Movimento Circular e Relação de Transmissão

Uma Sequência de Ensino

Mestrando Bruno Bellão Bassini

DSc. Filipe Leôncio Braga

PUBLICADO PELOS AUTORES

IFES.EDU.BR

Primeira Edição, Julho 2017

PREFÁCIO

Este material foi elaborado visando minimizar, para o conteúdo de cinemática circular, três das principais dificuldades encontradas por professores na implementação de atividades práticas no ensino de física nas escolas brasileiras:

- Falta de equipamento;
- Falta de espaço específico para realização das práticas de ensino;
- Falta de tempo para o preparo das práticas.

Ele conta com 5 capítulos que tratam, do conteúdo teórico e das atividades práticas sobre os tópicos abordados nesse assunto.

No capítulo 1 os conceitos teóricos como: espaço angular, velocidade angular, aceleração angular, relações entre grandezas e equações lineares e angulares, sendo encerrado com uma abordagem sobre relações de transmissão de movimento circular. Neste capítulo ainda é possível encontrar 3 **Exercícios Resolvidos** (destacados do corpo do texto em formato de *box* em tom marrom), bem como estruturas chamadas de **Wikis** (presentes em estrutura de *box* em tom amarelo), que tem a função de explicar e apresentar um conteúdo extra aos estudantes mais curiosos, além das estruturas de observações relevantes que estão expressas por meio de ícone de **Obs:** e das **Definições** (destacadas do texto em formato de *box*).

No capítulo 2 apresentamos esquematicamente as partes integrantes de uma bicicleta, em caráter taxonômico, para dirimir quaisquer eventuais dúvidas que possam ocorrer ao longo do corpo do texto dos roteiros práticos.

Os capítulos 3, 4 e 5 são os roteiros de atividades práticas, baseados quase exclusivamente no uso de uma bicicleta como material. Nesses capítulos são abordados de forma prática os conteúdos tratados no capítulo 1.

Todos os roteiros devem ser realizados em grupo e estão classificados quanto ao **Nível de Autonomia** que o aluno possui no desenvolver da prática (sempre apontados simbolicamente por pequenos círculos, preenchidos ou vazios, no canto superior direito da página inicial de cada capítulo). A saber, o Roteiro 1, capítulo 2, possui dois níveis de autonomia, 0 e 1 (dois pequenos círculos, um vazio e outro preenchido) que são níveis adequados ao que chamamos de laboratórios tradicionais. Nestes níveis as atividades são do tipo "receita de bolo" e tem o claro objetivo de iniciar o aluno em atividades práticas. Já o segundo roteiro possui nível de autonomia 2 (dois pequenos círculos preenchidos), adequado ao que chamamos de laboratórios investigativos. O terceiro e último roteiro possui nível de autonomia 3 (três pequenos círculos preenchidos) que também está adequado aos laboratórios investigativos.

Nos laboratórios investigativos, o objetivo maior é que os alunos deparem com problemas e elaborem uma estratégia de solução para os mesmos.

Os roteiros foram desenvolvidos para uma aula de 50 minutos e cada atividade possui um **tempo máximo** de resolução que está explícito em seu enunciado (simbolicamente apontado por um **Relógio** no canto esquerdo da *box* contendo a atividade a ser desenvolvida). Este tempo deve ser respeitado sob pena de impossibilitar a realização das demais atividades do mesmo roteiro.

Algumas **Dicas** foram incorparadas ao longo dos roteiros práticos por meio da iconografia de um ponto de exclamação no interior de triângulo vermelho, tais dicas podem ser muito úteis ao longo da execução dos roteiros.

Aproveite ao máximo esse material e bons estudos!

Bruno e Filipe

Sumário

I Conteúdo

1 Conteúdo Teórico 9

1.1 Movimento circular 9

1.2 Espaço Angular 10

1.2.1 Definição de Radianos 10

1.3 Velocidade Angular 11

1.3.1 Velocidade Angular Média ω_m 11

1.3.2 Relação entre Velocidade Escalar v e Velocidade Angular ω 12

1.4 Aceleração Angular 13

1.4.1 Aceleração Angular Média α_m 13

1.4.2 Relação entre Aceleração Escalar a e Aceleração Angular α 13

1.5 Análogos entre Grandezas Lineares e Angulares 13

1.6 Relação de Transmissão 14

1.6.1 Relação de Transmissão de movimento circular 14

1.6.2 Aplicação das Relações de Transmissão 15

1.6.3 Chegando a equação de relação de transmissão 16

II Roteiros Experimentais

2 Partes de uma bicicleta 19

3 Roteiro 1 21

4 Roteiro 2 25
5 Roteiro 3 29

Conteúdo

1 Conteúdo Teórico **9**

1.1 Movimento circular
1.2 Espaço Angular
1.3 Velocidade Angular
1.4 Aceleração Angular
1.5 Análogos entre Grandezas Lineares e Angulares
1.6 Relação de Transmissão

1. Conteúdo Teórico

1.1 Movimento circular

Quando um corpo ou objeto se desloca descrevendo uma trajetória com formato de circunferência, dizemos que este está realizando um movimento circular. Podemos citar como exemplo de movimento circular o movimento dos ponteiros de um relógio, o movimento de rotação da terra e o movimento das rodas de uma bicicleta - vide figura 1.1.

(a) (b)

Figura 1.1: (a) Presença do movimento circular nas rodas da bicicleta e (b) movimento circular nos ponteiros de um relógio.

Quando o movimento circular se dá de forma cíclica, ou seja, se repete em intervalos de tempo iguais, podemos associar a esse movimento duas características muito importantes, uma delas é o período $[T]$, que é o tempo necessário para a ocorrência de uma repetição. Por exemplo, o movimento de rotação da terra possui um período de aproximadamente 24 horas, que é o tempo necessário para que a terra complete uma volta completa ao redor de seu próprio eixo. Já o ponteiro dos segundos em um relógio possui um período de 1 minuto (60 segundos) que é o tempo gasto pelo ponteiro para completar uma volta no relógio. Como o período é uma medida de tempo, no sistema internacional utilizamos como unidade de medida de período a mesma unidade de medida que utilizamos para tempo, o segundo s. Outra característica importante que podemos verificar em fenômenos que se repetem regularmente é a frequência $[f]$ de repetição. A frequência nos informa quantas repetições ocorrem em uma unidade de tempo. Assim, a unidade de frequência é o inverso do segundo $\frac{1}{s}$ que é chamada de hertz $[Hz]$.

Na Tabela 1.1 Período e frequência se relacionam da seguinte forma:

Tabela 1.1: Tabela de Relação entre Intervalo de tempo e Ciclos/Revoluções Concluídas.

Intervalo de tempo	**Número de vezes que o fenômeno se repete**
Período T	1 vez
Unidade de tempo=1	f vezes

Assim, $f \cdot T = 1$ logo $f = \frac{1}{T}$ e $T = \frac{1}{f}$

1.2 Espaço Angular

Se um objeto sai da origem O e percorre uma trajetória circular até o ponto P, podemos determinar sua posição em cada instante de tempo por meio do comprimento do arco S que este descreve durante o movimento ou por meio do ângulo central θ. O ângulo θ permite determinar a posição do objeto em qualquer instante, por isso chamamos θ de espaço angular.

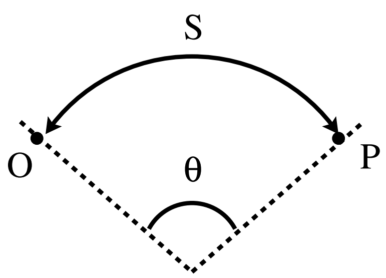


Figura 1.2: Diagrama esquemático de um espaço angular.

É comum trabalharmos em nosso cotidiano com ângulos medidos em graus, entretando para o estudo de movimento circular utilizaremos como medida de ângulo o radiano [rad].

1.2.1 Definição de Radianos

O radiano [rad] é um ângulo central que descreve na circunferência um arco com comprimento igual ao do raio da mesma circunferência. Por exemplo, se uma circunferência possui um raio de 1m, um ângulo de 1rad descreve sobre esta circunferência um arco cujo o comprimento também é de 1m. (Vide Figura 1.3)

Toda vez que dividimos o comprimento L de uma circunferência por seu diâmetro D encontramos o valor de π, assim:

$$L = \pi \cdot D.$$

Sabendo que $D = 2 \cdot R$, temos:

$$L = 2\pi \cdot R$$

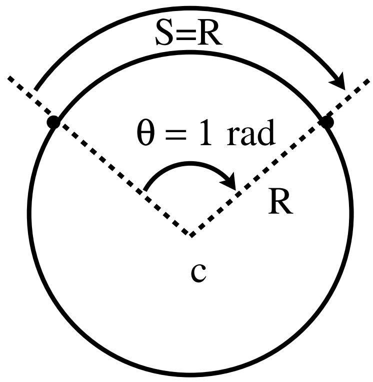


Figura 1.3: Diagrama esquemático de um círculo demonstrando a relação de radianos.

O ângulo central em radianos se relaciona com o comprimento S da circunferência da seguinte forma:

Tabela 1.2: Tabela demonstrativa das relações entre medidas angulares e medidas lineares.

Radiano	**Comprimento do arco**
1rad	R(Raio da circunferência)
θrad	S

Assim temos que: $S = R \cdot \theta$.
No caso em que S é uma circunferência completa:

$$S = L,$$

então :

$$R \cdot \theta = 2 \cdot \pi \cdot R$$

Logo, uma circunferência completa possui um ângulo central θ de $2 \cdot \pi rad$.

Wiki 1.1 Outra medida de ângulo conhecida é o grado. Uma circunferência possui 400 grados. ■

1.3 Velocidade Angular

1.3.1 Velocidade Angular Média ω_m

Definição 1.3.1 A velocidade angular média define a variação ângular $\Delta\theta$ que um ponto em movimento circular percorre por unidade de tempo. Nesse caso, seja θ_1 o espaço angular de um objeto num instante t_1, e $\theta 2$ o espaço angular do mesmo objeto num instante t_2 posterior a t_1 . No intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ a variação do espaço angular é $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ e por definição a velocidade angular média é:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{1.1}$$

Wiki 1.2 Velocidade angular instantânea ω

A velocidade angular instantânea ω é o valor limite ao qual tende a velocidade angular, quando o intervalo de tempo Δt tende a zero.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{1.2}$$

Como $\Delta\theta$ é medido em radianos e Δt em segundos, decorre que a velocidade angular tanto média quanto isntantânea é medida em radianos por segundo $[\frac{rad}{s}]$.

1.3.2 Relação entre Velocidade Escalar v e Velocidade Angular ω

Se $S_1 = \theta_1 \cdot R$ e $S_2 = \theta_2 \cdot R$ então:

$$S_2 - S_1 = (\theta_2 - \theta_1) \cdot R$$

e

$$\Delta S = \Delta\theta \cdot R$$

Dividindo os dois lados da equação acima por Δt temos:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \cdot R$$

Como $v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ e $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$; temos que:

Definição 1.3.2 — Relação entre v e ω.

$$v = \omega \cdot R \tag{1.3}$$

Exercício Resolvido 1.1 Uma roda de bicicleta com raio máximo $R = 0,25m$ gira sobre seu eixo de rotação 6 vezes a cada 3 segundos. Encontre a) o período de rotação b) a frequência de rotação c) o ângulo descrito em 2 segundos d) a velocidade angular e e) a velocidade tangencial na parte mais externa da roda.

