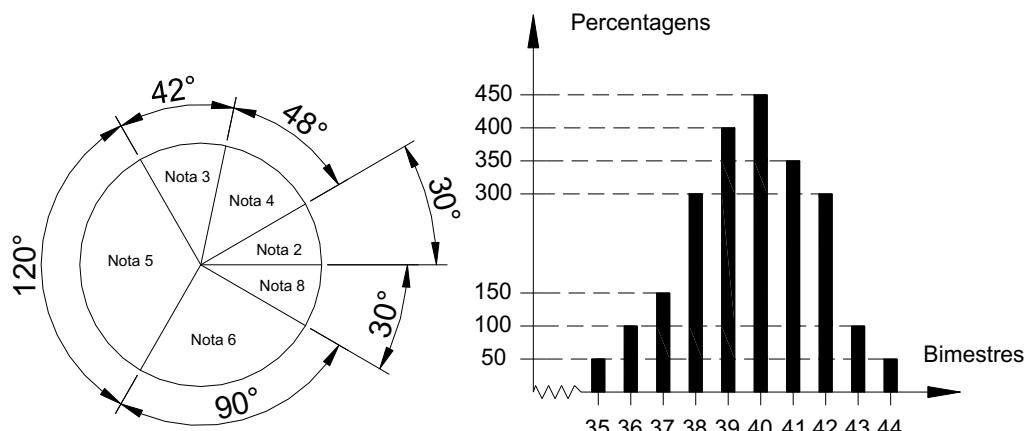


**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA**  
**Colégio Técnico Industrial de Santa Maria**

**Caderno Didático 4**

**Estatística**



**Série: Matemática I**

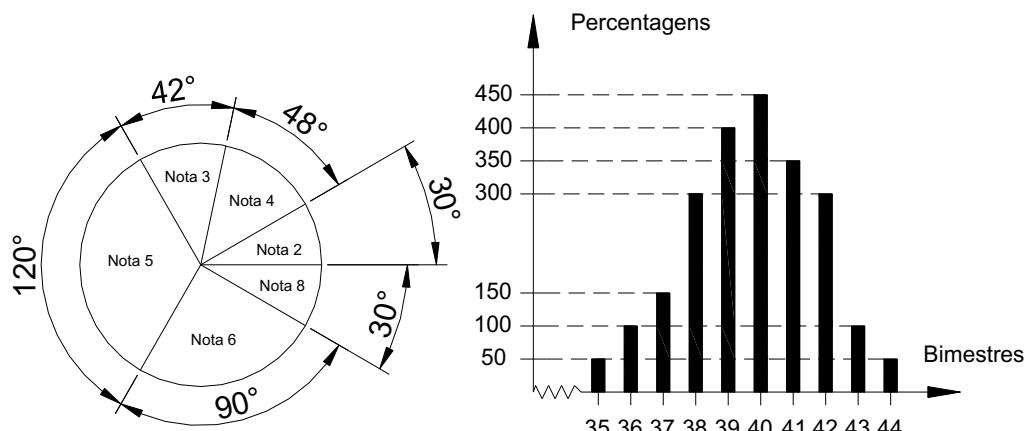
Por:  
Professor Mauricio R. Lutz

Julho de 2020

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA**  
**Colégio Técnico Industrial de Santa Maria**

**Caderno Didático 4**

**Estatística**



**Série: Matemática I**

Por:  
Professor Mauricio R. Lutz

Julho de 2020

Lutz, Mauricio Ramos, 1976-  
L975e

Estatística / por Maurício R. Lutz. – Santa Maria : Ed. do Autor,  
2004.

34 f. (Coleção Caderno didático ; 4 – Série Matemática I)

1. Estatística 2. Matemática estatística 3. Matemática 4. Amostra  
estatística 5. População estatística 6. Distribuições de freqüência  
7. Tabelas estatísticas 8. Gráficos estatísticos 9. Médias I. Título

CDU: 519.22/.25:311

Ficha catalográfica elaborada por  
Luiz Marchiotti Fernandes CRB-10/1160  
Biblioteca Setorial do Centro de Ciências Rurais/UFSM

**SUMÁRIO**

<b>1 POPULAÇÃO E AMOSTRA .....</b>	<b>1</b>
<b>2 VARIÁVEIS .....</b>	<b>2</b>
<b>3 ROL .....</b>	<b>2</b>
<b>4 DISTRIBUIÇÕES DE FREQÜÊNCIA .....</b>	<b>3</b>
<b>5 TABELAS E GRÁFICOS .....</b>	<b>9</b>
<b>5.1 Tabelas .....</b>	<b>9</b>
<b>5.2 Gráficos .....</b>	<b>10</b>
<b>5.2.1 Gráfico de linha .....</b>	<b>10</b>
<b>5.2.2 Gráfico de coluna .....</b>	<b>12</b>
<b>5.2.3 Gráfico de setor .....</b>	<b>13</b>
<b>6 MÉDIAS .....</b>	<b>19</b>
<b>6.1 Média aritmética .....</b>	<b>19</b>
<b>6.2 Média Ponderada .....</b>	<b>21</b>
<b>6.3 Média Harmônica .....</b>	<b>22</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>38</b>

Estuda-se estatística para aplicar seus conceitos como auxílio nas tomadas de decisões diante de incertezas, justificando cientificamente as deduções.

A estatística comprehende o planejamento e a execução de pesquisas, a descrição e a análise dos resultados e a formulação de predições com base nestes resultados.

Com os elementos acima, podemos formular a seguinte definição:

*“A estatística trata do conjunto de métodos utilizados para obtenção de dados, sua organização em tabelas e gráficos e a análise desses dados.”*

## **1 POPULAÇÃO E AMOSTRA**

*População (N):* É todo conjunto de elementos que possuem ao menos uma característica comum observável.

**Observação:** elementos = objetos, animais, pessoas, material continuo (sólido, líquido ou gás).

*Amostra (n):* É uma parte da população, sendo que a mesma deve ser selecionada de acordo com algum critério para que possa ser representativa da população.

### **Exemplos:**

1. O governo encomenda ao Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) uma pesquisa para conhecer o salário médio do brasileiro. O universo estatístico ou população estatística é, neste caso, o conjunto de todos os assalariados brasileiros.

2. Um partido político quer conhecer a tendência dos eleitorados quanto a preferência entre dois candidatos à presidência do Brasil. Para isso, encomenda uma pesquisa a uma empresa especializada. A população estatística, nesse caso, é o conjunto de todos os eleitores brasileiros.

## 2 VARIÁVEIS

É um símbolo, como X, Y, Z, ..., que pode assumir resultados de um conjunto, que lhe são atribuídos, conjunto este chamado domínio da variável. Se a variável pode assumir somente um valor, ela é denominada constante.

As variáveis podem ser classificadas em:

- Variáveis qualitativas ou atributos: indica alguma propriedade do fenômeno de observação;
- Variáveis quantitativas discretas: quando podem assumir apenas alguns valores de um conjunto;
- Variáveis quantitativas contínuas: quando podem assumir, teoricamente, qualquer valor de um conjunto.

Em geral, as medições dão origem a variáveis continuas, enquanto que as enumerações ou contagens resultam em variáveis discretas.

### Exemplos:

1. Os resultados de lançamento de um dado pode assumir os valores 1, 2, 3, 4, 5 e 6, mas não os valores 2, 3 ou 3, 2. Logo a variável é discreta.

2. Os pesos ou as alturas de conjunto de pessoas podem assumir, teoricamente, qualquer valor. Logo, a variável é contínua.

## 3 ROL

É uma lista, onde as observações são dispostas em uma determinada ordem: crescente ou decrescente. O objetivo da ordenação é tornar possível a visualização das variações ocorridas, uma vez que os valores extremos são percebidos de imediato, e também facilitar a construção da distribuição de freqüências.

Rol crescente



**Exemplo:** Os cinco alunos de uma amostra apresentaram as seguintes notas na prova bimestral de matemática: 6, 4, 8, 7, 8. Apresentando esses dados em rol, temos: (4, 6, 7, 8, 8) ou (8, 8, 7, 6, 4).

## 4 DISTRIBUIÇÕES DE FREQÜÊNCIA

É uma tabela que reúne o conjunto de dados, conforme as freqüências ou as repetições de seus valores. Esta tabela pode representar os dados em classes ou não, de acordo com a classificação dos dados em discretos ou contínuos.

Denominamos freqüência absoluta ( $f_i$ ) o numero de vezes que fica relacionado a um determinado valor da variável. Obtemos assim, uma tabela que recebe o nome de distribuição de freqüência.

