



# Fractal Hexagonal de Dürer

MAURICIO RAMOS LUTZ  
JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS

Caderno didático volume 4 de 4 edições

Este caderno didático originou-se a partir da pesquisa de doutorado de Maurício Ramos Lutz, orientada por José Carlos Pinto Leivas e realizada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Matemática da Universidade Franciscana (UFN) – Santa Maria/RS.

Agradecemos a todos os envolvidos que disponibilizaram seus esforços e seu conhecimento para auxiliar no desenvolvimento deste trabalho: a Universidade Franciscana, que possibilitou o estudo, o Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha (IFFar) – Campus Alegrete, no que foi aplicada a investigação constante da tese.

Para acessar a tese na íntegra acesse o link abaixo e pesquise pelo nome do autor ou pelo título “Possibilidade de inserção da Geometria Fractal na licenciatura em Matemática do IFFar”.

<http://www.tede.ufn.edu.br:8080/handle/UFN-BDTD/903>

### ***Fractal Hexagonal de Dürer***

Este quarto caderno didático apresenta uma continuação do que foi publicado nos três primeiros e origina-se da tese de doutorado do primeiro autor, a qual foi concluída no ano de 2020. Nela, abordamos uma geometria não euclidiana, a saber, a GEOMETRIA FRACTAL. Desta feita, trazemos aqui atividades tratando do Fractal Hexagonal de Dürer.

Objetivos:

- Desenvolver a parte histórica do fractal de Dürer;
- Construir o Fractal Hexagonal de Dürer utilizando o *GeoGebra*;
- Explorar as relações geométricas envolvidas no Fractal Hexagonal de Dürer.

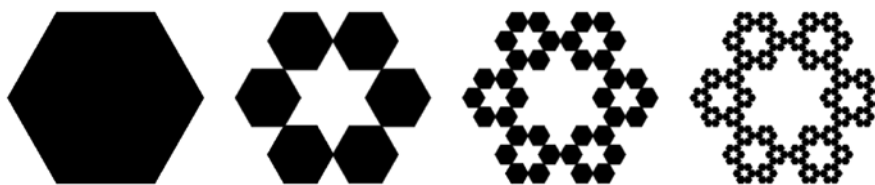
#### **Atividade 1 – Histórico do Fractal Hexagonal de Dürer**

Iniciaremos a atividade explanando para os alunos a parte histórica do fractal de Dürer, assim como sua forma de construção.

##### **Histórico do fractal de Dürer**

O alemão Albrecht Dürer (1471–1528), pintor, ilustrador, matemático e teórico de arte é o autor dos fractais que levam seu nome (Figura 1). Também é atribuída a Dürer a autoria da construção do desenho do pentágono regular, utilizando apenas régua e compasso. (OLIVEIRA, 2016).

**Figura 1 – Fractal Hexagonal de Dürer**



Fonte: autoria própria.

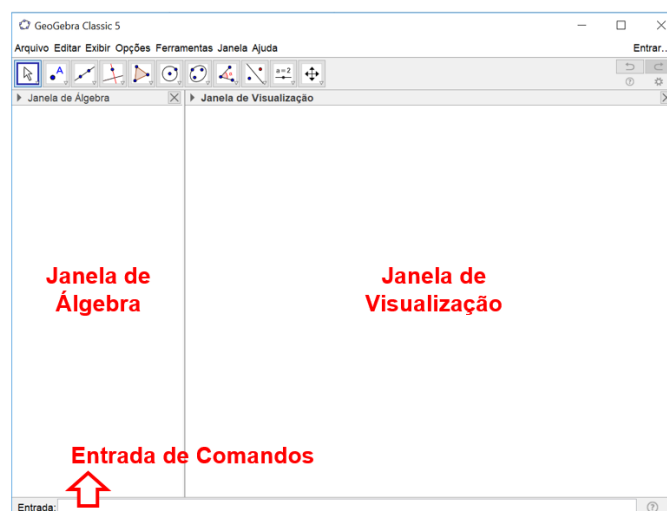
Para esta oficina, iremos desenvolver o Fractal Hexagonal de Dürer. Mas afinal, o que é o Fractal Hexagonal de Dürer? Para Barbosa (2005), trata-se de um fractal construído a partir de um hexágono regular, em que, a cada iteração (ou repetição de procedimentos), ocorre a substituição de cada vértice do polígono original por um hexágono regular com o mesmo número de lados, de forma que um de seus ângulos

coincida com o ângulo do hexágono regular inicial, tendo a condição de que os hexágonos regulares gerados tenham um vértice em comum.

### Atividade 2 – Construção do Fractal Hexagonal de Dürer

A construção do Fractal Hexagonal de Dürer deve ser realizada com o auxílio do *GeoGebra* e, para melhor compreensão, a dividimos em 4 etapas, cujos passos/níveis apresentamos a seguir. Salientamos que os alunos já devem possuir um conhecimento sobre os comandos do *GeoGebra*. Essa construção foi planejada para ser executada pelo professor em um passo a passo junto aos alunos, com o intuito de revisar os comandos do *software*, além de explorar características do Fractal Hexagonal de Dürer. Durante a atividade, utilizamos três áreas de trabalhos do *GeoGebra*, a “Janela de Álgebra”, a “Janela de Visualização” e a “Entrada de Comandos”, conforme apresentamos na Figura 2.

**Figura 2 – Áreas de trabalho do *GeoGebra* utilizadas para a construção do fractal de Dürer**



Fonte: autoria própria.

#### Etapa 1: nível 0

Construção do hexágono regular - protocolo de construção:

a) Inserir um controle deslizante, denominado de  $L$ , com valor mínimo 0,1 e valor máximo 10, com incremento 0,1 (Figura 3). Optamos por utilizar o controle deslizante para evitar empregar um valor fixo para a medida do lado do hexágono que iremos construir posteriormente. Por este motivo, escolhemos um incremento de 0,1, ou seja, a

medida do lado do hexágono irá variar de 0,1 em 0,1 unidade de comprimento, mas poderia ser qualquer outro valor.

**Figura 3 – Controle deslizante**



Fonte: autoria própria.

Sintaxe: ControleDeslizante( <Mínimo>, <Máximo>, <Incremento> )

Sintaxe preenchida: ControleDeslizante(0.1, 10, 0.1)

Renomear o controle deslizante para L (de lado). Esse controle deslizante irá definir o tamanho do lado inicial do hexágono regular (Figura 4).

