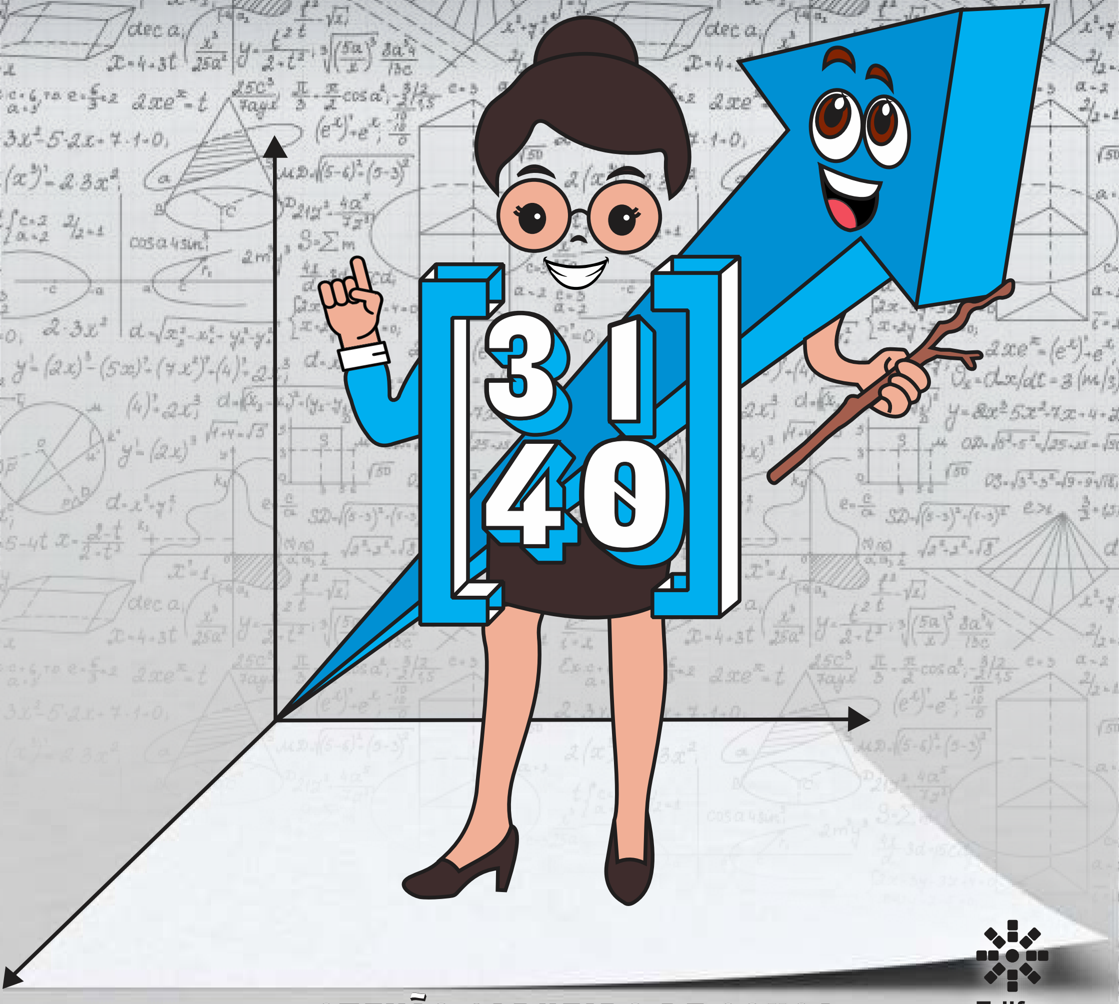
NAS TERRAS DE VETORLÂNDIA

UMA HISTÓRIA DE MUITAS TRANSFORMAÇÕES



STEVÃO CARNEIRO DE SOUSA
RODOLFO CHAVES

Edifes
ACADÊMICO

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PóS -GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Stevão Carneiro de Sousa

Rodolfo Chaves

Nas terras de Vetorlândia:

uma história com muitas transformações

Série Paradidáticos de Matemática – Nº 01

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo

Vitória – ES
2021

Editora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo

R. Barão de Mauá, nº 30 – Jucutuquara

29040-689 – Vitória – ES

www.edifes.ifes.edu.br | editora@ifes.edu.br

Revisão de texto: Rodolfo Chaves

Projeto gráfico: Rodolfo Chaves, Stevão Carneiro de Sousa, Priscilla Carvalho Casteluber

Diagramação: Rodolfo Chaves, Stevão Carneiro de Sousa, Priscilla Carvalho Casteluber

Capa: Priscilla Carvalho Casteluber

Imagem de capa: Priscilla Carvalho Casteluber

Dados internacionais de Catalogação na Publicação

Bibliotecária Viviane Bessa Lopes Alvarenga – CRB/06-745

Sousa, Stevão Carneiro de.

S729t Nas terras de Vetorlândia: uma história de muitas transformações [recurso eletrônico] / Stevão Carneiro de Sousa, Rodolfo Chaves. – Vitória, ES : Edifes Acadêmico, 2021.

PDF 4744Kb (99p.): il. (Série Paradidáticos de matemática ; 01)
Publicação Eletrônica.
Modo de acesso: http://educimat.ifes.edu.br/index.php/produtos-educacionais

Inclui bibliografia
ISBN: 978-85-8263-543-8

1. Matemática – estudo e ensino. 2. Álgebra - vetor. 3. Semântica. 4. Formação de professores. 5. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo. 6. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática. I. Chaves, Rodolfo. II. Título.

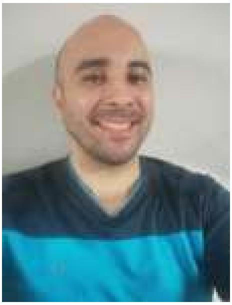
CDD: 510.7

DOI: 10.36524/9788582635438

MINICURRÍCULO DOS AUTORES

Stevão Carneiro de Sousa

Mestre em Educação em Ciências e Matemática, licenciado em Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo. Membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática (Gepemem). Professor efetivo da Rede Estadual de Educação do Espírito Santo.



Rodolfo Chaves

Professor Titular no Instituto Federal de Educação do Espírito Santo. Pós-doutorado em Educação Matemática e Ensino de Física pela UFSM. Doutorado e Mestrado em Educação Matemática pela UNESP/Rio Claro. Licenciado em Matemática pela FEUC. Pesquisador e líder do Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática (Gepemem). Integrante a Rede de Pesquisa e Desenvolvimento em Educação Matemática (Sigma-t).

Dedicamos essa obra aos amigos, membros do Gepemem, e a todos os professores de Matemática que lutam e militam por uma Educação pública, gratuita, libertadora e de qualidade.

É importante que o que aconteça em sala de aula sirva para ampliar o mundo dos alunos, e não apenas para ensinar o que os livros didáticos, tantas vezes mal informados, dizem que deve ser ensinado!

(LINS, 2014, p. 20).

SUMÁRIO

SUMÁRIO

1 Apresentação

Este paradidático é destinado a professores que ensinam matemática, tanto àqueles que se encontram em processo de formação inicial, quanto àqueles que estão em efetivo exercício como formadores e que, de alguma maneira, se envolvem com a álgebra linear e a geometria analítica.

Tal criação advém de uma pesquisa de mestrado que deu origem à dissertação **"Uma leitura da produção de significado para possíveis noções de vetor em uma turma de Licenciatura em Matemática"** (SOUSA, 2021), que desenvolvemos a partir de observações nas aulas de *álgebra linear*, ministradas em um curso de formação de professores.

Esta obra é fruto de nossas experiências como professores de álgebra linear e da educação básica e, para tal, nos inspiramos em dois clássicos da literatura – Planolândia: um romance de muitas dimensões, de Edwin Abbott Abbott (ABBOTT, 2021 [1884]), que é uma leitura metafórica do Mito da Caverna, de Platão, e O maravilhoso mágico de Oz, de Lyman Frank Baum (BAUM, 2013 [1900]) – e também em um mangá de Álgebra Linear (TAKAHASHI; INOUE; TREND-PRO, 2012).

A partir de nosso referencial teórico, entendemos que existam matemáticas (com "s" mesmo, no plural), por não defendermos o caráter universalista-positivista de uma matemática hegemônica, ocidentalizada, branca e eurocêntrica, mas assim, as concebemos como discursos (LINS, 1993) e, portanto, se constituem como atividades produtivas e práticas sociais dos homens (LINS, 1993; RIBNIKOV, 1991 [1987]; KNIJNIK et al, 2012). E, por assim ser, trazemos na forma literária uma sátira política ficcional envolvendo significados produzidos a respeito de objetos constituídos como vetores, por alunos, atores de nossa pesquisa. Várias falas dos personagens são extraídas de resíduos de enunciação obtidos em nossa pesquisa.

A partir da saga de Dorothy, personagem central de O maravilhoso mágico de Oz, de Lyman Frank Baum (BAUM, 2013 [1900]), criamos o protagonista desta história, um vetor que busca ajuda de um ermitão que habita uma gruta na lendária montanha da Pedra do Cafofo[1], na tentativa de solucionar a devastadora ameaça de mortes, advindas de uma pandemia que se alastrou pelas terras de Vetorlândia, dizimando grande parte da população.

Apresentamos nestas páginas uma ficção, pautada em generalizações, mas com o propósito de

---

[1] Cafofo é o Centro Alternativo de Fomento à Formação, vinculado ao Laboratório de Práticas de Ensino Integradas (LPEI) do Ifes, *campus* Vitória, na qual se desenvolvem várias atividades de ensino e extensão, vinculadas à formação docente.

[2] Max Stirner é o pseudônimo de Johann Kaspar Schmidt (1806-1856), filósofo alemão que fez parte da esquerda hegeliana. Stirner foi aluno de

construirmos uma narrativa ficcional que mistura ideias matemáticas, objetos de espaços vetoriais em um cenário que o leitor pode considerar como um conjunto de estipulações locais, em meio a uma atividade, operando a partir de modos de produção de significados bem peculiares ao leitor. Mas, segundo nosso referencial (LINS, 2012; 1999), quem produz significado é o leitor de uma enunciação, e não o autor, então, deixaremos a cargo do leitor que exercite a imaginação.

2 O que pretendemos

> *Eu tinha muitas inquietações e perguntas relacionadas à sala de aula, sempre coisa de professor mesmo, e que os autores que eu lia não me ajudavam a tratar. Em particular, queria dar conta de caracterizar o que os alunos estavam pensando quando "erravam", mas sem recorrer a esta ideia do erro.*
> (LINS, 2012, p. 11, *grifos do autor*).

Em nosso texto abusamos de certo lirismo e, portanto, adotamos metáforas, com o propósito de convidarmos o leitor a refletir a respeito dos diversos objetos que são constituídos como vetores, por alunos em aulas de matemáticas; isso não implica em dizer que não possa ser direcionado a outras áreas do conhecimento, como filosofia, ética, política, literatura etc.

Não nos prendemos a possíveis "realidades" matemáticas, porém, a ideias que envolvem objetos matemáticos para discutirmos temas tão carentes a todos nós, principalmente em momentos tão frágeis como o que vivemos. Nosso propósito é convidarmos o leitor a refletir a respeito de que as matemáticas podem ser abordadas de forma leve e descontraída, facultando àqueles que as utilizam realizar leituras do mundo, para que possam refletir a respeito daquilo que nos cercam no dia a dia, dentro e fora da escola e, possivelmente, passando a agir de forma crítica, reflexiva e colaborativa.

Para atingirmos nossos propósitos, apropriamo-nos de resíduos de enunciação de atores de nossa pesquisa ao tratarem dos objetos vetores e sorvemos de outras obras a ideia apresentada em forma de conto e prosa para discutirmos questões não apenas vinculadas às matemáticas, mas em contraposição à concepção positivista a respeito de uma matemática hegemônica.

> A matemática, segundo o positivismo "[...] reduz o objeto próprio das ciências à natureza observável, ao fato positivo; reduz a filosofia aos resultados das ciências; reduz as ciências humanas às ciências da natureza. Mas a preocupação positivista de tudo reduzir ao racional redunda no seu oposto, ou seja, na criação de mitos. O positivismo cria o mito da cientificidade, segundo o qual o

> único conhecimento é o científico.” [...] em nome da racionalidade se exerce a dominação do homem pelo homem e, por ser ideológica, a razão induz a aceitação do mito dos progressos científicos vindouros, submetendo-nos à técnica, classificando-a como instrumento de dominação. (CHAVES, 2004, p. 104-105, *ipsis litteris*, destaques do original).

Assim, convidamos o leitor a refletir a respeito de possibilidades de rompermos com quaisquer dispositivos de controle, sobretudo os que usam as matemáticas como ferramenta de exclusão social, tornando o professor um agente de sistemas de exclusão e de manutenção de castas, sobretudo socioeconômicas.

O viés das discussões apresentadas não possui um caráter prescritivo, mas assumimos que objetivamos subverter o engessamento social excludente, que se apresenta a partir de aulas formais e descontextualizadas, segregando alunos e professores.

Assim, esta obra não possui a pretensão de ser um guia didático, muito menos um roteiro de aula, mas sim um convite à reflexão.

Parafraseando o pensador Max Stirner[2], entendemos que o saber tem que morrer para renascer na forma de vontade, e por isso mesmo dar-nos-emos por satisfeitos, se o professor após ler este conto, produzir significados para a ideia de que, para romper com o cenário sócio-político-ambiental na qual vivemos, é fundamental desestabilizarmos a inércia mantenedora de práticas de poder que fixam as imensas desigualdades em nosso país, em que há matemáticas escolares e uma matemática acadêmica que, na forma de dispositivo tático, se mostram como formas de discurso de fixação e proliferação dessas desigualdades.

[2] Max Stirner é o pseudônimo de Johann Kaspar Schmidt (1806-1856), filósofo alemão que fez parte da esquerda hegeliana. Stirner foi aluno de Hegel na Universidade de Berlim, entre 1826 e 1828 (CHAVES, 2004, p. 7).

Esse poder da qual nos referimos encontra-se diametralmente oposto à concepção tradicional. Referimo-nos a um tipo de poder disciplinar, adestrador – "[...] adestrar para retirar, e se apropriar ainda mais [...]" (FOUCAULT, 2002, p. 143) –, exercido invisivelmente, mas permanente e inebriante, que destrói: "O sucesso do poder disciplinar se deve sem dúvida ao uso de instrumentos simples: o olhar hierárquico, a sanção normalizadora e sua combinação num procedimento que lhe é específico, o exame" (FOUCAULT, 2002, p. 156) e, por isso, bebemos nas ideias linsianas de que

> [...] a ampliação de diversidade que proponho deve, necessariamente, ter impacto nas vidas dos alunos – vida na rua, vida na escola –, isto é, a educação matemática que pratico não é nunca vista como uma preparação para a vida: ela já é vida (LINS, 1999, p. 92).