**Exemplo:** Suponhamos ter feito uma coleta de dados relativo as estaturas de 40 alunos, que compõem uma amostra de um Colégio A, resultando a tabela de valores que segue.

Tabela 4.1  
Estatura de 40 alunos do Colégio A

166	160	161	150	162	160	165	167	164	160
162	161	168	163	156	173	160	155	164	168
155	152	163	160	155	155	169	151	170	164
154	161	156	172	153	157	156	158	158	161

A esse tipo de tabela, cujos elementos não foram numericamente organizados denominamos tabela primitiva.

Agora organizamos nosso rol de modo crescente na seguinte tabela:

Tabela 4.2  
Estatura de 40 alunos do Colégio A

150	154	155	157	160	161	162	164	166	169
151	155	156	158	160	161	162	164	167	170
152	155	156	158	160	161	163	164	168	172
153	155	156	160	160	161	163	165	168	173

Faremos agora a distribuição de freqüência:

Tabela 4.3  
Estatura de 40 alunos do Colégio A

Estat. (cm)	Freq. ( $f_i$ )	Estat. (cm)	Freq. ( $f_i$ )	Estat. (cm)	Freq. ( $f_i$ )
150	1	158	2	167	1
151	1	160	5	168	2
152	1	161	4	169	1
153	1	162	2	170	1
154	1	163	2	172	1
155	4	164	3	173	1
156	3	165	1	Total	40
157	1	166	1		

Mas o processo dado é ainda inconveniente, já que exige muito espaço, mesmo quando o numero de valores da variável ( $n$ ) é de tamanho razoável . Sendo possível, a solução mais aceitável, pela própria natureza da variável continua, é o agrupamento dos valores em vários intervalos.

Assim, se um dos intervalos for por exemplo,  $154 — 158$  (é um intervalo fechado a esquerda e aberto a direita, tal que:  $154 \leq x < 158$ ), e vez de dizermos que a estatura de 1 aluno é de 154cm; de 4 alunos, 155cm; de 3 alunos, 156cm; e de 1 aluno, 157cm, diremos que 9 alunos tem estaturas entre inclusive 154 e 158cm.

Deste modo, estaremos agrupando os valores da variável em intervalos, sendo que, em Estatística, preferimos chamar os intervalos de classes.

Chamando de freqüência de uma classe o numero de valores da variável pertencentes à classe, os dados da tabela 4.3 podem ser dispostos na tabela 4.4, denominada distribuição de freqüência com intervalos de classe:

**Tabela 4.4**  
**Estatura de 40 alunos do Colégio A**

Estaturas (cm)	Freqüências ( $f_i$ )
150 — 154	4
154 — 158	9
158 — 162	11
162 — 166	8
166 — 170	5
170 — 174	3
Total	40

Ao agruparmos os valores da variável em classes, ganhamos em simplicidade mas perdemos em pormenores. Assim, na tabela 4.3 podemos verificar facilmente, que 4 alunos têm 161cm de altura e que não existe nenhum aluno com 171cm de altura. Já na tabela 4.4 não podemos ver se algum aluno tem a estatura de 155cm. No entanto, sabemos, com segurança, que 11 alunos tem estatura compreendida entre 158 e 168cm.

O que pretendemos com a construção desta nova tabela é realçar o que há de essencial nos dados e, também, tornar possível o uso de técnicas analíticas para sua total descrição, até porque a Estatística tem por finalidade específica analisar o conjunto de valores, desinteressando-se por casos isolados.

### **Observações:**

1. A soma das freqüências de todas as classes é a *freqüência total* ( $F_t$ ) das amostras;
2. Dividindo cada freqüência absoluta ( $f_i$ ) de uma classe pela freqüência total ( $F_t$ ), obtém-se o numero chamado de freqüência relativa ( $f_{ri}$ ) da classe;
3. Freqüência absoluta acumulada ou freqüência acumulada ( $F_i$ ) é o total das freqüências de todos os valores inferiores ao limite superior do intervalo de uma dada classe.

Utilizando a tabela 4.4, temos:

Tabela 4.5  
Estatura de 40 alunos do Colégio A

Estaturas (cm)	$f_i$	$F_i$	$f_{ri}$
150 — 154	4	4	$4/40=0,1 \Rightarrow 10\%$
154 — 158	9	$4+9=13$	$9/40=0,225 \Rightarrow 22.5\%$
158 — 162	11	$13+11=24$	$11/40=0,275 \Rightarrow 27,5\%$
162 — 166	8	$24+8=32$	$8/40=0,2 \Rightarrow 20\%$
166 — 170	5	$32+5=37$	$5/40=0,125 \Rightarrow 12.5\%$
170 — 174	3	$37+3=40$	$3/40=0,075 \Rightarrow 7,5\%$
Total	40		$1 \Rightarrow 100\%$

### (1) Exercícios

1. Em uma escola, o conceito de cada trimestre é representado por letras: A, B, C, D e E. Em um determinado bimestre, os conceitos dos alunos da 6<sup>a</sup> série em Ciências foram os seguintes:

Disciplina: Ciências																				
Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Conceito	B	A	C	C	D	C	D	A	A	C	E	D	D	C	B	C	B	C	C	B

Nestas condições, elabore um quadro de distribuição de freqüências absolutas e freqüências acumuladas.

2. Um dado foi lançado 15 vezes, tendo-se obtido os seguintes pontos: 2, 5 6, 6, 1, 4, 2, 6, 5, 1, 3, 3, 2, 4, 6. Construa uma distribuição de freqüências absolutas e freqüências acumuladas.

3. Os salários mensais, em dezenas de reais, dos 20 funcionários de uma empresa são: 72, 72, 80, 88, 84, 72, 76, 80, 92, 72, 76, 80, 84, 72, 68, 76, 80, 72, 88, 76. Elabore um quadro de distribuição de freqüências absolutas e freqüências acumuladas. (Sugestão: tome como extremos o menor e o maior valor).

4. A distribuição abaixo indica o número de acidentes ocorridos com 70 motoristas de uma empresa de ônibus:

Números de acidentes	0	1	2	3	4	5	6	7
Números de motoristas	20	10	16	9	6	5	3	1

Determine:

- a) o numero de motoristas que não sofreram nenhum acidente;
- b) o numero de motoristas que sofreram pelo menos 4 acidentes;
- c) o numero de motoristas que sofreram menos de 3 acidentes;
- d) o numero de motoristas que sofreram no mínimo 3 e no máximo 5 acidentes;
- e) a percentagem de motoristas que sofreram no máximo 2 acidentes.

5. Os conteúdos de vinte latas de leite em pó apresentaram as seguintes massas, em kg:

0,48	0,50	0,51	0,48	0,49
0,49	0,51	0,51	0,50	0,49
0,50	0,52	0,48	0,49	0,50
0,49	0,50	0,51	0,48	0,49

Organize estes dados numa tabela:

Classe (massa em kg)	Freqüência	Freqüência relativa
0,48		
0,49		
0,50		
0,51		
0,52		
Total =		

6. Em uma amostra de alunos de uma escola verificaram-se as seguintes estaturas, em centímetros:

168	170	165	177
169	180	162	171
178	173	164	172
181	166	168	170

Organize esses dados numa tabela:

Classe (estatura em cm)	Freqüência	Freqüência relativa
[161,5; 166,5[		
[166,5; 171,5[		
[171,5; 176,5[		
[176,5; 181,5]		
	Total =	

7. As áreas construídas, medidas em metros quadrados, de vinte residências de certa região são:

250	280	330	402	385
302	290	270	310	304
407	380	295	283	402
390	300	283	250	265

Construa uma tabela de distribuição de freqüência dessa amostra com seis classes de mesma amplitude (Sugestão: use como amplitude de classe 26,2).

8. A tabela relaciona os diâmetros, em centímetros, das barras de ferro de uma amostra:

3,10	2,95	3,20	3,15
2,80	3,15	3,40	3,35
2,70	2,95	3,15	2,95
3,20	3,10	2,85	3,25

Construa uma tabela de distribuição freqüência dessa amostra com cinco classes de mesma amplitude (Sugestão: use como amplitude de classe 0,14).

9. As estaturas, em metros, de vinte alunos são:

1,68	1,75	1,70	1,65	1,74
1,63	1,72	1,73	1,64	1,75
1,76	1,69	1,60	1,72	1,66
1,71	1,69	1,68	1,75	1,69

Construa uma tabela de distribuição de freqüência dessa amostra com quatro classes de mesma amplitude (Sugestão: use como amplitude de classe 0,04).