Solução:

(a) Se a cada $3s$ 6 voltas são completadas, então uma volta leva o tempo de $T = \frac{3}{6} = 0,5s$.

(b) Se $T = 0,5s$ então $f = \frac{1}{t} = \frac{1}{0,5} = 2Hz$.

(c) Se a roda completa uma volta a cada $0,5s$ então:

$$\begin{aligned} 2\pi &\to 0,5s \\ \theta &\to 2s \\ \theta &= \frac{4\pi}{0,5} = 8\pi. \end{aligned}$$

(d) Sendo $\omega = 2\cdot\pi\cdot f$ então $\omega = 2\cdot\pi\cdot 2 = 4\pi rad/s$.

(e) Sendo $v_t = \omega \cdot R$ então $v_t = 4\pi \cdot 0,25 = 1m/s$.

1.4 Aceleração Angular

1.4.1 Aceleração Angular Média α_m

Definição 1.4.1 A aceleração angular média α_m define a variação da velocidade angular $\Delta\omega$ que um ponto em movimento circular sofre por unidade de tempo. Nesse caso, seja ω_1 a velocidade angular de um objeto num instante t_1, e ω_2 a velociade angular do mesmo objeto num instante t_2 posterior a t_1 . No intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ a variação da velocidade angular é $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ e por definição a aceleração angular média é:

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{1.4}$$

Wiki 1.3 Aceleração Angular Instantânea α

A aceleração angular instantânea α é o valor limite ao qual tende a aceleração angular, quando o intervalo de tempo Δt tende a zero.

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{1.5}$$

OBS: Como $\Delta\omega$ é medido em radianos por segundo $\frac{rad}{s}$ e Δt em segundos, decorre que a aceleração angular tanto média quanto isntantânea é medida em radianos por segundo ao quadrado $\frac{rad}{s^2}$.

1.4.2 Relação entre Aceleração Escalar a e Aceleração Angular α

Se $v_1 = \omega_1 \cdot R$ e $v_2 = \omega_2 \cdot R$ então

$$v_2 - v_1 = (\omega_2 - \omega_1) \cdot R$$

e

$$\Delta v = \Delta\omega \cdot R$$

Dividindo os dois lados da equação acima por Δt temos:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \cdot R$$

Como $\frac{\Delta v}{\Delta t} = a$ e $\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \alpha$ temos que

Definição 1.4.2 — Relação entre as Acelerações linear e angular.

$$a = \alpha \cdot R \tag{1.6}$$

1.5 Análogos entre Grandezas Lineares e Angulares

Na Tabela 1.3 percebemos que cada grandeza linear possui uma análoga angular.

Assim também as equações de movimento linear possuem suas análogas no movimento circular conforme a Tabela 1.4

OBS: Uma vez que para uma volta completa o deslocamento angular é nulo, nas equações acima $\Delta\theta$ deve ser entendido como o ângulo descrito.

Tabela 1.3: Tabela de correlação entre Grandeza Linear e Grandeza Angular.

Grandeza linear	Garndeza angular
$S(m)$	$\theta(rad)$
$v(\frac{m}{s})$	$\omega(\frac{rad}{s})$
$a(\frac{m}{s^2})$	$\alpha(\frac{rad}{s^2})$

Tabela 1.4: Tabela de correlação entre equações de movimento Linear e Angular.

Equações	Movimento Linear	Movimento Angular
Velocidade Média	$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$	$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$
Eq horária do desloc	$S = S_0 + V \cdot t$	$\theta = \theta_0 + \omega \cdot t$
Eq. horária da Velocid.	$V = V_0 + a \cdot t$	$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$
Eq. horária de desloc. MCUV	$S = S_0 + V_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\alpha \cdot t^2}{2}$
Eq. de Torricelli	$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta S$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta$

Exercício Resolvido 1.2 Depois de descer uma ladeira uma bicicleta possui uma velocidade de $10m/s$, e após $10s$ sua velocidade é $5m/s$. Sendo o raio da roda da bicicleta $R = 25cm$ encontre a aceleração angular sofrida pela roda da bicicleta.

Solução:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{10} = \frac{V_f - V_i}{10 \cdot R}$$

Onde V_f é a velocidade linear final e V_i a velocidade linear inicial

$$\alpha = \frac{5 - 10}{2,5} = -2rad/s^2.$$

■

1.6 Relação de Transmissão

Em algumas situações é necessário transferir o movimento circular de um ponto para outro, para isso usamos o que chamamos de transmissão de movimento circular, que pode ser vários tipos. Um exemplo cotidiano de transmissão de movimento circular está nos automóveis, nesses veículos o movimento circular do motor é transferido para as rodas por meio do que chamamos de "transmissão" ou "câmbio".

1.6.1 Relação de Transmissão de movimento circular

A relação de transmissão de movimento circular é um valor numérico, geralmente expressado em forma de fração que nos permite encontrar a diferença de velocidade angular e consequente redução ou ampliação do torque entre dois eixos que são unidos por uma transmissão de movimento circular.

A diferença de velocidade entre os eixos ocorre devido a diferença dos raios das polias ou rodas de fricção, bem como a diferença entre o número de dentes das engrenagens nos casos em que essas são usadas.

Considerando no esquema abaixo R_a e n_1 como raio da polia motora e número de dentes da engrenagem motora respectivamente, podemos dizer que:

Para os itens a seguir, considere a polia a e engrenagem 1, como polia e engrenagem motoras.

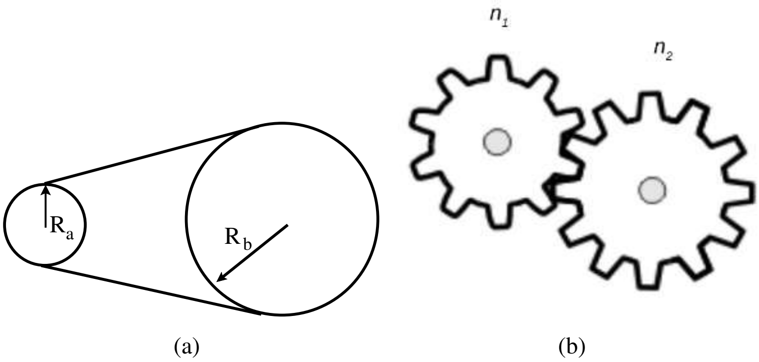


Figura 1.4: Diagrama esquemático de (a) polias acopladas com correia plana e (b) engrenamento.

1. Se $R_a = R_b$ a relação de transmissão é $\frac{R_b}{R_a} = \frac{1}{1}$ o que lemos "um para um". Nesse caso as duas polias possuem a mesma velocidade angular. O mesmo ocorre nos casos em que $n_1 = n_2$.
2. Se $R_a < R_b$, por exemplo $R_a = 1$ e $R_b = 10$, a relação fica $\frac{R_b}{R_a} = \frac{10}{1}$ e lemos "dez para um", nesse caso dizemos que houve uma redução da velocidade angular de a para b. As reduções de velocidade angular quase sempre estão associadas à necessidade de ampliação do torque disponível no conjunto. O mesmo ocorre nos casos em que $n_1 < n_2$.
3. Se $R_a > R_b$, por exemplo $R_a = 10$ e $R_b = 2$, a relação fica $\frac{R_b}{R_a} = \frac{2}{10}$ e lemos "dois para dez", nessa situação dizemos que houve uma ampliação da velocidade angular de a para b. As ampliações de velocidade têm como consequência uma diminuição do torque. O mesmo também ocorre nos casos em que $n_1 > n_2$.

Wiki 1.4 Para verificarmos se uma RT é de redução ou de ampliação devemos observar a mudança de velocidade angular que ocorrem do eixo motriz para o eixo movido.

Se a velocidade angular diminuir, temos uma **redução**. Caso ω aumente, temos uma **ampliação**,

Assim a RT fica:

$$\frac{\omega_{motriz}}{\omega_{movido}}$$

1.6.2 Aplicação das Relações de Transmissão

São inúmeros os casos em que são empregadas as relações de transmissão de movimento circular. Podemos citar como exemplos a transmissão da bicicleta, o câmbio do carro, os redutores dos guindastes na industria e até mesmo o relógio de ponteiros.

O caso 1 $[R_a = R_b]$ da subseção anterior é usado apenas para alterar a posição, direção ou sentido da árvore motora.

O caso 2 $[R_a < R_b]$ geralmente é aplicado quando há necessidade de ampliação do troque, por exemplo: um guindaste elevando um conteiner.

O caso 3 $[R_a > R_b]$é usado para ampliar a velocidade angular. Ex: Um ciclista que precisa atingir velocidades cada vez maiores.

OBS: Os motores do guindaste não possuem torque suficiente para elevar um conteiner, por isso são acoplados a um aparelho mecânico chamado redutor que reduz a velocidade angular e amplia o torque. Pelo mesmo motivo os motores dos automóveis sempre são acoplados aos câmbios, comumente conhecidos como "caixa de marchas". Caso o motor do automóvel tivesse torque suficiente para todos os regimes de funcionamento do carro, não precisaríamos usar as caixas de marchas.

1.6.3 Chegando a equação de relação de transmissão

A relação de transmissão também pode ser encontrada ou até mesmo projetada com o uso da equação de relação de transmissão. Extrairemos a equação de relação de transmissão analisando o esquema a seguir da figura 1.5:

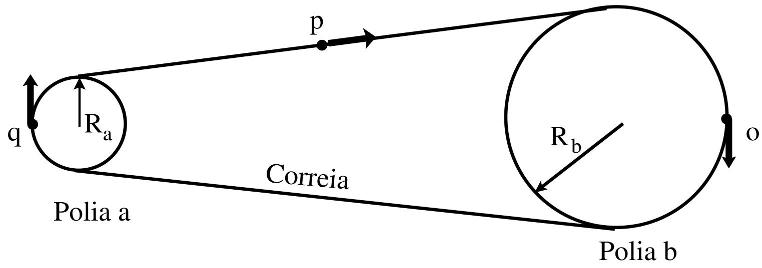


Figura 1.5: Diagrama esquemático de uma relação de transmissão.

O esquema acima representa uma relação de transmissão do tipo polia-correia plana. Nesse esquema, assumindo não haver escorregamento entre a correia e as polias podemos dizer que a velocidade linear V_p do ponto p sobre a correia é igual em módulo as velocidades tangenciais V_q e V_o dos ponto q e o também sobre a correia.

Assumindo que $V_q = \omega_a \cdot R_a$; $V_o = \omega_b \cdot R_b$ e que $V_q = V_o$ temos:

$$\omega_a \cdot R_a = \omega_b \cdot R_b \tag{1.7}$$

Dessa forma $\frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{R_b}{R_a}$

Com a equação (1.7) podemos projetar uma relação de transmissão que atenda nossas necessidades de redução ou ampliação da velocidade angular em transmissões do tipo polia-correia plana e rodas de fricção.