E nós professores, ao nos depararmos com essas ideias temos que pensar se é esse tipo de poder que queremos exercer ou se adotaremos as matemáticas para nos opormos a ele, se queremos entender o que é o aluno para uma matemática ou se subverteremos essa relação e nos procuraremos em *entender o que possa vir a ser uma matemática para o aluno e que matemática(s) é(são) essa(s), ou como defendia o educador matemático Romulo Campos Lins, devemos ficar atentos para a ideia de que* "[...] a demanda a que o sistema escolar deverá responder, é que a educação matemática de nossos alunos deve corresponder a uma 'educação PELA Matemática' e não uma 'educação PARA A Matemática'" (LINS, 2020, p. 15, destaques do original).

"*Do mesmo modo que proponho uma educação matemática*
que não seja preparação para a vida, e sim vida,
proponho uma reflexão que não seja
preparação para a ação, e sim ação"
(LINS, 1999, p. 94)

3 Um cenário atual de Vetorlândia

Vetorlândia é um país tropical exuberante, com vasta diversidade natural, constituído por riquíssimos biomas ou espaços vetoriais.

Temos o bioma dos vetores denominados matrizes, o bioma dos vetores denominados funções, o bioma dos espaços tridimensionais, dos espaços bidimensionais e vários outros denominados de espaços vetoriais arbitrários.

Porém, em um processo eleitoral viciado, com interferência estrangeira e conluio de alguns grupos da classe dominante, ocorreu um golpe que acabou por levar ao poder um vetor de dimensões duvidosas, havendo indícios de envolvimento com milicianos e com suspeita de atos ilícitos, pertencente ao eixo Ox, que, devido à sua visão estreita e sofômana, considera qualquer vetor fora desse eixo como comunista, afastando assim a possibilidade de tentar entender que há outros espaços vetoriais fora da reta Ox e, portanto, outros vetores que não necessariamente compartilham de seus ideias, ou seja, que possuem módulo, direção e sentido diferentes dos seus ... ou não possuem! Aliás, em sua torpe e estreita visão, um objeto para ser vetor, necessariamente deve possuir módulo, direção e sentido, isto é, deve ser terrivelmente objeto geométrico.

Por essa limitada forma de ver o mundo, todos os investimentos designados às políticas sociais, educacionais, tecnológicas, artísticas, culturais, científicas e de saúde pública de Vetorlâncdia foram reduzidas e desviadas para fins militares e de política de controle, sobretudo destinados aos políticos que lhe dão sustentação ao modus operandi segregacionista, fundamentalista e eugenista, centrado e pautado nas operações pertinentes exclusivamente ao eixo Ox.

Esse vetor orgulha-se em disseminar valores duvidosos na criação de sua prole e de serem, tal como ele, vetores do eixo Ox:

> *– Meus quatro filhos me puxaram, são todos vetores de Ox, machos, com extremidade na direita da reta, com histórico de atleta. No quinto dei uma fraquejada e saiu um vetor com extremidade na esquerda da reta... Paciência! Fazer o que? Mas ainda é um vetor de Ox. Felizmente eu os criei bem e nenhum deles se mistura com vetores de outro eixo, taoquei? Quem quiser queimar a origem que vá pra outro espaço. Filho meu não, po... Filho meu não é vetor nulo!*

Por mais que pareça inimaginável, o signatário líder do Executivo, minimiza as mortes advindas de uma pandemia que assola o mundo – “É só uma gripezinha, po...!” –, receita – sem possuir formação para tal – fármacos comprovadamente ineficazes, estimula a circulação do vírus, para muitos letal, minimizando o uso de máscaras. A letalidade desse vírus é tão grande que em menos de dois anos já sucumbiu mais de 600 mil vetores, só em Vetorlândia.

O mesmo, ao ser perguntado por jornalistas porque desconsidera outros vetores que não sejam os do eixo Ox, enfadonhamente responde:

> *– Esse negócio de espaço vetorial é coisa de baderneiro! Só sabem fazer balbúrdia. Espaço vetorial é casinha de vetor comunista. Não tem que ser diferente, po...! Isso é coisa da esquerda. Comigo não! Vetor para mim tem que ser terrivelmente geométrico. Esses baderneiros rezam na cartilha de um tal vetor chamado Paulo Freire, que defende que existem espaços vetoriais arbitrários. Onde já se viu? Vetor formado por n-upla! Daqui a pouco vão falar que a Terra não é plana, po...! Esse vetorzinho comunista alfabetizou mais de 40 mil vetores unitários... Unitário é unitário, po...! Não tem que ficar se misturando. Lugar de vetor unitário é na base, servindo ao sistema. Eu não trato com produto vetorial, não leva a lugar algum. Po..., como todo mundo sabe a Terra é plana, já diria o grande mestre astrólogo e filósofo por correspondência, com doutorado em redes sociais, taoquei? Vetor unitário tem que ficar em Ox.*

Diante desse terrível quadro, com escolas abandonadas à própria sorte, universidades sucateadas, famílias de vetores assoladas pela fome e pelo desemprego, inflação galopante, com falta de políticas sociais, depredação dos biomas, com queimadas e grilagem de terras, devastação de reservas naturais, crise hídrica etc. Vetorlândia tornou-se uma plutocracia cleptocrata e sofamonocrata e por isso, resolvemos então sair de Vetorlândia em busca de ajuda.

Assim, eu e meu mestre tomamos a estrada e fomos procurar um sábio ermitão que pudesse nos aconselhar uma forma de mudarmos o devastador quadro na qual se encontra Vetorlândia.

Fiquei sabendo da existência deste sábio por intermédio de meu mestre que teve a honra de ter sido aluno dele. De tanto falar de suas sábias ideias, interessei-me e consegui convencer o mestre de buscarmos orientação para tentarmos mudar o quadro devastador que acabo de descrever.

4 Visitando o plano

Numa bela e graciosa manhã, saímos em direção a outros biomas de Vetorlândia, deixando o eixo Ox e passamos a transitar no plano.

Encontramos um vetor $\overrightarrow{AB}$, sendo $A = (3, -4)$ e $B = (-2, 3)$, que sugeriu que buscássemos outros espaços vetoriais, como, por exemplo, o espaço euclidiano do $\mathbb{R}^3$.

– Bom dia! Eu e meu mestre saímos do distrito Ox para buscarmos ajuda. Não sei se estás sabendo, mas há um vírus à solta causando muitas mortes.

– Ah! Por isso vocês estão usando máscara? Mas o vetor com histórico de atleta não disse que é só uma gripezinha? Que quem pegou não precisa se vacinar? Pelo menos foi o que eu vi na TV.

– Já que tu assistes TV, tens acompanhado o número de mortes causado por esse vírus? E por favor, não acredite na sandice de que as vacinas que estão circulando causam AIDS!

– No princípio eu nem acreditava, porque o vetor governante falou que é coisa de maricas, mas agora eu estou vendo tanta gente morrer que estou começando a ficar preocupado.

– Pois é! Temos que fazer alguma coisa. Por isso eu e meu mestre estamos procurando o sábio ermitão conhecido como Bacaiau. Por acaso sabes onde podemos encontrá-lo? Ouvi dizer que ele sabe de muitas coisas, que é um sábio, que estudou na University of Nottingham...

– Sei não, Seu Moço! Vocês já pensaram em ir para fora do plano?

– Hãããããã!!! Como assim fora do plano?

– É, estou falando para vocês irem no $\mathbb{R}^3$. Lá, possivelmente, vocês encontraram quem possa os ajudar.

Estupefato perguntei-lhe:

– Como assim $\mathbb{R}^3$? Eu só conheço o $\mathbb{R}^2$! Só fui apresentado à dimensão 2. Existe outra dimensão?

Olhando meu mestre nos olhos, que esboçava um singelo sorriso de canto de boca, o vetor $\overrightarrow{AB}$ respondeu-me:

– Sim, meu jovem. Existem outras dimensões, existem outros biomas e espaços euclidianos de n dimensões, o $\mathbb{R}^n$. E existem outros espaços vetoriais com objetos que também se chamam vetor e não possuem uma representação geométrica como a define ....

– ... segmento orientado com módulo, direção e sentido.

– Isso, meu caro!

Surpreso e bem confuso indaguei:

– Como assim? Eu sei que vetor tem módulo, direção e sentido e é representado por um segmento de reta orientado. Ou será que estou enganado?

Ainda esboçando um sorriso sutil de canto de boca, meu mestre interveio:

– Parafraseando o filósofo Max Stirner, que viveu no final do século XIX, digo-te que: "o saber tem que morrer para renascer na forma de vontade" ... E se eu te disser que o conjunto das matrizes quadradas de ordem 2, por exemplo, seguido das operações de adição e de multiplicação por um escalar, constitui-se como um outro bioma, um espaço vetorial, na qual os objetos desse conjunto denominamos de vetores? Ou seja, estou indagando se uma matriz quadrada de ordem 2 pode ser um vetor?

Com os olhos saltando à cara, de forma debochada o retruquei:

– Mestre, eu acho que o senhor usou erva estragada! O senhor não pegou muito sol na extremidade? Por mais que eu me esforce em tentar identificar uma relação de matriz com módulo, direção, sentido e segmento de reta orientado não consigo vislumbrar essa façanha! Cara! Onde estaria o módulo, a direção e o sentido de uma matriz?

Fazendo sua típica cara de paisagem ele me respondeu:

– Dar-te-ei a oportunidade de pensar a respeito. Daqui vamos visitar o espaço tridimensional e depois iremos em direção ao espaço vetorial das matrizes. Até lá, como faziam os mestres da escola pitagórica, com seus discípulos esotéricos, oportunizar-te-ei o silêncio para refletires a respeito, pois a dúvida, meu caro, ajudar-te-á a produzir novos significados a respeito do assunto. Porém, o que posso te dizer no momento é que a ideia de que vetor possui módulo, direção e sentido é uma ideia básica, uma representação elementar que caracteriza um tipo particular de vetor. Nessa representação elementar, os vetores estão associados a grandezas que necessitam indicar distância – daí o módulo –, direção e sentido para serem especificadas. É o caso do deslocamento de uma partícula, da velocidade, aceleração, quando existe e de uma certa força. Nesse ínterim, um vetor nós representamos geometricamente por uma seta, com comprimento proporcional ao seu módulo, mas que é algo intuitivo.

– Mas só mais uma pergunta então, mestre: Como vamos sair do plano para esse tal de espaço tridimensional, ou como disse o companheiro lá atrás, o tal de $\mathbb{R}^3$? Há algum portal, um umbral, por acaso?

– Já que você gosta tanto de vetor geométrico como aquele ser ignóbil, então vou te explicar a partir do teu próprio entendimento a respeito desse objeto vetor...

– [Imitando os trejeitos de fala da noiva do Aristides] ... *mas pelo menos não tenho aquele perfil de atleta, não* *defendo que a Terra seja plana e não pratico rachadinha! Taoquei?*

– Tudo bem, meu jovem! Vejamos então: suponhamos que ao invés de uma dupla arranjada de valores, um par ordenado, tenhamos um terno, ou seja, três valores arranjados, de forma que o terceiro valor seja zero. Assim, ao invés de $u = (u_1, u_2)$ *e* $v = (v_1, v_2)$, *passamos considerar* $u = (u_1, u_2, 0)$ *e* $v = (v_1, v_2, 0)$. *Agora me diga de maneira bem prática o que tu endentes por um par ordenado* (u_1, u_2)*?*

– Ah, penso que u_1 *significa andar para esquerda ou para direita, dependendo do sinal e* u_2 *significa andar para frente e para trás. Para frente se for positivo e para trás se for negativo, por exemplo. Podemos convencionar assim?*

– Ótimo! Mantendo a mesma linha de raciocínio que empregaste para $u = (u_1, u_2)$, *o que seria então, de forma bem prática,* $u = (u_1, u_2, u_3)$*?*

– Se u_1 *é andar para esquerda ou para direita e* u_2 *é andar para frente e para trás, então* u_3 *seria andar para cima e para baixo?*

– Perfeito, meu camarada!

– Então quer dizer que no espaço tridimensional eu posso sair do chão, como se estivesse voando?

– Pode sim, aliás essa é a ideia para aumentar nosso espectro. Há algo que vai além de comprimento e largura. Aliás, teu amado vetor que por ocasião reside no planalto só enxerga uma dimensão, para ele só existe comprimento. Ele só anda para frente – pouco – e para trás – bastante! Mudar do plano, do $\mathbb{R}^2$, *para o espaço tridimensional,* $\mathbb{R}^3$, *seria como deixar de*

brincar com carrinho de controle remoto e passar a brincar com drone.

– Nossa! Então quer dizer que não tentar enxergar uma terceira dimensão é agir que nem o governante de Vetorlândia?

– De certa forma podemos usar essa metáfora. Mas voltemos à ideia dos ternos ordenados. Eu te sugeri pensarmos em um determinado vetor $u = (u_1, u_2, 0)$ *e num outro vetor* $v = (v_1, v_2, 0)$. *Usando a mesma metáfora que adotaste, o que vem a ser* $u = (u_1, u_2, 0)$*?*

– Ele anda ou para esquerda ou para a direita e anda ou para frente ou para trás.

– E o que significa o zero na terceira casa?

– Ah! Significa que ele é igual a um carrinho ... não é drone ... Ele não voa!

– Perfeito! Então posso dizer que por não voar, como o drone, ele não pode subir, nem descer, concorda?

– Por isso tem zero na terceira casa! Ele não sai do chão!

– Bem observado! Agora, jovem mancebo, vamos pensar que nosso objeto é o drone. O que significa eu dizer que seu deslocamento é $u = (u_1, 0, 0)$*?*

– Ah! Ele é igual àquele cara que critica todo mundo, mas na hora que o bicho pega e foge para Paris: ele anda da esquerda para a direita, mas não vai nem para frente, nem para trás e também não sai do chão.

– Supimpa! Agora, jovem mancebo, vamos pensar que nosso objeto é o drone. O que significa eu dizer que seu deslocamento é $u = (0, u_2, 0)$*?*

– Esse é aquele ser terraplanista e eugenista, pois não vai para a esquerda nem para a direita, não sobe nem

desce e só anda para frente e para trás e acaba dando voz para o centrão.

– Gostei da metáfora! E o que seria um drone com deslocamento $u = (0, 0, u_3)$*?*

– Significa que ele sobe e desce, mas não vai para frente nem para trás, como certo astronauta brasileiro.

– Então, nesses três casos nós temos que $u = (u_1, 0, 0)$ *é um vetor que encontra-se em Ox ou eixo das abscissas;* $v = (0, v_2, 0)$ *é um vetor que encontra-se sobre o eixo Oy ou eixo das ordenadas;* $w = (0, 0, w_3)$ *é um vetor que encontra-se sobre um eixo que designaremos de eixo das cotas ou Oz. E aí eu te pergunto: qual o vetor da base canônica em relação ao eixo Ox?*

– Se for similar ao $\mathbb{R}^2$ *então será o* $\vec{\imath}$ *que acho que vai ser o* $(1\ 0, 0)$.

– Isso! E o vetor da base canônica em relação ao eixo Oy?

– Nessa linha de raciocínio vai ser o $\vec{\jmath} = (0, 1, 0)$.

– Bacana! E o vetor da base canônica em relação ao eixo Oz?

– Ah! Vai ser um vetor, que ainda não sei o nome, que é $(0, 0, 1)$.

