisor de $a_0$ e q é um divisor de $a_n$.

**Exemplo:** Determinar o conjunto solução da equação $2x^3-7x^2+7x-2=0$.

Resolução:

Observando que a equação algébrica dada tem todos os coeficientes inteiros, temos:

p é um divisor de –2; logo: $p=\pm 1$ ou $p=\pm 2$

q é um divisor de 2; logo: $q=\pm 1$ ou $q=\pm 2$

Os possíveis valores das raízes racionais são dados pela razão p/q; logo:

$p/q \in \{-2, -1, -½, ½, 1, 2\}$

Fazendo a verificação de quais valores tornam a equação verdadeira, encontramos as raízes $x=1$, $x=2$ e $x=½$ .

Portanto $S=\{½, 1, 2\}$

**<u>(21) Exercícios</u>**

1. Resolva as equações:

a) $x^3-6x^2-x+30=0$

b) $2x^3-x^2-2x+1=0$

c) $4x^4-4x^3-3x^2+4x-1=0$

d) $x(x-4)^2+10x(x-2)-8=0$

2. Determine o conjunto solução da equação $x^4-3x^3+4x^2-2x=0$.

3. Resolva a equação $x^4-2x^3-7x^2+8x+12=0$.

4. Ache o conjunto solução da equação $x^3-7x+6=0$.

## 22 RELAÇÕES DE GIRARD

Neste item vamos mostrar as relações existentes entre os coeficientes de uma equação algébrica e as suas raízes.

Vejamos alguns casos:

1º Caso: Equação do 2º grau.

$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow ax^2+bx+c=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$

(com $a\neq 0$)

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$$
$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(\alpha_1+\alpha_2)x+\alpha_1\alpha_2$$

Igualando os coeficientes, obtemos:

$$\alpha_1+\alpha_2=-\frac{b}{a}$$
$$\alpha_1\alpha_2=\frac{c}{a}$$

2º Caso: Equação do 3º grau.

$ax^3+bx^2+cx+d=0 \Rightarrow ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$

(com $a\neq 0$)

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$$
$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=$$
$$=x^3-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x^2+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)x-\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

Igualando os coeficientes, obtemos:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-\frac{b}{a}$$
$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=\frac{c}{a}$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-\frac{d}{a}$$

**<u>Exemplos:</u>** 1. Resolver a equação $x^3-5x^2+7x-3=0$, sabendo que uma raiz é dupla.

Resolução:

Se uma raiz é dupla, vamos indicar as raízes por: a, a, b.

Pelas relações de Girard,

$$\begin{cases} a+a+b=5 \\ a.a+a.b+a.b=7 \\ a.a.b=3 \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} 2a+b=5 & \Rightarrow 1 \\ a^2+2ab=7 & \Rightarrow 2 \\ a^2b=3 & \Rightarrow 3 \end{array}$$

Da relação 1, temos:

$2a+b=5 \Rightarrow b=5-2a$

Substituindo na relação 2, temos:

$a^2+2ab=7 \Rightarrow a^2+2a(5-2a)=7 \Rightarrow a^2+10a-4a^2-7=0$

$a^2-10a+7=0$, onde a'=7/3 e a"=1

Vamos verificar qual dos valores de a é raiz da equação:

$P(7/3)=-44/9 \Rightarrow 7/3$ não é raiz de $P(x)$

$P(1)=0 \Rightarrow 1$ é raiz de $P(x)$.

Como 1 é raiz dupla de $P(x)$, podemos escrever:

$P(x)=(x-1)^2.Q(x)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -5 | 7 | -3 |
| 1 | 1 | -4 | 3 | 0 |
| | 1 | -3 | 0 | |

Então $Q(x)=x-3 \Rightarrow x=-3=0 \Rightarrow x=0$

Logo a solução é $S=\{1,3\}$

2. Seja a equação $x^3+x^2+kx+t=0$, onde k e t são coeficientes reais. Sabendo que o complexo 1-2i é uma das raízes dessa equação, determinar, o seu conjunto solução e os valores de k e t.