## 5 TABELAS E GRÁFICOS

### 5.1 Tabelas

**Tabela** é um quadro que resume um conjunto de observações. Uma tabela compõe-se de:

- a) corpo: conjunto de linhas e colunas que contem informações sobre a variável em estudo;
- b) cabeçalho: parte superior da tabela que especifica o conteúdo das linhas;
- c) coluna indicadora: parte da tabela que especifica o conteúdo das linhas;
- d) linhas: retas imaginárias que facilitam a leitura, no sentido horizontal, de dados que se inscrevem nos seus cruzamentos com as colunas;
- e) casa ou cédula: espaço destinado a um só número;
- f) título: conjunto de informações, as mais completas possíveis, respondendo as perguntas: O que?, Quando?, Onde?, localizado no topo da tabela.

Há ainda a considerar os elementos complementares da tabela, que serão a fonte, as notas e as chamadas colocadas, de preferência, no seu rodapé.

Título: O que?, Onde?, Quando?

---

Cabeçalho

---

Total

---

⇐ Coluna indicadora

Corpo da tabela

---

Total

---

Fonte:

\*



Rodapé

Nota:

## 5.2 Gráficos

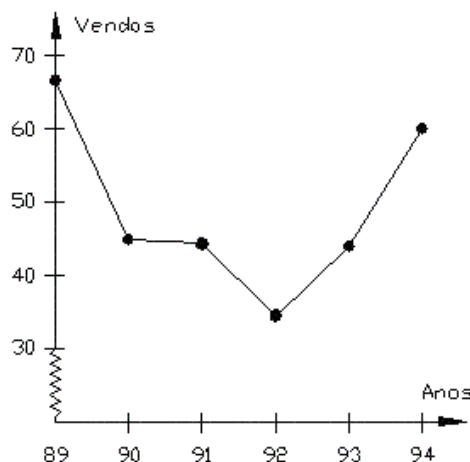
Os gráficos permitem a representação da relação entre variáveis e podem facilitar a compreensão dos dados, se apresentados de forma clara e objetiva. Em Estatística são usados os gráficos de linha, coluna e setor, entre outros.

### 5.2.1 Gráfico de linha

Os dados são colocados num sistema cartesiano ortogonal em geral representam dados de uma tabela. Graficamente temos pontos que são ligados através de segmentos de reta.

#### Exemplo: 1.

Discos vendidos nos últimos anos (em milhões)	
Anos	Vendas
1989	66,6
1990	44,8
1991	44,3
1992	34,5
1993	44
1994	60

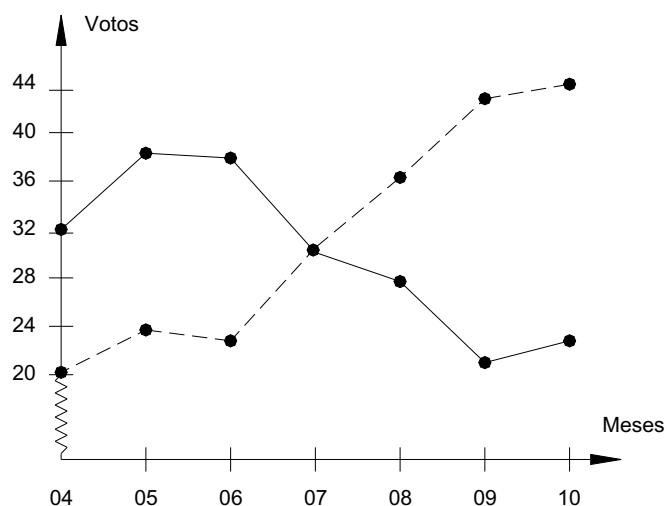


Como o menor valor é 34,5 então começamos por 30, de 10 em 10, ficando um vão de 0 a 30. O primeiro ano (89) é marcado coincidindo com o eixo y. São marcadas distâncias iguais entre dois anos consecutivos.

O gráfico mostra claramente a queda de vendas de 89 a 92 e a retomada de 92 a 94.

2.

Porcentagem de votos para presidente		
Meses	Lula	FHC
Abril	31,7	20,2
Maio	38,3	23,5
Junho	37,9	22,8
Julho	30,1	30,5
Agosto	27,6	36,3
Setembro	21,0	42,8
Outubro	22,8	43,5



No eixo x anotamos os meses e no eixo y os percentuais dos candidatos Lula e FHC. São dois gráficos de linha no mesmo sistema cartesiano e que permitem comparar o desempenho dos dois candidatos.

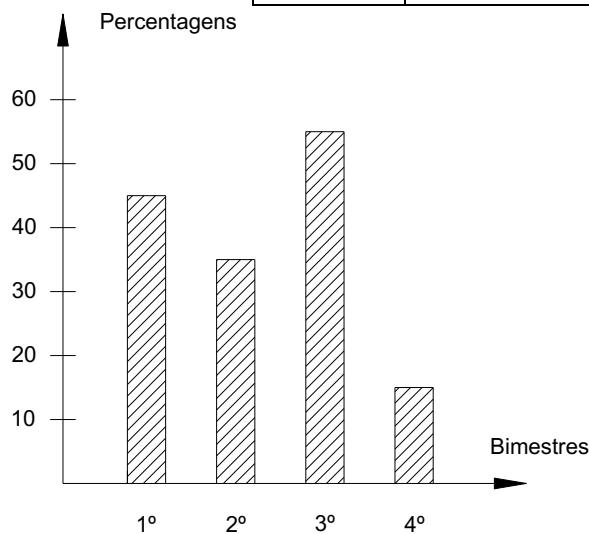
### 5.2.2 Gráfico de coluna

Neste tipo de gráfico usamos retângulos com bases de mesma medida e separados por distâncias iguais. As freqüências dos fatos observados são dadas pelas alturas dos retângulos, anotadas no eixo y.

#### Exemplos:

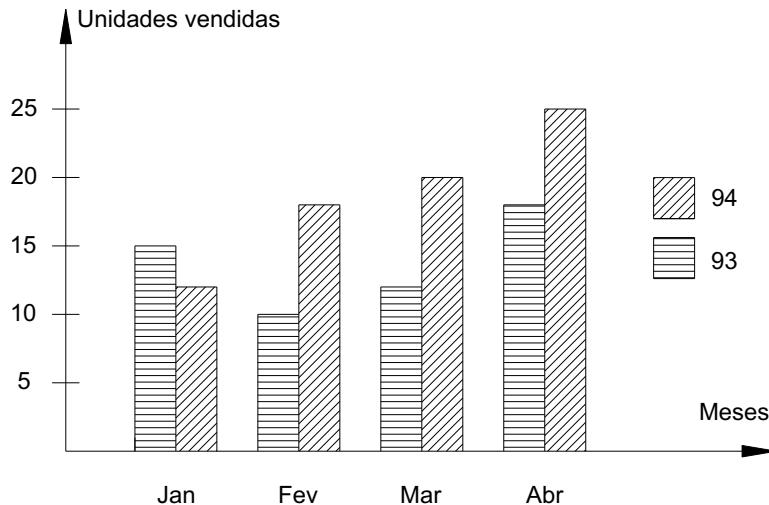
1. A tabela apresenta os percentuais de reprovação de uma determinada disciplina no ano letivo.

Bimestres	Percentuais
1º	45%
2º	35%
3º	55%
4º	15%



- 2.

Unidades Vendidas		
Meses	1993	1994
janeiro	15	12
fevereiro	10	18
março	12	20
abril	18	25



### 5.2.3 Gráfico de setor

Os dados são apresentados em setores circulares que são proporcionais aos valores. Fazemos corresponder a uma volta do círculo ( $360^\circ$ ) o total (100%) dos dados e estabelecemos através de uma regra de três o ângulo relativo ao setor circular de acordo com cada valor.

#### Exemplo:

Produtos	Quantidade Vendida
A	60
B	120
C	240
D	300
Total	720

- Produto A:

$$\frac{720}{60} \frac{360^\circ}{A} \Rightarrow A = \frac{60 \cdot 360^\circ}{720} \Rightarrow A = 30^\circ$$

- Produto B:

$$\frac{720}{120} \frac{360^\circ}{B} \Rightarrow B = \frac{120 \cdot 360^\circ}{720} \Rightarrow B = 60^\circ$$

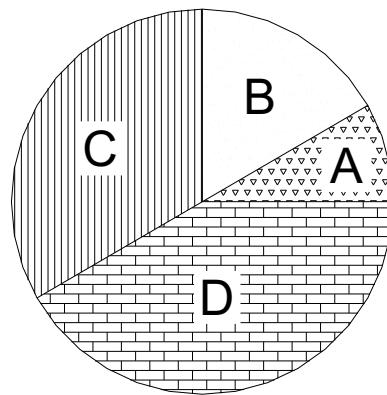
• Produto C:

$$\frac{720}{240} \frac{360^\circ}{C} \Rightarrow C = \frac{240 \cdot 360^\circ}{720} \Rightarrow C = 120^\circ$$

• Produto D:

$$\frac{720}{300} \frac{360^\circ}{D} \Rightarrow D = \frac{300 \cdot 360^\circ}{720} \Rightarrow D = 150^\circ$$

Em seguida, com o transferidor marcamos os ângulos no sentido anti-horário.



