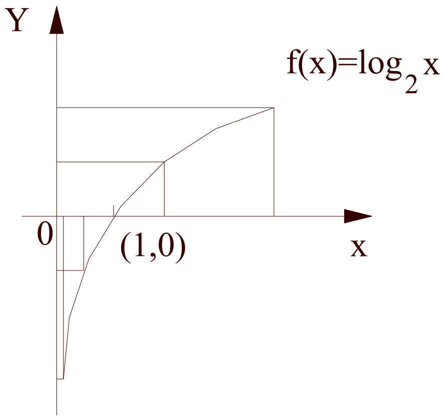
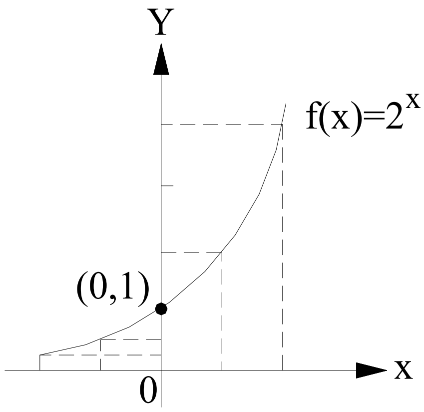
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
Colégio Técnico Industrial de Santa Maria

Caderno Didático 2

Função Exponencial e Função Logarítmica





Série: Matemática I

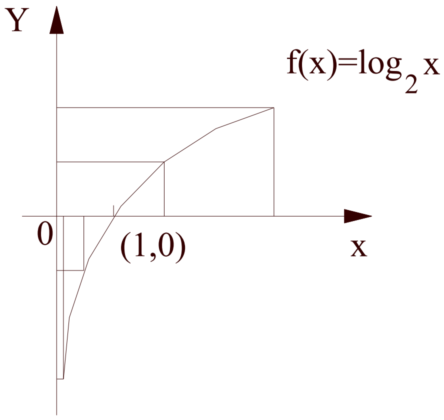
Por:
Professora Angélica Magagnangmo
Professor Mauricio R. Lutz

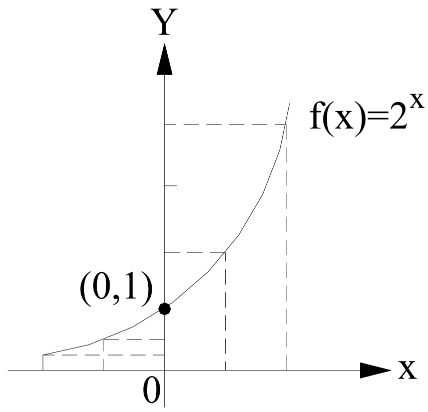
Agosto de 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
Colégio Técnico Industrial de Santa Maria

Caderno Didático 2

Função Exponencial e Função Logarítmica





Série: Matemática I

Por:
Professora Angélica Magagnangmo
Professor Mauricio R. Lutz

Agosto de 2020

M188c

Magagnangmo, Angélica

Caderno didático 2 : função exponencial e função logarítmica / por Angélica Magagnangmo, Mauricio Ramos Lutz. – Santa Maria , 2001.
37 f. : il. (Série Matemática I)

1. Matemática 2. Função logarítmica 3. Função Exponencial 4. Logaritmo 5. Potenciação 6. Equações 7. Ensino médio I. Lutz, Mauricio Ramos II. Título

CDU: 51:373.51

Ficha catalográfica elaborada por
Luiz Marchiotti Fernandes CRB 10/1160
Biblioteca Setorial do Centro de Ciências Rurais/UFSM

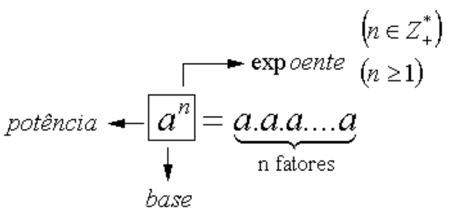
SUMÁRIO

FUNÇÃO EXPONENCIAL

1 REVISÃO SOBRE POTENCIAÇÃO

1.1 Expoente inteiro positivo

Se "*a*" é um numero real e "*n*" é inteiro, positivo, diferente de zero e maior que um, a expressão a^n representa o produto de "*n*" fatores, todos iguais a "*a*", ou seja:



Na expressão acima, o número real "*a*" é denominado base e "*n*" é denominado expoente.

Exemplos:

$$2^3 = 2.2.2 = 8$$

$$(-4)^2 = (-4).(-4) = 16$$

$$(-5)^3 = (-5).(-5).(-5) = -125$$

Para n=1, define-se $a^1 = a$.

Exemplos:

$$10^1 = 10$$

$$(-3)^1 = -3$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

Observação 1:

É bom lembrar que se a base não traz nenhum expoente evidente, logo o expoente da base é o número 1 $(10^1 = 10)$.

Observação 2:

$$\left(\frac{positivo}{negativo}\right)^{par} = positivo$$

$$\left(\frac{positivo}{negativo}\right)^{ímpar} = \frac{positivo}{negativo}$$

1.2 Expoente inteiro negativo

Sendo "*a*" um número real não nulo $(a \neq 0)$ e "*n*" um número inteiro e positivo, define-se:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

Exemplos:

$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = -\frac{1}{125}$$

1.3 Expoente racional fracionário

Sendo "*a*" um número real positivo $(a > 0)$e "*m*" e "*n*" números inteiros e positivos, define-se:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Exemplos:

$$10^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{10^2}$$

$$5^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5^3}}$$

1.4 Propriedades gerais

Se "*m*" e "*n*" são números reais, valem as seguintes propriedades:

Propriedade	Regra
$a^m.a^n = a^{m+n}$	Repete-se a base e somam-se os expoentes.
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Repete-se a base e subtraem-se os expoentes.
Observação: Observe que no caso de termos o expoente zero, ou seja, $a^0 = 1$ (com $a \neq 0$) é um resultado decorrente da propriedade anterior, pois $1 = \dfrac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$.	
$(a^m)^n = a^{m.n}$	Repete-se a base e multiplicam-se os expoentes.
$(a.b)^n = a^n.b^n$	Eleva-se cada fator ao expoente comum.
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ (com $b \neq 0$)	Eleva-se o numerador e o denominador ao expoente comum.

Exemplos:

$2^5.2^4 = 2^{5+4} = 2^9$ $\quad (10^2)^5 = 10^{10}$ $\quad 10^{-3}.10^{-5} = 10^{-3+5} = 10^2$

$10^5 : 10^2 = 10^{5-2} = 10^3$ $\quad (x^4)^{-3} = x^{4.(-3)} = x^{-12}$ $\quad 2^4 : 2^{-1} = 2^{4-(-1)} = 2^{4+1} = 2^5$

$2^{\frac{2}{3}} : 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{5}{12}}$ $\quad \left(\dfrac{2^3}{5^4}\right)^2 = \dfrac{(2^3)^2}{(5^4)^2} = \dfrac{2^6}{5^8}$ $\quad \left(\dfrac{5}{8}\right)^4 = \dfrac{5^5}{8^4}$

(1) Exercícios

1. Escreva na forma de potência de base 2:

a) $\dfrac{1}{16}$ b) 1024 c) $\sqrt[5]{8}$ d) $\dfrac{16}{\sqrt{32}}$

2. Coloque em forma de potência de base 3:

a)729 b) $\frac{1}{81}$ c) $\sqrt[3]{9}$ d) $\frac{3\sqrt[5]{27}}{243}$

3. Indique sob a forma de potência de base 2 o número representado pela expressão $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} : \left(\frac{1}{2}\right)^{2} . \left(8^{2}\right)^{2}$.

4. Calcule o valor da expressão $4^{\frac{1}{2}} - 2^{-1} + (-3)^{0} + (-0{,}1)^{0} . \left(25^{-1}\right)^{0}$.

5. Resolva $16^{-0,5} + 81^{-0,25}$.

6. Simplifique a expressão $\frac{2^{-1} + 2^{-2} + 36^{-\frac{1}{2}}}{81^{\frac{3}{4}} + 16^{-\frac{1}{4}} - 1^{-100}}$.

