UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
Colégio Técnico Industrial de Santa Maria

Caderno Didático 3

Progressão Aritmética e Progressão Geométrica

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_1 + 0r\\
a_2 &= a_1 + 1r\\
a_3 &= a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r\\
a_4 &= a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r\\
a_5 &= a_4 + r = a_1 + 3r + r = a_1 + 4r\\
\vdots &= \vdots = \vdots = \vdots\\
\mathrm{a}_\mathrm{n} &= a_{n-1} + r = a_1 + (n-2)r + r = a_1 + r(n-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_1.q^0\\
a_2 &= a_1.q^1\\
a_3 &= a_2.q^1 = a_1.q^1.q^1 = a_1.q^2\\
a_4 &= a_3.q^1 = a_1.q^2.q^1 = a_1.q^3\\
a_5 &= a_4.q^1 = a_1.q^3.q^1 = a_1.q^4\\
\vdots &= \vdots = \vdots = \vdots\\
\mathrm{a}_\mathrm{n} &= a_{n-1}.q = a_1 q^{(n-2)}.q^1 = a_1.q^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

Série: Matemática I

Por:
Professora Angélica Magagnangmo
Professor Mauricio R. Lutz

Agosto de 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
Colégio Técnico Industrial de Santa Maria

Caderno Didático 3

Progressão Aritmética
e Progressão Geométrica

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 + 0r\\
a_2 &= a_1 + 1r\\
a_3 &= a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r\\
a_4 &= a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r\\
a_5 &= a_4 + r = a_1 + 3r + r = a_1 + 4r\\
\vdots &= \vdots = \vdots = \vdots\\
a_n &= a_{n-1} + r = a_1 + (n-2)r + r = a_1 + r(n-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1.q^0\\
a_2 &= a_1.q^1\\
a_3 &= a_2.q^1 = a_1.q^1.q^1 = a_1.q^2\\
a_4 &= a_3.q^1 = a_1.q^2.q^1 = a_1.q^3\\
a_5 &= a_4.q^1 = a_1.q^3.q^1 = a_1.q^4\\
\vdots &= \vdots = \vdots = \vdots\\
a_n &= a_{n-1}.q = a_1q^{(n-2)}.q^1 = a_1.q^{(n-1)}
\end{aligned}$$

Série: Matemática I

Por:
Professora Angélica Magagnangmo
Professor Mauricio R. Lutz

Agosto de 2020

M188c

Magagnangmo, Angélica

Caderno didático 3 : progressão aritmética e progressão geométrica / por Angélica Magagnangmo, Mauricio Ramos Lutz. – Santa Maria , 2001.
34 f. : il. (Série Matemática I)

1. Matemática 2. Progressão aritmética 3. Progressão geométrica 4. Interpolação 5. Propriedades 6. Termo geral 7. Ensino médio I. Lutz, Mauricio Ramos II. Título

CDU: 51:373.51

Ficha catalográfica elaborada por
Luiz Marchiotti Fernandes CRB 10/1160
Biblioteca Setorial do Centro de Ciências Rurais/UFSM

SUMÁRIO

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

1 DEFINIÇÃO

Progressão aritmética (P.A.) é uma seqüência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado com um número fixo, chamado **razão** da progressão.

Exemplos:

a) $(2,5,8,11,14,...)$

$$\left.\begin{array}{l} 5=2+3 \\ 8=5+3 \\ 11=8+3 \\ 14=11+3 \end{array}\right\}$$ Nesta seqüência, 3 é a razão da P.A.

b) $(12,7,2,-3,-8,-13,...)$

$$\left.\begin{array}{l} 7=12+(-5) \\ 2=7+(-5) \\ -3=2+(-5) \\ -8=(-3)+(-5) \\ -13=(-8)+(-5) \end{array}\right\}$$ Nesta seqüência, -5 é a razão da P.A.

2 CLASSIFICAÇÃO DE UMA P.A.

Uma progressão aritmética pode ser: crescente, decrescente ou constante.

Exemplos:

a) Seja a P.A. $(3,4,5,6,7)$ determine a razão e classifique-a:

$r=4-3=1 \therefore r=1$

Como $r=1>0$ logo a P.A. é crescente.

b) Seja a P.A. $(10,8,6,...)$ determine a razão e classifique-a:

$r=8-10=-2 \therefore r=-2$

Como $r=-2<0$ logo a P.A. é decrescente.

c) Seja a P.A. $(4,4,4,4,4,4)$ determine a razão e classifique-a:

$r = 4 - 4 = 0 \therefore r = 0$

Como $r = 0$ logo a P.A. é constante.

3 REPRESENTAÇÃO DE UMA P.A.

A representação matemática de uma progressão aritmética (P.A.) é:

$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...)$

Logo : $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_{n+1} - a_n = r$ ou

$a_{n+1} = a_n + r \quad \forall\, n \in \mathrm{N}^*$

Exemplos:

a) Calcular "*r*" e "a_5" na P.A. $(3,9,15,21,...)$.

$$\begin{array}{ll} a_{n+1} = a_n + r & a_5 = a_4 + r \\ 9 = 3 + r & a_5 = 21 + 6 \\ r = 6 & a_5 = 27 \end{array}$$

b) Determine o valor de "*x*", de modo que os números $(x+4)^2, (x-1)^2$ e $(x+2)^2$ estejam, nessa ordem, em P.A.

$P.A. \Rightarrow \left((x+4)^2, (x-1)^2, (x+2)^2\right)$

$a_1 = (x+4)^2$, $a_2 = (x-1)^2$ e $a_3 = (x+2)^2$

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \Rightarrow (x-1)^2 - (x+4)^2 = (x+2)^2 - (x-1)^2$

$(x^2 - 2x + 1) - (x^2 + 8x + 16) = (x^2 + 4x + 4) - (x^2 - 2x + 1)$

$-10x - 15 = 6x + 3 \Rightarrow -16x = 18 \Rightarrow x = -\frac{9}{8}$

Observação:

razão (r) = termo qualquer – termo anterior

(1) Exercícios

1. Determine:

a) O valor de "*x*", tal que os números $x^2, (x+2)^2$ e $(x+3)^2$ formem, nessa ordem, uma P.A.

b) O valor de "*x*", de modo que os números $3x-1, x+3, x+9$ estejam, nessa ordem, uma P.A.

c) O valor de "*x*", de modo que os quadrados dos números $(x+1), \sqrt{x+15}, (x+3)$ formem, nessa ordem, uma P.A.

2) As medidas dos lados de um triângulo são expressas por $x+1, 2x$ e x^2-5 e estão em P.A., nessa ordem. Calcule o perímetro do triângulo.

3) Determine o valor de "*x*" para que os números $\log_2 8, \log_2(x+9)$ e $\log_2(x+7)$ estejam, nessa ordem, em P.A.