**Figura 4 – Controle deslizante renomeado**



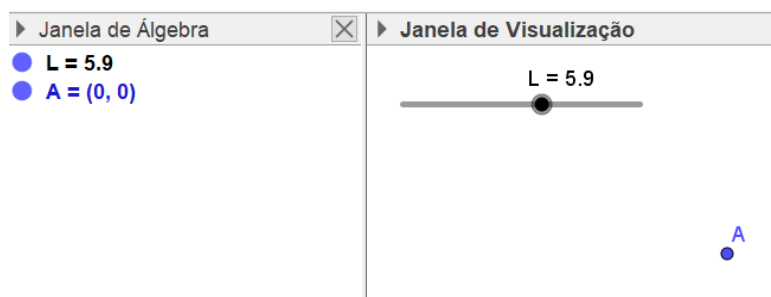
Fonte: autoria própria.

Sintaxe: Renomear( <Objeto>, <Nome> )

Sintaxe preenchida: Renomear(a, L)

b) Criar um ponto A (Figura 5) com coordenadas (0,0).

**Figura 5 – Ponto A.**



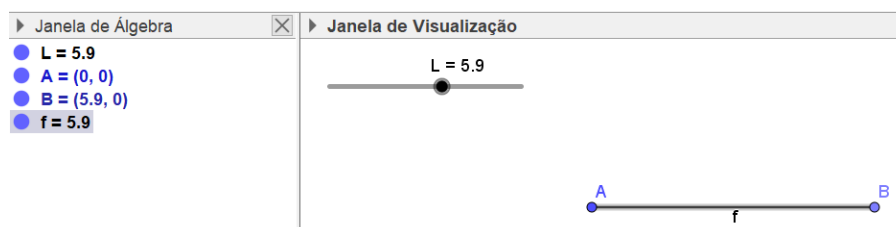
Fonte: autoria própria.

Sintaxe: A=( x,y )

Sintaxe preenchida:  $A=(0, 0)$

c) Criar um segmento  $f$  de comprimento  $L$  com origem no Ponto  $A$ . Observe a Figura 6.

**Figura 6 – Segmento  $f$  de comprimento  $L$**



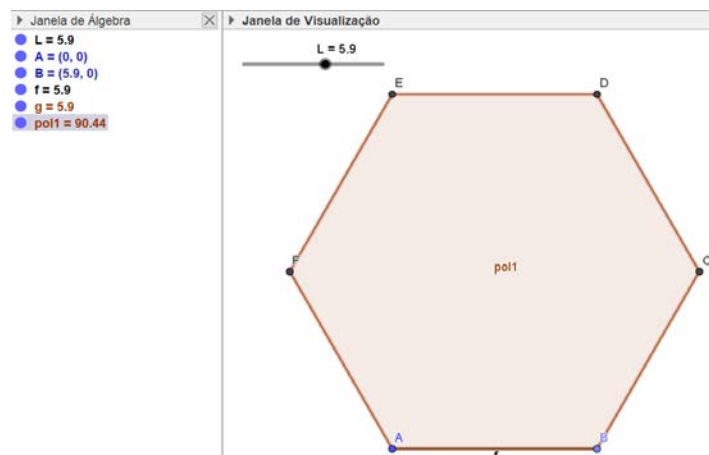
Fonte: autoria própria.

Sintaxe:  $\text{Segmento}(\langle \text{Ponto} \rangle, \langle \text{Comprimento} \rangle)$

Sintaxe preenchida:  $\text{Segmento}(A, L)$

d) Criar um polígono ( $\text{pol1}$ ) regular de 6 lados com ponto inicial  $A$  e final  $B$ , como ilustrado na Figura 7.

**Figura 7 – Hexágono regular de lado  $l$**



Fonte: autoria própria.

Sintaxe:  $\text{Polígono}(\langle \text{Ponto} \rangle, \langle \text{Ponto} \rangle, \langle \text{Número de Vértices} \rangle)$

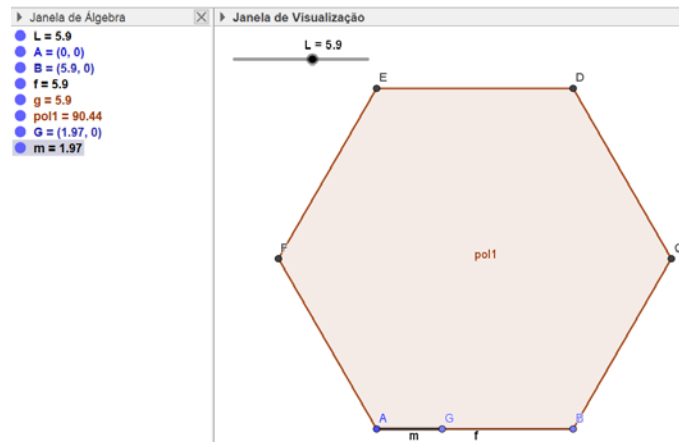
Sintaxe preenchida:  $\text{Polígono}(A, B, 6)$

## Etapa 2: nível 1

Construção de 6 hexágonos no interior do hexágono inicial, seguindo as orientações a seguir:

e) Criar um segmento  $m$  de comprimento  $(L/3)$  com origem no ponto A. Observe a Figura 8.

**Figura 8 – Segmento  $n$  de comprimento  $(L/3)$**



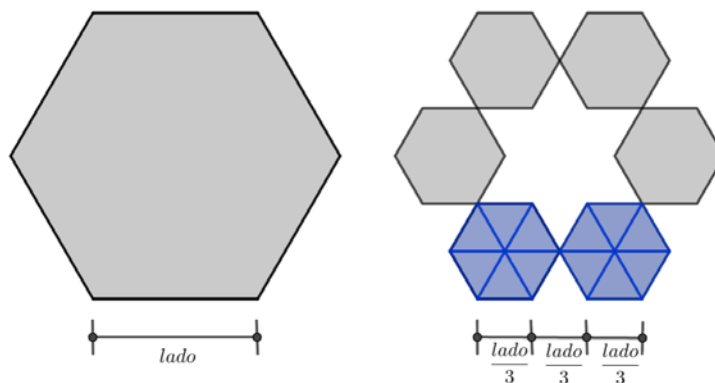
Fonte: autoria própria.

Sintaxe: Segmento( <Ponto>, <Comprimento> )

Sintaxe preenchida: Segmento(A,  $L/3$ )

O comprimento é de  $L/3$  do comprimento do lado inicial, pois o triângulo formado pelo lado do hexágono inicial e dos hexágonos gerados é equilátero, conforme exemplificado na Figura 9.