**(2) Exercícios**

1. Construa o gráfico de linha e de colunas para as tabelas abaixo:

a)

Mês	Unidades vendidas
Jan.	12
Fev.	20
Mar.	18
Abr.	24
Mai.	16
Jun.	8

b)

Pronto-socorro - Casos	
Dias da semana	Atendimento
Segunda	18
Terça	16
Quarta	16
Quinta	14
Sexta	10
Sábado	6

c)

Mês	Candidatos (%)		
	A	B	C
Jan.	12	30	40
Fev.	16	25	36
Mar.	20	20	40
Abr.	24	18	32
Mai.	30	20	35

2. Construa os gráficos de setores para as tabelas:

a)

Produtos	Vendas (%)
A	30
B	20
C	40
D	10

b)

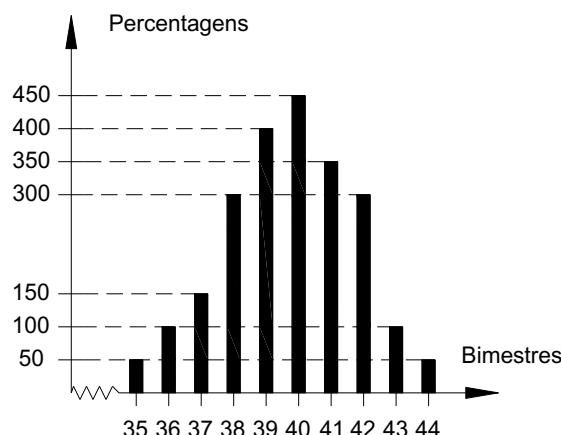
Produtos	Porcentagens (%)
Milho	20
Trigo	25
Arroz	45
Batata	10

3. Uma pesquisa sobre atividades culturais extra-classe foi feita entre 1000 alunos de uma escola. O resultado está no quadro seguinte:

Atividades	Nº de alunos
Visitas a museus	400
Visitas a outras cidades	200
Palestras	250
Exposições	100
outras	50

Usando um gráfico de setores, faça a representação gráfica desta distribuição.

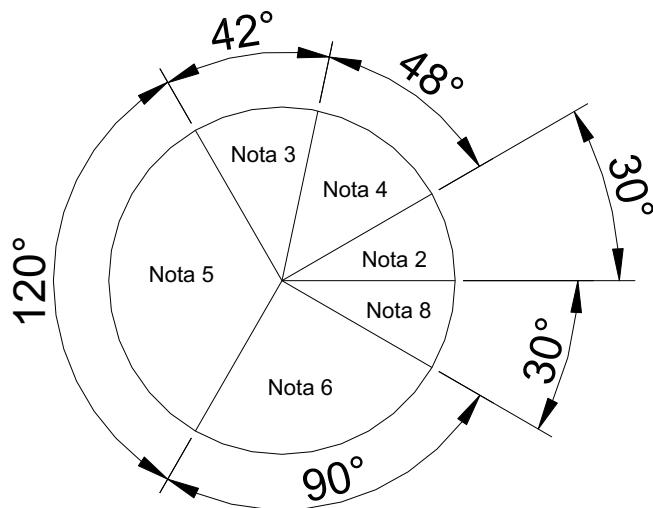
4. O gráfico corresponde à distribuição de freqüência dos pares de sapatos vendidos por uma fábrica num certo mês, segundo as numerações dos calçados.



a) Quantos pares de sapatos foram vendidos pela fábrica neste mês?

b) Qual é a freqüência relativa da classe 40, isto é, da numeração 40 dos sapatos?

5. O gráfico de setores ilustra a distribuição dos alunos de uma amostra e suas notas na prova de português.



Sabendo que a amostra é composta de 60 alunos:

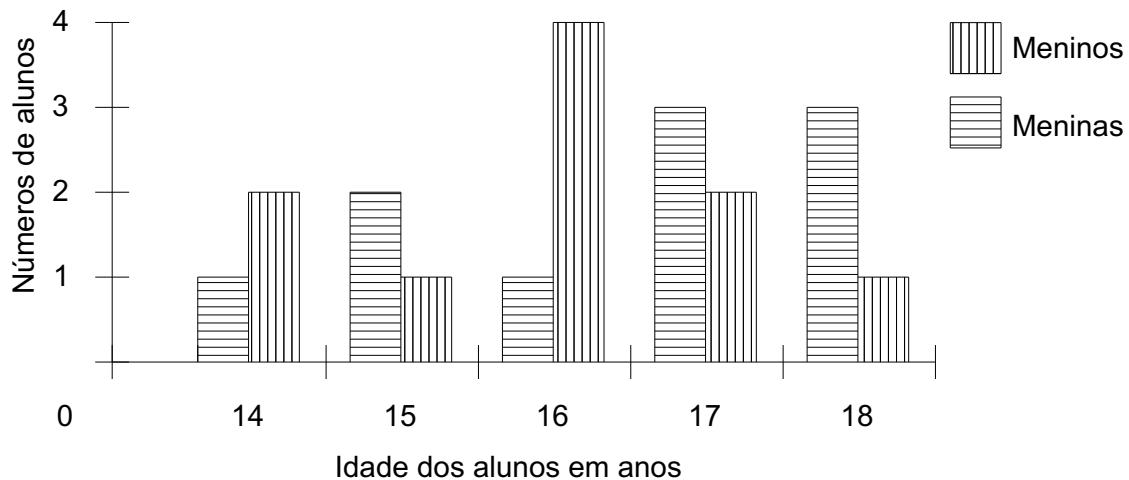
- quantos alunos tiveram nota 3?
- quantos alunos tiveram nota 5?
- qual é a freqüência relativa da classe “nota 6”?

6. A tabela seguinte corresponde à distribuição de freqüência das camisas vendidas por uma confecção no mês de maio, segundo a numeração (1, 2, 3, 4 e 5) das camisas.

Classe (numeração)	Freqüência
1	50
2	140
3	250
4	450
5	100

Construa os gráficos de linha, de barras verticais e de setores dessa distribuição.

7. Num curso de iniciação à informática, a distribuição das idades dos alunos, segundo o sexo, é dada pelo gráfico seguinte:

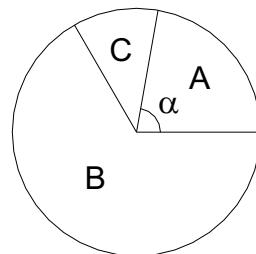


Com base nos dados do gráfico, pode-se afirmar que:

- a) o número de meninas com, no máximo, 16 anos é maior que o número de meninos nesse mesmo intervalo de idades.
- b) O número total de alunos é 19.
- c) Há exatamente 10 alunos com mais de 16 anos.
- d) O número de meninos é igual ao número de meninas.
- e) O número de meninos com idade maior que 15 anos é maior que o número de meninas nesse mesmo intervalo de idades.

8. Os dados da tabela abaixo se referem a uma pesquisa de opinião.

Posição	Número de pessoas	Legenda
A favor	200	A
Contra	600	B
Sem opinião formada	100	C

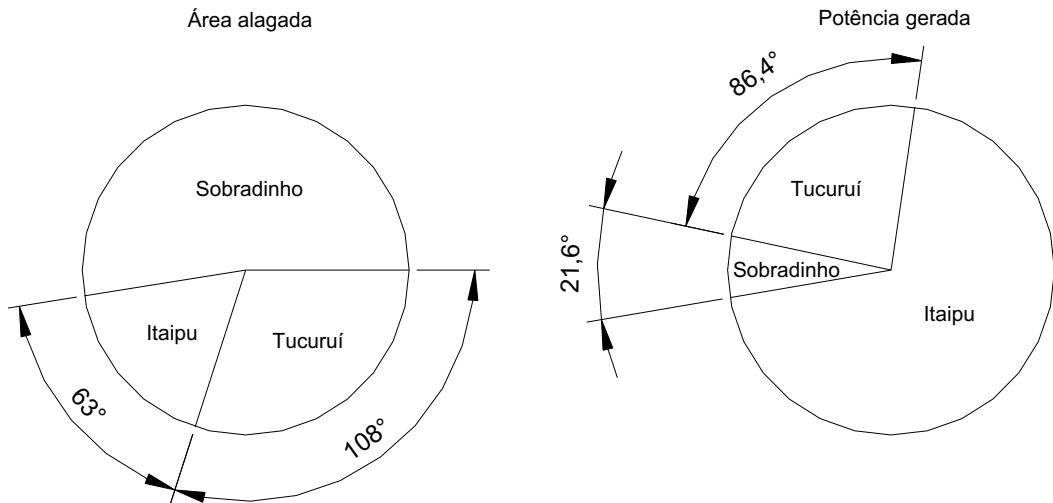


Para representá-los num gráfico de setores, como o de figura,  $\alpha$  deve ser um ângulo central de:

- a)  $90^\circ$
- b)  $80^\circ$
- c)  $70^\circ$
- d)  $60^\circ$
- e)  $40^\circ$

9. As usinas de Tucuruí, Sobradinho e Itaipu geram juntas 18.000 MW (megawatt) de potência, e a soma das áreas alagadas de suas represas é 8.000 km<sup>2</sup>.

