UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
Colégio Técnico Industrial de Santa Maria

Caderno Didático 4

Resolução de Sistemas de Equações Lineares

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = \alpha \\ Dx + Ey + Fz = \beta \\ Gx + Hy + Iz = \lambda \end{cases}$$

Série: Matemática II

Por:
Professora Elisia L. Chiapinotto
Professor Mauricio R. Lutz

Abril de 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
Colégio Técnico Industrial de Santa Maria

Caderno Didático 4

Resolução de Sistemas de Equações Lineares

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = \alpha \\ Dx + Ey + Fz = \beta \\ Gx + Hy + Iz = \lambda \end{cases}$$

Série: Matemática II

Por:
Professora Elisia L. Chiapinotto
Professor Mauricio R. Lutz

Abril de 2020

C532c

Chiapinotto, Elisia L.

Caderno didático 4 : resolução de sistemas de equações lineares / por Elisia Lorenzoni Chiapinotto, Mauricio Ramos Lutz. – Santa Maria , 2003.
28 f. : il. (Série Matemática II)

1. Matemática 2. Equação linear 3. Sistemas lineares 4. Sistema linear homogêneo 5. Sistemas escalonados I. Lutz, Mauricio Ramos II. Título

CDU: 512.64

Ficha catalográfica elaborada por
Luiz Marchiotti Fernandes CRB 10/1160
Biblioteca Setorial do Centro de Ciências Rurais/UFSM

SUMÁRIO

1. DEFINIÇÃO

Consideremos uma equação da forma:

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+...+a_nx_n=b_1$$

onde a_1, a_2,a_3, ..., a_n e b são números conhecidos e x_1, x_2, x_3, ..., x_n são variáveis .

Uma equação desse tipo é chamada equação linear de n incógnitas sobre $\Re$.

Exemplos: 1. $5x_1=40$

2. $2x_1+x_2=12$

3. $x_1+x_2+x_3=15$

4. $3x_1-4x_2+x_3-5x_4=10$

Nomenclatura:

Coeficientes: são os números reais a_1, a_2,a_3, ..., a_n.

Termo independente: é o número real b_1.

Incógnitas: são os números reais x_1, x_2, x_3, ..., x_n.

Observação:

Não são lineares, por exemplo, as equações:

1. $2x^2+4y=3$, pois a incógnita x tem expoente 2. Nas equações lineares, o expoente de cada incógnita é sempre 1.

2. $2x+3\sqrt{y}-z=0$, pois a incógnita y tem expoente ½ .

3. $x-\frac{2}{y}=3$, pois a incógnita y tem expoente –1.

4. $2x-4xy+z=1$, pois existe um termo com o produto xy. Nas equações lineares, as incógnitas aparecem isoladamente em cada terno.

2. SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO LINEAR

Consideremos a equação linear de n incógnitas sobre $\Re$:

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+...+a_nx_n=b_1$$

Chama-se solução dessa equação a uma seqüência de n números reais (α_1, α_2, α_3, ..., α_n) tal que, substituindo-se respectivamente as incógnitas:

x_1 por α_1, x_2 por α_2, x_3 por α_3, ..., x_n por α_n

obtém-se a igualdade verdadeira:

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+...+a_n\alpha_n=b_1$$

Exemplos: 1. O par (5,3) é solução da equação:

$2x+4y=22$,

pois $2.5+4.3=22$.

2. A ordenada (1,2,0,3) não é a solução da equação:

$3x+2y-5z-t=32$,

pois $3.1+2.2-5.0-3=4\neq 32$.

3. EQUAÇÕES LINEARES

É toda a equação da forma $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+...+a_nx_n=b$, onde:

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n \rightarrow$ são os coeficientes;

$x_1, x_2, x_3, ..., x_n \rightarrow$ são as incógnitas

Exemplos: 1. $3x_1+5x_2=4$, equação linear de 2 incógnitas;

2. $3x+2y-z=1$, equação linear de 3 incógnitas;

3. $x+y+z-t=-1$, equação linear de 4 incógnitas.

Observações:

1. Observe que os expoente das incógnitas são iguais a um;

2. Quando o termo independente "b" for **igual a zero**, a equação linear denomina-se **equação linear homogênia**, por exemplo $5x-3y=0$;

3. Uma equação linear não apresenta termos da forma x^2, xy, $x^{½}$, ..., isto é, cada termo da equação linear tem uma incógnita, cujo **expoente é sempre 1**.

4. A solução de uma equação linear a_n incógnitas é a seqüência de números reais, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ que colocamos respectivamente no lugar de $x_1, x_2, x_3, ...x_n$, que tornam verdadeira a igualdade dada.

