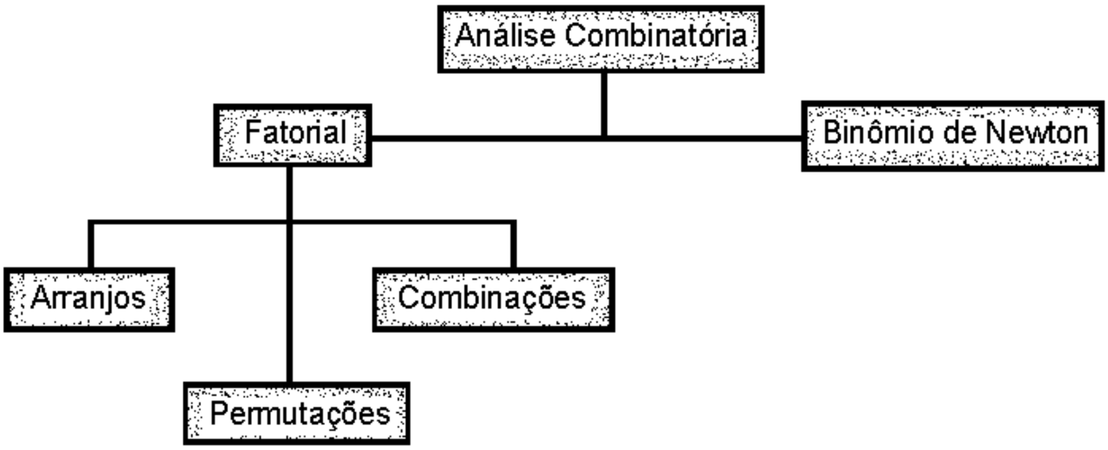
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
Colégio Técnico Industrial de Santa Maria

Caderno Didático 5

Análise Combinatória e Binômio de Newton



Série: Matemática II

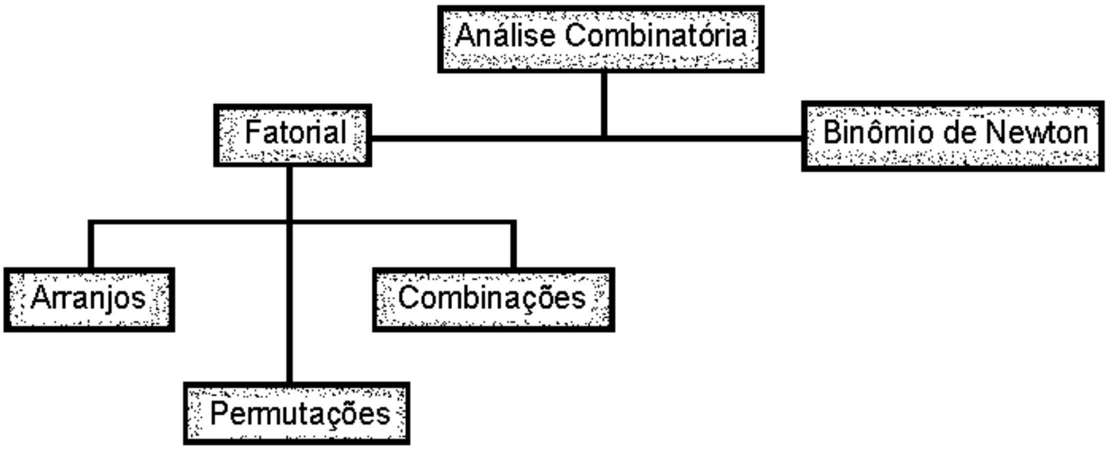
Por:
Professora Elisia L. Chiapinotto
Professor Mauricio R. Lutz

Julho de 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
Colégio Técnico Industrial de Santa Maria

Caderno Didático 5

Análise Combinatória e Binômio de Newton



Série: Matemática II

Por:
Professora Elisia L. Chiapinotto
Professor Mauricio R. Lutz

Julho de 2020

C532c

Chiapinotto, Elisia L.

Caderno didático 5 : análise combinatória e binômio de Newton / por Elisia Lorenzoni Chiapinotto, Mauricio Ramos Lutz. – Santa Maria , 2003.
42 f. : il. (Série Matemática II)

1. Matemática 2. Análise combinatória 3. Fatorial 4. Arranjo simples 5. Combinação simples 6. Permutações 7. Binômio de Newton I. Lutz, Mauricio Ramos II. Título

CDU: 519.1

Ficha catalográfica elaborada por
Luiz Marchiotti Fernandes CRB 10/1160
Biblioteca Setorial do Centro de Ciências Rurais/UFSM

SUMÁRIO

ANÁLISE COMBINATÓRIA

1 FATORIAL

Sendo n um número inteiro, maior que 1 (um), define-se fatorial de n, e indica-se n!, a expressão

$$\boxed{n! = n(n-1)(n-2)...3.2.1}$$

onde: $\begin{cases} n \in \mathrm{N} \text{ e } n > 1 \\ n! \,(\text{lê - se : n fatorial ou fatorial de n}) \end{cases}$

Definições especiais:

$$\boxed{\begin{array}{c} 0! = 1 \\ 1! = 1 \end{array}}$$

Exemplos: 1. Calcular $\dfrac{5!}{3!+2!}$

Resolução:

$$\frac{5!}{3!+2!} = \frac{(5.4.3.2.1)}{(3.2.1)+(2.1)} = \frac{120}{6+2} = \frac{120}{8} = 15$$

2. Resolver a equação $(x+3)!+(x+2)! = 8(x+1)!$

Resolução:

$$(x+3)!+(x+2)! = 8(x+1)!$$

$$(x+3)(x+2)(x+1)!+(x+2)(x+1)! = 8(x+1)!$$

$$(x+1)!\left[(x+3)(x+2)+(x+2)\right] = 8(x+1)!$$

$$(x+3)(x+2)+(x+2) = 8$$

$$x^2 + 3x + 2x + 6 + x + 2 = 8$$

$$x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x+6) = 0$$

Portanto $\begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \text{ (não satisfaz)} \end{cases}$

Logo $x = 0$.

3. Simplificar a expressão $\frac{n!-(n+1)!}{n!}$

Resolução:

$$\frac{n!-(n+1)!}{n!}=\frac{n!-(n+1).n!}{n!}=\frac{n!\left[1-(n+1)\right]}{n!}=1-n-1=-n$$

4. Resolver a equação $(n-4)!=120$

Resolução:

$$(n-4)!=120 \Rightarrow (n-4)!=5.4.3.2.1$$
$$(n-4)!=5!$$
$$n-4=5$$
$$n=9$$

(1) Exercícios

1. Calcule:

a) $\frac{6!+3!-2!}{5!}$ b) $\frac{4!-2!-0!}{1!}$ c) $\frac{9!}{7!}$

2. Simplifique as expressões:

a) $\frac{n!}{(n-1)!}$ b) $\frac{n!-(n+1)!}{n!}$ c) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$