– Perfeito! O chamaremos de $\vec{k} = (0, 0, 1)$. *E assim como no* $\mathbb{R}^2$*, todos os vetores do espaço tridimensional podem ser escritos como uma combinação linear dos vetores da base canônica. Ou seja, um vetor* $u = (u_1, u_2, u_3)$ *do* $\mathbb{R}^3$*pode ser escrito como* $u = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath} + u_3\vec{k}$*. E por mais que o ser das trevas tenha falado que lugar de vetor unitário é na base, no sentindo*

eugenista, no fundo ele, dessa vez, não falou besteira, tamanha a importância da base canônica.

É muito comum vermos textos que abordam operações com vetores, principalmente no que se refere às formas de produto, apresentarem de maneira pragmática as respectivas definições para produto escalar, produto vetorial e produto misto, como se fossem leis divinas ou homilias. Usualmente esses textos não mostram nenhuma referência às razões que levaram a essas definições. Particularmente, penso que esse recurso maquia uma grande lacuna, pois induz o estudante a pensar que a natureza (*a física*) *justifica as definições.*

Tirando algo como um pergaminho do bornal, o mestre me entrega um papel meio amarrotado, em forma de canudo, para eu ler.

– Dê uma olhada nisso. Veja o que pensas a respeito.

Abrindo o rolo que mais parecia um antigo pergaminho, devido ao estado do papel, vi que se tratava de um artigo e apesar do estado de conservação, mal dava para ler algo como:

Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 31, n. 2, 2305 (2009)
www.sbfisica.org.br

O título do trabalho estava mais legível e dizia:

Sobre as origens das definições dos produtos escalar e vetorial
(*On the origins of the scalar and vectorial product definitions*)
M.J. Menon
Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, SP, Brasil
Recebido em 11/11/2008; revisado em 29/1/2009; aceito em 10/3/2009; publicado em 26/6/2009

Mas tenho que confessar que fixei minha leitura a uma parte que estava realçada em um tom amarelo ovo. Comecei a ler murmurando, mas logo fui interrompido pelo mestre que me pediu que lesse em voz alta:

– Huuum! "Porém, no caso do produto vetorial, o resultado é um vetor normal aos dois fatores e, pior ainda, seu sentido é convencionado pela "regra da mão direita". Isso não é nada intuitivo e não sendo explicado ou justificado, permanece uma incógnita com a qual os alunos, infelizmente, acabam se acostumando, assim como com algumas grandezas "estranhas", como vetores deslocamento angular (infinitesimal), velocidade angular, momento angular, torque e campo magnético. É claro que a abordagem acima discutida, padrão nos textos didáticos, não pode ser criticada

quanto à sua estratégia prática ou pragmática: dá-se uma definição e passa-se ao estudo das consequências formais. Porém é certo que há uma lacuna pedagógica, algo que o aluno não entende e não tem tempo para pensar, devido à sequência das matérias e isso envolve não só o produto em si, mas, principalmente, grandezas físicas tão importantes como as acima referidas.

Afinal, de onde vem essa definição tão específica e tão útil na prática? Por que a definição é essa e não outra? Tudo isso tem um fundamento matemático e/ou um significado mais amplo? O produto vetorial tem algo a ver com o escalar? Não é possível unificá-los? É possível generalizá-los para outras dimensões?" (MENON, 2009, p. 2305-2).

E antes mesmo que eu viesse a esboçar alguma pergunta, fui invadido com uma chuva de mais perguntas:

– Então, meu jovem, o que pensas a esse respeito? Será que uma aula pode ser repleta de generalizações ou o professor deve esmiuçar todos os detalhes, sem oportunizar o estudante de procurar obter mais informações a respeito do tem abordado?

– Eu acho que seria importante o professor trazer generalizações para pensarmos, mas também é muito importante que ele retome a questão. Por exemplo, mesmo que pragmaticamente, podes me dizer qual é a definição de produto vetorial então?

– Se ao longo de nossa jornada prometeres pensar a respeito, posso sim.

– Então qual a definição para produto vetorial?

– Primeiramente, para falarmos de produto vetorial, o espaço bidimensional não nos basta, pois assim como o produto escalar resulta em um escalar um número, um produto vetorial resulta em um vetor, mas não um vetor qualquer e sim um que seja ortogonal aos dois vetores dados. Por exemplo, se temos dois vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$ *e* $v = (v_1, v_2, v_3)$*, então o produto vetorial representamos por* $u \times v$ *de tal forma que* $u \times v$ *seja um vetor representado pelo determinante da matriz formada da seguinte maneira: na primeira linha escrevemos os vetores da base canônica* $\left(\underset{i}{\rightarrow}, \underset{j}{\rightarrow}, \underset{k}{\rightarrow}\right)$*; na segunda linha, escrevemos os componentes do vetor u* $(u_1,\ u_2,\ u_3\ )$*; na terceira colocamos os componentes do vetor v* $(v_1,\ v_2,\ v_3\ )$*.*

Com uma varinha arrumada a partir de um galho encontrado no meio do caminho, o mestre desenha no chão arenoso:

– Assim, ó:

$$u \times v = \begin{vmatrix} \underset{i}{\rightarrow} & \underset{j}{\rightarrow} & \underset{k}{\rightarrow} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

E esse determinante resultará na seguinte expressão [*e mais uma vez desenha no chão*]:

$$u \times v = (u_2\, v_3 - u_3\, v_2) \underset{i}{\rightarrow} + (v_1 u_3 - v_3 u_1) \underset{j}{\rightarrow} + (u_1\, v_2 - u_2 v_1) \underset{k}{\rightarrow}$$

– Mas mestre, de onde e quando surgiu essa ideia?

– Como a estrada é longa, vamos aproveitar para fazermos uma longa viagem no tempo.

Após sorver um bom gole de água de seu cantil, o mestre sugere que eu faça o mesmo e então começa sua narrativa já a caminho do espaço tridimensional.

5 Visitando o espaço tridimensional

Ansioso para ouvir sua história, acabei me esquecendo da longa distância que percorríamos. A estrada era cheia de aclives e declives, com vários entroncamentos à esquerda e à direita ... também com muitos desvios à frente, mas isso não me tirava atenção do que o mestre narrava.

– Para falarmos de vetor, temos que visitar a história da matemática e examinarmos um pouco da história dos números complexos e alguns antepassados nossos.

– Ao contrário do que possa imaginar, não foram as equações quadráticas, com discriminante negativo ($\sqrt{b^2 - 4ac} < 0$) *que motivaram o estudo dos números complexos, até porque, eles* ***não*** *foram inicialmente aceitos como números, mas como recursos algébricos e não havia sentido nem significado geométrico para justificar que existisse uma raiz quadrada de um número negativo.*

– Penso que foram as equações cúbicas estudadas pelos italianos Cardano [figura 2], *em Ars Magna* (*1545*) [figura 1] *e Bombelli* [figura 4], *em L'Algebra (1572)* [figura 3], *que motivaram a utilização desses ditos*

“recursos algébricos”, que hoje denominamos números complexos.

Figura 1 - *Ars Magna* de Cardano

(1545)

Fonte: Material de aula dos autores (2021).

Figura 2 - Gerolamo Cardamo

(1501-1576)

Fonte: Material de aula dos autores (2021).

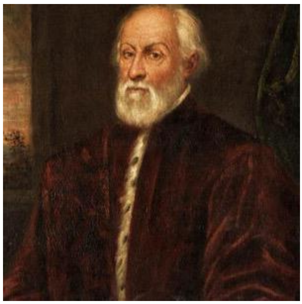
Figura 3 – *L’Algebra* de Bombelli

(1572)

Fonte: Material de aula dos autores (2021).

Figura 4 - Rafael Bombelli

(c.a. 1526-1572)



Fonte: Material de aula dos autores (2021).

– Um dos problemas enfrentados por Bombelli e Cardano foi o de produzir significado para a seguinte questão: Qual o número que elevado ao quadrado é

igual a -1*? Tanto que, em Ars Magna, Cardano depara-se com o seguinte problema numérico: Divida 10 em duas partes cujo produto seja 40? Hoje, representamos simbolicamente essa expressão por* $x \cdot (10 - x) = 40$ *e sabemos que os números que satisfazem a condição apresentada no problema são* $5 + \sqrt{-15}$ *e* $5 - \sqrt{-15}$. *Só que na época não se produzia significado para coisas do tipo* $x = a + b\sqrt{-1}$ ...

– ... *Mas o senhor não disse que eles se deparavam com problemas relacionados com raízes de equações cúbicas?*

– *Sim, disse, mas antes deixe-me contextualizar algo. Procurar resolver equações cúbicas, não tem início no século XVI. Antes de Bombelli e Cardano, o matemático chinês Wang Xiaotong, ou Hs'iao-t'ung* [figura 6], *que viveu entre 580 e 640 DEC., em sua obra Jigu Suanjin* (*Continuação da Matemática Antiga* – 缉 古 算 经) (*c.a. 626*) [figura 5], *estabeleceu e resolveu 25 equações cúbicas da forma* $x^3 + px^2 + qx = N$, *junto com 2 biquadráticas do tipo* $x^4 + px + q = 0$. *O persa Omar Khayyãm* (*1048-1113*) [figura 7] *também resolvera equações pelo uso das curvas cônicas de Apolônio* [figura 8], *no século XI e previra uma futura solução das mesmas por métodos algébricos.*

Figura 5 – *Jigu Suanjin* (缉 古 算 经) (*c.a. 626*)

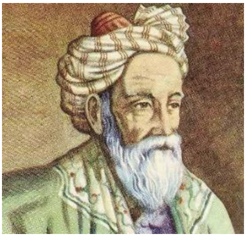
緝古算經攷注卷上
唐通直郎太史丞臣王孝通撰并注
榮祿大夫兵部左侍郎鍾祥李潢述
南豐劉衡校
第一術
假令天正十一月朔夜半日在斗十度七百分度之
四百八十以章歲為母朔月行定分九千朔日定小
餘一萬日法二萬章歲七百亦名行分也
今不取加時度問天正朔夜半之時月在
何處

Fonte: Material de aula dos autores (2021).

Figura 6 - *Wang ou Hs'iao-t'ung* (*580-640 DEC.*)

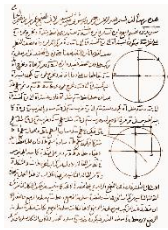
Fonte: Material de aula dos autores (2021).

Figura 7 – *Omar Khayyãm* (*1048-1113*)



Fonte: Material de aula dos autores (2021).

Figura 8 – *Resoluções de equações utilizando cônicas*



Fonte: Material de aula dos autores (2021).

– Já no ocidente, Scipione del Ferro (*1465-1526*) *desenvolveu um método para resolver equações cúbicas reduzidas* $\left(x^3 + cx = d\right)$ *que tratavam de tentar responder a questões como "Um cubo de coisas acrescido de parte dessas coisas é igual a números". Essa solução teria sido passada por Antonio Maria Fior, um estudante de del Ferro, a Gerolamo Cardamo* (*1501-1576*) *que a publicou em sua obra-prima matemática "Ars Magna", mostrando sua aplicação a equações cúbicas gerais.*

– Acontece que del Ferro estabelecera espaços comunicativos com Niccolò de Brescia – Tartaglia (*1499-1557*)*, que veio a desenvolver um método para resolver* $x^3 + cx = d$, *cujo propósito consiste em encontrar dois números* u *e* v *que satisfaçam* $u - v = d$ *e* $u \cdot v = \left(\frac{c}{3}\right)^3$ *e depois escrever* $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$.

– Bombelli, sabendo da desavença gerada entre Cardano e Tartaglia passou a se interessar por resolver equações cúbicas e pelos métodos adotados para resolvê-las. Foi quando se deparou com a resolução de uma equação, que nos dias de hoje, representaríamos por $x^3 = 15x + 4$. *Em sua solução, Bombelli encontrou* 4 *e* $-2 \pm \sqrt{3}$. *Porém, ao usar o método proposto por Tartaglia, que fora surrupiado por Cardano, deparou-se com o seguinte resultado:* $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

– Por isso podemos afirmar que foram as equações cúbicas estudadas pelos italianos Cardano, Tartaglia e Bombelli que motivaram a utilização dos números complexos. Porém, uma dificuldade na aplicação de seus métodos à resolução de uma equação cúbica, reside no fato de ter aparecido nessas resoluções, coisas do tipo $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ *e* $5 \pm \sqrt{-15}$, *ou seja, algo como* $x = a + b\sqrt{-1}$, *uma raiz quadrada de número negativo. Aliás, o símbolo* $\sqrt{-1}$ *não fora utilizado nem por Bombelli, nem por Tartáglia e nem por Cardano. Foi Albert Girard* (*1595-1632*) *que em 1629, escreveu Invention nouvelle en l'algèbre, demonstrando que as equações podiam ter raízes negativas e imaginárias e nessa obra Girard introduziu o símbolo* $\sqrt{-1}$ *para a raiz quadrada de -1 e, por sua vez,* $\sqrt{-1}$ *passou a ser representado pela*

letra ***i*** *a partir de 1777, por Leonhard Eüler* (*1707-1783*).

– Então foi Eüler ou Girard que adotou a representação a + bi para números complexos?

– Depois de Girard ter cunhado o símbolo $\sqrt{-1}$, *René Descartes* (*1596-1650*), *em 1637, na obra, La Géométrie, introduziu a ideia de parte real* (*a*) *e parte imaginária* (*b*) *para* $a + b\sqrt{-1}$, *mas a expressão "números complexos" foi usada pela primeira vez por Gauss em 1831. Foi Gauss que definiu então os números complexos na forma a + bi, onde a e b são números reais e* $i^2 = -1$.

– Mas foi Willian Rowan Hamilton (*1805-1865*) *que definiu os complexos como o conjunto dos pares ordenados* (*vetores*) (*a, b*), *onde a e b são números reais, e associou a multiplicação* (*a + bi*) (*c + di*) = (*ac – bd*) + (*ad + bc*) *i a uma operação envolvendo a rotação de vetores em torno da origem. Também aferiu que multiplicar por* ***i*** *envolve uma rotação de 90° no sentido anti-horário, multiplicar por* i^2 *envolve uma rotação de 180° no sentido anti-horário, multiplicar por* i^3 *envolve uma rotação de 270° no sentido anti-horário etc. Foram os resultados estabelecidos por Hamilton, no contexto da álgebra de quatérnios e certas adaptações realizadas por Josiah Willard Gibbs* (1839-1903) *e por Oliver Heavisede* (1850-1925) *que levaram ao ramo da matemática que hoje denomina-se álgebra vetorial.*

– Mas mestre, o que são os quatérnios?

– Basicamente são generalizações de números complexos para quatro dimensões. Tanto Hamilton quanto Gauss, independentemente, passaram a tratar os números do tipo a + bi como pares ordenados (*a, b*) *de*

número reais Tal representação facilitou a compreensão de igualdade, adição e multiplicação de números complexos.

Fizemos mais uma parada para o mestre desenhar no chão.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \; e \; b = d$$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

– Na prática, meu jovem, as operações envolvendo pares ordenados são mais simples e a unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$ está implícita.

– Como implícita?

