

PRÁTICAS LABORATORIAIS PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

Sob o olhar de licenciandos em matemática

Francisco Wagner Soares Oliveira
Gisele Pereira Oliveira
Ana Carolina Costa Pereira
(organizadores)

**Laboratório de
Matemática e Ensino
Professor Bernardo
Rodrigues Torres
(LABMATEN/UECE)**



PRÁTICAS LABORATORIAIS PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

Sob o olhar de licenciandos em matemática

Francisco Wagner Soares Oliveira
Gisele Pereira Oliveira
Ana Carolina Costa Pereira
(organizadores)

**Laboratório de
Matemática e Ensino
Professor Bernardo
Rodrigues Torres
(LABMATEN/UECE)**



2022 – Editora Uniesmero

www.uniesmero.com.br

uniesmero@gmail.com

Organizadores

Francisco Wagner Soares Oliveira

Gisele Pereira Oliveira

Ana Carolina Costa Pereira

Editor Chefe: Jader Luís da Silveira

Editoração e Arte: Resiane Paula da Silveira

Imagens, Arte e Capa: Organizadores/Autores

Revisão: Respective autores dos artigos

Conselho Editorial

Ma. Tatiany Michelle Gonçalves da Silva, Secretaria de Estado do Distrito Federal, SEE-DF

Ma. Jaciara Pinheiro de Souza, Universidade do Estado da Bahia, UNEB

Dra. Náyra de Oliveira Frederico Pinto, Universidade Federal do Ceará, UFC

Ma. Emile Ivana Fernandes Santos Costa, Universidade do Estado da Bahia, UNEB

Me. Rudvan Cicotti Alves de Jesus, Universidade Federal de Sergipe, UFS

Me. Heder Junior dos Santos, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, UNESP

Ma. Dayane Cristina Guarnieri, Universidade Estadual de Londrina, UEL

Me. Dirceu Manoel de Almeida Junior, Universidade de Brasília, UnB

Ma. Cinara Rejane Viana Oliveira, Universidade do Estado da Bahia, UNEB

Esp. Jader Luís da Silveira, Grupo MultiAtual Educacional

Esp. Resiane Paula da Silveira, Secretaria Municipal de Educação de Formiga, SMEF

Sr. Victor Matheus Marinho Dutra, Universidade do Estado do Pará, UEPA

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P436t Oliveira, Francisco Wagner Soares
Práticas Laboratoriais para o Ensino de Trigonometria: Sob o olhar de licenciandos em Matemática / Francisco Wagner Soares Oliveira; Gisele Pereira Oliveira; Ana Carolina Costa Pereira (organizadores). – Formiga (MG): Editora Uniesmero, 2022. 130 p. : il.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-84599-23-9

DOI: 10.5281/zenodo.6280677

1. Laboratório de Matemática. 2. Práticas Laboratoriais. 3. Trigonometria. 4. Licenciandos em Matemática. 5. Educação Básica. I. Oliveira, Francisco Wagner Soares. II. Oliveira, Gisele Pereira. III. Pereira, Ana Carolina Costa. IV. Título.

CDD: 516.24

CDU: 51

Os artigos, seus conteúdos, textos e contextos que participam da presente obra apresentam responsabilidade de seus autores.

Downloads podem ser feitos com créditos aos autores. São proibidas as modificações e os fins comerciais.

Proibido plágio e todas as formas de cópias.

Editora Uniesmero
CNPJ: 35.335.163/0001-00
Telefone: +55 (37) 99855-6001

www.uniesmero.com.br

uniesmero@gmail.com

Formiga - MG

Catálogo Geral: <https://editoras.grupomultiatual.com.br/>

Acesse a obra originalmente publicada em:
<https://www.uniesmero.com.br/>



PREFÁCIO

Ao ler esse livro, você irá se defrontar com uma obra valorosa de formação humana, que emerge da reflexão teoria e prática de sala de aula. Esta coletânea de textos voltados às questões da formação inicial docente, no que diz respeito a reflexões laboratoriais do ensino de Trigonometria, foi organizada pelos professores Francisco Wagner Soares Oliveira (UECE), Gisele Pereira Oliveira (SEDUC/UECE) e Ana Carolina Costa Pereira (UECE), em que emergem de um contexto histórico de vivências resultantes de um processo bem planejado em meio a experiência com o ensino remoto durante a pandemia por COVID 19.