(1) Exercícios

1. Ache duas soluções de equação $-x_1+x_2=0$.

a) $x_1=-3$ b) $x_1=1$

2. Determine "m" para que (-1, 1, -2) seja solução da equação mx+y-2z=6.

3. Dada a equação $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ ache α para que $(\alpha, \alpha+1)$ torne a sentença verdadeira.

4. SISTEMAS LINEARES

4.1 Definição

Chama-se ***sistema linear*** a um conjunto formado por duas ou mais equações lineares.

Exemplos: 1. $SL_1 = \begin{cases} x-2y=4 \\ 3x+y=2 \end{cases}$ SL_1 é um sistema linear de duas equações e duas incógnitas.

2. $SL_2 = \begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$ SL_2 é um sistema linear de duas equações e três incógnitas.

3. $SL_3 = \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + 2y = 1 \\ 8x = 2y = 6 \end{cases}$ SL_3 é um sistema linear de três equações e duas incógnitas.

Um sistema linear de ***m*** equações (m ≥ 2) de n incógnitas (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) pode ser assim escrito:

$$SL = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad\qquad . \quad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad\qquad . \quad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad\qquad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Veja que, nesta notação, os coeficientes das incógnitas possuem dois índices: o primeiro representa a equação e o segundo representa a incógnita à qual o coeficiente pertence. Por exemplo:

- a_{23} representa, na 2º equação, o coeficiente de x_3.
- a_{32} representa, na 3º equação, o coeficiente de x_2.
- a_{41} representa, na 4º equação, o coeficiente de x_1.

4.2 Solução e conjunto solução de um sistema linear

Já sabemos em que condições uma seqüência de números reais (α_1, α_2, α_3, ..., α_n) é a solução de uma equação linear de n incógnitas.

Para que uma seqüência de números reais seja solução de um sistema linear de ***m*** equações a ***n*** incógnitas, ela deve ser, simultaneamente, solução de todas as ***m*** equações desse sistema.

Exemplos: 1. Considere este sistema linear: $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

Neste sistema de duas equações a duas incógnitas, toda solução é um par ordenado (pois são duas as incógnitas). Veja que o par ordenado (1, 2) é a solução do sistema, pois: $\begin{cases} 1+3.2=7 \\ 2.1+2=4 \end{cases}$.

2. Considere o sistema linear: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=0 \end{cases}$

Como agora temos três incógnitas, cada solução será uma terna ordenada de números. Veja que as ternas (3, 1, 2) e (3, 3, 0) são soluções do sistema, pois: $\begin{cases} 3+1+2=6 \\ 3-1-2=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3+3+0=6 \\ 3-3+0=0 \end{cases}$.

O ***conjunto solução*** de um ***sistema linear*** é o conjunto formado por todas as soluções desse sistema.

Se o conjunto ordenado de números reais (α_1, α_2, α_3, ..., α_n) satisfazer todas as equações do sistema, será denominado solução do sistema linear.

Observação: Se o termo independente de todas as equações do sistema for nulo, isto é, $b_1=b_2=...=b_n=0$ o sistema linear será dito homogêneo.

Exemplo: $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x+y-4z=0 \\ 5x+2y+3z=0 \end{cases}$

Uma solução evidente do sistema linear homogêneo é x=y=z=0. Esta solução chama-se solução trivial do sistema linear homogêneo. Outra solução, onde as incógnitas não são todas nulas, será chamada solução não trivial.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = 0 \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad\quad . \quad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad\quad . \quad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad\quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

- Solução trivial: $x_1=x_2=x_3=...=x_n=0$
- Solução não trivial: qualquer outra solução as incógnitas não são todas nulas.

(2) Exercícios

1. Seja o sistema $S = \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + z = 5 \\ -x + y + z = -2 \end{cases}$

a) Verifique se (2, -1, 1) é solução do sistema.

b) Verifique se (0, 0, 0) é a solução do sistema.

2. Seja o sistema $\begin{cases} 3x + y = k^2 - 9 \\ x - 2y = k + 3 \end{cases}$, calcule k para que o sistema seja homogêneo.

5. SISTEMAS LINEARES EQUIVALENTES

Se dois sistemas lineares S_1 e S_2 admitem a mesma solução, eles são ditos sistemas equivalentes.