3. Resolva as equações:

a) $x!=15(x-1)!$ b) $(n-2)!=2(n-4)!$

c) $(n-2)!=720$ d) $\frac{(x+1)!}{(x-1)!}=56$

4. Simplifique: $\frac{(x+1)!-(x-1)!}{x!-(x-1)!}$

5. Determine o conjunto solução das equações:

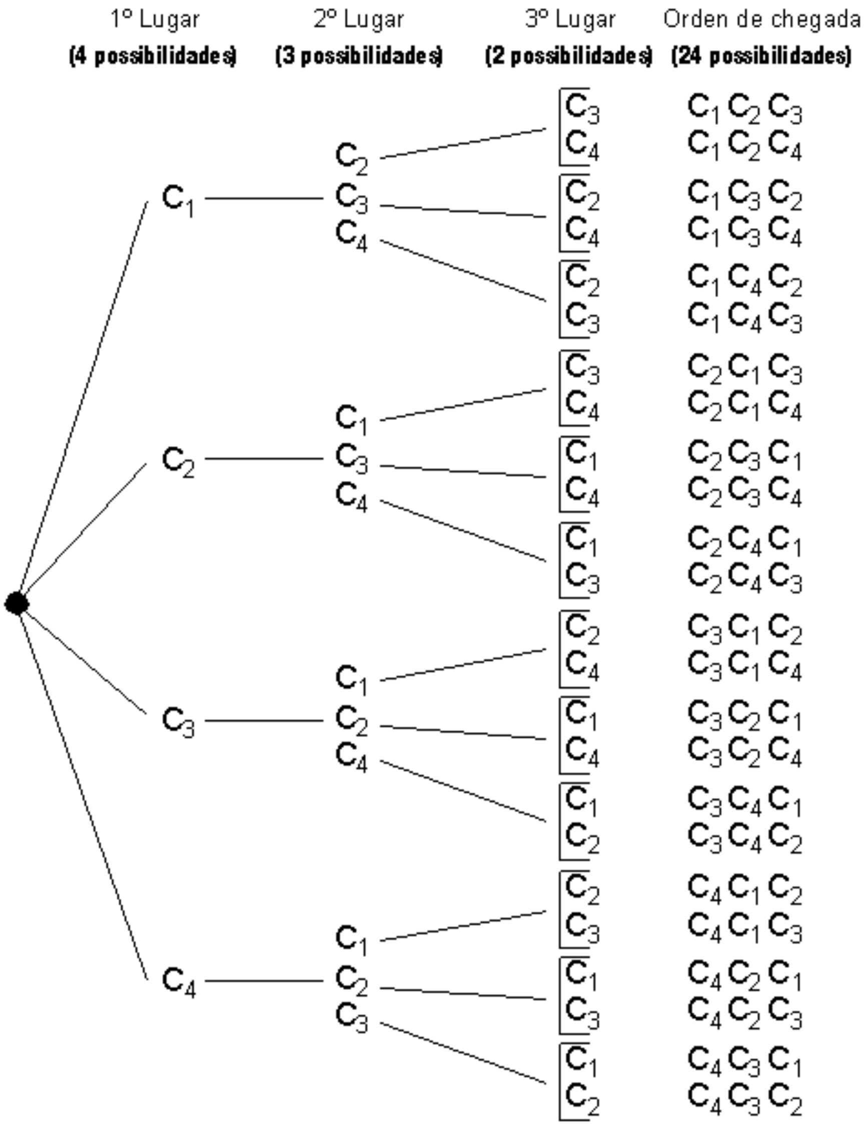
a) $(x+5)!+(x+4)!=35(x+3)!$ b) $\frac{x!}{(x-2)!}=30$

2 PROBLEMAS DE CONTAGEM

Análise combinatória é a parte da Matemática que estuda o número de possibilidades de ocorrência de um determinado acontecimento (evento) sem, necessariamente, descrever todas as possibilidades.

O esquema desenvolvido nos exemplos a seguir mostra as possibilidades de um acontecimento e é chamado **árvore das possibilidades**.

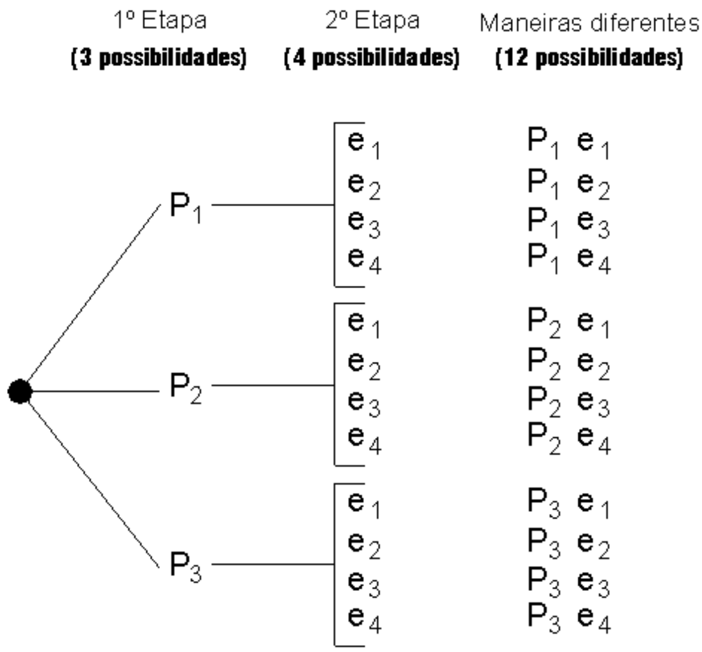
Exemplos: 1. Quatro carros (C_1, C_2, C_3, C_4) disputam uma corrida. Quantas são as possibilidades de chegada para os três primeiros lugares?



Observe que: O número de possibilidades para o 1º lugar é 4.
O número de possibilidades para o 2º lugar é 3.
O número de possibilidades para o 3º lugar é 2.
O número total de possibilidades é 4.3.2=24.

O número de possibilidade de chegada é 24.

2. Num hospital existem 3 portas de entrada que dão para um saguão onde existem 4 elevadores. Um visitante deve se dirigir ao 5º andar utilizando-se de um dos elevadores. De quantas maneiras diferentes poderá fazê-lo?



Observe que: O número de possibilidades para a 1º etapa é 3.
O número de possibilidades para a 2º etapa é 4.
O número total de possibilidades é 3.4=12.

O número de maneiras é 12.

3 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

O princípio fundamental da contagem mostra-nos um método algébrico para determinar o número de possibilidades de ocorrência de um acontecimento sem precisarmos descrever todas as possibilidades.

Se um acontecimento pode ocorrer por várias etapas sucessivas e independentes e tal modo que:

p_1 é o número de possibilidades da 1º etapa
p_2 é o número de possibilidades da 2º etapa
:
:
p_k é o número de possibilidades da k-ésima etapa, então $p_1.p_2...p_k$ é o número total de possibilidades de o acontecimento ocorrer.

Exemplo: Os números dos telefones de São Paulo têm 7 algarismos. Determinar o numero máximo de telefones que podem ser instalados, sabendo-se que os números não podem começar com zero.

Resolução:

9	10	10	10	10	10	10

Com os algarismos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9) temos 9 possibilidades diferentes de escolha para o primeiro algarismo (o zero não pode ser colocado) do número do telefone e dez possibilidades para os outros algarismos.

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, temos:

9.10.10.10.10.10.10=9.000.000

O número de telefones é 9.000.000

(2) Exercícios

1. Num hospital existem 3 portas de entrada que dão para um amplo saguão no qual existem 5 elevadores. Um visitante deve se dirigir ao 6º andar utilizando-se de um dos elevadores. De quantas maneiras diferentes poderá fazê-lo.

2. Uma companhia de móveis tem dez desenhos para mesas e quatro desenhos para cadeiras. Quantos pares de desenhos de mesa e cadeira pode a companhia formas?

3. Numa eleição de uma escola há três candidatos a presidente, cinco a vice-presidente, seis a secretário e sete a tesoureiro . Quantos podem ser os resultados da eleição.

4. Quantas comissões de três membros podemos formar com os alunos Ayrton, Pedro, Odair e Valter?

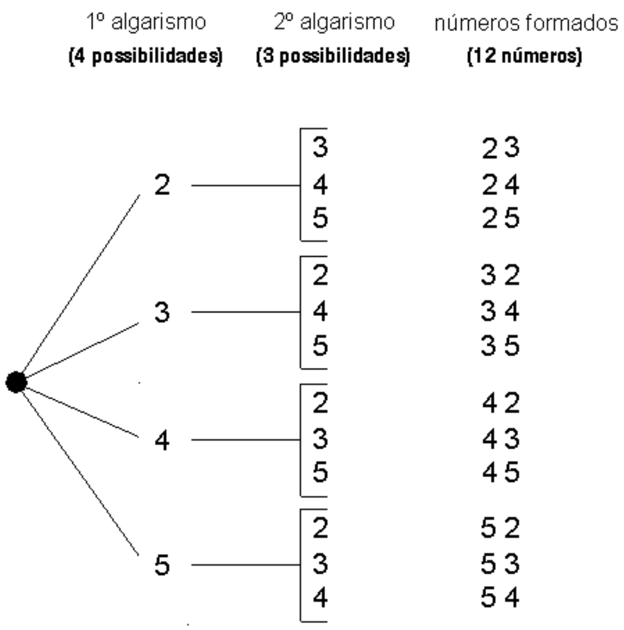
5. Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados usando-se os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

6. Oito caminhos conduzem ao cume da montanha. De quantos modos uma pessoas pode subir e descer por caminhos diferentes?

4 ARRANJOS SIMPLES

Arranjo simples é o tipo de agrupamento sem repetição em que um grupo é diferente de outro pela **ordem** ou pela **natureza** dos elementos componentes.

Exemplo: Quantos números de dois algarismos (elementos) distintos podem ser formados usando-se os algarismos (elementos) 2, 3, 4 e 5?



Observe que os **grupos (números ou elementos)** obtidos diferem entre si:

- pela **ordem** dos elementos (23 e 32, por exemplo);
- pelos **elementos componentes (natureza)** (25 e 43, por exemplo).

Os grupos assim obtidos são denominados **arranjos simples** dos 4 elementos tomados 2 a 2, e são indicados $A_{4,\,2}$.

