UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
Colégio Técnico Industrial de Santa Maria

Caderno Didático 3

Determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \beta$$

Série: Matemática II

Por:
Professora Elisia L. Chiapinotto
Professor Mauricio R. Lutz

Março de 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
Colégio Técnico Industrial de Santa Maria

Caderno Didático 3

Determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \beta$$

Série: Matemática II

Por:
Professora Elisia L. Chiapinotto
Professor Mauricio R. Lutz

Março de 2020

C532c

Chiapinotto, Elisia L.

Caderno didático 3 : determinantes / por Elisia Lorenzoni Chiapinotto, Mauricio Ramos Lutz. – Santa Maria , 2003.
24 f. : il. (Série Matemática II)

1. Matemática 2. Determinantes 3. Matriz de ordem 4. Matriz cofatora 5. Inversão de matriz I. Lutz, Mauricio Ramos II. Título

CDU: 517

Ficha catalográfica elaborada por
Luiz Marchiotti Fernandes CRB 10/1160
Biblioteca Setorial do Centro de Ciências Rurais/UFSM

SUMÁRIO

1. DEFINIÇÃO

A toda matriz quadrada de ordem n, podemos associar, através de certas operações, um número real chamado determinante da matriz.

Representa-se o determinante da matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ como $\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}$ ou $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}$.

2 DETERMINANTE DA MATRIZ DE ORDEM 1

O determinante da matriz $A=(a_{11})$ é o próprio número real a_{11}.

Exemplo: Seja a matriz A=(2) logo det A=|2|=2

3 MENOR COMPLEMENTAR

Chama-se menor complementar de um elemento a_{ij} de um determinante Δ, um novo determinante, representado como D_{ij}, que se obtém suprimindo a linha i e a coluna j que passam por a_{ij} de Δ.

Exemplos: 1. O menor complementar do elemento 5 (2º linha e 3º coluna) é:
Resolução:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 7 & 5\\ 3 & -1 & 8\end{vmatrix}\rightarrow D_{23}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-7$$

2. O menor complementar do elemento –2 é:
Resolução:

$$\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 5 & 6\end{vmatrix}\rightarrow D_{11}=|6|=6$$

4 ADJUNTO OU COFATOR OU COMPLEMENTO ALGÉBRICO

Cofator (cof) de um elemento a_{ij} de uma matriz, é o produto do menor complementar deste elemento pelo fator $(-1)^{i+j}.D_{ij}$, ou seja, $A_{ij}=(-1)^{i+j}.D_{ij}$.

<u>Exemplos:</u> 1. Calcule o cofator do elemento a_{21} do determinante $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$.

Resolução:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow A_{21} = (-1)^{2+1}.D_{21} = (-1)^3.\left|-3\right| = (-1).(-3) = 3$$

2. O complemento algébrico ou cofator do elemento 1 é:

Resolução:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 6 \\ 8 & -1 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow A_{11} = (-1)^{1+1}.D_{11} = (-1)^2.\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1.(20+6) = 26$$

5. DETERMINANTE DA MATRIZ DE ORDEM 2

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, o det A é a soma dos produto dos elementos de uma fila qualquer pelos respectivos cofatores.

Calculando:

$A_{11}=(-1)^{1+1}.|a_{22}|=a_{22}$

$A_{12}=(-1)^{1+2}.|a_{21}|=-a_{21}$

$A_{21}=(-1)^{2+1}.|a_{12}|=-a_{12}$

$A_{22}=(-1)^{2+2}.|a_{11}|=a_{11}$.