4 FÓRMULA DO TERMO GERAL DE UMA P.A.

Neste item demostraremos uma fórmula que permite encontrar qualquer termo de uma progressão aritmética sem precisar escrevê-la completamente.

Seja a P.A. $(a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n)$ de razão "*r*".

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_1 + 0r \\
a_2 &= a_1 + 1r \\
a_3 &= a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r \\
a_4 &= a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r \\
a_5 &= a_4 + r = a_1 + 3r + r = a_1 + 4r \\
\vdots &= \vdots = \vdots = \vdots \\
a_n &= a_{n-1} + r = a_1 + (n-2)r + r = a_1 + r(n-1)
\end{aligned}
$$

$$a_n = a_1 + r(n-1)$$

Onde: a_n é o enésimo termo (termo geral);

a_1 é o primeiro termo;

r é a razão;

n é o número de termos.

Exemplos:

a) Encontrar o termo gral da P.A. $(4,7,...)$.

$a_1 = 4;\ \ r = 7 - 4 = 3;\ \ n = n$

$a_n = a_1 + r(n-1) \Rightarrow a_n = 4 + 3(n-1)$

$a_n = 4 + 3n - 3 \Rightarrow a_n = 3n + 1$

b) Determine o número de termos da P.A. $(-3,1,5,...,113)$.

$r = 1 - (-3) = 1 + 3 = 4$

$a_n = a_1 + r(n-1) \Rightarrow 113 = -3 + 4(n-1)$

$113 = -3 + 4n - 4 \Rightarrow 120 = 4n \Rightarrow n = 30$

c) Achar o número de múltiplos de 5 compreendidos entre 21 e 623.

$21,25,30,...,620,623$

$a_1 = 25;\quad a_n = 620$

Aplicando-se a fórmula do termo geral, vem:

$a_n = a_1 + r(n-1) \Rightarrow 620 = 25 + 5(n-1)$

$620 = 25 + 5n - 5 \Rightarrow 600 = 5n \Rightarrow n = 120$

(2) Exercícios

1. Encontre o termo geral de P.A. $(2,7,...)$.
2. Qual é o décimo quinto termo da P.A. $(4,10,...)$?
3. Ache o quinto termo da P.A. $(a+b, 3a-2b,...)$.
4. Ache "a_1" numa P.A., sabendo que $r = 1/4$ e $a_{17} = 27$.
5. Calcule o número de termos da P.A. $(5,10,...,785)$.
6. Quantos são os n.º naturais menores que 98 e divisíveis por 5.

5 PROPRIEDADES DAS P.A.

1º) Numa P.A., com exceção dos extremos, qualquer número é igual a soma do termo anterior com o termo posterior dividida por 2.

Exemplo:

Na P.A. $(2,4,6,8,...)$ temos:

$4=\frac{6+2}{2}$; $6=\frac{4+8}{2}$; .... etc.

2º) Numa P.A., de número ímpar de termos, o termo do meio ou termo médio é igual a soma dos extremos dividida por 2 ou é igual a soma de dois termos eqüidistantes dos extremos dividida por 2.

Exemplo:

Na P.A. $(2,5,8,11,14,17,20)$ temos 7 termos onde:

$$TM=\frac{Soma\ dos\ extremos}{2}=\frac{2+20}{2}=11 \therefore TM=11$$
$$TM=\frac{2+20}{2}=\frac{5+17}{2}=\frac{8+14}{2}=11$$

(3) Exercícios

1. Calcule “*x*”, sabendo que $x+1,5x-3$ e $2x+7$ formam, nesta ordem, uma P.A.

2. Sabendo que $x-1,2x+3$ e $4x+4$ formam, nesta ordem, uma P.A., determine a razão da P.A.

3. Numa P.A., de número ímpar de termos, os extremos são 4 e 28. Calcule o termo médio da P.A.

6 INTERPOLAÇÃO ARITMÉTICA

Neste item vamos aprender a intercalar números reais entre dois números dados, de tal forma que todos passem a constituir uma P.A.

Exemplos:

a) Interpolar cinco meios aritméticos entre 6 e 30.

6,___,___,___,___,___,30

$a_1=6;\ \ a_n=30$

$a_n=a_1+r(n-1) \Rightarrow 30=6+6r \Rightarrow 24=6r \therefore r=4$

Logo $(6,10,14,18,22,26,30)$.

b) Quantos meios aritméticos devemos interpolar entre 100 e 124 para que a razão seja 4?

$a_n = a_1 + r(n-1) \Rightarrow 124 = 100 + 4(n-1)$

$124 = 100 + 4n - 4 \Rightarrow 28 = 4n \therefore n = 7$

Como $n = 7$ é o número total de termos, devemos interpolar $7 - 2 = 5$ meios.

(4) Exercícios

1. Insira 6 meios aritméticos entre 100 e 184.
2. Quantos termos aritméticos devemos interpolar entre 2 e 66 para que a razão da interpolação seja 8?

7 FÓRMULA DA SOMA DOS "n" TERMOS DE UMA P.A. FINITA

a) Propriedade

Consideremos a P.A. finita $(6,10,14,18,22,26,30,34)$ e nela podemos destacar 6 e 34, que são os **extremos**.

$\left.\begin{array}{l} 10\ e\ 30 \\ 14\ e\ 26 \\ 18\ e\ 22 \end{array}\right\}$ são termos eqüidistantes dos extremos

Verifica-se facilmente, que:

$6 + 34 = 40 \Rightarrow$ (soma dos extremos)

$\left.\begin{array}{l} 10 + 30 - 40 \\ 14 + 26 = 40 \\ 18 + 22 = 40 \end{array}\right\}$ (soma de dois termos eqüidistantes dos extremos)

Daí a propriedade:

Numa P.A. finita, a soma de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos.

Assim, dada a P.A. finita:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$$

Extremos

Temos: $a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$
$a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n$

<u>b) Fórmula</u>

Sejam a P.A. finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ e "S_n" a soma dos termos dessa P.A.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$+ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$
$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Como a_2 e a_{n-1}, a_3 e a_{n-2} são eqüidistantes dos extremos, suas somas são iguais a $(a_1 + a_n)$, logo:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$
$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Onde: a_1 é o primeiro termo;
a_n é o enésimo termo;
n é o número de termos;
S_n é a soma dos "n" termos.

<u>Exemplos:</u>

a) Achar a soma dos 30 primeiros termos da P.A. $(2,5,\ldots)$.

$a_1 = 2;\ r = 3;\ n = 30$

Calculo de a_n

$$a_n = a_1 + r(n-1) \Rightarrow a_{30} = 2 + 3(30-1) \Rightarrow a_{30} = 2 + 87 = 89 \therefore a_{30} = 89$$

Calculo de S_n

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S_{30} = \frac{(2+89).30}{2} \Rightarrow S_{30} = 1365$$

b) resolver a equação $1 + 7 + ... + x = 280$, sabendo-se que os termos do primeiro membro formam uma P.A.