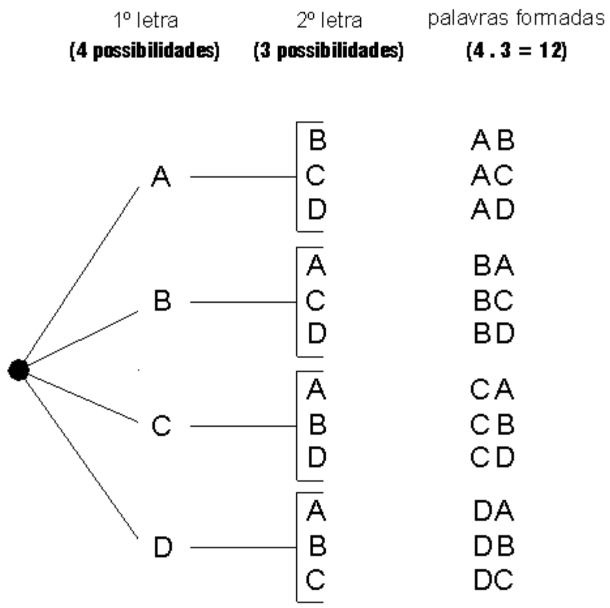
Daí define-se:

Arranjo simples de **n** elementos tomados **p** a **p** são todos os agrupamentos sem repetição que é possível formar com p ($n \geq p$) elementos diferentes escolhidos entres os n elementos de um conjunto dado.

Indica-se: $A_{n,p}$ ou A_n^p.

4.1 Fórmula dos arranjos simples

Quantas palavras de duas letras distintas podemos formar com as letras A, B, C e D?



Observe que:

com 4 letras, temos: palavras de 2 letras $\Rightarrow$ 4.3

com 4 letras, teríamos: palavras de 3 letras $\Rightarrow$ 4.3.2

com 6 letras, teríamos: palavras de 2 letras $\Rightarrow$ 6.5

palavras de 3 letras $\Rightarrow$ 6.5.4

palavras de 4 letras $\Rightarrow$ 6.5.4.3

com n letras, teríamos: palavras de 2 letras $\Rightarrow$ n(n–1)

palavras de 3 letras $\Rightarrow$ n(n–1)(n–2)

:

palavras de p letras $\Rightarrow$ n(n–1)(n–2)...(n–p +1)

Generalizando:

O número de **arranjos simples** de n elementos em grupos de p elementos é dado por:

$$\boxed{A_{n,p} = n(n-1)(n-2)...(n-p+1)}$$

$A_{n,p}$ – lê-se: arranjo simples de n elementos tomados p a p.

Note que o desenvolvimentos de $A_{n,p}$ contém p fatores.

4.1.1 Uma Fórmula Importante

Calculando $A_{7,4}$, temos: $A_{7,4} = 7.6.5.4$

Multiplicando e dividindo por 3!, obtemos:

$$\frac{7.6.5.4.3!}{3!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7!}{(7-4)!}$$

Generalizando temos: $A_{n,p} = n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$

Multiplicando e dividindo por $(n-p)!$, obtemos:

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2)...(n-p+1).\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$\boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Está fórmula mostra que os arranjos dos n elementos tomados p a p podem ser escritos utilizando-se fatoriais.

<u>Exemplos:</u> 1. Calcular: $\dfrac{A_{5,4} + A_{3,2}}{A_{4,2} - A_{2,1}}$

Resolução:

$$\frac{A_{5,4} + A_{3,2}}{A_{4,2} - A_{2,1}} = \frac{5.4.3.2 + 3.2}{4.3 - 2} = \frac{126}{10} = \frac{63}{5}$$

2. Calcular $E = A_{7,3} + A_{3,2} - A_{5,4}$

Resolução:

$$E = \frac{7!}{(7-3)!} + \frac{3!}{(3-2)!} - \frac{5!}{(5-4)!}$$

$$E = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1} + \frac{3.2.1}{1} - \frac{5.4.3.2.1}{1} = 210 + 6 - 120 = 96$$

3. Resolver a equação: $\dfrac{A_{n,6} + A_{n,5}}{A_{n,4}} = 9$

Resolução:

$$\frac{A_{n,6} + A_{n,5}}{A_{n,4}} = 9$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 9$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\left[(n-4)(n-5) + (n-4)\right]}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 9$$

$$(n-4)(n-5) + n - 4 = n^2 - 9n + 20 + n - 4 = 9$$

$$n^2 - 8n + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n' = 7 \\ n'' = 1 \end{cases}$$

Como $n \geq 6 \Rightarrow n = 7$

$S = \{7\}$

4. Quantos números pares de 4 algarismos podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, sem repeti-los?

Resolução:

Possuímos um total de sete algarismos e os números que vamos formar devem ter quatro algarismos.

Para o número formado ser par, deve terminar em 0,2,4 ou 6; logo:

			0	$\Rightarrow A_{6,3}$
			2	$\Rightarrow A_{6,3}$
			4	$\Rightarrow A_{6,3}$
			6	$\Rightarrow A_{6,3}$

3 casas $\qquad$ $4 \cdot A_{6,3}$

Quando os números terminam em 2, 4 ou 6, eles não podem começar por zero.

$\boxed{0}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{2}\ \Rightarrow A_{5,2}$

$\boxed{0}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{4}\ \Rightarrow A_{5,2}$

$\boxed{0}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{6}\ \Rightarrow A_{5,2}$

2 casas $\quad 3.\ A_{5,2}$

Portanto, o total de números é: $\quad 4.\ A_{6,3} - 3.\ A_{5,2}$

$4.6.5.4 – 3.5.4 = 480 – 60 = 420$

Podemos formar 420 números.

(3) Exercícios

1. Calcule:

a) $\dfrac{A_{6,2} + A_{4,3} - A_{5,2}}{A_{9,2} + A_{8,1}}$ $\quad$ b) $\dfrac{A_{5,2} + A_{6,1} - A_{5,3}}{A_{10,2} - A_{7,3}}$

2. Resolvas as equações:

a) $A_{X,2} = 12$ $\quad$ b) $A_{X,3} = 4A_{X,2}$ $\quad$ c) $A^{2}_{n-1} = 30$

3. Quantos números de 5 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

4. Quantos números de 3 algarismos, sem repetição, podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, incluindo sempre o algarismo 4?

5. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 são formados números de quatro algarismos distintos. Dentre eles, quantos são divisíveis por 5?

6. Quantos números de 4 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

7. Quantos são os números compreendidos entre 2000 e 3000, formados por algarismos distintos escolhidos entre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

8. Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos do sistema decimal, sem os repetir, de modo que:

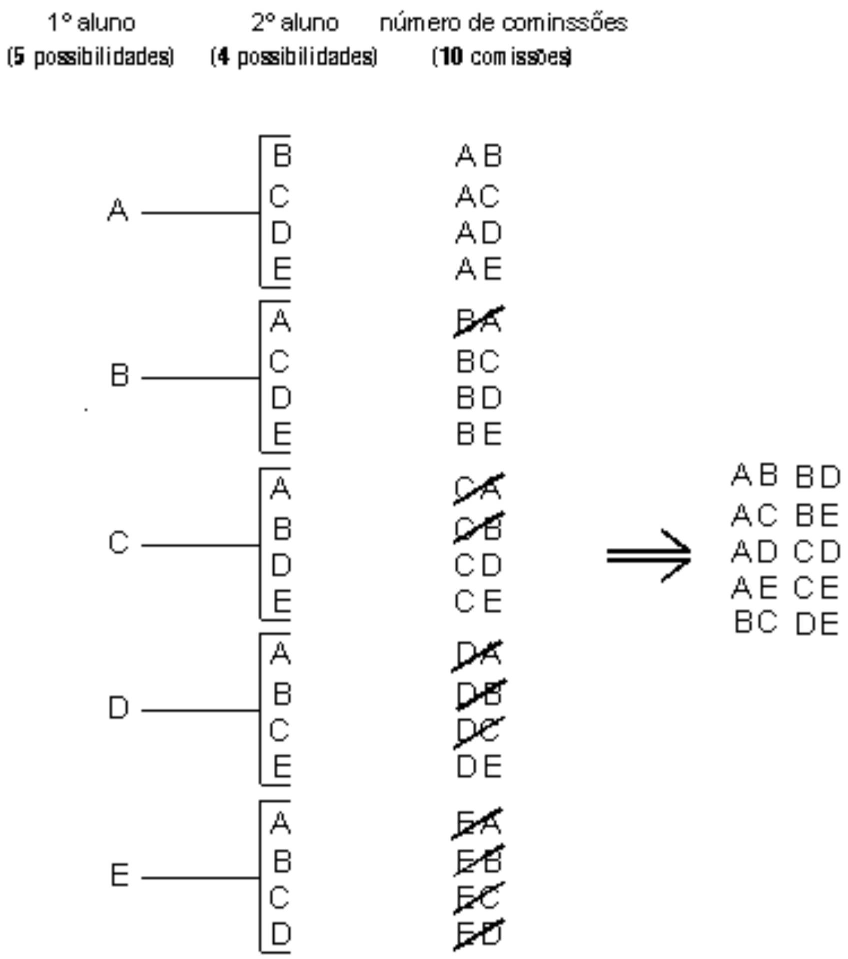
a) comecem com 1.

b) comecem com 2 e terminem com 5.