– Veja que $(a, b) = a + bi$, sendo "a" a parte real e "b" a parte imaginária. Que $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ é equivalente a $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$, sendo $(a + c)$ a parte real e $(b + d)$ a parte imaginária. E ainda, que $(a, b) \cdot (c, d) = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bci$, na qual $ac-bd$ é a parte real e $ad+bc$ a parte imaginária.

– A relevância dessa representação de pares ordenados nos permite observar a propriedade do fechamento para adição e multiplicação de números complexos, ou seja, adicionar e multiplicar complexos gera novos complexos com a mesma estrutura, parte real e parte imaginária formada por números reais. Se pensarmos que (a, b) e (c, d) são vetores, então estou falando de operações entre vetores que resulta em vetores.

– Mas como um par (a, b) *pode ser entendido como um vetor?*

– Caspar Wessel (*1745-1818*) *e Jean-Robert Argand* (*1768-1822*)*, independentemente e motivados pela geometria e topografia, representaram geometricamente, de maneira intuitiva e prática, os complexos como pontos* (*e como vetores*) *num plano cartesiano. Sendo que, Wessel, desenvolveu em 1797 uma representação gráfica para os números complexos, publicada em 1798 nas atas da Academia dinamarquesa, enquanto Argand, publica em Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* (*1806*) *e apresenta os números complexos como entidades geométricas, colocados como pontos no plano com o eixo horizontal construído como* $i = \sqrt{-1}$*, por sua vez como uma rotação de 90° no sentido anti-horário. Essa publicação de Argand contribuiu decisivamente para a aceitação dos complexos não mais como artifício algébrico, mas como números, como conceitos matemáticos legítimos; o que se dá por meio da representação geométrica destes números, que foi ampliado por Gauss. Essa representação assemelha-se aos vetores do* $\mathbb{R}^2$*, que tanto veneras, meu prezado, embora as definições de multiplicação no* $\mathbb{R}^2$ (*álgebra vetorial*) *e de complexos sejam distintas, porque no* $\mathbb{R}^2$ *temos um produto escalar que resulta em um número e no produto de complexos temos um complexo, ou seja, um vetor.*

– Mas onde entra o $\mathbb{R}^3$ *nisso?*

– O nome Marcio José Menon te lembras de algo?

– Sim, do pergaminho que o senhor me deu para ler sobre as origens das definições dos produtos escalar e vetorial.

– Isso mesmo, lá, Menon aponta que há similaridades geométricas entre números complexos e vetores no plano, mas também aponta como a ausência de correlações entre os complexos e os vetores no $\mathbb{R}^3$ *acabou por motivar Hamilton a estabelecer generalizações desses números em 3 dimensões.*

– Nesse texto que te entreguei para ler, Menon chama atenção de que uma ideia imediata, e ao mesmo tempo abstrata, refere-se ao fato de pensar que haja uma segunda unidade imaginária, "j", por exemplo. Dessa forma, analogamente ao que acontece com o nosso "i", podemos dizer que $j \cdot j = -1$ *e daí é possível então pensarmos em tripletos de números reais associados a essas unidades imaginárias. Assim como podemos escrever* $w = x + iy$ *ou* $z = (x, y)$*, também podemos pensar em um número* $t = x + iy + jz$ *ou* $t = (x, y, z)$*.*

– Mas mestre, será isso funciona?

– Essa foi a pergunta que motivou Hamilton, em meados do século XIX, a buscar generalizações através desses tripletos. Acontece que ele se deparou com dificuldades em estabelecer regras tais como as operações que utilizou para os pares ordenados. Ele observou que no caso dos tripletos não há como garantir a propriedade de fechamento em relação à multiplicação, o que o levou a se deparar com uma álgebra que não podia ser generalizada em outras dimensões.

– Então ele desistiu?

– Não. Ele se debruçou sobre esse problema por 15 anos ...

– ... 15 anos? Mas isso é muito tempo!

– Isso é relativo, pois, por exemplo, para mim, 4 anos é uma eternidade se pensarmos no tempo de duração de um governo sofamanocrata, cleptocrta, plutocrata e eugenista que renega a ciência, sucateia a educação em detrimento a investimento bélico, fomenta destruição de ambientes naturais e lambe as botas do império capitalista.

– É, o senhor tem razão. O tempo é mesmo relativo! ... Mas falávamos de Hamilton.

– Pois então, para você ver que discursos se constroem e se modificam com o tempo e, como diria Nietzsche, conhecimento se constrói na ordem da batalha. Ciência é fruto de trabalho, de labuta, de suor. Não adianta se autocondecorar e se autoproclamar grão-mestre da ordem do mérito científico. Ao longo desses 15 anos, Hamilton identificou que a introdução de uma terceira unidade imaginária, proporcionaria, a partir de certas propriedades, a possibilidade de se manter o fechamento em relação à multiplicação. A esse novo objeto, com quatro componentes, sendo 3 unidades imaginárias, Hamilton, em 1843 denominou de quatérnios e passou a representá-los por $\boldsymbol{q = w + ix + jy + kz}$ *em que* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ *e* $\boldsymbol{k}$ *são as três unidades imaginárias no trabalho desenvolvido por Hamilton e* $\boldsymbol{w}$ *foi denominada de componente real ou parte escalar do quatérnio e representada por* $\boldsymbol{E(q) = w}$*.*

Já a componente com as unidades imaginárias, Hamilton denominou de parte vetorial do quatérnio $\boldsymbol{V(q) = ix + jy + kz}$ *ou quatérnio puro. Dessa forma ficou mais simples de imaginar* $\boldsymbol{q = E(q) + V(q)}$*.*

– Sem dúvida é bem mais simpático falar que $q = E(q) + V(q)$ *do que dizer que* $= w + ix + jy + kz$*.*

– Na álgebra dos complexos o cerne está na unidade criada por Eüler em que $i = \sqrt{-1}$ *nos leva à generalização de que* $i^2 = -1$*. Essa era a pergunta que os matemáticos se faziam desde que Cardano publicou em 1545 seu Ars Magna e procurava responder à questão: divida 10 em duas partes de modo que uma pela outra resulte em 40.*

Confesso que fiquei confuso tentando imaginar como representar em linguagem simbólica o problema: divida 10 em duas partes de modo que uma pela outra dê 40, mas com o sorriso de canto de boca, fui interrompido em meus devaneios quando o mestre, em mais uma parada, resolve desenhar no chão.

– Assim, ó: Tenho 10 e se dividi-lo em duas partes estas serão x *e* $10 - x$*, pode ser?*

– Então, o problema diz: ... de modo que uma pela outra dê 40. Então penso que possa ser assim: $x \cdot (10 - x) = 40$.

– Agora resolva.

Rapidamente, peguei um graveto e fui logo escrevendo no chão de terra:

$$x \cdot (10 - x) = 40 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 40 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 160}}{2} = 5 \pm \sqrt{-15}$$

– Pronto, mestre!

– Que pode ser escrito como $x = 5 \pm i\sqrt{15}$. *Então, voltando à nossa questão, vejamos: o que Hamilton fez foi considerar as seguintes regras a partir da ideia de que* $i^2 = -1$.

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

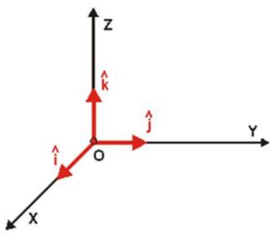
Agora se considerarmos que multiplicar por i é efetuar uma rotação de 90° no sentido anti-horário e multiplicar por $-i$ *é efetuar uma rotação de 90° no sentido horário, então os produtos*

$$i \times j = k = -j \times i$$

$$j \times k = i = -k \times j$$

$$k \times i = j = -i \times k$$

representam que as unidades imaginárias i, j *e* k *são regidas pelas mesmas propriedades e são vetores unitários, perpendiculares entre si. Isto quer dizer que o produto de dois desses vetores gera o terceiro perpendicular a ambos. Assim:*



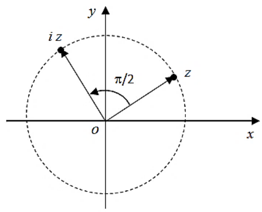
– Essa relação com o $\mathbb{R}^3$ *foi invenção do Hamilton?*

– Não. O efeito geométrico de multiplicar um número complexo z por i e daí provar que $i \cdot z$ *é uma rotação*

de 90º no sentido anti-horário foi Argand, em 1806, mas acho que já falei disso anteriormente.

– Ah, é mesmo! Ele publicou Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, quando apresentou os números complexos como entidades geométricas e mostrou, como pontos no plano com o eixo horizontal construído como $i = \sqrt{-1}$, como sendo uma rotação de 90° no sentido anti-horário.

Para mostrar que estava atento, fui logo desenhando no chão



$z = a + bi = (a, b)$

$iz = i(a + bi) = ai + bi^2 = ai + b(-1) = ai - b = -b + ai = (-b, a) = w$

– É isso, mestre?

– Perfeito!

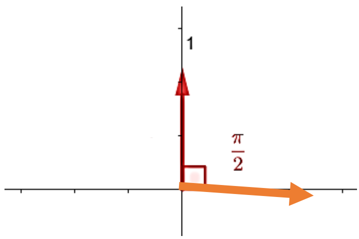
– Mas como o Hamilton trouxe essa ideia de rotação do plano?

– Para te responder voltarei ao nosso profícuo amigo Eüler. Em 1748, ele formulou a identidade que levou seu nome, na qual $e^{i\theta} = cos\theta + i \cdot sen\theta$. Veja que se eu multiplicar os dois lados da igualdade pelo escalar módulo de z ($|z| = \rho$), então passaremos a ter a representação polar de z; seja na forma trigonométrica *ou na forma exponencial, daí podemos representar o teu* $z = a + bi$ *por* $z = \rho(cos\theta + i \cdot sen\theta)$ *ou por* $z = \rho e^{i\theta}$. *Mas me diga uma coisa: o significa para ti a forma polar?*

– Geometricamente a representação cartesiana me dá um posicionamento que permite duas leituras, uma em relação ao deslocamento horizontal e uma em relação ao deslocamento vertical. Ou como dizíamos lá atrás com a metáfora do carrinho: andar da esquerda para direita ou de frente para trás. Já as coordenadas polares me dão um deslocamento e uma direção.

– Isso mesmo! Assim, o módulo do vetor $z = (a, b)$ *ou como disseste* $z = a + bi$, *que é* ρ, *me dá o deslocamento e o argumento* θ, *me dá a direção. Agora me diga o seguinte: se tenho um vetor* $z = i$ *qual o seu deslocamento e qual o seu argumento?*

Em uma rápida parada desenhei a figura a seguir.



– Sim, mas o queres me dizer com esse esboço?

– Que o argumento $\theta = \frac{\pi}{2}$ *e o módulo ou distância é 1.*

– Então eu posso dizer que $z = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, *não posso?*

– Pode!

– Agora pense em um número complexo w ... ou um vetor w do plano, mas genérico. Como eu represento esse vetor?

– Ah, na forma algébrica ou de combinação linear ficará $w = x + iy$.

– E como fica esse vetor se eu o representar na forma polar ... mas exponencialmente?

– Huuummmm! Fica $w = \rho e^{i\theta}$*?*

– Isso! Mas agora multiplique z por w, mas exponencialmente. Como fica?

Acho que tomei gosto de escrever no chão, pois fui logo desenhando.

$$z \times w = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right) \times \left(\rho e^{i\theta}\right) = \rho e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$$

– É isso?

– Sim, mas o que significa essa expressão para ti?

– Ah, que o argumento passou a ser $\theta + \frac{\pi}{2}$ *e o módulo continuou o mesmo,* ρ.

– Ou seja, se preservou o comprimento do vetor e da direção inicial tu acrescentaste mais $1/_4$ *de volta, isso significa que efetuaste uma rotação de* $\pi/_2$ *radianos ou 90°, pois escrever um novo argumento como* $\theta + \frac{\pi}{2}$ *representa dizer que da direção inicial, tu rotacionaste 90º no sentido anti-horário.*

– Tudo bem, mas onde entra o Hamilton nessa história?

– Hamilton estabeleceu o produto de dois quatérnios analogamente ao produto de dois complexos, como fizemos agorinha e verificou que também em relação aos quatérnios cabem as propriedades associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição e daí ele trouxe essas regras que definem as unidades imaginárias dos quatérnios.

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$i \times j = k = -j \times i$$

$$j \times k = i = -k \times j$$

$$k \times i = j = -i \times k$$

O mais interessante agora é que dessas relações também é possível verificar que $i \times j \times k = -1$.

– Desculpe-me, mas essa não entendi.

– Veja só, se $i \times j = k$ *então se eu multiplicar por k dos dois lados dessa igualdade ficaremos com* $i \times j \times k = k \times k$, *mas* $k \times k = k^2$*...*

– ... e $k^2 = -1$.

– Bacana!

– Então foi a multiplicação de complexos que levou a essa ideia de rotação?

– Olha, como os quatérnios possuem unidades imaginárias i, j *e* k, *possivelmente ele pensou no efeito de rotação e daí introduziu a denominação de versor, ou seja,* i, j *e* k *são vetores unitários e perpendiculares entre si. Assim, para Hamilton uma unidade imaginária passou a um ser versor. Porém, Josiah Willard Gibbs (1839-1903) e Oliver Heaviside (1850-1925) interpretaram de maneira bem diferente, pois eles entendiam um quatérnio puro como um elemento do*

espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$*e, portanto, trazem a denominação de vetor e não parte vetorial do quatérnio, como propunha Hamilton. E mais ainda, para Gibbs e Heaviside as unidades imaginárias eram interpretadas como vetores unitários, que depois passaram a receber a notação de Hamilton de versores.*

– Que loucura, mestre!

– Prefiro entender não como loucura, mas como beleza, pois os quatérnios além de mais elegantes, também são bem mais eficientes na caracterização de rotações do que as atrizes de rotação. Olha que coisa linda: eles possibilitam que se represente todas as orientações espaciais com um vetor do espaço.

– Posso dizer que eles possibilitam representar todas as orientações 3D a partir de um vetor 3D?

– Penso que sim. E esses vetores denominam-se vetores de Gibbs, que por vezes são chamados de vetores de rotação.

– Mas onde entra o produto vetorial?

– Para nosso propósito, é suficiente considerarmos particularmente o caso de dois quatérnios puros, ou seja, vamos pensar que $E(q_1) = E(q_2) = 0$*, que na nomenclatura de Hamilton seria:*

$$q_1 = V(q_1) = ix_1 + jy_1 + kz_1$$

$$e$$

$$q_2 = V(q_2) = ix_2 + jy_2 + kz_2$$

Agora, se multiplicarmos, assim como fizemos com os complexos, ou seja, aplicando a distributividade da multiplicação em relação à adição teremos:

$$q_1 \times q_2 = (ix_1 \cdot ix_2 + ix_1 \cdot jy_2 + ix_1 \cdot kz_2) \\ + (jy_1 \cdot ix_2 + jy_1 \cdot jy_2 + jy_1 \cdot kz_2) \\ + (kz_1 \cdot ix_2 + kz_1 \cdot jy_2 + kz_1 \cdot kz_2)$$

Só que isso, pelas relações que discutimos a respeito do produto das unidades imaginárias, nos leva a:

$$q_1 \times q_2 = (i^2 x_1 x_2 + ij x_1 y_2 + ik x_1 z_2) \\ + (ji y_1 x_2 + j^2 y_1 y_2 + jk y_1 z_2) \\ + (ki z_1 x_2 + kj z_1 y_2 + k^2 z_1 z_2)$$

Porém, meu jovem ...