7. Efetue e simplifique:

a) $7^{-4}.7^{-3} : 7^{-6}$ b) $8^{-5} : 2^{-6} : 4^{-3}$

c) $2^{4}.3^{4} : \left(6^{2}.6^{-5}\right)$ d) $\frac{8^{-12} : 4^{-6}.2^{5}}{4^{6}.\left(2^{-4}\right)^{3}}$

8. Calcule $\frac{\left(3^{8}\right)^{4}.\left(3^{4}\right)^{-2}}{\left(3^{7}\right)^{2}.\left(\sqrt{3}\right)^{20}}$.

9. (FGV-SP) Qual é o valor da expressão $\frac{a.b^{-2}.\left(a^{-1}.b^{2}\right)^{4}.\left(a.b^{-1}\right)^{2}}{a^{-3}.b.\left(a^{2}.b^{-1}\right).\left(a^{-1}.b\right)}$, quando $a = 10^{-3}$ e $b = 10^{-2}$?

10. Simplifique a expressão $\frac{2^{n+4} + 2^{n+2} + 2^{n-1}}{2^{n-2} + 2^{n-1}}$.

2 FUNÇÃO EXPONENCIAL

2.1 Definição

A função $f : \Re \to \Re$ dada por $f(X) = a^{X}$ (com $a \neq 1$ e $a > 0$) é denominada função exponencial de base "*a*" e definida para todo *X* real.

Assim, são funções exponenciais:

$f(X) = 2^{X}$ $f(X) = \left(\frac{1}{3}\right)^{X}$

Observação:

A exigência de que a base *a* seja positiva, para que se possa definir a função $f(X)=a^X$ em $\Re$, é a seguinte:

- Suponha $a=-2$ e $x=\frac{1}{2}$.

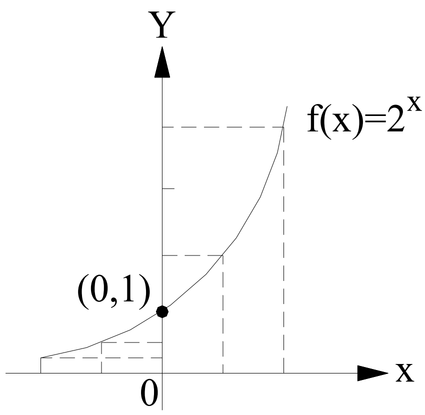
- Daí teríamos: $f(X)=a^X=(-2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-2}$, que não é número real.

2.2 Gráfico no plano cartesiano

Vamos representar no plano cartesiano os gráficos das funções $f(X)=2^X$ e $f(X)=\left(\frac{1}{2}\right)^X$.

- $f(X)=2^X$ ou $Y=2^X$

X	Y
-2	¼
-1	½
0	1
1	2
2	4

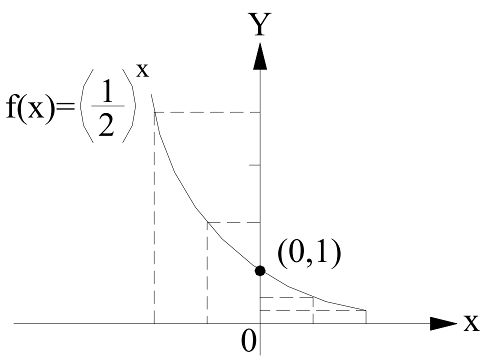


Características :

- $D=\Re$
- $I_m=\Re_+^*$
- f é crescente
- a curva passa pelo ponto (0,1)

- $f(X)=\left(\frac{1}{2}\right)^X$ ou $Y=\left(\frac{1}{2}\right)^X$

X	Y
-2	4
-1	2
0	1
1	½
2	¼

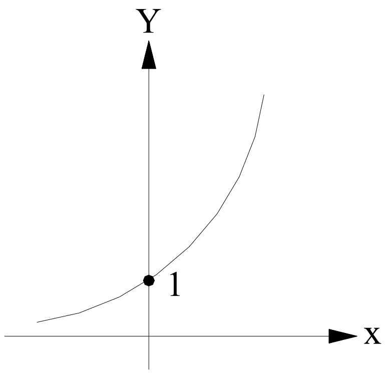


Características:

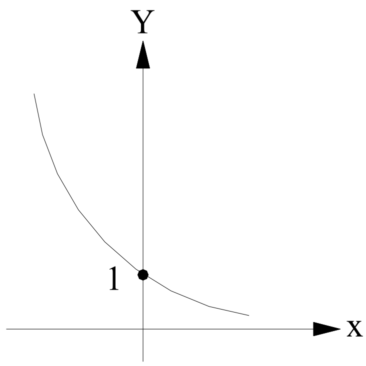
- $D=\Re$
- $I_m=\Re_+^*$
- f é decrescente
- a curva passa pelo ponto (0,1)

Pelos exemplos dados, podemos observar que:

- $f(X) = a^X$ é crescente quando $a > 1$;



- $f(X) = a^X$ é decrescente quando $0 < a < 1$;



(2) Exercícios

1. Esboce o gráfico das seguintes funções exponenciais:

a) $f(X) = 3^X$ b) $f(X) = 2^{X+1}$

c) $f(X) = \left(\frac{1}{3}\right)^X$ d) $f(X) = 2^X + 1$

2. Identifique como crescente ou decrescente as seguintes funções exponenciais:

a) $f(X) = 5^X$ b) $f(X) = \pi^X$

c) $f(X) = \left(\frac{1}{6}\right)^X$ d) $f(X) = (0{,}1)^X$

3 EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Chama-se **equações exponenciais** todas e quaisquer igualdades que envolvam funções exponenciais.

Assim, são equações exponenciais, por exemplo:

$a)\ 2^X = 16$ b) $3^{X+1} + 3^{X-2} = 9$ c) $10.2^{2X} - 5.2^{2X} - 1 = 0$

Existem dois tipos basicamente de equações:

<u>1º tipo – Igualdade de potências de mesma base</u>

- Igualar as bases;
- Cortar as bases;
- Trabalhar com os expoentes.

<u>Exemplos:</u>

a) $4^{X-3}=128$

$$2^{2(X-3)}=2^7\Rightarrow 2X-6=7\Rightarrow 2X=13\Rightarrow X=\frac{13}{2}\Rightarrow V=\left\{\frac{13}{2}\right\}$$

b) $27^{X-2}=9^{X+4}$

$$3^{3(X-2)}=3^{2(X+4)}\Rightarrow 3X-6=2X+8\Rightarrow X=14\Rightarrow V=\{14\}$$

c) $25^{X+1}=\sqrt[4]{125}$

$$5^{2(X+1)}=5^{3\left(\frac{1}{4}\right)}\Rightarrow 2X+2=\frac{3}{4}\Rightarrow 4(2X+2)=3\Rightarrow 8X+8=3\Rightarrow X=-\frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow V=\left\{-\frac{5}{8}\right\}$$

<u>(3) Exercícios</u>

Resolva as seguintes equações exponenciais:

1) $2^X=128$ 2) $5^X=\frac{1}{125}$ 3) $2^{X-2}=8$

4) $3^{X^2-5}=81$ 5) $4^X=512$ 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{X^2-3}=4$

7) $729^{2X}=27$ 8) $\left(\frac{1}{125}\right)^X=25$ 9) $3^X=\sqrt[5]{27}$

10) $25^{2X}=\sqrt{5}$ 11) $\sqrt[X]{3}=\frac{1}{9}$ 12) $\sqrt[X+1]{2^{X-1}}=2$

<u>2º tipo – Equações que exigem transformações e artifícios</u>

As transformações e artifícios que usaremos será a resolução de equações por substituição.