Exemplo: Calcular m e n, de modo que sejam equivalentes os sistemas:

$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ e $\begin{cases} mx - ny = -1 \\ nx + my = 2 \end{cases}$

Resolução:

Cálculo do x e y:

$$\begin{array}{r} x - y = 1 \\ \underline{2x + y = 5} \\ 3x = 6 \\ x = 2 \end{array} \qquad x - y = 1 \Rightarrow 2 - y = 1 \Rightarrow y = 1$$

Substituindo-se x e y no segundo sistema, vem:

$$\begin{cases} 2m - n = -1 \\ 2n + m = 2.(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 2m - n = -1 \\ \underline{-2m - 4n = -4} \\ -5n = -5 \end{array} \Rightarrow n = 1$$

$$2m - n = -1 \Rightarrow 2m - 1 = -1 \Rightarrow 2m = 0 \Rightarrow m = 0$$

Portanto n=1 e m=0.

<u>(3) Exercícios</u>

1. Verifique se os sistemas $S_1 = \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$ e $S_2 = \begin{cases} -x + 5y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$ são equivalentes.

2. Determine a e b de modo que sejam equivalentes os sistemas:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} ax + by = 1 \\ bx - ay = 1 \end{cases}$$

6. EXPRESSÃO MATRICIAL DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Dentre suas variadas aplicações, as matrizes são utilizadas na resolução de um sistema de equações lineares. Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad\qquad . \qquad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad\qquad . \qquad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad\qquad . \qquad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Utilizando matrizes, podemos representar este sistema da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

(1) (2) (3)

(1) $\rightarrow$ matriz constituída pelos coeficientes das incógnitas;

(2) $\rightarrow$ matriz coluna constituída pelas incógnitas;

(3) $\rightarrow$ matriz coluna dos termos independentes.

<u>Exemplo:</u> Represente o seguinte sistema na forma matricial: $\begin{cases} 2x + 5y - z = 0 \\ 4x - 3y + 6z = -1 \\ 7x + y - 2z = 8 \end{cases}$

Resolução:

Ele pode ser representado por meio de matrizes da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 6 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Observe que se efetuarmos a multiplicação iremos obter o sistema dado.

<u>Observação:</u>

Seja o sistema $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = -2 \end{cases}$

1. *Matriz completa:* é a matriz formada pelos coeficientes das incógnitas e pelos termos independentes.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. *Matriz incompleta:* é a matriz formada pelos coeficientes das incógnitas.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. *Matriz das incógnitas:* é a matriz coluna formada pelas incógnitas do sistema.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

4. *Matriz dos termos independentes:* é a matriz coluna formada pelos termos independentes do sistema.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(4) Exercícios

1. Expresse matricialmente os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2a + b + c = -1 \\ a + c = 0 \\ -3a + 5b - c = 2 \end{cases}$

2. A expressão matricial de um sistema S é $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$, determine as equações de S.

3. Dados os sistemas, obtenha as matrizes completas associadas:

a) $\begin{cases} y = -3x \\ 2y - 3x = 18 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 8y = 14 + 6z \\ x + y = 4 \\ 2x = 6 - 3y + 2z \\ x - 2z = 3 - 2y \end{cases}$

4. Dadas as matrizes completas, escrever os sistemas a elas associados:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

7 SISTEMA LINEAR NORMAL

É um sistema linear de **n** equações e **n** incógnitas em que o determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas é diferente de zero.

Considere os seguintes sistemas:

a) $S_1 = \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$, S_1 é um sistema normal, pois $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

b) $S_2 = \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + y - 3z = 5 \end{cases}$, S_2 não é um sistema normal, porque o número de equações é diferente do número de incógnitas.

c) $S_3 = \begin{cases} x + 2y + 4z = 5 \\ x + 2y - 7z = 1 \\ x + 2y + \frac{1}{2}z = 3 \end{cases}$, S_3 não é um sistema normal pois $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$.

<u>Resumo:</u> $Sist.\ Linear\ Normal = \begin{cases} n^o\ equações = n^o\ incógnitas \\ \Delta\ matriz\ coef.\ das\ incógnitas \neq 0 \end{cases}$

<u>(5) Exercícios</u>

1. Verifique se os sistemas abaixo são normais:

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \\ x - y + 2z = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 8 \\ x + y - z = 0 \\ 3x + 4y = 9 \end{cases}$

2. Determine os valores de k ($k \in \Re$), para que os sistemas sejam normais:

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ kx + 2y + 3z = 7 \\ k^2x + 4y + 9z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (k-1)x + 4y = 2k \\ (k+1)x - 2y = 1 + 3k \end{cases}$

8 REGRA DE CRAMER

A Regra de Cramer consiste num método para se resolver um sistema linear normal. Consideremos o sistema de “n” equações lineares a “n” incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad \ldots \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Consideremos os seguintes determinantes, cujas matrizes são formadas com os coeficientes do sistema dado:

a) Determinantes dos coeficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

b) Determinantes das incógnitas:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Δx_1 é o determinante obtido de Δ, substituindo-se a coluna dos coeficientes x_1 pela coluna dos temos independentes.

