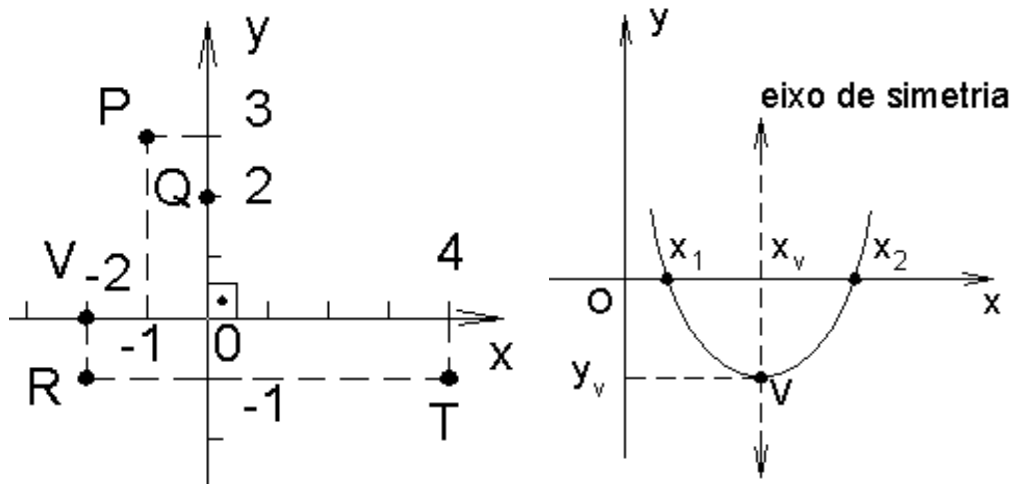


UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
Colégio Técnico Industrial de Santa Maria

Caderno Didático 1

Conjuntos e Funções



Série: Matemática I

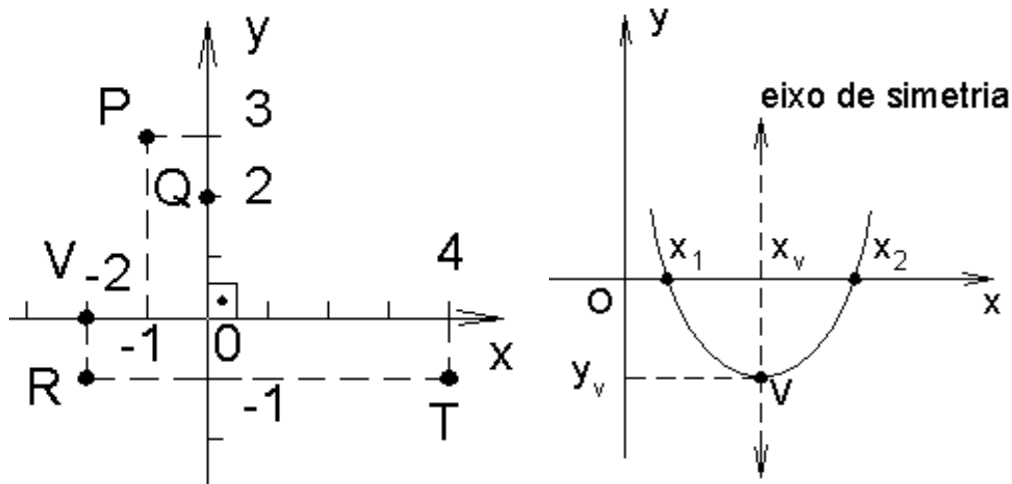
Por:
Professora Elisia L. Chiapinotto
Professor Mauricio R. Lutz

Fevereiro de 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
Colégio Técnico Industrial de Santa Maria

Caderno Didático 1

Conjuntos e Funções



Série: Matemática I

Por:
Professora Elisia L. Chiapinotto
Professor Mauricio R. Lutz

Fevereiro de 2020

C532c Chiapinotto, Elisia L.

 Caderno didático 1 : conjuntos e funções / por
 Elisia Lorenzoni Chiapinotto, Mauricio Ramos Lutz.
 – Santa Maria , 2004.
 81 f. : il. (Série Matemática I)

 1. Matemática 2. Conjuntos 3. Funções 4. Função
 do 1º grau 5. Inequações do 1º grau 6. Função do
 2º grau 7. Inequações do 2º grau I. Lutz, Mauricio
 Ramos II. Título

 CDU: 510.22 : 519.219

Ficha catalográfica elaborada por
Luiz Marchiotti Fernandes CRB 10/1160
Biblioteca Setorial do Centro de Ciências Rurais/UFSM

SUMÁRIO

<u>CONJUNTOS</u>	01
1 INTRODUÇÃO	01
2 SÍMBOLOS USADOS	01
3 REPRESENTAÇÃO	01
3.1 Por compreensão	01
3.2 Por extensão	02
3.3 Por diagrama de Venn	02
4 CONJUNTO UNIVERSO (U)	02
5 CONJUNTO UNITÁRIO	02
6 CONJUNTO VAZIO	02
7 SUBCONJUNTOS	03
8 OPERAÇÕES	03
8.1 União ($\cup$).....	03
8.2 Intersecção ($\cap$).....	04
8.3 Diferença ($A - B$)	05
9 PROBLEMAS QUE ENVOLVEM CONJUNTOS	06
10 CONJUNTOS NUMÉRICOS	09
10.1 Conjunto dos números naturais (N).....	09
10.2 Conjunto dos números inteiros (Z).....	09
10.3 Conjunto dos números Racionais (Q)	09
10.4 Conjunto dos números irracionais (Ir)	10
10.5 Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$).....	10
11 INTERVALOS	11
11.1 Operações com Intervalos	13
<u>FUNÇÕES</u>	15
12 PAR ORDENADO	15
12.1 Definição	15
12.2 Igualdade de pares ordenados	15
13 PRODUTO CARTESIANO	16
13.1 Definição	16
13.2 Representação Gráfica	17
13.2.1 Plano Cartesiano	17
13.2.2 Representação gráfica do produto cartesiano	18

14	RELAÇÃO BINÁRIA	19
14.1	Definição	19
14.2	Domínio e Imagem de uma relação	19
14.3	Representação de uma relação	21
15	FUNÇÕES	21
15.1	Introdução	21
15.2	Definição	21
15.3	Notação	22
15.4	Domínio, contradomínio e imagem de uma função	22
15.5	Estudo do Domínio de uma função	24
15.6	Tipos de função	25
15.6.1	Função Injetora	25
15.6.2	Função Sobrejetora	26
15.6.3	Função Bijetora	26
15.7	Função inversa	27
15.7.1	Definição	27
15.7.2	Regra para obter a função inversa	28
16	FUNÇÃO DE 1º GRAU	29
16.1	Introdução	29
16.2	Definição	29
16.3	Casos particular de função do 1º grau	30
16.3.1	Função linear	30
16.3.2	Função Identidade	30
16.3.3	Função constante	31
16.4	Raiz ou zero da função do 1º grau	33
16.5	Estudo do sinal	35
16.6	Inequações do 1º grau	36
16.6.1	Inequação produto	38
16.6.2	Inequação quociente	39
17	FUNÇÃO DO 2º GRAU	50
17.1	Introdução	50
17.2	Definição	50
17.3	Zeros da função quadrática	51
17.4	Gráficos da função quadrática	52

17.5 Vértice da Parábola e imagem da função do 2º grau	52
17.5.1 Vértice	52
17.5.2 Coordenadas do vértice	53
17.5.3 Imagem da função quadrática	54
18 Construção do gráfico da função	56
19 ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO QUADRÁTICA	59
20 INEQUAÇÃO DO 2º GRAU	62
20.1 Inequação do 2º grau na variável x	62
20.2 Sistema de Inequações do 2º Grau	63
20.3 Inequações simultâneas	64
20.4 Inequação produto e inequação quociente	65
GABARITO	77
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	81

CONJUNTOS

1 INTRODUÇÃO

Freqüentemente usamos a noção de conjuntos. Assim, ao relacionar em ordem alfabética os alunos de uma turma, os meses do ano, estamos constituindo conjuntos e são designados por letras maiúsculas do alfabeto.

Os componentes de um conjunto são chamados elementos e são designados por letras minúsculas do alfabeto.

2 SÍMBOLOS USADOS

$\in \Rightarrow$ pertence;	$\notin \Rightarrow$ não pertence;
$/$ ou $ \Rightarrow$ tal que;	$\forall \Rightarrow$ qualquer que seja ou para todo;
$\leftrightarrow \Rightarrow$ eqüivale;	$\rightarrow \Rightarrow$ implica;
$\exists \Rightarrow$ existe;	$\nexists \Rightarrow$ não existe;
$\wedge \Rightarrow$ e;	$\vee \Rightarrow$ ou;
$\subset \Rightarrow$ está contido;	$\not\subset \Rightarrow$ não está contido;
$\supset \Rightarrow$ contém;	$\not\supset \Rightarrow$ não contém;
$\cup \Rightarrow$ união;	$\cap \Rightarrow$ intersecção.

3 REPRESENTAÇÃO

3.1 Por compreensão

Quando é dado uma propriedade característica dos elementos de um conjunto.

Exemplo: $A = \{ x \mid x \text{ é estação do ano} \}$

3.2 Por extensão

Quando é designado os seus elementos um a um, colocando-os entre chaves e separando-os por vírgula.

Exemplo: $A = \{ \text{primavera, verão, outono, inverno} \}$

3.3 Por diagrama de Venn



4 CONJUNTO UNIVERSO (U)

É o conjunto ao qual pertencem os elementos de todos os conjuntos considerados.

5 CONJUNTO UNITÁRIO

É aquele que possui um só elemento.

Exemplo: $P = \{ x \mid x \text{ é um número primo par e positivo} \}$

Logo $P = \{2\}$

6 CONJUNTO VAZIO

É aquele que não possui elemento.

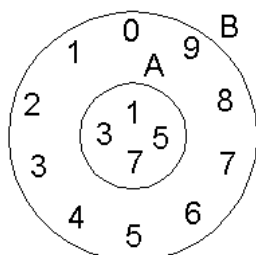
Exemplo: $B = \{ x \mid x \text{ é primo, menor que } 2 \}$

$B = \emptyset$ ou $\{ \}$

7 SUBCONJUNTOS

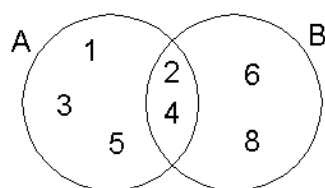
Um conjunto A é subconjunto de B quando todos os elementos de A também são elementos de B (escrevemos $A \subset B$).

Exemplo: 1. $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$



Se existir pelo menos um elemento de A que não pertença a B, dizemos que A não está contido em B ou que B não contém A.

2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$



$A \not\subset B$ ou $B \not\supset A$

- Obs:**
- a) Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$;
 - b) $\emptyset$ está contido em qualquer conjunto;
 - c) Os símbolos $\subset$, $\supset$, $\not\subset$, $\not\supset$ são usados para relacionar conjuntos.

8 OPERAÇÕES

8.1 União ($\cup$)

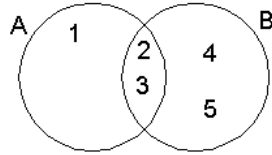
A união ou reunião de dois conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Exemplos: 1. $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$

Logo, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

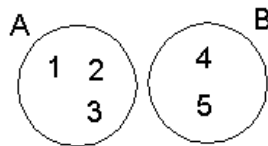
Por diagrama temos:



2. $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$

Logo, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

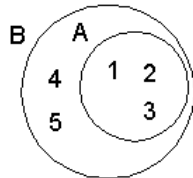
Por diagrama temos:



3. $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Logo, $A \cup B = B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Por diagrama temos:



Obs: $A \subset B$, logo $A \cup B = B$

8.2 Intersecção ($\cap$)

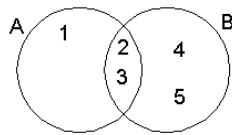
A intersecção de dois conjuntos A e B, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e também a B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Exemplos: 1. $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$

Logo, $A \cap B = \{2, 3\}$

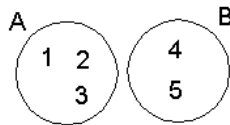
Por diagrama temos:



2. $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$

Logo, $A \cap B = \emptyset$

Por diagrama temos:

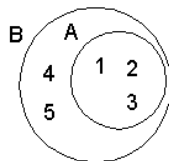


Obs: A e B são disjuntos, pois $A \cap B = \emptyset$.

3. $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Logo, $A \cap B = \{1, 2, 3\}$

Por diagrama temos:



Obs: $A \subset B$ logo $A \cap B = A$

8.3 Diferença ($A - B$)

A diferença entre dois conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A, mas que não pertencem a B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Exemplos: 1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$

Logo, $A - B = \{1, 3, 5\}$

2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{2, 3\}$

Logo, $A - B = \{1, 4, 5, 6\}$

Obs: Se $B \subset A$, a diferença $A - B$ denomina-se complementar de B em relação a A e indica-se por C_A^B .

(1) Exercícios

1. Sendo $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, $C = \{x \mid x \text{ é natural par menor que } 10\}$, $D = \{x \mid x \text{ é ímpar compreendido entre } 0 \text{ e } 6\}$, determine:

- a) $A \cap B$ b) $A \cap C$ c) $A \cup D$ d) $(A \cap C) \cup D$
e) $A - B$ f) $B - C$ g) $(A \cup B) - D$ h) $(A \cap B) - (C \cap D)$

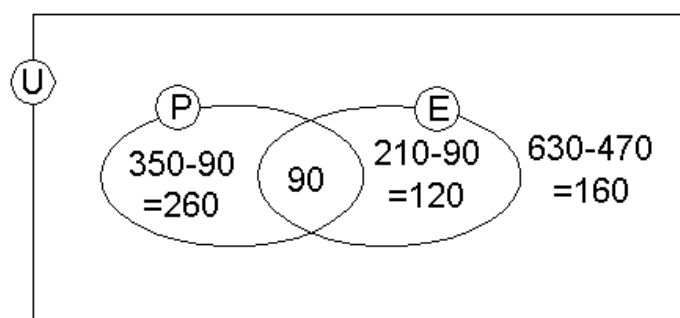
9 PROBLEMAS QUE ENVOLVEM CONJUNTOS

Numa escola de 630 alunos, 350 deles estudam Português, 210 estudam Espanhol e 90 estudam as duas matérias (Português e Espanhol). Pergunta-se:

- a) Quantos alunos estudam apenas Português? (Estudam Português mas não estudam Espanhol).
b) Quantos alunos estudam apenas Espanhol? (Estudam Espanhol mas não estudam Português).
c) Quantos alunos estudam Português ou Espanhol?
d) Quantos alunos não estudam nenhuma das duas matérias?

Resolução:

Vamos fazer um diagrama



- a) Se 350 alunos estudam Português e 90 deles estudam português e espanhol, então o número de alunos que estudam apenas português é: $350 - 90 = 260$.

b) Se 210 alunos estudam espanhol e 90 deles estudam português e espanhol, então o número de alunos que estudam apenas espanhol é:
 $210 - 90 = 120$.

c) Se 260 alunos estudam apenas português, 120 apenas espanhol e 90 essas duas matérias, então o número de alunos que estudam português ou espanhol é: $260 + 90 + 120 = 470$.

d) Se a escola tem 630 alunos, dos quais 470 estudam português ou espanhol, o número de alunos que não estudam nenhuma dessas duas matérias é: $630 - 470 = 160$.

(2) Exercícios

1. Numa pesquisa, verificou-se que, das pessoas consultadas, 100 liam o jornal A, 150 liam o jornal B, 20 liam os dois jornais (A e B) e 110 não liam nenhum dos dois jornais. Quantas pessoas foram consultadas?

2. (UnB-DF) De 200 pessoas que foram pesquisadas sobre suas preferências em assistir aos campeonatos de corrida pela televisão, foram colhidos os seguintes dados: 55 dos entrevistados não assistem; 101 assistem às corridas de Fórmula 1 e 27 assistem às corridas de Fórmula 1 e de Motovelocidade. Quantas das pessoas entrevistadas assistem, exclusivamente, às corridas de Motovelocidade?

3. (FURG-2002) Numa feira industrial, um expositor apresentou um total de 2700 peças dos artigos A, B e C para serem comercializados. Durante o evento foram vendidas 1470 peças, que resultaram da venda da metade das peças de A, de um terço das peças de B e de dois terços das peças de C. Se o número de peças de C em exposição era igual à soma das peças de A e B, o número de peças de B vendidas foi:

- a) 315
- b) 420
- c) 630
- d) 210
- e) 490

4. (FRAFA-97) Numa prova sobre o corpo humano constavam três questões: a primeira, sobre o sistema circulatório; a segunda, sobre o sistema respiratório; e a terceira, sobre o sistema nervoso. Sabe-se, dos 29 alunos que fizeram a prova, precisamente que:

- quinze alunos acertaram a primeira questão;
- sete alunos acertaram somente a segunda questão;
- um aluno acertou somente a terceira questão;
- onze alunos acertaram a segunda e a terceira questão;
- nenhum aluno errou todas as questões.

O número de alunos que acertaram as três questões é:

- a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 16

5. Numa enquete com 100 pessoas na porta de um supermercado sobre três produtos, as respostas foram: 10 pessoas compram somente o produto A, 30 pessoas compram somente o produto B, 15 pessoas compram somente o produto C, 8 pessoas compram A e B, 5 pessoas compram A e C, 6 pessoas compram B e C, e 4 compram os três produtos.