Na P.A., temos:

$a_1 = 1;\ a_n = \text{x};\ S_n = 280\ \ r = 6$

Vamos calcular "*n*", usando a fórmula geral:

$a_n = a_1 + r(n-1) \Rightarrow x = 1 + 6(n-1) \Rightarrow x = 1 + 6n - 6$

$6n = x + 5 \Rightarrow n = \dfrac{x+5}{6}$

Vamos substituir na fórmula da soma:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow 280 = \frac{(1+x).\frac{x+5}{6}}{2} \Rightarrow 280 = \frac{\frac{x + x^2 + 5 + 5x}{6}}{2}$$

$x^2 + 6x - 3355 = 0$

Vamos resolver a equação $x^2 + 6x - 3355 = 0$

$\Delta = 36 + 13420 = 13456$

$$x = \frac{-6 \pm 116}{2} \begin{cases} x_1 = 55 \\ x_2 = -61 \end{cases}$$

Como a P.A. é crescente, podemos dizer que $x = 55$

$S = \{55\}$

(5) Exercícios

1. Ache a soma dos 40 primeiros termos da P.A. $(8,2,...)$.

2. Os dois primeiros termos de uma seqüência são 2 e ½, calcule a soma dos 20 primeiros termos, supondo que se trata de uma progressão aritmética.

3. Ache a soma dos múltiplos de 3 compreendidos entre 50 e 300.

4. Se $x = (1 + 3 + ... + 49)$ é a soma dos ímpares de 1 a 49, e se $y = (2 + 4 + ... + 50)$ é a soma dos pares de 2 a 50, calcule $x - y$.

(6) Testes

1. (FEI) O 10º termo da P.A. $\left(a, \frac{3a}{2}, ...\right)$ é igual a

a) 11a/2 b) 9a/2 c) 7a/2 d) 13a/2 e) 15a/2

2. Numa P.A., o 2º termo é 5 e o 6º termo é 17. A razão da P.A. é

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

3. Sabendo que numa P.A., o 4º termo é 8 e o 10º termo é 50, o valor do 13º termo é

a) 51 b) 31 c) 20 d) 42 e) 71

4. (PUC) A razão para inserir 7 meios aritméticos entre 3 e 99 é

a) 16 b) 12 c) 8 d) 17 e) nenhuma resposta anterior

5. Numa P.A. temos $\begin{cases} a_3 + a_6 = 29 \\ a_4 + a_7 = 35 \end{cases}$ o 1º termo da P.A. é

a) 2 b) 3 c) 4 d) 6 e) 8

6. A quantidade de múltiplos de 5 existentes entre 8 e 101 é

a) 17 b) 18 c) 19 d) 20 e) 21

7. (UFRGS) O número de múltiplos de 7 entre 50 e 1206 é

a) 53 b) 87 c) 100 d) 165 e) 157

8. (FAAT) A quantidade de números compreendidos entre 1 e 5000 que são divisíveis por 3 e 7, é

a) 138 b) 238 c) 137 d) 247 e) 157

9. (UNISINOS) Os ângulos internos de um triângulo estão em progressão aritmética. Se o menor deles mede a metade do maior, então o maior mede:

a) 80º b) 90º c) 100º d) 60º e) 120º

10. A soma de três números em P.A. é 12 e o produto é 28. O maior dos números é

a) 9 b) 8 c) 7 d) 6 e) 5

11. O perímetro de um triângulo retângulo é 48cm e os seus lados estão em P.A.. A área do triângulo, em cm^2, é igual a

a) 108 b) 96 c) 64 d) 54 e) 48

12. Os lados de um triângulo retângulo estão em P.A. de razão 3. O perímetro do triângulo é

a) 36 b) 27 c) 24 d) 22 e) 18

13. (ULBRA) O valor de "*a*" na P.A. $(2a, 4a+2, 8a+6)$ é

a) –1 b) 1 c) –3 d) 3 e) 6

14. (UPF) Os três primeiros termos de uma seqüência aritmética estão representados por $(2x+5, x-4, 3x-1)$. O valor da razão dessa seqüência é

a) –3 b) –2 c) 3 d) 2 e) –5

15. (UFRGS) As medidas dos lados de um triângulo são expressas por $x+1, 2x, x^2-5$ e estão em P.A., nesta ordem. O perímetro do triângulo é

a) 8 b) 12 c) 15 d) 24 e) 33

16.(UFSM) Um quadrado de área A_1 está contido no interior de um outro maior de área A_1+A_2. Se o lado do quadrado maior é 9cm e os números A_1, A_2, A_1+A_2 formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, então o lado do menor quadrado mede, em centímetros:

a) $\sqrt{3}$ b) 3 c) $2\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3}$ e) 4,5

17. (UFRGS) O termo geral de uma progressão é $a_n = 5n - 3$. A soma dos 15 primeiros termos é

a) 72 b) 375 c) 555 d) 615 e) 1080

18. (UFRGS) A soma dos múltiplos de 3, entre 25 e 98 é

a) 1053 b) 1403 c) 1476 d) 1538 e) 1668

19. (PUC) A soma do 80 primeiros números ímpares positivos é

a)3240 b) 6400 c) 1476 d) 1538 e) 1668

20. (UFSM) A soma dos 100 primeiros números pares positivos é

a) 5050 b) 5100 c) 6360 d) 10050 e) 10100

21. (EVANGÉLICA) Em uma progressão aritmética, a soma dos termos é 70, o primeiro termo é 10 e a razão é 5. O números de termos é

a) 10 b) 8 c) 4 d)12 e)16

22. (UCPR) A soma dos "*n*" primeiros termos de uma P.A. é $n^2 + 2n$. O 10º termo desta P.A. vale:

a) 17 b) 18 c) 19 d) 20 e) 21

23. A soma dos "*n*" primeiros termos de uma progressão aritmética é $S_n = 2n^2 - 3n$. O 21º termo dessa P.A. é

a) 70 b) 79 c) 47 d) 84 e) 100

24. (PUC) A soma dos "*n*" primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por $S_n = 3n^2 + 5n$. A razão dessa progressão aritmética é

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

25. (UFRGS) A soma dos seis primeiros termos da seqüência definida por $a_n = 2^{n-\frac{1}{2}}$, com $n \in \mathrm{N}^*$, é: (Obs.: Cuidar que é uma PG de razão 2)

a) $2^{\frac{11}{2}}$ b) 31$\sqrt{2}$ c) 63$\sqrt{2}$ d)99$\sqrt{2}$ e)512$\sqrt{2}$

26. (FGV–SP) A seqüência $(3m, m+1{,}5)$ é uma progressão aritmética. Sua razão é

a) –3 b) 3 c) 7 d) –7 e) impossível determinar

27. (PUC–SP) O 24º termo de P.A. $\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{7}{2}, ...\right)$ é:

a) 35 b) 45 c) 28 d) 38 e) 25/2

28. (FATEC–SP) A soma dos nove primeiros termos de uma progressão aritmética de razão 2 é 9. O terceiro termo dessa progressão é:

a) –9 b) –7 c) –3 d) 8 e) 12

29. (FGV–SP) A soma dos termos de uma P.A. cujo primeiro termo é 4, o último termo é 46 e a razão é igual ao número de termos é:

a) 50 b) 100 c) 175 d) 150 e) n.d.a.

