Curva de Peano

MAURICIO RAMOS LUTZ
JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS

Caderno didático volume 3 de 4 edições

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Este caderno didático originou-se a partir da pesquisa de doutorado de Maurício Ramos Lutz, orientada por José Carlos Pinto Leivas e realizada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Matemática da Universidade Franciscana (UFN) – Santa Maria/RS.

Agradecemos a todos os envolvidos que disponibilizaram seus esforços e seu conhecimento para auxiliar no desenvolvimento deste trabalho: a Universidade Franciscana, que possibilitou o estudo, o Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha (IFFar) – Campus Alegrete, no que foi aplicada a investigação constante da tese.

Para acessar a tese na integra acesse o link abaixo e pesquise pelo nome do autor ou pelo título “Possibilidade de inserção da Geometria Fractal na licenciatura em Matemática do IFFar”.

http://www.tede.ufn.edu.br:8080/handle/UFN-BDTD/903

Curva de Peano

Este terceiro caderno didático apresenta uma continuação do que foi publicado nos dois primeiros e origina-se da tese de doutorado do primeiro autor, a qual foi concluída no ano de 2020. Nela foi abordada uma geometria não euclidiana, a saber, a GEOMETRIA FRACTAL. Desta feita, traz-se aqui atividades tratando da Curva de Peano.

Objetivos:

- Desenvolver a parte histórica sobre a Curva de Peano;
- Construir a Curva de Peano, utilizando o *GeoGebra*;
- Explorar relações geométricas envolvidas na Curva de Peano.

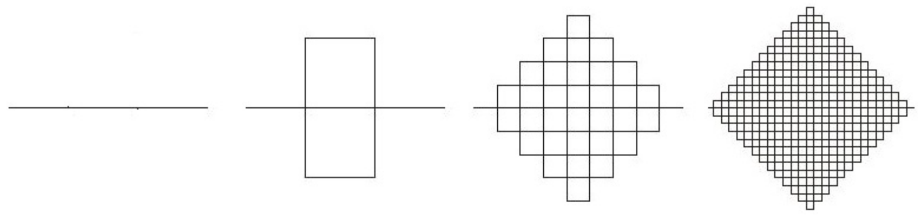
Atividade 1 – Conhecendo a Curva de Peano

A atividade 1 é expositiva e dialogada com os alunos, sendo apresentado, em um primeiro momento, o histórico relativo à Curva de Peano e, após, analisada sua característica.

Curva de Peano

O matemático italiano Giuseppe Peano (1858–1932) publicou em 1890 um estudo aprofundado das noções de continuidade e dimensões, no qual relata a curva que leva seu nome. Nesse estudo, ele prometia cobrir totalmente uma superfície plana quadrangular. (BARBOSA, 2005). Para melhor exemplificação, veja a Figura 1.

Figura 1 – Curva de Peano



Fonte: autoria própria.

Na construção da Curva de Peano empregamos o processo iterativo. Para tanto, utilizamos a construção conforme Coelho (2015) e Iwai (2015) a apresentam em seus trabalhos. Para iniciá-la, tomemos um segmento de reta de comprimento unitário. Dividimos esse segmento em três partes congruentes. No central, desenhamos um retângulo, que é dividido pelo segmento inicial em dois quadrados congruentes. Ao final dessa primeira iteração, obtemos 9 segmentos, cada um com comprimento 1/3 do original. Para a segunda iteração, vamos repetir os passos anteriores, obtendo 81 segmentos de comprimento, agora com 1/81 do primeiro. Continuando esse processo de iteração *n* vezes, teremos 9^n segmentos com comprimento $\frac{1}{3^n}$ do que deu origem ao processo.