- a) Quantas pessoas compram pelo menos um dos três produtos?
- b) Quantas pessoas não compram nenhum desses produtos?
- c) Quantas pessoas compram os produtos A e B e não compram C?
- d) Quantas pessoas compram os produtos A ou B?
- e) Quantas pessoas compram o produto A?
- f) Quantas pessoas compram o produto B?

6. Uma pesquisa mostrou que 33% dos entrevistados lêem o jornal A, 29% lêem o jornal B, 22% lêem o jornal C, 13% lêem A e B, 6% lêem B e C, 14% lêem A e C e 6% lêem os três jornais.

- a) Quanto por cento não lê nenhum desses jornais?
- b) Quanto por cento lê os jornais A e B e não lê C?
- c) Quanto por cento lê pelo menos um jornal?

7. Numa pesquisa sobre audiência de tevê entre 125 entrevistados, obteve-se: 60 assistem ao canal X, 40 ao canal Y, 15 ao canal Z, 25 assistem a X e Y, 8 a Y e Z, 3 a X e Z, e 1 assiste aos três.

- a) Quantos não assistem a nenhum desses canais?
- b) Quantos assistem somente ao canal X?
- c) Quantos não assistem nem a X nem a Y?

10 CONJUNTOS NUMÉRICOS

10.1 Conjunto dos números naturais (N)

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$N^* = N - \{0\}$$

$$N^* \subset N$$

10.2 Conjunto dos números inteiros (Z)

$$Z = \{\dots - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$Z^* = Z - \{0\}$$

$$Z_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ conjunto dos inteiros não negativos.}$$

$$Z_+^* = \{1, 2, 3, \dots\} \text{ conjunto dos inteiros positivos.}$$

$$Z_- = \{\dots - 3, - 2, - 1, 0\} \text{ conjunto dos inteiros não positivos.}$$

$$Z_-^* = \{\dots, - 3, - 2, - 1\} \text{ conjunto dos inteiros negativos.}$$

$$N \subset Z$$

Em Z é sempre possível efetuar a adição, subtração e multiplicação.

10.3 Conjunto dos números Racionais (Q)

São os números que podem ser expressos sob a forma de fração.

$$Q = \{x \mid x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \in Z \text{ e } b \in Z^*\}$$

Exemplos: 1. $5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2}$

2. $2,4 = \frac{12}{5}$

3. $0,25 = \frac{1}{4}$

4. $4,2 = 4 \frac{2}{10} = 4 \frac{1}{5}$

5. $0,44... = \frac{4}{9}$

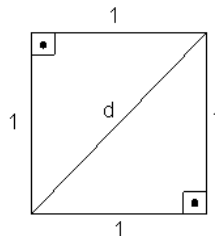
6. $\frac{3}{4} = 0,75$

$\mathbb{Q} \rightarrow$ decimais exatas, finitas
decimais periódicas, infinitas (dízimas)

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

10.4 Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}\mathbb{r}$)

Consideremos um quadrado cujo lado mede 1 e calcular sua diagonal.



Usando o teorema de Pitágoras, temos:

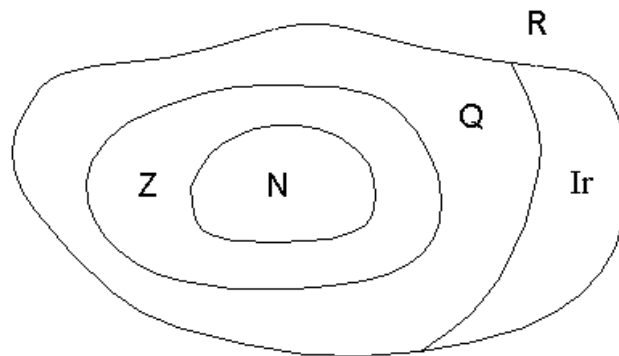
$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{2} \Rightarrow d = 1,414213...$$

São os números decimais não exatos e não periódicos.

10.5 Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$)

É a reunião do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}\mathbb{r} = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \vee x \in \mathbb{I}\mathbb{r}\}$$



(3) Exercícios

1. Complete com $\in$ ou $\notin$.

a) -7 ____ N

f) $\sqrt{\frac{9}{4}}$ ____ Q

b) $\sqrt{2}$ ____ Q

g) $0,166....$ ____ Q

c) 4 ____ Z

h) $\sqrt[3]{8}$ ____ N

d) $\frac{1}{4}$ ____ Z

i) -2 ____ Z

e) $\sqrt{2}$ ____ Ir

2. Determine por extensão os conjuntos

a) $A = \{x \in N \mid x \leq 3\}$

b) $B = \{x \in Z \mid 3x + 5 < x - 1\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2x^2 - 9x + 5 = 0\}$

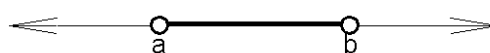
d) $D = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 - 25 = 0\}$

e) $E = \{y \in \mathbb{R} \mid (y - 1)(y + 2)(y - 3) = 0\}$

11 INTERVALOS

São subconjuntos de $\mathbb{R}$, determinados por desigualdades. Assim, dados dois números reais a e b , com $a \leq b$, tem-se:

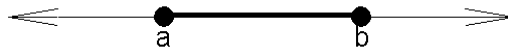
a) Intervalo aberto



$$] a, b [= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

A bolinha vazia indica que os extremos não pertencem ao intervalo.

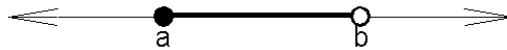
b) Intervalo fechado



$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

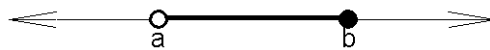
A bolinha cheia indica que os extremos pertencem ao intervalo.

c) Intervalo fechado à esquerda



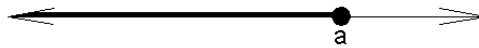
$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

d) Intervalo fechado à direita

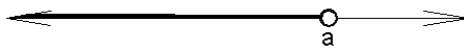


$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

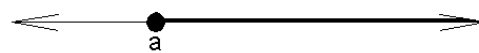
e) Intervalos infinitos



$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$



$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$



$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$



$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$



$$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

(4) Exercícios

1. Usando a notação de conjuntos, escreva os intervalos:

- | | |
|--------------------|----------------------------|
| a) $[6, 10]$ | b) $] -1, 5]$ |
| c) $] -6, 0[$ | d) $[0, +\infty[$ |
| e) $] -\infty, 3[$ | f) $[-5, 2[$ |
| g) $] -10, 10[$ | h) $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ |
| i) $] -\infty, 1]$ | |

2. Represente, na reta real, os intervalos

- | | |
|---|--|
| a) $[2, 8]$ | b) $] -\infty, 2]$ |
| c) $] 1, 5[$ | d) $[-6, -1[$ |
| e) $[0, +\infty[$ | f) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$ |
| g) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$ | h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ |
| i) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 7\}$ | j) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$ |

11.1 Operações com Intervalos

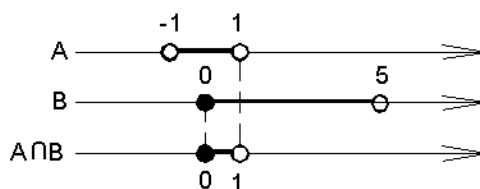
Exemplo:

Dados $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ e $B = [0, 5)$, determine:

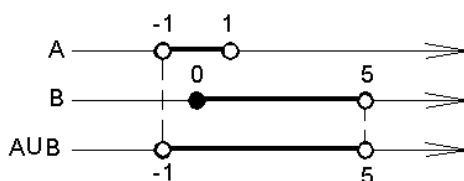
- a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A - B$ d) $B - A$

Resolução:

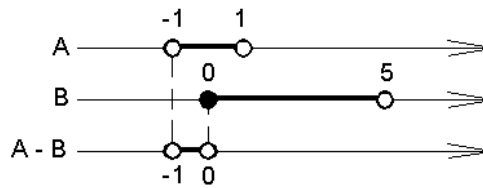
- a) $[0, 1)$



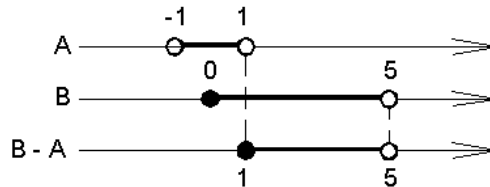
- b) $(-1, 5)$



c) $(-1, 0)$



d) $[1, 5)$



(5) Exercícios

1. Determine $A \cap B$, quando:

- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$
- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}$
- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$

2. Determine $A \cup B$, quando:

- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$
- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$
- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

3. Dados $A = [2, 7]$, $B = [-1, 5]$ e $E = [3, 9[$, calcule:

- $A - B$
- $B - A$
- $A - E$
- $E - B$

4. Sejam os conjuntos $A = [-1, 6[$; $B =]-4, 2]$; $E =]-2, 4[$, calcule:

- $(B \cup E) - A$
- $E - (A \cap B)$

FUNÇÕES

12 PAR ORDENADO

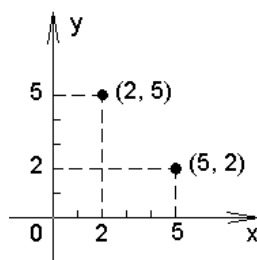
12.1 Definição

Ao par de números reais **a** e **b**, dispostos numa certa ordem, denominamos **par ordenado** e indicamos por **(a, b)** onde **a** é abscissa e **b** é ordenada.

Exemplos: 1. $(-2, 4) \Rightarrow$ abscissa $x = -2$ e ordenada $y = 4$

2. $(\sqrt{3}, -1) \Rightarrow$ abscissa $x = \sqrt{3}$ e ordenada $y = -1$

Obs: $(2, 5) \neq (5, 2)$ ou seja $(a, b) \neq (b, a)$.



12.2 Igualdade de pares ordenados

Dois pares ordenados (x, y) e (a, b) são iguais se, e somente se, $x = a$ e $y = b$.

$$(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = a \text{ e } y = b$$

Exemplo: Calcule x e y , de modo que:

a) $(4, y - 1) = (x - 2, -8)$

b) $(x + y, x - y) = (7, 3)$

Resolução:

a) $x - 2 = 4 \Rightarrow x = 6$

$x + y = 7$

$x = y = 7$

$y - 1 = -8 \Rightarrow y = -7$

$x - y = 3$

$5 + y = 7$

Logo, $(6, -7)$

$2x = 10 \Rightarrow x = 5$

$y = 2$

Logo, $(5, 2)$

(6) Exercícios

1. Determine x e y de modo que:

a) $(x - 2, 2y + 3) = (3x - 1, y + 5)$

b) $(x, 2x - y) = (y, 3)$

c) $(x, 4 + y) = (1, 2y - x)$

d) $(x + y, 2) = (4, x - y)$

e) $(2x, y - 2x) = (3y, 3)$

f) $(x^2 - 5x, y^2) = (-6, 2y - 1)$

g) $(x^2 + x, 4y^2 - 1) = (2, 7)$

h) $(\sqrt{x} + 2, 3) = (x - 4, 3)$

13 PRODUTO CARTESIANO

13.1 Definição

Dados dois conjuntos A e B, não vazios, chamamos de A cartesiano B ($A \times B$) o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), onde x (primeiro elemento do par) pertence a A e y (segundo elemento do par) pertence a B.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

Exemplo: Dados $A = \{0, 1\}$, $B = \{2, 3, \frac{1}{2}\}$ e $C = \{-1\}$, calcule:

a) $A \times B = \{(0, 2), (0, 3), (0, \frac{1}{2}), (1, 2), (1, 3), (1, \frac{1}{2})\}$

b) $B \times A = \{(2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1), (\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 1)\}$

c) $A^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

d) $B \times C = \{(2, -1), (3, -1), (\frac{1}{2}, -1)\}$

Obs: a) $A \times B \neq B \times A$

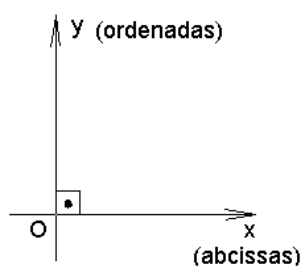
b) Se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, então $A \times B = \emptyset$

c) Se A possui m elementos e B possui p elementos, então $A \times B$ possui $(m \cdot p)$ elementos.

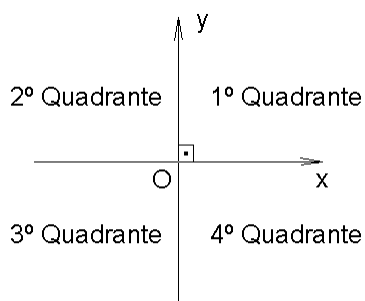
13.2 Representação Gráfica

13.2.1 Plano Cartesiano

É composto por duas retas perpendiculares entre si (eixo horizontal ou eixo dos x e eixo vertical ou eixo dos y) que cruzam em um ponto de origem (O).



A partir de O, adotam-se como sentidos positivos, o da esquerda para a direita (no eixo horizontal) e o de baixo para cima (no eixo vertical). Dessa forma, o plano fica dividido em 4 quadrantes (marcados a partir do eixo x, no sentido anti-horário).



$$P(x_p, y_p) \in 1^\circ Q \Rightarrow x_p > 0 \text{ e } y_p > 0$$

$$P(x_p, y_p) \in 2^\circ Q \Rightarrow x_p < 0 \text{ e } y_p > 0$$

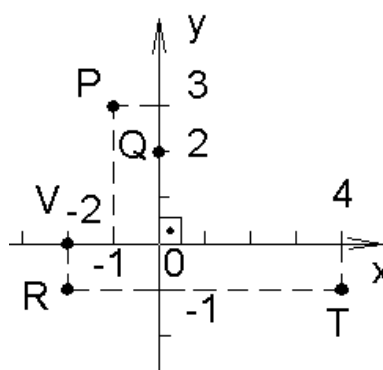
$$P(x_p, y_p) \in 3^\circ Q \Rightarrow x_p < 0 \text{ e } y_p < 0$$

$$P(x_p, y_p) \in 4^\circ Q \Rightarrow x_p > 0 \text{ e } y_p < 0$$

$$P(x_p, y_p) \in \text{eixo dos x} \Rightarrow y_p = 0$$

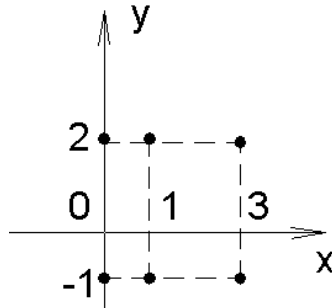
$$P(x_p, y_p) \in \text{eixo dos y} \Rightarrow x_p = 0$$

Por exemplo, se quisermos localizar no sistema cartesiano os pontos $P(-1, 3)$, $Q(0, 2)$, $R(-2, -1)$, $T(4, 1)$, $V(-2, 0)$, obtemos:

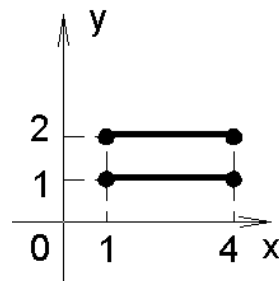


13.2.2 Representação gráfica do produto cartesiano

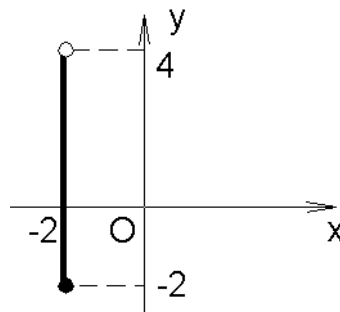
Exemplos: 1. Determine $A \times B$ sendo $A = \{0, 1, 3\}$ e $B = \{-1, 2\}$.



2. Determine $A \times B$ sendo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$ e $B = \{1, 2\}$.



3. Determine $A \times B$ sendo $A = \{-2\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y < 4\}$.



(7) Exercícios

1. Represente, graficamente, $A \times B$, nos seguintes casos:

a) $A = \{-1, 0, 3\}$ e $B = \{-2, 3\}$

b) $A = [-4, -1[$ e $B = \{-1, 1\}$

c) $A = \{-2\}$ e $B =]-3, 1[$

d) $A = \{1\}$ e $B = \{1, 2\}$

e) $A = \{-2, 1, 3\}$ e $B =]-3, 2[$

2. Um conjunto P possui $(x - 6)$ elementos; um outro conjunto S possui $(3x + 1)$ elementos. Calcule x , sabendo-se que $P \times S$ tem 124 elementos.

3. Determine o valor de x , de modo que A possua $(x - 1)$ elementos B possua $(x - 3)$ elementos e $A \times B$ $(2x + 3)$ elementos.

4. Sendo A e B dois conjuntos quaisquer, determine x para que $n(A) = x + 1$, $n(B) = 3 - x$ e $n(A \times B) = 3$.

14 RELAÇÃO BINÁRIA

14.1 Definição

Relação binária é todo subconjunto de $A \times B$, sendo A e B não vazios.

$$R \subset A \times B$$

Exemplo: Sendo $A = \{0, 2, 4\}$ e $B = \{1, 3\}$ então $A \times B = \{(0, 1), (0, 3), (2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3)\}$. Determine:

a) $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid x > y\}$

Resolução:

$$R_1 = \{(2, 1), (4, 1), (4, 3)\}$$

b) $R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y = 3\}$

Resolução:

$$R_2 = \{(0, 3), (2, 1)\}$$

14.2 Domínio e Imagem de uma relação

Domínio: é o conjunto formado por todos os primeiros elementos dos pares ordenados (x, y) pertencentes à relação.