Exercício Resolvido 1.3 Duas polias A e B são ligadas por uma correia plana. $R_A = 0,2m$ e $R_B = 0,1m$. Determine a) o valor da relação de transmissão quando A é a polia motora, b) o valor da relação de transmissão quando B é a polia motora e c) Qual relação é de redução e qual é de ampliação?

Solução:

(a) *Se A é motora a relação fica* $\frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{R_B}{R_A} = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2} = 0,5.$

(b) *Se B é motora a relação fica* $\frac{\omega_B}{\omega_A} = \frac{R_A}{R_B} = \frac{0,2}{0,1} = \frac{2}{1} = 2.$

(c) *Quando A é motora a relação fica* < 1*, logo é uma relação de ampliação. Já quando B é motora a relação é* > 1 *o que indica ser uma relação de redução.*

■

II

Roteiros Experimentais

2 Partes de uma bicicleta 19

3 Roteiro 1 21

4 Roteiro 2 25

5 Roteiro 3 29

2. Partes de uma bicicleta

Com intuito de sanar quaisquer dúvidas com relação à nomenclatura associada às partes de um bicicleta, optamos por apresentar suscintamente uma convenção taxonômica, que está apresentada na Figura 2.1. Use-a como norteador para a realização dos roteiros práticos.

Figura 2.1: Imagem contendo separadamente todos os nomes associados à cada uma das partes de uma bicicleta.

3. Roteiro 1

Nivel de Autonomia:

1. **Objetivos: Observar, medir, testar uma lei**

2. **Conteúdos abordados: Período, Frequência, Espaço angular**

3. **Material: Bicicleta, giz e Cronômetro.**

4. **Grupo:** 5 componentes

Turma:	Data:

Componentes do grupo:

____

____

____

____

____

5. **Dentre as unidades de medida de ângulo podemos destacar três: Grau, Grado e Radiano. Cada uma das unidades descritas acima pode ser convertida em outra que melhor se encaixe à necessidade em questão, dessa forma, preencha a tabela abaixo:** 5min

Unidade/equiv.	**Grau**	**Grado**	**Radiano**
Grau	1		
Grado		1	
Radiano			1

Utilizando a Bicicleta

6. **Determine o ângulo em radianos existente entre dois raios adjacentes na roda da bicicleta.** 5min

7. **Como você encontrou essa medida? Faça uso de desenhos ou esquemas na sua explicação.** 5min

8. **Com o giz faça uma marca de fácil visualização em uma das rodas da bicicleta. Após feita a marca, gire a roda de forma a poder acompanhar o movimento da marca, use algum outro ponto da bicicleta como referência para contar o número de voltas que a roda está completando.** 15min

⚠ Dica 1: Escolha a roda que tem mais facilidade em girar.

Atividades

9. **Verificar a frequência com que a marca transpõe a referência. Verificar o período da roda.**

5min

⚠ Dica 2: para verificar a frequência, permita que a roda complete um número inteiro de voltas e divida este número pelo tempo gasto para percorrê-las. O período deve ser medido no mesmo movimento, necessitando obviamente de outro cronômetro.

10. **Preencha a tabela**

5min

Grandeza	Unidade	Valor	N^o Voltas	Tempo
Período			Nada	Nada
Frequência				

11. **Verifique por meio da relação $f = 1/T$ se a frequência encontrada é compatível com o período medido e preencha a tabela abaixo.**

5min

Período[T]	Frequência Encontrada	Frequência [f]

12. **A frequência encontrada é igual a f calculada com a relação $f = 1/T$? Se não, elabore em linhas gerais uma explicação para a diferença de valores.**

5min

4. Roteiro 2

Nivel de Autonomia: ● ●

1. **Objetivos: Observar, medir, desenvolver estratégia de solução de problemas**

2. **Conteúdos abordados: Variação angular, velocidade angular**

3. **Bicicleta, giz, cronômetro e trena**

4. **Grupo:** 5 componentes

Turma:	Data:

Componentes do grupo:

___

___

___

___

___

5. **As equações de MCU e MCUV são muito semelhantes as equações de MRU e MRUV. Dessa forma, complete a tabela abaixo.** 5min

	Velocidade Média	Equação Horária Posição	Equação Horária Velocidade	Equação Horária Posição Acelerado	Equação Torricelli
Movimento Linear					
Movimento Angular					

Utilizando a bicileta

6. **Com a roda da bicicleta girando cada grupo separadamente deve determinar a velocidade angular da roda.** Quem vai girar a roda é o professor, e a estratégia de solução fica por conta dos alunos. 5min

7. **Descreva como o grupo conseguiu encontrar a velocidade angular da roda.** 5min

8. **Determine as velocidades angular e linear da roda da bicicleta quando um colega percorre a distância entre duas referências consecutivas.** 5min

Distância (m)	Ângulo (rad)	Tempo (s)	Velocidade Linear (m/s)	Velocidade Angular (rad/s)

9. **Foi encontrado algum problema durante a atividade? Qual?**

5min

10. **Explique como a atividade foi solucionada.**

5min

11. **Baseado em todo o seu conhecimento sobre MC, como acredita que funcione o velocímetro de um automóvel?**

5min

5. Roteiro 3

Nivel de Autonomia:

1. **Objetivos: Encontrar problema, desenvolver estratégia de solução de problemas**

2. **Conteúdos abordados: Tipos de transmissão de movimento circular**

3. **Material: Bicicleta, trena, régua**

4. **Grupo:** 5 componentes

Atividades

Turma:	Data:

Componentes do grupo:

____

____

____

____

____

5. **Encontre a relação de transmissão entre a coroa (engrenagem maior) e a catraca (engrenagem menor) da bicicleta apresentada pelo professor.** 5min

6. **Discussão em grupo sobre a solução.** 5min

7. **Foi encontrado algum problema no desenvolvimento do trabalho acima? Descreva-o, faça uso de desenho para explicar.** 5min

8. **Novamente! Foi encontrado algum problema no desenvolvimento do trabalho acima? Descreva-o, faça uso de desenho para explicar.** 5min

9. **Em grupo desenvolvam uma estratégia para solucionar o problema. Discussão em grupo.** 5min

10. **Descreva como foi a solução encontrada no item anterior.** 5min

11. **Em grupo, elaborem uma apresentação para o restante da turma que trate do problema encontrado e da solução.** 5min

OBS: Apresentação!

Movimento Circular e Relação de Transmissão

Uma Sequência de Ensino

Mestrando Bruno Bellão Bassini

DSc. Filipe Leôncio Braga

PUBLICADO PELOS AUTORES

IFES.EDU.BR

Primeira Edição, Julho 2017

Prefácio

Este material foi elaborado para o professor de física, visando minimizar, para o conteúdo de cinemática circular, três das principais dificuldades encontradas por docentes na implementação de atividades práticas no ensino de física nas escolas brasileiras:

- Falta de equipamento;
- Falta de espaço específico para realização das práticas de ensino;
- Falta de tempo para elaboração das atividades práticas.

Ele conta com 7 capítulos que englobam conteúdo teórico, atividades práticas e questionário objetivo para o aluno sobre os tópicos abordados nesse assunto.

No capítulo 1, são tratados os conceitos teóricos: espaço angular, velocidade angular, aceleração angular, relações entre grandezas e equações lineares e angulares. Encerra-se com uma abordagem sobre relações de transmissão de movimento circular, onde fica evidente a impossibilidade de utilização da equação usual de relação de transmissão em atividades práticas que façam uso de engrenagens como a relação de transmissão em uma bicicleta. Visto isso, o material traz uma forma de abordagem desse problema que permite encontrar uma outra equação de relação de transmissão envolvendo elementos de fácil percepção em uma engrenagem, e que pode ser utilizada nas atividades práticas de ensino para este conteúdo. Neste capítulo ainda é possível encontrar três **Exercícios Resolvidos** (destacados do corpo do texto em formato de *box* em tom marrom), bem como estruturas chamadas de **Wikis** destacados em tom amarelo, que tem a função de explicar e apresentar um conteúdo extra aos estudantes mais curiosos, além das estruturas de observações relevantes que estão expressas por meio de ícone de **Obs:** e das **Definições** (destacadas do texto em formato de *box*).

No capítulo 2, apresentamos esquematicamente as partes integrantes de uma bicicleta, em caráter taxonômico, para dirimir quaisquer eventuais dúvidas que possam ocorrer ao longo do corpo do texto dos roteiros práticos.

Os capítulos 3, 4 e 5 são os roteiros de atividades práticas. Estes baseados quase que no uso exclusivo de uma bicicleta como material. Nesses capítulos são abordados de forma prática os conteúdos tratados no capítulo 1.

Todos os roteiros devem ser realizados em grupo e estão classificados quanto ao **Nível de Autonomia** que o aluno possui no desenvolver da prática (sempre apontados simbolicamente por pequenos círculos, preenchidos ou vazios, no canto superior direito da página inicial de cada capítulo). A saber, o Roteiro 1, capítulo 2, possui dois níveis de autonomia, 0 e 1 (dois pequenos círculos, um vazio e outro preenchido) que são níveis adequados ao que chamamos de laboratórios tradicionais. Nestes nível as atividades são do tipo "receita de bolo" e tem o claro objetivo de iniciar o aluno em atividades práticas. Já o segundo roteiro possui nível de autonomia 2 (dois pequenos círculos preenchidos), adequado ao que chamamos de laboratórios investigativos. O terceiro e último roteiro possui nível de autonomia 3 (três pequenos círculos preenchidos) que também está adequado aos laboratórios investigativos. Nos laboratórios investigativos, o objetivo maior é que os alunos se deparem com problemas e elaborem uma estratégia de solução dos mesmos.

Os roteiros foram desenvolvidos para uma aula de 50 minutos e cada atividade possui um **tempo máximo** de resolução que está explícito em seu enunciado (simbolicamente apontado por um **Relógio** no canto esquerdo da *box* contendo a atividade a ser desenvolvida). Este tempo deve ser respeitado sob pena de impossibilitar a realização das demais atividades do mesmo roteiro.

Tais roteiros foram pensados para uma prática em que o professor possa interagir com o aluno, ajudando nas situações em que tiver dúvidas.

Algumas **Dicas** foram incorparadas ao longo dos roteiros práticos por meio da iconografia de um ponto de exclamação no interior de triângulo vermelho, tais dicas podem ser muito úteis ao longo da execução dos roteiros.

Já o capítulo 6 traz um modelo de avaliação com 12 questões do tipo objetiva sobre o tema proposto, e capítulo 7 seu respectivo gabarito.

Aconselhamos aos colegas professores que desejarem utilizar este material não fornecer aos alunos os roteiros práticos com antecedência, pois os mesmos podem ser realizados em ambiente que não a escola, impossibilitando a interação entre os alunos e gerando pontos de ócio por parte dos alunos "apressadinhos" durante as atividades práticas nas aulas de física. Dessa maneira uma forma interessante de divulgar o material para os alunos seria entrega-lo fracionadamnete conforme a necessidade do dia.

Bom Trabalho!