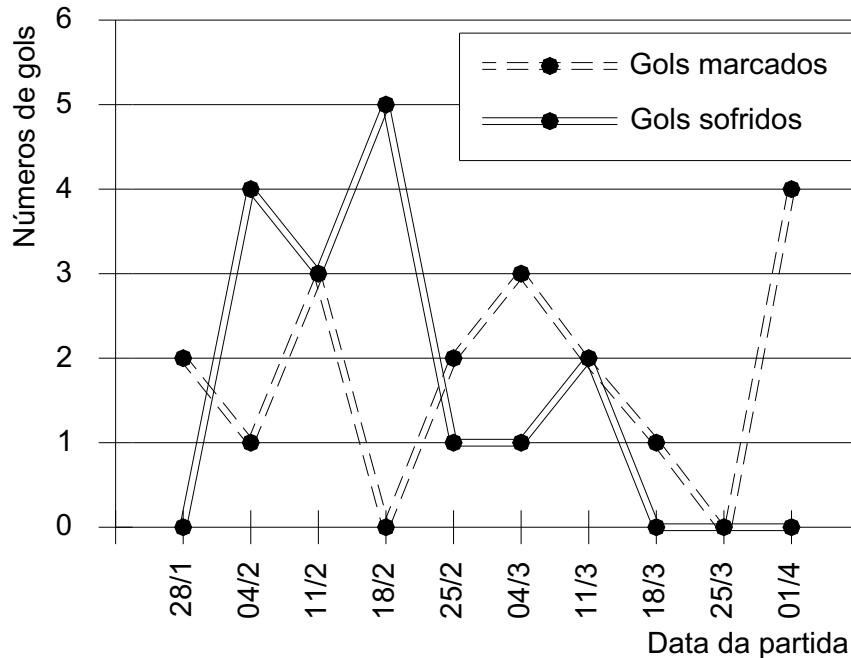
Os gráficos a seguir mostram a distribuição das áreas alagadas dessas represas e a distribuição das potências geradas pelas três usinas:



De acordo com essas informações, a área alagada pela represa de Itaipu e a potência gerada por essa usina são, respectivamente:

- a) 1.600 km<sup>2</sup> e 14.200 MW
- b) 1.600 km<sup>2</sup> e 14.000 MW
- c) 1.400 km<sup>2</sup> e 12.600 MW
- d) 1.400 km<sup>2</sup> e 13.000 MW
- e) 1.400 km<sup>2</sup> e 12.500 MW

10. No gráfico estão representados os gols marcados e os gols sofridos por uma equipe de futebol nas dez primeiras partidas de um determinado campeonato.



Considerando que, neste campeonato, as equipes ganham 3 pontos para cada vitória, 1 ponto por empate e 0 ponto em caso de derrota, a equipe em questão, ao final da décima partida, terá acumulado um número de pontos igual a:

- a) 15.      b) 17.      c) 18.      d) 20.      e) 24.

## 6 MÉDIAS

### 6.1 Média aritmética

A média aritmética simples entre dois ou mais números é dada pelo quociente formado pela soma desses números ( $x_1+x_2+x_3+\dots+x_n$ ) e a quantidade de parcelas consideradas (n).

Isto é, a média aritmética dos números  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , que se indica por  $\overline{X}$ , é dado por:

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

**Exemplos:** 1. Uma livraria vende a seguinte quantidade de livros de literatura durante certa semana:

2 <sup>a</sup> feira	3 <sup>a</sup> feira	4 <sup>a</sup> feira	5 <sup>a</sup> feira	6 <sup>a</sup> feira	sábado
22	23	22	27	25	13

Qual foi a média de livros vendidos durante esta semana?

Resolução:

$$\bar{X} = \frac{22 + 23 + 22 + 27 + 25 + 13}{6} = \frac{132}{6} = 22$$

Portanto a media de livros vendidos foi de 22 livros por dia.

2. Os conteúdos de quatro baldes de água são 3 litros, 5 litros, 2 litros e 1 litro. Se todo esse volume de água fosse distribuído igualmente entre os baldes, com quantos litros de água ficaria cada um?

Resolução:

$$\bar{X} = \frac{3+5+2+1}{4} = 2,75 \text{ litros.}$$

Portanto ficaria com 2,75 litros cada balde.

Quando os dados estão agrupados, se aceita, por convenção, que as freqüências se distribuem uniformemente ao longo da classe e que, portanto, o seu ponto médio (marca da classe) é o valor representativo do conjunto.

Neste caso, a média é calculada partindo-se da marca da classe.

**Exemplo:** Consideremos, então, o quadro de distribuição de freqüências seguintes, que representa a distribuição dos salários mensais de 40 empregados de uma firma.

Classe (em reais)	Marca da Classe ( $x_i$ )	Freqüência ( $f_i$ )
[80; 100[	90	4
[100; 120[	110	18
[120; 140[	130	10
[140; 160[	150	5
[160; 180[	170	3

Resolução:

Para calcular o salário médio, devemos fazer:

$$\bar{X} = \frac{90x4 + 110x18 + 130x10 + 150x5 + 170x3}{4+18+10+5+3}$$

$$\bar{X} = \frac{360 + 1980 + 1300 + 750 + 510}{40} = \frac{4900}{40} = 122,5$$

Portanto o salário médio mensal é de 122,5 reais.

## 6.2 Média Ponderada

A média ponderada de vários números, aos quais correspondem determinado pesos, é dada pelo quociente formado pela soma dos produtos parciais de cada número pelo seu peso, e a soma dos pesos.

Isto é, a média aritmética ponderada dos números  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , com pesos  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ , respectivamente, é o numero  $\bar{X}$  tal que:

$$\bar{X} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n}$$

**Exemplos:** 1. Num exame de um aluno, Português tem peso 5 e a sua nota foi 60. Matemática tem peso 3 e sua nota foi 40. Historia tem peso 2 e sua nota foi 70. A sua média ponderada será?

Resolução:

$$\bar{X} = \frac{60x5 + 40x3 + 70x2}{5+3+2} = \frac{300 + 120 + 140}{10} = 56$$

2. Cinco baldes contem 4 litros de água cada um, três outros baldes contem 2 litros de água cada um, e outros dois contêm 5 litros cada um. Se toda essa água fosse igualmente distribuída entre esses baldes, com quantos litros ficaria cada um?

Resolução:

$$\bar{X} = \frac{4x5 + 2x3 + 5x2}{5+3+2} = 3,6 \text{ litros}$$

Portanto 3,6 litros em cada balde.

### 6.3 Média Harmônica

Chama-se média harmônica de  $n$  números  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , todos diferentes de zero o numero  $H$  tal que:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n}}. \text{ Isto é, } H \text{ é o inverso da média aritmética}$$

dos inversos dos  $n$  números.

**Exemplos:** Calcule a média harmônica de:

a) 3 e 5

Resolução:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

$$H = \frac{2}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = \frac{2}{\frac{8}{15}} = \frac{2 \times 15}{8} = \frac{30}{8} = 3,75$$

b) 2, 4 e 3

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

$$H = \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{\frac{6+3+4}{12}} = \frac{3}{\frac{13}{12}} = \frac{3 \times 12}{13} = \frac{36}{13} = 2,769$$

### (3) Exercícios

1. Calcule a média harmônica de:

- a) 1, 4 e 8      b) 1, 5, 6 e 2      c) 3, 5, 4 e 2

2. As alturas dos jogadores de um time de basquete são 1,98m; 2,02m; 2,08m; 1,92m e 1,95m. Qual é a média de altura dessa equipe?

3. A classificação final de um determinado curso é a média ponderada das classificações obtidas em três áreas: A, B e C. Um candidato obteve as seguintes classificações parciais:

Área A = 17 pontos

Área B = 24 pontos

Área C = 20 pontos

Sabendo que os pesos são 5 para a área A, 2 para a área B e 3 para a área C, determine a classificação desse candidato.