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & b_n & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Δx_2 é o determinante obtido de Δ, substituindo-se a coluna dos coeficientes x_2 pela coluna dos temos independentes.

E assim sucessivamente, até Δx_n

$$\Delta x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Para obtermos sua solução, calculamos:

1º) (Δ) determinante da matriz formada pelos coeficientes das variáveis do sistema.

2º) (Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n) determinantes das matrizes obtidas a partir de Δ, substituindo a coluna dos coeficientes pela coluna dos termos independentes do sistema.

3º) A solução do sistema linear é dada por:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta} \; .$$

<u>Exemplo:</u> Encontrar a solução do sistema $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$.

Resolução:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -7 \qquad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -21 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-21}{-7} = 3$$

S={(1,3)}

<u>(6) Exercícios</u>

1. Resolva os sistemas a seguir, utilizando a regra de cramer.

a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2a - b + c = 3 \\ a - b + 2c = 3 \\ a + b + c = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - y - 4z = 3 \\ -x + 3y + z = -10 \\ 3x + 2y - 2z = -2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y - 10 = 0 \\ x - z - 5 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases}$

9 DISCUSSÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Seja o sistema linear de “n” equações a “n” incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad\quad . \quad\quad \ldots \quad\quad . \quad\quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Discutir o sistema é saber se ele é possível, impossível ou indeterminado.

Utilizando a Regra de Cramer, temos:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta} .$$

$\Rightarrow$ Sistema possível ou compatível (quando admite solução):

- Sistema possível determinado (admite uma única solução), $\Delta \neq 0$.
- Sistema possível e indeterminado (admite infinitas soluções), $\Delta = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n = 0$.

$\Rightarrow$ Sistema impossível ou incompatível (quando não admite soluções), $\Delta = 0$ e pelo menos um dos $\Delta x_n \neq 0$.

<u>Exemplos:</u> 1. Encontrar a solução do sistema $\begin{cases} 3x + my = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

Resolução:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & m \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - m, \ \Delta x = \begin{vmatrix} 2 & m \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - m, \ \Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Discussão:

$\Delta \neq 0$:

$\Rightarrow$ S.P.D.: $\Delta \neq 0$, -3-m$\neq$0, m$\neq$-3.

$\Rightarrow$ S. P. I.: Não existe m, pois $\Delta y \neq 0$

$\Delta = 0$

$\Rightarrow$ S.I: $\Delta = 0$, m=-3 e $\Delta y \neq 0$.

2. Determine m, de modo que o sistema $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + my + z = 0 \\ -x + y - z = 4 \end{cases}$ seja impossível ou incompatível.

Resolução:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -m - 1 \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2m - 6$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -4 \qquad \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & m & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6m + 6$$

Fazendo $\Delta = 0 \Rightarrow$ -m-1=0 $\Rightarrow$ m=-1.

$\Delta x = 0 \Rightarrow$ 2m-6=0 $\Rightarrow$ m=-3.

$\Delta z = 0 \Rightarrow$ 6m+6=0 $\Rightarrow$ m=-1.

Sendo $\Delta y = -4 \neq 0$ quando $\Delta = 0$ ou seja m=-1; o sistema é impossível, pois para m=-1 teremos: $x = \frac{-4}{0}$ (impossível), $y = \frac{-4}{0}$ (impossível) e $z = \frac{0}{0}$ (indeterminado)

3. Discuta e resolva o sistema $\begin{cases} x + 3y - 6z = 2 \\ -2x - y + 2z = 1 \\ 3x + 2y - 4z = -1 \end{cases}$.

Resolução:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Se Δ=0, o sistema pode ser: S.P.I.? ou S.I.?

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0,\ \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0,\ \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Sendo Δ=Δx=Δy=Δz=0, logo o sistema é S.P.I.. Vamos agora descobrir a sua solução geral. Fazendo z=k e usando as duas primeiras equações, vamos obter um sistema 2x2 de incógnitas x e y, onde Δ≠0.

$$\begin{cases} x + 3y - 6k = 2 \\ -2x - y + 2k = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 2 + 6k \\ -2x - y = 1 - 2k \end{cases}$$

Temos: *Δ=5, Δx=-5, Δy=10k+5*

$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1$ e $y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{10k+5}{5} = 2k+1$

Portando a solução geral é {(-1, 2k+1,k)}.

(7) Exercícios

1. Classifique e resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ x + y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$

2. Discuta os sistemas:

a) $\begin{cases} mx + y = 2 \\ x - y = m \end{cases}$ b) $\begin{cases} kx + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

3. Determine k para que o sistema indicado seja determinado:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - 2y = k \\ x + ky = 5 \end{cases}$$

4. Calcule os valores de a para que o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ ax - 4y = 0 \end{cases}$ seja compatível e determinado.