Bruno e Filipe

Sumário

I Conteúdo

1 Conteúdo Teórico . . . 9

1.1 Movimento circular 9

1.2 Espaço Angular 10

1.2.1 Definição de Radianos . . . 10

1.3 Velocidade Angular 11

1.3.1 Velocidade Angular Média ω_m . . . 11

1.3.2 Relação entre Velocidade Escalar v e Velocidade Angular ω . . . 12

1.4 Aceleração Angular 13

1.4.1 Aceleração Angular Média α_m . . . 13

1.4.2 Relação entre Aceleração Escalar a e Aceleração Angular α . . . 13

1.5 Análogos entre Grandezas Lineares e Angulares 13

1.6 Relação de Transmissão 14

1.6.1 Relação de Transmissão de movimento circular . . . 14

1.6.2 Aplicação das Relações de Transmissão . . . 15

1.6.3 Chegando a equação de relação de transmissão . . . 16

1.7 Para o Professor 16

1.7.1 Dificuldade acerca da aplicação da equação de relação de transmissão . 16

1.7.2 Relação de transmissão para engrenagens . . . 17

1.8 Modelo de Apresentação para Aula Expositiva 18

II Roteiros Experimentais

2 Partes de uma bicicleta 25

3 Roteiro 1 27

4 Roteiro 2 31

5 Roteiro 3 35

III Questionários

6 Questionário Padrão 41

7 Questionário Padrão - Gabarito 45

Conteúdo

1 **Conteúdo Teórico** 9

1.1 Movimento circular

1.2 Espaço Angular

1.3 Velocidade Angular

1.4 Aceleração Angular

1.5 Análogos entre Grandezas Lineares e Angulares

1.6 Relação de Transmissão

1.7 Para o Professor

1.8 Modelo de Apresentação para Aula Expositiva

1. Conteúdo Teórico

1.1 Movimento circular

Quando um corpo ou objeto se desloca descrevendo uma trajetória com formato de circunferência, dizemos que este está realizando um movimento circular. Podemos citar como exemplo de movimento circular o movimento dos ponteiros de um relógio, o movimento de rotação da terra e o movimento das rodas de uma bicicleta - vide figura 1.1.

(a) (b)

Figura 1.1: (a) Presença do movimento circular nas rodas da bicicleta e (b) movimento circular nos ponteiros de um relógio.

Quando o movimento circular se dá de forma cíclica, ou seja, se repete em intervalos de tempo iguais, podemos associar a esse movimento duas características muito importantes, uma delas é o período $[T]$, que é o tempo necessário para a ocorrência de uma repetição. Por exemplo, o movimento de rotação da terra possui um período de aproximadamente 24 horas, que é o tempo necessário para que a terra complete uma volta completa ao redor de seu próprio eixo. Já o ponteiro dos segundos em um relógio possui um período de 1 minuto (60 segundos) que é o tempo gasto pelo ponteiro para completar uma volta no relógio. Como o período é uma medida de tempo, no sistema internacional utilizamos como unidade de medida de período a mesma unidade de medida que utilizamos para tempo, o segundo s. Outra característica importante que podemos verificar em fenômenos que se repetem regularmente é a frequência $[f]$ de repetição. A frequência nos informa quantas repetições ocorrem em uma unidade de tempo. Assim, a unidade de frequência é o inverso do segundo $\frac{1}{s}$ que é chamada de hertz $[Hz]$.

Na Tabela 1.1 Período e frequência se relacionam da seguinte forma:

Tabela 1.1: Tabela de Relação entre Intervalo de tempo e Ciclos/Revoluções Concluídas.

Intervalo de tempo	**Número de vezes que o fenômeno se repete**
Período T	1 vez
Unidade de tempo=1	f vezes

Assim, $f \cdot T = 1$ logo $f = \frac{1}{T}$ e $T = \frac{1}{f}$

1.2 Espaço Angular

Se um objeto sai da origem O e percorre uma trajetória circular até o ponto P, podemos determinar sua posição em cada instante de tempo por meio do comprimento do arco S que este descreve durante o movimento ou por meio do ângulo central θ. O ângulo θ permite determinar a posição do objeto em qualquer instante, por isso chamamos θ de espaço angular.

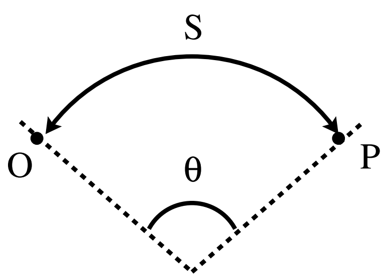


Figura 1.2: Diagrama esquemático de um espaço angular.

É comum trabalharmos em nosso cotidiano com ângulos medidos em graus, entretando para o estudo de movimento circular utilizaremos como medida de ângulo o radiano [rad].

1.2.1 Definição de Radianos

O radiano [rad] é um ângulo central que descreve na circunferência um arco com comprimento igual ao do raio da mesma circunferência. Por exemplo, se uma circunferência possui um raio de 1m, um ângulo de 1rad descreve sobre esta circunferência um arco cujo o comprimento também é de 1m. (Vide Figura 1.3)

Toda vez que dividimos o comprimento L de uma circunferência por seu diâmetro D encontramos o valor de π, assim:

$$L = \pi \cdot D.$$

Sabendo que $D = 2 \cdot R$, temos:

$$L = 2\pi \cdot R$$

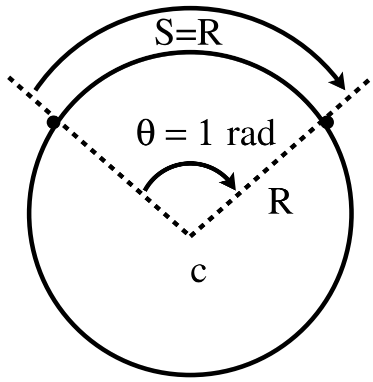


Figura 1.3: Diagrama esquemático de um círculo demonstrando a relação de radianos.

O ângulo central em radianos se relaciona com o comprimento S da circunferência da seguinte forma:

Tabela 1.2: Tabela demonstrativa das relações entre medidas angulares e medidas lineares.

Radiano	**Comprimento do arco**
1rad	R(Raio da circunferência)
θrad	S

Assim temos que: $S = R \cdot \theta$.
No caso em que S é uma circunferência completa:

$$S = L,$$

então :

$$R \cdot \theta = 2 \cdot \pi \cdot R$$

Logo, uma circunferência completa possui um ângulo central θ de $2 \cdot \pi rad$.

Wiki 1.1 Outra medida de ângulo conhecida é o grado. Uma circunferência possui 400 grados. ■

1.3 Velocidade Angular

1.3.1 Velocidade Angular Média ω_m

Definição 1.3.1 A velocidade angular média define a variação ângular $\Delta\theta$ que um ponto em movimento circular percorre por unidade de tempo. Nesse caso, seja θ_1 o espaço angular de um objeto num instante t_1, e $\theta 2$ o espaço angular do mesmo objeto num instante t_2 posterior a t_1 . No intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ a variação do espaço angular é $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ e por definição a velocidade angular média é:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{1.1}$$

Wiki 1.2 Velocidade angular instantânea ω

A velocidade angular instantânea ω é o valor limite ao qual tende a velocidade angular, quando o intervalo de tempo Δt tende a zero.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \tag{1.2}$$

Como $\Delta\theta$ é medido em radianos e Δt em segundos, decorre que a velocidade angular tanto média quanto isntantânea é medida em radianos por segundo $[\frac{rad}{s}]$.

1.3.2 Relação entre Velocidade Escalar v e Velocidade Angular ω

Se $S_1 = \theta_1 \cdot R$ e $S_2 = \theta_2 \cdot R$ então:

$$S_2 - S_1 = (\theta_2 - \theta_1) \cdot R$$

e

$$\Delta S = \Delta\theta \cdot R$$

Dividindo os dois lados da equação acima por Δt temos:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \cdot R$$

Como $v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ e $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$; temos que:

Definição 1.3.2 — Relação entre v e ω.

$$v = \omega \cdot R \tag{1.3}$$

Exercício Resolvido 1.1 Uma roda de bicicleta com raio máximo $R = 0,25m$ gira sobre seu eixo de rotação 6 vezes a cada 3 segundos. Encontre a) o período de rotação b) a frequência de rotação c) o ângulo descrito em 2 segundos d) a velocidade angular e e) a velocidade tangencial na parte mais externa da roda.

Solução:

(a) *Se a cada* $3s$ 6 *voltas são completadas, então uma volta leva o tempo de* $T = \frac{3}{6} = 0,5s$.

(b) *Se* $T = 0,5s$ *então* $f = \frac{1}{t} = \frac{1}{0,5} = 2Hz$.

(c) *Se a roda completa uma volta a cada* $0,5s$ *então:*

$$\begin{aligned} 2\pi &\to 0,5s \\ \theta &\to 2s \\ \theta &= \frac{4\pi}{0,5} = 8\pi. \end{aligned}$$

(d) *Sendo* $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ *então* $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 4\pi rad/s$.

(e) *Sendo* $v_t = \omega \cdot R$ *então* $v_t = 4\pi \cdot 0,25 = 1m/s$.

1.4 Aceleração Angular

1.4.1 Aceleração Angular Média α_m

Definição 1.4.1 A aceleração angular média α_m define a variação da velocidade angular $\Delta\omega$ que um ponto em movimento circular sofre por unidade de tempo. Nesse caso, seja ω_1 a velocidade angular de um objeto num instante t_1, e ω_2 a velociade angular do mesmo objeto num instante t_2 posterior a t_1 . No intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ a variação da velocidade angular é $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ e por definição a aceleração angular média é:

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{1.4}$$

Wiki 1.3 Aceleração Angular Instantânea α

A aceleração angular instantânea α é o valor limite ao qual tende a aceleração angular, quando o intervalo de tempo Δt tende a zero.

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{1.5}$$

OBS: Como $\Delta\omega$ é medido em radianos por segundo $\frac{rad}{s}$ e Δt em segundos, decorre que a aceleração angular tanto média quanto isntantânea é medida em radianos por segundo ao quadrado $\frac{rad}{s^2}$.

1.4.2 Relação entre Aceleração Escalar a e Aceleração Angular α

Se $v_1 = \omega_1 \cdot R$ e $v_2 = \omega_2 \cdot R$ então

$$v_2 - v_1 = (\omega_2 - \omega_1) \cdot R$$

e

$$\Delta v = \Delta\omega \cdot R$$

Dividindo os dois lados da equação acima por Δt temos:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \cdot R$$

Como $\frac{\Delta v}{\Delta t} = a$ e $\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \alpha$ temos que

Definição 1.4.2 — Relação entre as Acelerações linear e angular.

$$a = \alpha \cdot R \tag{1.6}$$

1.5 Análogos entre Grandezas Lineares e Angulares

Na Tabela 1.3 percebemos que cada grandeza linear possui uma análoga angular.

Assim também as equações de movimento linear possuem suas análogas no movimento circular conforme a Tabela 1.4

OBS: Uma vez que para uma volta completa o deslocamento angular é nulo, nas equações acima $\Delta\theta$ deve ser entendido como o ângulo descrito.