- Desenvolvendo pela 1º linha:

det $A=a_{11}.A_{11}+a_{12}.A_{12}=a_{11}.a_{22}+a_{12}.(-a_{21})=a_{11}.a_{22}-a_{12}.a_{21}$ (I)

- Desenvolvendo pela 2º linha:

det $A=a_{21}.A_{21}+a_{22}.A_{22}=a_{21}.(-a_{12})+a_{22}.a_{11}=-a_{21}.a_{12}+a_{22}.a_{11}$ (II)

- Desenvolvendo pela 1º coluna:

det $A=a_{11}.A_{11}+a_{21}.A_{21}=a_{11}.a_{22}+a_{21}.(-a_{12})=a_{11}.a_{22}-a_{21}.a_{12}$ (III)

- Desenvolvendo pela 2º coluna:

det $A=a_{12}.A_{12}+a_{22}.A_{22}=a_{12}.(-a_{21})+a_{22}.(-a_{11})=-a_{12}.a_{21}+a_{11}.a_{22}$ (IV)

Concluí-se que (I)=(II)=(III)=(IV).

Exemplo: Calcule o determinante de $A=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$.

Resolução:

Desenvolvendo-se pela 1º linha temos:

det $A=a_{11}.A_{11}+a_{12}.A_{12}=(-1)^{1+1}.1.|7|+(-1)^{1+2}.2.|5|=7-10=-3$

Regra prática:

Consideremos a matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, o determinante de uma matriz de ordem 2 é a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, ou seja,

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}.a_{22}-a_{12}.a_{21}$$

Exemplo: 1. Ache o valor do determinante $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$.

Resolução:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=0.3-(-1).4=0+4=4$$

2. Ache o valor do determinante $\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$.

Resolução:

$$\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -3.2 - 7.5 = -6 - 35 = -41$$

(1) Exercícios

1. Calcular o cofator do elemento a_{21} da matriz $A=(a_{ij})_{2x2}$, onde $a_{ij}=2j+1$, se $i \neq j$; $i+j$, se $i=j$.

2. Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix} 3x & x-1 \\ -2 & x \end{vmatrix} = 3$ b) $\begin{vmatrix} x & x+2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} x & x \\ 5 & x \end{vmatrix} = 0$

3. Sabendo que $0 \leq x \leq 2\pi$, resolva a equação $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & 3 \\ -1 & \operatorname{sen} x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Calcular o cofator dos elementos a_{12} e a_{22} da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Calcular o valor do determinante das matrizes seguinte, usando a definição.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

6. Calcular o valor do determinante, usando a regra prática.

a) $\begin{vmatrix} 9 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & -y \\ x & -y \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} \cos a & -\operatorname{sen} a \\ \operatorname{sen} a & \cos a \end{vmatrix}$

7. Sendo $A=(a_{ij})$ uma matriz de ordem 2 e $a_{ij}=j-i^2$, calcular o determinante da matriz A.

8. Seja A=(a_{ij}) uma matriz quadrada de 2º ordem, tal que $a_{ij}=i^2+i.j$. Calcule det A.

9. Sendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcule det (AB).

10. Ache o valor dos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{5} & -1 \\ 2 & 1-\sqrt{5} \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} \sqrt{3}+\sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{3}-\sqrt{2} \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a+1 & b+1 \\ a & b \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

6 DETERMINANTE DA MATRIZ DE ORDEM 3

Dada a matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, chama-se det A a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer pelos respectivos cofatores.

- Desenvolvendo-se pela 1º linha:

$$\det A = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13}$$
$$= a_{11}.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}(a_{22}.a_{33} - a_{23}.a_{32}) - a_{12}(a_{21}.a_{33} - a_{23}.a_{31}) + a_{13}(a_{21}.a_{32} - a_{22}.a_{31})$$
$$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{13}.a_{22}.a_{31} \quad \text{(I)}$$

- Desenvolvendo-se pela 3º coluna:

$$\det A = a_{13}.A_{13} + a_{23}.A_{23} + a_{33}.A_{33}$$
$$= a_{13}.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{23}.(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}.(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$$= a_{13}(a_{21}.a_{32} - a_{22}.a_{31}) - a_{23}(a_{11}.a_{32} - a_{12}.a_{31}) + a_{33}(a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21})$$
$$= a_{13}.a_{21}.a_{32} + a_{23}.a_{12}.a_{31} + a_{33}.a_{11}.a_{22} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{23}.a_{11}.a_{32} - a_{33}.a_{12}.a_{21} \quad (II)$$

Concluí-se que *(I)=(II)*.