5. Determine a e b para que o sistema $\begin{cases} 6x + ay = 12 \\ 4x + 4y = b \end{cases}$ seja indeterminado.

6. Discutir e resolver o sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + 5z = 2 \\ 4x + 3y + 7z = 3 \end{cases}$.

10 DISCUSSÃO DE UM SISTEMA LINEAR HOMOGÊNEO

Como já vimos, um sistema linear homogêneo é formado por equações cujos termos independentes são todos nulos.

Todo o sistema linear homogêneo é sempre possível pois admite a solução (0, 0, 0), chamada solução trivial.

Observe que para um sistema homogêneo teremos sempre $\Delta x_1=0$, $\Delta x_2=0$, ..., $\Delta x_n=0$ (pois sempre uma coluna será toda zero, logo, pela propriedade, o determinante é nulo). Portanto, para a discussão de um sistema linear homogêneo é suficiente o estudo do determinantes das incógnitas.

$\Rightarrow$ Sistema possível determinado, $\Delta \neq 0$ (o sistema admite a solução trivial e sem soluções próprias).

$\Rightarrow$ Sistema possível e indeterminado, $\Delta=0$ (o sistema admite a solução trivial e soluções próprias).

<u>Exemplos:</u> 1. Verifique se o sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ é determinado ($\Delta \neq 0$) ou indeterminado ($\Delta=0$).

Resolução:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

S.P.D, como $\Delta \neq 0$, o sistema é determinado.

2. Calcule o valor de m para que o sistema $\begin{cases} -x+y-z=0 \\ x-y+mz=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ tenha somente a solução trivial.

Resolução:

Para que o sistema tenha somente a solução trivial, isto é, seja determinado, é necessário que $\Delta \neq 0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 = m - 1 - 1 + m + 1 = 2m - 2$$

$$\Delta = 2m - 2 \neq 0 \quad \Rightarrow m \neq 1$$

$$S = \{m \in \Re / m \neq 1\}.$$

3. Calcule o valor de a para que o sistema $\begin{cases} ax+y=0 \\ ax+ay=0 \end{cases}$ tenha soluções diferentes da trivial.

Resolução:

Para ter soluções diferentes da trivial o sistema tem que ser possível e indeterminado, isto é, $\Delta=0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & a \end{vmatrix} = a^2 - a = a(a-1)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

Portanto {0,1}.

(8) Exercícios

1. Classifique, quanto ao número de soluções, os seguintes sistemas homogêneos.

a) $\begin{cases} 3x-4y=0 \\ -6x+8y=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+2y+4z=0 \\ x+y+3z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x-y-3z=0 \\ x+4y=0 \end{cases}$

2. Determine m para que o sistema $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 4y - 5z = 0 \\ 3x + my + 2z = 0 \end{cases}$ tenha soluções próprias.

3. Calcule o valor de λ, para que o sistema $\begin{cases} x + y - \lambda z = 0 \\ x + \lambda y - z = 0 \\ x + (\lambda + 1)y + z = 0 \end{cases}$ admita soluções distintas de (0, 0, 0).

4. Qual deve ser o valor de k para que o sistema $\begin{cases} 3x + 5z = 2y \\ x - y = -3z \\ x + kz = 0 \end{cases}$ admita somente a solução nula?

5. Classifique e resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \\ x - 14z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ 6x - 9y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + y + 5z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \end{cases}$

11 SISTEMAS ESCALONADOS

11.1 Definição

Um sistema linear se diz escalonado (em forma de escada) se o número e coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, aumentar de equação a equação, de cima para baixo, até que restem, eventualmente, no final, equações com todos os coeficientes das incógnitas nulos.

<u>**Exemplos:**</u>

1. $S_1 = \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 0x + y + 2z = 5 \\ 0x + 0y + z = 1 \end{cases}$ 2. $S_2 = \begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ 0x + y + z + 2t = 5 \\ 0x + 0y + 2z + 3t = 8 \\ 0x = 0y + 0z + 5t = 5 \end{cases}$

11.2 Método da eliminação gaussiana

Consiste em substituir o sistema dados por outro que lhe seja equivalente e mais simples, chamado sistema escalonado. Este método é também chamado de *método de escalonamento parcial*.