30) (CESCEM–SP) Numa P.A. limitada em que o 1º termo é 3 e o último termo é 31, a soma de seus termos é 136. Então, essa P.A. tem:

a) 8 termos b) 10 termos c) 16 termos d) 26 termos e) 52 termos

31) (UNISC) Em uma rodovia muito movimentada, havia 2 telefones instalados nos quilômetros de número 2 a 50. A população conseguiu 11 novos telefones para serem instalados, a igual espaçamento um do outro, entre aqueles 2 existentes. Assim sendo, a distância entre cada telefone deverá ser de:

a) 3 km b) 4 km c) 4,8 km d) 5 km e) 5,2 km

32) Vinte pessoas se reúnem para doar uma certa quantia para uma instituição. A primeira pessoa oferece 350 reais e cada uma das seguintes dá 50 reais a mais que a anterior. Qual a quantia total doada?

a) 1200 reais b) 1350 reais c) 16500 reais

d) 13000 reais e) 14000 reais

33) (UFPEL) Numa campanha promocional de venda de veículos, uma concessionária propôs a seguinte condição para um automóvel do tipo popular: R$ 3500,00 de entrada mais 36 parcelas. A primeira é de R$ 436,00 e cada umas das demais parcelas sofre um abatimento de R$ 5,00. O valor total do carro é:

a) R$ 15516,00
b) R$ 12546,00
c) R$ 13849,00
d) R$ 16046,00
e) 19016,00

34) (UFSM) Numa progressão aritmética crescente, os dois primeiros termos são as raízes da equação $x^2+2x-8=0$. Sabendo que o número de termos dessa PA é igual ao triplo de sua razão, então a soma dos termos dessa PA é igual a

a) –378 b) –282 c) 98 d) 294 e) 846

35) (UFRGS) O primeiro termo de uma progressão aritmética é –10 e a soma dos oito primeiros termos, 60. A razão é

a) –15/7 b) 15/7 c) 5 d) 28 e) 35

36) (UFRGS) Numa progressão aritmética de 7 termos, o último termo é igual ao dobro da razão e a soma de todos eles é 28. Determine a razão.

a) 14/12 b) 0,5 c) –14/11 d) –2 e) –4

37) (UFSM) Um oficial comanda 325 soldados e que formá-los em disposição triangular, de modo que a primeira fila tenha 1 soldado, a segunda 2, a terceira 3 e assim por diante. O número de filas assim constituídas será

a) 20 b) 24 c) 25 d) 27 e) 28

38) (UNISINOS) Um nadador treinando para as Olimpíadas decidiu nadar 200 metros no 1º dias de treino e, a cada dia, aumentar 50 m em relação a distância anterior. Prosseguindo assim e acumulando as distâncias nadadas a cada dia, o nadador totalizou 3000 m de nado em

a) 7 dias b) 8 dias c) 15 dias d) 22 dias e) 57 dias

39) (UFRGS) A soma dos n primeiros números pares positivos é 132. O valor de n é

a) 11 b) 16 c) 26 d) 54 e) 66

40) (UFSM) Tisiu ficou sem parceiro para jogar bolita (bola de gude); então pegou sua coleção de bolitas e formou uma seqüência de “T” (a inicial de seu nome), conforme a figura

Supondo que o guri conseguiu formar 10 “T” completos, pode-se, seguindo o mesmo padrão, afirmar que ele possuía

a) mais de 300 bolitas b) pelo menos 230 bolitas

c) menos de 220 bolitas d) exatamente 300 bolitas

e) exatamente 41 bolitas

Gabarito

(1) 1. a) $x=1/2$ b) $x=-1$ c) $x=2$ ou $x=-5$

2. Perímetro = 24

3. $x=-5$

(2) 1. $a_n=5n-3$

2. $a_{15}=88$

3. $a_5=9a-11b$

4. $a_1=23$

5. $n=157$
6. $n=19$

(3) 1.$x=2$
2. $r=7$
3. $TM=16$

(4) 1. $r=12$
2. $n=7$

(5) 1. $S=-4360$
2. $S=-245$
3. $S=14442$
4. $x-y=-25$

(6)

1) A	2) C	3) E	4) B	5) C
6) C	7) D	8) B	9) A	10) C
11) B	12) A	13) A	14) E	15) D
16) D	17) C	18) C	19) B	20) E
21) C	22) E	23) B	24) A	25) C
26) C	27) A	28) C	29) C	30) A
31) B	32) C	33) D	34) E	35) C
36) E	37) C	38) B	39) A	40) B

Dica: $S_n=1n^2+2n$

$a_1=1+2=3$

$r=1x2=2$

$S_n=2n^2-3n$

$a_1=2-3=-1$

$r=2x2=4$

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

8 DEFINIÇÃO

Progressão geométrica (P.G.) é uma seqüência de números não nulos em que cada termo posterior, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um número fixo, chamado **razão** da progressão.

Exemplos:

a) $(4,8,16,32,64)$

$$\left.\begin{array}{l} 8 = 4.2 \\ 16 = 8.2 \\ 32 = 16.2 \\ 64 = 32.2 \end{array}\right\}$$ Nesta seqüência, o número fixo 2 é a razão da P.G.

b) $(6,-18,54,-162)$

$$\left.\begin{array}{l} -18 = 6.(-3) \\ 54 = (-18).(-3) \\ -162 = 54.(-3) \end{array}\right\}$$ Nesta seqüência, o número fico -3 é a razão da P.G.

9 REPRESENTAÇÃO DE UMA P.G.

A representação matemática de uma progressão geométrica (P.G.) é:

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...)$$

Logo : $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = ... = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ ou

$a_{n+1} = a_n.q \quad \forall\, n \in \mathrm{N}^*$ e $q \in \Re$

Exemplo:

Escreva uma P.G. de cinco termos em que a_1=2 e q=3.