<u>Exemplo:</u> Calcule o determinante da matriz $A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 7\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, pela 1º linha e 2º coluna.

Resolução:

- 1º linha:

$$\det A=-3.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}+1.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}+7.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}$$
$$=-3(3+2)-1(6+2)+7(2-1)=-15-8+7=-16$$

- 2º coluna:

$$\det A=1.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}+1.(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix}-3 & 7\\ 1 & 3\end{vmatrix}+1.(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix}-3 & 7\\ 2 & -2\end{vmatrix}$$
$$=-1(6+2)+1(-9-7)-1(6-14)=-8-16+8=-16$$

<u>Regra prática: Regra de Sarrus</u>

Sendo A uma matriz quadrada de 3º ordem, seu determinante será calculado através da **"Regra de Sarrus"**: repete-se as duas primeiras colunas a direita da matriz (ou as duas primeiras linhas após a 3º linha) e adiciona-se o produto dos elementos da diagonal principal ao produto de suas paralelas, subtraí-se deste resultado o produto da diagonal secundária e o das suas paralelas a ela.

<u>Exemplo:</u> Calcule o determinante da matriz $A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 7\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

Resolução:

$$\begin{vmatrix}-3 & 1 & 7\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{matrix}-3 & 1 & 7 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1\end{matrix}$$
$$=(-3).(1).(3)+(1).(-2).(1)+(7).(2).(1)-(7).(1).(1)-(-3).(-2).(1)-(1).(2).(3)$$
$$=-9-2+14-7-6-6=-16$$

(2) Exercícios

1. Seja a matriz quadrada de 3º ordem e que a_{ij}=2i-j, calcular o cofator do elemento a_{12}?

2. Calcular o valor do determinante das matrizes seguintes usando a definição:

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 2 & y & 0 \\ -y & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

3. Calcule usando a regra de Sarrus:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

4. Resolver as equações, sendo $x\in\Re$.

a) $\begin{vmatrix} 2x & -2 \\ -3 & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & x^2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}=5$

5. Seja S=(s_{ij}) a matriz quadrada de ordem 3, onde $s_{ij}=\begin{cases} 0, i<j \\ i+j, i=j \\ i-j, i>j \end{cases}$, calcular o valor do determinante de S.

6. O determinante da matriz B=(b_{ij}) de ordem 3, onde $b_{ij}=\begin{cases} 0, se\ \mathrm{i}\neq \mathrm{j} \\ 4i-j, \mathrm{se}\ i=j \end{cases}$, é igual a:

a) –180 b) –162 c) 0 d) 162 e) 180

7. Calcule o valor de 3.det (A) –2.det (B)+5.det (C)=0, sendo $A=\begin{pmatrix}2 & x\\ 5 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2x & x\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-4 & 2x\\ -3 & x/2\end{pmatrix}$.

a) 2 b) 1 c) 0 d) –2 e) –4

8. Sabendo que $a=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}$ e $b=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$, calcule a^2-2b.

9. Ache o valor do determinante da matriz P^2, sabendo que $P=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & -1 & 1\\ \sqrt{2} & 1 & -1\\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$.

10. Considere as matrizes $A=\begin{pmatrix}x & y & z\\ y & y & x\\ z & z & x\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x+y & x+z\\ z-y & z-x\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 4\end{pmatrix}$. Sabendo que a matriz B é igual à matriz C, calcule o determinante da matriz A.

7 DETERMINANTE DA MATRIZ DE ORDEM 4

O determinante de uma matriz é igual a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer pelos respectivos cofatores (Teorema de Laplace).

Exemplo: Calcule o determinante $A=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ -3 & 5 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$.

Resolução:

$$\det A = 0.A_{12} + 0.A_{22} + 5.A_{32} + 0.A_{42} = 5.A_{32} = 5.(-9) = -45$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.(4-(-4)-(-1)) = -1.(4+4+1) = -9$$

8 MATRIZ COFATORA

Dada a matriz quadrada $A(a_{ij})_{mxn}$ chama-se matriz cofatora de A a matriz $B=(b_{ij})_{mxn}$ cujos elementos são cofatores dos elementos correspondentes de A.

$$B = cof\ A \Leftrightarrow b_{ij} = A_{ij}, \forall \text{i e} \forall \text{j}.$$

<u>Exemplo:</u> Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, determine a B cofatora de A.