Imagem: é o conjunto formado por todos os segundos elementos dos pares ordenados (x, y) pertencentes à relação.

Nos exemplos anteriores:

$$D(R_1) = \{2, 4\}$$

$$D(R_2) = \{0, 2\}$$

$$\text{Im}(R_1) = \{1, 3\}$$

$$\text{Im}(R_2) = \{1, 3\}$$

(8) Exercícios

1. Determinar, sendo R uma relação definida por :

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid 2x + y = 10\}$$

a) $D(R)$

b) $\text{Im}(R)$

2. Dados: $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-3, -1, 1, 3\}$ e

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x - 1\}, \text{ determinar:}$$

a) R ;

b) Seu domínio e sua imagem

3. Dado o conjunto $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, determine o domínio, a imagem e os elementos das seguintes relações:

a) $S = \left\{ (x, y) \in A \times A \mid y = \frac{1}{x} \right\}$

b) $T = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x^2 - 1\}$

4. Dados: $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ e $B = \left\{ -\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1, 0, 1 \right\}$, determine

os pares ordenados da relação $D = \left\{ (x, y) \in A \times B \mid y = \frac{1}{x-1} \right\}$.

14.3 Representação de uma relação

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 4\}$, e a relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$, temos :

Representação de R

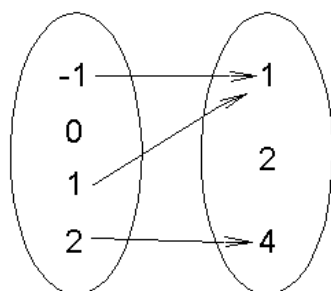
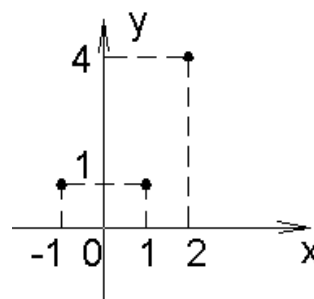


Diagrama de setas



Plano cartesiano

15 FUNÇÕES

15.1 Introdução

É freqüente, em nosso dia-a-dia, estabelecermos relação entre duas ou mais grandezas. Por exemplo, o preço que pagamos pelo combustível do carro está em função da quantidade de litros colocado no tanque.

$$P = 2,24 L$$

Lei de formação

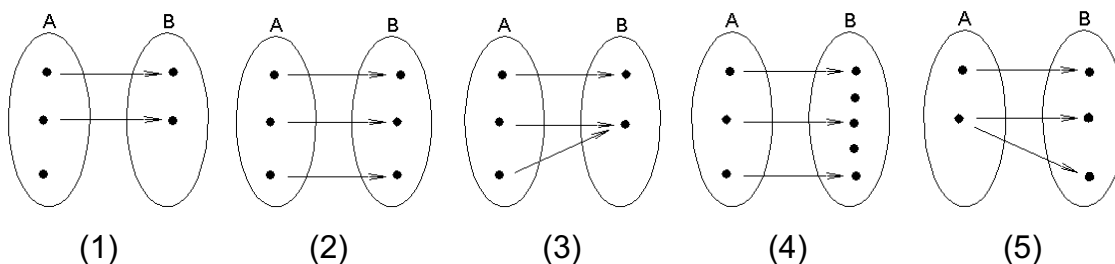
Onde: P = preço que pagamos (variável dependente)

L = quantidade de litros (variável independente).

15.2 Definição

Sejam A e B dois conjuntos não vazios e f uma relação de A em B . Essa relação f é uma função de A em B quando a cada elemento x do conjunto A está associado um, e somente um, elemento y do conjunto B , tal que $(x, y) \in R$.

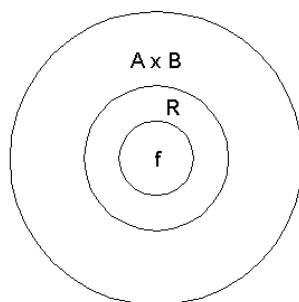
Exemplo: Verifique quais dos diagramas abaixo, representam funções.



Temos então que (1) e (5) não são funções e (2), (3) e (4) são funções.

Conclusão: Toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função.

$$f \subset R \subset A \times B$$



15.3 Notação

a) $f: A \rightarrow B$ (lê-se: f de A em B)

$x \rightarrow y = f(x)$ (lê-se: definida pela lei $y = f(x)$)

Exemplo: $f: A \rightarrow B$

$x \rightarrow y = 2x + 1$

f de A em B , definida pela lei $y = 2x + 1$.

15.4 Domínio, contradomínio e imagem de uma função

Domínio $\Rightarrow$ É o conjunto A . ($D(f)$)

Contradomínio $\Rightarrow$ É o conjunto B . ($CD(f)$).

Imagem $\Rightarrow$ É o subconjunto de B , formado por todos os segundos elementos dos pares ordenados (x, y) pertencentes a f .

$$Im(f) \subset CD(f)$$

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{-3, -1, 0, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e a função $f : A \rightarrow B$ definida por $f(x) = x + 2$, determine a imagem de f .

x	$y = x + 2$	A	B	
-3	-1	-3	-1	$D(f) = A$
0	2	-1	0	$CD(f) = B$
-1	1	0	1	$Im(f) = \{-1, 1, 2, 4\}$
2	4	2	2	
			4	
			3	

(9) Exercícios

1. Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 10x + 8$. Calcular os valores reais de x para que se tenha $f(x) = -1$, ou seja, imagem -1 pela função f dada.

2. Dada a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, calcular a e b , sabendo que $f(1) = 4$ e $f(-1) = -2$.

3. Nas duas relações dadas a seguir, faça o diagrama e verifique se elas são ou não funções, justificando sua resposta.

a) f é uma relação de $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ em $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ expressa pela fórmula $y = 2x$, com $x \in A$ e $y \in B$.

b) g é uma relação de $A = \{-2, -1, 1, 2\}$ em $B = \{-8, -4, -1, 0, 1, 4, 8\}$ expressa pela fórmula $y = x^3$, com $x \in A$ e $y \in B$.

4. Na função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = x^2 - 3x + 1$, determine:

a) $f(-2)$ b) $f(\sqrt{2})$ c) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$

5. Sendo a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - \frac{1}{3}$, calcule:

a) $f(0)$ b) $f(-2)$

6. Dada a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 5x + 6$, calcule os valores reais de x para que se tenha:

a) $f(x) = 12$

b) $f(x) = -6$

7. Dadas as funções $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$ e $g(x) = \frac{2x}{5} + 1$, determine o valor de $f\left(\frac{1}{3}\right) - g(-2)$.

8. São dadas as funções $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = \frac{4}{5}x + a$. Sabendo que $f(1) - g(1) = \frac{2}{3}$, calcule o valor de a .

15.5 Estudo do Domínio de uma função

Ao estudarmos uma função definida em conjuntos numéricos e com, lei de formação algébrica sem domínio indicado, devemos considerar como domínio todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ que tornam possíveis as operações indicadas na lei de formação.

Exemplos: Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7$

Logo: $D(f) = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{3}{1-x} \Rightarrow 1-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Logo: $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

c) $y = \frac{x+1}{x+3} \Rightarrow x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$

Logo : $D(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$

$$d) y = \sqrt{1-x} \Rightarrow 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$$

$$\text{Logo: } D(f) = (-\infty, 1]$$

$$e) y = \frac{x}{\sqrt{3x+4}} \Rightarrow 3x+4 > 0 \Rightarrow x > -\frac{4}{3}$$

$$\text{Logo: } D(f) =]-\frac{4}{3}, +\infty)$$

$$f) f(x) = \sqrt[3]{1-x}$$

$$\text{Logo: } D(f) = \mathbb{R}$$

$$g) f(x) = \frac{2+x}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow 1-x > 0 \Rightarrow x < 1$$

$$\text{Logo: } D(f) = (-\infty, 1[$$

(10) Exercícios

1. Determine o domínio das seguintes funções reais.

$$a) y = \frac{3x}{x^2-5}$$

$$b) f(x) = -\frac{8}{6-2x}$$

$$c) y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$$

$$d) f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{2x-3}}$$

$$e) y = \frac{\sqrt{1-5x}}{3x} + \frac{2}{4-3x}$$

$$f) f(x) = \frac{3x}{x^2+9} + \frac{1}{\sqrt{x+4}}$$

$$g) f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}}$$

15.6 Tipos de função

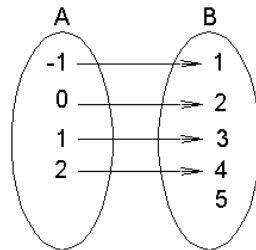
15.6.1 Função Injetora

Uma função $f : A \rightarrow B$ é injetora se, e somente se, para quaisquer elementos distintos do domínio, tivermos imagens distintas no contra domínio.

Sendo $x_1, x_2 \in A$, com $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Exemplo: Dado os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e a função $f : A \rightarrow B$ definida por $y = x + 2$.

Resolução:



É injetora

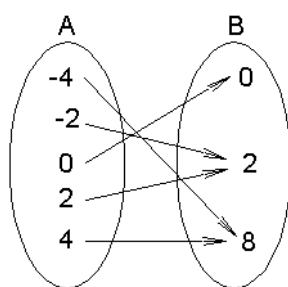
Obs: a) No diagrama cada elemento do 2º conjunto recebe uma única flecha;
b) No gráfico cartesiano, ao traçarmos retas paralelas ao eixo x e, elas interceptarem o gráfico uma única vez, indica que a função é injetora.

15.6.2 Função Sobrejetora

Uma função $f : A \rightarrow B$ é sobrejetora se, e somente se, $\text{Im}(f) = \text{CD}(f)$.

Exemplo: 1. Dado os conjuntos $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{0, 2, 8\}$ e a função

$f : A \rightarrow B$ definida por $y = \frac{x^2}{2}$.



$\text{Im}(f) = B$

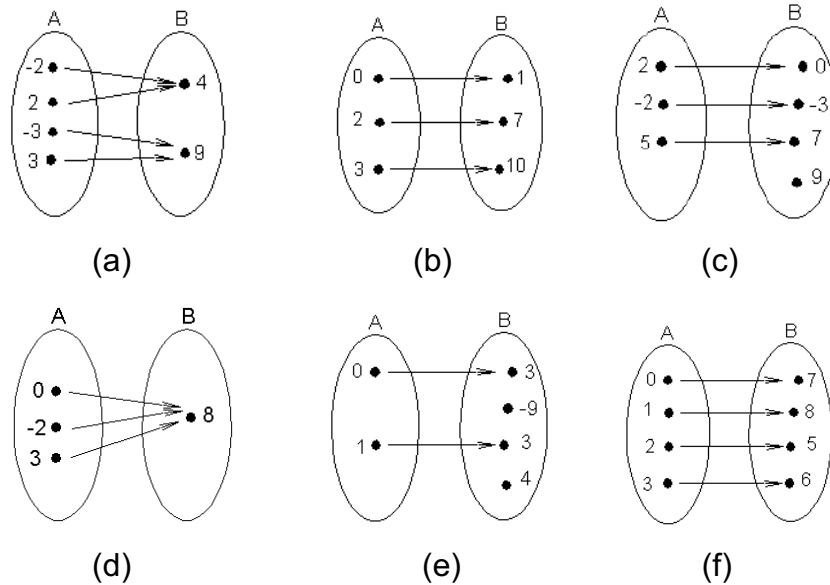
15.6.3 Função Bijetora

Uma função $f : A \rightarrow B$ é bijetora se, e somente se, é injetora e sobrejetora simultaneamente.

Exemplos: 1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ 2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$
 $x \rightarrow f(x) = x + 1$ $x \rightarrow f(x) = x^2$ $x \rightarrow f(x) = 2^x$

(11) Exercícios

1. Classifique as funções em injetora, sobrejetora ou bijetora

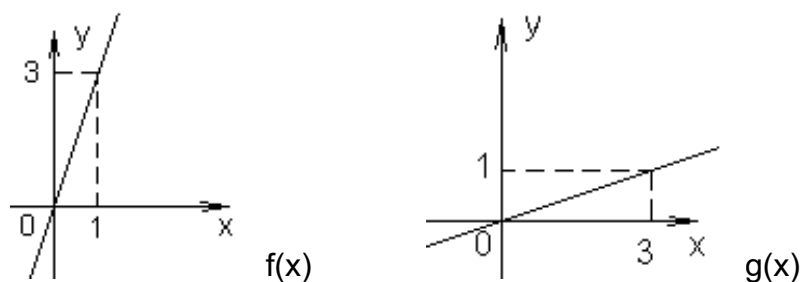


15.7 Função inversa

15.7.1 Definição

Chama-se relação inversa de f , que se indica por f^{-1} , a relação de B e A tal que $(x, y) \in f^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in f$.

Observe as funções $f(x) = 3x$ e $g(x) = \frac{x}{3}$



Note que podemos obter os pares da função g invertendo-se a ordem dos elementos nos pares obtidos pela função f . Neste caso dizemos que g é a função invertida de f e representamos $g(x) = f^{-1}(x)$.

$$\text{Então, } f(x) = 3x \text{ e } f^{-1}(x) = \frac{x}{3}.$$

Só existe função inversa de uma função bijetora.

Obs: $D(f) = \text{Im}(f^{-1})$
 $\text{Im}(f) = D(f^{-1})$

15.7.2 Regra para obter a função inversa

1º) Troca-se x por y e y por x .

2º) Isola-se y .

Exemplos: Determine a inversa das funções:

a) $f(x) = -3x + 5$

Resolução:

$$y = -3x + 5 \Rightarrow x = -3y + 5 \Rightarrow 3y = 5 - x \Rightarrow y = \frac{5 - x}{3}$$

b) $f(x) = \frac{2x+1}{x} \quad (x \neq 0)$

Resolução:

$$y = \frac{2x+1}{x} \Rightarrow x = \frac{2y+1}{y} \Rightarrow xy = 2y+1 \Rightarrow xy - 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x-2} \quad (x \neq 2)$$

(12) Exercícios

1. Determine a função inversa das funções a seguir:

a) $f(x) = \frac{3x-2}{4}$

b) $y = \frac{x}{x-2} \quad (x \neq 2)$

c) $f(x) = \frac{x+5}{2x-3} \quad (x \neq \frac{3}{2})$

d) $y = \frac{2x-1}{x-3} \quad (x \neq 3)$

$$e) y = \frac{2x - 4}{x} (x \neq 0)$$

$$f) y = \frac{x - 3}{2x - 2} (x \neq 1)$$

$$g) f(x) = \frac{x + 1}{2x - 2} (x \neq 1)$$

16 FUNÇÃO DE 1º GRAU

16.1 Introdução

Um representante comercial recebe, mensalmente, um salário composto de duas partes: uma parte fixa, no valor de R\$ 1500,00, e uma parte variável, que corresponde a uma comissão de 6% sobre o total das vendas que ele faz durante o mês.

$S(x) = 1500,00 + 0,06x$ onde x é o total das vendas do mês.

16.2 Definição

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é função do 1º grau ou função afim se, a cada $x \in \mathbb{R}$, associa o elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y = ax + b$$

Exemplos: 1. $f(x) = 2x + 1$, onde temos $a = 2$ e $b = 1$

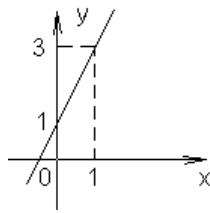
$$2. y = -\frac{1}{3}x + 2, \text{ onde temos } a = -\frac{1}{3} \text{ e } b = 2$$

$\Rightarrow$ Gráfico cartesiano $\Leftarrow$

Para construir o gráfico cartesiano, atribuímos valores a x e calculamos y .

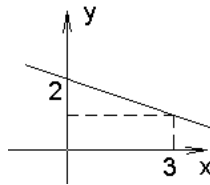
Nos exemplos acima, temos:

a) $a = 2$ (coeficiente angular) e $b = 1$ (coeficiente linear)



Obs: Se $a > 0$ f é crescente

b) $a = -\frac{1}{3}$ (coeficiente angular) e $b = 2$ (coeficiente linear)



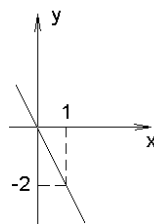
Obs: Se $a < 0$, a função é decrescente.

16.3 Casos particular de função do 1º grau

16.3.1 Função linear

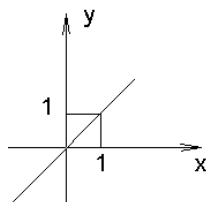
É quando temos $b = 0$, isto é, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax$.

Exemplo: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2x$, temos $a = -2$ e $b = 0$.



16.3.2 Função Identidade

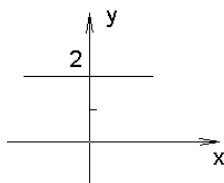
Quando temos $a = 1$ e $b = 0$, isto é, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$



16.3.3 Função constante

Quando temos $a = 0$ e $b \neq 0$, isto é, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = b$

Exemplo: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $y = 2$



- Obs:**
- a) b é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo y .
 - b) Se $b = 0$, a reta passa na origem.
 - c) A função do 1º grau é sempre bijetora, exceto a função constante.