5 COMBINAÇÃO SIMPLES

Combinação simples é o tipo de agrupamento sem repetição em que um grupo é diferente de outro apenas pela **natureza** dos elementos componentes.

Exemplo: Quantas comissões de 2 pessoas podem ser formadas com 5 alunos (A, B, C, D e E) de uma classe?



Observe que os grupos AB e BA representam a mesma comissão. Os alunos A e B, não importa a ordem, formam apenas uma comissão. Isto significa que uma mesma comissão foi contada duas vezes. Portanto, o total de comissões é dez $\left(\frac{20}{2}\right)=10$.

Observemos que os grupos obtidos entre si pelos **elementos componentes (natureza)**, não importando a **ordem** (posição) em que aparecem. Os grupos assim obtidos são denominados **combinações simples** dos 5 elementos tomados 2 a 2.

Indica-se: $C_{5,2}$.

Daí Define-se:

Combinações simples de **n** elementos distintos tomados **p** a **p** (n ≥ p) são todos os subconjuntos de p elementos que é possível formar a partir de um conjunto com n elementos.

5.1 Fórmula das Combinações Simples

Para calcularmos o número de combinações, basta calcular o número de arranjos e dividir o resultado por 2 (20:2=10), que é o fatorial do número de elementos que compõem cada comissão (2).

O número de combinações de **n** elementos de grupos de **p** elementos é igual ao número de arranjos de **n** elementos tomados **p** a **p**, dividido por **p!**, isto é,

$$C_{n,p}=\frac{A_{n,p}}{p!}=\frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\boxed{C_{n,p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

$C_{n,p}$ – lê-se: combinação simples de n elementos tomados p a p.

Exemplos: 1. Quantas comissões constituídas de 3 pessoas podem ser formadas com 5 pessoas?

Resolução:

As comissões formadas devem ter 3 pessoas, por exemplo: A B C

Invertendo-se a ordem destas pessoas, obtemos a mesma comissão. Portanto, o problema é de combinação.

$$C_{5,3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5!}{3!2!}=\frac{5.4.3!}{3!.2!}=10$$

Podemos formar 10 comissões.

2. Uma classe tem 10 alunos e 5 alunas. Formam-se comissões de 4 alunos e duas alunas. Determine o número de comissões em que participa o aluno x e não participa a aluna y.

Resolução:

Devemos escolher:

3 alunos entre os 9 restantes $\Rightarrow C_{9,3}$

2 alunas entre as 4 restantes $\Rightarrow C_{4,2}$

A escolha dos alunos pode ser efetuada de $C_{9,3}$ maneiras e a escolha das alunas, de $C_{4,2}$. Então, pelo principio fundamental da contagem, o número de comissões é dado por:

$$C_{9,3}.C_{4,2}=\frac{9!}{3!6!}.\frac{4!}{2!.2!}=\frac{9.8.7}{3.2.1}.\frac{4.3}{2.1}=504$$

Será formada 504 comissões.

(4) Exercícios

1. Resolva e equação: $C_{n,1}+C_{n,2}=6$

2. Se $A_n^p=30$ e $C_n^p=15$, ache o valor de $\frac{(n+p)!}{n!}$.

3. De quantas maneiras podemos escalar um time de futebol de salão dispondo de 8 jogadores?

4. Com 10 espécies de frutas, quantos tipos de salada, contendo 6 espécies diferentes podem ser feitas?

5. Uma empresa é formada por 6 sócios brasileiros e 4 japoneses. De quantos modos podemos formar uma diretoria de 5 sócios, sendo 3 brasileiros e 2 japoneses.

6. Numa sala, temos 5 rapazes e 6 moças. Quantos grupos podemos formar de 2 rapazes e 3 moças?

6 PERMUTAÇÕES SIMPLES

Permutação simples é o tipo de agrupamento ordenado, sem repetição, em que entram todos os elementos em cada grupo.

<u>Exemplo:</u> Quantos números de 3 algarismos distintos podem ser formados usando-se os algarismos (elementos) 2, 4 e 5?

1º algarismo (3 possibilidades)	2º algarismo (2 possibilidades)	3º algarismo (1 possibilidade)	números formados (6 números)
2	4	5	245
	5	4	254
4	2	5	425
	5	2	452
5	2	4	524
	4	2	542

Observe que os grupos (números) assim obtidos diferem um do outro apenas pela ordem dos elementos (245 e 254, por exemplo).

Os grupos assim obtidos são denominados **permutações simples** dos 3 elementos tomados 3 a 3 e são indicados P_3.

Observe que a permutação simples é um caso particular de arranjo simples, isto é, $A_{3,3}=P_3$.

6.1 Fórmula da Permutações Simples

Observe que os arranjos dos 3 elementos tomados 3 a 3 são as permutações dos 3 elementos, isto é, $A_{3,3} = P_3 = 3.2.1 = 6$

Em geral, temos:

$A_{n,p} = n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$

se n=p, vem:

$A_{n,p} = P_n = n(n-1)(n-2)...(n-n+1) = n(n-1)(n-2)...1$, portanto,

$$\boxed{P_n = n(n-1)(n-2)...1 = n!}$$

Exemplos: 1. Calcular E, sendo $E = P_5 + 2.\dfrac{P_6 - P_4}{p_2}$.

Resolução:

$$E = P_5 + 2.\frac{P_6 - P_4}{p_2} = 5! + 2.\frac{6! - 4!}{2!} = 120 + 2.\frac{720 - 24}{2} = 816$$

2. quantos números de 4 algarismos distintos podem ser formados, usando-se os algarismos 1, 3, 5 e 7?

Resolução:

$P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$

Podem ser formados 24 números.

(5) Exercícios

1.Calcule o valor de m que verifica a relação: $.\dfrac{P_m + m.P_{m-2}}{P_{m+1}} = \dfrac{3}{8}$.

2. Quantos são os anagramas com a palavra CAFÉ?

3. Quantos anagramas da palavra EDITORA

a) começam com A?

b) começam com A e terminam com E?

4. Quanto ao anagramas da palavra ENIGMA, calcule:

a) o número total deles.

b) o número dos que terminam com A.

c) o número dos que começam com EM.

5. Um estudante ganhou numa competição quatro livros diferentes de Matemática, três diferentes de Física e dois diferentes de Química. Querendo manter juntos os da mesma disciplina, calculou que poderá enfileirá-los numa prateleira de estante, de modos diversos. Calcule essa quantidade de modos.

7 PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS REPETIDOS

Até agora estudamos permutação com elementos distintos.

Vejamos o que acontece quando em uma quantidade n de elementos houver uma quantidade de elementos repetidos.

⇒ Por exemplo consideremos a palavra CAMA.

	CAMA (1)
trocando o C pelo M (em 1) obtemos:	MACA (2)
trocando o C pelo A (em 1) obtemos:	ACMA (3)
trocando o A pelo A (em 1) obtemos:	CAMA (4)
trocando o A pelo A (em 2) obtemos:	MACA (5)

Continuando com esse processo, obteríamos 24 palavras ($P_4=4!$), 12 das quais repetidas (1 e 4 são iguais, 2 e 5 são iguais0.

Cada palavra foi contada duas vezes, no caso de a palavra ter 2 letras (A e A) repetidas.

⇒ Caso agora consideremos a palavra ABACATE:

Neste caso temos 3 letras repetidas. Elas podem ser permutadas 6 vezes (3!), fazendo com que cada palavra seja repetida 6 vezes. Como o número de permutações possíveis é 120 (6!), o número total de palavras e 6 vezes menor, ou seja, 20 (120:6).

Conclusão: De acordo como o exposto, temos:

"O número de permutações possíveis com n elementos, dentre os quais um certo elemento se repete α vezes, é igual ao fatorial de n dividido pelo fatorial de α".

$$\boxed{P_n^{\alpha} = \frac{n!}{\alpha!}}$$

Se tivermos n elementos, dos quais: α são iguais a A, β são iguais a B e γ são iguais a C, o número de permutações distintas dos n elementos será:

$$\boxed{P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}}$$

<u>Exemplos:</u> 1. Quantos anagramas tem a palavra NATÁLIA?

Resolução:

A palavra NATÁLIA tem 7 letras, sendo que 3 são iguais a A, portanto,

$$P_7^3 = \frac{7!}{3!} = \frac{7.6.5.4.3!}{3!} = 840$$

Logo a palavra NATÁLIA tem 840 anagramas.