Exemplos:

a) $5^{2X} - 6.5^{X} + 5 = 0$

$5^{2X} = y^2$ e $5^{X} = y$ logo

$y^2 - 6.y + 5 = 0 \Rightarrow y_1 = 1$ e $y_2 = 5$

$5^X = 1 \Rightarrow 5^X = 5^0 \Rightarrow X = 0$

$5^X = 5 \Rightarrow 5^X = 5^1 \Rightarrow X = 1$

$V = \{0,1\}$

b) $3^{X+1} + 3^X - 3^{X-1} = 11$

$3^X.3^1 + 3^X - 3^X.3^{-1} = 11$

$3^X = y$ logo

$3.y + y - \frac{1}{3}y = 11 \Rightarrow \frac{9y + 3y - y}{3} = \frac{33}{3} \Rightarrow 11y = 33 \Rightarrow y = 3$

$3^X = 3^1 \Rightarrow X = 1$

$V = \{1\}$

c) $2^{X+2} - 2^{X-1} = 56$

$2^X.2^2 - 2^X.2^{-1} = 56$

$2^X = y$ logo

$4.y - \frac{1}{2}y = 56 \Rightarrow \frac{8y - y}{2} = 56 \Rightarrow 7y = 112 \Rightarrow y = 16$

$2^X = 2^4 \Rightarrow X = 4$

$V = \{4\}$

(4) Exercícios

1. Resolva as seguintes equações exponenciais

a) $5^X + 125.5^{-x} = 30$ b) $\left(3^X\right)^{X-4} = \frac{1}{27}$

c) $\left(5^X\right)^{X-2} = 25^X$ d) $8^{X-2} = 4^{\frac{X}{2}}$

e) $\left(16^X\right)^{X+1} = \frac{1}{2}$ f) $\left(\frac{1}{4}\right)^{X-1} = 16^{X+2}$

g) $3.2^{X+3}=192$ h) $9^{X}+3=4.3^{X}$

i) $2^{2X}-9.2^{X}+8=0$ j) $5^{X-1}+5^{X-2}=30$

l) $10^{2X}-10^{X}=0$ m) $\left(2^{X}\right)^{X}=16$

2. Dê o conjunto solução da equação $\dfrac{16^{X}+64}{5}=4^{X+1}$.

3. Determine o conjunto solução da equação $3^{X+1}+3^{X-2}-3^{X-3}+3^{X-4}=750$.

4. Sabendo que $3^{X}-3^{2-X}=8$, calcule o valor de $\left(15-X^{2}\right)$.

5. Seja *A*=*X*+*Y* em que *X* e *Y* são, respectivamente, as soluções das equações exponenciais $2^{\sqrt{X}}=128$ e $9.3^{y+1}-3^{y}=78$. Calcule o valor de *A*.

6. Calcule o valor real de *X* para que se tenha $5^{10X}-10.5^{5X}-5=-30$.

7. Resolva o sistema $\begin{cases}3^{X+Y}=1\\ 2^{X+2Y}=2\end{cases}$

(5) Testes

1. (Fatec – SP) Seja *m* o menor número real que é solução da equação $5^{x^2-2}:25=\left(\dfrac{1}{125}\right)^{-X}$. Então, $\sqrt{m}$ é um número:

a) par. b) primo. c) não real. d) irracional. e) divisível por 3.

2. (PUC – PR) A equação $16.5^{2X}=25.20^{X}$, onde $X\in\Re$, admite:

a) os números –2 e 2 como soluções.

b) apenas o número dois como solução.

c) apenas o número ½ como solução.

d) os números 2 e ½ como soluções.

e) apenas o número $\sqrt{2}$ como solução.

3. (FCC – BA) A solução da equação $0{,}5^{2X}=0{,}25^{1-X}$ é um número *X*, tal que:

a) $0<X<1$ b) $1<X<2$ c) $2<X<3$ d) $X>3$ e) $X<0$

4. O valor de *X* que verifica a igualdade $3^{X+2}-3^{X+1}+3^{X}+3^{X-1}+3^{X-3}=16119$ é:

a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 10

5. (UEL – PR) Considere as soluções reais de $3^{X^2}.3^{7X}.3^{12}=1$. A diferença entre a maior e a menor dessas raízes é:

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

6. (Mack – SP) O produto das raízes da equação $2^{2X}-3.2^{X}+2=0$ é:

a) 1 b) 0 c) -1 d) 2 e) -2

7. (PUC – SP) Uma das soluções da equação $2^{2X}-6.2^{X}+5=0$ é zero. A outra solução é um número compreendido entre:

a) 0 e 1 b) 1 e 2 c) 2 e 3 d) 3 e 4 e) 4 e 5

8. (PUC – SP) Resolvendo a equação $4^{X}+4=5.2^{X}$, obtemos:

a) $X_1=0$ e $X_2=1$ b) $X_1=1$ e $X_2=4$ c) $X_1=0$ e $X_2=2$

d) $X_1=-1$ e $X_2=-2$ e) $X_1=-4$ e $X_2=-5$

9. (PUC – MG) O valor de *X*+*Y* no sistema $\begin{cases} 2^{X}=4^{Y} \\ 25^{X}=25.5^{Y} \end{cases}$ é:

a) 4/3 b) 2/3 c) 1/3 d)1 e)2

10. (Mack) O valor da expressão $\dfrac{2^{n+4}+2^{n+2}+2^{n-1}}{2^{n-2}+2^{n-1}}$ é:

a)1 b) 2^{n+1} c) 3/83 d) 82/3 e) n

11. (PUC – SP) Se *a=16* e *X=1,25*, quanto vale a^X?

a) $\sqrt{2}$ b) 32 c) 20 d) $16\sqrt{2}$ e) 64

12. (Mack) Se $(0,1)^{X-5}=10$, então *X* vale:

a) –5 b) 0 c) 4 d) 6 e) 10

13.Resolvendo a equação exponencial $32^{X+2} = 16^{X+1}$, o valor de *X* é:

a) –9 b) +6 c) +9 d) –12 e) –6

14. (FAI/Mauá) O conjunto solução da equação exponencial $7^X + 7^{X-1} = 8$ é:

a) {2} b) {-1} c) {-2} d) {1} e) n.r.a.

15. A soma das raízes da equação $\left(3^X\right)^X = 9^8$ é:

a) 0 b) 1 c) 4 d) –4 e) 8

16. (OSEC) Se $4^X - 4^{X-1} = 24$, então $(2X)^X$ é igual a:

a) 5$\sqrt{5}$ b) $\sqrt{5}$ c) 25$\sqrt{5}$ d) 125 e) n.r.a.

17. (UFSM) O valor de *X* que satisfaz a equação: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2X} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{X-1}$, para todo *a, b* pertencentes aos reais diferentes de zero, é:

a) 1 b) -1 c) 1/3 d) –1/3 e) n.r.a.

18. (UFPEL) O conjunto solução da equação exponencial $5^{2X} - 7.5^X = 450$ é:

a) {1} b) {-18} c) {2} d) {3} e) {25,-18}

19. (UFSM) Se $8^X = \sqrt[3]{\dfrac{1}{32}}$ então:

a) X=4/3 b) X=5/9 c) X=2 d) X=-4/3 e)X=-5/9

20. (PUC – RS) O conjunto verdade da equação $4.2^{2X-1} = \sqrt{32}$ é:

a) {1/4} b) {1/2} c) {3/4} d) {5/4} e) {2}

21. (PUC – RS) A soma das raízes da equação $\dfrac{16^X + 64}{5} = 4^{X+1}$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 16 e) 20

22. (UFSM) A sentença $100.10^{X} = \sqrt[X]{1000^{5}}$ é verdadeira para "*X*" igual a:

a) –3 e 5 b) 3 e 5 c) –3 e –5 d) 3 e –5 e) 1/3 e –5

23. (PUC – RS) Se $2^{2X-1} + 2^{X} = 12$, então $(2X+1)$ vale:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

24. (UFRGS) Sabendo que $4^{X} - 4^{X-1} = 24$, então $X^{\frac{1}{2}}$ vale:

a) $\sqrt{2}$/5 b) $\sqrt{5}$/2 c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{10}$/5 e) $\sqrt{10}$/2