Exemplos: 1. Dada a função $f(x) = 5x - 2$, determine:

- a) $f(2)$
- b) o valor de x , para que $f(x) = 0$

Resolução:

a) $f(2) \Rightarrow f(2) = 5 \cdot 2 - 2 = 10 - 2 = 8$

b) $f(x) = 0 \Rightarrow 0 = 5x - 2 \Rightarrow 5x = 2 \Rightarrow x = 2/5$

2. Dada a função $f(x) = ax + b$, $f(1) = 4$ e $f(-2) = 10$. Determine:

- a) $f(x)$
- b) $f(-\frac{1}{2})$

Resolução:

a) $4 = a + b \Rightarrow a = 4 - b \Rightarrow a = 4 - 6 = -2 \Rightarrow a = -2$

$10 = -2a + b \Rightarrow 10 = -8 + 2b + b \Rightarrow 18 = 3b \Rightarrow b = 6$

Portanto, $f(x) = 2x + 6$

b) $f(-\frac{1}{2}) = -2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 6 = 7$

(13) Exercícios

1. Dada a função do 1º grau $f(x) = 4x - 1$, determine:

a) $f\left(\frac{1}{8}\right)$ b) $f(-1)$ c) x , tal que $f(x) = 1$

2. Dada a função $f(x) = 1 - 3x$, determine os valores de x para que:

a) $f(x) = 4$ b) $f(x) = 0$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}$

3. Escreva a função afim $f(x) = ax + b$, sabendo que:

a) $f(1) = 5$ e $f(-3) = -7$ b) $f(-1) = 7$ e $f(2) = 1$

4. Construa, o gráfico cartesiano das funções:

a) $f(x) = 2x + 3$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$ c) $f(x) = 2 - 2x$

d) $f(x) = -4x$ e) $f(x) = -2$ f) $f(x) = \frac{1}{3}x$

5. (Unicamp-SP) Adaptado. O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R\$ 3,44 e cada quilômetro rodado custa R\$ 0,86:

a) Expresse o valor P a ser pago em função da distância x (em quilômetros) percorrida.

b) Calcule o preço de uma corrida de 11 Km.

c) Calcule a distância percorrida por um passageiro que pagou R\$ 21,50 pela corrida.

6. O custo de fabricação de x unidades de um produto é $C = 100 + 2x$. Cada unidade é vendida pelo preço $p = \text{R\$ } 3,00$. Para haver um lucro igual a R\$1250,00 devem ser vendidas k unidades. Determine o valor de k .

7. Depreciação de um carro é a perda de seu valor original (valor do carro com zero quilômetro) em função do tempo. Considere V o valor depreciado do carro após x anos. Uma revendedora usa a lei de uma função polinomial do 1º grau para calcular V para carros com até 6 anos. Esta agência anunciou um carro com 5 anos de uso por R\$ 12000,00. Esse modelo, quando novo ($x = 0$), custa R\$ 30000,00.

- a) Escreva a lei da função $V(x)$.
- b) Qual é o valor depreciado desse carro após 3 anos?

8. Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $(-2, 1)$ e cujo coeficiente angular é -4 .

9. Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $(-3, -1)$ e cujo coeficiente linear é 8 .

10. Considere a função $f(x) = (m - 2)x + 1$ com $m \in \mathbb{R}$.

- a) Calcule m de modo que f seja crescente.
- b) Ache m para que f seja decrescente.

16.4 Raiz ou zero da função do 1º grau

Raiz da função $f(x) = ax + b$ é o valor de x que anula a função, isto é, $f(x) = 0$.

Algebricamente, basta resolver a equação $ax + b = 0$.

Geometricamente, é a abscissa do ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo x .

Exemplo: Dada a função $f(x) = 2x - 5$, determine o zero da função.

Resolução:

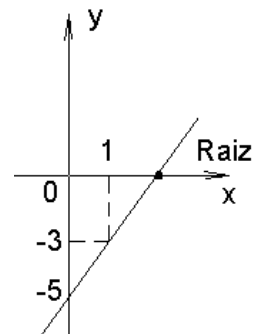
Algebricamente

$$2x - 5 = 0$$

$$2x = 5$$

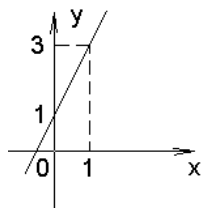
$$x = \frac{5}{2}$$

Graficamente

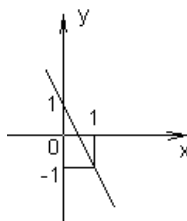


(14) Exercícios

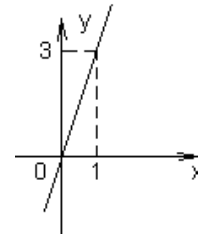
1. Em cada um dos gráficos abaixo,
 - a) Determine: a lei da função.
 - b) Diga, se a função é crescente ou decrescente.
 - c) Localize no gráfico b e a raiz da função.



(I)



(II)



(III)

2. Calcule o zero de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 4x - 1$

b) $f(x) = -3x + 12$

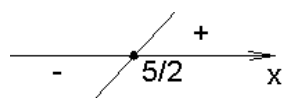
c) $f(x) = 5x$

16.5 Estudo do sinal

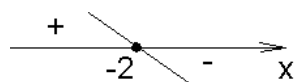
Estudar o sinal de uma função $f(x)$ significa determinar para que valores de $x \in$ ao domínio da função a imagem $f(x)$ será positiva, negativa ou nula, ou seja $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ ou $f(x) = 0$.

Exemplos: Estude o sinal das funções:

a) $f(x) = 2x - 5$



b) $f(x) = -2x - 4$



(15) Exercícios

1. Estude a variação do sinal das seguintes funções.

a) $f(x) = 3x - 1$

b) $f(x) = -2x + 1$

c) $y = 2 - \frac{3}{4}x$

d) $y = -1 + \frac{1}{2}x$

e) $y = 2 - 6x$

f) $f(x) = -x + 4$

g) $f(x) = x - 5$

h) $y = \frac{x}{3} - 1$

2. Determine os valores reais de x para que a função $f(x) = 4 - 19x$ é positiva.

3. Determine os valores reais de x para que ambas as funções $f(x) = -2x + 8$ e $g(x) = 3x - 6$ sejam negativas.

4. Sabendo que a função dada por $y = mx + p$ admite 3 como raiz e $f(1) = -8$,

a) Calcule os valores de m e p .

b) Faça o estudo do sinal da função.

5. Após o pagamento de todos os custos na importação de um produto, uma empresa calcula o faturamento que terá com o mesmo usando a lei $f(x) = 8x - 640$, onde $f(x)$ é o faturamento líquido de x unidades vendidas. Qual a quantidade mínima que essa empresa terá de vender para obter lucro?

6. Uma indústria implantou um programa de prevenção de acidentes de trabalho. Esse programa prevê que o número y de acidentes varie em função do tempo t (em anos) de acordo com a lei $y = 28,8 - 3,6t$. Nessas condições, quantos anos levará para essa indústria erradicar os acidentes de trabalho?

16.6 Inequações do 1º grau

Inequações do 1º grau na variável x é toda desigualdade que pode ser escrita em uma das formas:

$$ax + b > 0; ax + b < 0; ax + b \geq 0; ax + b \leq 0$$

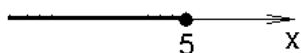
Exemplos: 1. Resolva as inequações:

a) $3x - 15 \leq 0$

Resolução:

$$3x - 15 \leq 0 \Rightarrow 3x \leq 15 \Rightarrow x \leq 5$$

Na reta real, podemos representar esta resposta de seguinte maneira:



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$$

b) $4x - 1 + 2(1 - 3x) \leq 0$

Resolução:

Aplicando a propriedade distributiva, temos:

$$4x - 1 + 2(1 - 3x) \leq 0 \Rightarrow 4x - 1 + 2 - 6x \leq 0$$

$$-2x + 1 \leq 0 \Rightarrow -2x \cdot (-1) \leq -1 \cdot (-1) \Rightarrow 2x \geq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

Na reta real, podemos representar esta resposta de seguinte maneira:



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{2}\}$$

c) $-1 < 2x - 3 \leq x$

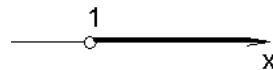
Resolução:

Na verdade, resolver essa inequação simultânea é equivalente a resolver o sistema:

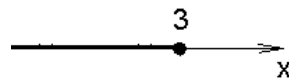
$$-1 < 2x - 3 \quad (I)$$

$$2x - 3 \leq x \quad (II)$$

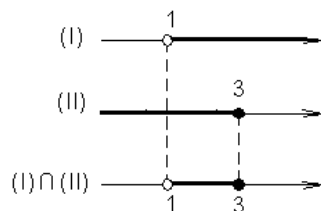
$$(I) -1 < 2x - 3 \Rightarrow -2x < -3 + 1 \Rightarrow -2x < -2 \Rightarrow x > 1$$



$$(II) 2x - 3 \leq x \Rightarrow 2x - x \leq 3 \Rightarrow x \leq 3$$



Fazendo a intersecção, temos:



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 3\}$$

2. Resolva o sistema $\begin{cases} 2x - 1 \geq 5 \\ -x - 3 < 0 \end{cases}$

Resolução:

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 5 \quad (I) \\ -x - 3 < 0 \quad (II) \end{cases}$$

De (I) vem:

$$2x - 1 \geq 5 \Rightarrow 2x \geq 6 \Rightarrow x \geq 3$$

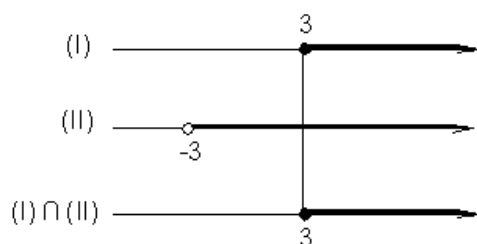


De (II) vem:

$$-x - 3 < 0 \Rightarrow -x < 3 \Rightarrow x > -3$$



Fazendo a intersecção de (I) com (II), temos:



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$$

(16) Exercícios

1. Resolva as inequações:

a) $2x - 1 \geq 9$

b) $2x - 6 > x + 5$

c) $5 - 3x < x + 1$

d) $\frac{x+1}{4} \leq \frac{1-3x}{5} + \frac{1-x}{10}$

e) $x - \frac{x-3}{2} > \frac{5x+7}{10} - \frac{5}{4}$

f) $2x + \frac{1}{3} \leq \frac{2x+3}{2} < \frac{x+2}{3}$

16.6.1 Inequação produto

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções na variável x .

Podemos formar as seguintes inequações produto:

$$f(x) \cdot g(x) > 0; f(x) \cdot g(x) \geq 0; f(x) \cdot g(x) < 0; f(x) \cdot g(x) \leq 0$$

Para resolvê-las, estudamos a variação dos sinais de $f(x)$ e $g(x)$ separadamente. O sinal $f(x) \cdot g(x)$ é obtido através de um quadro resumo.

Exemplos: Resolva as inequações:

a) $(x - 4)(x + 2) > 0$

Resolução:

Vamos estudar os sinais das funções:

$$f(x) = x - 4$$

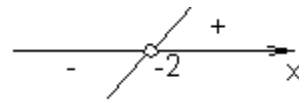
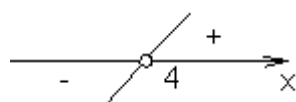
$$g(x) = x + 2$$

$$x - 4 = 0$$

$$x + 2 = 0$$

$$x = 4$$

$$x = -2$$



Quadro de sinais:

	-2		4	
	○		○	
f(x)	-	-	+	
g(x)	-	+	+	
f(x) · g(x)	+	-	+	
	○		○	
	-2		4	

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 4\}$$

b) $(x^2 + x - 2) \cdot (-x + 2) \leq 0$

Resolução:

Inicialmente devemos fatorar a expressão $x^2 + x - 2$:

$$x^2 + x - 2 = (x + 2) \cdot (x - 1)$$

$$\text{Então temos: } (x + 2) \cdot (x - 1) \cdot (-x + 2) \leq 0.$$

$$f(x) = x + 2$$

$$g(x) = x - 1$$

$$h(x) = -x + 2$$

$$x + 2 = 0$$

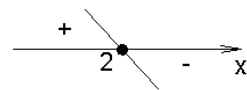
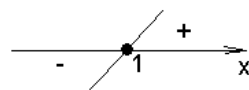
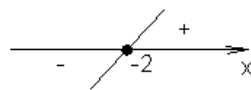
$$x - 1 = 0$$

$$-x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

$$x = 1$$

$$x = 2$$



Quadro de sinais:

	-2		1		2	
	○		○		○	
f(x)	-	+	+	+	+	
g(x)	-	-	+	+	+	
h(x)	+	+	+	-	-	
f(x) · g(x) · h(x)	+	-	+	-	-	
	○		○		○	
	-2		1		2	

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$$

16.6.2 Inequação quociente

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0, \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

Para resolvê-las, faremos da mesma forma que nas inequações produtos, visto que a regra de sinais do cociente é a mesma do produto.

É importante lembrar que, na inequação cociente, o denominador deve ser diferente de zero, isto é, $(g(x) \neq 0)$.

Exemplos: Resolva as inequações:

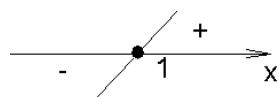
a) $\frac{x-1}{x-3} \geq 0$

Resolução:

O denominador deve ser sempre diferente de zero: $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

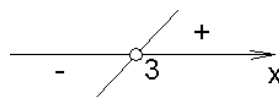
$f(x) = x - 1$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$



$g(x) = x - 3$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$



Quadro de sinais:

	1		3	
$f(x)$	-	+	+	
$g(x)$	-	-	+	
$f(x) / g(x)$	+	-	+	
	1		3	

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x > 3\}$

b) $\frac{2x+1}{x-2} > 1$

Resolução:

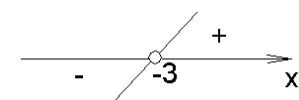
Para resolver esta inequação, vamos fazer uma pequena transformação:

$$\frac{2x+1}{x-2} > 1 \Rightarrow \frac{2x+1}{x-2} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{2x+1-(x-2)}{(x-2)} > 0 \Rightarrow \frac{x+3}{x-2} > 0$$

Vamos então, resolver a inequação $\frac{x+3}{x-2} > 0$, com $x \neq 2$.

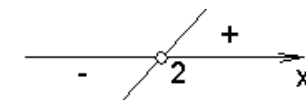
$f(x) = x + 3$

$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$



$g(x) = x - 2$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$



Quadro de sinais:

	-3		2	
	○		○	→
f(x)	-	+	+	→
g(x)	-	-	+	→
f(x) / g(x)	+	-	+	→
	-3		2	

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 2\}$$

(17) Exercícios

1. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $(-3x + 3)(5x - 3) < 0$

b) $5x - 2(x + 2) \geq 1 - (3 - 4x)$

c) $(2x + 1) \cdot (-x + 2) \geq 0$

d) $(x + 2)(-x - 2) \leq 0$

e) $(x - 1)(x - 2)(x + 4) > 0$

f) $\frac{x-2}{x+3} > 0$

g) $-\frac{2x+1}{x-2} \leq 0$

h) $\frac{3x-1}{x+1} \leq 2$

i) $\frac{2x+3}{x+2} > 2$

j) $\frac{(x-1) \cdot (x+3)}{x-5} > 0$

2. Determine o domínio das seguintes funções:

a) $y = \sqrt{x(x-5)}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+4}}$

c) $y = \sqrt{(x+2)(x-5)}$

d) $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x+3)}{x-2}}$

e) $y = \sqrt{\frac{3}{x(4-x)}}$

f) $y = \sqrt[3]{(x+1)(x-3)}$

(18) Exercícios complementares

1. (UFSM-PEIES/1995) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = mx + n$. Se 3 é raiz da função e $f(1) = -8$, então o gráfico da função:

a) é uma reta paralela ao eixo y.

b) intercepta o eixo x no ponto (1, 0).

c) intercepta a bissetriz dos quadrantes ímpares no ponto (4, 4).

d) Intercepta o eixo no ponto (0, 12).

e) é uma reta paralela ao eixo x.

2. (UFSM-PEIES/1995) Dadas as funções reais $f(x) = 2x - 4$ e $g(x) = -x + 4$, a intersecção dos intervalos tais que $f(x) > 0$ e $g(x) \geq 0$ é:

a) $\mathcal{R}_-^* = \{x \in \mathcal{R} \mid x < 0\}$

b) $]2, 4]$

c) $\mathcal{R}_+^* = \{x \in \mathcal{R} \mid x > 0\}$

d) $[2, 4[$

e) $]2, 4[$

3. (UFSM-PEIES/1996) O lucro, em R\$, obtido por uma empresa na venda de uma determinada mercadoria é dado por $L(x) = 2x - 600$, onde x é o número de unidades vendidas.

Baseando-se na situação proposta, assinale verdadeira (v) ou falsa (f) em cada afirmativa.

() O lucro na venda de 3.000 unidades da mercadoria é R\$ 540,00.

() Para a empresa ter lucro, deve vender acima de 300 unidades da mercadoria.