Tabela 1.3: Tabela de correlação entre Grandeza Linear e Grandeza Angular.

Grandeza linear	Garndeza angular
$S(m)$	$\theta(rad)$
$v(\frac{m}{s})$	$\omega(\frac{rad}{s})$
$a(\frac{m}{s^2})$	$\alpha(\frac{rad}{s^2})$

Tabela 1.4: Tabela de correlação entre equações de movimento Linear e Angular.

Equações	Movimento Linear	Movimento Angular
Velocidade Média	$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$	$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$
Eq horária do desloc	$S = S_0 + V \cdot t$	$\theta = \theta_0 + \omega \cdot t$
Eq. horária da Velocid.	$V = V_0 + a \cdot t$	$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$
Eq. horária de desloc. MCUV	$S = S_0 + V_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\alpha \cdot t^2}{2}$
Eq. de Torricelli	$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta S$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta$

Exercício Resolvido 1.2 Depois de descer uma ladeira uma bicicleta possui uma velocidade de $10m/s$, e após $10s$ sua velocidade é $5m/s$. Sendo o raio da roda da bicicleta $R = 25cm$ encontre a aceleração angular sofrida pela roda da bicicleta.

Solução:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{10} = \frac{V_f - V_i}{10 \cdot R}$$

Onde V_f é a velocidade linear final e V_i a velocidade linear inicial

$$\alpha = \frac{5 - 10}{2,5} = -2rad/s^2.$$

■

1.6 Relação de Transmissão

Em algumas situações é necessário transferir o movimento circular de um ponto para outro, para isso usamos o que chamamos de transmissão de movimento circular, que pode ser vários tipos. Um exemplo cotidiano de transmissão de movimento circular está nos automóveis, nesses veículos o movimento circular do motor é transferido para as rodas por meio do que chamamos de “transmissão” ou “câmbio”.

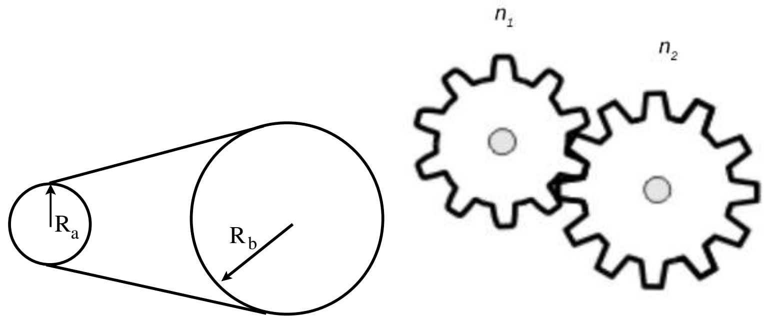
1.6.1 Relação de Transmissão de movimento circular

A relação de transmissão de movimento circular é um valor numérico, geralmente expressado em forma de fração que nos permite encontrar a diferença de velocidade angular e consequente redução ou ampliação do torque entre dois eixos que são unidos por uma transmissão de movimento circular.

A diferença de velocidade entre os eixos ocorre devido a diferença dos raios das polias ou rodas de fricção, bem como a diferença entre o número de dentes das engrenagens nos casos em que essas são usadas.

Considerando no esquema abaixo R_a e n_1 como raio da polia motora e número de dentes da engrenagem motora respectivamente, podemos dizer que:

Para os itens a seguir, considere a polia a e engrenagem 1, como polia e engrenagem motoras.



(a) (b)

Figura 1.4: Diagrama esquemático de (a) polias acopladas com correia plana e (b) engrenamento.

1. Se $R_a = R_b$ a relação de transmissão é $\frac{R_b}{R_a} = \frac{1}{1}$ o que lemos "um para um". Nesse caso as duas polias possuem a mesma velocidade angular. O mesmo ocorre nos casos em que $n_1 = n_2$.
2. Se $R_a < R_b$, por exemplo $R_a = 1$ e $R_b = 10$, a relação fica $\frac{R_b}{R_a} = \frac{10}{1}$ e lemos "dez para um", nesse caso dizemos que houve uma redução da velocidade angular de a para b. As reduções de velocidade angular quase sempre estão associadas à necessidade de ampliação do torque disponível no conjunto. O mesmo ocorre nos casos em que $n_1 < n_2$.
3. Se $R_a > R_b$, por exemplo $R_a = 10$ e $R_b = 2$, a relação fica $\frac{R_b}{R_a} = \frac{2}{10}$ e lemos "dois para dez", nessa situação dizemos que houve uma ampliação da velocidade angular de a para b. As ampliações de velocidade têm como consequência uma diminuição do torque. O mesmo também ocorre nos casos em que $n_1 > n_2$.

Wiki 1.4 Para verificarmos se uma RT é de redução ou de ampliação devemos observar a mudança de velocidade angular que ocorrem do eixo motriz para o eixo movido.

Se a velocidade angular diminuir, temos uma **redução**. Caso ω aumente, temos uma **ampliação**,

Assim a RT fica:

$$\frac{\omega_{motriz}}{\omega_{movido}}$$

1.6.2 Aplicação das Relações de Transmissão

São inúmeros os casos em que são empregadas as relações de transmissão de movimento circular. Podemos citar como exemplos a transmissão da bicicleta, o câmbio do carro, os redutores dos guindastes na industria e até mesmo o relógio de ponteiros.

O caso 1 $[R_a = R_b]$ da subseção anterior é usado apenas para alterar a posição, direção ou sentido da árvore motora.

O caso 2 $[R_a < R_b]$ geralmente é aplicado quando há necessidade de ampliação do troque, por exemplo: um guindaste elevando um conteiner.

O caso 3 $[R_a > R_b]$é usado para ampliar a velocidade angular. Ex: Um ciclista que precisa atingir velocidades cada vez maiores.

OBS: Os motores do guindaste não possuem torque suficiente para elevar um conteiner, por isso são acoplados a um aparelho mecânico chamado redutor que reduz a velocidade angular e amplia o torque. Pelo mesmo motivo os motores dos automóveis sempre são acoplados aos câmbios, comumente conhecidos como "caixa de marchas". Caso o motor do automóvel tivesse torque suficiente para todos os regimes de funcionamento do carro, não precisaríamos usar as caixas de marchas.

1.6.3 Chegando a equação de relação de transmissão

A relação de transmissão também pode ser encontrada ou até mesmo projetada com o uso da equação de relação de transmissão. Extrairemos a equação de relação de transmissão analisando o esquema a seguir da figura 1.5:

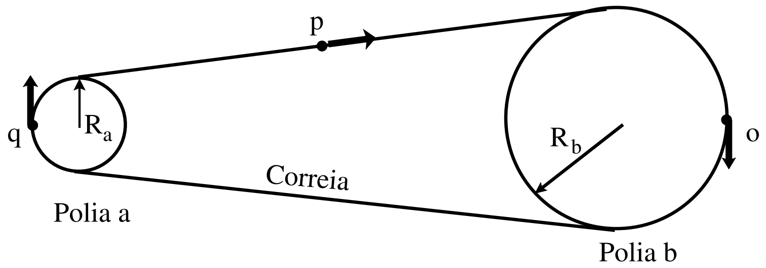


Figura 1.5: Diagrama esquemático de uma relação de transmissão.

O esquema acima representa uma relação de transmissão do tipo polia-correia plana. Nesse esquema, assumindo não haver escorregamento entre a correia e as polias podemos dizer que a velocidade linear V_p do ponto p sobre a correia é igual em módulo as velocidades tangenciais V_q e V_o dos ponto q e o também sobre a correia.

Assumindo que $V_q = \omega_a \cdot R_a$; $V_o = \omega_b \cdot R_b$ e que $V_q = V_o$ temos:

$$\omega_a \cdot R_a = \omega_b \cdot R_b \tag{1.7}$$

Dessa forma $\frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{R_b}{R_a}$

Com a equação (1.7) podemos projetar uma relação de transmissão que atenda nossas necessidades de redução ou ampliação da velocidade angular em transmissões do tipo polia-correia plana e rodas de fricção.

Exercício Resolvido 1.3 Duas polias A e B são ligadas por uma correia plana. $R_A = 0,2m$ e $R_B = 0,1m$. Determine a) o valor da relação de transmissão quando A é a polia motora, b) o valor da relação de transmissão quando B é a polia motora e c) Qual relação é de redução e qual é de ampliação?

Solução:

(a) *Se A é motora a relação fica* $\frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{R_B}{R_A} = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2} = 0,5.$

(b) *Se B é motora a relação fica* $\frac{\omega_B}{\omega_A} = \frac{R_A}{R_B} = \frac{0,2}{0,1} = \frac{2}{1} = 2.$

(c) *Quando A é motora a relação fica* < 1*, logo é uma relação de ampliação. Já quando B é motora a relação é* > 1 *o que indica ser uma relação de redução.*

1.7 Para o Professor

1.7.1 Dificuldade acerca da aplicação da equação de relação de transmissão

A equação (1.7) tem aplicação incontestável nas relações dos tipos poli-correia plana e discos de fricção, entretanto autores tem associado a mesma equação à transmissões de bicicletas, que são do tipo engrenagem-corrente.

Contestamos a aplicação da expressão (1.7) nas transmissões que possuem engrenagens, uma vez que no cotidiano, no caso real, como analisar a transmissão de uma bicicleta - vide figura 1.6, é impossível determinar o raio efetivo da engrenagem visto que esta possui raio contínuo da base do dente até o pico, o que gera infinitos valores para este.

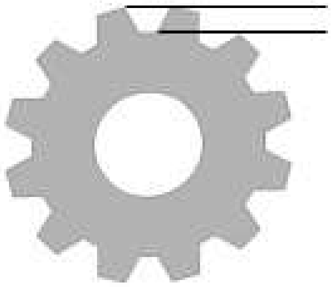


Figura 1.6: Diagrama esquemático de uma relação entre raios e sistemas de polias.

Uma vez que não se pode determinar o raio efetivo da engrenagem, podemos afirmar que a 1.7 é inadequada para encontrar a relação em transmissões que fazem o uso de engrenagens. Assim, outra equação que atenda as particularidades das engrenagens deve ser encontrada.

1.7.2 Relação de transmissão para engrenagens

Quando analisamos o caso polia-correia plana com o intuito de desenvolver a (1.7) fizemos uso de ferramentas para nos auxiliar na dedução. Essas ferramentas eram os pontos p,q,o e as velocidades destes pontos, que associadas aos raios e as velocidades angulares das polias sintetizavam a equação (1.7).

Conforme exposto, não podemos contar com o raio quando tratamos de engrenagens (Pelo menos no nível de ensino de médio), porém podemos fazer uso do número de dentes, que além de ser um inteiro é função do raio em cáculos de engenharia.

Para encontrar uma equação de relação de transmissão que atenda as particularidades das engrenagens faremos uso da seguinte imagem - vide figure 1.7.

Se analisarmos um ponto imaginário m fixo no referencial do sistema que esteja simultaneamente situado no ponto de contato entre os dentes das engrenagens conforme a figure 1.7, podemos dizer que em uma unidade de tempo o número de dentes N_1 da engrangem que transpõe m é

$$N_1 = n_1 \cdot f_1.$$

Sendo f_1 a frequência da engrenagem 1 e n_1 o número de dentes da mesma.