25. (UFSM) A soma dos valores de *X* que tornam verdadeira a equação $4^{X} + 4 = 5.2^{X}$ é

a) 2 b) 4 c) 5 d) –3 e)-9

26. (PUC – RS) A raiz da equação $3^{X} + 3^{X-1} + 3^{X-2} + 3^{X-3} = 360$ é

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

27. (PUC – RS) Se $3^{X} - 3^{2-X} = 8$, então $15 - X^{2}$ vale

a) 16 b) 15 c) 14 d) 11 e) 6

28. (PUC – RS) O produto das raízes da equação $\frac{9^{X} + 27}{4} = 3^{X+1}$ é

a) 2 b) 3 c) 9 d) 12 e) 27

29. (PUC – RS) A soma das raízes da equação $4^{X+1} - 9.2^{X} + 2 = 0$ é

a) –2 b) –1 c) 0 d) 1 e) 2

30. (UFSM) Se $10^{X+2} = 25$, então 10^{-X} é igual a

a) 1/25 b) ¼ c) 4 d) 25/5 e) 25

31. (UFSM) Se $f(X) = A.3^{-BX}$ onde *A* e *B* são constantes, $A \neq 0$ e $f(81) = 9.A$, então o valor de *B* é:

a) 81 b) 1 c) 0 d) –1/27 e) –2/81

32. (F. C. Chagas) A solução da equação $2^{X-1} - 2^{X+2} = -56$

a) primo

b) múltiplo de 3

c) divisível por 4

d) múltiplo de 5

e) divisível por 7

33. (UPF) O conjunto verdade da equação $342^{\left(X^2 - X\sqrt{7}\right)} = 1$ é

a) V={0,1}

b) V={1, $\sqrt{7}$ }

c) V={1,2}

d) V={0, $\sqrt{7}$ }

e) V={0,2}

34. (UFSM) O gráfico da função exponencial $f(X) = 3^{X+\sqrt[3]{B}}$ passa pelo ponto (-½,1). O valor de *B* e o valor de *X*, tal que $f(X) = \frac{1}{\sqrt[4]{27}}$, são respectivamente

a) –1/8;5/4 b) 1/8;-5/4 c) –1/8;-5/4 d) 1/8;5/4 e) 5/4;1/8

35. O conjunto verdade da equação $2^X - 2^{-X} = 5\left(1 - 2^{-X}\right)$

a) {1,4} b) {1,2} c) {0,1} d) {0,2} e) n.r.a.

Gabarito

(1) 1. a) 2^{-4} b) 2^{10} c) $2^{\frac{3}{5}}$ d) $2^{\frac{3}{2}}$

2. a) 3^{6} b) 3^{-4} c) $3^{\frac{2}{3}}$ d) $3^{-\frac{17}{5}}$

3. 2^{19}

4. $7/2$

5. $7/12$

6. $11/318$

7. a) $1/7$ b) $1/8$ c) 6^{7} d) 2^{-19}

8. 1

9. 10^{-9}

10. $82/3$

(2) 1.a) Crescente Pontos x= -2; -1; 0; 1; 2.
y= 1/9; 1/3; 1; 3; 9.
b) Crescente Pontos x= -2; -1; 0; 1; 2.
y= 1/2; 1; 2; 4; 8.
c) Decrescente Pontos x= -2; -1; 0; 1; 2.
y= 36; 6; 1; 1/6; 1/36.
d) Crescente Pontos x= -2; -1; 0; 1; 2.
y= 5/4; 3/2; 2; 3; 5.

2. a) Crescente b) Crescente c) Decrescente d) Decrescente

(3) 1) V={7} 2) V={-3} 3) V={5} 4) V={-3,+3} 5) V={9/2}
6) V={-1,1} 7) V={1/4} 8) V={-2/3} 9) V={3/5} 10) V={1/8}
11) V={-1/2} 12) V=∅

(4) 1. a) V={1,2} b) V={1,3} c) V={0,4} d) V={3} e) V={-1/2}
f) V={-1} g) V={3} h) V={0,1} i) V={0,3} j) V={3}
l) V={0} m) V={-2,2}

2. V={1,2}

3. V={5}
4. 11
5. A=50
6. V={1/5}
7. V={-1,1}

(5)	1) C	2) B	3) A	4) C	5) D
	6) B	7) C	8) C	9) E	10) D
	11) B	12) C	13) E	14) D	15) A
	16) C	17) C	18) C	19) E	20) C
	21) C	22) D	23) C	24) E	25) A
	26) C	27) D	28) A	29) B	30) C
	31) E	32) C	33) D	34) B	35) D

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

4 LOGARITMO

4.1 Definição

Chama-se logaritmo de um número “*N*”, positivo, numa base “*a*” positiva e diferente de um, a todo número “*x*”, $x \in \Re$ tal que “*x*” é o expoente ao qual devemos elevar “*a*” para encontrar o número “*N*”. Ou seja

Forma logarítmica Forma exponencial

$$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N \qquad C.E.\begin{cases} N > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_a b = x \begin{cases} a = \text{base do logaritmo} \\ b = \text{logaritmando} \\ x = \text{logaritmo} \end{cases} \qquad a^x = b \begin{cases} a = \text{base da potência} \\ b = \text{potência} \\ x = \text{expoente} \end{cases}$$

Observação:

Chamaremos de C.E. as condições de existência do logaritmo, que utilizaremos para calcular o domínio da função e na resolução de equações logarítmicas.

Exemplos:

a) Considerando a definição dada, calcule o valor do logaritmo $\log_6 36$.

$$\log_6 36 = x \Rightarrow 36 = 6^x \Rightarrow 6^2 = 6^x \therefore x = 2$$

Portanto, $\log_6 36 = 2$

b) Sabendo que $\log_a 64 = 6$, calcule o valor de “*a*”.

$$\log_a 64 = 6 \Rightarrow a^6 = 64 \Rightarrow a = \pm\sqrt[6]{64} \therefore a = \pm 2$$

C. E> $a > 0$ e $a \neq 1$

• Se $a = +2 \Rightarrow 2 > 0$ e $2 \neq 0$ • Se $a = -2 \Rightarrow -2 > 0$ (falso)

Logo temos que “*a*” só pode ser +2.

c) Calcule o domínio de $y = \log_{x+1}\left(x^2 + 3x - 18\right)$

$$C.E.\begin{cases} x^2 + 3x - 18 > 0 \Rightarrow (1) \\ x + 1 > 0 \text{ e } x + 1 \neq 1 \Rightarrow (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm 9}{2} = \begin{cases} x' = 3 \\ x'' = -6 \end{cases}$$

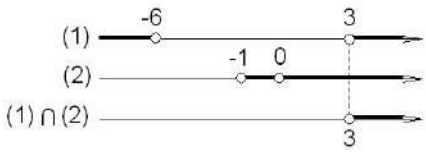
$$(2) \Rightarrow x + 1 > 0$$

$$x > -1$$

$$(2) \Rightarrow x + 1 \neq 1$$

$$x \neq 0$$

Na reta real:



Logo $D = \{x \in \Re \,/\, x > 3\}$

(1) Exercícios

1. Determine o campo de existência das funções:

a) $f(x) = \log_2(x - 8)$ b) $f(x) = \log_x(x^2 - 1)$

2. No campo real, para que valores de *x* tem sentido a expressão:

$y = \log_{10}(x^2 + x - 12)$?

3. Determine os valores de *x* para os quais está definido o logaritmo:

$\log_{x+2}(5x^2 - 26x + 5)$.

4. Aplicando a definição, calcule o valor dos logaritmos:

a) $\log_{\sqrt{8}} 4$ b) $\log_{25} 0{,}2$ c) $\log_{49} \sqrt[3]{7}$

d) $\log_4 2\sqrt{2}$ e) $\log_{\sqrt[5]{2}} 128$ f) $\log_{625} \sqrt{5}$

5. Calcule o valor da Soma *S*:

a) $S = \log_{\frac{1}{2}} 8 - \log_{\frac{4}{3}} \frac{27}{64} + \log_2 1024$

b) $S = \log_{\sqrt{2}} 8 - \log_{10} 0{,}01 + \log_2 \sqrt{8}$

4.2 Sistemas de logaritmos

Aos logaritmos que se indicam $\log_a b$ chamamos de sistema de logaritmos de base "*a*".