O Curso de Licenciatura em Matemática da UECE, numa concepção particular do curso do *campus* Itaperi, adéqua uma formação docente em ações que permeiam o processo de ensino aprendizagem, apontando para uma formação docente dotada de conhecimentos e competências específicas na sua base, que o diferenciam de outros profissionais. O Laboratório de Ensino de Trigonometria (LET) tem sua contribuição ímpar nesse processo de formação, consolidando-se em resultados de produção escrita, material e valores docentes com sensibilização a práticas de laboratório para à educação básica.

É dentro deste contexto que se deve situar a produção e edição desta coletânea de textos voltados à práxis e formação docente, postas pelas experiências didáticas laboratoriais dos professores com essa disciplina, no espaço virtual de sala de aula com a colaboração dos licenciandos. O trabalho docente realizado por esses professores, não se limita à entrega de conteúdo ou à preparação profissional de seus alunos. Tomando como referência aspectos gerais do projeto pedagógico, essas experiências promovem uma formação do licenciando para o ensino, a pesquisa e extensão, quando esses achados ficam disponíveis para leitura e apreciação do público afim.

Os organizadores, numa iniciativa laboriosa de lançamento destes textos, contribuem com a história formativa na perspectiva da produção acadêmica e científica como possibilidade contínua de construção permanente do fazer pedagógico, pensado como elemento de uma práxis social mais ampla e de grande contribuição para o registro da produção científica do laboratório de Matemática.

Embora a presente coletânea de textos seja de cunho didático, é uma obra que sinaliza para experiências autorais únicas e de elaboração material como constituição docente de seus autores. Os organizadores presenteiam o leitor com atividades práticas para o estudo de Trigonometria como contribuição ao desenvolvimento de atividades práticas de construção dos conceitos abstratos dos conteúdos matemáticos.

Fica, assim, formulado o convite a que o leitor, seja docente da Educação Básica, licenciando, seja de outras áreas diferentes da Educação Matemática, que faça sua imersão literária deixando-se levar por estas orientações práticas que, nesse momento histórico desses autores, enquanto produtores e pesquisadores, é, certamente, síntese paradigmática resultante dos seus debates pedagógicos.

Profa. Dra. Ana Cláudia Mendonça Pinheiro

Professora EBTT do IFCE

Fortaleza – Ceará

Março de 2022.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	8
<i>Francisco Wagner Soares Oliveira</i>	
<i>Gisele Pereira Oliveira</i>	
<i>Ana Carolina Costa Pereira</i>	
CAPÍTULO 1.....	15
Círculo Trigonométrico Manual.....	16
<i>Hemanoele Alexandre Santos</i>	
<i>Dailson Silva Santos</i>	
CAPÍTULO 2.....	28
Dominando o Ciclo Trigonométrico	29
<i>Anna Leticia de Araújo Silva</i>	
<i>Anderson Vieira do Nascimento</i>	
CAPÍTULO 3.....	40
The “Angle”	41
<i>Pedro Henrique Sales Ribeiro</i>	
CAPÍTULO 4.....	49
Charada Trigonométrica.....	50
<i>Lívia Bezerra de Alencar</i>	
<i>Kawoana da Costa Soares</i>	
CAPÍTULO 5.....	58
Trigobaralho	59
<i>Francimar Miguel da Silva Junior</i>	
CAPÍTULO 6.....	73
O uso do Teodolito Caseiro no ensino das Relações Trigonométricas num triângulo retângulo.....	74
<i>Vinicius de Sousa Paula</i>	
<i>Amanda Cardoso Benicio de Lima</i>	

Jessica de Oliveira Dantas

CAPÍTULO 7.....	84
------------------------	-----------

Estudando funções trigonométricas por meio do GeoGebra.....	85
--	-----------

Roberto Albuquerque da Silva

Roberta Vivian Campos Severino

Luiza Maria Moraes Lima

CAPÍTULO 8.....	97
------------------------	-----------

Construindo Círculo Trigonométrico no GeoGebra	98
---	-----------

Karlos Santhiago de Melo Madeiro

Audrey Stephanie de Oliveira Gomes

Luiza Maria Moraes Lima

CAPÍTULO 9.....	107
------------------------	------------

Trigonometria na prática utilizando o Vicmetro.....	108
--	------------

Werther Xisto Cardoso

José Edson Euzebio Neto

CAPÍTULO 10.....	117
-------------------------	------------

Estudando as relações trigonométricas no triângulo retângulo a partir da Dama Trigonométrica	118
---	------------

Milena Carneiro Almeida

Gláucio Alexandre Pereira

APRESENTAÇÃO

Este livro é constituído por meio do esforço de estudantes da Licenciatura em Matemática no Laboratório de Matemática e Ensino Professor Bernardo Rodrigues Torres (LabMatEN) da Universidade Estadual do Ceará (UECE). Em especial, pela participação dos discentes na disciplina de Laboratório de Ensino de Trigonometria (LET)¹, em que através deste ambiente laboratorial constituiu ações e experimentou práticas laboratoriais de Trigonometria.