$a_1 = 2$
$a_2 = a_1.q = 2.3 = 6$
$a_3 = a_2.q = 6.3 = 18$
$a_4 = a_3.q = 18.3 = 54$
$a_5 = a_4.q = 54.3 = 162$

A P.G. pedida é $(2,6,18,54,162)$

Observação:

razão (q) = termo qualquer dividido pelo termo anterior

10 CLASSIFICAÇÃO DE UMA P.G.

Podemos classificar uma progressão geométrica em crescente, decrescente, constante ou alternada. Para isso dividiremos em três casos.

1º caso: $a_1 > 0$

Seja as seguintes P.G.

- $(2,6,18,54,...)$. Nesta P.G. temos:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 > 0 \\ q = 3 > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ P.G. é crescente}$$

- $(5,5,5,5,...)$. Nesta P.G. temos:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 5 > 0 \\ q = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ P.G. é constante}$$

- $(256,64,16,...)$. Nesta P.G. temos:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 256 > 0 \\ q = \frac{1}{4},\ isto\ é, 0 < q < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ P.G. é decrescente}$$

2º caso: $a_1 < 0$

Seja as seguintes P.G.

- $(-2,,-10,-50,...)$. Nesta P.G. temos:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = -2 < 0 \\ q = 5 > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ P.G. é decrescente}$$

- $(-3,-3,-3,-3,...)$. Nesta P.G. temos:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = -3 < 0 \\ q = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ P.G. é constante}$$

- $(-40,-20,-10,...)$. Nesta P.G. temos:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = -40 > 0 \\ q = \frac{1}{2},\ isto\ é, 0 < q < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ P.G. é crescente}$$

<u>3º caso:</u> $q < 0$

Seja as seguintes P.G.

- $(2,-6,18,-54,...)$. Nesta P.G. temos:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 > 0 \\ q = -3 > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ P.G. é alternada}$$

- $(-4,8,-16,32,...)$. Nesta P.G. temos:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = -4 < 0 \\ q = -2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ P.G. é alternada}$$

<u>Exemplo:</u>

Se a seqüência $(x,3x+2,10x+12)$ é uma P.G., pede-se:

a) Calcule o valor de x;

$(x,3x+2,10x+12)$

$a_1 = x;\ a_2 = 3x+2;\ a_3 = 10x+12$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow \frac{3x+2}{x} = \frac{10x+12}{3x+2} \Rightarrow 9x^2 + 12x + 4 \Rightarrow x^2 = 4 \therefore x = \pm 2$$

b) Escreva essa progressão.

Se $x = 2$, temos:

$(x,3x+2,10x+12) \Rightarrow (2,6+2,20+12) \therefore (2,8,32)$

Se $x = -2$, temos:

$(x,3x+2,10x+12) \Rightarrow (-2,-6+2,-20+12) \therefore (-2,-4,-8)$

(1) Exercícios

1. Determine a razão de cada uma das seguintes P.G.:

a) $(3,12,48,...)$ b) $(10,5,...)$ c) $(\sqrt{5},5,...)$

d) $(10^{-1},10,...)$ e) $(ab,ab^3,...)$ f) $\left(\frac{x}{a},x,...\right)$

2. A seqüência $1,3a-4,9a^2-8$, é uma progressão geométrica. Calcule "*a*".

3. Determine o valor de "*x*", de modo que os números $x+1, x+4, x+10$ formem, nesta ordem, uma P.G.

11 FÓRMULA DO TERMO GERAL DE UMA P.G.

Da mesma forma como fizemos para a progressão aritmética, vamos demonstrar a fórmula do temo geral de uma P.G., que permite encontrar qualquer termo sem precisar escreve-la integralmente.

Seja a P.A. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$ de razão "*q*".

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1.q^0 \\
a_2 &= a_1.q^1 \\
a_3 &= a_2.q^1 = a_1.q^1.q^1 = a_1.q^2 \\
a_4 &= a_3.q^1 = a_1.q^2.q^1 = a_1.q^3 \\
a_5 &= a_4.q^1 = a_1.q^3.q^1 = a_1.q^4 \\
\vdots &= \vdots = \vdots = \vdots \\
\mathrm{a_n} &= a_{n-1}.q = a_1 q^{(n-2)}.q^1 = a_1.q^{(n-1)}
\end{aligned}$$

$$a_n = a_1.q^{(n-1)}$$

Onde: a_n é o enésimo termo (termo geral);

a_1 é o primeiro termo;

q é a razão;

n é o número de termos.

Exemplos:

a) Numa P.G. de 4 termos, a razão é 5 e o último termo é 375. Calcular o primeiro termo desta P.G.

$n = 4; \quad q = 5; \quad a_4 = 375$

$$a_4 = a_1.q^{(n-1)} \Rightarrow 375 = a_1.5^3 \Rightarrow a_1 = \frac{375}{125} \therefore a_1 = 3$$

b) Numa P.G. de 6 termos, o primeiro termo é 2 e o último termo é 486. Calcular a razão desta P.G.

$n = 6; \quad a_1 = 2; \quad a_6 = 486$

$$a_6 = a_1.q^{(n-1)} \Rightarrow 486 = 2.q^5 \Rightarrow q^5 = \frac{486}{2} \Rightarrow q = \sqrt[5]{243} \therefore q = 3$$

c) Numa P.G. de razão 4, o primeiro termo é 8 e o último é 2^{31}. Quantos termos tem essa P.G.

$q = 4; \quad a_1 = 8; \quad a_n = 2^{31}$

$$a_n = a_1.q^{(n-1)} \Rightarrow 2^{31} = 8.4^{(n-1)} \Rightarrow 2^{31} = 2^3.2^{2(n-1)}$$

$$2^{31} = 2^{2n+1} \Rightarrow 31 = 2n + 1 \Rightarrow 30 = 2n \therefore n = 15$$

(2) Exercícios

1. Qual é o 6º termo da P.G. $(512,256,...)$?

2. Numa P.G., tem-se: $a_1 = 1, q = \sqrt{3}$. Calcule "a_7".

3. Determine o número de termos de P.G. $(1,2,...,256)$.

4. Sabe-se que numa P.G. a razão é 9, o primeiro termo é 1/9 e o último termo é 729. Qual é o número de termos dessa P.G.?

5. Qual é o primeiro termo de uma P.G. na qual o 11º termo é 3072 e a razão é 2?

12 PROPRIEDADES DAS P.G.

1º) Numa P.G., com exceção dos extremos, qualquer termo ao quadrado é igual ao produto do termo anterior pelo termo posterior.

Exemplo:

Na P.G. $(2,6,18,54,...)$ temos:

$6^2 = 2x18;\ \ 18^2 = 6x54;$ ... etc.

2º) Numa P.G., de número ímpar de termos, o termo médio ao quadrado é igual ao produto dos extremos ou igual ao produto de dois termos eqüidistantes dos extremos.