– ... $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ *e assim posso escrever que*

$$q_1 \times q_2 = (-x_1 x_2 + ij x_1 y_2 + ik x_1 z_2) \\ + (ji y_1 x_2 - y_1 y_2 + jk y_1 z_2) \\ + (ki z_1 x_2 + kj z_1 y_2 - z_1 z_2)$$

– Só isso?

– Não, tem mais! Nós já sabemos que $i \times j = k = -j \times i$*, que* $j \times k = i = -k \times j$ *e que* $k \times i = j = -i \times k$*, assim, podemos escrever:*

$$q_1 \times q_2 = -(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + i(y_1 z_2 - z_1 y_2) \\ + j(z_1 x_2 - x_1 z_2) + k(x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

E o interessante é que esse resultado mostra o fechamento, não é mesmo, mestre? Olha só, o produto de dois quatérnios – mesmo que imaginários puros – resulta em um quatérnio.

– Bem observado! O produto de dois quatérnios puros – só parte vetorial – resulta em um quatérnio com uma estrutura geral; isto é, ele possui uma parte escalar $E(q_1 \times q_2) = -(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)$ *e uma parte vetorial* $V(q_1 \times q_2) = i(y_1 z_2 - z_1 y_2) + j(z_1 x_2 -$ *x1z2+k(x1y2−y1x2).*

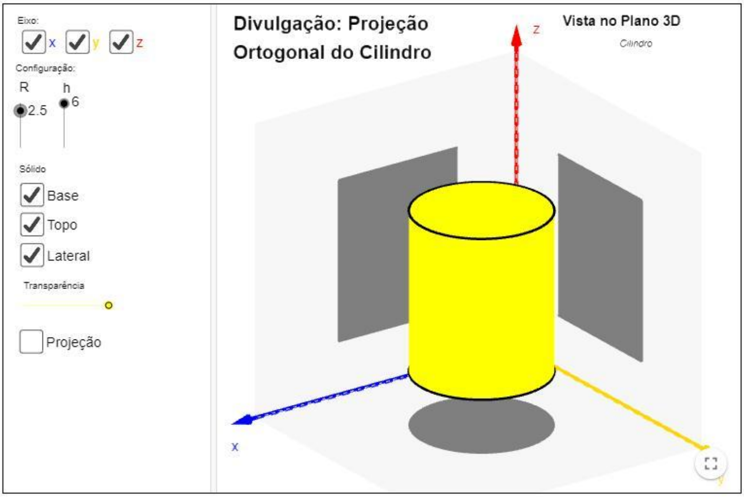
Agora, se bem observarmos, a estrutura da parte real $E(q_1 \times q_2)$ *da multiplicação de quatérnios, que é um* *número real, podemos observar que esse resultado é simétrico ao que hoje definimos como produto escalar de dois vetores do $\mathbb{R}^3$. Já a observância da parte imaginária $V(q_1 \times q_2)$, que é um vetor, se analisarmos a sua estrutura, veremos que se trata do resultado do produto vetorial de dois vetores do $\mathbb{R}^3$. Eis o cerne da questão!*

Apesar de muitos questionarem certas interpretações de Hamilton, indubitavelmente que os quatérnios configuraram-se como um grande passo para o início do desenvolvimento de álgebras mais avançadas, que possibilitam importantes aplicações físicas e que impulsionaram também o desenvolvimento da álgebra vetorial ...

... Pronto, chegamos ao distrito das três dimensões!

Passou tão rápido que nem senti, mas também porque fiquei encantado de ver o distrito das 3 dimensões.

Havia retas interceptando-se fora do plano, planos paralelos, perpendiculares, ortogonais e cuja interseção davam retas ... também havia sólidos geométricos, com suas projeções em três planos (xoy, xoz e yoz) bem como nos eixos que são denominados de abscissas, ordenadas e cotas.



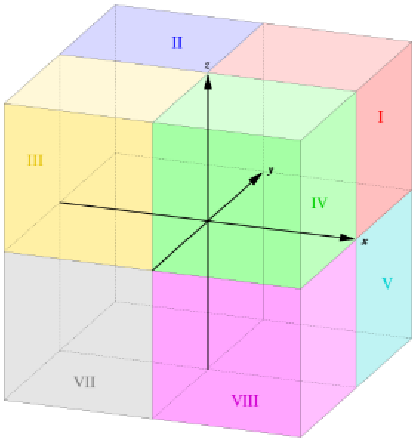
Fonte: Sirtoli (2019, p. 54).

Essas projeções nos permitem refletir a respeito de produção de significados. Dá para ver que produzir significados diferentes, operar em campos semânticos distintos, não implica em estar certo ou errado, mas sim em parar para examinar o que a pessoa diz e porque diz. Aquele é o ponto de vista da pessoa! Pelo menos naquele instante.

Veja que na figura antecedente a projeção sobre o eixo xoy é uma circunferência e sobre os eixos xoz e yoz são retângulos; e todos como sombras de um cilindro reto, de base circular.

Os vetores não estão só colados nesses planos, eles se erguem além planos e há a possibilidade de por eles passarem outros planos.

Enquanto lá no $\mathbb{R}^2$ dividimos o plano em 4 quadrantes, aqui no $\mathbb{R}^3$ eles dividem em 8 octantes.



Caminhávamos olhando tudo: o mestre, como sempre com aquela cara de paisagem e eu perplexo. De repente ouço uma voz, com um sotaque tipo "bicho-grilo":

– Ô do andar de baixo! Aí, brother, beleza? Perdidos aqui no $\mathbb{R}^3$*?*

– Estamos de passagem, é minha primeira vez aqui e estou muito admirado, Senhor plano.

– Pô, brother, pode me chamar de $z = k$.

– Rsrsrsrs ... Me desculpe, mas não consegui me conter. É um nome muito incomum, pelo menos lá no $\mathbb{R}^2$.

– Sem crise, irmãozinho, é que eu sou do tipo $cz + d = 0$.

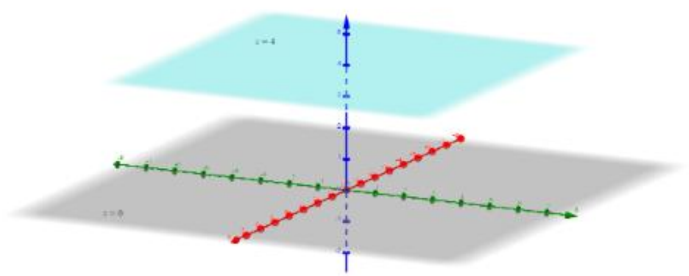
– Como assim?

– Por favor, não seja preconceituoso, escute o que o senhor $z = k$ *tem a dizer.*

– Relaxe, velhinho, o rapaz está confuso. Olha só, amiguinho: a equação geral de um plano é dada por $ax + by + cz + d = 0$. *E os coeficientes a, b e c são as componentes do vetor normal ao plano referente a essa equação. A equação é tipo uma identidade do plano.*

– Assim como as equações das retas lá no $\mathbb{R}^2$*?*

– Isso aí, garoto! Quando disse que sou do tipo $cz + d = 0$, *ou simplesmente* $z = k$ *é porque o vetor normal a mim é do tipo* $\vec{n} = (0, 0, c)$



Fonte: Sperotto e Freitas (2018, p. 42).

– Aaaahhhh! Como o vetor $\vec{k} = (0, 0, 1)$*, é isso?*

– Isso aí, brother, o $(0, 0, 1)$ *é irmãozinho do meu normal, o* $\vec{n} = (0, 0, c)$*. Eles são paralelos.*

– Então quer dizer que o senhor é um plano paralelo ao xoy?

– Matou a charada, meu camaradinha!

– Sabe, Seu $z = k$*, eu e meu mestre estamos procurando o ermitão Bacaiau, que habita uma gruta na lendária montanha da Pedra do Cafofo, para solucionar a devastadora ameaça de mortes, advindas de uma pandemia que se alastrou pelas terras de Vetorlândia, dizimando grande parte da população.*

– Pois é, brow! Tô sabendo, mas aqui no $\mathbb{R}^3$ *o pessoal tem se prevenido seguindo o protocolo sanitário. Estamos levando bem a sério o distanciamento, a higiene e o respeito para com o próximo, principalmente nos espaços públicos.*

– Já morreram mais de 600 mil. Lá no $\mathbb{R}^2$ *o pessoal não tem a mesma consciência que aqui no* $\mathbb{R}^3$*. É uma visão bem restrita, pois só enxergam comprimento e largura. Para eles não há altura. Eles dizem que é conspiração contra o governo. Que esse negócio de protocolo sanitário é discurso da esquerda.*

– Pô brow, lamentável!

– Mas o senhor sabe como podemos ir em direção à Pedra do Cafofo?

– Irmãozinho, tens que sair do $\mathbb{R}^3$ *e ir em direção ao distrito dos espaços vetoriais arbitrários. Vocês devem pegar o próximo entroncamento à esquerda. Não se esqueça, sempre à esquerda! Se andarem rápido vocês conseguem chegar lá antes do anoitecer, mas se quiserem podem ficar por aqui essa noite que vai rolar um som maneiro, aí!*

– Nós agradecemos muitíssimo, mas eu e meu discípulo deixaremos para pernoitar no distrito dos espaços vetoriais arbitrários.

– Vocês é que sabem, mas o convite continua de pé. Só posso desejar sorte a vocês. Vão na paz!

– Muito obrigado Senhor $z = k$*! Até breve!*

6 Indo além da fronteira

Por umas boas léguas discípulo e mestre caminhavam em silêncio, fato que intrigou o mestre.

– Meu jovem, por que estás tão pensativo?

– É que o senhor e o irmãozinho riponga, aquele bicho-grilo, lá do $\mathbb{R}^3$, falaram em espaço vetorial arbitrário e eu ainda não consegui produzir significado para isso.

– Vamos com calma. Façamos como Jack estripador: Vamos por partes!

– Credo, que comparação!

– Imaginemos um conjunto não vazio de objetos, de forma que estejam definidas duas operações: a adição e a multiplicação por escalar.

– Como assim, mestre? O que queres dizer com "de forma que estejam definidas duas operações: a adição e a multiplicação por escalar"?

– Bom, vamos supor que u e v sejam objetos desse conjunto, tudo bem?

– Certo, u e v estão nesse conjunto.

– Falar que a adição está definida nesse conjunto é dizer que vale a propriedade de fechamento em relação à soma; isto é, se u e v são objetos desse conjunto, então $u + v$ também é objeto do mesmo conjunto. Tudo bem?

– Tudo bem!

– Agora falar que a multiplicação por escalar está definida nesse conjunto, implica em dizer que vale o fechamento em relação à multiplicação de um objeto desse conjunto por um escalar qualquer ...

– Então o senhor quer dizer que se v está no conjunto, então $k \cdot v$ também está nesse conjunto, quando k é um escalar.

– E isso te lembra alguma coisa?

– Lembra do plano. Se dois vetores estão no plano a soma desses vetores também está no plano e o múltiplo escalar de um vetor é uma expansão ou uma contração desse vetor, mantendo a mesma direção e com o mesmo sentido, ou sentido contrário. Ah! E tem mais. Se esse vetor v está no plano, então qualquer múltiplo escalar dele, ou seja, $k \cdot v$, também está no plano. Mas e daí?

– Daí que, se certo grupo de regras for satisfeito para todos os objetos desse conjunto e para quaisquer escalares, então esses objetos serão denominados de vetores e esse conjunto de objetos, munido dessas operações bem definidas será denominado de espaço vetorial arbitrário.

– Mas que regras são essas?

– Vejamos primeiramente em relação à adição. Já havíamos falado da propriedade de fechamento, ou seja, para quaisquer u e v objetos desse conjunto, $u + v$ também é um objeto desse conjunto. Essa é a primeira regra.

– Entendi! E qual a segunda regra?

– Vale a comutatividade em relação à soma; isto é, $u + v$ e $v + u$ representam o mesmo objeto, ou seja, $u + v = v + u$.

– Beleza! E a terceira regra?

– Vale a associatividade, ou seja, se eu pegar três objetos de forma a somar o primeiro com o resultado da soma do segundo pelo terceiro objeto, isso formará o mesmo objeto fruto de eu somar o primeiro com o segundo e o resultado da soma desses dois primeiros com o terceiro. Como tu representarias isso que acabei de falar em linguagem simbólica?

Era o que eu esperava para poder voltar a escrever no chão de terra. Com minha velha varinha – que não descartei anteriormente – fui logo escrevendo.

– Assim mestre? $u + (v + w) = (u + v) + w$.

– Perfeito!

– E a quarta regra?

Foi aí que eu descobri que o mestre também adorava escrever no chão, pois ele tomou a varinha da minha mão e foi logo rabiscando.

– Nesse conjunto há um objeto que nós o chamaremos de vetor nulo, representando-o por 0 *de forma que*

$$u + 0 = 0 + u = u.$$

E isso acontece para qualquer objeto desse conjunto.

– Certo! E a quinta?

– Calma, meu jovem! Sem crise! Com menos ansiedade!

– Pô! O senhor falou que nem o "brother" do $\mathbb{R}^3$*, o* $z = k$.

– A quinta regra é a seguinte: para cada objeto u *desse conjunto, existe outro objeto, que vamos representar por* $(-u)$*, chamando-o de simétrico, de maneira que*

$$(-u) + u = u + (-u) = 0$$

Retoricamente como você falaria o que eu acabei de escrever?

Confesso que fiz alguns minutos de silêncio com a preocupação de falar bonito.

– Ah! Veja se pode ser assim: Se um objeto está no conjunto, seu simétrico também está no conjunto e eles se anulam em relação à soma, pois a soma dá vetor nulo que nós chamamos de 0*. Pode ser assim?*

– Pode sim!

– Me desculpe, mas não tem como não me empolgar. Tem mais regra?

– Essas são as regras em relação à operação de adição de objetos desse conjunto. Agora, falta as regras relativas à multiplicação por escalar, por isso usei a metáfora de usarmos a metodologia de Jack Estripador: por partes!

– Ah! O senhor já havia falado do fechamento em relação à multiplicação por escalar.

– Então diga para mim como posso tratar desse fechamento.

– Veja se pode ser assim, ó: Se k é um escalar e v é um objeto qualquer nesse conjunto, então kv também é um objeto desse conjunto. Certo?

– Isso, meu jovem!

– Tem uma sétima regra?

– Sim. Um múltiplo escalar da soma de dois objetos é a soma dos múltiplos escalares relativos a esses dois objetos. Simbolicamente, como representas essa retórica?

De varinha à mão lá fui eu para minha lousa improvisada no chão.

– Dá para o senhor repetir?

– Certamente! Eu disse que "um múltiplo escalar da soma de dois objetos é a soma dos múltiplos escalares relativos a esses dois objetos".