() A venda da mercadoria não dá lucro nem prejuízo, quando forem vendidas 30 unidades.

A seqüência correta é

a) F – F – V

b) F – V – F

c) V – V – F

d) V – F – V

e) V – F – F

4. (UFSM-PEIES/1996) O domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{1+x}}$ é

a) $(-1, 2)$

b) $[-1, 2]$

c) $(-\infty, -1] \cup [2, \infty]$

d) $(-\infty, -1] \cup (2, \infty)$

e) $(-\infty, -1) \cup [2, \infty)$

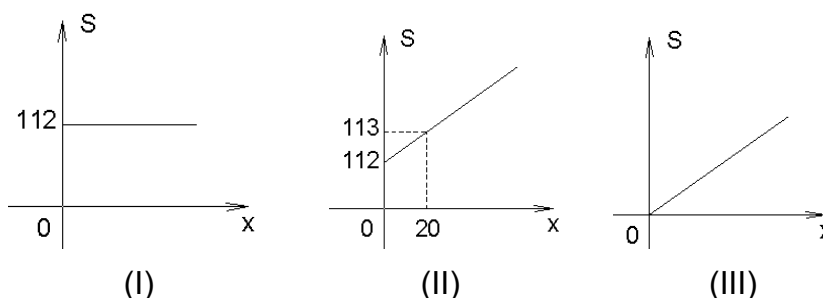
5. (UFSM-PEIES/1997) O salário mensal, em R\$, de um vendedor é dado por $S(x) = 112 + 0,05x$, onde x é o total de suas vendas mensais.

Baseando-se na situação proposta, assinale V nas afirmativas verdadeiras e F nas falsas.

() Se, no mês, o vendedor totalizar R\$ 1.500,00 em vendas, seu salário será de R\$ 197,00.

() O vendedor deverá vender R\$ 40.000,00 para que seu salário seja de R\$ 2.112,00.

() Entre os gráficos a seguir, o que melhor representa $S(x)$ é o III.



A sequência correta é:

a) F – F – V b) V – V – F c) F – V – F d) V – F – V e) V – F – F

6. (UFSM-PEIES/1997) O domínio da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2x+3)}}$

é

a) $] -\frac{3}{2}, 1[$ b) $(-\infty, -\frac{3}{2} [\cup] 1, \infty)$ c) $(-\infty, -\frac{3}{2} [\cup] 1, \infty)$
 d) $] -\frac{3}{2}, 1]$ e) $(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [1, \infty)$

7. (UFSM-PEIES/1998) A solução da inequação $(3-x)(x-\frac{3}{2}) < 0$ é

o conjunto

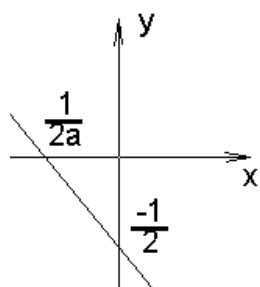
a) $] \frac{3}{2}, 3[$ b) $] \frac{3}{2}, 3]$ c) $(-\infty, \frac{3}{2} [\cup] 3, \infty)$
 d) $(-\infty, \frac{3}{2}] \cup [3, \infty)$ e) $(\frac{3}{2}, 3]$

8. (UFSM/PEIES–1998) Indique se são verdadeiras (v) ou falsas (F) as afirmativas referentes à função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax - \frac{1}{2}$, com a constante e $a < 0$.

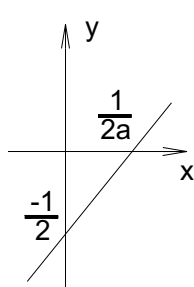
() $f(x) > 0$ se $x \in]\frac{1}{2a}, \infty)$

() A função é bijetora e sua inversa é $f^{-1}(x) = \frac{x}{a} + \frac{1}{2a}$.

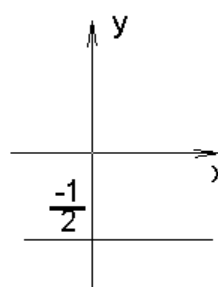
() Dos gráficos a seguir, o que melhor representa $f(x)$ é (II).



(I)



(II)



(III)

A sequência correta é:

- a) V – V – F
- b) V – F – V
- c) F – F – V
- d) F – V – V
- e) F – V – F

9. (UFSM/PEIES–1999) Sabendo que os pontos $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(3, \frac{5}{3})$ pertencem ao gráfico da função $f(x) = ax + b$, com $x \in \mathbb{R}$, assinale V nas afirmativas verdadeiras e F nas falsas.

() Se $x > \frac{1}{2}$, então $f(x) > 0$

() Se $x > 0$, então $f(x) < \frac{1}{3}$

() $3f(1) + f(-1) = 0$

A sequência correta é:

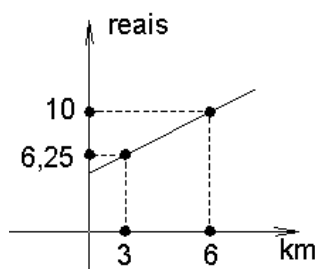
- a) F – F – F
- b) V – F – V
- c) V – F – F
- d) V – V – V
- e) F – V – V

10 (UFSM/PEIES–1999) A função $f(x) = ax + 3$, com $x \in \mathbb{R}$, tem como sua inversa a função $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + d$, com $x \in \mathbb{R}$.

O valor de $2a + 2d$ é:

- a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

11. (UFSM/PEIES–2000)

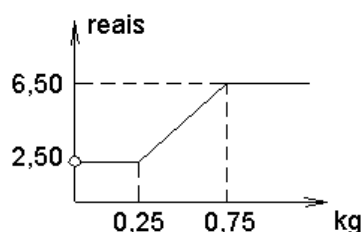


Na figura, é indicado o preço pago por uma corrida de táxi, em função da distância percorrida.

Nessas condições, o valor a ser pago num trajeto de 5 km é, em reais:

- a) 8,00 b) 8,13 c) 8,50 d) 8,75 e) 9,00

12. (UFSM/PEIES–2001) O dono de um restaurante, "matemático amador", informa os preços a seus clientes através do gráfico que mostra o valor a ser pago pela quantidade de refeição consumida.

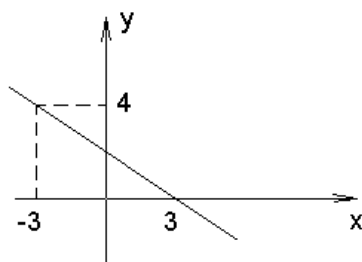


"Fininho" e "Bolão" foram almoçar nesse restaurante.

Fininho consumiu 0,3 kg e pagou _____. Já seu amigo "Bolão" pagou R\$ 6,10 pois consumiu _____ kg de alimentos.

- a) 2,80 – 0,71 b) 2,90 – 0,72
c) 2,90 – 0,70 d) 3,20 – 0,70
e) 3,30 – 0,60

13. (UFSM/PEIES–2001)



A figura mostra o gráfico de uma $f(x)$. Sendo $f^{-1}(x)$ a função inversa de $f(x)$, o valor de $f^{-1}(3)$ é:

- a) $-\frac{3}{2}$ b) -3 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{2}{3}$ e) 2

14. (UFSM/PEIES–2002) As afirmações a seguir referem-se às funções $f(x) = 2x^2 + 3$ e $g(x) = \sqrt{2x - 6}$.

Indique V nas verdadeiras e F nas falsas:

- () $\text{Im } f = \text{Dom } g = [3, +\infty)$
 () $\frac{1}{\sqrt{2}} g(x + 3) = \sqrt{x}, \forall x \geq 0$
 () $f(5) - 25 g(5) = 0$

A sequência correta é:

- a) V – V – V
 b) V – F – V
 c) F – F – F
 d) V – V – F
 e) F – V – F

15. (UFSM/PEIES–2002) As escalas de temperatura Celsius (C) Fahrenheit (F) são relacionadas pela função afim.

$F = aC + b$, onde a e b são constantes, F é a medida da temperatura na escala Fahrenheit e C é a medida da temperatura na escala Celsius.

Num determinado dia, fizeram-se as seguintes medidas de temperatura mostradas na tabela a seguir, nos horários indicados.

temperatura hora	escala C	escala F
6	10	50
14	20	68

Com esses dados, pode-se afirmar que os valores que correspondem a uma mesma temperatura, respectivamente,

- a) 30°C e 90°F
- b) 25°C e 77°F
- c) 24°C e 77°F
- d) 15°C e 60°F
- e) 12°C e 55°F

16. (UFSM/1996) Assinale V (verdadeiro) ou F (falso) para cada uma das afirmações relacionadas com a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, para $a \neq 0$.

() A função é crescente para $a < 0$.

() Para quaisquer números reais x_1 e x_2 , com $x_1 \neq x_2$, tem-se que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

() O valor de x que anula a função é $-b/a$

A seqüência correta é

- a) V – F – F.
- b) F – V – V.
- c) F – V – F.
- d) V – V – V
- e) F – F – V.

17. (UFSM/1997) Assinale V (verdadeiro) ou F (falso) em cada uma das afirmações referentes a uma função do primeiro grau $f(x)$ cujo gráfico passa pelos pontos A(1, -1) e B(-1, 3).

() $f(x)$ é decrescente, e seu gráfico intercepta o eixo das abscissas no ponto $(-\frac{1}{2}, 0)$.

() $f(x)$ é crescente, e seu gráfico intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 1)$.

() O valor de $2f(-\frac{1}{2}) + f(2)$ é 1.

A seqüência correta é

- a) F – F – F.
- b) F – F – V.
- c) V – F – V.
- d) V – V – F.
- e) F – V – V.

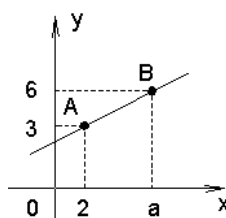
18. (UFSM/1998) Pretende-se alugar um carro de determinada marca, modelo e ano, recorreu-se a varias agências. O aluguel desse carro, na agência A, é de R\$ 30,00 fixos mais R\$ 0,20 por quilômetro rodado; na agência B, é de R\$ 10,00 fixos mais R\$ 0,25 o quilômetro rodado; na agência C, é de R\$ 0,30 o quilômetro rodado. Se x é o espaço percorrido (em km), assinale V (verdadeira) ou F (falsa) em cada uma das afirmações a seguir.

- () Se $x < 200$, é mais econômico locar um carro na agência C.
- () Se $200 < x < 400$, é mais econômico locar o carro na agência B.
- () Se $x > 400$, é mais econômico locar o carro na agência A.

A seqüência correta é

- a) F – V – F.
- b) F – F – V.
- c) V – F – F.
- d) V – V – V.
- e) V – F – V.

19. (UFSM/ 1999) A figura representa o gráfico de uma função do 1º grau que passa pelos pontos A e B, onde $a \neq 2$.



O ponto de intersecção da reta $\overleftrightarrow{AB}$ com o eixo x tem abscissa igual

a

- a) $1 - a$
- b) $a - 2$
- c) $(3a - 12) / (a - 2)$
- d) $4 - a$
- e) $12 - 3a$

20. (UFSM/2000) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = mx + p$. Se f passa pelos pontos A(0, 4) e B(3, 0), então f^{-1} passa pelo ponto

- a) (8, -2)
- b) (8, 3)
- c) (8, -3)
- d) (8, 2)
- e) (8, 1)

21. (UFSM/2000) Considere a função $f(x) = 2x^3$. Se $g(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$, onde h é um número não-nulo, então a expressão de

$g(x)$ é

- a) $6x^2 + 4h^2$
- b) $2(x+h)^3$
- c) $12x^2 + 4h^2$
- d) $12x^2$
- e) $(12x^3) / h$

22. (UFSM/ 2001) Sendo as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x-5) = 3x - 8$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2x + 1$, assinale verdadeira (V) ou falsa (F) em cada uma das afirmações a seguir.

- () $f(x-6) = 3x + 11$
- () $g^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
- () $f(2) - g^{-1}(7) = 10$

A seqüência correta é

- a) F – V – F.
- b) F – V – V.
- c) F – F – V.
- d) V – V – F.
- e) V – F – V.

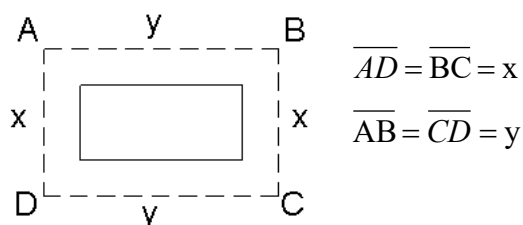
23. (UFSM/2003) Em um termômetro de mercúrio, a temperatura é uma função afim (função do 1º grau) da altura do mercúrio. Sabendo que as temperaturas 0 °C e 100 °C correspondem, respectivamente, às alturas 20 ml e 270 ml do mercúrio, então a temperatura correspondente a 112,5 ml é

- a) 36 °C
- b) 37 °C
- c) 37,5 °C
- d) 38 °C
- e) 40 °C

17 FUNÇÃO DO 2º GRAU

17.1 Introdução

Os diretores de um centro esportivo desejam cercar uma quadra de basquete retangular e outros aparatos esportivos que estão a sua volta com tela de alambrado. Tendo recebido 200 metros de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno a cercar para que a área seja a maior possível.



$$2x + 2y = 200 \text{ (perímetro)}$$

$$x + y = 100$$

$$y = 100 - x$$

$$A = x \cdot y$$

$$A = x \cdot (100 - x)$$

$$A = 100x - x^2 \quad (A = f(x))$$

$$f(x) = 100x - x^2 \rightarrow \text{lei da função.}$$

Note que a lei é uma função do 2º grau.

17.2 Definição

Função do 2º grau ou função quadrática é a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c reais e $a \neq 0$.

Exemplos: 1. $f(x) = x^2 - 3x + 4$ ($a = 1, b = -3, c = 4$)

2. $f(x) = 8x^2 - 1$ ($a = 8, b = 0, c = -1$)

3. $y = -x^2 + 3x$ ($a = -1, b = 3, c = 0$)

$$4. f(x) = 5x^2 \quad (a = 5, b = c = 0)$$

(19) Exercícios

1. Determine, dada a função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

- a) os coeficientes a , b e c b) $f(1)$
c) $f(0)$ d) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ e) x , tal que $f(x) = 0$

2. Uma função f do 2º grau é tal que $f(0) = 5$, $f(1) = 3$ e $f(-1) = 1$. Determine a lei de formação dessa função e o valor de $f(5)$.

3. Considere a função $f(x) = x^2 - x + 3$. Calcule x de modo que $\frac{f(x)}{f(1)} = 5$.

4. Uma função f do 2º grau é tal que $f(0) = 6$, $f(1) = 2$ e $f(-2) = 20$. Determine $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

5. Determine p para que a função $y = (p - 2)x^3 + x^2 - 5x - 6$ seja do 2º grau.

17.3 Zeros da função quadrática

Raízes ou zeros da função quadrática são os valores de x para os quais tem-se $f(x) = 0$.

Determinamos os zeros ou raízes da função, resolvendo-se a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Lembre-se que:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \quad (\text{fórmula de Báskara})$$

Se $\Delta > 0$, a função tem duas raízes reais e distintas.

Se $\Delta = 0$, a função tem duas raízes reais.

Se $\Delta < 0$, não existe raiz real.

Exemplos: 1. Determine os zeros das funções reais a seguir:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

Resolução:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Delta = 1$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 2 \text{ ou } x_2 = 1$$

$$\text{b) } f(x) = x^2 - 4x + 4$$

Resolução:

$$\Delta = 0$$

$$x = \frac{4 \pm 0}{2} \Rightarrow x_1 = 2 \text{ ou } x_2 = 2$$

$$\text{c) } f(x) = x^2 + 3x + 5$$

Resolução:

$$\Delta = 9 - 20 \Rightarrow \Delta = -11, \nexists \text{ raiz } \mathbb{R}.$$

17.4 Gráficos da função quadrática

O gráfico, de uma função quadrática é uma curva denominada parábola.

O sinal do coeficiente “a” determina a concavidade dessa parábola.

Assim:

Se $a > 0$, a concavidade é voltada para cima: $\cup$.

Se $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo: $\cap$.

17.5 Vértice da Parábola e imagem da função do 2º grau

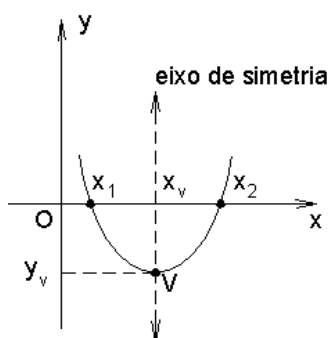
17.5.1 Vértice

É o ponto da curva correspondente à ordenada (y_v) máxima ou mínima.

$$V(x_v, y_v)$$

17.5.2 Coordenadas do vértice

As coordenadas do vértice V de uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) são obtidas da seguinte forma:



A abscissa do vértice (x_v) é a média aritmética das raízes.