Exemplo:

Na P.G. $(2,6,18,54,162,486,1458)$ de 7 termos, temos:

$$TM^2 = produto\ dos\ extremos$$
$$TM^2 = 54^2 = 2x1458 = 6x486 = 18x162.$$

(3) Exercícios:

1. Calcule "*x*", para que $x-1, x+1, x+7$ formam, nesta ordem, uma P.G.
2. Se $x-6, x-4, x$ formam, nesta ordem, uma P.G., calcule a razão dessa P.G.
3. Numa P.G., de número ímpar de termos, o termo médio é igual a 9. Calcule o produto dos extremos dessa P.G.

13 INTERPOLAÇÃO GEOMÉTRICA

Vamos aprender a intercalar números reais entre dois números dados, de tal forma que todos passem a constituir uma P.G.

Exemplo:

Interpolar ou inserir três meios geométricos entre 3 e 48.

$a_1 = 3;\ \ a_5 = 48;\ \ n = 3 + 2 = 5$

$(3, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, 48)$

Devemos, então, calcular a razão:

$a_n = a_1.q^{(n-1)} \Rightarrow 48 = 3.q^4 \Rightarrow 3q^4 = 48 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow q = \pm\sqrt[4]{16} \therefore q = \pm 2$.

Então, teremos:

Para $q = 2 \Rightarrow (3,6,12,24,48)$;

Para $q = -2 \Rightarrow (3,-6,12,-24,48)$.

(4) Exercícios

1. Insira 4 meios geométricos entre 1 e 243.

2. Entre os números 18 e b foram inseridos 2 termos, obtendo-se uma P.G. de razão 3. Qual é o valor de b?

14 FÓRMULA DA SOMA DOS n TERMOS DE UMA P.G. FINITA

Seja a P.G. finita $\left(a_1, a_2, a_3, ..., a_n\right)$ ou $\left(a_1, a_1.q, a_1.q^2, ..., a_1.q^{(n-1)}\right)$ de razão "*q*", e de soma dos termos "S_n".

1º Caso: $q = 1$

$S_n = a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + ... + a.q^{(n-1)}$

$S_n = a_1 + a_1 + a_1 + ... + a_1$

$$S_n = n.a_1$$

Onde: S_n é a soma dos *n* termos;

n é o número de termos;

a_1 é o primeiro termo.

2º Caso: $q \neq 1$

$S_n = a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + ... + a.q^{(n-1)} \Rightarrow 1$

$q.S_n = q.a_1 + a_1.q^2 + a_1.q^3 + ... + a.q^{(n-1)} + a_1.q^n \Rightarrow 2$

$2 - 1 \Rightarrow \quad q.S_n - S_n = -a_1 + a_1.q^n$

$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1)$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{(q-1)}$$

Onde: S_n é a soma dos *n* termos;

a_1 é o primeiro termo;

q é a razão;

n é o número de termos.

Exemplos:

a) Dada a progressão geométrica $(1,3,9,27,...)$, calcular:

- A soma dos 6 primeiros termos.

$a_1 = 1; \quad q = 3; \quad \mathrm{n} = 6$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{(q-1)} \Rightarrow S_6 = \frac{1(3^6 - 1)}{3-1} \Rightarrow S_6 = \frac{729-1}{2} = 364 \therefore S_6 = 364$$

- O valor de "*n*" para que a soma dos "*n*" primeiros termos seja 29524.

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{(q-1)} \Rightarrow 29524 = \frac{1(3^n - 1)}{3-1} \Rightarrow 3^n - 1 = 59048 \Rightarrow 3^n = 3^{10} \therefore n = 10$$

b) Dar o valor de "*x*" na igualdade $x + 3x + ... + 729x = 5465$, sabendo-se que os termos do 1º membro formam uma P.G.

$a_1 = x; \quad q = \frac{3x}{x} = 3; \quad a_{\mathrm{n}} = 729x; \quad S_n = 5465$

Calculo de "*n*":

$$a_n = a_1.q^{(n-1)} \Rightarrow 729x = x3^{n-1} \Rightarrow 729 = 3^{n-1}$$
$$3^6 = 3^{n-1} \Rightarrow 6 = n - 1 \therefore n = 7$$
$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} \Rightarrow 5465 = \frac{x(3^7 - 1)}{3-1} \Rightarrow 5465 = \frac{x(2187-1)}{2}$$
$$5465 = 1093x \therefore x = 5$$

(5) Exercícios

1. Qual será a soma dos 20 primeiros termos de uma P.G. onde $a_1 = 1$ e $q = 2$?

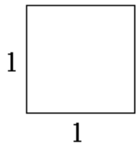
2. Numa P.G., a soma dos termos é 728. Sabendo-se que $a_n = 486$ e $q = 3$, calcule o primeiro termo dessa P.G.

3. Quantos termos devemos considerar na P.G. $(3,6,...)$ para obter uma soma de 765?

4. Numa P.G., $a_2 = 6$ e $a_4 = 54$. Ache a soma dos 5 primeiros termos.

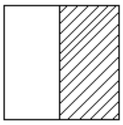
15 FÓRMULA DA SOMA DOS TERMOS DE UMA P.G. INFINITA

Seja a P.G. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},...\right)$ e um quadrado de lado igual a 1(um) de área total $1.1=1$.

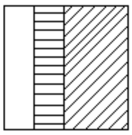


Vamos efetuar as seguintes operações:

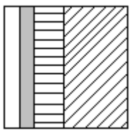
• Pinte metade do quadrado.

$\frac{1}{2}$ 

• Pinte metade do que sobrou e some com a parte pintada anteriormente.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ 

• Pinte metade do que sobrou e some com as partes pintadas anteriormente.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ 

Se prosseguir com o método indefinidamente, você terá uma soma que é igual à área total do quadrado, isto é:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+=1$$

Observe que o 1º membro representa a soma dos termos de uma P.G. infinita e decrescente. Note também que em P.G. possui uma soma que é um número finito, isto é, igual a 1 (um).

Em geral temos:

<u>1º Caso:</u> $-1<q<1$

Quando "*n*" cresce indefinidamente, "q^n" "tende" cada vez mais a zero, isto é:

$n\to\infty\Rightarrow q^n\to 0$, e $S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{(q-1)}$ se aproxima de $\frac{-a_1}{q-1}=\frac{a_1}{1-q}$.

Logo: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a_1}{1-q}$

Onde: S_n é a soma dos *n* termos;

a_1 é o primeiro termo;

q é a razão.

Observação:

Quando a P.G. possui soma, dizemos que a seqüência é convergente.