Atividade 2 – Construção da Curva de Peano

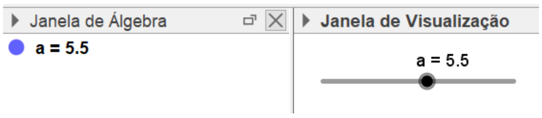
A construção da Curva de Peano, nesta atividade, é realizada no *GeoGebra* e, para sua melhor compreensão, a dividiremos em 4 etapas, cujos passos podem ser fornecidos aos estudantes via projetor multimídia, verbalmente ou outro recurso que o professor deseje. Iniciamos explorando a “Janela de Álgebra”, a “Janela de Visualização” e a “Entrada de comandos”, de modo que essa última esteja localizada na parte inferior da tela do computador. Além disso, fornecemos a sintaxe que o *software* oferece, bem como ela preenchida (recomendada para a atividade).

Etapa 1: nível 0

Construção da Curva de Peano - protocolo de construção:

a) Inserir um controle deslizante denominado de L com valor mínimo 0,1; valor máximo 10; incremento 0,1 (Figura 2). Optamos por utilizar o controle deslizante para evitar empregar um valor fixo para o segmento original da Curva de Peano, muito embora pudéssemos optar por qualquer valor do incremento.

Figura 2 – Controle deslizante



Fonte: autoria própria.

Sintaxe: ControleDeslizante(<Mínimo>, <Máximo>, <Incremento>)

Sintaxe preenchida: ControleDeslizante(0.1, 10, 0.1)

Renomear o controle deslizante para L (de linha), uma vez que o *GeoGebra* o nomeia de acordo com a ordem alfabética. Esse controle deslizante definirá o tamanho da linha (segmento) inicial da Curva de Peano (Figura 3).

Figura 3 – Controle deslizante renomeado

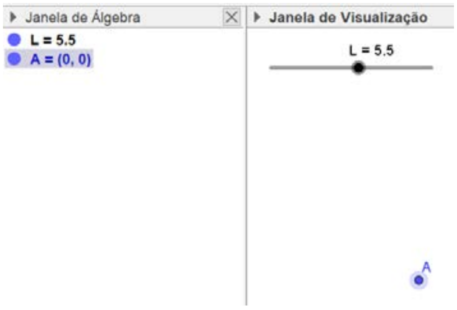
Fonte: autoria própria.

Sintaxe: Renomear(<Objeto>, <Nome>)

Sintaxe preenchida: Renomear(a, L)

b) Inserir o ponto A com coordenadas (0,0), como ilustramos na Figura 4.

Figura 4 – Ponto A



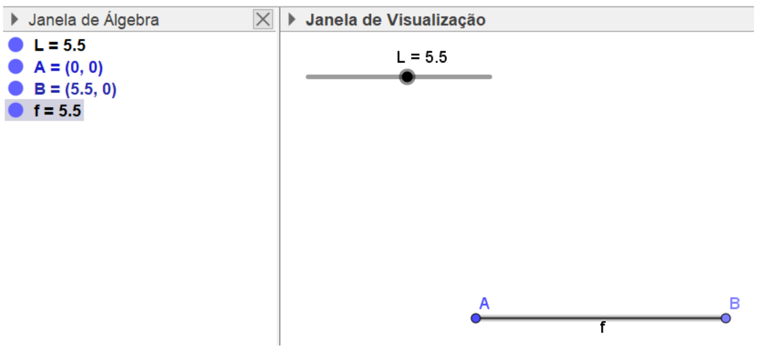
Fonte: autoria própria.

Sintaxe: A=(x, y)

Sintaxe preenchida: A=(0, 0)

c) Inserir um segmento f de comprimento L com origem no ponto A, sendo que a Figura 5 ilustra essa etapa da construção.

Figura 5 – Segmento f de comprimento L



Fonte: autoria própria.