Resolução:

Se a equação tem coeficientes reais e 1-2i é raiz, 1+2i também o será. Supondo que as raízes sejam a=1+2i, b=1-2i e c, pelas relações de Girard, temos:

$a+b+c=-1 \Rightarrow 1+2i+1-2i+c=-1 \Rightarrow c=-3$

$ab+ac+bc=k \Rightarrow (1+2i)(1-2i)+(1+2i)(-3)+(1-2i)(-3)=k$

$(1+4)+(-6)=k \Rightarrow k=-1$

$abc=-t \Rightarrow (1+2i)(1-2i)(-3)=-t$

$(1+4)(-3)=-t$

$t=15$

$S=\{-3, 1-2i, 1+2i\}$

**(22) Exercícios**

1. Sabendo que a, b e c são raízes da equação $x^3-6x^2+11x-6=0$, calcular o valor de $\text{sen}\left(\frac{\pi}{a}+\frac{\pi}{b}+\frac{\pi}{c}\right)$.

2. Dada a equação polinomial $x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0$, de raízes a, b, c e d, calcule:

a) $a+b+c+d$

b) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$

**(23) Exercícios complementares**

1. A soma das raízes da equação $x^3+2x^2-x-2=0$ é:

a) –2 b) 2 c) 0 d) 3 e) n.d.a.

2. O valor de k para que a equação $kx^2-kx-k-1=0$ admita duas raízes iguais é:

a) 0 b) 2/5 c) –4/5 d) 4/5 e) 4

3. A soma dos inversos das raízes da equação $2x^3-5x^2+4x+6=0$ é:

a) 3/2 b) 2/3 c) 1/3 d) –2/3 e) –3/2

4. Sabendo que x=-1 é uma raiz de multiplicidade três da equação $x^5-x^4-x^3+13x^2+20x+8=0$, então a soma das demais raízes dessa equação é igual a:

a) 1 b) –5 c) 4 d) 3 e) 4+4i

5. A soma e o produto das raízes da equação $x^4-5x^3+4x-6=0$ formam que par de valores?

a) –5, 6 b) 5, -6 c) 3, 4 d) 1, 6 e) 4, 3

6. O produto de duas raízes da equação $2x^3-19x^2+37x-14=0$ é 1. A soma das duas maiores raízes da equação é:

a) 7 b) 8 c) 9 d) 19/2 e) n.r.a.

7. Se a soma das raízes da equação $kx^2+3x-4=0$ é 10, podemos afirmar que o produto das raízes é:

a) 40/3 b) –40/3 c) 80/3 d) –80/3 e) –3/10

8. (UFSM/1995) Uma solução da equação $ax^3+9x^2+9x+5=1995$ é $x=10$. Para que a equação $ax^4+5x^3+bx^2+3x+2=15432$ tenha também $x=10$ como uma das soluções, o valor de b é

a) –4 b) –2 c) 0 d) 2 e)4

9. (UFSM/1995) Considere os polinômios $P(x)=ax^2-3x$ e $Q(x)=x(b-x)$ onde a e b são números reais não nulos. Dividindo-se o polinômio P(x)+1 pelo polinômio Q(x+1), obtém-se, como resto dessa divisão, o polinômio R(x)=x+1, Nessas condições, pode-se afirmar que P(-1) vale

a) 2 b) 1 c) 0 d) –1 e) -2

10. (UFSM/1997) Sabendo-se que os restos das divisões do polinômio $x^2+ax+1$ por x-1 e x+2 são iguais entre si, então a vale

a) –2 b) –1 c) 0 d) 1 e) 2

11. (UFSM/1997) O gráfico representa uma função $f:\Re\rightarrow\Re$ em que f(x) é um polinômio do 3º grau. Para a equação f(x)=0,

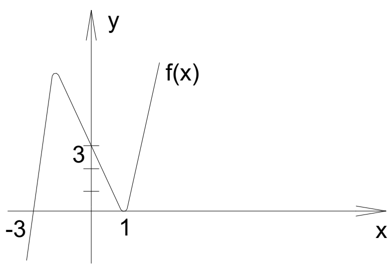
afirma-se o seguinte:

I – O termo independente é igual a 3.

II – As raízes são –3,3 e 1.

III – As raízes são –3,-3 e1.

IV – As raízes são –3, 1 e 1.




Está(ão) correta(s)

a) II apenas. b) III apenas.

c) I e II apenas. d) I e III apenas. e) I e IV apenas.