No LET da Licenciatura em Matemática da UECE o foco está na formação do futuro professor, desse modo, são tecidas discussões entorno do: papel do laboratório no ensino e na aprendizagem de conceitos de Trigonometria; teoria e prática de conteúdos trigonométricos para a Educação Básica; confecção de materiais didáticos manipuláveis; desenvolvimento de propostas de atividades para o ensino básico; e planejamento e realização de uma experiência prática com o uso de materiais concretos no ensino básico.²

Nesses termos, o LET da UECE se aproxima da ideia de que ele é uma “sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático” (LORENZATO, 2012, p. 7). Em um sentido figurado, pode-se dizer que essa sala-ambiente é tão necessária para os discentes e professores como um

¹ A disciplina de Laboratório de Ensino de Trigonometria fundamenta sua existência nas concepções de Lorenzato (2012): “Laboratório de Ensino de Matemática na formação de Professores”; Rêgo e Rêgo (2000): “Matemática”; Rodrigues (2015): “Laboratório de Educação Matemática na formação de Professores”; Klein (2009): “Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior: Trigonometria”; e Fonseca (2010): “Aprendizagem em Trigonometria: obstáculos, sentido e mobilizações”.

² Para mais detalhes sobre o trabalho desenvolvido pelo LabMatEN/UECE e sua concepção sobre a formação de professores vide: Pereira e Oliveira (2021): “O ambiente remoto como ferramenta promotora de práticas laboratoriais no ensino de Trigonometria em cursos de licenciatura em Matemática”; Pereira, Batista e Oliveira (2021): “Novas configurações do laboratório de ensino de Trigonometria a partir da incorporação da tecnologia articulada a história da Matemática”; Pereira, Pinheiro e Santos (2021): “A concepção de laboratório de matemática de licenciandos: repensando conceitos, uso e formação”; Santos e Pereira (2015); Santos, Pereira e Martins (2016): “Práticas no laboratório de Matemática na inserção da educação a distância”; Pereira e Vasconcelos (2006): “Materiais Manipulativos (Material Concreto): Construindo uma proposta Pedagógica por meio do Laboratório de Matemática e Ensino da UECE” e Santos (2021): “O Laboratório de Matemática e Ensino (LME) na formação inicial do professor: orientações metodológicas com base na Sequência Fedathi”.

laboratório é necessário para um químico ou como uma clínica é necessária para um médico/dentista.

Diante das possibilidades que podem ser vivenciadas nessa sala-ambiente, entende-se que o LET se constituiu como um local propício para a formação, tanto no que se refere ao desenvolvimento profissional como também para a formação do professor pesquisador (TURRIONI, 2004).

Sabendo desse potencial, ao final de disciplinas de LET, espera-se que os discentes sejam capazes de: desenvolver uma visão crítica na escolha e na utilização de recursos adequados ao ensino aprendizagem de conteúdos de Trigonometria; reconhecer no LET um complemento metodológico para auxílio a conteúdos de Trigonometria plana e esférica da Educação Básica; refletir sobre sua concepção de ensino de Trigonometria na Educação Básica, comparando-a com as de outros alunos; possuir autonomia para criar o seu próprio laboratório de Matemática, construindo materiais didáticos de baixo custo; elaborando atividades aliadas ao uso de material manipulável para o ensino de conceitos de Trigonometria; e entendendo o uso de material concreto nas aulas de Matemática como um facilitador para alunos que apresentem dificuldades e como uma alternativa para se construir Matemática em sala de aula.

Dentre esses inúmeros objetivos que sustentam a disciplina de LET, este livro é elaborado como forma de divulgar para a comunidade acadêmica e professores da Educação Básica propostas de práticas laboratoriais elaboradas por discentes de LET. Compõem a obra alguns dos produtos confeccionados durante os semestres de 2019.2, de 2020.1 e de 2021.2.