Sintaxe: Segmento(<Ponto>, <Comprimento>)

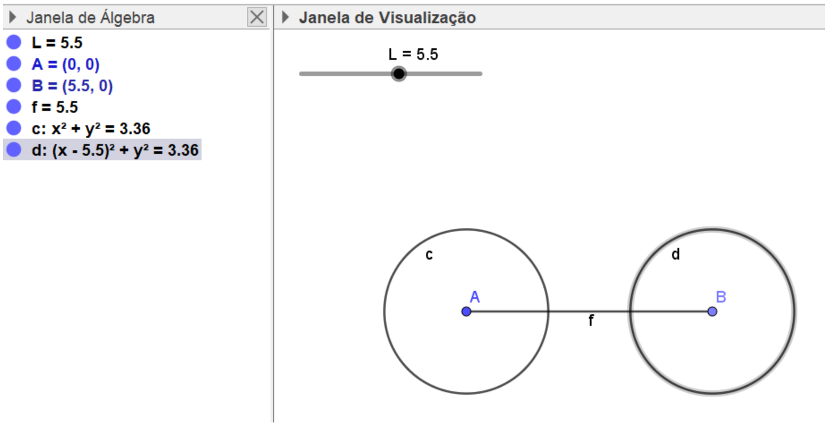
Sintaxe preenchida: Segmento(A, L)

Etapa 2: nível 1

Para darmos início à construção procedemos fazendo a divisão do segmento inicial em 3 partes congruentes, para posteriormente obtermos 9 segmentos gerados a partir do AB originado no nível 1- protocolo de construção:

d) Criar duas circunferências c e d, uma com centro em A e raio L/3 e outra com centro B e raio L/3 (Figura 6).

Figura 6 – Circunferências c e d



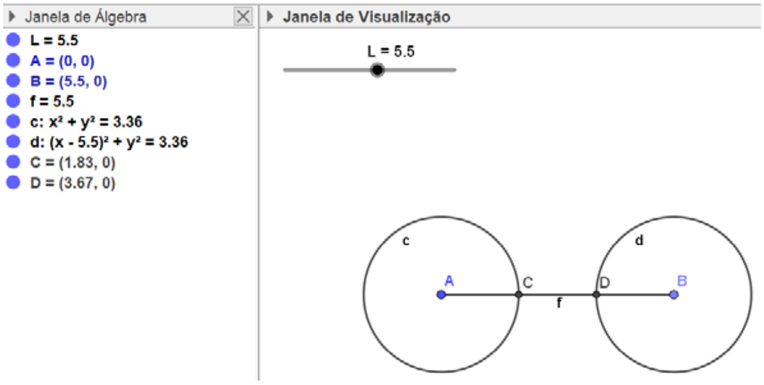
Fonte: autoria própria.

Sintaxe: Círculo(<Ponto>, <Raio>)

Sintaxe preenchida: Círculo(A, L/3); Círculo(B, L/3), separadamente.

e) Determinar os pontos de intersecção C e D das circunferências c e d, respectivamente, com o segmento f. Veja Figura 7.

Figura 7 – Pontos C e D



Fonte: autoria própria.

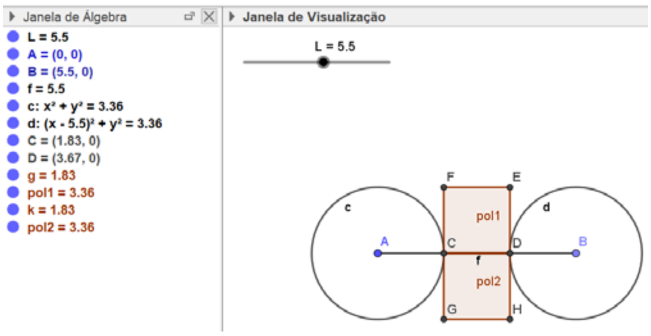
Sintaxe: Interseção(<Objeto>, <Objeto>)

Sintaxe preenchida: Interseção(c, f); Interseção(d, f)

Com isso ficam definidos os segmentos AC, CD e DB congruentes.

f) Criar dois polígonos regulares de 4 lados, conforme ilustra a Figura 8.

Figura 8 – Curva de Peano nível 1



Fonte: autoria própria.