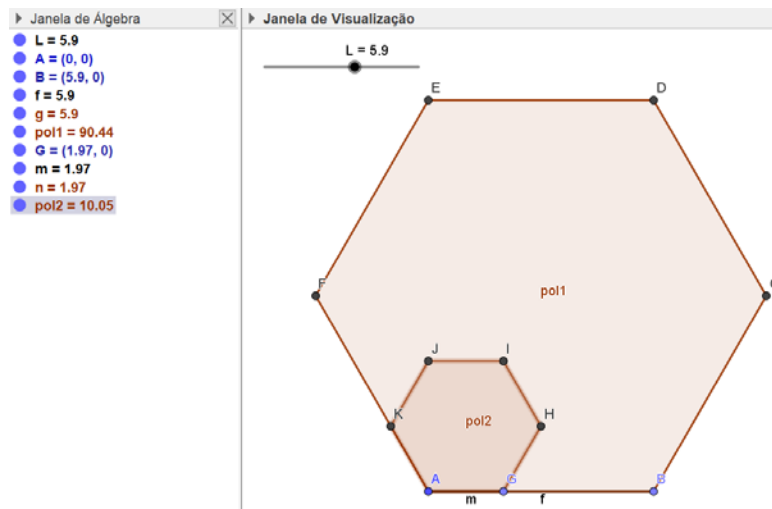
**Figura 9– Detalhe do comprimento do lado do Fractal Hexagonal de Dürer**



Fonte: autoria própria.

f) Criar um polígono (pol2) regular de 6 lados com ponto inicial A e final G, como na Figura 10.

**Figura 10 – Hexágono regular de lado (L/3)**



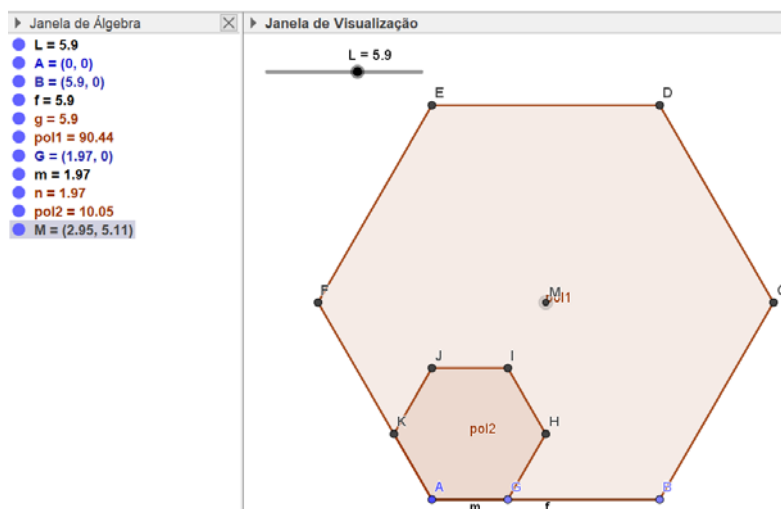
Fonte: autoria própria.

Sintaxe: Polígono( <Ponto>, <Ponto>, <Número de Vértices> )

Sintaxe preenchida: Polígono(A, G, 6)

g) Criar um ponto M, centro de gravidade do hexágono inicial, como mostrado na Figura 11.

**Figura 11 – Ponto M (centro de gravidade do hexágono inicial)**



Fonte: autoria própria.

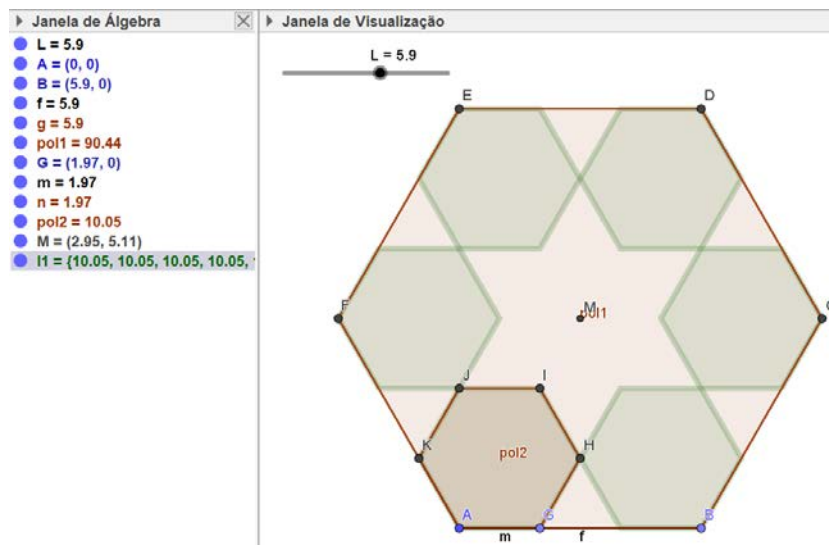


Sintaxe: CentroDeGravidade( <Polígono> )

Sintaxe preenchida: CentroDeGravidade(pol1)

h) Criar mais 5 hexágonos regulares. Para tanto, utilizar o comando sequência e girar simultaneamente o hexágono regular (pol2) de lado  $(L/3)$  (Figura 12).

**Figura 12 – Criação da lista 1 com os 6 novos hexágonos regulares**



Fonte: autoria própria.

Sintaxe: Sequência(Girar( <Objeto>, <Ângulo>, <Ponto> ), <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final> )

Sintaxe preenchida: Sequência(Girar(pol2,  $i*60^\circ$ , M), i, 1, 6)

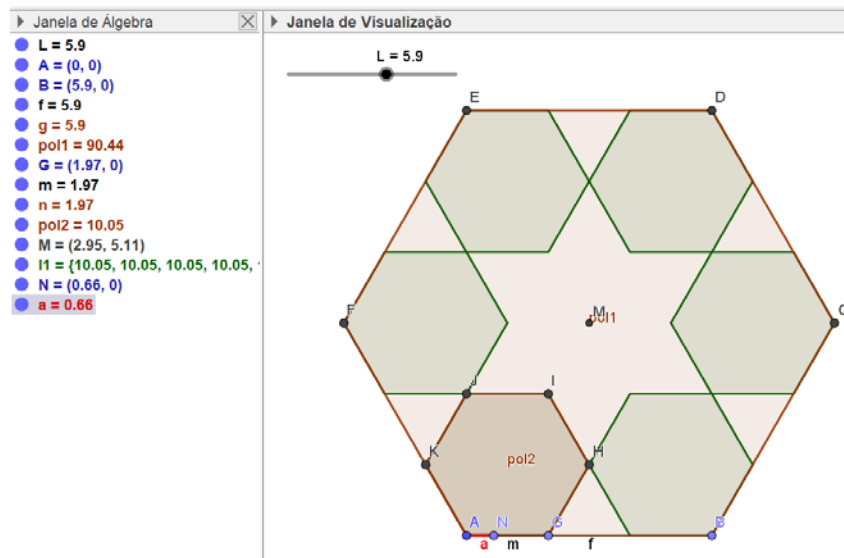
O comando sequência irá criar uma lista de objetos, neste caso, a lista 1, que é constituída de hexágonos regulares com lado  $L/3$  do lado do hexágono inicial.