– Assim?

$$k \cdot (v + w) = k \cdot v + k \cdot w$$

– Isso mesmo. Preparado para a próxima regra?

– Tô, manda aí!

– O produto escalar da soma de dois escalares por um objeto, resulta na soma dos respectivos produtos escalares desse objeto. Queres que eu repita?

– Não, deixe-me tentar.

Simultaneamente, fui repetindo o que o mestre havia dito e escrevendo ao chão.

– O produto escalar da soma de dois escalares por um objeto é $(k + p) \cdot v$ *resulta na soma dos respectivos produtos escalares desse objeto e vai dar* $k \cdot v + p \cdot v$*. Então acho que fica assim:*

$$(k + p) \cdot v = k \cdot v + p \cdot v$$

– É isso, mestre?

– Sim. Vejamos como tu te sais no próximo: O múltiplo escalar de um certo múltiplo escalar de um objeto desse conjunto é um múltiplo escalar do objeto, na qual o escalar gerado é o produto desses dois escalares. E aí?

Usando a mesma técnica adotada anteriormente fui repetindo o que o mestre disse e simultaneamente desenhando.

– O múltiplo escalar de um certo múltiplo escalar de um dado objeto pode ser $k(p \cdot v)$*, que para mim pode ser chamado de múltiplo de um múltiplo escalar. Agora vamos ver a outra parte. É um múltiplo escalar do objeto ... então é alguma coisa vezes* v *... Na qual o escalar gerado é o produto desses dois escalares ... Huuummm! Veja se é assim, mestre:* $(kp) \cdot v$*.*

– Agora junta tudo.

– Aí vai ficar $k(p \cdot v) = (kp) \cdot v$*.*

– Beleza! E para terminar vamos ver a ideia de objeto neutro em relação à multiplicação por escalar. Como nós tratamos o vetor nulo em relação à adição?

– O senhor disse que esse vetor nulo, chamado de objeto 0*, me dá* $u + 0 = 0 + u = u$.

– Ou seja, a ideia é de preservar. O vetor nulo adicionado a um objeto não altera esse objeto. Então em relação à multiplicação por escalar manteremos esse princípio; isto é, quero um escalar que operado com um objeto não altera esse objeto. Como seria?

– O escalar 1*?*

– Como assim?

– O escalar 1 *multiplicado por qualquer objeto desse conjunto vai dar o próprio objeto, porque*

$$1 \cdot u = u \cdot 1 = u$$

– Perfeito! Quando esse conjunto de regras é satisfeito para quaisquer objetos, então nós temos um espaço vetorial arbitrário.

– Mas lá no $\mathbb{R}^2$ *essas regras são todas válidas e, pelo que nós vimos durante a viagem, no* $\mathbb{R}^3$ *também.*

– Sim, mas lá nossos objetos são vetores geométricos ...

– ... Sim mestre, porque eles têm módulo, direção e sentido!

– Então, esses espaços vetoriais constituídos de vetores geométricos nós designamos por espaços vetoriais euclidianos.

– E onde entra os espaços vetoriais arbitrários?

– Os objetos que designamos por vetores não necessariamente precisam ser objetos geométricos, basta que atendam às regras que nós discutimos, nas

condições que apresentamos, pertencerem a um conjunto e com as operações definidas de adição desses objetos e multiplicação dos mesmos por escalar.

– Mas de onde vem essa ideia, mestre?

– Analisando alguns compêndios de história da matemática, como, por exemplo, Roque (2014 [2012]), Eves (2008 [2004]) e Boyer (1978 [1974]), é possível verificar que, do ponto de vista histórico, quando da criação da Geometria Analítica, ao associarmos os avanços dos estudos de matrizes, sistemas de equações lineares e vetores euclidianos, chegamos às primeiras ideias que levaram ao conceito de espaços vetoriais, que a partir de Giuseppe Peano (1858-1932), passaram a ter um tratamento mais moderno e abstrato, com objetos mais gerais que aqueles que constituem o espaço euclidiano; entretanto, boa parte dessa teoria era vista como uma extensão de algumas ideias da Geometria clássica como, por exemplo, de retas, planos e seus análogos de dimensão mais alta. Esses espaços vetoriais podem ser entendidos como a noção apropriada da Álgebra Linear para lidar com sistemas de equações lineares. Assim, os espaços vetoriais, não mais dependentes de coordenadas cartesianas ou polares, passam a possibilitar então, de uma maneira abstrata, de lidar com objetos geométricos e físicos. Tais espaços podem ser generalizados de diversas maneiras, impulsionando-nos a noções mais avançadas em Geometria e em Álgebra Abstrata, na qual os vetores passam a ter uma interpretação que vai além da geométrica, tornando-se quaisquer objetos que satisfaçam os axiomas relativos às operações de adição e multiplicação por escalares em um conjunto da qual façam parte (SOUSA, 2021).

– Como assim?

– Vamos lá, mas com calma. Pegue, por exemplo, duas matrizes quadradas de ordem 2. A soma dessas matrizes dará uma matriz?

– Sim! Mas ô bicho complexo ... só podia ser mulher!

– Rapaz, deixa de machismo. A complexidade da mulher, como ser vivo, é uma riqueza. Não se esqueça que todos nós, para virmos ao mundo, dependemos delas. Todas as nossas transformações lineares podem ser expressas a partir delas – as matrizes canônicas das transformações lineares.

– Só estava brincando. Foi zoeira! Mas de que ordem são essas matrizes?

– Ah, pode ser de ordem 2! Assim ó:

$$u = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u + v = \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

– Ou seja, nós preservamos a natureza dos objetos desse conjunto. Em outras palavras, para soma de matrizes vale a propriedade de fechamento. Tudo bem?

– Tudo! Mas onde o senhor quer chegar?

– Calma, por partes! Vale a comutatividade em relação à soma de matrizes? Ou seja, $u + v$ *e* $v + u$ *representam o mesmo objeto?*

– Sim! Porque, em se tratando de matrizes, $u + v = v + u$.

Para ser sincero não gosto quando o mestre faz esse ar de mistério ... Confesso que, apesar disso, me desperta uma grande curiosidade.

– Então agora me diga: vale a associatividade na soma de matrizes?

Com minha varinha em punho fui logo para minha lousa no chão.

– Um instante, mestre ... Eu tenho que verificar se

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

quando u, v *e* w *são matrizes quadradas de ordem 2.*

$$u + (v + w) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} v_{11} + w_{11} & v_{12} + w_{12} \\ v_{21} + w_{21} & v_{22} + w_{22} \end{bmatrix} \right)$$

$$\boxed{u + (v + w) = \begin{bmatrix} u_{11} + (v_{11} + w_{11}) & u_{12} + (v_{12} + w_{12}) \\ u_{21} + (v_{21} + w_{21}) & u_{22} + (v_{22} + w_{22}) \end{bmatrix}}$$

Tá! Agora vou para o outro lado e depois comparo:

$$(u + v) + w = \left(\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} (u + v) + w \\ = \begin{bmatrix} (u_{11} + v_{11}) + w_{11} & (u_{12} + v_{12}) + w_{12} \\ (u_{21} + v_{21}) + w_{21} & (u_{22} + v_{22}) + w_{22} \end{bmatrix} \end{array}}$$

Huuummm!!! Comparando esses dois resultados dá para ver que são iguais, pois os elementos u_{ij}, v_{ij} *e* w_{ij} *são números reais e, nos reais, vale a associatividade em relação à adição.*

Para ser mais sincero ainda, pior do que o ar de mistério do mestre é quando ele faz cara de paisagem, pois daí nunca sei se ele gostou ou não ... Mas tomei coragem e perguntei.

– Mestre, me desculpe a insolência, mas quando o senhor faz essa cara de paisagem eu nunca sei se está bom ou não. Tenho que melhorar?

– Meu prezado, não se trata de melhorar ou não. Dizia um grande mestre que tive, o professor Roberto Ribeiro Baldino, amigo do sábio ermitão Bacaiau, que toda melhora é temporal e ideológica. Veja que Hitler e aquele ser abjeto e negacionista, foram eleitos pelo povo, tomado pela ideologia da melhora. E se bobear, a história se repetirá, com o povo elegendo o juiz lesa-pátria, capacho da CIA, agente do Império!

Eu não estou preocupado em te julgar ou avaliar, só quero entender a lógica das operações ... quero entender de onde falas e porque dizes o que dizes. Só isso! Se eu conseguir entender o que te levou a dizer o que dizes é um *bom começo para procurarmos compartilhar um espaço comunicativo. Entendo que meu papel como professor é ouvi-lo e daí procurar, a partir do campo semântico*[3] *que operas, no momento em que me apresentas algo, apresentar outras possibilidades para falarmos em uma mesma direção.*

– É que o senhor fica olhando para o que eu escrevo com uma cara de paisagem e eu sei o que significa.

– Ao escreveres algo, como fizeste para verificar a associatividade em relação à adição de matrizes, vejo que operas simbolicamente, mesmo que generalizando, daí fico pensando como expor retoricamente o que escreveste.

– E como seria essa forma retórica?

– Vejamos: tu me dissestes que vale o fechamento para soma de objetos matrizes quadradas de ordem 2. Aliás, vale para qualquer matriz, desde que os objetos sejam da mesma ordem, para que a soma seja definida.

– Até aí tudo bem!

– Então, se a adição de dois objetos gera uma soma, também objeto nesse conjunto, quando eu acrescentar um terceiro objeto, independentemente da posição que ele ocupe na adição dos três objetos em questão, ele também gerará um novo objeto nesse conjunto. Ou seja, ao adicionar duas matrizes de mesma ordem eu gero uma nova matriz de mesma ordem, que adicionada a uma terceira matriz gerará uma nova matriz de mesma ordem, objeto desse conjunto de coisas.

---

[3] Entendemos campo semântico como "[...] um processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade [...] sendo um processo, ao ser colocado em marcha cria condições para sua própria transformação." (LINS, 2012, p. 17).

– E isso resolve o problema da associatividade?

– Em partes, mas falta verificar o que tu fizeste: comparar os dois resultados e mostrar que são iguais.

– E como podemos fazer isso retoricamente?

– Uma maneira que pensei agora foi lembrar que os elementos de uma matriz, são números, como fizeste anteriormente. Dessa forma, como em relação à soma de matrizes, nós preservamos a posição dos elementos, ou seja, adiciona-se o elemento da primeira linha, primeira coluna de uma matriz, com seu correspondente na outra matriz e assim por diante, eu passo a ter operações de adição entre números, na qual a adição é associativa, então eu preservo a estrutura.

– É mestre, na forma simbólica ficou mais fácil de enxergar!

– Indiscutivelmente, mas quando uso a retórica, após operares no campo semântico simbólico, entendo que estou procurando oportunizar um possível desenvolvimento de um tipo de pensamento algébrico.

– O que é pensamento algébrico?

– Bom, nosso caro amigo, o sábio ermitão Bacaiau, diz que

> [...] há distintos modos de produzir significado para a álgebra; o pensamento algébrico é um desses modos e tem três características fundamentais:
> 1) produzir significados apenas em relação a números e operações aritméticas (chamamos a isso *aritmeticismo*);
> 2) considerar números e operações apenas segundo suas propriedades, e não "modelando" números em outros objetos, por exemplo, objetos "físicos" ou geométricos (chamamos a isso *internalismo*); e,
> 3) operar sobre números não conhecidos como se fossem

> conhecidos (chamamos a isso *analiticidade*).
> Pensar algebricamente é pensar dessa forma; é produzir significado para situações em termos de números e operações aritméticas (e igualdades ou desigualdades), e com base nisso transformar as expressões obtidas operando sempre de acordo com (1), (2) e (3) (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 151, destaques do original).

– Por exemplo, meu caro discípulo, quando supusemos que as matrizes que iríamos operar eram quadras e de ordem 2, busquei possibilitar que produzisses significado apenas em relação a números ... isso seria aritmeticismo.

Mas quando, retoricamente te convido a pensar na organização dos elementos de uma matriz, enquanto números e te lembro da associatividade em relação à soma desses números, estou, a partir da retórica, procurando considerar números e operações apenas a partir de suas propriedades e isso se denomina de internalismo.

E quando generalizas considerando os elementos das matrizes que operas em termos de u_{ij}*,* v_{ij} *e* w_{ij}*, estás operando no campo da analiticidade.*

– Mas eu não posso dizer que essa caracterização de pensamento algébrico que o senhor propõe, a partir das ideias do sábio ermitão Bacaiau, seria um tipo de manipulação formal?

– Pode e é bem possível, tanto que Bacaiau também considera essa hipótese, mas ele também destaca que “[...] queremos dizer que não estamos interessados em reduzir ‘pensamento algébrico’ a uma noção abstrata e extremamente genérica [...]” (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 151, destaques do original).

E mais, essa ideia ele traz depois de afirmar que "A álgebra, como já dissemos, consiste em um conjunto de afirmações, para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade" (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 137; 150).

Na verdade, estou querendo trazer-te um conjunto de afirmações – o conjunto de objetos, as operações definidas e as regras que detalhamos – para os quais é possível produzires significado em termos de números e operações aritméticas envolvendo igualdade, a partir das ideias de aritmeticismo, internalismo e analiticidade, para vetores, não somente enquanto objetos geométricos com módulo, direção e sentido, como repetes a todo instante.

– Agora estou entendendo onde o senhor quer chegar. E estou ficando curioso! Podemos continuar então verificando as regras para o objeto matriz de ordem 2?

– Podemos. E digo-te que este teu furor pedagógico é contagiante, o que desperta em mim a vontade de continuarmos mesmo. Então vamos lá! Como seria o elemento neutro dessa adição de matrizes? Em outras palavras, como somar duas matrizes de forma que eu preserve uma delas?

– Seria considerar o vetor nulo como uma matriz nula de ordem 2?

– Perfeito!

– Assim:

$$u + 0 = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} + 0 & u_{12} + 0 \\ u_{21} + 0 & u_{22} + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{12} \end{bmatrix}$$

O mestre refere-se a meu furor pedagógico, mas ele não percebeu que toda vez que fala das ideias do sábio ermitão Bacaiau, sua voz se transforma, passando a falar com eloquência e seus olhos brilham. Será que digo a ele que isso é furor acadêmico e é isso que me motiva?

Antes mesmo que me perguntasse já fui logo falando de um elemento simétrico em relação à adição.

– Mestre, para que a soma de duas matrizes dê a matriz nula, basta eu constituir uma nova matriz formada, e bem ordenada, com os elementos simétricos da matriz dada. Algo assim:

$$-u = \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} \ e \ \ u = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$u + (-u) = \begin{bmatrix} u_{11} + (-u_{11}) & u_{12} + (-u_{12}) \\ u_{21} + (-u_{21}) & u_{22} + (-u_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– Supimpa! E o que falta agora?

– Agora temos que ver as regras da multiplicação por escalar. E já vou dizendo que vale o fechamento, pois se eu multiplicar uma matriz de ordem 2, por exemplo, por 3, a matriz 3u formada, continuará sendo de ordem 2 e os elementos serão, ordenadamente o triplo dos elementos correspondentes da matriz u.