2. quantos anagramas tem a palavra ARITMÉTICA?

Resolução

A palavra ARITMÉTICA tem 10 letras, sendo:

2 iguais a A,

2 iguais a I e

2 iguais a T,

portanto,

$$P_{10}^{2,2,2} = \frac{10!}{2!2!2!} = 453.600$$

(6) Exercícios

1. Quantos anagramas tem as palavras:
a) PATA?
b) PARALELOGRAMO?
c) GUANABARA?

2. Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA que começam por vogal? (Não leve em conta o acento.)

3. Quantos anagramas diferentes podem ser formados com as letras da palavra ARAPONGA, de modo que a letra P ocupe sempre o ultimo lugar?

4. Usando uma vez a letra A, uma vez a letra B e (n–2) vezes a letra C, podemos formar 20 anagramas diferentes com n letras em cada anagrama. Calcule n.

(7) Exercícios complementares - PFC

1. Uma pessoa possui 5 camisetas, 3 calças e 2 pares de sapatos. Usando apenas essas peças, de quantas maneiras diferentes essa pessoa pode se vestir?

2. Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados usando apenas os algarismos ímpares?

3. Com os algarismos 2, 4, 6 e 8, quantos números de dois algarismos podemos escrever?

4. Utilizando os algarismos do sistema decimal, quantos números de quatro algarismos podemos escrever?

5. De quantos modos diferentes podemos dispor 5 alunos em fila indiana?

6. Em um campeonato de futebol com a participação de 12 clubes, de quantas maneiras diferentes podemos ter um campeão e um vice-campeão?

7. Usando somente os algarismos 1, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, quantos números:

a) de três algarismos podemos formar?

b) de três algarismos distintos podemos formar?

8. Quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar, utilizando apenas os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

(8) Exercícios complementares – Arranjo Simples

1. Calcule o valor de:

a) $A_{12,\,2}$ b) $A_{6,\,3}$ c) $A_{15,\,3}$ d) $A_{20,\,2}$

2. Utilizando as letras A, B, C, D, E e F, quantos anagramas, contendo 4 dessas letras distintas, podemos formar?

3. Determine o valor de X:

a) $A_{X,\,2}=90$

b) $A_{X,\,3}=5.A_{X,\,2}$

4. De quantos modos podem ser escolhidos o presidente, o vice-presidente e o tesoureiro de uma firma entre os seus 10 sócios?

(9) Exercícios complementares – Combinação Simples

1. Determine o valor de X em $C_{X,\,2}=28$

2. Em uma sala de aula com 20 alunos, quantas comissões de 3 alunos podemos formar?

3. Quantos segmentos de reta ficam determinados por 4 pontos distintos de uma circunferência?

4. Num grupo de 15 pessoas, 5 são do sexo masculino. De quantas maneiras podemos formar comissões de 8 pessoas de modo que:

a) nenhuma pessoas seja do sexo masculino?

b) nenhuma pessoas seja do sexo feminino?

c) todas as pessoas do sexo masculino participem da comissão?

d) metade das pessoas da comissão sejam do sexo feminino?

(10) Exercícios complementares – Permutações

1. Quantos são os anagramas da palavra REAL?

2. Com relação a palavra BONITA?

a) quantos anagramas existem?

b) quantos anagramas começam por B?

c) quantos anagramas começam pela sílaba BO?

d) quantos anagramas começam e terminam por vogal?

3. Em uma estante temos 4 livros de Matemática de autores diferentes, o mesmo acontecendo com 3 livros de Física e 2 livros de Química. De quantos modos diferentes podemos:

a) dispor esses livros nessa estante?

b) dispor esses livros, de modo que os livros de Matemática permaneçam sempre juntos?

c) dispor esses livros, de modo que os livros de Física permaneçam sempre juntos?

d) dispor esses livros, de modo que os livros de uma mesma matéria permaneçam sempre juntos?

(11) Exercícios complementares – Análise Combinatória

1. (PEIES – 1996) O valor de m que satisfaz a igualdade $A_{(m-1),\,2}=C_{m,\,(m-2)}$, para $m\geq 2$, é

a) 2

b) 5

c) 6

d) 3

e) 4

2. (PEIES – 1996) Sabe-se que uma equipe de basquete é formada por 5 jogadores. De quantas maneiras distintas o técnico pode montar a equipe, dispondo de 9 jogadores e supondo que eles joguem em qualquer posição?

a) 17.010

b) 3.024

c) 756

d) 126

e) 252

3. (PEIES – 1997) As placas de automóvel no Brasil são constituídas de 3 letras seguidas de 4 algarismos. O número máximo de placas iniciadas por EVA, com final ímpar e com algarismos distintos, é

a) 504 b) 420 c) 2520 d) 840 e) 2500

4. (PEIES – 1999) Uma função $f:A\to B$, de domínio A e contradomínio B, é injetora, se os elementos distintos de A tiverem imagens distintas em B, isto é, se $x_1\neq x_2$ em A, então $f(x_1)\neq f(x_2)$ em B. Se A={1, 2, 3, 4} e B={5, 6, 7, 8, 9}, o número máximo de funções injetoras $f:A\to B$ é

a) 20

b) 20!

C) 24

d) 120

e) 4!5!

5. (PEIES – 2000) Tércio e Sétimo são, respectivamente, o 3º e o 7º filhos de uma família de imigrantes italianos. Tércio acha que tem sorte com o número 3, e Sétimo acredita muito no número 7. Numa promoção beneficente, em sua comunidade, será sorteado um computador mediante cartelas numeradas de 1 a 4999, ao preço de R$ 1,00 a cartela. Os irmãos se associam e resolveram arriscar a sorte. Nessas condições, assinale V nas afirmativas verdadeiras e F nas falsas.

( ) Se adquirirem todas as cartelas com final 3 e todas as cartelas com final 7, gastarão exatamente 1000 reais.

( ) Se adquirirem todas as cartelas com dezenas finais 37 e todas as cartelas com as dezenas finais 73, gastarão exatamente 100 reais.

( ) Se adquirirem todas as cartelas que contém somente o algarismo 3 e todas as cartelas que contém somente o algarismo 7, gastarão exatamente 8 reais.

a) V – V – V.
b) V – V – F.
c) F – F – V.
d) F – V – F.
e) V – F – F.

6. (PEIES – 2001) São dados sete pontos distintos, A, B, C, D, E, F e G, sobre uma circunferência. Unindo esses pontos dois a dois, são determinados _____ retas. O número de triângulos determinados, por esses pontos é ______ . Desses triângulos, exatamente ______ têm vértice no ponto A.

A alternativa que preenche corretamente as lacunas é

a) 21, 70, 15 b) 21, 35, 15 c) 42, 35, 15
d) 42, 70, 30 e) 21, 70, 30

7. (PEIES - 2001) A quantidades de números naturais de cinco algarismos distintos que se pode formar com os algarismos 2, 3, 4, 5 e 6, de modo que os algarismos pares permaneçam juntos, é

a) 12 b) 24 c) 30 d) 36 e) 40

8. (PEIES – 2002) O conselho do Departamento de Matemática da UFSM é composto de 3 professores e 2 alunos, sendo renovado por eleição, a cada 2 anos. Para a próxima eleição, candidataram-se 7 professores e 5 alunos. O número de maneiras diferentes com que esse conselho pode ser eleito é

a) 350 b) 410 c) 420 d) 792 e) 798

9. (PEIES – 2002) Para viabilizar o acesso a caixas eletrônicos, determinado banco elaborou senhas individuais que constam de 6 algarismos escolhidos entre {0, 1,2 ,3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} e seguidos de 3 letras, escolhidas entre {A, B, C, D, E, F, G, H}, conforme exemplifica a figura

0	5	9	4	3	5	G	E	G

Assim, o número máximo de senhas diferentes é ______ . O número máximo de senhas diferentes cujos algarismos são distintos e cujas letras são vogais é ______.