Existe uma infinidade de sistemas de logaritmos. Dentre todos os sistemas, dois deles se destacam por sua importância.

- *Sistema de logaritmos decimais*

Os logaritmos decimais ou Briggs são os mais usados. Como o próprio nome indica são aqueles cuja base vale 10.

Indica-se: $\log_{10} x$ ou $\log x$

<u>Observação:</u>

Quando o sistema é de base 10 é comum omitir-se a base na sua representação.

- *Sistema de logaritmos neperianos*

É o sistema de base "*e*" ou logaritmos naturais. Os logaritmos neperianos aparecem naturalmente em muitos fenômenos, como o crescimento populacional, a desintegração radioativa, em problemas de juros compostos, etc.

Indica-se: $\log_e x$ ou $\ln x$ com $e \cong 2,718.....$ (nº irracional)

John Neper (1550-1617) introduziu o sistema de logaritmos neperianos em seu trabalho "Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmso".

4.3 Conseqüências da definição

a) O logaritmo de 1 em qualquer base é sempre igual a zero.

$\log_a 1 = 0$

$$\log_2 1 = x \Leftrightarrow 2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \therefore x = 0$$

$$\log_5 1 = x \Leftrightarrow 5^x = 1 \Rightarrow 5^x = 5^0 \therefore x = 0$$

b) Quando a base e o logaritmando são iguais, o logaritmo é sempre igual a 1.

$$\log_a a = 1$$

$$\log_2 2 = x \Leftrightarrow 2^x = 2 \Rightarrow 2^x = 2^1 \therefore x = 1$$

$$\log_6 6 = x \Leftrightarrow 6^x = 6 \Rightarrow 6^x = 6^1 \therefore x = 1$$

c) Quando o logaritmando for uma potência da base, o logaritmo é o expoente do logaritmando.

$$\log_a a^m = m$$

$$\log_3 3^5 = x \Leftrightarrow 3^x = 3^5 \therefore x = 5$$

$$\log_7 7^2 = x \Leftrightarrow 7^x = 7^2 \therefore x = 2$$

d) A potência de base "*a*" e expoente $\log_a b$ é igual a "*b*".

$$a^{\log_a b} = b$$

$$2^{\log_2 4} = x \Leftrightarrow 2^y = x \Rightarrow 2^2 = x \therefore x = 4$$

Calculo auxiliar:

$$\log_2 4 = y \Rightarrow 4 = 2^y \Rightarrow 2^2 = 2^y \therefore y = 2$$

$$3^{\log_3 9} = x \Leftrightarrow 3^y = x \Rightarrow 3^2 = x \therefore x = 9$$

Calculo auxiliar:

$$\log_3 9 = y \Rightarrow 9 = 3^y \Rightarrow 3^2 = 3^y \therefore y = 2$$

e) A igualdade de dois logaritmos em uma mesma base se verifica quando os logaritmandos forem iguais.

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

$$\log_2 x = \log_2 4 \Leftrightarrow \log_2 x = 2 \therefore x = 4$$

$$\log_3 x = \log_3 27 \Leftrightarrow \log_3 x = 3 \therefore x = 27$$

(2) Exercícios

1. Dê o valor de:

a) $\log_4 4$ b) $\log_6 1$ c) $\log_{0,2} 1$ d) $\log_6 6^2$

e) $5^{\log_5 7}$ f) $4^{\log_4 \frac{1}{2}}$ g) $\log_5 5^{-7}$ h) $\log_{33} 1$

2. Determine o valor das expressões:

a) $5^{\log_4 3 . \log_5 4}$ b) $3^{-\log_5 7 . \log_3 5}$ c) $2^{2 \log_2 5}$

4.4 Propriedades operacionais dos logaritmos

Propriedade	Regra
$\log_b (a.c) = \log_b a + \log_b c$ com $a > 0, c > 0$ e $1 \neq b > 0$.	O logaritmo de um produto é igual à soma do logaritmos dos fatores tomados na mesma base.
$\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c$ com $a > 0, c > 0$ e $1 \neq b > 0$.	O logaritmo de um quociente é igual ao logaritmo do numerador menos o logaritmo do denominador na mesma base.
$\log_b a^n = n \log_b a$ com $a > 0$ e $1 \neq b > 0$.	O logaritmo de uma potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

Observação1:

O logaritmo de uma soma ou de uma diferença não pode ser desenvolvido.

- $\log_b(a+c) \neq \log_b a + \log_b c$
- $\log_b(a-c) \neq \log_b a - \log_b c$

Observação 2:

Uma conseqüência do logaritmo de uma potência è na seguinte aplicação:

$$\log_b \sqrt[n]{a} = \log_b a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}.\log_b a.$$

Exemplos:

a) Sendo $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$, calcule $\log\left(9\sqrt{8}\right)$.

$$\log\left(9\sqrt{8}\right) = \log 9 + \log\sqrt{8} = \log 3^2 + \log\sqrt{2^3} = 2\log 3 + \frac{3}{2}\log 2$$

$$\log\left(9\sqrt{8}\right) = 2y + \frac{3}{2}x = \frac{4y+3x}{2}$$

b) Sabendo-se que $\log_x a = 8$, $\log_x b = 2$ e $\log_x c = 1$, calcular $\log_x\left(\frac{a^3}{b^2.c^4}\right)$.

$$\log_x\left(\frac{a^3}{b^2.c^4}\right) = \log_x a^3 - \log_x\left(b^2.c^4\right) = 3\log_x a - \left(\log_x b^2 + \log_x c^4\right)$$

$$= 3\log_x a - 2\log_x b - 4\log_x c = 3.8 - 2.2 - 4.1 = 24 - 4 - 4 = 16$$

c) Dado $\log_x A = 2.\log_x m + \log_x n$, calcular "*A*" em função de "*m*" e "*n*".

$$\log_x A = 2.\log_x m + \log_x n = \log_x m^2 + \log_x n = \log_x(m^2.n)$$

$$\log_x A = \log_x(m^2.n) \Leftrightarrow A = m^2.n$$

(3) Exercícios

1. Sendo $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, determine $\log 180$ em função de "*a*" e "*b*".

2. Calcule $\log_c \sqrt[3]{a\sqrt[3]{b\sqrt[3]{c}}}$, sendo $\log_c a = 5$ e $\log_c b = 2$.

3. Dados $\log_a 2 = 0{,}69$ e $\log_a 3 = 1{,}10$, calcule $\log_a \sqrt[5]{512}$.

4. Sendo $a^2 + b^2 = 70ab$, calcule $\log_5 \frac{(a+b)^2}{ab}$ em função de $m = \log_5 2$ e $n = \log_5 3$.

5. Sabendo que $\log a = 2\log b = -\log c = 6$, calcule $\log \sqrt{\frac{a^2.b^2}{c^3}}$.

6. Encontre o valor de "*m*", sabendo que: $\log_2 m = \log_2 5 + \log_2 10 - 2\log_2 5$.

4.5 Cologaritmo

Chama-se cologaritmo de um número, numa determinada base, ao logaritmo do **inverso** desse número na mesma base.

$$co\log_a b = -\log_a b = \log_a \frac{1}{b}$$

Exemplos:

a) Calcular o valor de $co\log_2 64$.

$co\log_2 64 = -\log_2 64 = -6$

Cálculo auxiliar:

$\log_2 64 = x \Rightarrow 64 = 2^x \Rightarrow 2^6 = 2^x \therefore x = 6$

b) Resolver a equação $\log_5 x = \log_5 3 + co\log_5 4$.

$C.E.\{x > 0$

$\log_5 x = \log_5 3 + co\log_5 4 \Rightarrow \log_5 x = \log_5 3 + -\log_5 4$

$\log_5 x = \log_5 \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

Verificação: $x > 0 \Rightarrow \frac{3}{4} > 0 \quad (V)$

$S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$

(4) Exercícios

1. Determine "*x*" na equação $\log_2 x = \log_2 25 + co\log_2 5$.

2. Resolva: $\log_{10}(2x^2 + 4x - 4) + co\log_{10}(x+1) = \log_{10} 4$.

4.6 Mudança de base

Até o memento, em todas as propriedades utilizada consideremos o fato de os logaritmos estarem sempre na mesma base.