12. (UFSM/1998) Se $r_1$, $r_2$ e $r_3$ são raízes do polinômio $f(x)=x^3+5x^2+10x+1$, então o determinante da matriz $A=\begin{bmatrix} r_1 & 1 & 1 \\ 1 & r_2 & 1 \\ 1 & 1 & r_3 \end{bmatrix}$ é

a) 10 b) 6 c) 5 d) 2 e) 1

13. (UFSM/1999) Assinale verdadeiro (V) ou falsa (F) em cada uma das afirmações a seguir referentes ao polinômio $p(x)=a_nx^n+n_{a-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$, onde $n\geq 1$ e $a_0$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ são números reais.

( ) O polinômio p(x) é divisível por $(x-\alpha)$, se e somente se $p(\alpha)\neq 0$.

( ) O resto da divisão de p(x) por $(x-\alpha)$ é $p(\alpha)$.

( ) Se $z=a+bi$, com a, $b\in\Re$ e $b\neq 0$, é raiz da equação $p(x)=0$, então o conjugado de Z, $\bar{z}$ é também raiz da equação.

a) F – V – V.

b) F – F – V.

c) V – V – V.

d) F – V – F.

e) V – F – F.

14. (UFSM/1999) Sabendo que umas das raízes da equação $2x^3-3x^2-x+m=0$ é solução de $\text{sen}\frac{\pi\theta}{6}=1$, com $0\leq\theta\leq\pi$, então o produto das raízes da equação polinomial é

a) –½ b) 3/2 c) 12 d) 16 e) 24

15. (UFSM/2000) Uma das raízes da equação $x^4-4x^3+12x^2+4x-13=0$ é (2-3i). A soma de todas as raízes dessa equação é ____, o produto é ____ e a soma das raízes reais é ____.

Assinale a alternativa que completa corretamente as lacunas.

a) 4; -13; 0 b) 1; 12; 0 c) –13; 4; -4

d) 4; -13; 13 e) 0; 13;-12

16. (UFSM/2001) Se –1 e 5 são duas raízes da equação $x^3+ax^2+3x+b=0$, então a e b valem, respectivamente, ___ e ___ e a outra raiz da equação é ___.

Assinale a alternativa que completa corretamente as lacunas.

a) –6; -10; 2

b) –6; -10; -2

c) 6; -10; -2

d) 6; 10; -2

e) –6; 10; 2

17. (UFSM/2002) Sejam p(x) e g(x) dois polinômios com coeficientes reais e com grau p(x) > grau g(x). Ao dividir-se p(x) por g(x), obteve-se resto r(x)=2x-1,. Sabendo que 3 é raiz de g(x), pode-se afirmar que

I. $3 \leq \text{grau}\, g(x) < 5$

II. grau g(x)>1

III. p(3)=5

IV. p(x) não tem raízes inteiras

Está(ão) correta(s)

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III.

e) apenas IV.

18. (UFSM-PEIES/1998) Sabendo que –1 é raiz do polinômio $p(x)=x^3-4x^2+x+k$, k constante, então o produto das outras raízes é

a) 3. b) 4. c) 5. d) 6. e) 7.

19. (UFSM-PEIES/1998) Na divisão do polinômio $P(x)=2x^5+ax^4+4x^3+9x^2+3x+1$, pelo polinômio $Q(x)=bx^3+4x^2+1$ obtiveram-se o quociente $H(x)=x^2+2$ e o reto $R(x)=3x+c$, onde a, b e c são números reais. Então o valor de 1/5(a+b+c) é

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

20. (UFSM-PEIES/1999) O polinômio $P(x)=ax^3+4x^2+bx+c$ é tal que $P(0)=1$. Dividindo-se P(x) por $Q(x)=-4x^2+d$, obtém-se o quociente $H(x)=x-1$ e o resto $R(x)=x+3$. O valor de a+b+c+d é

a) –2. b) –1. c) 0. d) 1. e) 2.

21. (UFSM-PEIES/1999) Sendo i (unidade imaginária dos números complexos) uma das raízes do polinômio $P(x)=x^3-3x^2+x-3$, a soma dos quadrados das outras duas raízes é

a) 6. b) 7. c) 8. d) 9. e) 10.