Exemplos:

1. $S_1 = \begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ \quad 2y + z = 3 \\ \quad\quad 2z = 2 \end{cases}$ 2. $S_2 = \begin{cases} x + 2y - z + t = 6 \\ \quad y + z - 2t = 1 \\ \quad\quad 2z + t = 2 \\ \quad\quad\quad t = 3 \end{cases}$

Procedimentos para escalonar um sistema:

1. Fixamos como primeira equação uma das que possua o coeficiente da primeira variável diferente de zero;

2. Utilizando as operações elementares, anulamos todos os coeficientes da primeira variável das demais equações;

3. Anulamos todos os coeficientes da segunda variável a partir da terceira equação;

4. Repetimos o processo com as demais variáveis, até que o sistema se torne escalonado,

Exemplos: 1. Resolver o sistema $\begin{cases} 3x + 6y + 6z = 54 \\ 6x + 5y + 4z = 47 \\ 2x + 7y + 5z = 50 \end{cases}$.

Resolução:

$$\begin{cases} 3x + 6y + 6z = 54 \\ 6x + 5y + 4z = 47 \\ 2x + 7y + 5z = 50 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 6 & 54 \\ 6 & 5 & 4 & 47 \\ 2 & 7 & 5 & 50 \end{array}\right]$$

1º) Multiplicar a primeira equação por (-2) e adicionar com a segunda equação, substituindo nesta:

$$\begin{cases} 3x+6y+6z=54 \\ 0x-7y-8z=-61 \\ 2x+7y+5z=50 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 6 & 6 & 54 \\ 0 & -7 & -8 & -61 \\ 2 & 7 & 5 & 50 \end{array}\right]$$

2º) Multiplicar a primeira equação por (-2/3) e adicionar com a terceira equação, substituindo nesta:

$$\begin{cases} 3x+6y+6z=54 \\ 0x-7y-8z=-61 \\ 0x+3y+z=14 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 6 & 6 & 54 \\ 0 & -7 & -8 & -61 \\ 0 & 3 & 1 & 14 \end{array}\right]$$

3º Multiplicar a segunda equação por (3/7) e adicionar com a terceira equação, substituindo nesta:

$$\begin{cases} 3x+6y+6z=54 \\ 0x-7y-8z=-61 \\ 0x+0y-{}^{17}\!/_{7}\,z=-{}^{86}\!/_{7} \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 6 & 6 & 54 \\ 0 & -7 & -8 & -61 \\ 0 & 0 & -17/7 & -85/7 \end{array}\right]$$

O sistema escalonado é:

$$\begin{cases} 3x+6y+6z=54 \quad (I) \\ \quad -7y-8z=-61 \quad (II) \\ \qquad -{}^{17}\!/_{7}\,z=-{}^{86}\!/_{7} \ (III) \end{cases}$$

De *(III)*, obtemos $z=5$. Substituindo $z=5$ em *(II)*, obtemos $y=3$ e substituindo esses valores em *(I)*, teremos $x=2$.

Portando a solução do sistema é S={(2, 3, 5)}.

2. Resolver o sistema $\begin{cases} x+2y+4z=5 \\ 2x-y+2z=8 \\ 3x-3y-z=7 \end{cases}$.

Resolução:

1	2	4	5	
2	-1	2	8	$L_2 \Rightarrow -2L_1 + L_2$
3	-3	-1	7	$L_3 \Rightarrow -3L_1 + L_3$
1	2	4	5	
0	-5	-6	-2	$L_2 \Rightarrow (-1/5)L_2$
0	-9	-13	-8	
1	2	4	5	
0	1	-6/5	-2/5	
0	-9	-13	-8	$L_3 \Rightarrow 9L_2 + L_3$
1	2	4	5	
0	1	-6/5	-2/5	
0	0	-11/5	-22/5	

$$\begin{cases} x + 2y + 4z \\ \quad 1\text{y - }6/5\text{z} = \text{-}2/5 \\ \quad\quad \text{- }11/5\text{z} = \text{-}22/5 \end{cases}$$

Logo $z = 2$. Substituindo z na 2º equação, obtemos $y = -2$, e substituindo os valores anteriores na 1º equação obteremos $x = 1$.

Portanto S={(1, -2, 2)}.