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Como a soma das raízes é: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, temos:

$$x_v = \frac{-\frac{b}{a}}{2} \Rightarrow x_v = -\frac{b}{2a}$$

A ordenada do vértice (y_v) é obtida substituindo $x_v = -\frac{b}{2a}$ na equação

$$ax^2 + bx + c = 0:$$

$$y_v = a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \Rightarrow y_v = a \cdot \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c \Rightarrow y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_v = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$v = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

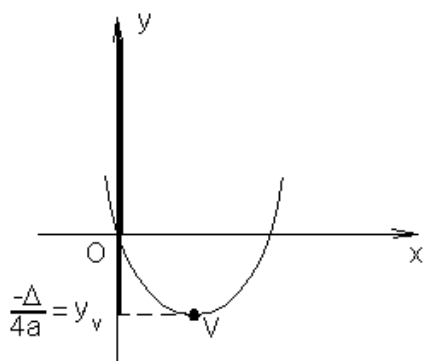
Exemplo: Calcule as coordenadas do vértice da função $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

Resolução:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{3}{2} \quad \Delta = 9 - 8 = 1 \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{1}{4}$$

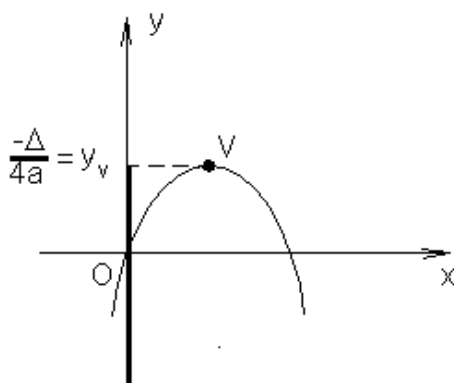
$$V = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4} \right)$$

17.5.3 Imagem da função quadrática



$$a > 0 \Rightarrow \text{Im}(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_v \} = [y_v, \infty[$$

V é ponto MÍNIMO



$$a < 0 \Rightarrow \text{Im}(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a} \} =] - \infty, y_v]$$

V é ponto MÁXIMO

(20) Exercícios

1. Dada a função $y = \left(\frac{m-1}{m+2} \right) x^2 + x + 4$, calcule $m \in \mathbb{R}$, de modo

que a parábola tenha a concavidade voltada para cima.

2 Ache m na função $f(x) = (m - 5) x^2 + 3x - 1$ de modo que:

a) f seja do 2º grau

b) a parábola que representa o seu gráfico tenha a concavidade voltada para baixo.

3. Calcule as ordenadas do vértice, verifique se é ponto de máximo ou de mínimo e o conjunto imagem das seguintes funções:

a) $y = x^2 - 2x - 3$

b) $y = -x^2 + 4$

c) $y = 2x^2 - 4x + 4$

4. Determine a e b, para que a função $y = ax^2 + bx + 3$ tenha vértice $V(2, -1)$.

5. Determine m, de modo que o valor mínimo da função $y = x^2 - 4x + m$ seja -1 .

6. Determine os zeros $\Re$ das funções:

a) $y = x^2 - 4x - 5$ b) $y = x^2 - 2x + 6$ c) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

7. Determine o valor de $k \in \Re$, de modo que a função $f(x) = x^2 - 2x + k$, tenha:

- a) dois zeros reais distintos b) um zero real duplo
c) nenhum zero real

8. Calcule k de modo que a função $y = kx^2 - 2x + 3$ admita 2 como raiz.

9. Calcule a, b e c de modo que o vértice da parábola representativa da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ seja $(1, -16)$ e que -3 seja um zero da função.

10. A parábola $y = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos $(1, 2)$, $(0, 3)$ e $(2, 4)$. Determine as coordenadas do seu vértice.

11. Calcule m, de modo que a função $f(x) = 2x^2 + x - \frac{m}{2}$ tenha dois zeros reais e diferentes.

12. Determine k, de modo que $f(x) = (k - 3)x^2 - 4$ não possua zeros reais.

13. Determine o conjunto imagem das seguintes funções.

- a) $f(x) = x^2 - 10x + 9$ b) $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$
c) $f(x) = x^2 - 5x + 4$ d) $y = -2x^2 + 1$
e) $y = -3x^2 + 2x - 1$

14. Determine o valor de k de modo que a função $f(x) = -x^2 - 2x + k$ tenha 2 como valor máximo.

15. Dada a função $f(x) = 3x^2 - 6x - m$, determine o valor de m , sendo o valor mínimo da função 4.

18 Construção do gráfico da função

1º) Verificar o sinal do coeficiente a ;

2º) Calcular os zeros da função (pontos de intersecção da parábola com o eixo x);

3º) Calcular o ponto de intersecção da parábola com o eixo y (fazendo $x = 0$);

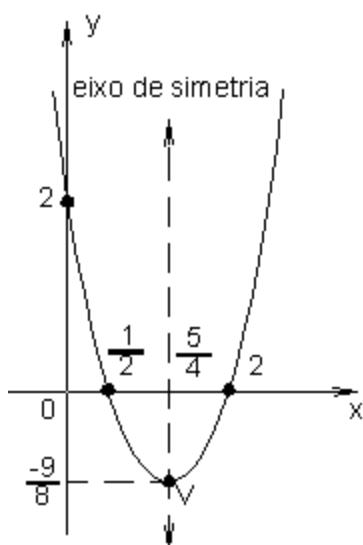
4º) Calcular as coordenadas do vértice $\left(x_v = -\frac{b}{2a}, y_v = -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Exemplos: Construa o gráfico cartesiano das funções:

a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

Resolução:

$a = 2 > 0$ (concavidade para cima)



Zeros: $2x^2 - 5x + 2 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2$

$\Delta = 9$

$x = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = 2 \text{ e } x_2 = \frac{1}{2}$

$\cap \vec{OY}: x = 0$

$y = 2 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0, 2)$

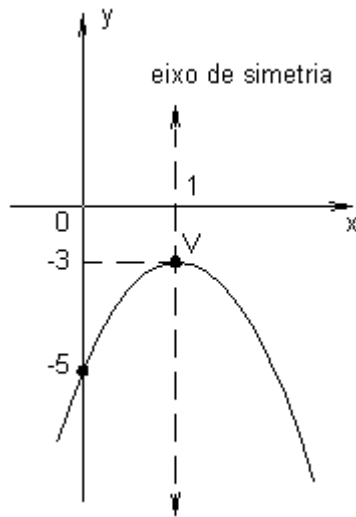
Vértice: $x_v = +\frac{5}{4}$ e $y_v = -\frac{9}{8} \Rightarrow V\left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$

• $f(x)$ é crescente para $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{5}{4}\right\}$

- $f(x)$ é decrescente para $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{5}{4}\right\}$

b) $f(x) = -2x^2 + 4x - 5$

Resolução:



$a = -2 < 0$ (conc. para baixo)

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-2) - (-5)$

$\Delta = 16 - 40$

$\Delta = -24 < 0$ ~~4~~ raiz real

$\cap$ eixo y : $x = 0 \Rightarrow y = -2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 - 5 \Rightarrow y = -5$
 $\Rightarrow (0, -5)$

Vértice: $x_v = \frac{-4}{2(-2)} = 1$ e $y_v = -\frac{(-24)}{4(-2)} = \frac{24}{-8} = -3 \Rightarrow V(1, -3)$

- $f(x)$ é crescente para $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$
- $f(x)$ é decrescente para $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

Conclusão:

$\Rightarrow a > 0$

$f(x)$ é crescente para $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{-b}{2a}\right\}$

$f(x)$ é decrescente para $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{-b}{2a}\right\}$

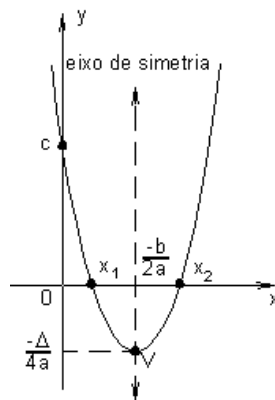
$\Rightarrow a < 0$

$f(x)$ é crescente para $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{-b}{2a}\right\}$

$f(x)$ é decrescente para $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{-b}{2a}\right\}$

⇒ Quadro resumo das principais características da função quadrática ⇐

• Se $\Delta > 0$ e $a > 0$



$$D = \mathbb{R}$$

$$Im = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$

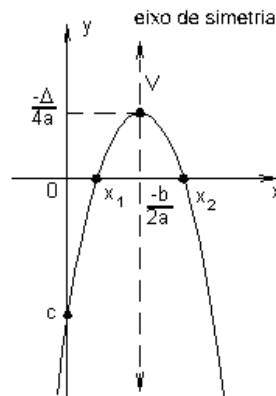
$$\text{Crescente: } x \geq \frac{-b}{2a}$$

$$\text{Decrescente: } x \leq \frac{-b}{2a}$$

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \text{ é o valor mínimo}$$

• Se $\Delta > 0$ e $a < 0$



$$D = \mathbb{R}$$

$$Im = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$

$$\text{Crescente: } x \leq \frac{-b}{2a}$$

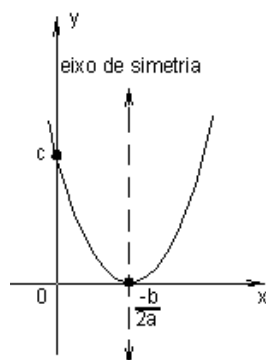
$$\text{Decrescente: } x \geq \frac{-b}{2a}$$

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \text{ é o valor máximo}$$

A função tem 2 zeros reais diferentes, isto é, a parábola corta o eixo x em dois pontos distintos.

• Se $\Delta = 0$ e $a > 0$

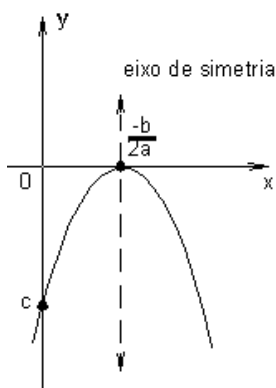


$$D = \mathbb{R}$$

$$Im = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \}$$

$$\text{Crescente: } x \geq \frac{-b}{2a}$$

• Se $\Delta = 0$ e $a < 0$



$$D = \mathbb{R}$$

$$Im = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0 \}$$

$$\text{Crescente: } x \leq \frac{-b}{2a}$$

Decrescente: $x \leq \frac{-b}{2a}$

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$y_v = 0$ é o valor de mínimo

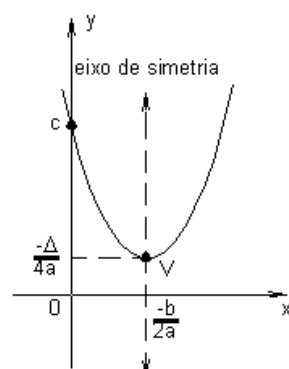
A função tem 1 zero real duplo, isto é, a parábola tangencia o eixo x.

Decrescente: $x \geq \frac{-b}{2a}$

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$y_v = 0$ é o valor de máximo

• Se $\Delta < 0$ e $a > 0$



$$D = \mathbb{R}$$

$$\text{Im} = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$

Crescente: $x \geq \frac{-b}{2a}$

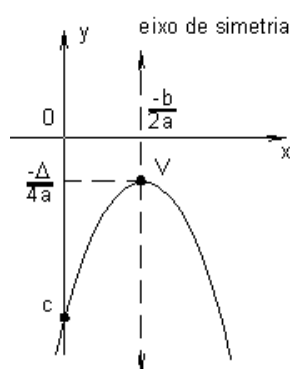
Decrescente: $x \leq \frac{-b}{2a}$

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \text{ é o valor mínimo}$$

A função não tem zeros reais, isto é, a parábola não corta o eixo x.

• Se $\Delta < 0$ e $a < 0$



$$D = \mathbb{R}$$

$$\text{Im} = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$

Crescente: $x \leq \frac{-b}{2a}$

Decrescente: $x \geq \frac{-b}{2a}$

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

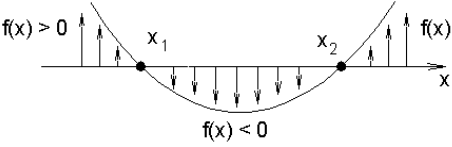
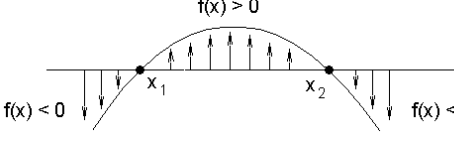
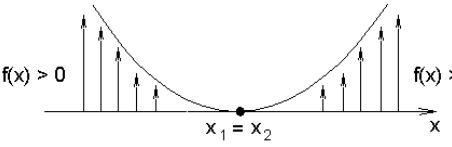
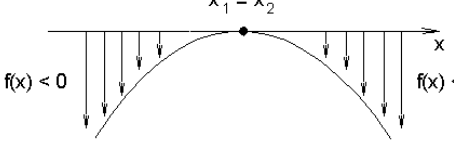
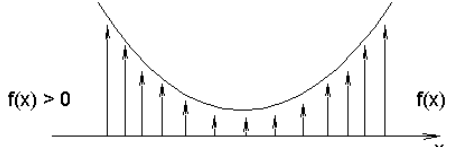
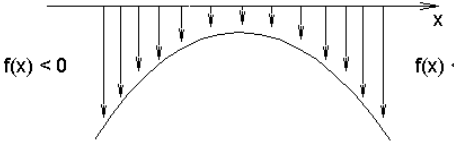
$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \text{ é o valor máximo}$$

19 ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Estudar o sinal da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, significa determinar os valores reais de x para os quais: $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$.

O estudo do sinal da função quadrática depende do coeficiente quadrática depende do coeficiente “a” e do discriminante $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.

Considere $x_1 < x_2$

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$ $(x_1 \neq x_2)$	 $f(x) = 0$ para $x = x_1$ ou $x = x_2$ $f(x) > 0$ para $x < x_1$ ou $x > x_2$ $f(x) < 0$ para $x_1 < x < x_2$	 $f(x) = 0$ para $x = x_1$ ou $x = x_2$ $f(x) > 0$ para $x_1 < x < x_2$ $f(x) < 0$ para $x < x_1$ ou $x > x_2$
$\Delta = 0$ $(x_1 = x_2)$	 $f(x) = 0$ para $x = x_1 = x_2$ $f(x) > 0$ para $x \neq x_1$	 $f(x) = 0$ para $x = x_1 = x_2$ $f(x) < 0$ para $x \neq x_1$
$\Delta < 0$ $(\nexists \text{ raiz } \mathbb{R})$	 $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$	 $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Exemplos: 1. Estude o sinal das seguintes funções.

a) $f(x) = x^2 - 7x + 6$

Resolução:

$a = 1 > 0$ (concavidade para cima)

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25$

$x' = 6$ e $x'' = 1$



$f(x) = 0$ para $x = 1$ ou $x = 6$

$f(x) > 0$ para $x < 1$ ou $x > 6$

$f(x) < 0$ para $1 < x < 6$

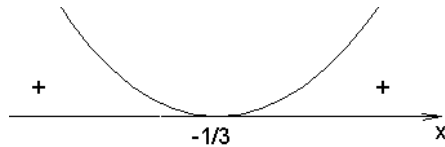
b) $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$

Resolução:

$a = 9 > 0$ (concavidade para cima)

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$

$x' = x'' = -1/3$



$f(x) = 0$ para $x = -1/3$

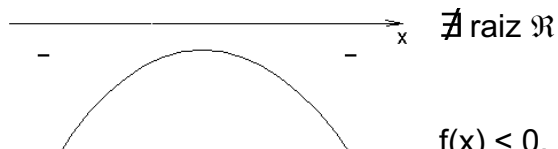
$f(x) > 0$ para $x \neq -1/3$

c) $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$

Resolução:

$a = -2 < 0$ (concavidade para baixo)

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4) = -23 \Rightarrow \Delta = -23 < 0$



$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

2. Quais são os valores reais de k para que a função $f(x) = x^2 - 2x + k$ seja positiva para todo x real?

Resolução:

Condições:

$a > 0$ e $\Delta < 0$

$a = 1 > 0$, já foi satisfeito

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k \Rightarrow \Delta = 4 - 4k < 0$

$-4k < -4 \cdot (-1)$

$k > 4/4 \Rightarrow k > 1$

Logo, $\{k \in \mathbb{R} \mid k > 1\}$

(21) Exercícios

1. Estude o sinal das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 - 3x - 4$

b) $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$

c) $f(x) = x^2 + 4x + 4$

d) $f(x) = x^2 - 4$

e) $f(x) = -3x^2 + 2x - 4$

f) $f(x) = -2x^2 + 3x$

g) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

h) $f(x) = x^2 - 10x + 25$

i) $f(x) = x^2 + 4x + 8$

j) $f(x) = -4x^2 + 1$

2. Para que valores reais de x a função $f(x) = x^2 + 7x + 10$ é positiva?

3. Para que valores reais de x a função $f(x) = x^2 - 2x + 6$ é negativa?

4. Determine k para que a função $f(x) = kx^2 + (2k + 3)x + k$ seja negativa para todo o x real.

5. (FEI-SP) Ache os valores reais de p para os quais a função $f(x) = (p - 1)x^2 + (2p - 2)x + p + 1$ é positiva, qualquer que seja x .

6. Determine os valores reais de m para os quais a função $f(x) = mx^2 + (4m + 2)x + 4m$ é negativa, qualquer que seja x .