22. (UFSM-PEIES/2000) O polinômio $p(x)=x^3+ax^2-4x+b$ é divisível por $q(x)=x^2-4$. Se $p(0)=4$ então sua decomposição em um produto de fatores do 1º grau é

a) $p(x)=(x+2)^2(x-1)$
b) $p(x)=( x-2)^2(x+1)$
c) $p(x)=( x-2)^2(x+2)$
d) $p(x)=(x+1)(x-2)(x+2)$
e) $p(x)=(x-1)(x-2)(x+2)$

23. (UFSM-PEIES/2000) A equação polinomial $x^5-2x^4-x+2=0$ possui
a) 3 raízes reais distintas e 2 raízes complexas conjugadas.
b) 2 raízes reais distintas e 2 raízes complexas conjugadas.
c) 5 raízes reais distintas.
d) 1 raiz real e 4 raízes complexas conjugadas duas a duas.
e) 2 raízes reais iguais e 3 raízes complexas.

24. (UFSM-PEIES/2001) A equação $ax^3+bx^2+8x+12=0$, sendo a e b números reais, admite a unidade imaginária i como raiz. Então a soma dos quadrados das três medidas é

a) 1
b) 17/4
c) 9/4
d) 0
e ¼

**GABARITO**

**(1)** 1. K= –5 2. a) m=9 ou m= –9
3. a) $x \in \Re$ e y=4 ou $x \in \Re$ e y = –4 b) x= –6 e y≠e e y≠ –4
4. m=5/4 e n=1 5. a) S={-5i, 5i} b) S={3-2i, 3+2i} c) S={½ -i, ½ +i}
6. a) x=1/3 b) x=0 ou x=5 c) x=2

**(2)** 1. a=2 e b= –4 2. a= –1 e b=6 3. x=2 e y=14 ou x= –2 e y=14

**(3)** 1. a) $Z = 6 - \sqrt{2}i$ b) $Z = -4 - 3i$ c) $Z = \sqrt{3} + \sqrt{5}i$
2. a) $Z = 4 - i$ b) $Z = \sqrt{3}i$ c) $Z = -\sqrt{10}i$

**(4)** 1. a) 8+4i b) 5+4i c) 25/6 d) 11-3i e) –5+5i f) 7+26i
g) (7/34)+(11/34)i h) 1-5i i) (3/13)+(2/13)i
2. a=5 e b=2 3. (4/5)+ i 4. a) –2+6i b) (29/2)–(15/2)i
5. – (2/3) + (8/9)i 6. m=5/2 e n=7/2 7. x=17/2 e y=36
8. a) 4–3i b) 20+15i c) –6+4i d) 2+36i 9. (1/5)–(7/5)i
10. –(3/5)+(1/5)i 11. 2i 12. a=14/29 e b= 23/29

**(5)** 1. a 2. c 3. b 4. a 5. e 6. b 7. b 8. c.

**(6)** 1. c 2. b 3. c 4. e 5. d.

**(7)** 1. a) $\sqrt{17}$ b) 5 c) $\sqrt{3}$ d) 8 2. a) 7π/4 b) π/3 c) π/2 d) 2π/3

**(8)** 1. a 2. 65 3. b 4. c 5. b 6. a 7. b
8. a) $Z = 8.(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ)$ b) $Z = 8.(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)$
c) $Z = 7\sqrt{2}.(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ)$ d) $Z = 2.(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ)$
e) $Z = 5.(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ)$ f) $Z = \sqrt{3}.(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$
9. a) $Z = \sqrt{2} - \sqrt{6}i$ b) $Z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ c) $Z = \sqrt{3} - i$ d) $Z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$
10. a) $Z = 1.(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ)$ b) $Z = \sqrt{2}.(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ)$

**(9)** 1. a 2. b 3. c 4. a 5. d 6. b 7. d 8. a 9. e
10. a 11. b 12. c 13. c 14. c 15. d 16. a 17. e
18. b 19. c 20. d.

**(10)** 1. a) $x^3+5x^2-2x-3$, grau 3 b) $9x^4-9x^3-5x^2+7x-11$, grau 4
2. a) $x^3-7x^2+12x$ b) $-6x^2+11x-(17/2)$ 3. 38/7 4. a) 11/8 b) -1
5. a) $-2i$ b) $-1$ c) $-2i$ 6. a= -10/3
7. a) P(-1)=28 e P(4)=3 b) $P(a)=2a^2-11a+15$