### Etapa 3: nível 2

Construção de 6 novos hexágonos no interior dos 6 hexágonos que surgiram na Etapa 2, seguindo as orientações:

i) Criar um segmento a de comprimento  $(L/9)$  com origem no ponto A, conforme ilustrado na Figura 13.

**Figura 13 – Segmento b de comprimento (L/9)**



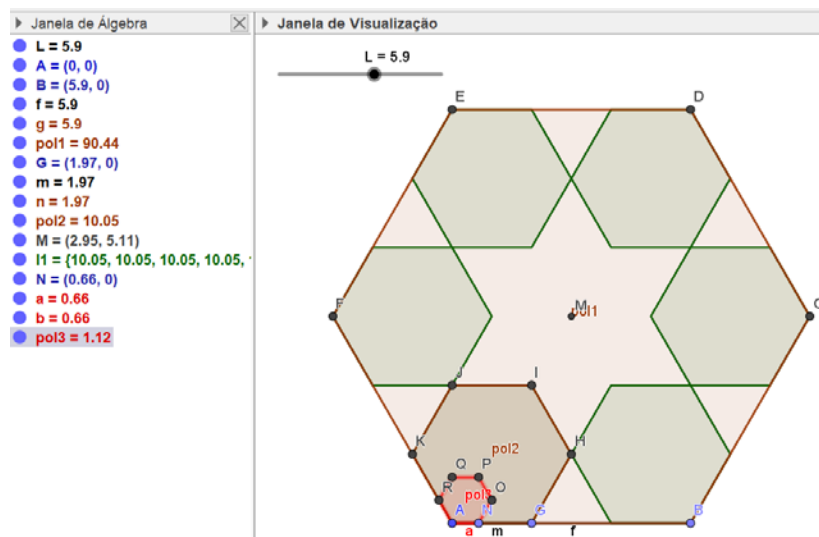
Fonte: autoria própria.

Sintaxe: Segmento( <Ponto>, <Comprimento> )

Sintaxe preenchida: Segmento(A, L/9)

j) Criar um polígono (pol3) regular de 6 lados com ponto inicial A e final N, conforme Figura 14.

**Figura 14 – Hexágono regular de lado (L/9)**



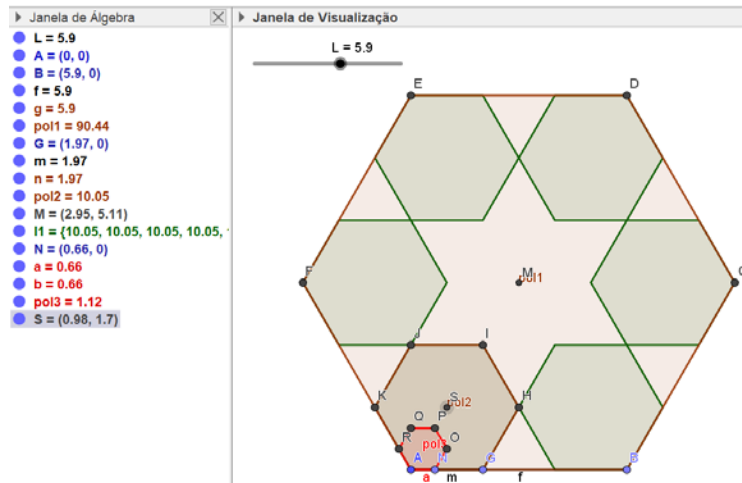
Fonte: autoria própria.

Sintaxe: Polígono( <Ponto>, <Ponto>, <Número de Vértices> )

Sintaxe preenchida: Polígono (A, N, 6)

k) Criar um ponto  $S_a$  que é o centro de gravidade do hexágono (pol2) criado no nível 1. Veja a Figura 15.

**Figura 15 – Ponto S (centro de gravidade do hexágono criado no nível 1)**



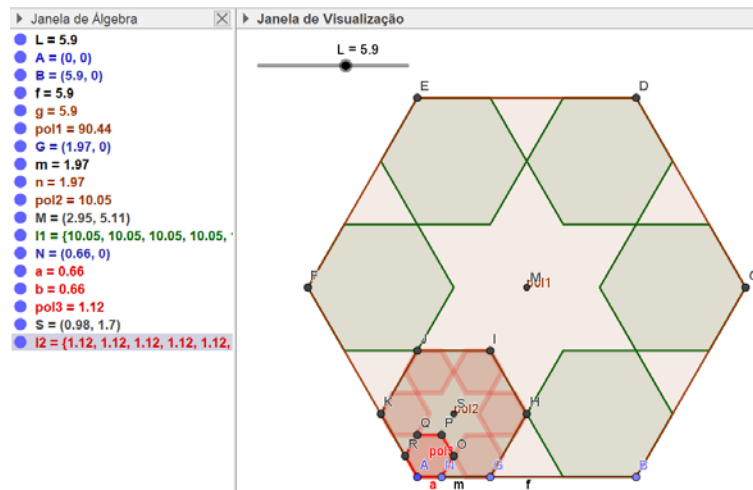
Fonte: autoria própria.

Sintaxe: CentroDeGravidade( <Polígono> )

Sintaxe preenchida: CentroDeGravidade(pol2)

l) Criar mais 5 hexágonos regulares no hexágono gerado na etapa 2. Para tanto, utilizar o comando sequência e girar simultaneamente no hexágono regular (pol3) de lado (L/9), como mostra a Figura 16.

**Figura 16 – Criação da lista 2 com os 6 novos hexágonos regulares**



Fonte: autoria própria.