Mestre, quando opero dessa forma, ao trazer a ideia de 3 vezes a matriz, isso seria aritmeticismo porque estou produzindo significado em relação a números e operações aritméticas, no caso multiplicação por escalar. Agora, por considerar a matriz u como genérica de ordem 2, penso que estou considerando números e operações segundo suas propriedades e daí então seria internalismo. Pode ser?

– Pode, como também é possível considerar que estás produzindo significado para situações em termos de números e operações aritméticas e, com base nisso, estás transformando as expressões e ideias, operando de acordo com o aritmeticismo, o internalismo e a analiticidade e, portanto, estás desenvolvendo pensamento algébrico, estás apresentando a partir de resíduos de enunciação[4] *um conjunto de afirmações para os quais é possível produzir significado em termos de números e operações que envolvam igualdade e por isso, estás algebrizando.*

– Agora entendo porque seus olhos brilham quando o senhor fala das ideias do sábio ermitão Bacaiau. Agora sei porque ele é chamado de sábio. A gente se envolve com suas ideias e quer colocá-las em prática.

– Perfeito! Veja que falas retoricamente a respeito de um objeto, sem precisar recorrer à representação simbólica.

– É mesmo! Isso significa que estamos operando em um mesmo campo semântico?

---

[4] Algo com que me deparo e que acredito ter sido dito por alguém [...] resíduo é o que resta de um processo. Um resíduo de enunciação não é nem menos nem mais importante que uma enunciação: ele é *de outra ordem.* (LINS, 2012, p. 27, destaques do autor).

– Eu teria que observar mais, realizar leituras mais apuradas, no sentido de mais finas e criteriosas, porém, posso dizer que estamos compartilhando um mesmo espaço comunicativo, ou mesmo, em uma rápida leitura, operando a partir de mesmos modos de produção de significado[5].

– Mas vamos lá. Vejamos as regras da multiplicação por escalar. Eu já disse para o senhor sobre o fechamento. Agora vamos ver o seguinte. Se eu multiplicar uma matriz u *por* 1, *dará a própria matriz, porque isso implica em multiplicar cada termo dessa matriz por* 1 *e todo número multiplicado por* 1 *dá ele mesmo. Então, sem precisar escrever os elementos da matriz, considerando o princípio do interacionismo e da analiticidade, posso dizer que se o objeto* u *é uma matriz quadrada de ordem* 2, *então* $1 \cdot u = u \cdot 1 = u$.

– Bacana! Vou deixar por tua conta, pois estás fluindo bem.

– Então vamos lá! Eu já falei de uma matriz $3 \cdot u$ *que está no conjunto dos objetos matriz quadrada de ordem* 2. *Agora se eu multiplicar essa matriz por* 4, *por exemplo, assim:*

$$4 \cdot (3 \cdot u)$$

Eu vou obter uma matriz que será

$$4 \cdot (3 \cdot u) = 12 \cdot u$$

[5] Falar de modos de produção de significado (MPS) não é falar propriamente de campos semânticos, mas de "campos semânticos idealizados" que existem na forma de repertórios segundo os quais nos preparamos para tentar antecipar a respeito do que os outros estão falando ou, se o que dizem, é (ou não) legítimo, dentro do contexto explicitado.

E a ideia é a mesma que já trouxe, ou seja, cada elemento de u, passa a ser multiplicado por 12, porque primeiro multipliquei por 3 e depois por 4; logo é como ser multiplicasse de uma vez só por 12. Pode ser?

– Pode, mas só vale para valores inteiros positivos?

– Não, como estamos multiplicando por escalares, valores reais, as regras que usamos são válidas para todos os reais.

– E nessa linha de raciocínio, o que falta verificarmos?

– Olha só, o múltiplo escalar de uma matriz, tipo $2{,}5 \cdot v$ eu posso dizer que é $2 \cdot v + 0{,}5 \cdot v$.

– Como assim?

Era tudo o que queria para ir mais uma vez à lousa improvisada no chão de terra.

– Assim, mestre. Se

$$v = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

então

$$2 \cdot v = \begin{bmatrix} 2v_{11} & 2v_{12} \\ 2v_{21} & 2v_{22} \end{bmatrix}$$

e

$$0{,}5 \cdot v = \begin{bmatrix} 0{,}5v_{11} & 0{,}5v_{12} \\ 0{,}5v_{21} & 0{,}5v_{22} \end{bmatrix}$$

Só que

$$2{,}5 \cdot v = 2 \cdot v + 0{,}5 \cdot v$$

$$2{,}5 \cdot v = \begin{bmatrix} 2v_{11} & 2v_{12} \\ 2v_{21} & 2v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}5v_{11} & 0{,}5v_{12} \\ 0{,}5v_{21} & 0{,}5v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}5v_{11} & 2{,}5v_{12} \\ 2{,}5v_{21} & 2{,}5v_{22} \end{bmatrix}$$

E antes que o senhor me pergunte, isso é válido para a soma de qualquer múltiplo escalar de uma matriz, basta trocar por valores arbitrários. Agora, seguindo a mesma linha de raciocínio, eu posso dizer que, sendo v uma matriz e k e p escalares,

$$(k + p) \cdot v = k \cdot v + p \cdot v$$

É uma distributividade compatível, pois a soma $(k + p)$ é um escalar, da mesma forma que $k \cdot v$ e $p \cdot v$ são múltiplos escalares de v.

– Tudo bem, mas agora temos que verificar se preserva a igualdade.

– Olha só, vou partir da ideia de que $k + p$ é um escalar, pois vale a regra do fechamento. Pode ser? Então,

$$(k + p) \cdot v = (k + p) \cdot \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

$$(k + p) \cdot v = \begin{bmatrix} (k + p)v_{11} & (k + p)v_{12} \\ (k + p)v_{21} & (k + p)v_{22} \end{bmatrix}$$

Acontece que k e p são escalares e os elementos v_{ij} também são valores reais, então posso aplicar a distributividade. Desse jeito:

$$(k + p) \cdot v = \begin{bmatrix} kv_{11} + pv_{11} & kv_{12} + pv_{12} \\ kv_{21} + pv_{21} & kv_{22} + pv_{22} \end{bmatrix}$$

Só que isso é o resultado da soma de duas matrizes

$$(k + p) \cdot v = \begin{bmatrix} kv_{11} & kv_{12} \\ kv_{21} & kv_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} pv_{11} & pv_{12} \\ pv_{21} & pv_{22} \end{bmatrix}$$

E daí, então

$$(k+p)\cdot v = k\cdot v + p\cdot v$$

– Muito bom, meu caro! Falta mais alguma regra para verificarmos?

Por um tempo fiquei estático, e fiz uma bendita cara de paisagem – estou aprendendo – pois verifiquei tudo e o mestre vem com esse papo de verificarmos ... Mas vamos lá, não vou entrar nessa "vibe" ... Nossa! Rapaz, estou até usando as gírias do brother z = k. Isso é contagiante!

*– Não, mestre. Verific**amos** todas.*

– Então, anteriormente dissemos que, se um conjunto de objetos, com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas satisfizessem essas regras, que nome daríamos a esses objetos?

– Vetores!

– Então, uma matriz, a partir dessas condições é um vetor, mas não se trata do mesmo objeto do $\mathbb{R}^2$ ou do $\mathbb{R}^3$. Estamos tratando de outros objetos com o mesmo nome, mas em espaços vetoriais distintos.

Caramba! Veio como um soco na boca do estômago. Fui pego de surpresa e não havia como negar agora que uma matriz é um vetor.

– Por que esse silêncio, meu prezado?

– É que estou pensando. Por que lá no $\mathbb{R}^2$ eles vivem dizendo que vetor tem que ter modo direção e sentido? Por que desprezam tanto as matrizes?

– Mais uma vez, vamos à metodologia do Jack Estripador. Bom, o time do negacionismo despreza as matrizes por serem misóginos, além de eugenistas. Talvez por estarem arraigado a um sistema patriarcal ... Eles não leram o Código Da Vinci de Dan Brown. São obtusos e sofômanos!

O segundo ponto, é que eles propagam e criam verdades, repetindo-as incessantemente, para que as pessoas passem a acreditar no que dizem. As vezes até eles precisam acreditar nisso, por isso se repetem. Não sou psicanalista, mas a Psicanálise explica essas coisas. E Foucault também explica. Segundo este autor, uma das características peculiares do discurso é que em toda sociedade, a produção do discurso, ao mesmo tempo que é controlada, também é selecionada, organizada e propagada a partir de determinados procedimentos que têm por objetivo maquinar, conspirar, constituir e propagar seus poderes (CHAVES, 2004). *Para Foucault*, "[...] o discurso não descreve simplesmente objetos que lhes são exteriores: o discurso 'fabrica' os objetos sobre os quais fala" (SILVA, 2000, p. 43 apud CHAVES, 2004, p. 21, destaques do autor).

– Que mal lhe pergunte, quem detém o poder está sempre com a verdade? O poder está sempre associado à verdade?

– Vamos lá. O entendimento de poder que trago, a partir de Foucault, não é de algo que se possua, mas que se exercite. E eu vou aproveitar Foucault para trazer a ideia de que "Se o poder e a verdade estão 'ligados numa relação circular', se a verdade existe

numa relação de poder e o poder opera em conexão com a verdade, então todos os discursos podem ser vistos funcionando como regimes de verdade” (GORE, 1994 apud CHAVES, 2004, p. 19). *Assim, produz-se verdades com vistas ao exercício de certo tipo de poder, pois verdades são relativas e produzidas.*

– Mas por que dessa necessidade de se produzir essas verdades?

– Para que possam continuar exercendo o poder que lhes convém. Fake News é uma verdade produzida e muitos passam a acreditar nessas verdades produzidas.

– Mas Fake News são mentiras!

– São verdades fabricadas, muitas vezes funcionam como cortina de fumaça; são dispositivos táticos inerentes aos sistemas de exclusão do discurso. Para esse grupo, de vetores do Ox, no $\mathbb{R}^2$*, a falta de argumentação tem de ser omitida com a produção de coisas estapafúrdias, como mamadeira de pi ..., Jesus na goiabeira, Ferrari de ouro, plantação de maconha nas universidades, professor doutrinador, não houve golpe e sim revolução e por aí vai. Olha aí exemplos exemplares de verdades fabricadas e da relação circular entre poder e verdade.*

– E o que são esses sistemas de exclusão do discurso?

– Para Foucault (2000), *o discurso é envolvido por um conjunto de procedimentos de exclusão que o atingem:* (*i*) *a interdição ou a palavra proibida;* (*ii*) *a separação ou a segregação;* (*iii*) *a rejeição e a separação permanente;* (*iv*) *a vontade de verdade.*

De forma objetiva, para voltarmos ao tema da nossa conversa, podemos exemplificar que a interdição ou a palavra proibida está na censura, como praticada *recentemente no Exame Nacional do Ensino Médio, ou na interferência da liberdade de Cátedra, quando um deputado falastrão, alegando doutrinação ideológica, procura censurar uma professora com a ideia de escola sem partido. Como se eles não carregassem em seus discursos uma ideologia: a da exclusão. Como diria nosso querido Paulo Freire "Não existe imparcialidade. Todos são orientados por uma base ideológica. A questão é: sua base ideológica é inclusiva ou excludente?"*

A separação ou a segregação, por exemplo, se pratica quando se defende a ideia de que se tu não és terrivelmente evangélico, então tu és um herege, um pecador e por isso não se deve dar valor ao que tu dizes, ou seja, o que falas não tem legitimidade. Desde já, que fique claro que não estou praticando uma separação ou segregação reversa, mas estou colocando-me em ponto diametralmente oposto ao fundamentalismo de igrejas que se autodenominam neopentecostal, propagadoras da frenética busca pela riqueza vinculada à prática estelionatária de enriquecimento por meio da fé alheia. Esses caras nem são inovadores, pois na Idade Média já se vendia indulgência e partes da cruz de Cristo como amuleto sagrado.

A rejeição e a separação permanente, por exemplo, ocorrem quando se tenta expurgar as obras de Paulo Freire, reconhecido internacionalmente, alegando que o mesmo era subversivo. E tentam fazer isso não só com o Paulo Freire, mas também com Zumbi dos Palmares, com as mulheres, com os homossexuais, com os Sem-terra, com os povos indígenas, com o pobre.

"Uma vontade de verdade não caracteriza uma verdade, mas uma tática para que essa ascenda ao grau de verdade" (CHAVES, 2004, p. 42). *Por exemplo, falar que há plantação de maconha nas universidades é uma vontade de verdade, mas dizer que a comitiva presidencial transportara 39 quilos de pasta básica de cocaína é uma verdade e essa não foi fabricada.*

– Então negar que matriz é um vetor é uma forma de segregação do discurso, mestre?

– Sim, para esconder suas limitações – limitações deles – e fazer valer suas verdades fabricadas. Lembre-se que mito é uma verdade fabricada (CHAVES, 2004)*, ou no contexto atual, não passa de uma grande mentira.*

Mas voltemos à questão. A circulação da verdade de que só se constitui como vetor os objetos geométricos, é uma forma de mostrar que um discurso, como já dissemos anteriormente, não descreve simplesmente objetos que lhes são exteriores. Ele 'fabrica' esses objetos sobre os quais se fala, por isso negar que um polinômio ou uma função contínua possa vir a ser um vetor.

Por um bom tempo caminhamos em silêncio. O mestre esperando que eu perguntasse algo e eu pensando a respeito do que ele dissera e quando pensei em perguntar algo ele me solta essa pérola:

– Para Nietzsche, meu caro, o conhecimento é produzido

> [...] na medida em que, entre o homem e o que ele conhece, se estabelece, se trama, algo como uma luta [...] Nele, há sempre alguma coisa que é da ordem do duelo e que faz com que o mesmo seja sempre singular. E é singular porque esquematiza e ignora as diferenças; e, por

> isso, ao esquematizar, configura-se sempre como uma certa relação estratégica em que o homem se encontra situado. Tratando-se de uma estratégia, passa a ser o efeito de uma batalha, só ocorrendo sob a forma de um certo número de atos diferentes entre si (CHAVES, 2004, p. 70-71, *ipsis litteris*).

Por isso, meu caro, é precioso duvidares, colocares à prova o que sabes, para que possas produzir novos significados e daí, outro conhecimento, pois "Produzir significado é, então, falar a respeito de um objeto" (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 145-146). *Falar é fundamental, pois*

> (...) a fala da pessoa que resolve um problema tende a explicitar o 'novo' e a silenciar o 'dado'. Dessa forma, enquanto resolvemos um problema, 'falamos' as coisas que estamos tentando entender ou descobrir, mas silenciamos as coisas que tomamos como certas, como dadas (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 122, destaques dos autores).

– Sim mestre, mas me deixe pensar mais um pouco, principalmente a respeito dessas ideias do sábio ermitão Bacaiau.

E seguimos a viagem pelas estradas da vida.

7 Chegando à Pedra do Cafofo

– Mestre, pelo que aquele vetor que encontramos no caminho, a função diferenciável, do espaço das funções contínuas, nos disse, falta muito pouco para chegarmos à Pedra do Cafofo. O senhor que foi aluno do sábio ermitão Bacaiau pode me contar como eram suas aulas? Como ele era?