**(11)** 1. m=2, n=1 e p= -3 2. a= -1 e b=1
3. a=1, b=0 e c=2 ou a= -1, b=1 e c=2 4. m= -4, n= -25 e p= -9/2
5. a=1/3 b= -1/3 c= -2/3 6. a=5/6 b=½ c= -4/3

**(12)** 1. a) a=1, b=1, c=2 e d=2 b) a=b=c=d=0 2. a= -½ , b=½ e c=0.

**(13)** 1. a=½; b=2/5 e c=3/2. 2. c 3. d 4. a 5. b 6. a.

**(14)** 1. Q(x)=2x-5 e R(x)=12x+7 2. $Q(x)=x^3-x^2+x-1$ e R(x)=0 3. $\alpha=1$ e $\beta=-2$

**(15)** 1. a) –5 b) 20 c) 65/32 d) 3 2. a) 85 b) 43 c) 443/8

**(16)** 1. a) 4 b) 4 c) –2 d) 52 2. a) a=0 b) a= -7/3
3. –31/256 4. 1/3 5. P=-34 e q=44

**(17)** 1. a) (x+4)(x-5) b) (x-1)(x+7) c) (x+3)(x+10) d) (-x-1)(x+9)
2. a) x(x-1)(x+1) b) x(x+2)(x-5) 3. P(x)=(x+6)(x-2)(x+4)
4. 2(x-1)(x-4)(x+2) 5. $P(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x+3)$

**(18)** 1. a) S={-3, -1} b) S={-2, -5i, 5i} 2. a) S={0, 1, 3} b) S={-2, -3i, 3i}
3. S={-5, 1, 2} 4. S={-6, -3, 4} 5. S={1, 3, 2-i, 2+i} 6. S={-1, 2, 3}

**(19)** 1. {-3, 4, -i, i} 2. –12 3. {1/3, 1-i, 1+i}

**(20)** 1. c 2. d 3. c 4. d 5. {-3,-1,1} 6. m=-5 e {-5,-i,i}
7. {-1,2,3} 8. {-6,-3,4} 9. {1,3,2-i,2+i} 10. k=-9.

**(21)** 1. a) {-2, 3, 5} b) {-1, 1, ½} c) {-1, 1, ½} d) {-2,2} 2. {0, 1, 1+i, 1-i}
3. {-2, -1, 2, 3} 4. {-3, 1, 2}

**(22)** 1. –½ 2. a) –2 b) 7/12

**(23)** 1. a 2. c 3. d 4. c 5. b 6. c 7. a 8. e 9. d
10. d 11. e 12. b 13. a 14. c 15. a 16. e 17. d
18. d 19. a 20. e 21. c 22. e 23. a 24. e.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Currículo Básico do PEIES. Universidade Federal de Santa Maria. **Programa de Ingresso ao Ensino Superior.** V. 5, Santa Maria, 1999

DECISAÔ PRÉ-VESTIBULAR. **Matemática.** Polígrafo – Santa Maria [s.n.], 1997, não paginado.

ESCOLA ESTADUAL DE 2º GRAU CILON ROSA. **Números complexos e polinômios.** Polígrafo – Santa Maria [s.n.], 1995, 59 p.

GENTIL, N., SANTOS, C. A. M. dos, GRECO, A. C., GRECO, S. E., **Matemática para o 2º grau.** V. 3, Editora Ática, São Paulo, 1996.

GIOVANNI, J. R., BONJORNO, J. R. **Matemática.** V. 3, Editora FTD S.A., São Paulo, 1992.

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R. **Matemática.** Volume Único, Editora Atual, São Paulo, 2002.

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio.** V. 1, SBM, Rio de Janeiro, 2001.

SILVA, J. D., FERNANDES, V. dos S., MABELINI, O. D. **Matemática: Novo Ensino Médio – Volúme Único Curso Completo.** Sistema de Ensino IPEP, São Paulo, 2002.

TIZZIOTI, José Guilherme. **Matemática: programa completo: 2º grau, vestibular.** Ática, São Paulo, 1982.