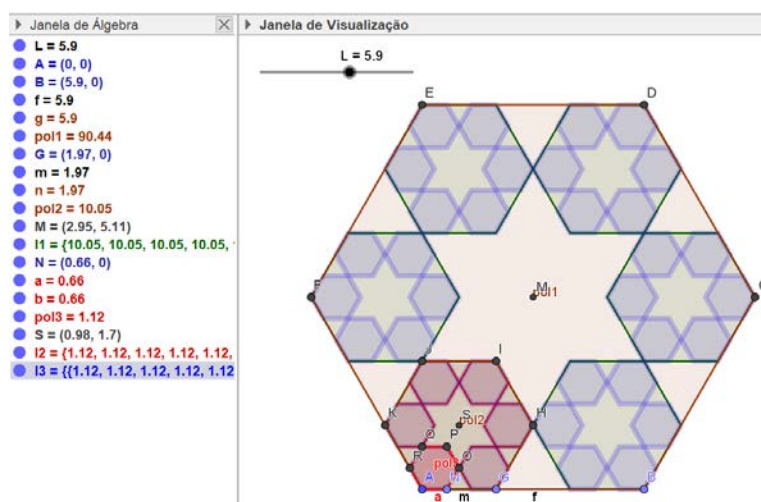
Sintaxe: Sequência(Girar( <Objeto>, <Ângulo>, <Ponto> ), <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final> )

Sintaxe preenchida: Sequência(Girar(pol3,  $i*60^\circ$ , S), i, 1, 6)

O comando sequência irá criar uma lista de objetos, neste caso, a lista 2, constituída de hexágonos regulares com lado medindo  $L/9$  do lado do hexágono inicial.

m) Criar os demais hexágonos em cada um dos hexágonos gerados na Etapa 2. Para tanto, utilizar o comando sequência e girar, simultaneamente, na lista 2, conforme ilustrado na Figura 17.

**Figura 17 – Criação da lista 3 com os 6 novos hexágonos regulares em cada um dos hexágonos gerados na Etapa 2**



Fonte: autoria própria.

Sintaxe: Sequência(Girar( <Objeto>, <Ângulo>, <Ponto> ), <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final> )

Sintaxe preenchida: Sequência(Girar(l2,  $i*60^\circ$ , M), i, 1, 6)

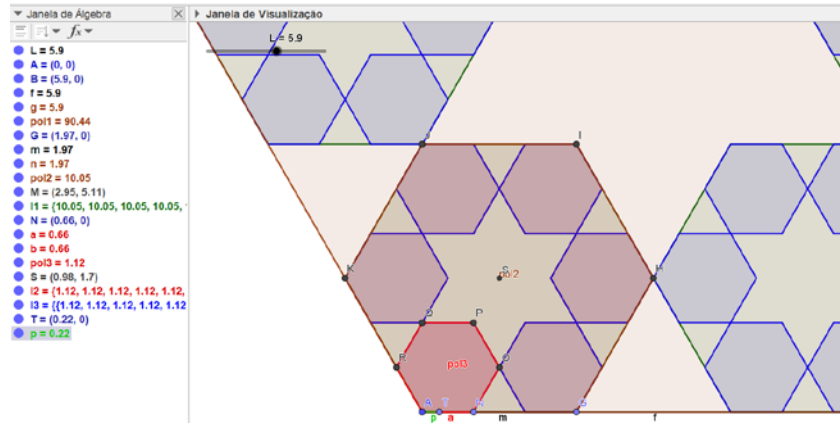
O comando sequência irá criar uma lista de objetos, neste caso, a lista 3, que são os hexágonos regulares com lado  $L/9$  do lado do hexágono inicial.

#### **Etapa 4: nível 3**

Construção de 6 novos hexágonos no interior de cada um dos 36 hexágonos que surgiram na Etapa 3, como orientado a seguir:

n) Criar um segmento p de comprimento fixo ( $L/27$ ) com origem no Ponto A. Veja a Figura 18.

**Figura 18 – Segmento p de comprimento ( $L/27$ )**



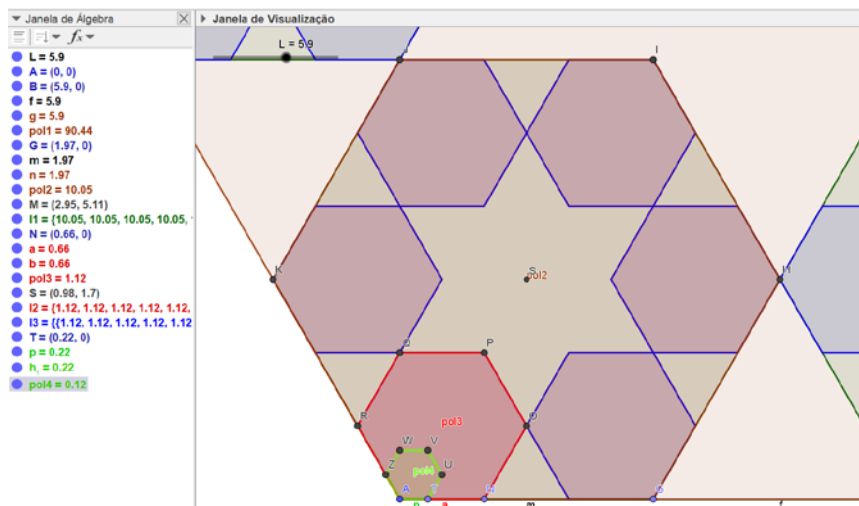
Fonte: autoria própria.

Sintaxe: Segmento( <Ponto>, <Comprimento> )

Sintaxe preenchida: Segmento(A,  $L/27$ )

o) Criar um polígono (pol4) regular de 6 lados com ponto inicial A e final T, como mostra a Figura 19.

**Figura 19 – Hexágono regular de lado ( $L/27$ )**



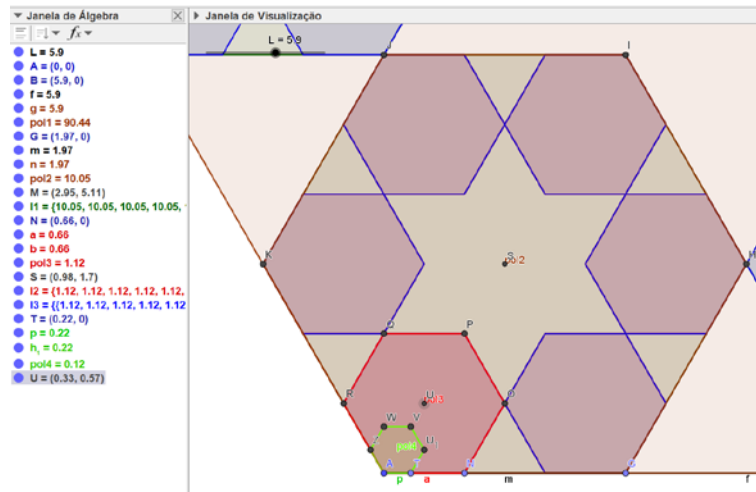
Fonte: autoria própria.