Esse lapso temporal, já revela que o trabalho se desenvolveu durante o período da pandemia do Novo Corona Vírus (COVID 19). Sob esse contexto adverso, o LET teve que dar espaço não apenas aos materiais didáticos concretos palpáveis/manipuláveis, mas também aqueles que eram utilizados com menos frequência, os quais Lorenzato (2012) chamam de Imagens Gráficas. Ganham ainda mais espaço recursos digitais, tais como filmes, modelos dinâmicos, figuras, computadores e softwares de geometria dinâmica.

De posse dos materiais didáticos concretos, seja pelo uso de alguns já existentes ou mesmo pela criação dos próprios recursos, cabe destacar que para a proposta de prática o cuidado dos discentes esteve principalmente em favorecer para que o processo de ensino e aprendizagem se desse de forma exploratório-investigativo, tal como assiná-la Lorenzato (2012).

A intenção é que as práticas laboratoriais possam tornar as aulas de Matemática mais dinâmicas e interessantes para os alunos e professores da Educação Básica, para que desse modo possam aprender ou ressignificar conceitos de forma mais significativa a partir do contato e manipulação dos materiais concretos.

O conteúdo das práticas, como não poderia ser diferente, haja visto estar em uma disciplina de LET estão voltados ao ensino de Trigonometria. Uma das outras justificativas para esse direcionamento, se deve à importância dada a Trigonometria na Educação Básica. Pode-se observar sua presença tanto em livros do Ensino Fundamental II e Ensino Médio como também na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

No caso da incorporação da Trigonometria na BNCC se observa que ela aparece inclusa na Unidade Temática Geometria. Dentre as habilidades que fazem referência a conteúdos da Trigonometria, destaca-se a EM13MAT308, que diz que “aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos” (BRASIL, 2018, p. 536) do Ensino Fundamental II e a EM13MAT404 “identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais” (BRASIL, 2018, p. 531) do Ensino Médio.

Tendo como marco inicial alguma das habilidades da BNCC que contemplam Trigonometria, as ações exploratório-investigativas, aqui apresentadas, foram propostas em sua maioria, para ocorrerem dentro do contexto do ensino remoto, com atividades síncronas, entretanto cabe destacar que elas também podem ocorrer no formato presencial após o retorno efetivo as escolas.

Em cada um dos 10 capítulos desta obra é apresentado uma proposta de prática laboratorial pensada por um discente ou uma dupla destes, em que eles trazem um guia para o professor e uma possível folha para o aluno. No material voltado ao professor, encontra-se algumas orientações para o docente guiar a atividade, a indicação da(s) habilidade(s) e objeto(s) de conhecimento(s) contemplado(s) da BNCC referente à Unidade Temática Geometria³.

Além da unidade temática, objeto de conhecimento e habilidades, na estrutura do guia do professor, observa-se ainda: uma sinopse, em que se resume elementos da prática; objetivos tanto para os professores como para os estudantes; os conhecimentos prévios; materiais necessários; duração da

³ Sobre a Unidade Temática Geometria, cabe destacar que os discentes da disciplina de LET têm a consciência de que ela “envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento” (BRASIL, 2018, p. 271). Também é consenso que “estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos” (BRASIL, 2018, p. 271).

proposta de atividade; etapas pensadas para andamento da ação; referências; e por vezes anexos.

Na folha do aluno os discentes da disciplina de LET trazem um passo a passo para os discentes seguirem, no sentido de favorecer o andamento e a obtenção do objetivo com a atividade. Desse modo, são apresentados aos estudantes: uma foto do material didático manipulável; comentários iniciais sobre a prática laboratorial; e orientações para o desenvolvimento da ação, à qual é subdividida em etapas/momentos. A intenção com esta folha é que ela possa subsidiar o trabalho do professor no sentido de favorecer a execução e andamento da prática.

No primeiro capítulo, dos autores Hemanoele Alexandre Santos e Dailson Silva Santos, intitulado de “Círculo Trigonométrico manual”, os autores propõem uma prática que tem como material de apoio o Círculo Trigonométrico. A proposta volta-se para alunos do 2º ano do Ensino Médio e dedica-se a trabalhar conceitos relacionados à noção de ângulo e as funções seno e cosseno, as quais são contempladas na habilidade (EM13MAT306) da BNCC.