a) $10^6.8^3$; $6A_{10}^6$ b) $10^6.8^3$; $8A_{10}^6$ c) $10^6.8^3$; $8C_{10}^6$

d) $A_{10}^6.C_8^3;A_{12}^9$ e) $A_{10}^6.C_8^3;C_{12}^9$

10. (Vest. – 1996) A expressão $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$ é equivalente a

a) $\frac{n}{n!(n+1)!}$ b) $\frac{n}{(n+1)!}$ c) $\frac{n-1}{n!(n+1)!}$

d) $\frac{n!}{(n+1)!}$ e) $\frac{1}{n+1}$

11. (Vest. 1997) A senha para acessar um programa secreto num computador é composta por 3 letras diferentes seguidas de 4 algarismos distintos. As letras são escolhidas entre as 23 do alfabeto e os algarismos entre 0, 1, 2, ..., 9. O número máximo de senhas diferentes que se pode esperar é

a) $C_{23,\,3}.A_{10,4}$ b) $A_{23,\,3}.C_{10,4}$ c) $P_{33,\,7}$

d) $C_{23,\,3}.C_{10,4}$ e) $A_{23,\,3}.A_{10,4}$

12. (Vest. – 1998) A expressão $\frac{(k+2)!-k!}{(k+1)!-k!}$, para $k \in \mathrm{N}^*$, eqüivale a

a) $\frac{(k+2)!}{(k+1)!}$ b) $\frac{k^2+3k+1}{k}$ c) $\frac{k+2}{K+1}$

d) 2 e) $\frac{k^2+2k}{k-1}$

13. (Vest. – 1999) Numa Câmara de Vereadoras, trabalham 6 vereadores do partido A, 5 vereadores do partido B e 4 vereadores do partido C. O número de comissões de 7 vereadores que podem ser formadas, devendo cada comissão ser constituída de 3 vereadores do partido A, 2 vereadores do partido B e 2 vereadores do partido C, é igual a

a) 7 b) 36 c) 152 d) 1200 e) 28800

14 (Vest. – 2001) De quantas maneiras distintas podem-se alinhar cinco estacas azuis idênticas, uma vermelha e uma branca?

a) 12 b) 30 c) 42 d) 240 e) 5040

15. (Vest. – 2001) Analise as afirmativas a seguir.

I. O número de comissões de 3 pessoas que se pode formar num grupo de 5 pessoas é de 60.

II. Com os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5, podem-se formar 125 números de 3 algarismos.

III. A quantidade de 7 bombons iguais pode ser repartida de 6 maneiras diferentes, em duas caixas idênticas, sem que nenhuma caixa fique vazia.

Está(ão) correta(s)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III

e) I, II, III.

16. (Vest. – 2002) Para ter acesso a uma sala reservada, cada usuário recebe um cartão de identificação com 4 listras coloridas, de modo que qualquer cartão deve diferir de todos os outros pela natureza das cores ou pela ordem das mesmas nas listras. Operando com 5 cores distintas e observando que listras vizinhas não tenham a mesma cor, quantos usuários podem ser identificados?

a) 10 b) 20 c) 120 d) 320 e) 625

17. (Vest. – 2003) A reforma agrária ainda é um ponto crucial para se estabelecer uma melhor distribuição de renda no brasil. Uma Comunidade de sem-terra, recebe informação de que O INCRA irá receber uma comissão para negociações. Em assembléia democrática, os sem-terra decidem que tal comissão será composta por um presidente geral, um porta-voz que repassará as notícias à comunidade e aos representantes e um agente que cuidará da parte burocrática das negociações. Além desses com cargos específicos, participarão dessa comissão mais 6 conselheiros que auxiliarão indistintamente em todas as fases da negociação.

Se, dentre toda a comunidade, apenas 15 pessoas forem consideradas aptas aos cargos, o número de comissões distintas que poderão ser formadas com essas 15 pessoas é obtido pelo produto

a)$13.11.7.5^2.3^2.2^4$

b) $13.11.7.5.3.2$

c) $13.11.7^2.5^2.3^3.2^6$

d) $13.7^2.5^2.3^3.2^6$

e) $13.11.7^2.5.3^2.2^3$

<u>BINÔMIO DE NEWTON</u>

8 NÚMEROS BINOMIAIS

Dados dois números naturais, **n** e **p**, chamamos **número binomial** ao par de valores $\binom{n}{p}$, onde:

$$\boxed{\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

onde $n\in \mathrm{N}, p\in \mathrm{N}$ e $n\geq p$.

$\binom{n}{p}$ lê-se: binomial de n sobre p

Em que **n** é o **numerador** e **p** o **denominador** do número binomial.

Observe que $\binom{n}{p}=C_{n,p}$

Conseqüências da definição:

a) $\binom{n}{0}=1$ para $\forall\ n\in \mathrm{N}$.

b) $\binom{n}{1}=n$ para $\forall\ n>1$ e $n\in \mathrm{N}$.

c) $\binom{n}{n}=1$ para $\forall\ n\in \mathrm{N}$.

<u>**Exemplo:**</u> Calcular $E=\binom{5}{2}+\binom{3}{3}+\binom{5}{0}+\binom{7}{1}$

Resolução:

$$E=\binom{5}{2}+\binom{3}{3}+\binom{5}{0}+\binom{7}{1}$$

$$E=\frac{5!}{2!(5-2)!}+\frac{3!}{3!(3-3)!}+\frac{5!}{0!(5-0)!}+\frac{7!}{1!(7-1)!}$$

$$E=\frac{5.4}{2}+1+1+7=19$$

Logo $E=19$

(12) Exercícios

1. Calcule o valor dos seguintes binomiais:

a) $\binom{5}{4}$ b) $\binom{20}{18}$ c) $\binom{30}{1}$ d) $\binom{10}{7}$

2. Calcule $A=\binom{4}{0}+\binom{8}{2}+\binom{9}{7}+\binom{10}{1}$.

3. Ache o conjunto solução da equação $\binom{n-3}{2}=21$.

4. Resolva a equação $\binom{x}{2}+\binom{x}{3}=35$.

9 NÚMEROS BINOMIAIS COMPLEMENTARES

Dois números binomiais são chamados complementares quando a soma dos denominadores é igual ao numerador.

Os números $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{n-p}$ são complementares, pois $p+n-p=n$.

Exemplos: 1. $\binom{5}{2}$ e $\binom{5}{3}$ são complementares, pois $2+3=5$.

2. $\binom{7}{1}$ e $\binom{7}{6}$ são complementares, pois $1+6=7$.

10 PROPRIEDADES DOS NÚMEROS BINOMIAIS

1º propriedade:

Dois números binomiais complementares são iguais.

$$\boxed{\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}}$$

Demonstração:

Sabemos que: $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]!} = \frac{n!}{(n-p)![n-n+p]!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

Portanto, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

<u>Exemplo:</u> Determinar x na igualdades $\binom{12}{5x} = \binom{12}{x+8}$

Resolução:

Temos dois casos:

1º: binomiais iguais

$$\binom{12}{5x} = \binom{12}{x+8} \Rightarrow 5x = x+8 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$$

2º: binomiais complementares

$$\binom{12}{5x} = \binom{12}{x+8} \Rightarrow 5x + x + 8 = 12 \Rightarrow 6x = 4 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$ (não satisfaz)

2º propriedade: Relação de Stiffel

$$\boxed{\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}}$$

Demonstração:

Partindo do 1º membro, temos:

$$\frac{(n-1)!}{(p-1)![n-1-(p-1)]!} + \frac{(n-1)!}{p![n-1-p]!} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p)!}$$

Como $(n-p)! = (n-p)(n-p-1)!$ e $p! = p(p-1)!$

Vem,

$$\frac{p(n-1)! + (n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{(p+n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Portanto: $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

Exemplo: Resolver a equação: $\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=\binom{6}{x+2}$

Resolução:

Devemos ter:

$\begin{array}{l} x+2=5 \\ x=3 \end{array}$ ou $\begin{array}{l} 5+x+2=6 \\ x=-1 \end{array}$

$S=\{-1,3\}$

(13) Exercícios

1. Resolva as equações:

a) $\binom{8}{6}+\binom{8}{7}=\binom{9}{x+3}$ b) $\binom{5}{2x}=\binom{5}{x+2}$ c) $\binom{14}{3p}=\binom{14}{p+6}$

11 TRIÂNGULO DE PASCAL (OU DE TARTAGLIA)

Os números binomiais podem ser dispostos ordenadamente em um quadro denominado **triângulo de Pascal** ou **de Tartaglia**.

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5	. . .	Coluna n
Linha 0	$\binom{0}{0}$							
Linha 1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
Linha 2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
Linha 3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
Linha 4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			
Linha 5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		
Linha 6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱
Linha n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	. . .	. . .	. . .	$\binom{n}{n}$

Observe que:

- binomiais de mesmo **numerador** estão colocados na mesma linha.
- binomiais de mesmo **denominador** estão colocados na mesma coluna.

Se no triângulo de Pascal substituirmos cada binomial pelo respectivo valor, obteremos:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.

11.1 Propriedades do triângulo de Pascal

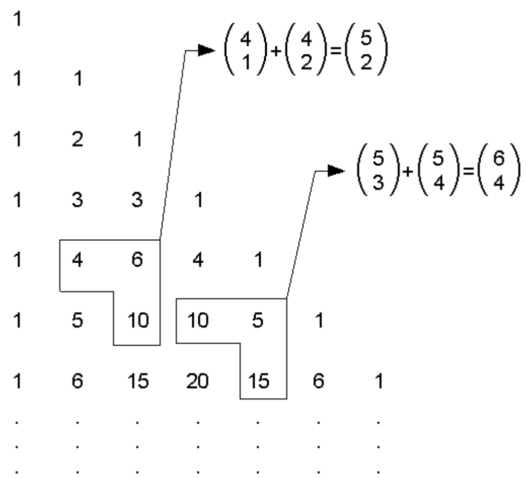
1º) Todos os elementos da 1º coluna são iguais a 1, pois $\binom{n}{0}=1$.