Da mesma forma o número de dentes N_2 da engrenagem 2 que transpõe m é

$$N_2 = n_2 \cdot f_2.$$

Sendo f_2 a frequência da engrenagem 2 e n_2 seu número de dentes.

Uma vez que no ponto m cada dente da engrenagem 1 está acoplado a um dente da engrenagem 2, podemos dizer que para a mesma unidade de tempo $N_1 = N_2$.

Dessa forma,

$$n_1 \cdot f_1 = n_2 \cdot f_2. \tag{1.8}$$

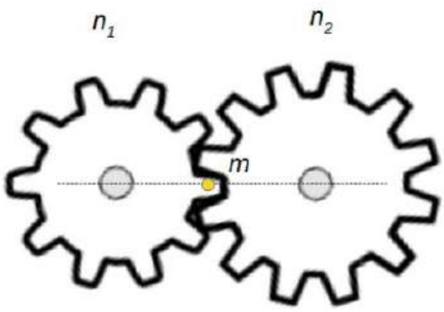


Figura 1.7: Diagrama esquemático de duas polias acopladas.

Assim,

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{f_2}{f_1} \tag{1.9}$$

Considerando que $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ concluimos que

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \tag{1.10}$$

que nos retorna uma relação de transmissão não com base nos raios das engrenagens mas corretamente no quantitativo de dentes de uma dada engrenagem.

1.8 Modelo de Apresentação para Aula Expositiva

Segue um modelo de apresentação para exposição do conteúdo programático de Movimento Circular.

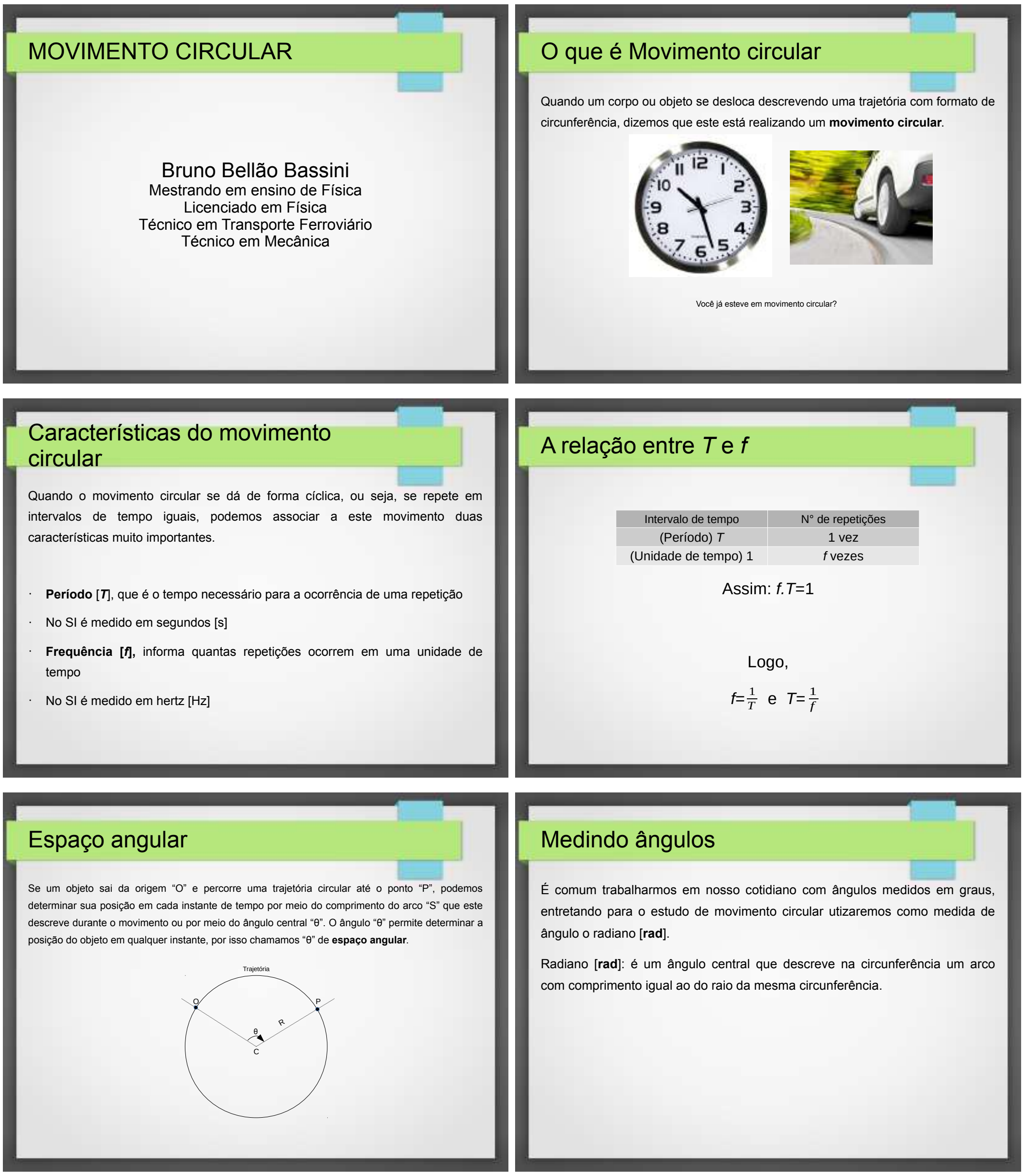


Figura 1.8: Representação esquemática de modelo de apresentação para exposição do conteúdo de Movimento Circular.

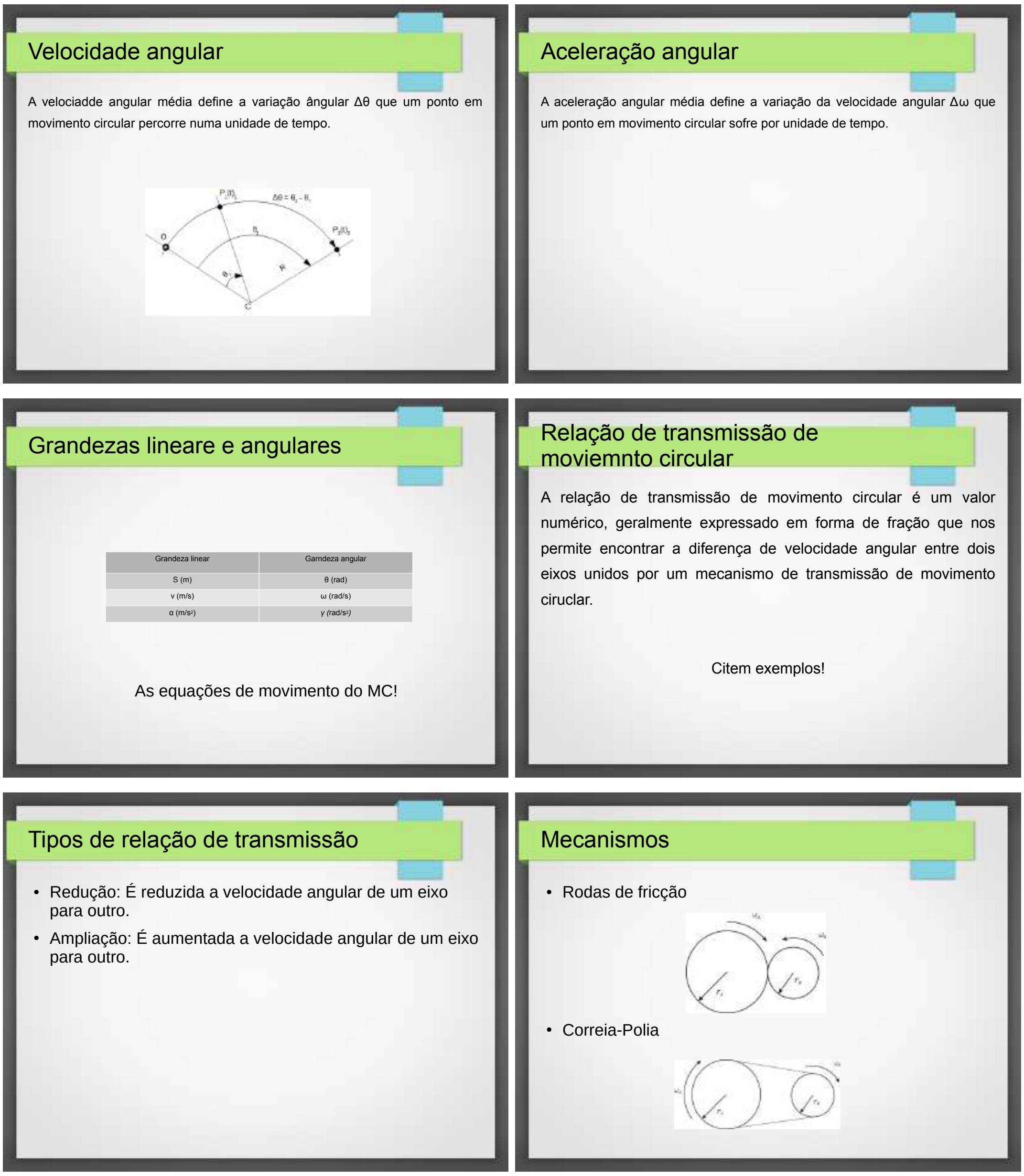


Figura 1.9: Representação esquemática de modelo de apresentação para exposição do conteúdo de Movimento Circular.

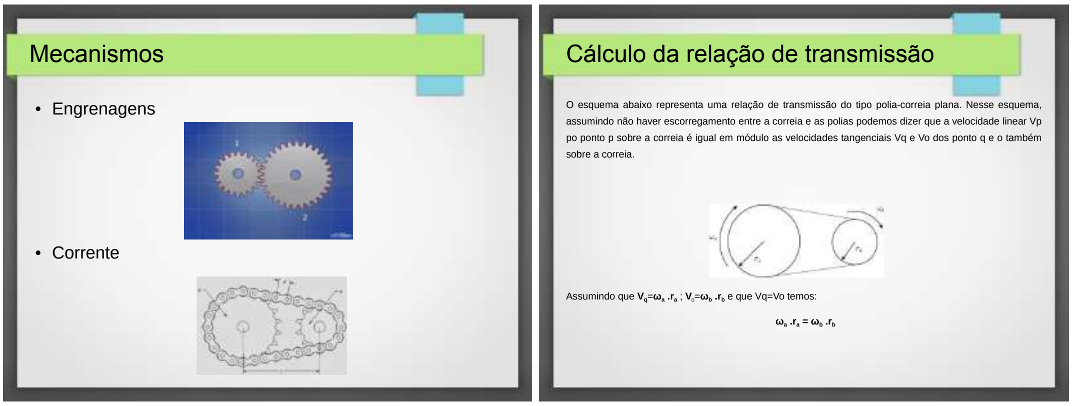


Figura 1.10: Representação esquemática de modelo de apresentação para exposição do conteúdo de Movimento Circular.