O segundo capítulo, dos autores Anna Leticia de Araújo Silva e Anderson Vieira do Nascimento, nomeado por “Dominando o Ciclo Trigonométrico”, também convida a trabalhar conceitos relacionados ao Ciclo Trigonométrico com alunos do 2º ano do Ensino Médio. Contudo, neste é dado foco a habilidade (EM13MAT308) da BNCC. Como material manipulativo para a prática, os discentes propõem explorar um Ciclo Trigonométrico juntamente com alguns triângulos retângulos.

No terceiro capítulo, do autor Pedro Henrique Sales Ribeiro, denominado por “The ‘Angle’”, autor propõe como recurso um jogo de perguntas e respostas, denotado de *Angle*. O foco do discente está na habilidade (EM13MAT306) da BNCC, particularmente aos conceitos relacionados ao trabalho com a redução ao primeiro quadrante. Com essa prática é esperado que os estudantes possam compreender o processo de redução ao primeiro quadrante.

No quarto capítulo, mantendo esse caráter lúdico da prática anterior, às autoras Lívia Bezerra de Alencar e Kawoana da Costa Soares, intitularam-no por “Charada Trigonométrica”, tendo-se neste a proposta de uma prática em que as discentes trazem como recurso uma charada, sob o título de “Charada trigonométrica”. A proposta é que o professor possa explorar conceitos relacionados as relações trigonométricas e desse modo os estudantes do 2º ano do Ensino Médio possam ter a possibilidade de adquirir a habilidade (EM13MAT404) da BNCC.

No quinto capítulo, do autor Francimar Miguel da Silva Junior, de título “Trigobaralho”, o autor traz uma proposta de prática para o 9º ano do Ensino Fundamental. Pegando um baralho, jogo bem conhecido, o discente faz uma

adaptação para trabalhar Trigonometria e dá o nome de “trigobaralho”. Por ser uma prática pensada para uma hora aula, o estudante indica que se dedique a discutir as razões trigonométricas apenas dos ângulos de 30° , 45° e 60° , em particular seno e cosseno. Essa prática é uma opção para trabalhar com os estudantes a habilidade (EF08MA15) da BNCC.

No sexto capítulo, dos autores Vinicius de Sousa Paula, Amanda Cardoso Benicio de Lima e Jessica de Oliveira Dantas, de título “O uso do Teodolito caseiro no ensino das Relações Trigonométricas num triângulo retângulo”, os discentes propõem uma prática para discutir as relações trigonométricas num triângulo retângulo a partir de um Teodolito caseiro. A intenção é que estudantes possam aplicar conceitos relativos as relações trigonométricas de forma prática e assim possam atribuir mais significado a conceitos abstratos. Dentre as habilidades da BNCC, a prática contempla a habilidade (EM13MAT308).

No sétimo capítulo, dos autores Roberto Albuquerque da Silva, Roberta Vivian Campos Severino e Luiza Maria Morais Lima, intitulado por “Estudando funções trigonométricas por meio do GeoGebra”, tem-se uma prática que usa como recurso o software GeoGebra, recurso de geometria dinâmica. A proposta dos autores está direcionada ao trabalho com as funções trigonométricas, particularmente os conceitos contemplados na habilidade (EM13MAT404) da BNCC.

No oitavo capítulo, dos autores Karlos Santhiago de Melo Madeiro, Audrey Stephanie de Oliveira Gomes e Luiza Maria Morais Lima, nomeado por “Construindo Círculo Trigonométrico no GeoGebra”, os autores também usam como material o software GeoGebra. Entretanto, o foco agora está na habilidade (EF09MA11) do Ensino Fundamental II. A ideia é que o conhecimento matemático seja trabalhado a partir dos conceitos incorporados na construção do Círculo Trigonométrico.

No nono capítulo, dos autores Werther Xisto Cardoso e José Edson Euzebio Neto, de título “Trigonometria na prática utilizando o Vicmetro”, teve em vista o trabalho com as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente), em que os estudantes elegem como material o Vicmetro. Nessa prática, o esforço dos discentes vai na direção de ajudar o professor a desenvolver uma prática que possa favorecer a compreensão dos estudantes sobre as razões trigonométricas. Nesses termos a prática dedica-se a habilidade (EM13MAT308) da BNCC.