2º) O último elemento de cada linha é igual a 1, pois $\binom{n}{n}=1$.

3º) Numa linha qualquer, dois binomiais dos extremos são iguais:

1 6 15 20 15 6 1

4º) Cada binomial $\binom{n}{p}$ da linha n é igual à soma de dois binomiais da linha (n–1): aquele que está na coluna p com aquele que está na coluna (p–1) (relação de Stiffel)



5º) A soma dos números binomiais de uma mesma linha é uma potência de base 2 cujo expoente é a ordem da linha (dada pelo numerador).

Linha 0	$\Rightarrow$	1	$\Rightarrow$	$2^0=1$
Linha 1	$\Rightarrow$	1 + 1	$\Rightarrow$	$2^1=2$
Linha 2	$\Rightarrow$	1 + 2 + 1	$\Rightarrow$	$2^2=4$
Linha 3	$\Rightarrow$	1+ 3 + 3 + 1	$\Rightarrow$	$2^3=8$
Linha 4	$\Rightarrow$	1 + 4 + 6 + 4 + 1	$\Rightarrow$	$2^4=16$
Linha 5	$\Rightarrow$	1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1	$\Rightarrow$	$2^5=32$

Em geral:

$$\boxed{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}=2^n \text{ ou } \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n}$$

<u>Exemplos:</u> 1. Calcular n, sabendo que: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=4$

Resolução:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=4 \Rightarrow 2^n=4 \Rightarrow 2^n=2^2$$

$$\therefore n=2$$

2. Determinar o valor de n que satisfaz a sentença $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=512$

Resolução:

Fazendo k variar de 0 até n, temos:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}=512 \Rightarrow 2^n=512 \Rightarrow 2^n=2^9$$

$\therefore n=9$

(14) Exercícios

1. Calcule n, sabendo que: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n}=2048$

2. Calcule $\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}$.

3. Determine x, de modo que $\binom{x}{1}+\binom{x}{2}+\binom{x}{3}+...+\binom{x}{x}=4095$.

12 FÓRMULA DO BINÔMIO DE NEWTON

Neste item vamos obter o desenvolvimento de $(x+a)^n$, com $n \in \mathrm{N}$, que é denominado **binômio de Newton**.

Observe os seguintes desenvolvimentos:

$$n=0 \rightarrow (x+a)^0=1$$
$$n=1 \rightarrow (x+a)^1=1x+1a$$
$$n=2 \rightarrow (x+a)^2=1x^2+2ax+1a^2$$
$$n=3 \rightarrow (x+a)^3=1x^3+3ax+3a^2x+1a^3$$
$$n=4 \rightarrow (x+a)^4=1x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+1a^4$$

. . . . .

. . . . .

. . . . .

$$n=n \rightarrow (x+a)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}ax^{n-1}+\binom{n}{2}a^2x^{n-2}+...+\binom{n}{n}a^n$$

Portanto a Fórmula do binômio de Newton é

$$\boxed{(x+a)^n = \binom{n}{0}a^0x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}a^nx^0}$$

No desenvolvimento do binômio $(x-a)^n$, temos:

$$(x+a)^n = [x+(-a)]^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}(-a)x^{n-1} + \binom{n}{2}(-a)^2x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}(-a)^n$$

$$\boxed{(x-a)^n = +\binom{n}{0}x^n - \binom{n}{1}ax^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}a^n}$$

Os sinais de cada termos do desenvolvimento são alternados, isto é, os termos de ordem par (2º, 4º, 6º, ...) são negativos e os de oredem ímpar (1º, 3º, 5º, ...) são positivos.

<u>Exemplo:</u> Desenvolver o binômio $(x+3)^4$

Resolução:

$$(x+3)^4 = \binom{4}{0}x^4.3^0 + \binom{4}{1}x^3.3^1 + \binom{4}{2}x^2.3^2 + \binom{4}{3}x^1.3^3 + \binom{4}{4}x^0.3^4$$

$$(x+3)^4 = 1x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$$

<u>(15) Exercícios</u>

1. Desenvolva:

a) $\left(1+\dfrac{3a}{2}\right)^6$ b) $(k^2+1)^5$ c) $(x-1)^3$ d) $(2a-3b)^4$ e) $(a^3-x^2y)^6$

13 FÓRMULA DO TERMO GERAL

Observe o desenvolvimento:

$$(x+a)^n = \underbrace{\binom{n}{0}a^0x^n}_{T_1} + \underbrace{\binom{n}{1}ax^{n-1}}_{T_2} + \underbrace{\binom{n}{2}a^2x^{n-2}}_{T_3} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n}a^nx^0}_{T_{n+1}}$$

1º termo $T_1 = T_{0+1} = \binom{n}{0} a^0 x^n$

2º termo $T_2 = T_{1+1} = \binom{n}{1} a^1 x^{n-1}$

3º termo $T_3 = T_{2+1} = \binom{n}{2} a^2 x^{n-2}$

. .
. .
. .

(p+1)-ésimo termo $T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p x^{n-p}$

Portanto, um termo qualquer de ordem (p+1) é dado por

$$\boxed{T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p x^{n-p}}$$

<u>Observação:</u>

Para o desenvolvimento de $(x-a)^n$, temos: $(x-a)^n = [x + (-a)]^n$.

O termo geral é dado pela expressão:

$$\boxed{T_{p+1} = \binom{n}{p} (-a)^p x^{n-p} = (-1)^p \binom{n}{p} a^p x^{n-p}}$$

<u>Exemplos:</u> 1. Determinar o 4º termo no desenvolvimento de $(x+2)^7$.

Resolução:

Para o 4º termo, temos: $p + 1 = 4 \Rightarrow p = 3$ e $\begin{cases} n = 7 \\ a = 2 \end{cases}$

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p x^{n-p} \Rightarrow T_{3+1} = \binom{7}{3} .2^3 .x^{7-3}$$

$$T_4 = \frac{7!}{3!(7-3)!} .8.x^4 = \frac{7.6.5.4!}{3.2.1.4!} 8x^4 = 35.8x^4 = 280x^4$$

2. Achar o termo independente de x no desenvolvimento de $(2x-1)^6$.

Resolução:

Temos:

$$\begin{cases} n = 6 \\ X = 2x \\ a = 1 \end{cases}$$

O temo geral é dado por:

$$T_{p+1} = (-1)^p \binom{n}{p} a^p x^{n-p} \Rightarrow T_{p+1} = (-1)^p \binom{6}{p} 1^p.(2x)^{6-p} \Rightarrow T_{p+1} = (-1)^p \binom{6}{p} 2^{6-p}.x^{6-p}$$

O termo independente de x é o que contem x^0, logo:

$$6 - p = 0 \Rightarrow p = 6$$

Substituindo no termo geral, temos:

$$T_7 = (-1)^6 \binom{6}{6} 2^0.x^0 \Rightarrow T_7 = 1$$

<u>(16) Exercícios</u>

1. Calcule o 6º termo no desenvolvimento de $(a+3b)^9$.

2. Calcule o 5º termo no desenvolvimento de $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^6$.

3. Calcule o 11º termo no desenvolvimento de $(x-1)^{20}$.

4. Calcule o termo em x^3 no desenvolvimento de $\left(\sqrt{x}+\dfrac{a^2}{x}\right)^{15}$.

5. Determine o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)^9$.

(17) Exercícios complementares – Binômio de Newton

1. Calcule o valor de n nas seguintes igualdades:

a) $\dfrac{n!}{n(n-2)!}=10$

b) $\dfrac{n(n-1)!}{(n-2)!}=6$

2. Desenvolva os seguintes binômios:

a) $(x+y)^4$

b) $(3-x)^3$

c) $(x^2+x.y)^5$

d) $(x-\sqrt{3})^4$

3. Determine o quinto termo no desenvolvimento de $(x-y)^8$.

4. Qual é o termo médio do desenvolvimento de $(2x-1)^6$?

5. Qual é o coeficiente em x^5 no desenvolvimento de $(x+2)^7$?

6. Qual o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^4+\dfrac{2}{x}\right)^5$?

(18) Exercícios complementares Binômio de Newton

1. (PEIES – 1996) No desenvolvimento $\left(\sqrt{a}+\dfrac{2}{a}\right)^6$, com a>0, o termo geral é ________ e o termo independente de a vale __________ .