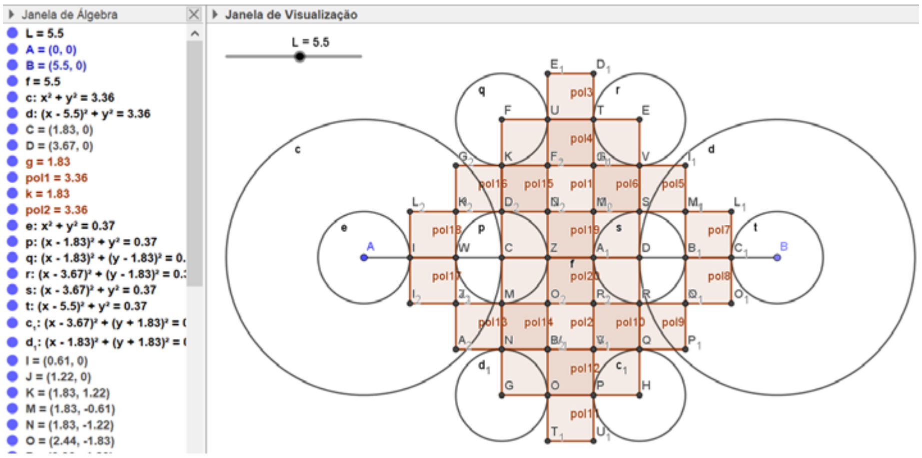
Sintaxe: Polígono(<Ponto>, <Ponto>, <Número de Vértices>)

Sintaxe preenchida: Polígono(C, D, 4); Polígono(D, C, 4)

Etapa 3: nível 2

Obtenção de 81 segmentos gerados a partir dos 9 segmentos obtidos no nível 1 da Curva de Peano. Para tanto, devemos repetir os passos fornecidos nos itens d, e, f do nível 1 (Figura 9). A circunferência gerada no item d tem raio L/3, porém, no nível 2, o raio passa a ser L/9.

Figura 9 – Curva de Peano nível 2 com todos os elementos geométricos

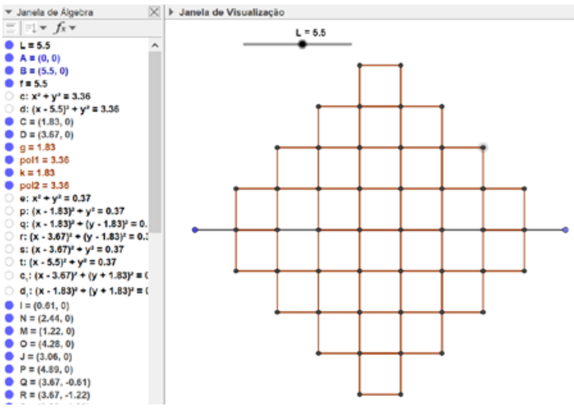


Fonte: autoria própria.

Nos segmentos AC e DB repetir o que foi feito no nível 1. De forma similar, reproduzir no lado superior FE do quadrado superior (obtido no nível 1) e no lado inferior do quadrado inferior GH (obtido no nível 1), os mesmos procedimentos.

Antes de ir para a etapa 4 (nível 3), vamos deixar somente os segmentos e os pontos visíveis para facilitar a execução da próxima etapa, conforme ilustra a Figura 10.

Figura 10 – Curva de Peano nível 2

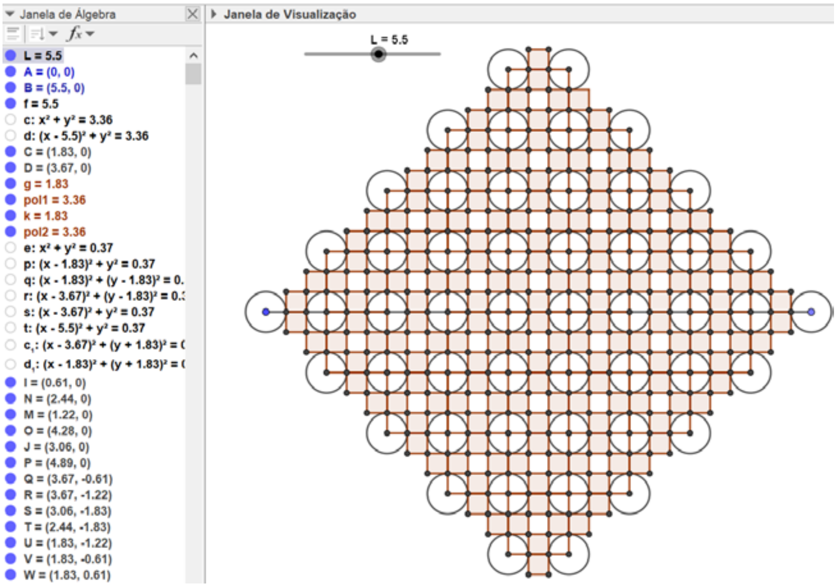


Fonte: autoria própria.