No décimo capítulo, dos autores Milena Carneiro Almeida e Gláucio Alexandre Pereira, denominado por “Estudando as relações trigonométricas no triângulo retângulo a partir da Dama Trigonométrica”, volta-se a aparecer uma proposta voltada a discutir as relações trigonométricas no triângulo retângulo. Um dos diferenciais dessa nova prática é o material utilizado como recurso. Aqui os autores propõem a prática através de uma “Dama trigonométrica”. Este foi

desenvolvido contemplando às habilidades (EM13MAT306) e (EM13MAT308) da BNCC.

Diante do contexto destacado, na sequência se expõe na íntegra as práticas laboratoriais vislumbradas para a Educação Básica, esperando-se que elas possam tanto ampliar o banco de atividades disponíveis ao professor como também os ajudar a pensar outras propostas para a sala de aula, viabilizando discussões, reflexões e aprendizagem.

Francisco Wagner Soares Oliveira

Gisele Pereira Oliveira

Ana Carolina Costa Pereira

Referências

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018.

FONSECA, L. S. **Aprendizagem em Trigonometria: obstáculos, sentido e mobilizações**. Aracaju – SE: Editora UFS, 2010.

KLEIN, F. **Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior: Trigonometria**. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2009.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S (Org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas, SP, Autores Associados, 2012. p. 57-76.

PEREIRA, A.; BATISTA, A. N.; OLIVEIRA, G. Novas configurações do laboratório de ensino de Trigonometria a partir da incorporação da tecnologia articulada a história da Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 4, p. 1-19, 30 set. 2021.

PEREIRA, A. C. C.; OLIVEIRA, G. P. O ambiente remoto como ferramenta promotora de práticas laboratoriais no ensino de trigonometria em cursos de licenciatura em matemática. **Revista Prática Docente**, [S. l.], v. 6, n. 2, p. e027, 2021. DOI: 10.23926/RPD.2021.v6.n2.e027.id1076. Disponível em: <http://periodicos.cfs.ifmt.edu.br/periodicos/index.php/rpd/article/view/1076>. Acesso em: 18 fev. 2022.

PEREIRA, A. C. C., PINHEIRO, A. C. M., & SANTOS, J. N. dos. (2021). A concepção de laboratório de matemática de licenciandos: repensando conceitos, uso e formação. **Educação Matemática Em Revista**, 26(73), 24 - 43.

<https://doi.org/10.37001/emr.v26i73.2915>.

PEREIRA, A. C. C.; VASCONCELOS, C. B. Materiais Manipulativos (Material Concreto): Construindo uma proposta Pedagógica por meio do Laboratório de Matemática e Ensino da UECE. In: I Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2006, Recife. **Anais do I Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Recife: UFPE, 2006.

RÊGO, R. G., RÊGO, R. M. **Matematicativa**. João Pessoa, PB: EdUFPb, 2000.

RODRIGUES, F. C.; GAZIRE, E. S. **Laboratório de Educação Matemática na formação de Professores**. Curitiba: Appris, 2015.

SANTOS, J. N. **O Laboratório de Matemática e Ensino (LME) na formação inicial do professor: orientações metodológicas com base na Sequência Fedathi**. Orientador: Hermínio Borges Neto. 2021. 209 f. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-graduação em Educação Brasileira, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2021.

SANTOS, J. N.; PEREIRA, A. C. C. A matemática escolar e o laboratório como ambiente de aprendizagem: algumas considerações sobre o ensino. **Revista Conexões - Ciência e tecnologia**, v. 9, p. 17-25, 2015.

SANTOS, J. N.; PEREIRA, A. C. C.; MARTINS, E. B. Práticas no laboratório de matemática na inserção da educação a distância. In: Maria José Costa dos Santos; Fernanda Cíntia Costa Matos; Elisângela Bezerra Magalhães. (Org.). **As dimensões epistemológicas do saber matemático: ensino e aprendizagem**. 1ed. Curitiba: Editora CRV, 2016, v. 1, p. 125-141.

TURRIONI, A. M. S. **O laboratório de Educação Matemática na formação inicial de professores**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação matemática) – Unesp, Rio Claro, 2004.