Resolução:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.(2-1) = 1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -1.(3-5) = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1.(3-10) = -7 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.(2-3) = 1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1.(1-15) = -14 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -1.(1-10) = 9$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.(2-6) = -4 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1.(1-9) = 8$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1.(2-6) = -4$$

Portanto a matriz $B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 1 & -14 & 9 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

9 MATRIZ ADJUNTA

A transposta da matriz cofatora de A é chamada matriz adjunta de A.

$$Adj\ A = (cof\ A)^t$$

<u>Exemplo:</u> Seja a matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix}$, determine a matriz Adj A.

Resolução:

- Cálculo da matriz cofatora

Pelo exemplo anterior sabemos que a matriz cofatora de A é $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -7\\ 1 & -14 & 9\\ -4 & 8 & -4\end{pmatrix}$.

- Cálculo da matriz transposta

$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -7\\ 1 & -14 & 9\\ -4 & 8 & -4\end{pmatrix}$ e $B^t=\begin{pmatrix}1 & 1 & -4\\ 2 & -14 & 8\\ -7 & 9 & -4\end{pmatrix}$

Portanto a $Adj\ A=(cof\ A)^t=(B)^t$

Logo $Adj\ \mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -4\\ 2 & -14 & 8\\ -7 & 9 & -4\end{pmatrix}$.

10 INVERSÃO DE MATRIZES COM AUXÍLIO DA TEORIA DOS DETERMINANTES

Dada a matriz quadrada A=$(a_{ij})_{mxn}$ se $\det A\neq 0$, então existe a inversa de A e esta é dada por:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}.(cof\ \mathrm{A})^t \text{ ou } A^{-1}=\frac{1}{\det A}.Adj\ \mathrm{A}$$

<u>Exemplo:</u> Determine a inversa da matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ se existir, com o auxilio dos determinantes.

Resolução:

- Cálculo do determinante

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7$$

- Cálculo da matriz cofatora

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ cof\ A = B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A_{11} = (-1)^{1+1}.|3| = 3$ $\quad$ $A_{12} = (-1)^{1+2}.|-1| = (-1).(-1) = 1$

$A_{21} = (-1)^{2+1}.|1| = (-1).1 = 1$ $\quad$ $A_{22} = (-1)^{2+2}.|2| = 2$

- Cálculo da matriz adjunta

$$Adj\ A = (cof\ A)^t = (B)^t$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Cálculo da inversa da matriz

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.(cof\ \mathrm{A})^t = \frac{1}{\det A}.Adj\ \mathrm{A}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}.\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

<u>Observações:</u>

1. Uma matriz quadrada que possui seu determinante diferente de zero é chamada matriz regular ou não-singular. Logo, é inversível.

2. Uma matriz quadrada que possui seu determinante igual a zero é chamada matriz não regular ou singular. Logo, não é inversível.

<u>(3) Exercícios</u>

1. Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $f(x) = -x^2 - x - 1$, calcule $f\left(-\frac{1}{\det A}\right)$.

2. Determine a inversa da matriz $A=\begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ -\cos x & \operatorname{sen} x \end{pmatrix}$, caso exista.

3. Verifique se matriz $A=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ admite inversa, caso positivo, calcule-a.

4. Calcule x para que exista a inversa da matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ x & -1 & 0 \\ -2 & 1 & x \end{pmatrix}$.

5. Calcular a inversa das matrizes, caso exista:

a) $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

11 PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

1º) Quando todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) são nulos, o determinante dessa matriz é nulo.

Exemplos: 1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 3 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & 5 & 0 & -1 & 5 \end{matrix} = (0+0+0)-(0+0+0)=0$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & 8 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} = (0+0+0)-(0+0+0)=0$

2º) Se duas filas paralelas de uma matriz são iguais, então seu determinante é nulo.