Sintaxe: Polígono( <Ponto>, <Ponto>, <Número de Vértices> )

Sintaxe preenchida: Polígono(A, T, 6)

p) Criar um ponto U, que é o centro de gravidade do hexágono (pol3) criado no nível 2. Veja a Figura 20.

**Figura 20 – Ponto U (centro de gravidade do hexágono criado no nível 2)**



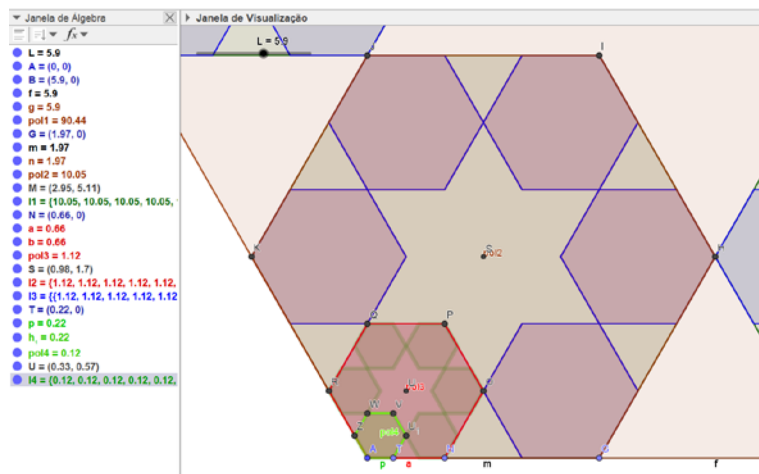
Fonte: autoria própria.

Sintaxe: CentroDeGravidade( <Polígono> )

Sintaxe preenchida: CentroDeGravidade(pol3)

q) Criar mais 5 hexágonos regulares no hexágono gerado na etapa 3. Para tanto, utilizar o comando sequência e girar simultaneamente no hexágono regular (pol4) de lado  $(L/27)$ . Observe a Figura 21.

**Figura 21 – Criação da lista 4 com os 6 novos hexágonos regulares**



Fonte: autoria própria.

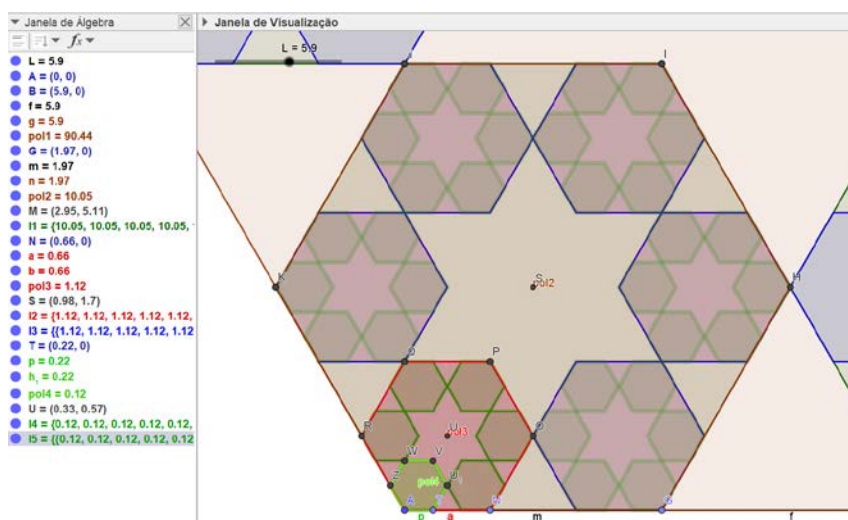
Sintaxe: Sequência(Girar( <Objeto>, <Ângulo>, <Ponto> ), <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final> )

Sintaxe preenchida: Sequência(Girar(pol4,  $i \cdot 60^\circ$ , U), i, 1, 6)

O comando sequência irá criar uma lista de objetos, neste caso, a lista 4, que são os hexágonos regulares com lado  $L/27$  do lado do hexágono inicial.

r) Criar os demais hexágonos em cada um dos hexágonos com lado  $(L/27)$ . Para isso, utilizar o comando sequência e girar simultaneamente na lista 4, conforme indicado na Figura 22.

**Figura 22 – Criação da lista 5 com os 6 novos hexágonos regulares em cada um dos hexágonos gerados na lista 4**



Fonte: autoria própria.

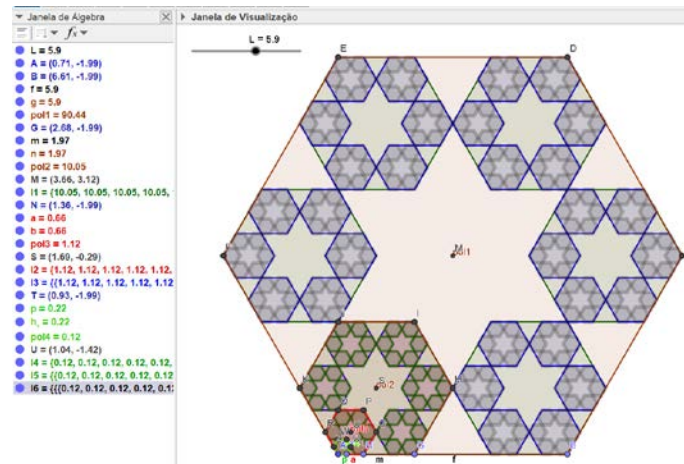
Sintaxe: Sequência(Girar( <Objeto>, <Ângulo>, <Ponto> ), <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final> )

Sintaxe preenchida: Sequência(Girar(I4,  $i \cdot 60^\circ$ , S), i, 1, 6)

O comando sequência irá criar uma lista de objetos, neste caso, a lista 5, que são os hexágonos regulares com lado  $L/27$  do lado do hexágono inicial.

s) Criar os demais hexágonos em cada um dos hexágonos com lado  $(L/27)$ . Para tanto, utilizar o comando sequência e girar simultaneamente na lista 5. Veja a Figura 23.