– Assim como Nietzsche, o Bacaiau vislumbra um tipo de educação que não se afaste da vida. Ele costuma dizer que “Do mesmo modo que proponho uma educação matemática que não seja preparação para a vida, e sim vida, proponho uma reflexão que não seja preparação para a ação, e sim ação” (LINS, 1999, p. 94). *Essa sua fala me lembra algo que ouvi certa vez a respeito de Nietzsche enquanto educador:*

> Nietzsche, como educador, não tinha interesse em se tornar um vasculhador de textos antigos, fechado em seu gabinete, nem em criar um círculo de alunos atentos, que seguissem indiferentes à vida que os rodeava. Pretendia, isso sim, incentivá-los a um olhar singular sobre determinada ciência, conduzi-los de modo a poderem criar humanidade rica e transbordante de vida. *É preciso agir e viver para aprender e compreender* — eis o preceito segundo o qual Nietzsche pretendia educar seus alunos (DIAS, 1991, p. 26-27, destaque do original).

Penso que o sábio ermitão Bacaiau era assim. Chegávamos à sua casa após às 22h e ele ia para o fogão e passávamos à noite beliscando, sorvendo uns *bons goles de vinho e conversando sobre história, filosofia e pedagogia libertária, educação matemática, história da matemática, futebol ... ele torcia pelo Palmeiras e pelo Corinthians ...*

– ... Ah! Por isso o senhor torce por dois times também?

– É possível, mas na verdade torço por três: Sou Olaria de genética, de raízes biológicas; torço pelo Grêmio devido a meus manos e minha mãe Alides, lá de Santa Maria da Boca do Monte e, como vi Reinaldo e Dadá Maravilha jogarem, não tem como não torcer pelo Atlético. Também sou Galo!

– Mas vocês se encontravam com frequência?

– Sim, duas ou mais vezes por semana, por mais de 3 anos. Na verdade, convivemos por 6 anos, mas com relação de amizade e como seu discípulo, com convívio diário, foram 3 anos. Nossos filhos regulavam a mesma idade e brincavam juntos. Em casa, na universidade, em um bar próximo ao campus, chamado de Sujinhos e também nos eventos da área, estamos sempre juntos. Foi uma convivência intensa.

O comportamento do Bacaiau é de um gentleman, de uma fidalguia impressionante. Ele é incapaz de fazer uma indelicadeza com alguém. E isso tudo sem perder a simplicidade. Sempre calçando havaianas ele mantinha um tom de voz que não alterava, fala baixo e pausadamente. Um grande amigo, um ser humano ímpar!

– Ouvi falar que ele leciona as mesmas disciplinas que o senhor.

– Na verdade é o contrário. Eu que leciono as mesmas disciplinas que ele. Inegavelmente que suas aulas foram uma grande inspiração para isso. Confesso que, até ser

seu aluno, eu não vislumbrava lecionar álgebra linear, mas a partir de suas aulas tomei gosto e resolvi me lançar à labuta.

– Tem algum caso pitoresco de vocês?

– Muitos, mas só vou te contar um. Certa vez o encontrei na rodoviária ... ele chegando e eu partindo, mas houve tempo de sentarmos e tomarmos um café. Eu olhava para ele e achava algo de estranho. Daí eu perguntei: – Bacaiau, tudo bem contigo? Estou te achando estanho o que houve? E ele respondeu: – Talvez cansaço da viagem.

Nos despedimos e quando me dirigia ao ônibus olhei para trás e o observei caminhar. Ele adernava meio que de boreste a bombordo, alternando de um lado para o outro, coisa que não lhe era peculiar. Fitei-o de cima a baixo e vi a diferença. O algo estranho era que ele trajava sapatos.

Quando voltei da viagem, no primeiro encontro que tivemos narrei a ele minha observação. E ele me respondeu: essa foi a tua leitura, pois que produz significado é o leitor e não o autor da enunciação. E rimos muito.

De repente, no alto de uma pequena elevação, uma coxilha, avistamos a caverna da Pedra do Cafofo. Meu coração disparou, batia tão forte que parecia que sairia pela boca. O mestre estava apreensivo, como se sentisse algo no ar.

– Mestre, mestre, vamos logo, estou doido para encontrar com o sábio ermitão Bacaiau!

– Calma! Faça uma leitura do que está à tua volta. Observe o ambiente.

– Vejo uma caverna, muitas folhas espalhadas pelo chão, à frente da caverna mato sem roçar, uma árvore plantada, mas ainda jovem, com umas 3 polegadas de diâmetro, de caule e um par de sandalhas havaianas repousando no pé desse pequeno arbusto ...

Foi quando resolvi olhar para o mestre e o vi apoplético, com olhar firme para aquele par de velhas havaianas e perceptivelmente havia lágrimas correndo pela sua face.

Um silêncio sepulcral tomou o ambiente e aquele velho falador mergulhava na mais profunda prostração, com um olhar distante, estático, que mal dava para perceber sua respiração. Calei-me e passei a fazer uma leitura de sua postura, que me tocara profundamente.

Ainda procurando manter um olhar de paisagem, sem obter êxito, com a face encharcada pelas lágrimas derramadas, com a voz presa como se houvesse um nó na garganta o mestre me falou:

> *– Ele não está mais entre nós, foi produzir significado em outros espaços vetoriais bem longínquos de nosso mundo...*

Por mais que quisesse falar algo, a voz não saia, a respiração tornou-se pesada, mesmo com uma leve brisa que soprava em nossa direção tinha dificuldade em inspirar. E o mestre ali, estático, pálido, mergulhado em suas lembranças. O que poderia fazer? O mestre pegou em seu bornal um velho livro escrito pelo sábio ermitão Bacaiau, rasgou uma das páginas e a depositou abaixo do par de havaianas. Depois dirigiu-se ao interior da caverna e foi quando resolvi ler o que ele depositara como última homenagem ao amigo:

> Do mesmo modo que proponho uma educação matemática que não seja preparação para a vida, e sim vida, proponho uma reflexão que não seja preparação para a ação, e sim ação (LINS, 1999, p. 94).

Dei-lhe um abraço, peguei-o pela mão e retornamos à Vetorlândia.

8 Mas renova-se a esperança

Retornando a Vetorlândia, em certo trecho do caminho, observei que o mestre, mesmo calado, encontrava-se com o semblante menos abatido. Foi aí que resolvi romper o silêncio.

– Mestre, o que o senhor foi ver no interior da caverna.

– Duas coisas. Primeiramente, fui dar uma última olhada e depois devolver um livro de história da matemática do Konstantin Alexeyevich Ribnikov – Historias de las Matemáticas (Ribnikov, 1991 [1987]) *– que ele havia me emprestado há muito tempo.*

Entendi aquele gesto como um profundo respeito e sobre esse assunto me calei. Mas o que me causava incômodo era sobre o que faríamos.

– Desculpe-me, mestre. Entendo e compartilho com o senhor essa tristeza que lhe salta aos olhos, mas o que faremos agora?

– Não precisas te desculpares. Essa é a vida! Vamos em frente. Mas sugiro que façamos o que o sábio ermitão Bacaiau faria.

– E o que ele faria, mestre?

– Bom, primeiramente, vejamos o que ele não faria. Ele não ficaria se lamuriando, se vitimizando.

– E o que faria então?

– Procuraria uma solução, ajudando as pessoas e formando um grupo de amigos que estivesse interessado em mudar as coisas. Ele não gostava de ler pela falta e por isso mesmo procuraria conversar, levar as pessoas a refletirem para efetuarmos possíveis mudanças. Por isso ele propunha educar não para a matemática, mas pela matemática (LINS, 2020).

– Agora entendi a frase que o senhor colocou sob o velho par de havaianas: “[...] que não seja preparação para a vida, e sim vida, proponho uma reflexão que não seja preparação para a ação, e sim ação” (LINS, 1999, p. 94).

– Quer dizer que além de falador o senhor também é bisbilhoteiro?

Depois de muito tempo finalmente vi o mestre esboçar um sorriso. Talvez pela vermelhidão de minha face que sentia mais quente, como se estivesse febril.

– Desculpe-me, mestre, mas não resisti. Eu tinha que ver o que o senhor ali depositara. Entendi que o gesto

foi como algo do tipo: Vá em paz e aqui está o que aprendi com o senhor. Foi isso?

– Se essa foi a tua leitura, só posso agradecer, pois, naquela situação, compartilhamos o mesmo campo semântico.

E a luta continua, companheiro!

9 Conversando com professores

A partir de narrativas dos alunos, durantes aulas de Álgebra Linear, elaboramos este conto trazendo ideias a respeito de vetores e espaços vetoriais, objetos tratados nas aulas do curso, dentre tantos outros.

Mas também trouxemos elementos históricos que permeiam o assunto, bem como discutimos elementos teóricos e conceituais a respeito de vetores e espaços vetoriais. O texto está repleto de generalizações e em momento algum pretendemos que o mesmo substitua um livro texto, mas que, de forma agradável nos permita pensarmos a respeito das matemáticas bem como do que vem acontecendo no país. Inclusive nas salas de aula.

Como sugestão de práticas educativas, apresentamos o desafio de procurar seguir a perspectiva apresentada envolvendo outras ideias, conceitos e unidades programáticas com suas turmas; sejam elas de Educação Básica ou Ensino Superior. Mas, para apimentar mais o processo, que tal procurar interagir com professores de outras áreas – como, por exemplo, História, Geografia, Literatura, Linguagens, Filosofia etc. – para procurarem caminhar em uma perspectiva interdisciplinar?

O que fizemos não é novidade, pois nosso querido Malba Tahan produziu inúmeras histórias e contos muito bem mais elaborados que o nosso. O diferencial está em procurar construir uma narrativa envolvendo ideias e conceitos matemáticos, discutidos em sala de aula, de maneira informal – falar sobre – a partir das falas dos alunos.

Romulo Campos Lins, que foi por muito tempo professor de Álgebra Linear e elaborador do Modelo dos Campos Semânticos sempre dizia que o aspecto mais importante da aprendizagem, bem como de toda cognição humana, é a produção de significados. Para tal, nós professores, temos que aprender a ouvir os alunos.

Entendemos que além de ouvir os alunos também é fundamental estabelecermos uma certa cumplicidade para que eles se sintam à vontade de falar o que sentem e o que pensam.

Então, basta convidá-los à criação e muita coisa bonita pode surgir em lindas criações textuais. Que tal convida-los a construírem uma história? Uma sugestão seria, por exemplo, convida-los a lerem uma obra de Malba Tahan e, a partir dessa leitura, usarem o que trabalharam em suas aulas, para confeccionar um romance, um conto, uma peça teatral, uma história em quadrinhos ou mangá, um texto colaborativo escrito a muitas mãos.

Então, vamos à luta!

Referências

ABBOTT, Edwin Abbott. **Planolândia**: um reino de muitas dimensões. São Paulo: Tordesilhas, 2021 [1884].

BAUM, Lyman Frank. **O maravilhoso mágico de Oz**. São Paulo: Salamandra, 2013 [1900].

CHAVES, Rodolfo. **Por que anarquizar o ensino de matemática intervindo em questões socioambientais?** 2004. 223 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – PPGEM, IGCE, Unesp-Rio Claro, 2004.

DIAS, Rosa Maria. **Nietzsche educador**. São Paulo: Scipione, 1991. (Coleção mestres da educação; série pensamento e ação do magistério).

FOUCAULT, Michel. **Vigiar e punir***:* nascimento da prisão, 25. ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2002.

FOUCAULT, Michel. **A ordem do discurso***:* aula inaugural no Collège de France, pronunciada em 2 de dezembro de 1970, 6. ed. São Paulo: Loyola, 2000. (Leituras Filosóficas).

GORE, J. M. Foucault e Educação: fascinantes desafios. 1994. In*:* GENTILI, Pablo. **Pedagogia da exclusão**: crítica ao neoliberalismo em educação. 5 ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2000, p. 9-20.

HOWARD, Anton; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

KNIJNIK, Gelsa. et al. **Etnomatemática em movimento**. 17. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

LINS, Romulo Campos. Os PCN e a Educação Matemática no Brasil**.** In: OLIVEIRA, Viviane Cristina Almada de; LINARDI, Patrícia Rosana; SILVA, Amarildo Melchiades da; CHAVES, Rodolfo. **O modelo dos campos semânticos na educação básica**. 1. ed. Curitiba: Appris, 2020. p. 13-17.

LINS, Romulo Campos. Serve para alguma coisa saber para que 'serve' a Matemática? (Ou é melhor pensar sobre o que ela muda no mundo?). In: TV Escola: o canal da Educação. Salto para o futuro: **Matemática e a relação com outros campos do saber no ciclo de alfabetização**. Ano XXIV. Boletim 10. São Paulo: 2014, p. 13-20.

LINS, Romulo Campos. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimento e notas de teorizações. In: ANGELO, Cláudia Laos et al (org). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática**: 20 anos de história. São Paulo: Micrograf, 2012, p. 11-30.

LINS, Romulo Campos. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções & perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 75-94. (Seminários DEBATES Unesp).

LINS, Romulo Campos. Epistemologia, história e educação matemática: tornando mais sólidas as bases da pesquisa. **Revista de Educação Matemática da SBEM São Paulo**, n. 1, p.75-91, ser./1993.

LINS, Romulo Campos; GIMÉNEZ, Joaquin. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. 3. ed. Campinas: Papirus, 1997. p. 75-94. (Perspectivas em Educação Matemática).

MENON, Marcio José. Sobre as origens das definições dos produtos escalar e vetorial. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 31, n. 2, p. 2305-1-2305-11. Osasco – SP: SBF, 2009. In: www.sbfisica.org.br. Acesso in: 27/out./2021.

RIBNIKOV, Konstantin. **Historias de las Matemáticas**. Madrid: Mir Moscú, 1991 [1987].

SILVA, Tomaz Tadeu. **Teoria cultural e educação***:* um vocabulário crítico. Belo Horizonte: Autêntica, 2000.

SIRTOLI, Bruno. **O uso do *software* GeoGebra como ferramenta auxiliar no ensino da Geometria Espacial**. 2019. 182 f. (Dissertação de Mestrado). Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional. Departamento de Matemática. Centro de Ciências Exatas. Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória.

SOUSA, Stevão Carneiro de. **Uma leitura da produção de significado para possíveis noções de vetor em uma turma de Licenciatura em Matemática**. 97 f. (Dissertação de Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2021.

SPEROTTO, Fabiola Aiub; FREITAS, Daiane Silva de. **Equações de retas e planos no espaço**. 1. ed. Ri Grande: Editora da Furg, 2018. In: http://www.lemas.furg.br/index.php/material-didatico. Acesso em 15/nov./2021.

STIRNER, Max. **O falso princípio de nossa educação**. São Paulo: Imaginário, 2001.

TAKAHASHI, Shin; INOUE, Iroha; TREND-PRO Co. **Guia mangá Álgebra Linear**. São Paulo: Novatec, 2012. (The manga guide).

WAERDEN, Bartel L. Van der. **A History of Algebra**: from al-khwãrizmi to Emmy Noether. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985.

ISBN: 978-85-8263-543-8
9 788582 635438

Edifes
ACADÊMICO