Etapa 4: nível 3

Obtenção de 729 segmentos gerados a partir dos 81 segmentos obtidos no nível 2 da Curva de Peano. Para fazer isso, repetir os passos dos itens d; e; f do nível 1, conforme ilustrado na Figura 11. A circunferência gerada no item d tem raio L/3, porém, para o nível 3, o raio passa a ser L/27.

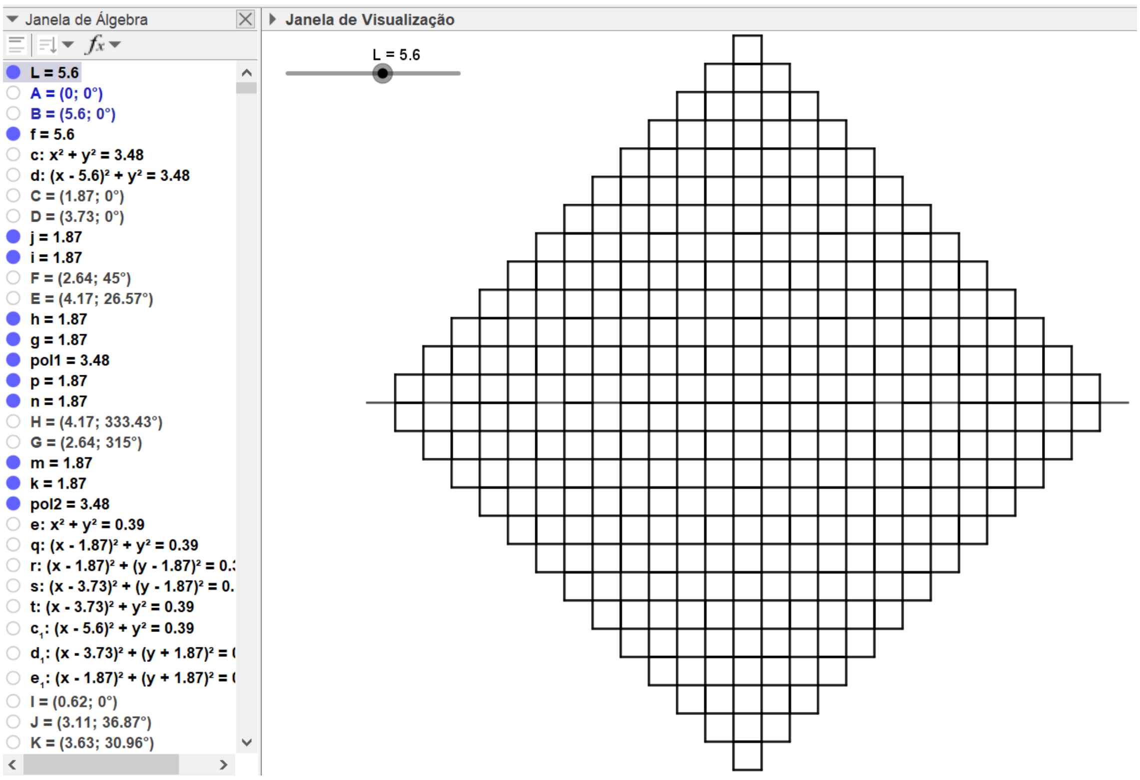
Figura 11 – Curva de Peano nível 3 não finalizada



Fonte: autoria própria.

i) Para finalizar, deixaremos visível somente os segmentos gerados no nível 3, ocultando outros objetos que não são necessários (Figura 12).

Figura 12 – Curva de Peano nível 3 finalizada



Fonte: autoria própria.