**Figura 23 – Criação da lista 6 com os 6 novos hexágonos regulares em cada um dos hexágonos gerados na lista 4**



Fonte: autoria própria.

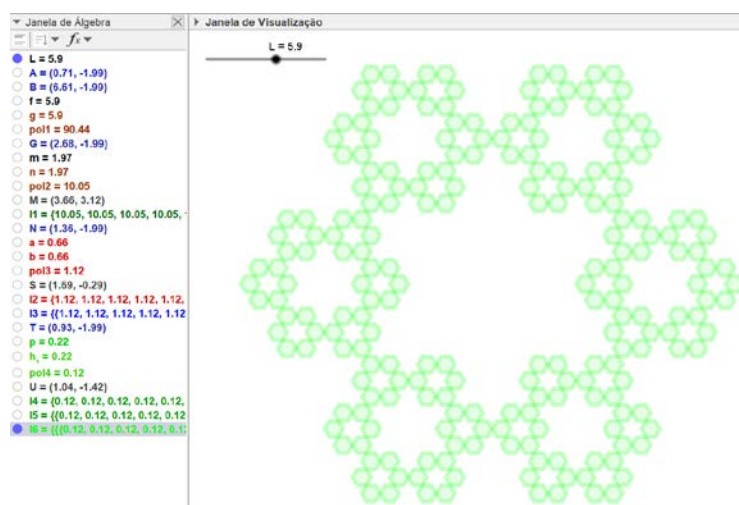
Sintaxe: Sequência(Girar( <Objeto>, <Ângulo>, <Ponto> ), <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final> )

Sintaxe preenchida: Sequência(Girar(15,  $i \cdot 60^\circ$ , M), i, 1, 6)

O comando sequência irá criar uma lista de objetos, neste caso, a lista 6, que são os hexágonos regulares com lado  $L/27$  do lado do hexágono inicial.

t) Para finalizar, podemos deixar visível, na janela de álgebra, somente o controle deslizante e a lista 6, ocultando outros objetos que não são necessários, conforme a Figura 24.

**Figura 24 – Fractal Hexagonal de Dürer nível 3**



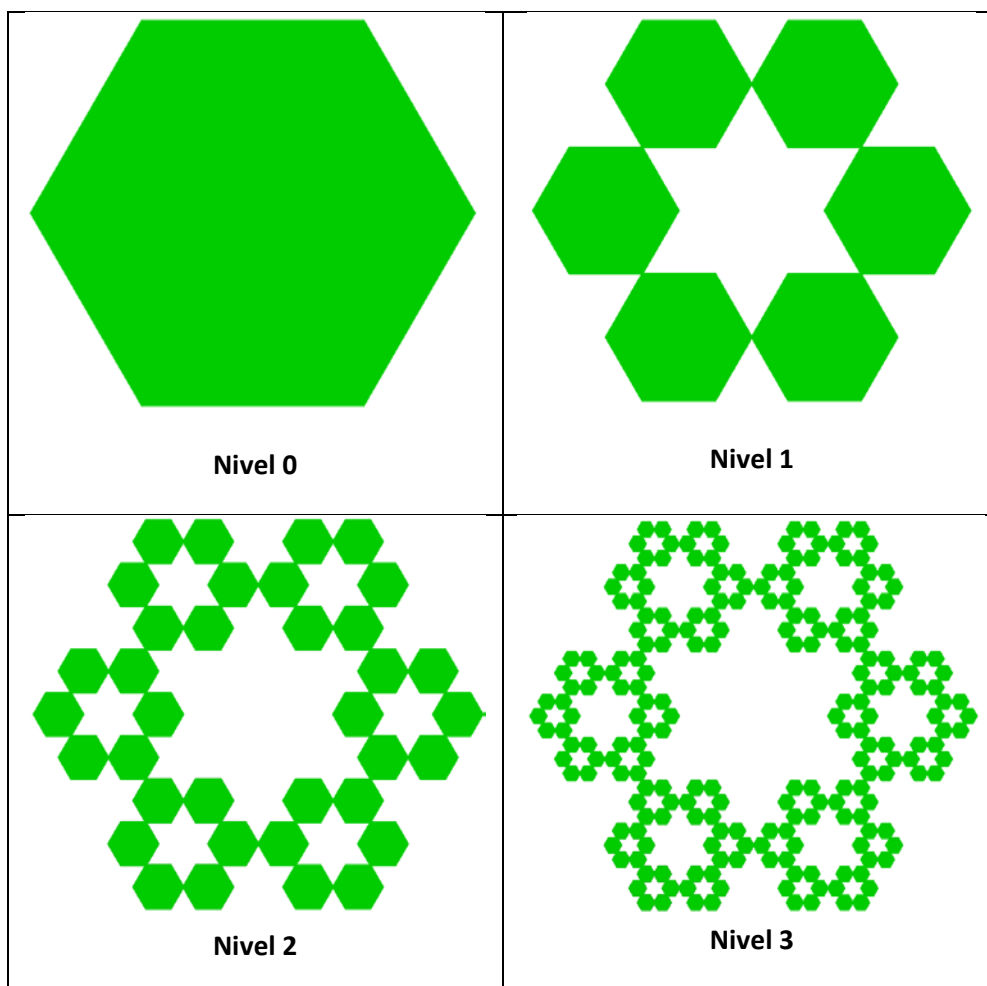
Fonte: autoria própria.



### Atividade 3 – Explorando o Fractal Hexagonal de Dürer

A partir de algumas imagens, observamos e registramos o que está ocorrendo nas construções representadas na Figura 25. Assim, entregamos um roteiro aos participantes, o qual deverá ser devolvido ao professor ao final da atividade para análise.

Figura 25 – Fractal Hexagonal de Dürer nível 0, 1, 2 e 3



Fonte: autoria própria.

a) Qual é o valor da área da região hexagonal obtida no nível 0 ( $A_0$ )? Explique como você obteve essa área.

Resposta:

A área do hexágono regular é igual a 6 vezes a área do triângulo equilátero que é dada por  $\frac{(L)^2\sqrt{3}}{4}$ , em que L é a medida do lado desse triângulo. Portanto, sabendo que o lado do hexágono regular é L, sua área é dada por:  $A_0 = \frac{6(L)^2\sqrt{3}}{4}$ .

b) Qual é o valor de cada uma das áreas das regiões hexagonais obtidas no nível 1 ( $A_1$ ) ?  
E o valor total, obtido em função de  $A_0$ ?