Suponha agora que apareçam bases diferentes e que precisemos reduzir os logaritmos de bases diferentes para uma base conveniente.

Esta operação é chamada **mudança de base**. Veja como funciona.

Dado $\log_a b$, vamos indicá-lo em outra base c ($\log_c b$).

Fazendo as substituições:

$$\begin{cases} \log_a b = x \Rightarrow b = a^x \\ \log_c b = y \Rightarrow b = c^y \end{cases} \therefore a^x = c^y$$

Tomando os logaritmos do 1º e do 2º membros da base "*c*", temos:

$\log_c a^x = \log_c c^y \Rightarrow x.\log_c a = y.\log_c c$

$\log_a b.\log_c a = \log_c b.1 \Rightarrow \log_a b.\log_c a = \log_c b \therefore$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \begin{cases} b > o \\ 0 < a \neq 1 \\ 0 < c \neq 1 \end{cases}$$

Esta expressão mostra como se efetua a mudança de um logaritmo de base "*a*" para um logaritmo de base "*c*" (arbitrária).

Exemplos:

a) Sendo $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 3 = 0{,}4$, calcular $\log_2 6$.

Como $\log 2$ e $\log 3$ estão na base 10, vamos passar $\log_2 6$ para a base 10:

$$\log_2 6 = \frac{\log 6}{\log 2} = \frac{\log 2.3}{\log 2} = \frac{\log 2 + \log 3}{\log 2} = \frac{0{,}3 + 0{,}4}{0{,}3} = \frac{0{,}7}{0{,}3} = \frac{7}{3}$$

b) Sabendo que , $\log_b a = 4$, calcular $\log_{a^2} b^6$.

Passando para a base "b", temos:

$$\log_{a^2} b^6 = \frac{\log_b b^6}{\log_b a^2} = \frac{6\log_b b}{2\log_b a} = \frac{6}{2.4} = \frac{3}{4}$$

c) Resolva a equação $\log_2 x + \log_8 x = 8$.

$C.E.\{x > 0$

$\log_2 x + \log_8 x = 8$

Na expressão aparecem logaritmos nas bases 2 e 8; deixaremos ambos com a menor base (2).

$\log_2 x + \dfrac{\log_2 x}{\log_2 8} = 8$ como $\log_2 8 = 3$, vem:

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{3} = 8 \Rightarrow \frac{3\log_2 x + \log_2 x}{3} = \frac{24}{3}$$

$$3\log_2 x + \log_2 x = 24 \Rightarrow 4\log_2 x = 24 \Rightarrow \log_2 x = 6 \therefore x = 2^6 = 64$$

Verificação: $x > 0 \Rightarrow 64 > 0 \quad (V)$

$S = \{64\}$

(5) Exercícios

1. Efetue o produto $\log_3 2.\log_2 5.\log_5 3$.

2. Sendo $\log_a (a^3.b^2) = m$, calcule $\log_b a$.

3. Dados $\log_b a = m$ e $\log_b c = n$, calcule $\log_c a$.

4. Resolva a equação $\log_{10} \sqrt{x} + \log_{100} x = 2$.

5. Indique os valores reais de "*x*" para os quais é verdadeira a igualdade $\log_3 \sqrt{3x} + \log_9 (2x - 5) = 1$.

5 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

5.1 Definição

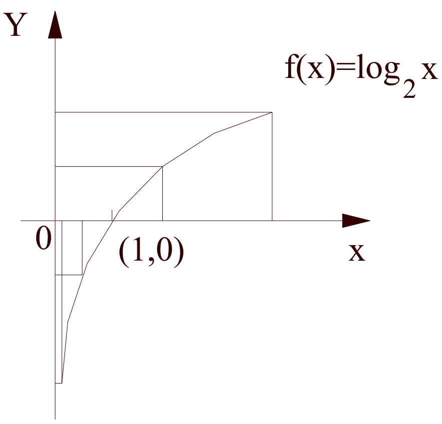
Dado um número real "*a*" $(0 < a \neq 1)$ chamamos **função logarítmica de base "*a*"** a função de $\Re_+^*$ em $\Re$ que associa a cada o número $\log_a x$.

5.2 Gráfico no plano cartesiano

Vamos considerar a função logarítmica $\log_2 x$ e $\log_{\frac{1}{2}} x$, onde devemos nos lembrar que $x > 0$.

- $f(X) = \log_2 x$

X	Y
1/8	-3
¼	-2
½	-1
1	0
2	1
4	2

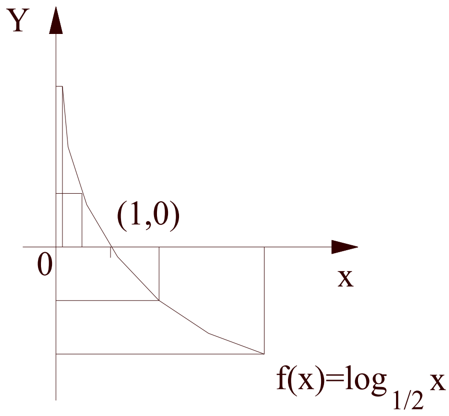


Características :

- $D = \Re_+^*$
- $I_m = \Re$
- f é crescente
- a curva passa pelo ponto (1,0)
- $Base: 2 > 1$

• $f(X) = \log_{1/2} x$

X	Y
4	-2
2	-1
1	0
½	1
¼	2
1/8	3



Características:

• $D = \Re_+^*$

• $I_m = \Re$

• f é decrescente

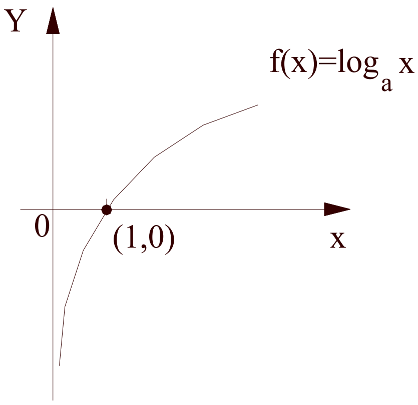
• a curva passa pelo ponto (1,0)

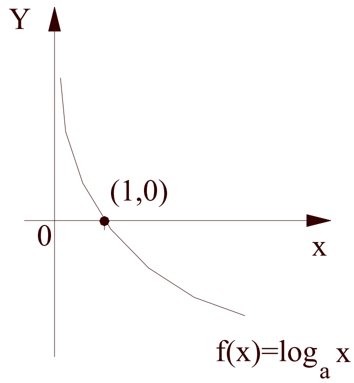
• $Base: 0 < 1/2 < 1$

Pelos exemplos dados, podemos observar que:

• $f(X) = \log_a x$ é crescente quando $a > 1$;

• $f(X) = \log_a x$ é decrescente quando $0 < a < 1$;





(6) Exercícios

1. Construa os gráficos das funções:

a) $f(X) = \log_3 x$ b) $f(X) = \log_2 (x-1)$

2. Esboce, num mesmo sistema de eixos, os gráficos das funções $y = \log_4 x$ e $y = \log_{1/4} x$.

6. Equações logarítmicas

Chama-se **equações logarítmicas** todas e quaisquer equações que envolvam logaritmos.

Resolver uma equação logarítmica é determinar o valor ou os valores da incógnita que tornam a sentença verdadeira.

Para resolver uma equação logarítmica, adotaremos o seguinte método:

1º) Indicaremos as condições de existência;

2º) Resolveremos a equação;

3º) Faremos a verificação com as soluções da equação nas condições de existência.

<u>Exemplos:</u>

a) Resolver a equação $\log_3^2 x - \log_3 x - 6 = 0$.

$C.E.\{x > 0$

$\log_3^2 x - \log_3 x - 6 = 0$

$(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 6 = 0$

Substituição: $\log_3 x = y$

$y^2 - y - 6 = 0 \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -2 \end{cases}$

Voltando à substituição, temos:

$\log_3 x = y \Rightarrow \log_3 x = 3$ ou $\log_3 x = -2$

$x = 3^3 \qquad x = 3^{-2}$

$x = 27 \qquad x = \frac{1}{9}$

Ambas as soluções satisfazem as C.E.