II Roteiros Experimentais

2	Partes de uma bicicleta	25
3	Roteiro 1	27
4	Roteiro 2	31
5	Roteiro 3	35

2. Partes de uma bicicleta

Com intuito de sanar quaisquer dúvidas com relação à nomenclatura associada às partes de um bicicleta, optamos por apresentar suscintamente uma convenção taxonômica, que está apresentada na Figura 2.1. Use-a como norteador para a realização dos roteiros práticos.

Figura 2.1: Imagem contendo separadamente todos os nomes associados à cada uma das partes de uma bicicleta.

3. Roteiro 1

Nivel de Autonomia:

1. **Objetivos: Observar, medir, testar uma lei**

2. **Conteúdos abordados: Período, Frequência, Espaço angular**

3. **Material: Bicicleta, giz e Cronômetro.**

4. **Grupo:** 5 componentes

Turma:	Data:

Componentes do grupo:

____

____

____

____

____

OBS: Neste roteiro **NÃO** é permitido o uso de calculadoras científicas ou smartphones!

5. **Dentre as unidades de medida de ângulo podemos destacar três: Grau, Grado e Radiano. Cada uma das unidades descritas acima pode ser convertida em outra que melhor se encaixe à necessidade em questão, dessa forma, preencha a tabela abaixo:** 5min

Unidade/equiv.	**Grau**	**Grado**	**Radiano**
Grau	1	$1,111$	$0,017$
Grado	$0,9^o$	1	$0,015^o$
Radiano	$57,29^o$	$63,66^o$	1

Utilizando a Bicicleta

6. **Determine o ângulo em radianos existente entre dois raios adjacentes na roda da bicicleta.** 5min

$10^o = 0,17rad$

7. **Como você encontrou essa medida? Faça uso de desenhos ou esquemas na sua explicação.** 5min

Como a roda da bicicleta possui 36 raios espaçados igualmente o ângulo entre 2 raios adjacentes é de $(360^o/36) = 10^o = 0,17rad$

8. **Com o giz faça uma marca de fácil visualização em uma das rodas da bicicleta. Após feita a marca, gire a roda de forma a poder acompanhar o movimento da marca, use algum outro ponto da bicicleta como referência para contar o número de voltas que a roda está completando.** 15min

⚠ Dica 1: Escolha a roda que tem mais facilidade em girar.

Atividades

9. **Verificar a frequência com que a marca transpõe a referência. Verificar o período da roda.**

5min

⚠ Dica 2: para verificar a frequência, permita que a roda complete um número inteiro de voltas e divida este número pelo tempo gasto para percorre-las. O período deve ser medido no mesmo movimento, necessitando obviamente de outro cronômetro.

10. **Preencha a tabela**

5min

Grandeza	Unidade	Valor	N^o Voltas	Tempo
Período	s	x	Nada	Nada
Frequência	Hz	y	z	w

11. **Verifique por meio da relação $f = 1/T$ se a frequência encontrada é compatível com o período medido e preencha a tabela abaixo.**

5min

Período[T]	Frequência Encontrada	Frequência [f]
Feedback do aluno	*Feedback do aluno*	*Feedback do aluno*

12. **A frequência encontrada é igual a f calculada com a relação $f = 1/T$? Se não, elabore em linhas gerais uma explicação para a diferença de valores.**

5min

Os valores diferem uma vez que a roda vai perdendo velocidade a cada volta.

4. Roteiro 2

Nivel de Autonomia: ●●

1. **Objetivos: Observar, medir, desenvolver estratégia de solução de problemas**

2. **Conteúdos abordados: Variação angular, velocidade angular**

3. **Bicileta, giz, cronômetro e trena**

4. **Grupo:** 5 componentes

Turma:	Data:

Componentes do grupo:

____

____

____

____

____

5. **As equações de MCU e MCUV são muito semelhantes as equações de MRU e MRUV. Dessa forma, complete a tabela abaixo.** 5min

	Velocidade Média	Equação Horária Posição	Equação Horária Velocidade	Equação Horária Posição Acelerado	Equação Torricelli
Movimento Linear	$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$	$S = S_0 + v_0 t$	$V = V_0 + At$	$S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S$
Movimento Angular	$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$

Utilizando a bicileta

6. **Com a roda da bicicleta girando cada grupo separadamente deve determinar a velocidade angular da roda.** (quem vai girar a roda é o professor e a estratégia de solução fica por conta dos alunos!) 5min

7. **Descreva como o grupo conseguiu encontrar a velocidade angular da roda.** 5min

Com o giz faça uma referência na roda, ou utilize o pisto como referência. Conte um determinado número de voltas completas da roda. Como cada volta possui $2\pi rad$ de comprimento angular

$$\omega = \frac{2\pi \cdot n^o\ voltas}{tempo}$$

8. **Determine as velocidades angular e linear da roda da bicicleta quando um colega percorre a distância entre duas referências consecutivas.** Espera-se que o grupo risque as referências com o giz e meça a distância entre elas. 5min

Distância (m)	Ângulo (rad)	Tempo (s)	Velocidade Linear (m/s)	Velocidade Angular (rad/s)

9. **Foi encontrado algum problema durante a atividade? Qual?**

5min

Feedback do aluno

10. **Explique como a atividade foi solucionada.**

5min

Como raio efetivo da roda não é conhecido, para encontrar o ângulo é melhor que se contem o n^o de raios que transpassem uma referência (ex. o quadro)

11. **Baseado em todo o seu conhecimento sobre MC, como acredita que funcione o velocímetro de um automóvel?**

5min

Conhecendo a velocidade angular da roda bem como o raio da mesma o velocímetro consegue calcular a velocidade linear do carro.

5. Roteiro 3

Nivel de Autonomia:

1. **Objetivos: Encontrar problema, desenvolver estratégia de solução de problemas**

2. **Conteúdos abordados: Tipos de transmissão de movimento circular**

3. **Bicicleta, trena, régua**

4. **Grupo:** 5 componentes

Atividades

Turma:	Data:

Componentes do grupo:

5. **Encontre a relação de transmissão entre a coroa (engrenagem maior) e a catraca (engrenagem menor) da bicicleta apresentada pelo professor.** 5min

6. **Discussão em grupo sobre a solução.** 5min

Os alunos irão tentar utilizar a relação $\omega_A R_A = \omega_B R_B$, porém sem êxito

7. **Foi encontrado algum problema no desenvolvimento do trabalho acima? Descreva-o, faça uso de desenho para explicar.** 5min

⚠ Dica 1: Falar a respeito dos raios nas engrenagens

Feedback do aluno

8. **Novamente! Foi encontrado algum problema no desenvolvimento do trabalho acima? Descreva-o, faça uso de desenho para explicar.** 5min

⚠ Dica 2: explanação a respeito da influência do número de dentes na relação de tranmissão

Não é possível encontrar o raio da engrenagem

9. **Em grupo desenvolvam uma estratégia para solucionar o problema. Discussão em grupo.** 5min

10. **Descreva como foi a solução encontrada no item anterior.** 5min

A relação pode ser encontrada pelo deslocamento angular das engrenagens ou pela relação $\omega_1 n_1 = \omega_2 n_2$

11. **Em grupo, elaborem uma apresentação para o restante da turma que trate do problema encontrado e da solução.**

5min

OBS: Apresentação!

Questionários

6 Questionário Padrão 41

7 Questionário Padrão - Gabarito 45

6. Questionário Padrão

Nome:	Turma:

No desenho abaixo o raio R_a da roda A é $3R_b/2$

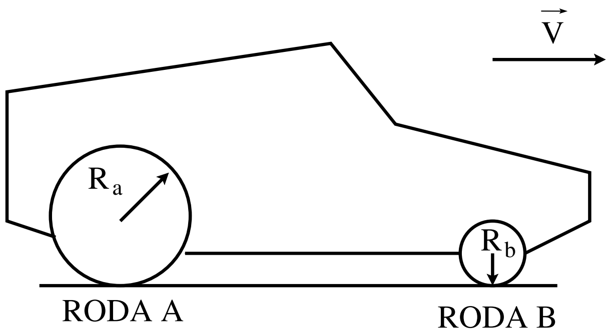


Figura 6.1: Diagrama esquemático de um carro.

Exercício 6.1 Sabendo que o carro se desloca sobre um piso plano a uma velocidade v sem que as rodas escorreguem, é correto afirmar sobre a frequência de rotação: ■

(a) A frequência de rotação de A é maior que a de B.
(b) A frequência de rotação de A é igual a de B visto que v é a mesma para as duas rodas.
(c) A frequência de rotação de A é menor que a de B.
(d) A velocidade linear v em nada influencia na frequência de rotação de qualquer das rodas, uma vez que v é linear e a frequência é angular.

Exercício 6.2 Sabendo que o carro se desloca sobre um piso plano a uma velocidade v sem que as rodas escorreguem, é correto afirmar sobre o período de rotação: ■

(a) O período de A é maior que a de B.
(b) O período de A é igual a de B visto que v é a mesma para as duas rodas.
(c) O período de A é menor que a de B.
(d) A velocidade linear v em nada influencia o período de qualquer das rodas, uma vez que v é linear e o período é uma grandeza angular.

Exercício 6.3 Considerando para a figura 7.1 que o raio da roda A é de $150cm$ e que a velocidade v do carro é de $10\pi m/s$ determine a velocidade angular da roda B. ■

(a) $10\pi rad/s$
(b) $100\pi rad/s$
(c) $15\pi rad/s$
(d) $15\pi m/s$

Exercício 6.4 O valor em graus de um radiano é: ■

(a) $180^o/\pi$
(b) $360^o/\pi$
(c) $90^o/\pi$
(d) $270^o/\pi$

O Desenho a seguir deverá ser utilizado nas questões 7.5 e 7.6.

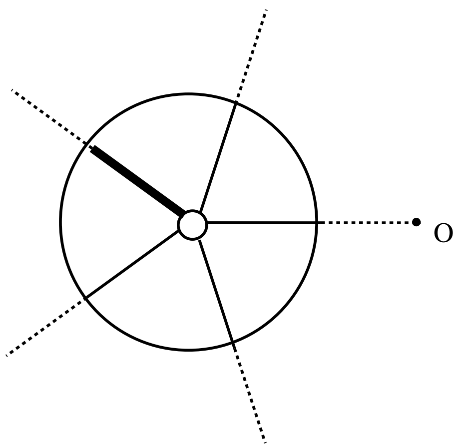


Figura 6.2: Diagrama esquemático da roda contendo cinco raios.

Uma roda qualquer possui 5 raios (estrutura que liga o cubo ao aro) conforme o desenho abaixo. Em determinado intervalo de tempo 6 projeções de raios (linhas tracejadas) transpoem o ponto O.