20 INEQUAÇÃO DO 2º GRAU

20.1 Inequação do 2º grau na variável x

É toda desigualdade que pode ser escrita da seguinte forma:

$$ax^2 + bx + c > 0; \quad ax^2 + bx + c \geq 0;$$

$$ax^2 + bx + c < 0; \quad ax^2 + bx + c \leq 0.$$

Exemplos: Resolva as inequações:

a) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$

Resolução:

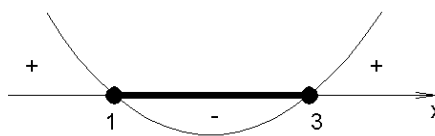
$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$$

$$\Delta = 16 - 12$$

$$\Delta = 4$$

$$x' = 3 \text{ e } x'' = 1$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$$



b) $x^2 - 3x + 2 > 0$

Resolução:

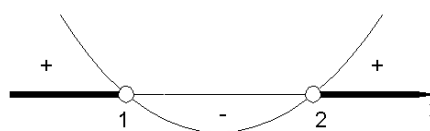
$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2$$

$$\Delta = 9 - 8$$

$$\Delta = 1$$

$$x' = 2 \text{ e } x'' = 1$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 2\}$$



(22) Exercícios

1. Resolva as seguintes inequações:

a) $x^2 - 2x + 1 > 0$

b) $2x^2 + 3x + 5 \geq 0$

c) $-2x^2 + 5x - 6 < 0$

d) $x^2 - 10x + 25 > 0$

e) $-3x^2 + 2x - 1 > 0$

f) $x^2 - 9 < 0$

g) $(x - 1)^2 \geq 3 - x$

h) $x(x + 4) > -4(x + 4)$

i) $\frac{x^2 - 4}{3} - \frac{x - 2}{2} \leq 0$

j) $4x^2 + (x + 2)^2 < 1$

20.2 Sistema de Inequações do 2º Grau

Resolve-se cada inequação separadamente e depois acha-se a intersecção das respectivas soluções.

Exemplo:
$$\begin{cases} 2x^2 + 8 \geq x^2 - 6x \\ x + 5 < 0 \end{cases}$$

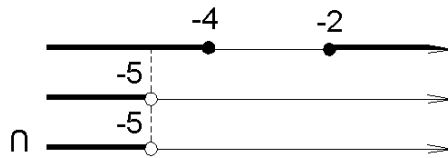
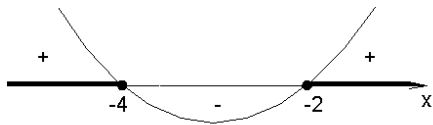
Resolução:

$$2x^2 + 8 \geq x^2 - 6x$$

$$x^2 + 6x + 8 \geq 0$$

$$\Delta = 4$$

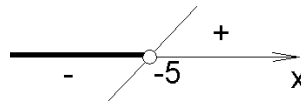
$$x_1 = -4 \text{ e } x_2 = -2$$



$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \}$$

$$x + 5 < 0$$

$$x < -5$$



(23) Exercícios

1. Resolva os sistemas, em $\mathbb{R}$.

a)
$$\begin{cases} x^2 + 6x + 8 \geq 0 \\ x + 5 < 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ -x^2 + 2x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0 \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 3 < 2x \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

20.3 Inequações simultâneas

É o mesmo que resolver um sistema de inequações.

Exemplo: $7 \leq x^2 + 3 < 4x$

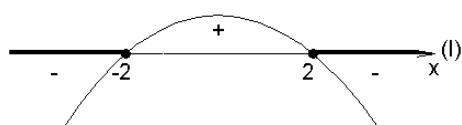
Resolução:

$$7 \leq x^2 + 3$$

$$-x^2 - 3 + 7 \leq 0$$

$$-x^2 + 4 \leq 0$$

$$x_1 = \pm 2$$



$$x^2 + 3 < 4x$$

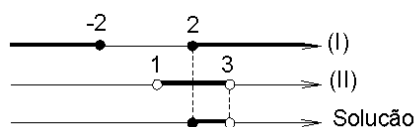
$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$$

$$\Delta = 4$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 1$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3\}$$

20.4 Inequação produto e inequação quociente

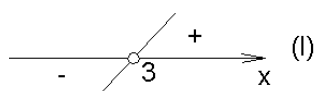
Inequação produto são desigualdades da forma:

$$1. (x - 3) \cdot (x^2 + 3x - 4) > 0$$

Resolução:

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$



$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$\Delta = 25$$

$$x_1 = 1 \text{ e } x_2 = -4$$



Quadro resolução ou quadro de sinais

-4	1	3		Raízes em ordem crescente
-	-	-	+	(I)
+	-	+	+	(II)
-	+	-	+	Solução

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 1 \text{ ou } x > 3\}$$

$$2. (x^2 - 9x - 10) \cdot (x^2 - 4x + 4) \leq 0$$

Resolução:

$$x^2 - 9x - 10 = 0$$

$$\Delta = 121$$

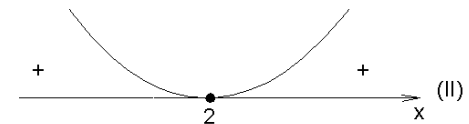
$$x_1 = 10 \text{ e } x_2 = -1$$



$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Delta = 0$$

$$x_1 = x_2 = 2$$



Quadro de sinais

-1	2	10		Raízes em ordem crescente
+	-	-	+	(I)
+	+	+	+	(II)
+	-	-	+	Solução

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 10\}$$

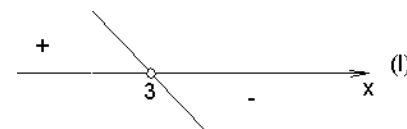
Inequação quociente são desigualdades da forma.

$$1. \frac{-x + 3}{x^2 - 4x - 5} > 0$$

Resolução:

$$-x + 3 = 0$$

$$x = 3$$



$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\Delta = 36$$

$$x_1 = 5 \text{ e } x_2 = -1$$



Quadro de sinais

-1	3	5		Raízes em ordem crescente
+	+	-	-	(I)
+	-	-	+	(II)
+	-	+	-	Solução

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 3 < x < 5\}$$

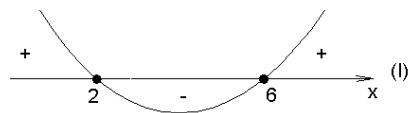
$$2. \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 9} \leq 0$$

Resolução:

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$\Delta = 16$$

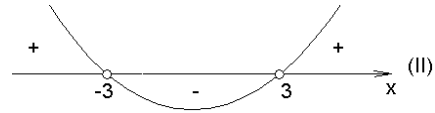
$$x_1 = 6 \text{ e } x_2 = 2$$



$$x^2 - 9 = 0$$

$$\Delta = 36$$

$$x_1 = 3 \text{ e } x_2 = -3$$



Quadro de sinais

-3	2	3	5		Raízes em ordem crescente
+	+	-	-	+	(I)
+	-	-	+	+	(II)
+	-	+	-	+	Solução

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2 \text{ ou } 3 < x \leq 5\}$$

(24) Exercícios

1. Resolva as inequações:

a) $(x^2 - 2x - 3)(2x^2 - 5x + 2) < 0$

b) $(x^2 + x - 6)(x^2 - 1) \geq 0$

c) $(x^2 - 3x)(-x + 2) \geq 0$

d) $\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 5x + 4} > 0$

e) $\frac{-x + 2}{x^2 - 3x} \leq 0$

f) $\frac{x^2}{x - 2} < 8$

g) $\frac{x}{x + 2} - \frac{1}{x} > 0$

h) $1 + \frac{x + 1}{x} \leq \frac{x}{x - 1}$

i) $\frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - 3x + 1} \leq 1$

j) $x^3 - x^2 - 12x \leq 0$

(25) Exercícios Complementares

1. (UFSM-PEIES/1995) O domínio da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x-x^2}}$ é

- a) $] -2, 1[$
- b) $] 0, \infty[$
- c) $[-2, 1[$
- d) $] -\infty, -2[\cup [1, \infty[$
- e) $] -\infty, -2 [\cup] 1, \infty[$

2. (UFSM-PEIES/1995) Numa microempresa de confecções, o custo diário da produção de x camisas é dado por $f(x) = x^2 - 40x + 410$ em R\$. O custo mínimo da produção diária é, em R\$,

- a) 5
- b) 15
- c) 10
- d) 18
- e) 21

3. (UFSM-PEIES/1996) Dada a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 6$, pode-se dizer que o valor _____ que assume é _____.

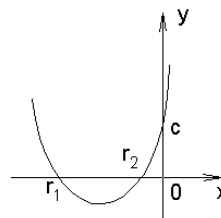
Selecione a alternativa que completa corretamente as lacunas.

- a) máximo; $\frac{11}{2}$
- b) mínimo; $-\frac{11}{2}$
- c) constante; $\frac{11}{2}$
- d) mínimo; $\frac{11}{2}$
- e) máximo; $-\frac{11}{2}$

4. (UFSM-PEIES/1997) Indique se são verdadeiras (V) ou falsas (F) as afirmativas referentes à função quadrática $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac$.

() Se $a < 0$, então $f(x)$ é decrescente no intervalo $] -b/2a, \infty)$.

() O gráfico ao lado representa uma função quadrática onde $b < 0$.

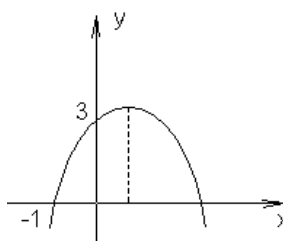


() Se $a < 0$, a imagem da função f é o intervalo $\left(-\infty, \frac{-\Delta}{4a} \right]$.

A seqüência correta é:

- a) F – F – V
- b) F – V – F
- c) V – V – F
- d) F – V – V
- e) V – F – V

5. (UFSM-PEIES/1998)



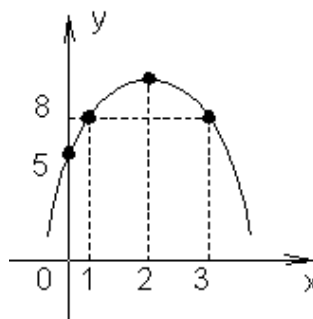
Analisando o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + bx + c$, onde b e c são constantes reais, pode-se afirmar que:

- a) o valor máximo que a função assume é 3,5.
- b) a imagem da função é o intervalo $(-\infty, 4]$.
- c) a função é positiva para valores de x no intervalo $(-\infty, -1[\cup] 3, \infty)$.
- d) a função é crescente para valores de x no intervalo $] 2, \infty)$.
- e) $b + c = 4$

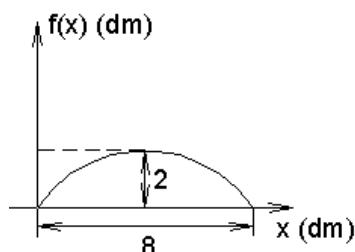
6. (UFSM-PEIES/1999) A parábola representada na figura é o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$, com $x \in \mathbb{R}$.

A soma e o produto das raízes dessa função valem, respectivamente.

- a) 5; 4.
- b) - 5; 4.
- c) 4; - 5
- d) 4; 5.
- e) - 4; - 5.



7. (UFSM-PEIES/1998)



A figura indica a trajetória parabólica do salto de uma rã e destaca a distância horizontal máxima (8 dm) e a altura máxima (2 dm) atingidas.

A função quadrática que expressa a altura em relação à distância horizontal é dada por:

- a) $f(x) = 0,125x^2 + x$
- b) $f(x) = - 0,125x^2 + x$
- c) $f(x) = - 0,25x^2 + 1,5x$
- d) $f(x) = - x^2 + 4,5x$
- e) $f(x) = - 0,5x^2 + 2,5x$

8. (UFSM-PEIES/2001) Dadas as funções $f(x) = - x^2 + 2x - 3$ e $g(x) = \frac{x}{2} - 3$, assinale V nas afirmações verdadeiras e F nas falsas.

- () A imagem da função $f(x)$ é o intervalo $] - \infty, - 2]$
- () A função $f(x)$ é decrescente no intervalo $] - \infty, 1]$.
- () A solução da inequação $g(x) < f(x)$ é o intervalo $]0, \frac{3}{2}[$.

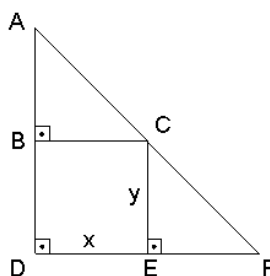
A sequência correta é:

- a) V – V – V.
- b) V – F – V.
- c) V – V – F.
- d) F – V – F.
- e) F – F – V.

9. (UFSM-PEIES/2001) Para que a função $f(x) = \sqrt{x^2 + kx + k}$ esteja definida para todo x real, k deve ser um número tal que:

- a) $0 \leq k \leq 4$ b) $4 < k \leq 8$ c) $k < 0$ ou $k > 4$
d) $k < 0$ e) $-2 \leq k < 0$

10. (UFSM-PEIES/2002) Na figura, $\overline{AD} = 6\text{m}$, $\overline{DF} = 8\text{m}$, $\overline{DE} = x\text{m}$ e $\overline{CE} = y\text{m}$. Coloque V nas afirmações verdadeiras e F nas falsas



() Os triângulos ADF e CEF são semelhantes, portanto $y = 6 - \frac{3}{4}x$.

() A área do retângulo BCED é dada pela função quadrática

$$A(x) = 6x - \frac{3}{4}x^2.$$

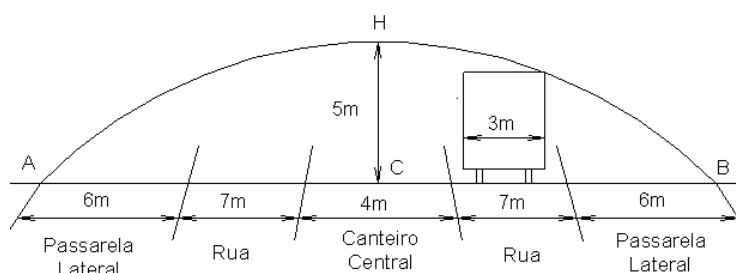
() O valor máximo da área do retângulo BCED é 12m^2 .

A sequência correta é:

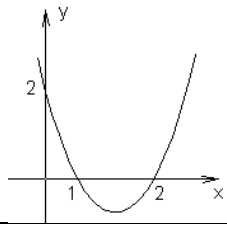
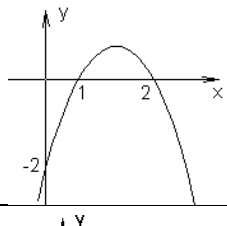
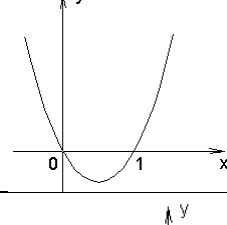
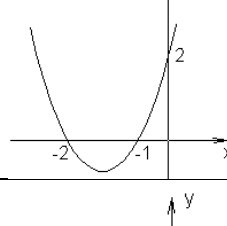
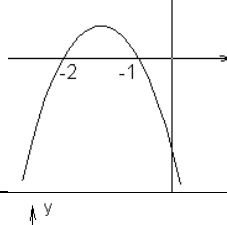
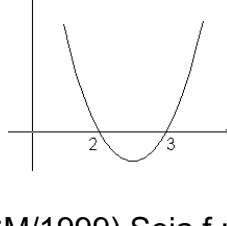
- a) F – V – V b) V – F – F c) F – V – F d) V – F – V e) V – V – V.

11. (UFSM/1998) Um arco de parábola, semelhante ao arco da entrada do campus da UFSM, tem a forma e dimensões representadas na figura, onde C é o ponto médio de AB e H é o vértice do arco. Dentre as medidas propostas a seguir, a que se aproxima mais da altura máxima que um caminhão de 3m de largura e de carga retangular pode alcançar, para passar por baixo do arco, é

- a) 5,00m
b) 4,68m
c) 4,50m
d) 4,44m
e) 4,32m



12. (UFSM/1998) Considerando a função $f(x) = (x - 1)(x - 2)$, associe a função (coluna da esquerda) a seu gráfico (coluna da direita)

$() -f(x)$	1. 
$() f(x + 1)$	2. 
$() f(-x)$	3. 
$() f(x)$	4. 
	5. 
	6. 

A sequência correta é

- a) 1 – 6 – 5 – 2
- b) 1 – 3 – 4 – 2
- c) 2 – 3 – 5 – 1
- d) 1 – 6 – 4 – 2
- e) 2 – 3 – 4 – 1

13. (UFSM/1999) Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

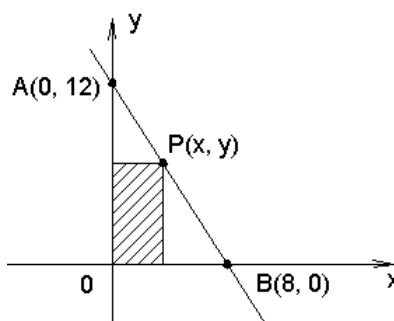
$$x \rightarrow y = \frac{1}{2x+1} + \sqrt{2+3x-2x^2}$$

onde $A \subset \mathbb{R}$.

Então o domínio da função f é

- a) $\mathbb{R} - \{-1/2\}$
- b) $[-4, -1/2[\cup] -1/2, 1]$
- c) $\mathbb{R} - \{-1/2, 2\}$
- d) $] -1/2, 2]$
- e) $] -\infty, -1/2[\cup [2, \infty[$

14. (UFSM/1999)



A figura mostra um retângulo com dois lados nos eixos cartesianos e um vértice na reta que passa pelos pontos A(0, 12) e B(8, 0). As dimensões x e y do retângulo, para que sua área seja máxima, devem ser, respectivamente, iguais a

- a) 4 e 6 b) 5 e 9/2 c) 5 e 7 d) 4 e 7 e) 6 e 3

15 (UFSM/2000) Sendo as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2x - 3$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -x^2 + 4x + 5$, assinale verdadeira (V) ou falsa (F) em cada uma das afirmações a seguir.