$S = \left\{\frac{1}{9}, 27\right\}$

b) Resolver a equação $\log_2(x+2)+\log_2(x-2)=5$.

$$C.E.\begin{cases} x+2>0 \\ x-2>0 \end{cases}$$

$$\log_2(x+2)+\log_2(X-2)=5$$

$$\log_2(x+2).(x-2)=5 \Rightarrow (x+2)(x-2)=2^5$$

$$x^2-4=32 \Rightarrow x^2=36 \Rightarrow x=\pm 6$$

Verificação:	para $x=6$	para $x=-6$
$x+2>0$	$6+2>0$ (v)	$-6+2>0$ (f)
$x-2>0$	$6-2>0$ (v)	$-6-2>0$ (f)

$S=\{6\}$

c) Resolver a equação $2\log_7 x=\log_7 3x+\log_7 6$.

$$C.E.\{x>0$$

$$2\log_7 x=\log_7 3x+\log_7 6$$

$$\log_7 x^2=\log_7(3x.6) \Rightarrow \log_7 x^2=\log_7 18x \Rightarrow x^2=18x \Rightarrow x^2-18x=0$$

$$x(x-18)=0\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=18 \end{cases}$$

Verificação:	para $x=0$	para $x=18$
$x>0$	$0>0$ (f)	$18>0$ (v)

$S=\{18\}$

d) Resolver a equação $\log_2(x-1)+1=\log_2(x+2)+\log_2(7-x)-\log_2 3$.

$$C.E.\begin{cases} x-1>0 \\ x+2>0 \\ 7-x>0 \end{cases}$$

$$\log_2(x-1)+1=\log_2(x+2)+\log_2(7-x)-\log_2 3$$

$$\log_2(x-1)+\log_2 2=\log_2(x+2)+\log_2(7-x)-\log_2 3$$

$$\log_2(x-1).2=\log_2\frac{(x+2)(7-x)}{3} \Rightarrow (x-1).2=\frac{(x+2)(7-x)}{3}$$

$6(x-1)=(x+2)(7-x) \Rightarrow 6x-6=7x-x^2+14-2x \Rightarrow x^2+x-20=0$

$\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\frac{-1\pm 9}{2}\begin{cases} x_1=4 \\ x_2=-5 \end{cases}$

Verificação:	para $x=4$	para $x=-5$
$x+1>0$	$4-1>0$ (v)	$-5+1>0$ (f)
$x+2>0$	$4+2>0$ (v)	$-5+2>0$ (f)
$7-x>0$	$7-4>0$ (v)	$7+5>0$ (f)

$S=\{4\}$

(7) Exercícios

1. Resolva a equação $\log_{3x+2}(2x-1)=1$.

2. Determine o conjunto solução das equações:

a) $\log_3^2 x-6\log_3 x+9=0$ b) $\log^2(x-3)-\log(x-3)=0$

3. Dê o conjunto solução da equação $\frac{3+\log_{10} x}{2-\log_{10} x}=4$.

4. Determine o conjunto solução das equações:

a) $\log_2(x-8)-\log_2(x+6)=3$ b)

$\log_2(x-2)+\log_2(7-x)=\log_2(x-1)-1$

5. Determine a solução real da equação $\log 2^x+\log(1+2^x)=\log 6$.

6. Solucione a equação $\log x^2=\log\left(x+\frac{11}{10}\right)+1$.

7. Calcule $\log(m-9)+2\log\sqrt{2m-1}=2$.

8. Ache "*x*" e "*y*" para que se tenha $\begin{cases} \log x-\log y=\log 2 \\ 4^{x-y}=16 \end{cases}$.

(8) Testes

1. (PUC) O valor de $\log_8\sqrt{2}-\log_2\sqrt{8}$ é

a) –5/3 b) –4/3 c) –1/2 d)4/3 e) 5/3

2. (UPF) O Valor da expressão $\log_2 \frac{1}{8} + 8^{\frac{1}{3}}$ está no intervalo

a) [-3,-2] b) [-2,0] c) $(0,+\infty)$ d) (2,3] e) [-5,-3]

3. (ULBRA) Se $\log_4 x = 2$, então o valor da $\sqrt{x}$ é

a) 2 b) 4 c) 8 d) 16 e) 40

4. (UFRGS) O valor de $\log_a (bx) - \log_a x$ é

a) $\log_b b$ b) $\log_b a$ c) $\log_a x$ d) $\log_a b$ e) $\log_b x$

5. (UFRGS) O valor de $\log_3 18 + \log_3 6 - \log_3 12$ é

a)1 b)2 c) 12 d) $\log_3 12$ e) $\frac{\log_3 24}{\log_3 12}$

6. (PUC) Se $\log a = 4$ e $\log b = 1$, então $\log \sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}$ é igual a

a) 6 b) 4 c) 3 d) 8/3 e) 7/3

7. (UCS) Seja a igualdade $\log x = \log 3 + 2\log a - \log b$, onde a e b são números reais positivos e o símbolo log representa o logaritmo na base decimal. É correto afirmar que x é igual a

a) $3 + 2a - b$ b) $\frac{3a^2}{b}$ c) $\frac{6a}{b}$ d) $3a^2 - b$ e) $3 + a^2 - b$

8. (UFRGS) Se $\log a = 4$, então $\log \frac{\sqrt{a}}{1000}$ é

a) 2 b) 1 c) 0 d) –1 e) –2

9. (UFSM) Se $\log 5 = a$ e $\log 7 = b$, então $\log 122{,}5$ é igual a

a) $a + b$ b) $a + b + 1$ c) $a + b - 1$ d) $2a + 2b$ e) $2a + 2b - 1$

10. (UFRGS) Se $\log 2 = a$ e $\log 3 = a + b$, então $\log \sqrt[3]{54}$ é

a) $4a + b$ b) $12a + 3b$ c) $\dfrac{a+4b}{3}$ d) $\dfrac{4a+3b}{3}$ e) $\dfrac{4a+b}{3}$

11. (PUC) Se $\log_2 m = k$, então $\log_8 m$ será

a) 2k b) k/3 c) 3k d) k/2 e) k+6

12. (PUC) Sendo $\log 2 = m$ e $\log 3 = n$, então $\log_6 2$ é

a) $\dfrac{m}{n}$ b) $\dfrac{m}{m+n}$ c) $\dfrac{m}{m-n}$ d) $m + n$ e) $m - n$

13. (PUC) Se $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$, então $\log_2 6$ é igual a

a) 0,584 b) 0,778 c) 1,584 d) 2,584 e) 2,778

14. (UFRGS) O logaritmo de um número na base 16 é $\dfrac{2}{3}$. Então, o logaritmo deste número na base $\dfrac{1}{4}$ é

a) –4/3 b) –3/4 c) 3/8 d) 3 e) 6

15. (UCS) O conjunto solução da equação $\log_2(x+1) + \log_2 x = 1$ é

a) {1} b) {1,-2} c) {2} d) {2,-1} e) {1,2}

16. (PUC) A solução da equação $\log(x-4) = \log 45 - \log x$ é

a) –9 b) –5 c) 9 d) –5 e) 5 ou 9

17. (PUC) O conjunto solução da equação $\log_x(10 + 3x) = 2$, em, $\Re$ é

a) $\varnothing$ b) {-2} c) {5} d) {-2,5} e) {-5,2}

18. (UFRGS) A raiz da equação $\log(\log(x+1)) = 0$ é

a) 0 b) 1 c) 9 d) 10 e) 11

19. (UFSM) Seja k a solução da equação $\log_4(\log_2 x) = -1$. O valor de k^4 é

a) 1/8 b) 1/2 c) 1 d) 4 e) 2

20. (PUC) Para todo $x \in (0,+\infty)$, a expressão $2\log_6(6x) - \log_6 x^2$ é igual a

a) 2 b) 6 c) $\frac{12}{x^2}$ d) $6\log_6 x$ e) $2\log_6\left(\frac{6}{x}\right)$