Exemplos: 1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 5 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{matrix} =$

$= (-24 + 15 + 4) - (-24 + 15 + 4) = -5 + 5 = 0$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 1 \end{matrix} =$

$= (-12 + 6 + 2) - (-12 + 2 + 6) = -4 + 4 = 0$

3º) Se duas paralelas de uma matriz são proporcionais, então o seu determinante é nulo.

Exemplos: 1. $L_3 = -5.L_1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 8 \\ -5 & -10 & -10 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 8 & 4 & -3 \\ -5 & -10 & -10 & -5 & -10 \end{matrix} =$

$= (30 - 80 - 80) - (30 - 80 - 80) = -130 + 130 = 0$

2. $C_3 = 2.C_1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 8 \\ -5 & 0 & -10 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 8 & 4 & -3 \\ -5 & 0 & -10 & -5 & 0 \end{matrix} =$

$= (30 - 80 + 0) - (30 + 0 - 80) = -50 + 50 = 0$

4º) Se o elemento de uma fila de uma matriz são combinações lineares dos elementos correspondentes de filas paralelas, então seu determinante é nulo.

Combinações lineares de duas ou mais filas paralelas de um determinante é uma fila paralela às filas consideradas, representados pela soma dos produtos das filas por números reais.

Exemplos: 1. $C_3 = C_1 + C_2 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & -1 & 3 & -4 \end{matrix} =$

$= (-5 + 0 - 8) - (15 - 28 + 0) = -13 + 13 = 0$

2. $L_3 = 2.L_1 + L_2 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -7 \\ 4 & 9 & -1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -7 & 2 & 5 \\ 4 & 9 & -1 & 4 & 9 \end{matrix} =$

$= (-5 - 56 + 54) - (60 - 63 - 4) = -7 + 7 = 0$

5º) O determinante de uma matriz não se altera quando somamos aos elementos de uma fila uma combinação linear dos elementos correspondentes de filas paralelas.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 3 & 4 \end{matrix} =$

$= (-1 + 0 + 24) - (9 - 8 + 0) = 23 - 1 = 22$

$C_1 = C_1 + 2.C_2 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 11 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 & 1 \\ 11 & 4 & -1 & 11 & 4 \end{matrix} =$

$= (-1 + 0 + 48) - (33 - 8 + 0) = 47 - 25 = 22$

$L_2 = L_2 - 2.L_3 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -4 & -7 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & -7 & 0 & -4 & -7 \\ 3 & 4 & -1 & 3 & 4 \end{matrix} =$

$= (7 + 0 - 48) - (-63 - 0 - 0) = -41 + 63 = 22$

6º) O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.

Exemplo: Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, calcule det A e det A^t.

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 15 - (-8) = 23$

$\det A^t = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - (-8) = 23$

Portanto det A=det A^t.

7º) Multiplicando por um número real todos os elementos de uma fila em uma matriz, o determinante fica multiplicado por esse numero.

Exemplo: $A=\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 4 & 0\end{vmatrix}=\begin{matrix}1 & 0 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 0 & 3 & 4\end{matrix}=(0+0+24)-(9-8)=23$

$$C_1=2.C_1\rightarrow\begin{vmatrix}2 & 0 & 3\\ 4 & 1 & -2\\ 6 & 4 & 0\end{vmatrix}=\begin{matrix}2 & 0 & 3 & 2 & 0\\ 4 & 1 & -2 & 4 & 1\\ 6 & 4 & 0 & 6 & 4\end{matrix}=$$
$$=(0+0+48)-(18-16+0)=46$$

ou seja, det A=23, como multiplicamos a coluna 1 por 2 o det A fica multiplicado também por 2, o novo det A=46.

8º) Quando trocamos as posições de duas filas paralelas, o determinante de uma matriz muda de sinal.