Atividade 3 – Exploração da Curva de Peano

a) A partir da construção da Curva de Peano, analisar e preencher o Quadro 1, determinando a medida do lado e o número de segmentos gerados em cada nível até chegar ao *n*, em que *n* é um número natural qualquer.

Quadro 1 - Tamanho do lado e números de segmentos gerados na Curva de Peano de nível *n*

	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	...	Nível *n*
Lado	l	$\frac{l}{3}$	$\frac{l}{9}$	$\frac{l}{27}$	...	$\frac{l}{3^n}$
Número de segmentos	1	9	81	729	...	9^n
Área de cada quadrado gerado	-	$\frac{l^2}{9}$	$\frac{l^2}{81}$	$\frac{l^2}{729}$	...	$\frac{l^2}{9^n}$

Fonte: autoria própria.

b) Se pensar em um valor para *n* muito elevado, ou seja, *n* tendendo a infinito, o que ocorrerá com a soma do comprimento dos segmentos, isto é, S_n?

A soma dos comprimentos dos segmentos na Curva de Peano é dada pelo número de segmentos multiplicado pela medida de cada um deles. Para melhor organização, deve ser preenchido como no Quadro 2, em que a escrita em vermelho corresponde à resposta esperada.

Quadro 2 – Soma dos comprimentos dos segmentos na Curva de Peano

Nível	Soma dos segmentos
0	$S_0 = 1.l = l$
1	$S_1 = 9..\frac{l}{3} = \frac{9}{3}.l = 3S$
2	$S_2 = 81.\frac{l}{9} = \frac{81}{9}.l = 9S$
3	$S_3 = 729.\frac{l}{27} = \frac{729}{27}.l = 27S$
⋮	⋮
N	$S_n = 9^n.\frac{l}{3^n} = \frac{3^{2n}}{3^n}.l = (3^n).l$

Fonte: autoria própria.

$S_n = (3^n).l$. Há duas formas para resolver: uma é atribuindo valores a n e verificando seu comportamento. A outra, é por meio do limite quando n tende a infinito, ou seja:

$$\lim_{n\to\infty}((3^n).l) = l.\lim_{n\to\infty}(3^n) = \infty$$

Para atribuir valores, pode ser utilizada a Planilha do *GeoGebra*, a qual é apresentada na Figura 13.

Figura 13 – Soma dos comprimentos da Curva de Peano n.

Planilha

	A	B	C
1	n	3^n	
2	1	3	
3	5	243	
4	10	59049	
5	15	14348907	
6	20	3486784401	
7	25	847288609443	
8	30	205891132094649	
9	35	50031545098999704	
10	40	12157665459056929000	

Fonte: autoria própria.

Como podemos observar na Figura 13, conforme aumentarmos o valor de n, também teremos valores cada vez mais elevados para a soma. Podemos concluir que a soma tende a um valor muito grande, ou seja, ao infinito.

c) Com base na Figura 14, o que você observa que ocorre na passagem da construção do nível 0 para o nível 1?

Figura 14 – Curva de Peano nível 0 e nível 1

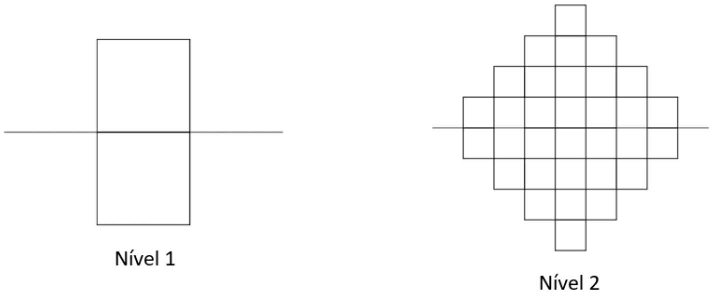
Fonte: autoria própria.

Resposta esperada:

O nível 0 é apenas um segmento de reta cujo comprimento mede L unidades. O nível 1 possui 2 quadrados de lados medindo L/3 cada um.

d) Com base na Figura 15, o que você observa que ocorre na passagem da construção do nível 1 para o nível 2?