(9) Exercícios

1. Escalone e resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} -x + y - 2z = -9 \\ 2x + y + z = 6 \\ -2x - 2y + z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ x - 2y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -x - 4y - 3z = 2 \\ 3x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 2x - 4y + z = 16 \\ -x + 5y + 3z = -10 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 3 \\ y + z = 2 \end{cases}$

2. Resolva, através do escalonamento, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 5 \\ -2x + 5y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 0 \\ -2x + 3y = 4 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \\ 5x + y = 22 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x+3y-z=1 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x-y+3z=-1 \\ x+y-z=2 \\ 3x+2z=1 \\ 5x+2y=5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \\ 2x+3y=-7 \end{cases}$

(10) Exercícios complementares

1. (UFSM – Vestibular/1996) Dado o sistema de equações lineares $\begin{cases} x+y+z=\beta \\ x-y+\alpha z=1 \\ x-y-z=-1 \end{cases}$ com $\alpha, \beta \in \Re$, então,

a) se $\alpha \neq -1$, o sistema é possível e determinado.

b) se $\alpha=-1$ e $\beta \neq 1$, o sistema é possível e determinado.

c) se $\alpha \neq -1$, o sistema é impossível.

d) se $\alpha \neq -1$ e $\beta=1$, o sistema é possível e indeterminado.

e) se $\alpha=-1$ e $\beta=1$, o sistema é possível e determinado.

2. (UFSM – Vestibular/1998) Sejam a e b números reais tais que o sistema $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 3x-6y+2z-t=a \\ -2x+4y-z+t=3 \\ z+t=b \end{cases}$ admita solução. Então o valor de a e o valor de b devem ser, respectivamente,

a) –2 e 8 b) 8 e 5 c) 5 e 8 d) 5 e –2 e) –2 e 5

3. (UFSM – Vestibular/1999) Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x-y-z+t=0 \\ 2x-2z+t=0 \\ 3x-3y+z=0 \\ -x+y+5z-4t=0 \end{cases}$$

então, pode-se afirmar que o sistema é

a) impossível.

b) possível e determinado.

c) possível e qualquer solução (x, y, z, t) é tal que os números x, y, z, formam, nesta ordem, uma progressão aritmética.

d) possível e qualquer solução (x, y, z, t) é tal que os números x, y, z, formam, nesta ordem, uma progressão geométrica.

e) possível, porém não admite a solução nula.

4. (UFSM – Vestibular/2000) Dado o sistema $\begin{cases} x+y+z+t=2 \\ x+y+z=0 \\ x+y+t=1 \\ x+z+t=2 \end{cases}$ os valores de x, y, z e t, nesta ordem, que satisfazem o sistema,

a) formam uma P.G. crescente.

b) formam uma P.G. decrescente.

c) formam uma P.A. decrescente.

d) formam uma P.A. crescente.

e) são todos iguais.

5. (UFSM – Vestibular/2003) Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x+y+4\alpha z=4 \\ x+(1-\alpha)y+z=2 \\ 2x+y+5\alpha z=7 \end{cases}$$

Então pode-se afirmar que

a) existem exatamente dois valores reais de α para os quais o sistema não tem solução.

b) existe um único valor real de α para o qual o sistema admite infinitas soluções.

c) o sistema não tem solução para todo $\alpha \in \Re$.

d) o sistema não tem solução para $\alpha = ½$.

e) o sistema admite solução para todo $\alpha \neq ½$.

6. (UFSM – PEIES/1996) Considere as afirmativas referentes ao sistema $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 3x+0y+2z=0 \\ 0x+y+(k+1)z=-2 \end{cases}$ onde x, y, z, k$\in\Re$, indicando se são verdadeiras (V) ou falsas (F).

( ) Se k≠1/3, o sistema é possível e determinado.

( ) Se k=1/3, o sistema é impossível.

( ) Se k=1/3, o sistema é possível e indeterminado.

A seqüência correta é

a) V – F – V.

b) F – V – F.

c) V – V – F.

d) V – F – F.

e) F – F – V.

7. (UFSM – PEIES/1997) O valor da expressão $A=(2x-y).\sqrt{z}$, onde x, y e z são soluções do sistema $\begin{cases} 2x+y+3z=1 \\ 4x+2y-6z=-2 \\ 6x+6y+6z=-1 \end{cases}$ é

a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ b) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) 0 d) $\frac{2}{3}$ e) $-\frac{2}{3}$

8. (UFSM – PEIES/1998) assinale V nas afirmativas verdadeiras e F nas falsas, com referência ao sistema linear

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$, com a≠0.

( ) $\det\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}=2-a-\frac{1}{a}$.

( ) Se $a+\frac{1}{a}=2$, então o sistema é possível e indeterminado.

( ) Se $a+\frac{1}{a}\neq 2$, então o sistema é impossível.

A seqüência correta é

a) V – F – V. b) F – V – F. c) F – V – V.

d) V – F – F. e) V – V – F.

9. (UFSM – PEIES/ 2000) O sistema linear $\begin{cases} -x+y+z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x+3y-2z=2 \\ 3x+y-2z=5 \end{cases}$

a) é possível e determinado.

b) é possível e indeterminado.

c) é impossível.

d) tem a soma de suas soluções igual a 2.

e) tem o produto de suas soluções igual a 3.