Exemplo: $\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 4 & 0\end{vmatrix}=\begin{matrix}1 & 0 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 0 & 3 & 4\end{matrix}=(0+0+24)-(9-8+0)=24-1=23$

$$\begin{vmatrix}3 & 4 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix}=\begin{matrix}3 & 4 & 0 & 3 & 4\\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0\end{matrix}=(9-8+0)-(0+0+24)=1-24=-23$$

$$\begin{vmatrix}3 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 3\end{vmatrix}=\begin{matrix}3 & 0 & 1 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 4 & 3 & 0 & 4\end{matrix}=(9+0-8)-(0+24+0)=1-24=-23$$

9º) Quando em uma matriz os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são todos nulos, o determinante é igual ao produto dos elementos dessa diagonal.

Exemplos: 1. $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -4 & 0\\ 3 & 7 & -2\end{vmatrix}=\begin{matrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -4 & 0 & 2 & -4\\ 3 & 7 & -2 & 3 & 7\end{matrix}=(8+0+0)-(0+0+0)=8$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1 & 7 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{matrix} = (8+0+0)-(0+0+0) = 8$

10º) O determinante do produto das matrizes A e B é igual ao produto do determinante A pelo determinante B, ou seja $\det A . \det B = \det(A.B)$.

<u>**Exemplo:**</u> Sejas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+6 & 1+16 \\ 15+12 & 3+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 17 \\ 27 & 35 \end{pmatrix}$$

$$\det(A.B) = \begin{vmatrix} 11 & 17 \\ 27 & 35 \end{vmatrix} = 385 - 459 = -74$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \qquad \det B = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 3 = 37$$

$$\det A . \det B = (-2).37 = -74 = \det(A.B)$$

11º) Multiplicando-se a matriz A de ordem n pelo número real k obtém-se a matriz k.A, de modo que $\det(k.A) = k^n . \det A$.

<u>**Exemplo:**</u> Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ de ordem 2 e k=2.

$$k.A = 2.\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\det(k.A) = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 24 = -8$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$k^n . \det A = 2^2.(-2) = 4.(-2) = -8,$$

portanto $\det(k.A) = k^n . \det A$

(4) Exercícios

1. O determinante de uma matriz é 36. Se multiplicarmos a segunda linha dessa matriz por 2 e dividirmos sua primeira coluna por 9, o determinante da nova matriz será:

a) 72 b) 4 c) 8 d) 162 e) –162

2. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, calcule o determinante de 3A.

3. Se A é uma matriz quadrada de ordem 4, tal que determinante de $A \neq 0$, $A^2+2A=0$, calcule det A.

4. Se A é uma matriz quadrada de ordem 3, det A=5, calcular o determinante de 2A.

5. Sendo A e B matrizes quadradas de ordem 2, se det A=2 e det B=3, calcule det $(2A^3.B^3)$.

6. Sabendo que a matriz A é tal que det A=5, calcule det A^{-1}.

7. Calcule os determinantes através das propriedades, justificando os valores obtidos:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -8 \\ 3 & 5 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & -8 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -5 \\ 3 & 0 & 9 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

8. Se det A=20, calcule det $(A)^t$.

9. Sejam A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem. Sabendo que det A=6 e det B=4, calcule det (A.B).

10. O valor de um determinante de 5º ordem é 42. Se dividirmos a 1º linha por 7 e multiplicarmos a 1º coluna por 3, o valor do novo determinante será?

11. O determinante de uma matriz quadrada A vale 12. Quando valerá o novo determinante, se multiplicarmos a 2º linha da matriz por 8 e dividirmos a 3º coluna por 4?

12. Se A é uma matriz quadrada, A^t a sua transposta e det A=4, então det A^t é igual a:

a) 4 b) 2 c) 1 d) ½ e) ¼

13. Multiplicando-se a 1º linha da matriz A por 2 e a segunda por 3, obtém-se a matriz B. Se det A=5, então det B é:

a) 5 b) 6 c) 10 d) 15 e) 30

14. O determinante de uma matriz quadrada é 35. Trocando-se entre si a 1º linha com a 2º linha e dividindo a 4º coluna por 7, o novo valor do determinante será:

a) 5 b) –5 c) 245 d) –245 e) 8

15. Se $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 12 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -12$, então $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 6 & 9 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ vale:

a) –4 b) –4/3 c) 4/3 d) 4 e) 12

16. Se $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 10$, então $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 6 & 0 & 4 \\ a & b & c \end{vmatrix}$ é igual a:

a) 40 b) 20 c) –10 d) –20 e) –40

17. Uma matriz A de terceira ordem tem determinante 3. O determinante de 2A é:

a) 6 b) 8 c) 16 d) 24 e) 30

18. Se A é uma matriz quadrada de 4º ordem e det A=6, então det 3A é igual a:

a) 6 b) 12 c) 486 d) 243 e) 81

19. Se A é uma matriz quadrada de terceira ordem e det A=4, desta forma det 2A é igual a:

a) 4 b) 8 c) 16 d) 32 e) 64

20. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem 2. Se det A=5 e $A.B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, então det B é:

a) –5 b) –2 c) 2 d) 5 e) 10

(5) Exercícios complementares

1. (UFSM- Vestibular/1999) Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n e O a matriz nula de ordem n. Então, a afirmativa correta é a seguinte:

a) Se A^t é a matriz transposta de A, então det $A^t \neq$ det A.

b) Se det A≠0, existe a matriz inversa A^{-1} e $A^{-1}=\frac{1}{\det A}.(cof\ A)^t$, onde cof A é a matriz dos cofatores de A.

c) Se A.B=O, então A=O ou B=O.

d) $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$.

e) Se $k \in \Re$, então det (kA)=k(det A), para todo k.

2. (UFSM-Vestibular/2000) Sejam A, B e C matrizes reais 3x3, tais que A.B=C^{-1}, B=2A e det C=8. Então o valor de |det A| é

a) 1/16

b) 1/8

c) 1

d) 8

e) 16

3. (UFSM-Vestibular/2001) Analise as afirmativas a seguir.

I. A matriz $\begin{pmatrix} a & 2 & 2(a-1) \\ b & 0 & x \\ c & 4 & 2(c-2) \end{pmatrix}$ é inversível se x=2b.

II. Se det (AB)=m, pode-se garantir que existe det A e det B.

III. Se det A=m≠0 e det B=1/m, então det (AB)=1.

Está(ão) correta(s)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas III.

d) apenas I e III.

e) I, II, III.

4. (UFSM-Vestibular/2002) Seja A matriz 2x2 com determinante não-nulo. Se det A^2=det (A+A), então det A é

a) –4 b) 1 c) 4 d) 8 e) 16

5. (UFSM-Vestibular/2003) Sejam A e B matrizes reais quadradas de ordem n. Se det A=det B≠0, então $\det\left(\frac{1}{2}A^t.B^{-1}\right)$ é igual a

a) $\frac{1}{2^n}$ b) ½ c) $\frac{1}{2}\det A^t$ d) $\frac{1}{2^n}\det A$ e) 2^n

6. (UFSM-PEIES/1997) Dada ma matriz $A=\begin{bmatrix} x & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ x & 1 & x \end{bmatrix}$, com $x\in\Re$, o intervalo real I para o qual det $A^t<0$ $\forall$ $x\in I$ é

a) (-∞, 0[

b)]0, ∞)

c) [-1, 0[

d)]0, 2]

e)]-1, 4/3[

7. (UFSM-PEIES/1998) Considere uma matriz A_{nxn}, onde $A=(a_{ij})$. Pode(m)-se afirmar:

I. $\det\left(\sqrt{2}.A\right) = 2^{n/2}.\det A$.

II. Se $a_{1j}=a_{2j}$, $1 \leq j \leq n$, então det A=1.

III. Se det A≠0, então det A.det A^{-1}=1.

Está(ão) correta(s)

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas II e III.

d) apenas III.

e) apenas I e III.

8. (UFSM-PEIES/1999) Dadas a matrizes quadradas $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e sendo x um número real, considere a matriz *A-xI*.

Assinale V nas afirmativas verdadeiras e F nas falsas.