21. (PUC) O conjunto solução da equação $\log^2{}_3 x - 4\log_3 x + 3 = 0$

a) ∅ b) {0,1} c) {1,3} d) {3,9} e) {3,27}

22. (FIC) Se $(x-y)(x+y) = 100$, então $3.\log(x^2 - y^2)$ é igual a:

a) 10 b) 6 c) 300 d) 1000 e) 10.000

23. (UFSM) Se $\log_{10} x = 1{,}546$; então $10^{4{,}546}$ é igual a:

a) 3+x b) 4+x c) 10x d) 100x e) 1000x

24. (FIC) A base do sistema de logaritmo no qual o logaritmo de $\sqrt{2}$ vale –1 é:

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}/2$ c) $2^{\sqrt{2}}$ d) 2 e) –2

25. Se $\log_5 3 = x$ e $\log_5 2 = y$, então $\log_2 3$ vale:

a) $\log x.\log y$ b) $x.y$ c) $\frac{\log x}{\log y}$ d) $\frac{x}{y}$ e) $\log_y x$

26. Sendo $\log_a x = 2, \log_b x = 5$ e $\log_c x = 6$, o valor de $\log_{abc} x$ é:

a) 15/13 b) 13/15 c) 14/15 d) 14/60 e) 13/60

27. Se $\log_{10} 8 = a$ então $\log_{10} 5$ vale:

a) a^3 b) $5a - 1$ c) $\frac{2a}{3}$ d) $1 + \frac{a}{3}$ e) $1 - \frac{a}{3}$

28. (UCP) Se $y = \log_8 5.\log_5 3.\log_3 2$, então o valor de y é

a)2 b) 3 c) 1/3 d) $\log 21$ e) $\log_3 7$

29. Sejam as afirmações:

I – Se $\log a = m$ e $\log b = n$, então, $\log(a + b) = m + n$.

II – Sejam a e b números reais positivos e diferentes de 1. Então: $\log_a b.\log_b a = 1$.

III - $\log a / bc = \log a - \log b + \log c$

então:

a) todas são verdadeiras

b) somente I é verdadeira

c) somente II é verdadeira

d) somente III é verdadeira

e) todas são falsas

30. (PUC) $\log 50 + \log 40 + \log 20 + \log 2{,}5$ é igual a:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 10 e) 1000

31. (FGV) Sabendo-se que $\log 2 = 0{,}3010$ e $\log 3 = 0{,}4771$, então $\log 0{,}6$ é igual a:

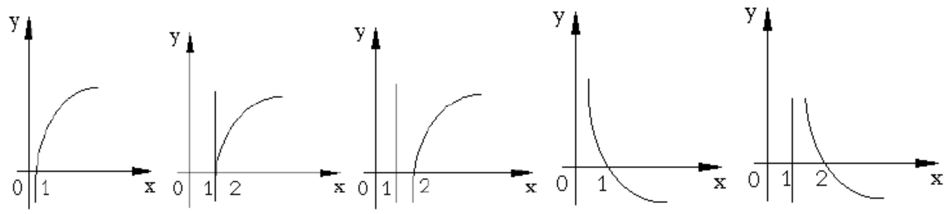
a) 1,7781 b) –0,7781 c) 0,7781 d) 0,2219 e) –0,2219

32. (UFSM) Sabendo que $\log_{10} 3 = 0{,}4771$ e $\log_{10} 6 = 0{,}7781$, a solução da equação $10^x = 9x16$ é

a) 1,5128 b) 2,5128 c) 2,8215 d) 2,1582 e) 1,1582

33. (UFSM) O gráfico que melhor representa a função dada por $f(x)=\log(x-1)$ é:

a) b) c) d) e)



34. (PUC) Se $a>0, b>0, b\neq 0$ e $\log(a+b)=\log a+\log b$, então o valor de a é:

a) $2b$ b) $\frac{b}{b-1}$ c) $\frac{b}{b+1}$ d) $\frac{b-1}{b}$ e) $\frac{b+1}{b}$

35. (UEL – PR) Se o número a pertence ao conjunto solução da sentença $\log_{x-1}(2x+1)=2$, então o valor de $\log_a \sqrt{a+4}$ é:

a)0,25 b) 0,50 c) 0,75 d) 1 e) 2

36. (PUC-SP) Sendo $\log_{10} 2=0{,}30$ e $\log_{10} 3=0{,}47$, então $\log_{10} \frac{6\sqrt{2}}{5}$ é igual a:

a) 0,12 b) 0,22 c) 0,32 d) 0,42 e) 0,52

37. (PUC – SP) O conjunto verdade da equação $2\log x=\log 4+\log(x+3)$ é:

a) {-2,6} b) {-2} c) {2,-6} d) $\varnothing$ e) {6}

38. (UECE) Seja x>1. O valor de $\log_x 8$, sendo x a solução da equação $\log_5 \sqrt{x-1}+\log_5 \sqrt{x+1}=\frac{1}{2}\log_5 3$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

39. (UFPa) O conjunto solução da equação $\log_8 x + \frac{1}{6}\log_2(x+1) = \log_4(x+1)$ é:

a) {-1,- ½ } b) {-1} c) {0} d) {-½ } e) ∅

Gabarito

(1) 1. a) D={x∈ℜ/x>8} b) D={x∈ℜ/x>1}

2. D={x∈ℜ/x<-4 ou x>3}

3. D={x∈ℜ/-2<x<1/5 e x≠-1 ou x>5}

4. a) 4/3 b) –1/2 c) 1/6 d) 3/4 e) 35 f) 1/8

5. a) S=10 b) S=19/2

(2) 1. a) 1 b) 0 c) 0 d) 2 e) 7 f)1/2 g) –7 h) 0

2. a) 3 b) 1/7 c) 25

(3) 1. A+2b+1

2. 52/27

3. 0,966

4. 3m+2n

5. 18

6. m=2

(4) 1. {5}

2. x=2

(5) 1. 1

2. $\log_b a = \frac{-2}{3-m}$ ou $\log_b a = \frac{2}{m-3}$

3. $\log_c a = \frac{m}{n}$

4. x=100

5. V={3}

(6) 1. a) Crescente Pontos y= -2; -1; 0; 1; 2.

x=1/9; 1/3; 1; 3; 9.

b) Crescente Pontos y= -2; -1; 0; 1; 2.

x=5/4; 3/2; 2; 3; 5.

2. Base 4 Pontos y= -2; -1; 0; 1; 2. e x=1/16; 1/4; 1; 4; 16.

Base 1/4 Pontos y= -2; -1; 0; 1; 2. e x=16; 4; 1; 1/4; 1/16.

(7) 1. V=∅

2. a) V={27} b) V={4,13}

3. V={10}

4. a) V=∅ b)V= $\left\{\frac{17-\sqrt{73}}{4}, \frac{17+\sqrt{73}}{4}\right\}$

5. V={1}

6. V={-1,11}

7. V={13}

8. x=4 e y=2

(8) 1)B 2) B 3) B 4) D 5) B

6) E 7) B 8) D 9) E 10) D

11)B 12) B 13) D 14) A 15) A

16) C 17) C 18) C 19) E 20) A

21)E 22) B 23) E 24) B 25) D

26) A 27) E 28) C 29) C 30) C

31) E 32) D 33) C 34) B 35) C

36) B 37) E 38) C 39) E

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Currículo Básico do PEIES. Universidade Federal de Santa Maria. **Programa de Ingresso ao Ensino Superior.** V. 5, Santa Maria, 1999

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações.** V. 1, Editora Ática, São Paulo, 1999.

DECISAÔ PRÉ-VESTIBULAR. **Matemática.** Polígrafo – Santa Maria [s.n.], 1997, não paginado.

FÓTON VESTIBULARES. **Matemática.** Polígrafo – Santa Maria [s.n.], 2000, não paginado.

GIOVANNI, J. R., BONJORNO, J. R. **Matemática.** V. 1, Editora FTD S.A., São Paulo, 1992.

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio.** V. 1, SBM, Rio de Janeiro, 2001.