Assinale a alternativa que completa corretamente as lacunas, considerando $k\in N$ e $0\leq k\leq 6$.

a) $2^k\binom{6}{k}a^{\frac{3}{2}-6k}$; 120 b) $2^k\binom{6}{k}a^{\frac{3}{2}-3k}$; 60 c) $2^k\binom{6}{k}a^{3-\frac{3}{2}k}$; 60

d) $2^k\binom{6}{k}a^{6-\frac{3}{2}k}$; 120 e) $2^k\binom{6}{k}a^{3-\frac{3}{2}k}$; 120

2. (PEIES – 1997) Consideres as afirmativas referentes à análise combinatória e binômio de Newton, indicando se são verdadeiras (V) ou falsas (F).

( ) O valor de x na equação $A_{x,\,3}-4C_{x,\,2}=0$, onde $x\geq 3$, é 7.

( ) No desenvolvimento $(x+1)^7$, o coeficiente de X^3 é 35.

( ) Num campeonato de futebol, chegaram às quartas de final 4 equipes: Palmeiras, Grêmio, Corinthians e Flamengo. O némero de maneiras distintas com que essas equipes podem ser classificadas do 1º ao 4º lugares é 24.

a) V – F – V. b) V – F – F. c) F – V – V.

d) V – V – V. e) F – V – F.

3. (PEIES – 1998) Nas afirmações que se referem à análise combinatória, assinale V nas verdadeiras e F nas falsas.

( ) Um conjunto A tem 8 elementos distintos. O número de subconjuntos de A, com 3 elementos distintos, é 56.

( ) Usando apenas os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, é possível formar, no máximo, 56 números naturais com 3 algarismos distintos.

( ) Se p e n são números inteiros positivos, com $n\geq p$, então $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$.

a) V – F – V. b) F – F – V. c) V – F – F.

d) V – V – F. e) F – V – F.

4. (PEIES – 1998) O valor de k, k≠0, para que o coeficiente do termo x^2, no desenvolvimento de $\left(x+\frac{1}{k}\right)^5$, seja igual a 80, é

a) 1/2. b) 1. c) 3/2. d) 2. e) 5/5.

5. (PEIES – 1999) A soma das raízes da equação binomial $\binom{12}{6-x}=\binom{12}{2x}$ é

a) 8. b) 6. c) 4. d) 2. e)0.

6. (PEIES – 2000) Consideres as matrizes $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\\ 1 & m\end{pmatrix}_{3x2}$ e $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & n\end{pmatrix}_{2x2}$,

onde m é o termo independente de x no desenvolvimento do binômio $\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^6$

e n é a solução da equação $2C_{n+2}^{2}=3C_{n+1}^{3}$, onde C_p^q indica o número de combinações simples de p elementos tomados q a q.

O termo C_{32} da matriz produto C=A.B é

a) –84 b) –82 c) –78 d) 82 e) 90

7. (PEIES – 2002) Seja a matriz $A=\begin{pmatrix}4 & 5\\ a & 8\end{pmatrix}$, onde a é o coeficiente da potência x^2 no desenvolvimento do binômio de Newton $(X+1)^4$. A matriz inversa de A, denotada por A^{-1}, é tal que $\frac{1}{12}\left(A+2A^{-1}\right)$ é igual a

a) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

8. (Vest. – 1996) Se $x=\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+...+\binom{6}{6}$ e $\binom{y}{1}+\binom{y}{2}+...+\binom{y}{y}=255$, então $\frac{x}{y}$ vale

a) 5 b) 6 c) 8 d) 7 e) 9

9. (Vest. – 1999) Dadas as matrizes $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & m \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, onde m é o termo independente do desenvolvimento do binômio $\left(\frac{1}{x} + x^2\right)^6$, então o determinante da matriz Q=M.N é igual a

a) 15 b) 126 c) 374 d) –126 e) –156

10. (Vest. – 2003) O coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^6$ é dado por

a) 0 b) 1 c) 8 d) 28 e) 56

GABARITOS

(1) 1. a) $\frac{181}{30}$ b) 21 c) 72 2. a) n b) –n c) n(n+1)(n+2)

3. a) $S=\{15\}$ b) $S=\{4\}$ c) $S=\{8\}$ d) $S=\{7\}$

4. $\frac{x^2+x-1}{x-1}$ 5. a) $S=\{1\}$ b) $S=\{6\}$

(2) 1. 15 2. 40 3. 630 4. 4 5. 60 6. 56

(3) 1. a) $\frac{17}{40}$ b) $\frac{17}{60}$ 2. a) $S=\{4\}$ b) $S=\{6\}$ c) $S=\{7\}$

3. 15120 4. 168 5. 60 6. 4536 7. 336 8. a) 72 b) 8

(4) 1. $S=\{3\}$ 2. 56 3. 56 4. 210 5. 120 6. 200

(5) 1. $S=\{3\}$ 2. 24 3. a) 720 b) 120 4. a) 720 b) 120 c) 24

5. 1728

(6) 1. a) 12 b) 129729600 c) 15120 2. 75600 3. 840 4. n=5

(7) 1. 30 2. 60 3. 16 4. 9000 5. 120 6. 132

7. a) 343 b) 210 8. 24

(8) 1. a) 132 b) 120 c) 2730 d) 380 2. 360

3. a) x=10 b) x=7 4. 720

(9) 1. x=8 2. 1140 3. 6 4. a) 45 b) impossível c) 120 d) 1050

(10) 1. 24 2. a) 720 b)120 c)24 d)144

3. a) 362880 b) 17280 c) 30240 d) 1728

(11) 1. e 2. d 3. c 4. d 5. b 6. b 7. d 8. a 9. b

10. b 11. e 12. b 13. d 14. c 15. d 16 d 17. e.

(12) 1. a) 5 b) 190 c) 30 d) 120 2. 75 3. $S=\{10\}$ 4. $S=\{6\}$

(13) 1. a) $S=\{-1,4\}$ b) $S=\{1,2\}$ c) $S=\{2,3\}$

(14) 1. n=11 2. 256 3. x=12.

(15) 1. a) $1+9a+\frac{135}{4}a^2+\frac{135}{2}a^3+\frac{1215}{16}a^4+\frac{729}{16}a^5+\frac{729}{64}a^6$

b) $1k^{10}+5k^8+10k^6+10k^4+5k^2+1$ c) x^3-3x^2+3x-1

d) $16a^4-96a^3b+216a^2b^2-216ab^3+81b^4$

e) $a^{18}-6a^{15}x^2y+15a^{12}x^4y^2-20a^9x^6y^3+15a^6x^8y^4-6a^3x^{10}y^5+x^{12}y^6$

(16) 1. $T_6=30618b^5a^4$ 2. $T_5=15y^2x$ 3. $T_{11}=184756x^{10}$

4. $455a^6x^3$ 5. 84

(17) 1. a) n=11 b) n=3 2. a) $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

b) $27-27x+9x^2-x^3$ c) $x^{10}+5x^9y+10x^8y^2+10x^7y^3+5x^6y^4+x^5y^5$

d) $x^4-4\sqrt{3}x^3+18x^2-12\sqrt{3}x+9$ 3. $T_5=70x^4y^4$

4. –160x 5. 84 6. 80

(18) 1. c 2. c 3. a 4. a 5. a 6. c 7. a 8. c 9. e 10. c.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALD, Atelmo Aloisio, GIULIANI, Osmar Francisco, BRAMBILLA, Primo Manoel. **Análise Combinatória.** Caderno Didático – Santa Maria: UFSM, CCNE, Departamento de Matemática, 2000.

Currículo Básico do PEIES. Universidade Federal de Santa Maria. **Programa de Ingresso ao Ensino Superior.** V. 5, Santa Maria, 1999

DECISAÔ PRÉ-VESTIBULAR. **Matemática.** Polígrafo – Santa Maria [s.n.], 1997, não paginado.

ESCOLA ESTADUAL DE 2º GRAU CILON ROSA. **Matrizes, Determinantes, Sistemas de equações Lineares e Análise Combinatória.** Polígrafo – Santa Maria [s.n.], 1999, 108 p.

FÓTON VESTIBULARES. **Matemática.** Polígrafo – Santa Maria [s.n.], 2000, não paginado.

GIOVANNI, J. R., BONJORNO, J. R. **Matemática.** V. 2, Editora FTD S.A., São Paulo, 1992.

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R. **Matemática.** Volume Único, Editora Atual, São Paulo, 2002.

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio.** V. 2, SBM, Rio de Janeiro, 2002.

SILVA, J. D., FERNANDES, V. dos S., MABELINI, O. D. **Matemática: Novo Ensino Médio – Volúme Único Curso Completo.** Sistema de Ensino IPEP, São Paulo, 2002.