4. A tabela nos dá uma distribuição de freqüências. Calcule a média dessa distribuição.

$x_i$	$f_i$
10	8
20	11
30	7
40	5

5. Nas linhas seguintes estão as idades, em anos, de 20 alunos que estudam na 1º série do ensino médio:

15, 15, 14, 16, 16, 16, 17, 16, 14, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 17, 16, 15, 14, 15

Nessas condições:

a) Faça um quadro de distribuição de freqüências absolutas.

b) Qual é a média aritmética dessas distribuições?

6. Calcule a média da seguinte distribuição de freqüências:

$x_i$	$f_i$
20	6
22	21
24	48
26	60
28	45
30	22
32	8

7. Calcule a média aritmética da seguinte distribuição (não se esqueça de determinar a marca da classe):

Classe	Freqüência
[4,5; 5,5[	10
[5,5; 6,5[	7
[6,5; 7,5[	16
[7,5; 8,5[	9
[8,5; 9,5[	8

8. O quadro de distribuição das alturas, em m, de 25 alunos de uma classe está logo abaixo. Determine a altura média dos alunos da classe.

Classe	Freqüência
[1,60; 1,70[	5
[1,70; 1,80[	6
[1,80; 1,90[	7
[1,90; 2,00[	5
[2,00; 2,10[	2

9. O quadro abaixo nos mostra as notas de uma prova de Matemática feita pelos alunos da 1º série do ensino médio de um determinado colégio.

Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Nota	8	5	4	4	3	6	2	4	7	6	6	5	4	8	9	7	6	6	5	5	5	2	4	3	3

Nessas condições:

- Organize um quadro de distribuição de freqüências absolutas, freqüências absolutas acumuladas e freqüências relativas.
- Represente a distribuição de freqüência absoluta por meio de um gráfico de colunas.
- Determine a média aritmética desta distribuição.

10. Feito um levantamento sobre as idades de 25 alunos que cursam a 5º série de um determinado colégio, chegou-se ao seguinte quadro:

Idade ( $x_i$ )	Freqüência ( $f_i$ )
10	3
11	11
12	8
13	3

Nestas condições:

- a) Faça um gráfico por setores que represente esta distribuição.
- b) Determine a média dessa distribuição.

11. O quadro seguinte mostra as médias, em Física, de 20 alunos da 3º série do ensino médio durante um determinado bimestre.

Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Nota	7	3	3	5	6	6	4	4	7	4	5	5	4	8	7	7	4	5	5	3

Nessas condições:

- a) Organize um quadro de distribuição de freqüências absolutas, freqüências absolutas acumuladas e freqüências relativas.
- b) Determine a média aritmética desta distribuição.

12. Feito um levantamento sobre os salários de 20 funcionários de uma firma, pode-se elaborar o seguinte quadro de distribuição:

Classes de salários	Freqüência ( $f_i$ )
[50; 100[	3
[100; 150[	4
[150; 200[	10
[200; 250[	2
[250; 300[	1

Nessas condições:

- a) Faça um quadro de distribuição destacando a marca da classe e a distribuição de freqüência acumulada.
- b) Calcule a média dessa distribuição.

13. As distâncias, em milhares de quilômetros, percorridas em um ano pelos 20 táxis de uma empresa estão representados no quadro seguinte:

Distâncias	Número de táxis
[45; 55[	3
[55; 65[	7
[65; 75[	4
[75; 85[	5
[85; 95[	1

Nessas condições:

- Elabore um quadro indicando a marca da classe e a freqüência absoluta acumulada.
- Represente graficamente por meio de um gráfico de setores.
- Determine a média dessa distribuição.

14. As idades das 40 pessoas que prestam um concurso de seleção para um banco são as seguintes:

18, 18, 20, 22, 21, 18, 19, 20, 22, 18, 19, 20, 21, 18, 20, 19, 20, 19, 22, 19, 20, 21, 20, 18, 19, 18, 22, 21, 20, 19, 20, 18, 21, 18, 18, 19, 20, 19, 18, 18.

Nessas condições:

- Elabore um quadro de distribuição de freqüências absolutas, de freqüências absolutas acumuladas e de freqüências relativas.
- Construa um gráfico de colunas que represente esta distribuição.
- Quantas pessoas têm 20 ou menos de 20 anos?
- Determine a média do quadro de distribuição.

15. Considere a seguinte distribuição de freqüências.

Classes	Freqüência
[0; 4[	5
[4; 8[	5
[8; 12[	8
[12; 16[	2

Nessas condições:

- Elabore uma tabela de distribuição de freqüências absolutas acumuladas e de freqüências relativas.
- Represente graficamente por meio de um gráfico de setores.
- Determine a média dessa distribuição.

16. A média aritmética das idades de um grupo de 120 pessoas é de 40 anos. Se a média aritmética das idades das mulheres é 35 anos e a dos homens é 50 anos, qual é o número de pessoas de cada sexo, no grupo?

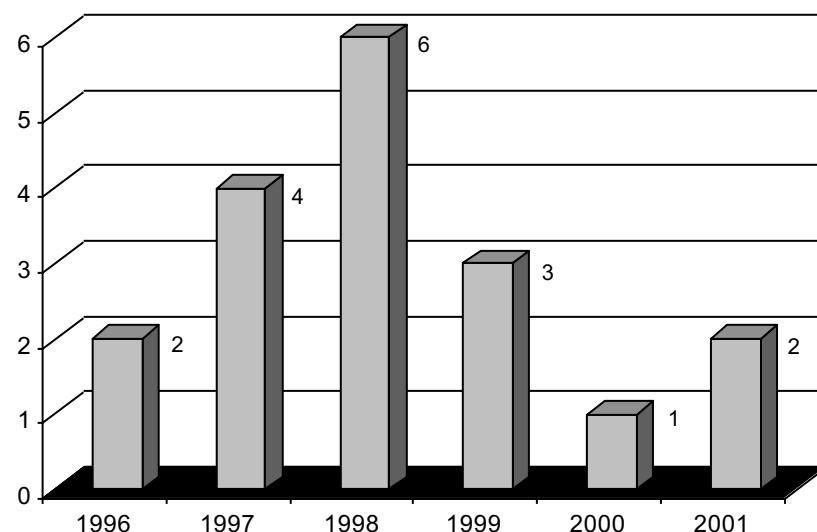
17. A tabela a seguir apresenta a distribuição de freqüências dos salários de um grupo de 50 empregados de uma empresa, num certo mês.

Número da classe	Salário do mês em reais	Número de empregados
1	1.000 → 2.000	20
2	2.000 → 3.000	18
3	3.000 → 4.000	9
4	4.000 → 5.000	3

O salário médio desses empregados, nesse mês, foi de:

- a) R\$ 2.637,00
- b) R\$ 2.520,00
- c) R\$ 2.500,00
- d) R\$ 2.420,00
- e) R\$ 2.400,00

18. O gráfico a seguir representa, em reais, as vendas anuais de uma empresa no período de 1996 a 2001.



Calcule, em milhões de reais, a média anual de vendas dessa empresa, no período considerado.

#### **(4) Exercícios complementares**

1. A tabela a seguir é resultante de uma pesquisa sobre “gêneros musicais” mais vendidos em uma loja de CDs durante um dia. Complete os espaços.

Gênero musical	$f_i$	$f_{ri}$	$f_{ri}$	$f_{ri}$
Setanejo				30%
MPB		6/25		
Rock				
Clássico			0,14	
Total	50			

2. Foi feito um levantamento dos “salários” do funcionários de uma empresa e, em seguida, foi elaborada a tabela de freqüências, com os valores da variável em classes. Complete a tabela.

Salário (R\$)	$f_i$	$f_{ri}$
—		10%
—	15	
—	30	50%
—	6	
960 — 1050		
Total		

3. Na Copa do Mundo da França (1998), o Brasil disputou os seguintes jogos: Brasil 2 x 1 Escócia; Brasil 3 x 0 Marrocos; Brasil 1 x 2 Noruega; Brasil 4 x 1 Chile; Brasil 3 x 2 Dinamarca; Brasil 1 x 1 Holanda; Brasil 0 x 3 França.

a) Construa a tabela de freqüências da variável “resultados”, considerando como valores as vitórias, os empates e as derrotas.

b) Elabore a tabela de freqüências da variável “gols marcados por partida”, usando como valores 2 gols, 3 gols e 5 gols.