2º Caso: $|q| > 1$

- Se $a_1 > 0$ e $q > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$

Exemplo:

P.G. $(2,6,18,...)$

- Se $a_1 < 0$ e $q > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$

Exemplo:

P.G. $(-2,-8,-32,...)$

- Se $q < -1$ e $a_1 \neq 0 \Rightarrow \textit{não existe} \lim\limits_{n\to\infty} S_n$

Exemplos:

a) P.G. $(2,-6,18,-54,...)$.

b) P.G. $(-1,5,-25,...)$.

Observação:

Quando a P.G. não possui soma, dizemos que a seqüência é divergente.

Exemplos:

a) Calcular a soma dos termos da P.G. $\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, ...\right)$.

Nesta P.G., temos:

$a_1 = 1; \quad q = \frac{1}{4}$

Vamos calcular a soma "S_n":

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \Rightarrow S_n = \frac{1}{\frac{3}{4}} \therefore S_n = \frac{4}{3}$$

b) Calcular a fração geratriz da dízima 0,3131...

$$0{,}3131... = 0{,}31 + 0{,}0031 + ...$$
$$= \frac{31}{100} + \frac{31}{10000} + ...$$

$a_1 = \frac{31}{100}; \quad q = \frac{1}{100}$

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{31}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{31}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{31}{99}$$

A fração geratriz é 31/99.

(6) Exercícios

1. Calcule a soma dos termos de cada uma das seguintes P.G.:

a) $\left(5, 1, \frac{1}{5}, ...\right)$ b) $(20, 10, 5, ...)$ c) $\left(-30, -10, -\frac{10}{3}, ...\right)$

2. Obtenha a fração geratriz das seguintes dízimas periódicas:

a) 0,999... b) 0,42333... c) 2,666...

3. Resolva a equação $80x + 40x + 20x + ... = 320$ em que o primeiro membro representa a soma dos termos de uma P.G. infinita.

16 PRODUTO DOS TERMOS DE UMA P.G. FINITA

a) Propriedade

Consideremos a P.G. $(2,4,8,16,32,64)$ e nela podemos destacar:

$2 \ e \ 64 \rightarrow$ (são os extremos)

$\left.\begin{matrix} 4\,e\,32 \\ 8\,e\,16 \end{matrix}\right\} \rightarrow$ (são os termos eqüidistantes dos extremos)

Verifica-se facilmente, que:

$2.64 = 128 \rightarrow$ (produto dos extremos)

$\left.\begin{matrix} 4.32 = 128 \\ 8.16 = 128 \end{matrix}\right\} \rightarrow$ (produto de dois termos eqüidistantes dos extremos)

Daí a propriedade:

Numa P.G. finita, o produto de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Assim, dada a P.G. finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, temos:

Temos: $\begin{matrix} a_2.a_{n-1} = a_1.a_n \\ a_3.a_{n-2} = a_1.a_n \end{matrix}$

b) Fórmula do produto

Consideremos a P.G. finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ e vamos indicar por "P_n" o produto dos termos dessa P.G.

$$\mathrm{P}_n = a_1.a_2.a_3 \cdot ... \cdot a_{n-2}.a_{n-1}.a_n$$
$$ou \ \mathrm{P}_n = a_n.a_{n-1}.a_{n-2} \cdot ... \cdot a_3.a_2.a_1$$

Multiplicando membro a membro, temos:

$$(\mathrm{P}_n)^2 = (a_1.a_n).(a_2.a_{n-1}).(a_3.a_{n-2}) \cdot ... \cdot (a_{n-2}.a_3).(a_{n-1}.a_2).(a_n.a_1)$$

Pela propriedade anterior, temos:

$$(\mathrm{P}_n)^2 = (a_1.a_n).(a_1.a_n).(a_1.a_n) \cdot ... \cdot (a_1.a_n).(a_1.a_n).(a_1.a_n)$$

$$(\mathrm{P}_n)^2 = (a_1.a_n)^n$$

$$|P_n| = \sqrt{(a_1.a_n)^n}$$

Onde: P_n é o produto dos *n* termos;

a_1 é o primeiro termo;

a_n é o enésimo termo;

n é o número de termos.

Ou ainda:

Como sabemos que o termo geral de uma P.G. é $a_n = a_1.q^{(n-1)}$ e substituirmos na fórmula do produto obtemos:

$$|P_n| = \sqrt{(a_1.a_1.q^{n-1})^n} = \left(a_1^2.q^{n-1}\right)^{\frac{n}{2}} = a_1^{\frac{2n}{2}}.q^{\frac{(n-10n}{2}} = a_1^n.q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Logo temos: $P_n = a_1^n.q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Onde: P_n é o produto dos *n* termos;

a_1 é o primeiro termo;

q é a razão;

n é o número de termos.

Exemplos:

Calcule o produto dos 5 primeiros termos da P.G. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \ldots\right)$.

$a_1 = \frac{1}{4};\ \mathrm{q} = 2$

$$P_n = a_1^n.q^{\frac{n(n-1)}{2}} \Rightarrow P_5 = \left(\frac{1}{4}\right)^5.2^{\frac{5(5-1)}{2}} = \frac{1}{2^{10}}.2^{10} = 1$$

b) Calcule o produto dos 9 primeiros termos da P.G. $(-2, -4, -8, \ldots)$

$a_1 = -2;\ q = 2$

$$P_n = a_1^n.q^{\frac{n(n-1)}{2}} \Rightarrow P_9 = (-2)^9.2^{\frac{9(9-1)}{2}} = -2^9.2^{36} = -2^{45}$$

(7) Exercícios

1. Calcule o produto dos 7 termos iniciais de P.G. $(2,1,...)$.

2. Numa progressão geométrica, temos: $a_1 = 8;\ q = -\frac{1}{2}$. Calcule o produto de seus:

a) 8 primeiros termos;

b) 11 primeiros termos.

(8) Testes

1. Numa P.G., o 4º termo é 8 e o 7º termo é 64. O 11º termo da P.G. é

a) 2048 b) 128 c) 256 d) 512 e) 1024

2. (UFRGS) Em uma progressão geométrica de razão positiva, o 2º termo é 8 e o 8º termo é 1/8. A soma dos dois primeiros termos é

a) 24 b) 16 c) 12 d) 8 e) 4

3. (UFRGS) O primeiro termo de uma P.G. em que $a_3 = 1$ e $a_5 = 9$ é

a) 1/27 b) 1/9 c) 1/3 d) 1 e) 0

4. (UFRGS) Um produto custa inicialmente 1000 reais e tem seu preço reajustado mensalmente com uma taxa de 30%. Ao fim de 12 meses, o preço será, em reais,

a) $1000.(1,3)^{12}$ b) $1000.(0,3)^{12}$ c) 1000.30^{k}

d) 1000.3^{12} e) $100.(1,3)^{12}$

5. Se cada ratazana de uma colônia gera três ratas, então o número de ratas de 7º geração que serão descendentes de uma única ratazana é

a) 6561 b) 2187 c) 729 d) 243 e) 21

6. (FUVEST) Numa progressão geométrica crescente de 4 termos positivos, a soma dos dois primeiros termos vale 1 e a soma dos 2 últimos é 9. A razão da progressão é