Exercício 6.5 Determine o ângulo descrito pela roda no intervalo de tempo dado acima. Assuma que a roda gire no sentido horário e que os raios estão espaçados igualmente. ■

(a) 432^o
(b) -432^o
(c) 72^o
(d) -72^o

Exercício 6.6 Determine o deslocamento angular do raio mais espesso no intervalo de tempo descrito acima. Assuma que a roda gire no sentido horário e que os raios estão espaçados igualmente. ■

(a) 432^o
(b) -432^o
(c) 72^o
(d) -72^o

Exercício 6.7 Considerando que um dia terrestre possui 24h, qual a frequência de rotação do movimento de rotação da terra? ■

(a) $1/86400Hz$
(b) $1/8640Hz$
(c) $1/24Hz$
(d) $86400s$

Exercício 6.8 O disco abaixo possui raio "R" e está girando com centro de giro em O. A respeito do movimento circular no disco podemos afirmar que: ■

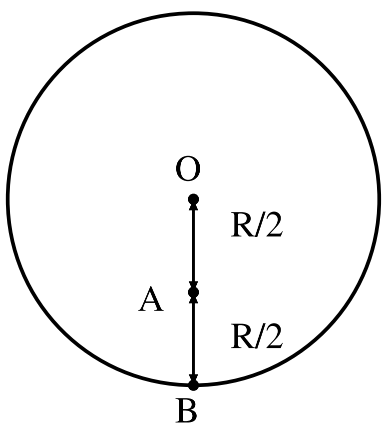


Figura 6.3: Diagrama esquemático de um disco de raio R.

(a) A velocidade tangencial no ponto A é igual à velocidade tangencial no ponto B.
(b) A velocidade tangencial no ponto A é menor que a velocidade tangencial no ponto B.
(c) A frequência de rotação em A é menor que em B.
(d) A velocidade angular do ponto A é menor a de B.

Exercício 6.9 Num determinado instante uma roda que sofre uma aceleração angular de $\pi rad/s^2$ está com velocidade angular de $2\pi rad/s$. Após algum tempo a velocidade angular passa a ser de $10\pi rad/s$. Qual a distância angular percorrida por um ponto fixo na roda? ■

(a) $48\pi rad$
(b) $50\pi rad$
(c) $24\pi rad$
(d) $100\pi rad$

Para as questões 6.10, e 6.11 use o esquema abaixo.

O esquema é composto de 6 rodas de fricção (A,B,C,D,E e F) que estão acopladas entre si conforme a disposição abaixo. Não existe escorregamento entre as rodas e a roda C é solidária a roda B. A roda A é a roda motriz do sistema, sendo seu raio igual ao da roda D. O raio da roda B é igual ao raio da roda E. (F<C<A<B)

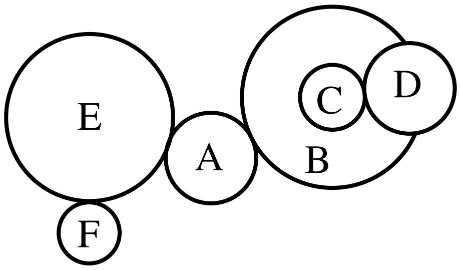


Figura 6.4: Diagrama esquemático de rodas de fricção com raios distintos.

Exercício 6.10 Podemos dizer a respeito da relação de transmissão da roda A até a roda D: ■

(a) É uma relação de redução.
(b) É uma relação de ampliação.
(c) Não é possível fazer considerações sem conhecer os raios.
(d) Não existe relação uma vez que o raio de A é igual ao de D.

Exercício 6.11 Podemos dizer a respeito da relação de transmissão da roda A até a roda F: ■

(a) É uma relação de redução.
(b) É uma relação de ampliação.
(c) Não é possível fazer considerações sem conhecer os raios.
(d) Não é possível fazer considerações uma vez que o raio de A é muito maior que o raio de F.

Exercício 6.12 A frequência de rotação do ponteiro dos segundos em um relógio de ponteiros é: ■

(a) $60Hz$
(b) $(1/60)s$
(c) $60s$
(d) $(1/60)Hz$

7. Questionário Padrão - Gabarito

Nome:	Turma:

OBS: As respostas do questionário estão escritas de vermelho.

No desenho abaixo o raio R_a da roda A é $3R_b/2$

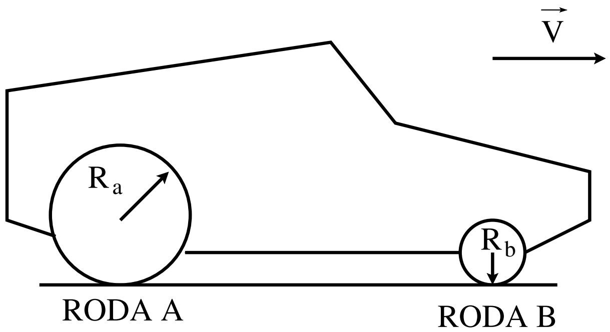


Figura 7.1: Diagrama esquemático de um carro.

Exercício 7.1 Sabendo que o carro se desloca sobre um piso plano a uma velocidade v sem que as rodas escorreguem, é correto afirmar sobre a frequência de rotação: ■

(a) A frequência de rotação de A é maior que a de B.
(b) A frequência de rotação de A é igual a de B visto que v é a mesma para as duas rodas.
(c) A frequência de rotação de A é menor que a de B.
(d) A velocidade linear v em nada influencia na frequência de rotação de qualquer das rodas uma vez que v é linear e a frequência é angular.

Exercício 7.2 Sabendo que o carro se desloca sobre um piso plano a uma velocidade v sem que as rodas escorreguem, é correto afirmar sobre o período de rotação: ■

(a) O período de A é maior que a de B.
(b) O período de A é igual a de B visto que v é a mesma para as duas rodas.
(c) O período de A é menor que a de B.
(d) A velocidade linear v em nada influencia o período de qualquer das rodas uma vez que v é linear e o período é uma grandeza angular.

Exercício 7.3 Considerando para a figura 7.1 que o raio da roda a é de $150cm$ e que a velocidade v do carro é de $10\pi m/s$ determine a velocidade angular da roda b ■

(a) $10\pi rad/s$
(b) $100\pi rad/s$
(c) $15\pi rad/s$
(d) $15\pi m/s$

Exercício 7.4 O valor em graus de um radiano é: ■

(a) $180^o/\pi$
(b) $360^o/\pi$
(c) $90^o/\pi$
(d) $270^o/\pi$

O Desenho a seguir deverá ser utilizado nas questões 7.5 e 7.6. Uma roda qualquer possui 5 raios (estrutura que liga o cubo ao aro) conforme o desenho abaixo. Em determinado intervalo de tempo 6 projeções de raios (linhas tracejadas) transpoem o ponto O.

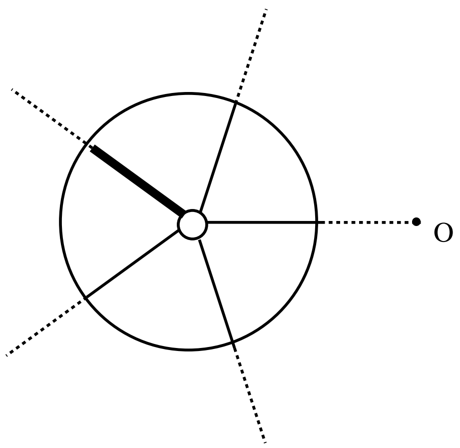


Figura 7.2: Diagrama esquemático da roda contendo cinco raios.

Exercício 7.5 Determine a distância angular percorrida pela roda no intervalo de tempo descrito acima. Assuma que a roda gire no sentido horário e que os raios estão espaçados igualmente. ■

(a) 432^o
(b) -432^o
(c) 72^o
(d) -72^o

Exercício 7.6 Determine o ângulo descrito do raio mais espesso no intervalo de tempo dado acima. Assuma que a roda gire no sentido horário e que os raios estão espaçados igualmente. ■

(a) 432^o
(b) -432^o
(c) 72^o
(d) -72^o

Exercício 7.7 Considerando que um dia terrestre possui 24h, qual a frequência de rotação do movimento de rotação da terra? ■

(a) $1/86400Hz$
(b) $1/8640Hz$
(c) $1/24Hz$
(d) $86400s$

Exercício 7.8 O disco abaixo possui raio "R" e está girando com centro de giro em O. A respeito do movimento circular no disco podemos afirmar que: ■

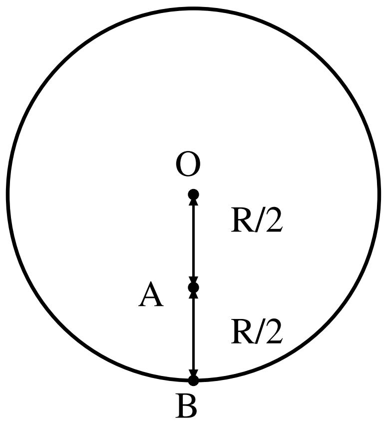


Figura 7.3: Diagrama esquemático de um disco de raio R.

(a) A velocidade tangencial no ponto A é igual à velocidade tangencial no ponto B.
(b) A velocidade tangencial no ponto A é menor que a velocidade tangencial no ponto B.
(c) A frequência de rotação em A é menor que em B.
(d) A velocidade angular do ponto A é menor a de B.

Exercício 7.9 Num determinado instante uma roda que sofre uma aceleração angular de $\pi rad/s^2$ está com velocidade angular de $2\pi rad/s$. Após algum tempo a velocidade angular passa a ser de $10\pi rad/s$. Qual o distância angular percorrida por um ponto fixo na roda? ■

(a) $48\pi rad$
(b) $50\pi rad$
(c) $24\pi rad$
(d) $100\pi rad$

Para as questões 7.10, e 7.11 use o esquema abaixo.

O esquema é composto de 6 rodas de fricção (A,B,C,D,E e F) que estão acopladas entre si conforme a disposição abaixo. Não existe escorregamento entre as rodas e a roda C é solidária a roda B. A roda A é a roda motriz do sistema, sendo seu raio igual ao da roda D. O raio da roda B é igual ao raio da roda E. (F<C<A<B)

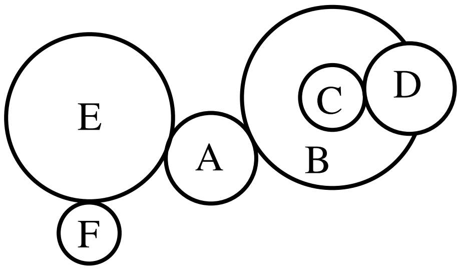


Figura 7.4: Diagrama esquemático de rodas de fricção com raios distintos.

Exercício 7.10 Podemos dizer a respeito da relação de transmissão da roda A até a roda D: ■

(a) É uma relação de redução.
(b) É uma relação de ampliação.
(c) Não é possível fazer considerações sem conhecer os raios.
(d) Não existe relação uma vez que o raio de A é igual ao de D.

Exercício 7.11 Podemos dizer a respeito da relação de transmissão da roda A até a roda F: ■

(a) É uma relação de redução.
(b) É uma relação de ampliação.
(c) Não é possível fazer considerações sem conhecer os raios.
(d) Não é possível fazer considerações uma vez que o raio de A é muito maior que o raio de F.

Exercício 7.12 A frequência de rotação do ponteiro dos segundos em relógio e ponteiros é de: ■

(a) $60Hz$
(b) $(1/60)s$
(c) $60s$
(d) $(1/60)Hz$