4. Entre um grupo de funcionários de uma empresa foi feita uma pesquisa sobre salário mínimo. Veja os dados obtidos: 5,1; 2,5; 7; 4,3; 3,1; 6; 3,3; 5,5; 4; 6,5; 5; 2,8; 5,7; 4,5; 2; 5; 5,5; 2,9; 5; 1,7; 7; 3; 5,6; 4,2; 3,9.

Elabore a tabela de freqüências considerando a variável “salário” com seus valores em seis classes (intervalos) de mesmo tamanho (use 0,9).

5. Durante uma hora foram anotados os tipos de veículos que passaram pela rua onde está situada uma escola e foram obtidos os seguintes dados: T, T, T, M, A, T, T, M, T, B, B, T, T, A, T, T, C, T, M, T, T, T, C, B, T, T, T, T, A, T, T, T, M, C, T, T, T, T, B, T, T, M, B, A (M: motocicleta; C: caminhão; B: bicicleta; A: ambulância; T: carro). Construa um gráfico de colunas que corresponde a essa pesquisa.

6. As áreas das superfícies dos estados da região Sudeste do Brasil são, em valores aproximados: São Paulo, 250.000km<sup>2</sup>, Espírito Santo, 46.000km<sup>2</sup>; Rio de Janeiro, 44.000km<sup>2</sup>; Minas Gerais, 590000km<sup>2</sup>. Construa um gráfico de colunas registrando essa distribuição.

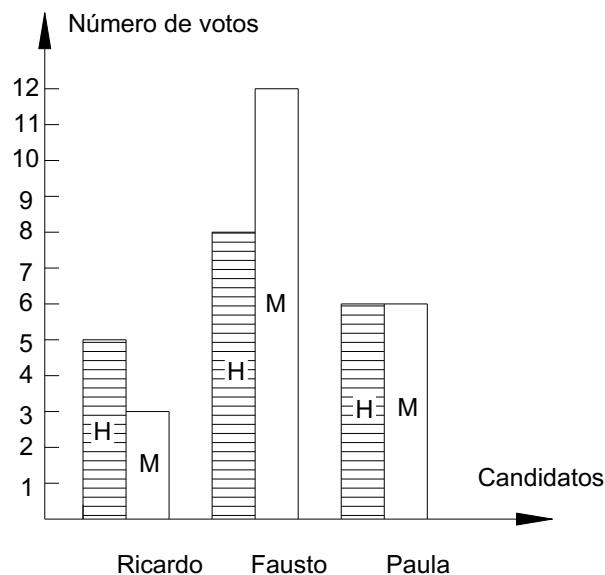
7. Em uma eleição concorreram os candidatos A, B e C e, apurada a primeira urna, os votos foram os seguintes: A: 50 votos; B: 80 votos; C: 60 votos; brancos e nulos (BN): 10 votos.

A partir desses dados construa:

- a) A tabela de freqüências dessa variável;
- b) O gráfico de barras, relacionando os valores da variável com as respectivas freqüências absolutas;
- c) O gráfico de setores, relacionando os valores da variável com suas porcentagens.

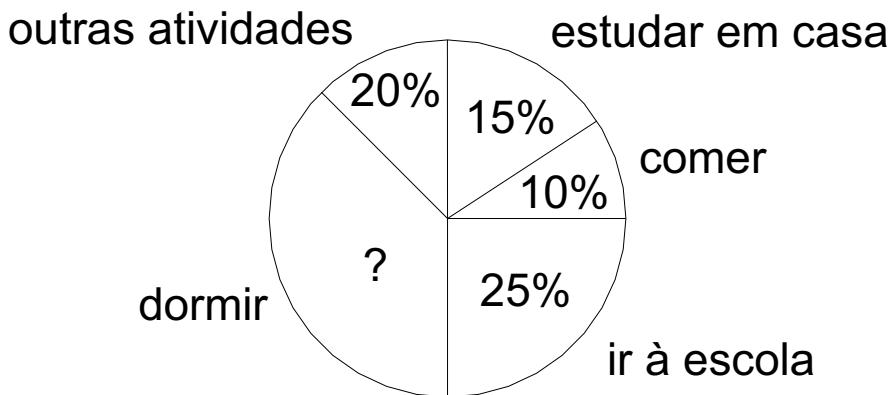
8. Em uma eleição para representante de classe, os candidatos foram Ricardo, Paula e Fausto. Observe o resultado da votação no gráfico de colunas, em que estão especificados os votos das mulheres e dos homens, e, em seguida, responda:

- Quantos alunos votaram? Desses, quantas mulheres e quantos homens?
- Quantos voto obteve a candidata Paula?
- Quantas mulheres votaram em Ricardo?
- Qual a porcentagem de votos recebidos por Fausto?



9. Luisa é muito organizada e para mostrar quanto tempo gasta com suas atividades construiu um gráfico de setores. Observe o gráfico e responda:

- Quantas horas por dia Luisa estuda em casa?
- Que porcentagem do dia ela gasta para dormir?
- Construa também o gráfico de coluna correspondente.



10. Um time de futebol realizou algumas partidas e os resultados foram 3 a 1, 4 a 2, 1 a 1, 0 a 0, 3 a 2, 2 a 1 e 1 a 0. Sabendo que o time não perdeu nenhuma partida, calcule a média aritmética dos gols:

- a) marcados;
- b) sofridos.

11. Se o aluno já fez dois trabalhos e obteve 8,5 e 5,0, qual deve ser a nota do terceiro trabalho para que a média aritmética dos três seja 7,0?

12. Qual é a média de idade de um grupo em que há 6 pessoas de 14 anos, 9 pessoas de 20 e 5 pessoas de 16 anos?

13. Calcule a média aritmética ponderada de um aluno que obteve no bimestre 8,0 na prova (peso 2), 7,0 na pesquisa (peso 3), 9,0 no debate (peso 1) e 5,0 no trabalho de equipe (peso 2).

14. Em certa eleição municipal foram obtidos os seguintes resultados:

Candidato	Porcentagem do total de votos	Números de votos
A	26%	
B	24%	
C	22%	
Nulos ou em branco		196

O número de votos obtido pelo candidato vencedor foi de:

- a) 178
- b) 182
- c) 184
- d) 188
- e) 191

15. Numa empresa com 20 funcionários, a distribuição dos salários está representada no quadro abaixo:

Número de empregados	Salário (em reais)
10	1540
5	1860
3	2120
2	3440

O salário médio (em reais) dos empregados dessa empresa é:

- a) 1680
- b) 1742
- c) 1786
- d) 1831
- e) 1897

16. A cantina de uma escola selecionou 50 alunos ao acaso e verificou o número de vezes por semana que eles compravam lanche.

0	2	2	4	3	2	2	1	2	2
1	1	0	1	1	1	1	1	1	2
2	2	3	2	2	2	0	2	2	1
1	0	2	0	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	1	2	5	4

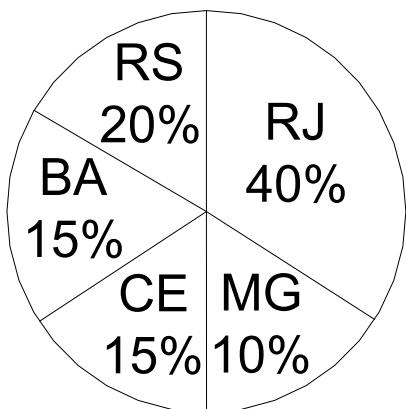
- a) Construa uma tabela de distribuição de freqüências absolutas com esses dados.  
b) Quantos alunos compram pelo menos 1 lanche por semana?