- () $g(x) > f(x)$ para todo $x \in]-1, 5[$
 () $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[$
 () $f(x) = g(x)$ para $x \in \{-1, 3, 5\}$

A seqüência correta é

- a) F – V – F.
 b) F – V – V.
 c) F – F – V.
 d) V – V – F.
 e) V – F – V.

16. (UFSM/2000) Um laboratório testou a ação de uma droga em uma amostra de 720 frangos. Constatou-se que a lei de sobrevivência do lote de frangos era dada pela relação $v(t) = at^2 + b$, onde $v(t)$ é o número de elementos vivos no tempo t (meses). Sabendo-se que o ultimo frango morreu quando $t = 12$ meses após o início da experiência, a quantidade de frangos que ainda estava viva no 10º mês é

- a) 80 b) 100 c) 120 d) 220 e) 300

17. (UFSM/2000) Seja a inequação $\frac{5-x^2}{2-x} \leq 0$, com $x \neq 2$. Sua

solução é

- a) $]-\infty, -\sqrt{5}] \cup]2, \sqrt{5}]$
- b) $] -2, -\sqrt{5}] \cup]2, \sqrt{5}]$
- c) $]2, +\infty[$
- d) $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$
- e) $\mathbb{R}$

18. (UFSM/2001) Sejam x e y dois números reais. Supondo que $x = y = 1$, afirma-se:

- (1) $x^2 = y^2$
- (2) $x^2 - y^2 = 0$
- (3) $x^2 - y^2 = x - y$
- (4) $(x + y)(x - y) = x - y$
- (5) $(x + y)(x - y) = (x - y) \cdot 1$
- (6) Dividindo-se ambos os membros de (5) por $(x - y)$,

obtém-se $(x + 1) = 1$.

- (7) Como $x = 1$ e $y = 1$, tem-se $2 = 1$.

Do exposto, pode-se afirmar:

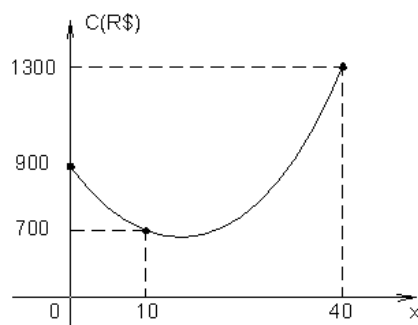
- a) Ficou provado que $2 = 1$.
- b) A igualdade (1) não é correta.
- c) A igualdade (3) é falsa.
- d) Existe erro na linha (6).
- e) Ocorreu erro na linha (5).

19. (UFSM/2001) Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x - 4) = x^2 + 4$. Assim, $f(2x)$ é uma função polinomial de grau ____ cujas raízes têm por soma ____ e por produto ____.

Assinale a alternativa que completa corretamente as lacunas.

- a) 2; -4; 5 b) 2; 4; 5 c) 2; -8; 20 d) 2; 8; 20 e) 4; 0; 4

20. (UFSM/2001)



Na produção de x unidades mensais de um certo produto, uma fábrica tem um custo, em reais, descrito pela função de 2º grau, representada parcialmente na figura. O custo mínimo é, em reais,

- a) 500 b) 645 c) 660 d) 675 e) 690

21. (UFSM/2002) Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

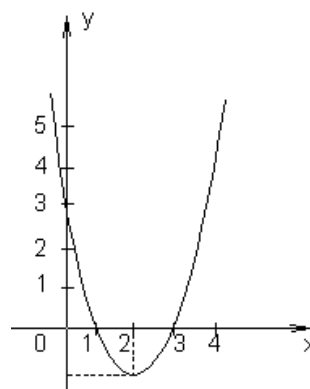
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 - 1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

O valor de $f(\pi) + f(\sqrt{2}) - f(1)$ é

- a) $\pi^2 + 2\sqrt{\pi} - 2$ b) $2\pi + 2\sqrt{2} - 2$ c) $\pi^2 - 2$
d) $2\pi + 1$ e) $2\sqrt{2} - \pi + 1$

22. (UFSM/2003) A parábola P representada na figura é o gráfico da função quadrática f . Se $y = g(x)$ for outra função quadrática cujas raízes sejam as mesmas de f e se o vértice do gráfico dessa g for simétrico ao vértice de P com relação ao eixo Ox , então $g(-1)$ vale

- a) -8
b) -6
c) 0
d) 6
e) 8



23. (UFSM/2003) O conjunto solução da inequação $\frac{x^2 + x - 1}{9 - x^2} \geq \frac{1}{3 - x}$

é dado por

- a) $[-3, 3[$
- b) $]-\infty, -2] \cup [2, \infty[$
- c) $]-3, -2] \cup [2, 3[$
- d) $[-2, 2]$
- e) $[2, \infty[$

24. (UFSM/2004) A 100 m de um semáforo, o motorista de um automóvel aplica os freios de modo suave e constante, a fim de imprimir uma força de frenagem constante até o repouso. Após a freada, foram coletados os seguintes dados:

Intervalo de tempo	Distância percorrida pelo automóvel
entre 0 e 1 s	30m
entre 1 e 2s	25 m

Considerando que a distância do automóvel ao semáforo, no instante de tempo t , é dada pela função quadrática $s(t) = (\frac{1}{2})at^2 - vt + 100$, onde “a” é a aceleração constante imprimida no instante da freada e “v”, a velocidade no instante da freada, o tempo necessário para o automóvel atingir o posição onde esta localizado o semáforo é, em segundos,

- a) 4,5
- b) 4,6
- c) 4,8
- d) 4,9
- e) 5

GABARITO

(1) 1. a) $\{0, 1, 2\}$ b) $\{0, 2, 4\}$ c) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ d) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
e) $\{3, 4\}$ f) $\{1\}$ g) $\{0, 2, 4\}$ h) B

(2) 1. 340 2. 44 3. d 4. a
5. a) 66 b) 34 c) 4 d) 51 e) 19 f) 40
6. a) 43% b) 7% c) 57% 7. a) 45 b) 33 c) 50

(3) 1. $\in \rightarrow c, e, f, g, h, i$ e $\notin \rightarrow a, b, d$.

2. a) $\{0, 1, 2, 3\}$ b) $\{\dots - 5, - 4\}$ c) $\{-5, \frac{1}{2}\}$ d) $\{5\}$ e) $\{-2, 1, 3\}$

(5) 1. a) $\{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 3\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x < 1\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\}$
2. a) $\{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 5\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} / -4 < x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\}$
3. a) $]5, 7[$ b) $[-1, 2[$ c) $[2, 3[$ d) $]5, 9[$ 4. a) $]-4, -1[$ b) $]-2, -1[\cup]2, 4[$

(6) 1. a) $(-\frac{1}{2}, 2)$ b) $(3, 3)$ c) $(1, 5)$ d) $(3, 1)$ e) $(-\frac{9}{4}, -\frac{3}{2})$ f) $\begin{cases} x_1 = 2, x_2 = 3 \\ y = 1 \end{cases}$
g) $\begin{cases} x = 1 \text{ e } x = -2 \\ y = \pm \sqrt{2} \end{cases}$ h) $x = 9$

(7) 2. 10 3. $x = 6$ 4. $x = 0$ ou $x = 2$

(8) 1. a) $D(R) = \{1, 2, 3, 4\}$ b) $\text{Im}(R) = \{2, 4, 6, 8\}$
2. a) $R = \{(-1, -3), (0, -1), (1, 1), (2, 3)\}$. b) $D(R) = A$; $\text{Im}(R) = B$
3. a) $S = \{(-1, -1), (1, 1)\}$, $D(R) = \{-1, 1\}$, $\text{Im}(R) = \{-1, 1\}$
b) $T = \{(-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3)\}$, $D(R) = \{-1, 0, 1, 2\}$, $\text{Im}(R) = \{-1, 0, 3\}$
4. $D = \{(-3, -1/4), (-2, -1/3), (-1, -1/2), (0, -1)\}$

(9) 1. $x=9$ ou $x=1$ 2. $a=3$ e $b=1$ 3. a) não é função b) é função
4. a) 11 b) $3 - 3\sqrt{2}$ c) $\frac{11}{4}$ 5. a) $-1/3$ b) $-13/3$

6. a) -1 e 6 b) não há valores reais de x . 7. $3/10$ 8. $38/15$

(10) a) $D(f) = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{5}\}$ b) $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$ c) $D(f) = [1, 3]$ d) $D(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

e) $D(f) = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x \leq \frac{1}{5}\}$ f) $D(f) =]-4, +\infty)$ g) $D(f) =]-1, 1]$

(11) 1. a) sobrejetora b) bijetora c) injetora d) sobrejetora e) injetora f) bijetora

(12) 1. a) $f^{-1}(x) = \frac{4x+2}{3}$ b) $f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-1} (x \neq 1)$ c) $f^{-1}(x) = \frac{3x+5}{2x-1} (x \neq \frac{1}{2})$

d) $f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{x-2} (x \neq 2)$ e) $f^{-1}(x) = \frac{-4}{x-2} (x \neq 2)$

f) $f^{-1}(x) = \frac{2x-3}{2x-1} (x \neq \frac{1}{2})$ g) $f^{-1}(x) = \frac{1+2x}{2x-1} (x \neq \frac{1}{2})$

(13) 1. a) $-\frac{1}{2}$ b) -5 c) $\frac{1}{2}$ 2. a) -1 b) $1/3$ c) $\frac{1}{2}$

3. a) $f(x) = 3x + 2$ b) $y = -2x + 5$ 5. a) $P(x) = 3,44 + 0,86x$ b) R\$ 12,90.

c) 21 Km 6. 1350 7. a) $V(x) = -3600x + 30000$ b) R\$ 19200,00

8. $y = -4x - 7$ 9. $y = 3x + 8$ 10. a) $m > 2$ b) $m < 2$

(14) 1. (I) $f(x) = 2x + 1$, crescente, raiz = $-1/2$; (II) $f(x) = -2x + 1$, decrescente, raiz = $\frac{1}{2}$; (III) $f(x) = 3x$, crescente, raiz = 0 .

2. a) $x = 1/4$ b) $x = 4$ c) $x = 0$

(15) 2. $x < \frac{4}{19}$ 3. ~~4~~ $x \in \mathbb{R}$. 4. a) $m = 4$ e $n = -12$ b) $y = 0$ para $x = 3$;

$y > 0$ para $x > 3$; $y < 0$ para $x < 3$. 5. 81 6. 8 anos

(16) 1. a) $x \geq 5$ b) $x > 11$ c) $x > 1$ d) $x \leq \frac{1}{19}$ e) $\mathbb{R}$ f) $x < -\frac{5}{4}$

(17) 1. a) $x < \frac{3}{5}$ ou $x > 1$ b) $x \leq -2$ c) $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ d) $\mathbb{R}$

e) $-4 < x < 1$ ou $x > 2$ f) $x < -3$ ou $x > 2$ g) $x \leq -\frac{1}{2}$ ou $x > 2$

h) $-1 < x \leq 3$ i) $x < -2$ j) $-3 < x < 1$ ou $x > 5$

2. a) $x \leq 0$ ou $x \geq 5$ b) $x < -4$ ou $x \geq 2$ c) $x \leq -2$ ou $x \geq 5$

d) $-3 \leq x \leq 1$ ou $x > 2$ e) $0 < x < 4$ f) $\mathbb{R}$

- (18) 1. c 2. b 3. b 4. e 5. c 6. b 7. c 8. e 9. b
10. d 11. d 12. c 13. a 14. d 15. b 16. b 17. b
18. d 19. d 20. c 21. c 22. c 23. b

(19) 1. a) $a = 1$; $b = -6$; $c = 8$; b) 3 c) 8 d) $\frac{21}{4}$ e) $\{2, 4\}$

2. $f(x) = -3x^2 + x + 5$ e $f(5) = -65$ 3. $\{-3, 4\}$ 4. $\frac{15}{4}$ 5. 2

- (20) 1. $m < -2$ ou $m > 1$ 2. a) $\mathbb{R} - \{5\}$ b) $\{m \in \mathbb{R} \mid m < 5\}$ 3. a) $Y_v = -4$,
mínimo, $Im =] -4, +\infty]$, b)) $Y_v = 4$, máximo, $Im =] -\infty, 4]$; c)) $Y_v = 2$, mínimo,
 $Im =] 2, +\infty]$ 4. $a = 1$ $b = -4$ 5. $m = 3$ 6. a) $\{-1, 5\}$ b) $\emptyset$ c) $\{-1\}$
7. a) $k < 1$ b) $k = 1$ c) $k > 1$ 8. $k = \frac{1}{4}$ 9. $a = 1$, $b = -2$ e $c = -15$
10. $\left(\frac{5}{6}, \frac{47}{24}\right)$ 11. $m > -\frac{1}{4}$ 12. $k < 3$ 13. a) $[-16, +\infty)$ b) $[-\frac{4}{3}, +\infty)$
c) $[-\frac{9}{4}, +\infty)$ d) $(-\infty, 1]$ e) $(-\infty, -\frac{2}{3}]$ 14. $k = 1$ 15. $m = -7$

(21) a) $f(x) = 0$ para $x = -1$ ou $x = 4$; b) $f(x) = 0$ para $x = -\frac{1}{3}$ ou $x = 1$;

$f(x) > 0$ para $x < -1$ ou $x > 4$; $f(x) > 0$ para $-\frac{1}{3} < x < 1$;

$f(x) < 0$ para $-1 < x < 4$. $f(x) < 0$ para $x < -\frac{1}{3}$ ou $x > 1$.

c) $f(x) = 0$ para $x = -2$; d) $f(x) = 0$ para $x = -2$ ou $x = 2$;
 $f(x) > 0$ para $x \neq -2$. $f(x) > 0$ para $x < -2$ ou $x > 2$;
 $f(x) < 0$ para $-2 < x < 2$.

e) $f(x) < 0$ para todo x real. f) $f(x) = 0$ para $x = 0$ ou $x = \frac{3}{2}$;

$$f(x) > 0 \text{ para } 0 < x < \frac{3}{2};$$

$$f(x) < 0 \text{ para } x < 0 \text{ ou } x > \frac{3}{2}.$$

g) $f(x) = 0$ para $x = 2$ ou $x = 4$; h) $f(x) = 0$ para $x = 5$;

$f(x) > 0$ para $x < 2$ ou $x > 4$; $f(x) > 0$ para $x \neq 5$.

$f(x) < 0$ para $2 < x < 4$.

(i) $f(x) > 0$ para todo x real. j) $f(x) = 0$ para $x = -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$;

$$f(x) > 0 \text{ para } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2};$$

$$f(x) < 0 \text{ para } x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{1}{2}$$

(22) 1. a) $S = \mathbb{R} - \{1\}$ b) $S = \mathbb{R}$ c) $S = \mathbb{R}$ d) $\mathbb{R} - \{5\}$ e) $S = \emptyset$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$ g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2\}$

h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -4\}$ i) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 2\}$ j) $S = \emptyset$

(23) 1. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -5\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 0\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 0 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2 \text{ e } x \neq 1\}$ e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

(24) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } 2 < x < 3\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } -1 \leq x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } 2 < x < 4 \text{ ou } x > 5\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2 \text{ ou } x > 3\}$ f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -1 < x < 0 \text{ ou } x > 2\}$

h) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x < 0 \text{ ou } 1 < x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$ i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } \frac{1}{2} < x < 1 \text{ ou } x \geq 2\}$

j) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } 0 \leq x \leq 4\}$

(25) 1. a 2. c 3. d 4. e 5. b 6. c 7. b 8. b 9. a 10. e

11. d 12. e 13. d 14. a 15. a 16. d 17. a 18. d

19. a 20. d 21. c 22. a 23. c 24. e

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Currículo Básico do PEIES. Universidade Federal de Santa Maria. **Programa de Ingresso ao Ensino Superior**. V. 5, Santa Maria, 1999

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática, contexto e aplicações**. Vol. 1, Editora Ática, São Paulo, 2000.

DECISAÔ PRÉ-VESTIBULAR. **Matemática**. Polígrafo – Santa Maria [s.n.], 1997, não paginado.

GENTIL, N., SANTOS, C. A. M. dos, GRECO, A. C., GRECO, S. E., **Matemática para o 2º grau**. V. 1, Editora Ática, São Paulo, 1996.

GIOVANNI, J. R., BONJORNO, J. R. **Matemática**. V. 1, Editora FTD S.A., São Paulo, 2000.

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R. **Matemática**. Volume Único, Editora Atual, São Paulo, 2002.

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. V. 1, SBM, Rio de Janeiro, 2001.

SILVA, J. D., FERNANDES, V. dos S., MABELINI, O. D. **Matemática: Novo Ensino Médio – Volume Único Curso Completo**. Sistema de Ensino IPEP, São Paulo, 2002.

TIZZITI, José Guilherme. **Matemática: programa completo: 2º grau, vestibular**. Ática, São Paulo, 1982.