Resposta:

Sabendo que o lado do hexágono regular mede  $L/3$ , temos que a área de cada região hexagonal é dada por  $\frac{6(L/3)^2\sqrt{3}}{4}$  e, como há 6 regiões hexagonais, sua área fica multiplicada por 6, logo:  $A_1 = 6 \left( \frac{6(L/3)^2\sqrt{3}}{4} \right) = 6 \left( \frac{6(L^2/9)\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{6}{9} \left( \frac{6L^2\sqrt{3}}{4} \right)$ .

Mas  $A_0 = \frac{6(L)^2\sqrt{3}}{4}$ , portanto, a relação entre a área da região hexagonal do nível 1 e a do nível 0 é dada por:  $A_1 = \frac{2}{3}A_0$ .

c) Qual é o valor de cada uma das áreas das regiões hexagonais obtidas no nível 2 ( $A_2$ )?  
E o valor total, obtido em função de  $A_0$ ?

Resposta:

Sabendo que o lado do hexágono regular mede  $L/9$ , temos que a área de cada região hexagonal é dada por  $\frac{6(L/9)^2\sqrt{3}}{4}$ . Como há 36 regiões hexagonais, sua área fica multiplicada por 36, logo:  $A_2 = 36 \left( \frac{6(L/9)^2\sqrt{3}}{4} \right) = 36 \left( \frac{6(L^2/81)\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{36}{81} \left( \frac{6L^2\sqrt{3}}{4} \right)$ .

Mas  $A_0 = \frac{6(L)^2\sqrt{3}}{4}$ . Portanto, a relação entre a área da região hexagonal do nível 2 e a do nível 0 é dada por:  $A_2 = \frac{36}{81}A_0 = \frac{4}{9}A_0$ .

d) Qual é o valor de cada uma das áreas das regiões hexagonais obtidas no nível 3 ( $A_3$ ) ?  
E o valor total, obtido em função de  $A_0$ ?

Resposta:

Sabendo que o lado do hexágono regular mede  $L/27$ , cada região hexagonal é dada por  $\frac{6(L/27)^2\sqrt{3}}{4}$ . Assim, tendo em vista as 216 regiões hexagonais, sua área fica multiplicada por 216, logo:  $A_3 = 216 \left( \frac{6(L/27)^2\sqrt{3}}{4} \right) = 216 \left( \frac{6(L^2/729)\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{216}{729} \left( \frac{6L^2\sqrt{3}}{4} \right)$ .

Mas  $A_0 = \frac{6(L)^2\sqrt{3}}{4}$ , portanto, a relação entre a área da região hexagonal do nível 3 e a do nível 0 é dada por:  $A_3 = \frac{216}{729}A_0 = \frac{8}{27}A_0$ .

e) A partir das observações, cálculos e explicações feitas nos itens anteriores, preencha o Quadro 1, determinando medida do lado, número de hexágonos e a área (em relação a

$A_0$ ) para um Fractal Hexagonal de Dürer de nível  $n$ . Salientamos que  $n$  é um número natural genérico.

**Quadro 1 - Medida do lado, número de hexágonos e a área (em relação a  $A_0$ ) para um Fractal Hexagonal de Dürer de nível  $n$ .**

	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	...	Nível $n$
Lado	1	$\frac{l}{3}$	$\frac{l}{9}$	$\frac{l}{27}$	...	$\frac{l}{3^n}$
Número de hexágonos	1	6	36	216	...	$6^n$
Área total em relação a $A_0$	$A_0$	$\frac{2}{3}A_0$	$\frac{4}{9}A_0$	$\frac{8}{27}A_0$	...	$\frac{2^n}{3^n}A_0$ ou $\left(\frac{2}{3}\right)^n A_0$

Fonte: autoria própria.

f) Se pensarmos em um valor de  $n$  muito elevado, ou seja,  $n$  tender a infinito, o que ocorrerá com a área  $A_n$ ?

Resposta esperada:

Observamos que a área  $A_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n A_0$  é dada por uma função exponencial decrescente, a qual diminui em um fator de  $2/3$ .

Portanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(\frac{2}{3}\right)^n A_0 \right) = A_0 \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \right) = A_0(0) = 0.$$

Outra forma mais intuitiva é atribuir valores para  $n$  e ver o que ocorre com a área, utilizando a Planilha disponível no *GeoGebra*, conforme apresentado na Figura 26.

**Figura 26 – Calculo da área  $A_n$  para alguns valores de  $n$**

	A	B	C
1	n	$(2/3)^n$	
2	1	0.6666666667	
3	5	0.1316872428	
4	10	0.0173415299	
5	15	0.0022836583	
6	20	0.0003007287	
7	25	0.0000396021	
8	30	0.0000052151	
9	35	0.0000006868	
10	45	0.0000000119	
11	50	0.0000000016	

Fonte: autoria própria.

A partir da análise da Figura 26, observamos que, quanto maior for o valor de  $n$ , menor será o valor da área. Portanto, para um  $n$  tendendo a infinito, a área  $A_n$  tende a zero.

Com esta quarta cartilha, fechamos um ciclo que pode proporcionar aos professores atividades envolvendo uma das geometrias não euclidianas, a saber, a Geometria Fractal. Essas atividades podem ser utilizadas em diversos níveis de escolaridade, modalidades e realidades educacionais.

### Referências

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimo a Geometria Fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

OLIVEIRA, Genilton José Cavalcante de. **Ensaio fractais à luz do Ensino Médio**. 2016. 144 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2016. Disponível em: < [https://sca.proformat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=628](https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=628)>. Acesso em: 23 set. 2017.

## Sobre os autores



### Maurício Ramos Lutz

É doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Franciscana (UFN), mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), especialista Matemática, Mídias Digitais e Didática pela UFRGS e licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Atualmente é professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico no Instituto Federal Farroupilha (IFFar). Lattes: <<http://lattes.cnpq.br/5099730179818142>>.



### José Carlos Pinto Leivas

É doutor em Educação (Matemática) pela Universidade Federal do Paraná (UFPR), mestre em Matemática Pura e Aplicada pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e licenciado em Matemática pela Universidade Católica de Pelotas (UCPEL). Atualmente é professor e pesquisador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da UFN. Lattes: <<http://lattes.cnpq.br/0314545667166824>>.