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

7. (ULBRA) Numa P.G. de razão 3, o primeiro termo é 8. O termo que vale 648 é o:

a) 4º b) 5º c) 6º d) 7º e) 8º

8. (UFAL) Se o número 111 for dividido em três partes que constituem uma P.G. de razão ¾, a menor dessas partes será

a) 12 b) 16 c) 18 d) 21 e) 27

9. O produto de três números em P.G. é 125 e a soma é 31. O maior número é

a) 5 b) 1 c) 25 d) 120 e) 4

10. (UFSM) Os termos $x, x+9$ e $x+45$ estão em progressão geométrica, nesta ordem. A razão desta progressão é

a) 45 b) 9 c) 4 d) 3 e)4/3

11. (UFSM) Os números $x, \sqrt{x}, 2^{x-\frac{1}{2}}$ são, nessa ordem, os três primeiros termos de uma P.G. Então, o 1º termo e o produto dos 4 primeiros termos são respectivamente

a) $\frac{1}{2}\, e \sqrt{\frac{1}{2}}$ b) $\frac{1}{2}\, e \frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}\, e \sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}\, e \frac{1}{2}$ e) $\sqrt{2}\, e \sqrt{2}$

12. A soma dos termos da P.G. $(3,6,12,...,384)$ é

a) 8 b) 765 c) 964 d) 101 e) 114

13. (FEI) O limite da soma $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...\right)+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...\right)$ é igual a

a) $+\infty$ b) 2 c) ½ d) 7/2 e) 1

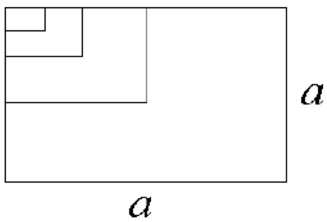
14. (ULBRA) O valor de "*x*" na equação $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+...=18$ é

a) 3 b) 6 c) 9 d) 12 e) 18

15. Dados um quadrado de lado 2, une-se os pontos médios dos lados, obtendo um novo quadrado. Após, une-se os pontos médios deste novo quadrado, obtendo-se um outro quadrado, e assim sucessivamente. A soma das áreas dos infinitos quadrados assim obtidos é:

a) 4 b) 6 c) 8 d) 16 e) 48

16. (UFSM) Considere um quadrado de lado "*a*". pelos pontos médios de dois de seus lados não paralelos, construa um novo quadrado, orientado pela figura. Neste novo quadrado, repita o processo e assim proceda sucessivamente.



A soma da áreas de todos esses quadrados é

a) $2a^2$ b) $\frac{4a^2}{3}$ c) $\frac{7a^2}{4}$ d) $\frac{3a^2}{2}$ e) $4a^2$

17. (UNICRUZ) Numa P.G. decrescente ilimitada, o 1º termo é 5 e a soma é 25/4. O 2º termo da progressão é

a) ½ b) 3/2 c) 2 d) 1 e) 4/5

18. (FESP–PE) A razão da progressão geométrica $(a, a+3{,}5a-3{,}8a)$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

19. (Santa Casa–SP) O 21º termo da seqüência $(1,2,4,8,16,32,...)$ é um número:

a) menor que 100 b) entre 100e 1000 c) entre 1000 e 100.000
d) entre 100.000 e 1000.000 e) entre 1.000.000 e 1050.000

20. (PUC–RS) O termo geral da seqüência $(4,12,36,...)$ é:

a) $4+(n-1)^3$ b) $4+(3n-1)$ c) 4.3^n
d) $\frac{4}{3}.3^n$ e) $\frac{4}{3}.3^{n-1}$

21. (PUC–RS) Na progressão geométrica onde o primeiro termo é b^3, o último é $(-b^{21})$ e a razão é $(-b^2)$, o número de termos é:

a) 9 b) 10 c) 11 d) 12 e) 14

22. (FUVEST–SP) O quinto e o sétimo termo de uma P.G. de razão positiva valem respectivamente 10 e 16. O sexto termo desta P.G. é

a) 13 b) 10 $\sqrt{6}$ c) 4 d) 4 $\sqrt{10}$ e) 10

23. (MACK–SP) Em uma P.G., o primeiro termo é 2 e o quarto termo é 54. O quinto termo dessa P.G. é:

a) 62 b) 68 c) 162 d) 168 e) 486

24. (PUC–RS) A soma dos termos da seqüência infinita $\left(a,\frac{a}{3},\frac{a}{9},...\right)$ é:

a) a b) $2a$ c) $3a$ d) $\frac{2a}{3}$ e) $\frac{3a}{2}$

25. (UFCE) A solução da equação $x+\frac{x}{3}+\frac{x}{9}+\frac{x}{27}+...=60$ é

a) 37 b) 40 c) 44 d) 50 e) 51

Gabarito

(1) 1. a)4 b) 1/2 c) $\sqrt{5}$ d) 100 e) b^2 f) a

2. a=1 3. x=2

(2) 1. a_6=16 2. a_7=27 3. n=9 4. n=5 5. a_1=3

(3) 1. X=2 2. X=8 e q=2 3. P=81

(4) 1. (1,3,9,27,81,243) e q =3 2. b=486

(5) 1. $S_n = 2^{20} - 1$ 2. a_1=2 3. n=8 4. S_5=242 ou S_5=-122

(6) 1. a) S_n=25/4 b) S_n=40 c)S_n=-45

2. a) 1 b) 127/300 c) 8/3

3. S={2}

(7) 1. $1/2^{14}$ 2. a) $-1/16$ b) $-1/2^{22}$

(8) 1) E 2) A 3) B 4) A 5) B

6) C 7) B 8) E 9) C 10) C

11) B 12) B 13) D 14) C 15) C

16) B 17) D 18) B 19) E 20) D

21) B 22) D 23) C 24) E 25) B

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Currículo Básico do PEIES. Universidade Federal de Santa Maria. **Programa de Ingresso ao Ensino Superior.** V. 5, Santa Maria, 1999

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações.** V. 1, Editora Ática, São Paulo, 1999.

DECISAÔ PRÉ-VESTIBULAR. **Matemática.** Polígrafo – Santa Maria [s.n.], 1997, não paginado.

FÓTON VESTIBULARES. **Matemática.** Polígrafo – Santa Maria [s.n.], 2000, não paginado.

GIOVANNI, J. R., BONJORNO, J. R. **Matemática.** V. 1, Editora FTD S.A., São Paulo, 1992.

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio.** V. 2, SBM, Rio de Janeiro, 2001.