10. (UFSM – PEIES/2001) Considere o sistema linear $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2y-3z=4 \\ 4y+az=b \end{cases}$ onde a e b são números reais.

Assinale V nas afirmações verdadeiras e F nas falsas.

( ) Se a=-6, o sistema é impossível qualquer que seja b.

( ) Se b≠8, o sistema tem infinitas soluções qualquer que seja a.

( ) Se a≠-6, o sistema é possível e determinado qualquer que seja b.

A seqüência correta é

a) V – V – F. b) V – V – V. c) V – F – V.

d) F – F – V. e) F – V – F.

GABARITOS

(1) 1. a) x_2= -3 b) x_2= 1 2. m= -1 3. $\alpha = \frac{4}{5}$.

(2) 1. a) é solução b) não é solução 2. K= -3

(3) 1. São equivalente 2. b=1; a=0

(4) 1. a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} 2a - 5b = -4 \\ 3a + b = 7 \end{cases}$ 3. a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 18 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -6 & 14 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

4. a) $\begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ 9x + 3y + 3z = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x = 2 \\ 3x + y = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

(5) 1. a) É SLN b) Não é SLN

2. a) $S = \{k \in \Re \,/\, k \neq 2 \text{ e } k \neq 3\}$ b) $S = \left\{k \in \Re \,/\, k \neq -\frac{1}{3}\right\}$

(6) 1. a) $S = \{(1,2)\}$ b) $S = \{(3,2)\}$ c) $S = \{(1,2,3)\}$ d) $S = \left\{\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)\right\}$

e) $S = \{(2-3,1)\}$ f) $S = \{(6,4,1)\}$

(7) 1. a) S.P.D.; $S = \{(1,2)\}$ b) S.P.I.; $S = \{(4-k, k)\}$ c) S.I.

2. a) S.P.D. se m$\neq$ -1 e S.I. se m= -1 b) S.P.D. se m$\neq$ -1 e S.I. se m= -1

3. k=1 ou k=15 4. a$\neq$ -6 5. a=6 e b=8 6. S.P.I.; $S = \{(-k, 1-k, k)\}$

(8) 1. a) S.P.I. b) S.P.I. c) S.P.D. 2. m= $\frac{3}{13}$ 3. λ=1

4. k$\neq$ -1 5. a) $S=\{(14k,-9k,k)\}$ b) $S=\left\{\left(\frac{3k}{2},k\right)\right\}$ c) $S=\{(-k,-2k,k)\}$

(9) 1. a) $S=\{(2,-1,3)\}$ b) $S=\left\{\left(\frac{4-3k}{5},\frac{2-4k}{5},k\right)\right\}$ c) $S=\phi$

d) $S=\left\{\frac{4}{5},-\frac{4}{5}\right\}$ e) $S=\{(1,-3,2)\}$ f) $S=\{(1,0,2)\}$

2. a) $S=\{(4,1)\}$ b) $S=\phi$ c) $S=\{(4,2)\}$ d) $S=\left\{\left(\frac{4-2k}{5},\frac{3+k}{5},k\right)\right\}$

e) $S=\left\{\left(\frac{1-2k}{3},\frac{5+5k}{3},k\right)\right\}$ f) $S=\phi$

(10) 1. a 2. e 3. c 4. d 5. b
6. c 7. a 8. d 9. c 10. d

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALD, Atelmo Aloisio, COGO, Sandra E. Vielmo. **Matrizes e Sistemas de Equações Lineares.** Caderno Didático – Santa Maria: UFSM, CCNE, Departamento de Matemática, 1997.

Currículo Básico do PEIES. Universidade Federal de Santa Maria. **Programa de Ingresso ao Ensino Superior.** V. 5, Santa Maria, 1999

DECISAÔ PRÉ-VESTIBULAR. **Matemática.** Polígrafo – Santa Maria [s.n.], 1997, não paginado.

ESCOLA ESTADUAL DE 2º GRAU CILON ROSA. **Matrizes, Determinantes, Sistemas de equações Lineares e Análise Combinatória.** Polígrafo – Santa Maria [s.n.], 1999, 108 p.

FÓTON VESTIBULARES. **Matemática.** Polígrafo – Santa Maria [s.n.], 2000, não paginado.

GIOVANNI, J. R., BONJORNO, J. R. **Matemática.** V. 2, Editora FTD S.A., São Paulo, 1992.

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R. **Matemática.** Volume Único, Editora Atual, São Paulo, 2002.

SILVA, J. D., FERNANDES, V. dos S., MABELINI, O. D. **Matemática: Novo Ensino Médio – Volúme Único Curso Completo.** Sistema de Ensino IPEP, São Paulo, 2002.