Figura 15 – Curva de Peano nível 1 e nível 2



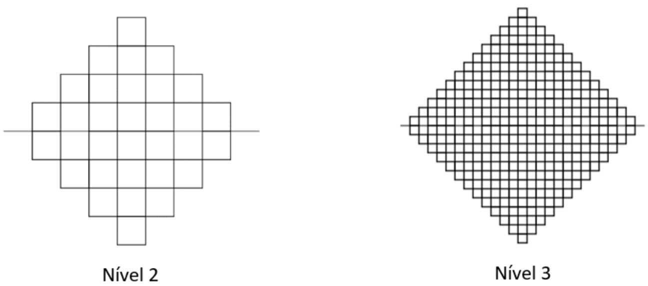
Fonte: autoria própria.

Resposta esperada:

O nível 1 possui dois quadrados de lado medindo L/3, enquanto que o nível 2 possui 32 quadrados de lados medindo L/9.

e) Com base na Figura 16, o que você observa que ocorre na passagem da construção do nível 2 para o nível 3?

Figura 16 – Curva de Peano nível 2 e nível 3



Fonte: autoria própria.

Resposta esperada:

O nível 2 possui 32 quadrados de lado medindo L/9. O nível 3 possui 338 quadrados de lados medindo L/27.

f) Se continuarmos as iterações até chegar a um nível n, em que *n* é um valor muito elevado (tendendo a infinito), o que é possível conjecturar a respeito da área da superfície formada nessa iteração?

Resposta esperada:

Quando *n* for muito elevado, o valor da área da superfície tende a ser a área de um quadrado, pois essa figura geométrica está sendo preenchida cada vez por quadrados menores.

Neste terceiro caderno, dando continuidade aos estudos realizados na tese mencionada, a atenção foi dirigida ao uso de Geometria Dinâmica, no caso com o *software* GeoGebra, na construção e exploração de um fractal em nada convencional, a Curva de Peano. Ela é especial na medida que é uma curva cujo comprimento é infinito, contida em uma região finita (um quadrado de área limitada) preenchendo esta região quadrada.

As construções não seriam adequadas e propícias de serem feitas com régua e compasso convencionais, porém com o uso da tecnologia isso se torna razoavelmente simples e viável de ser realizada com estudantes do Ensino Médio e, principalmente, na formação de professores de Matemática. Isso possibilita a aquisição de conhecimentos de outra geometria além da Euclidiana, ou seja, a Geometria Fractal.

Nessa construção é possível desenvolver conteúdos diversos da própria Geometria Euclidiana, por exemplo, grandezas, medidas, formas geométricas, perímetros, áreas, etc. Acreditamos que o caderno, juntamente com os dois anteriores e o próximo, poderão auxiliar professores em atividades de sala de aula.

Referências

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula.** Belo Horizonte: Autentica, 2005.

COELHO, João Batista. **Geometria Fractal:** Um olhar sobre a necessidade de inclusão na estrutura curricular do Ensino Médio. 2015. 80 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=81594>. Acesso em: 23 set. 2017.

IWAI, Marceli Megumi Hamazi. **Geometria Fractal**. 2015. 86 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=85308>. Acesso em: 23 set. 2017.

Sobre os autores

Maurício Ramos Lutz

É doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Franciscana (UFN), mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), especialista Matemática, Mídias Digitais e Didática pela UFRGS e licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Atualmente é professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico no Instituto Federal Farroupilha (IFFar). Lattes: [<http://lattes.cnpq.br/5099730179818142>](http://lattes.cnpq.br/5099730179818142).

José Carlos Pinto Leivas

É doutor em Educação (Matemática) pela Universidade Federal do Paraná (UFPR), mestre em Matemática Pura e Aplicada pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e licenciado em Matemática pela Universidade Católica de Pelotas (UCPEL). Atualmente é professor e pesquisador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da UFN. Lattes: [<http://lattes.cnpq.br/0314545667166824>](http://lattes.cnpq.br/0314545667166824).