Círculo Trigonométrico

manual

CAPÍTULO 1

Círculo Trigonométrico manual

Hemanoele Alexandre Santos

Dailson Silva Santos

INTRODUÇÃO

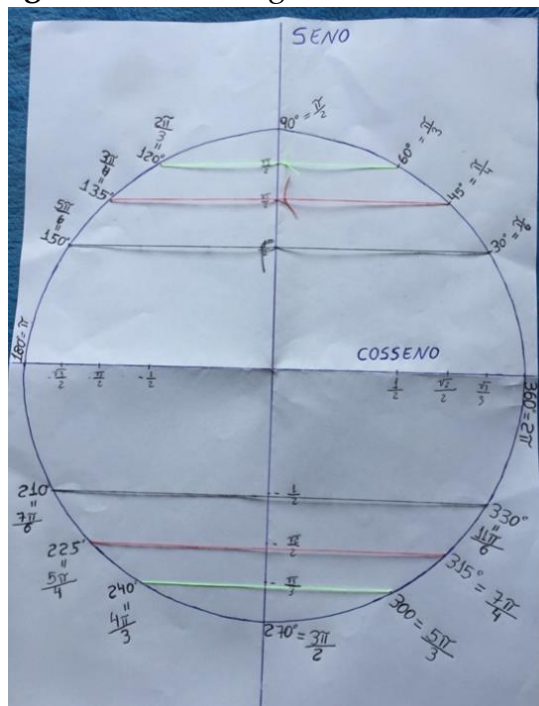
Ao entrarmos no conteúdo de Trigonometria voltado para os alunos do 2º do ensino médio, aborda-se de forma dinâmica a construção do Ciclo Trigonométrico, envolvendo toda a turma e assim os alunos poderão fixar melhor o conteúdo ao se falar em Ciclo Trigonométrico. O Círculo Trigonométrico, Ciclo ou Circunferência Trigonométrica, é uma representação gráfica que auxilia o aluno nas aulas de Trigonometria: Trigonometria na Circunferência, seno e cosseno de um arco.

Nesta atividade, pretendemos mostrar onde ficam localizados os graus ou radianos do seno e cosseno dentro do Círculo Trigonométrico, construídos com lápis, borracha, régua, compasso, transferidor, três agulhas e três cores de linhas diferentes.

GUIA DO PROFESSOR

Material didático manipulável

Figura 1 – Ciclo Trigonométrico manual



Fonte: Elaborado pelos autores.

Elementos que norteiam a prática**Quadro 1 – Resumo da prática**

Série/Ano	2º ano do Ensino Médio	
Unidade temática	Números e Álgebra	
Objeto de conhecimento	Plano Cartesiano, Ângulo, Seno, Cosseno	
Habilidade	(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de Álgebra e Geometria (BRASIL, 2018, p. 528).	
Objetivos	Docente	Promover uma aprendizagem cooperativa na relação dos conceitos de plano cartesiano, ângulo, seno e cosseno.
	Aluno	Desenvolver a aprendizagem e fixação dos conceitos de plano cartesiano, ângulo, seno e cosseno.
Materiais necessários	Uma folha de papel, Lápis com borracha, Régua, Transferidor, Compasso, Tesoura, 03 Agulhas e 03 cores de linhas diferentes.	
Conhecimentos prévios	Regra de três, Graus, Radiano, Simplificar fração, Seno e cosseno.	
Duração	1h40min/a.	

Fonte: Elaborado pelos autores.

Aspectos gerais do experimento*Sinopse*

Neste experimento os alunos serão expostos a uma breve explicação sobre Círculo Trigonométrico. Usando os conceitos de quadrantes, graus e radianos para, depois construir o Ciclo Trigonométrico e assim identificarem como, por exemplo, identificar em qual quadrante está localizado o arco de 135° ou 225° .

Motivação

O intuito de construir o Ciclo Trigonométrico a partir de ferramentas concretas é justamente com intenção de mostrar que a Matemática não é apenas constituída de cálculos, números ou assuntos de difícil compreensão. Mas que pode ser divertida, a partir do momento que usamos ferramentas e colocamos em prática a teoria vista em sala de aula.

O experimento

Prezado docente, para determinar os radianos dos ângulos 150° , 210° e 300° e em seguida verificar a veracidade das afirmações propostas na questão 3 fornecida ao final deste capítulo), é preciso obter um Ciclo Trigonométrico. Dessa forma, iremos apresentar três atividades que deverão ser realizadas por meio de material concreto, iniciando com a construção do Ciclo Trigonométrico para o estudo dos radianos e a verificação das afirmações listadas na questão.