17. Numa pesquisa de opinião pública com 800 telespectadores sobre o programa de televisão de sua preferência, obteve-se a seguinte tabela de freqüências absolutas:

Programa de TV	Número de Telespectadores
Novelas	360
Esportes	128
Filmes	80
Noticiários	32
Shows	200

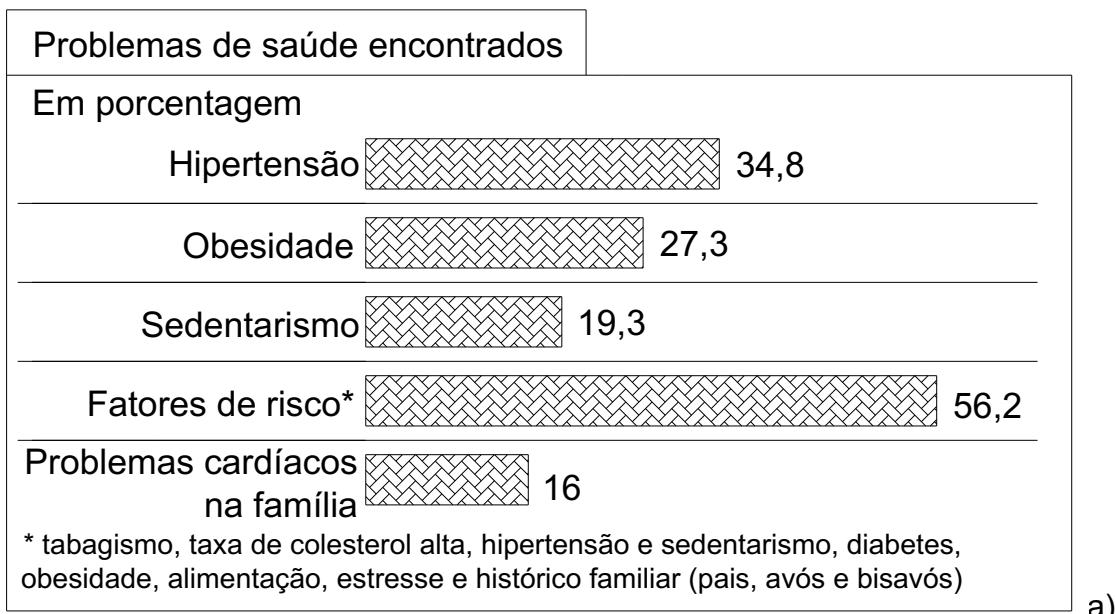
Construa um quadro com distribuição de freqüências absolutas acumuladas, freqüências relativas e freqüências relativas acumuladas.

18. O gráfico a seguir mostra em quais estados brasileiros os alunos de uma escola de São Paulo, que viajaram, passaram as férias.



- a) Que estado recebeu maior número de alunos?  
b) Se 120 alunos foram para o Rio de Janeiro, quantos alunos passaram férias em Minas Gerais?

19. Uma pesquisa feita com 336 adolescentes de um condomínio, sendo 50% de cada sexo, revela alguns problemas de saúde. A soma dos dados percentuais ultrapassa 100%, pois cada adolescente entrevistado pode apresentar mais de um problema.



a)

- Quantas meninas foram entrevistadas nessa pesquisa?
- Quantos jovens são hipertensos?
- Quantos jovens têm problemas cardíacos na família?
- Quais são os principais fatores que contribuem para que os jovens adquiram tais problemas?
- Com esses dados seria possível construir um gráfico de setores?

20. Para ser aprovado em uma disciplina, o aluno precisa ter média maior ou igual a 5,0, obtido num conjunto de cinco provas, sendo quatro parciais, com peso 1 cada, e uma prova-exame, com peso 2. Um aluno obteve, nas quatro provas parciais, notas iguais a 3,0; 6,0; 5,0 e 7,0. Calcule a nota mínima que esse aluno deverá obter na prova-exame para ser aprovado.

## GABARITOS

(1)

1.	Conceito	$f_i$	$F_i$	2.	Nº	$f_i$	$F_i$	3.	Salário	$f_i$	$F_i$
	A	3	3		1	2	2		68	1	1
	B	4	7		2	3	5		72	6	7
	C	8	15		3	2	7		76	4	11
	D	4	19		4	2	9		80	4	15
	E	1	20		5	2	11		84	2	17
	Total	20	-		6	4	15		88	2	19
					Total	15	-		92	1	20
									Total	20	-

4. a) 20    b) 15    c) 46    d) 20    e) 65,7%

5.

Classe (massa em kg)	Freqüência	Freqüência relativa
0,48	4	20%
0,49	6	30%
0,50	5	25%
0,51	4	20%
0,52	1	5%
Total = 20		

6.

Classe (estatura em cm)	Freqüência	Freqüência relativa
[161,5; 166,5[	4	25%
[166,5; 171,5[	6	37,5%
[171,5; 176,5[	2	12,5%
[176,5; 181,5]	4	25%
Total = 16		

7.	Classe (Área, m <sup>2</sup> )	f <sub>i</sub>	F <sub>i</sub>	8.	Classe (em cm)	f <sub>i</sub>	F <sub>i</sub>	9.	Classe (em m)	f <sub>i</sub>	F <sub>i</sub>
	250  -- 276,2	4	20%		2,70  -- 2,84	2	12,5%		1,60  -- 1,64	2	10%
	276,2  -- 302,4	7	35%		2,84  -- 2,98	4	25%		1,64  -- 1,68	3	15%
	302,4  -- 328,6	2	10%		2,98  -- 3,12	2	12,5%		1,68  -- 1,72	7	35%
	328,6  -- 354,8	1	5%		3,12  -- 3,26	6	37,5%		1,72  -- 1,76	8	40%
	354,8  -- 381,0	1	5%		3,26  -- 3,40	2	12,5%		Total	20	
	381,0  -- 407,2	5	25%		Total	16					
	Total	20									

**(2) 4.** a) 2250 pares de sapatos b) 20% 5. a) 7 b) 20 c) 25%

7. a) meninos > meninas b) 20 alunos c) 9 alunos d) meninos = 10 e meninas = 10 e) meninas = 7 e meninos = 7

8. B 9. C 10. C

**(3) 1.** a) 24/11 b) 15/7 c) 240/77 2. 1,99 3. 19,3 pontos

4. 22,9 5. b) 15,45 6. 26,05 7. 6,96 8. 1,82m

9. c) 5,08 10. b) 11,44 11. 5,1 12. b) 160 13. c) 67

14. c) 31 pessoas d) 19,5 15. c) 7,4 16. 80 mulheres e 40 homens

17. 2400 18. 3 milhões de reais

**(4) 1.**

Gênero musical	f <sub>i</sub>	f <sub>ri</sub>	f <sub>ri</sub>	f <sub>ri</sub>
Setanejo	15	15/50	0,3	30%
MPB	12	6/25	0,24	24%
Rock	16	16/50	0,32	32%
Clássico	7	7/50	0,14	14%
Total	50	50/50	1	100%

2.

Salário (R\$)	$f_i$	$f_{ri}$
600  — 690	6	10%
690  — 780	15	25%
780  — 870	30	50%
870  — 960	6	10%
960  — 1050	3	5%
Total	60	100%

3.

a) Resultados	$f_i$	$f_r$	$f_{ri}(\%)$	b) Gols Marcados	$f_i$	$f_r$	$f_{ri}(\%)$
por partida							
Vitórias	4	4/7	57,1	2	1	1/7	14,3
Empates	1	1/7	14,3	3	4	4/7	57,1
Derrotas	2	2/7	28,6	5	2	2/7	28,6
Total	7	7/7	100	Total	7	7/7	100

4. Salário	$f_i$	$f_r$	$f_{ri}(\%)$
1,7  -- 2,6	3	3/25	12
2,6  -- 3,5	5	5/25	20
3,5  -- 4,4	4	4/25	16
4,4  -- 5,3	5	5/25	20
5,3  -- 6,2	5	5/25	20
6,2  -- 7,1	3	3/25	12
Total	25	25/25	100

5. Tipo	$f_i$
M	5
C	3
B	5
A	4
T	28
Total	45

7. Votos	$f_i$
A	50
B	80
C	60
BN	10
Total	200

8. a) 40 alunos sendo 21 mulheres e 19 homens b) 12 c) 3 mulheres d) 50%  
 9. a) 3 h e 36 min. b) 30% 10. a) 2 b) 1 11. 7,5 12. 17,2 anos  
 13. 7 14. B 15. E

16. a)

Nº de vezes	f <sub>i</sub>
0	5
1	12
2	28
3	2
4	2
5	1
Total	50

b) 45 alunos

18. a) RJ b) 30 alunos 19. a) 168 meninas b) 117 c) 54

d) Tabagismo, taxa de colesterol alta, hipertensão e sedentarismo, diabetes, obesidade, alimentação, estresse e histórico familiar.

e) Não, pois cada adolescente pode apresentar mais de um problema

20. 4,5

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CRESPO, Antônio Arnot. **Estatística fácil.** 13º ed., Editora Saraiva, 1995.

Curriculum Básico do PEIES. Universidade Federal de Santa Maria. **Programa de Ingresso ao Ensino Superior.**, Santa Maria, 2004

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações.** V. 3, 2º ed., Editora Ática, 2003.

GIOVANNI, J. R., BONJORNO, J. R. **Matemática.** V. 3, Editora FTD S.A., São Paulo, 1992.

GUELLI, Oscar. **Matemática: série Brasil.** Volume único. 1º ed., Editora Ática, São Paulo, 2003.

PAIVA, Manoel. **Matemática: volume único.** 2º ed., Editora Moderna, São Paulo, 2003.

SILVA, J. D., FERNANDES, V. dos S., MABELINI, O. D. **Matemática: Novo Ensino Médio – Volúme Único Curso Completo.** Sistema de Ensino IPEP, São Paulo, 2002.