( ) $A - xI = \begin{bmatrix} 2-x & -1 \\ -2 & 3-x \end{bmatrix}$.

( ) det (*A-xI*)≠0 para todo x real.

( ) *A-xI* é inversível se *x*≠1 e *x*≠4.

A seqüência correta é

a) V – F – F.

b) F – V – F.

c) V – V – V.

d) F – F – V.

e) V – F – V.

9. (UFSM-PEIES/2000) As afirmações a seguir referem-se a matrizes e determinantes. Assinale V nas verdadeiras e F nas falsas.

(   ) A solução da equação $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8$ é 4.

(   ) Se A e B são matrizes quadradas de ordem n e A=kB, com k número real, então det A=k^n(det B).

(   ) Se A é uma matriz de ordem mxp e B é uma matriz de ordem qxn, o produto A.B é definido se p=q e, nesse caso, a ordem da matriz produto A.B será mxn.

A seqüência correta é

a) V – F – V.

b) V – F – F.

c) F – V – F.

d) F – V – V.

e) F – F – V.

10. (UFSM-PEIES/2001) Considere a equação

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & 0 & \cos x \\ 1-\cos x & 0 & 1+\operatorname{sen} x \\ 0 & +1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

A soma de suas soluções, no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$, é igual a

a) $-\pi/2$

b) 0

c) 1

d) $\pi/2$

e) $3\pi/2$

GABARITOS

(1) 1. –5 2. a) $S=\left\{-\frac{5}{3},1\right\}$ b) $S=\{5\}$ c) $S=\{0,5\}$

3. $S=\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}$ 4. $A_{21}=-2$ e $A_{22}=1$ 5. a) –3 b) 11

6. a) –3 b) 0 c) 1 7. 3 8. –2 9. –12

10. a) 11 b) –2 c) 2 d) b–a e) 26

(2) 1. –4 2. a) 5 b) $5y^2-16$ 3. a) 15 b) 42 c) 2 d) 0

4. a) $S=\left\{0,\frac{3}{8}\right\}$ b) $S=\{-1,2\}$ 5. 48 6. d 7. D

8. 36 9. 64 10. 4

(3) 1. $-\frac{3}{4}$ 2. $\begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x \\ \cos x & \operatorname{sen} x \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 1/18 & -1/3 \end{pmatrix}$

4. $S=\left\{x\in\Re \,/\, x'\neq\frac{4}{3} \text{ e } x''\neq -1\right\}$ 5. a) $\begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$ b) Não existe inversa

(4) 1. a 2. 135 3. 16 4. 40 5. 864 6. $\frac{1}{5}$

7. a) 0, 4º propr. b) 0, 2º propr. C) 0, 1º propr. d) -60, 9º propr.

8. 20 9. 24 10. 18 11. 24 12. a 13. e 14. b 15. e

16. e 17. d 18. c 19. d 20. c.

(5) 1. b 2. b 3. c 4. c 5. a 6. e 7. e 8. e 9. d 10. e

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Currículo Básico do PEIES. Universidade Federal de Santa Maria. **Programa de Ingresso ao Ensino Superior.** V. 5, Santa Maria, 1999

DECISAÔ PRÉ-VESTIBULAR. **Matemática.** Polígrafo – Santa Maria [s.n.], 1997, não paginado.

ESCOLA ESTADUAL DE 2º GRAU CILON ROSA. **Matrizes, Determinantes, Sistemas de equações Lineares e Análise Combinatória.** Polígrafo – Santa Maria [s.n.], 1999, 108 p.

FÓTON VESTIBULARES. **Matemática.** Polígrafo – Santa Maria [s.n.], 2000, não paginado.

GIOVANNI, J. R., BONJORNO, J. R. **Matemática.** V. 2, Editora FTD S.A., São Paulo, 1992.

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R. **Matemática.** Volume Único, Editora Atual, São Paulo, 2002.

SILVA, J. D., FERNANDES, V. dos S., MABELINI, O. D. **Matemática: Novo Ensino Médio – Volúme Único Curso Completo.** Sistema de Ensino IPEP, São Paulo, 2002.