Preparação

O docente deve começar com um breve slide relembrando os conceitos de seno, cosseno e usando a regra de três simples para encontrar em radiano os ângulos 150° , 210° e 300° . Logo em seguida, orientar os discentes a preparar todo seu material sobre a mesa para que todos possam começar juntos. A questão 1) verificada ao final deste, será a construção do Ciclo Trigonométrico. A questão 2) logo abaixo a 1, será o cálculo para encontrar em radiano os arcos 150° , 210° e 300° . A questão 3) subsequente, será analisar a veracidade das afirmações propostas.

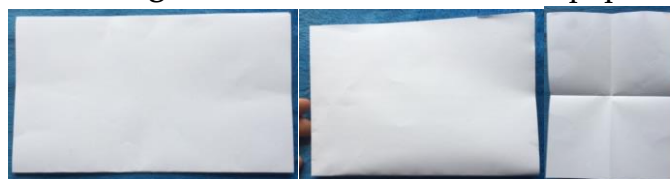
Etapas para o desenvolvimento do experimento

Questão 1 – Construindo o Ciclo Trigonométrico.

Com base no que foi visto em sala de aula e com as ferramentas solicitadas, construa o Ciclo Trigonométrico seguindo as orientações do professor. O discente seguirá nove passos:

- 1º Passo: Dobrar a folha ao meio duas vezes. De forma que ao abrir a folhar esteja a marcação de uma linha vertical e horizontal (ver Figura 2).

Figura 2 – Dobrando a folha de papel



Fonte: Elaborado pelos autores.

- 2º Passo: Marca os eixos do seno e do cosseno, utilizando uma régua (ver Figura 3).

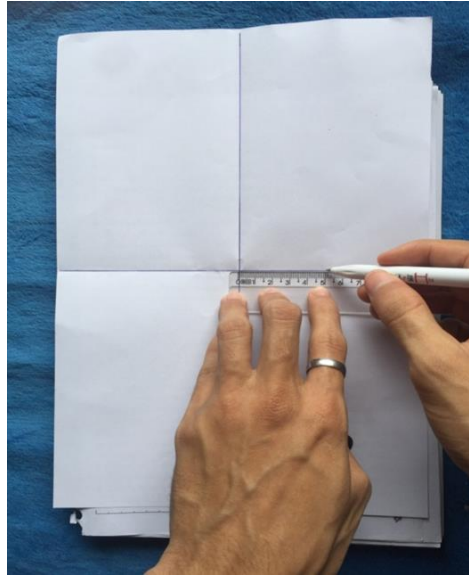
Figura 3 – Marcando os eixos com régua e compasso



Fonte: Elaborado pelos autores.

- **3º Passo:** levando em consideração que os eixos variam entre zero e um (0 e 1), vamos usar como medida: um (1) equivale a 10cm; cinco (5) cm equivale a $\frac{1}{2}$; sete (7) cm equivale a $\frac{\sqrt{2}}{2}$; oito vírgula cinco (8,5) cm equivale a $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Marque as medidas cinco, sete, oito vírgula cinco (5; 7; 8,5) e 10 cm e faça as devidas substituições. Em todas as direções (ver Figura 4).

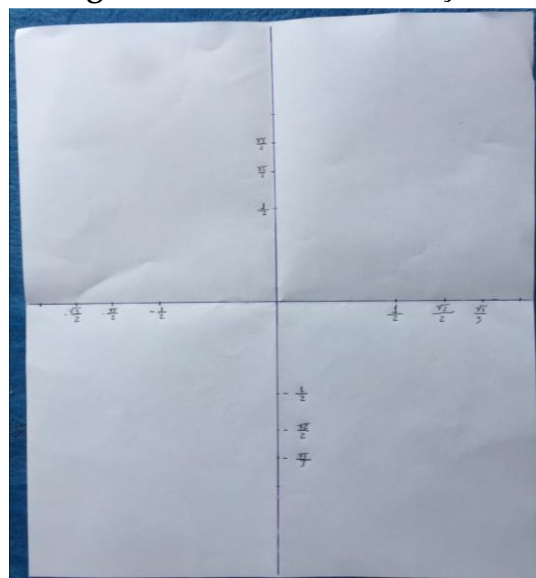
Figura 4 – Marcando com a caneta



Fonte: Elaborado pelos autores.

- **4º Passo:** Marca os valores correspondentes do seno e cosseno dos arcos de 30°, 40° e 60°. Sendo da direita para cima valores positivos e da esquerda para baixo valores negativos (ver Figura 5).

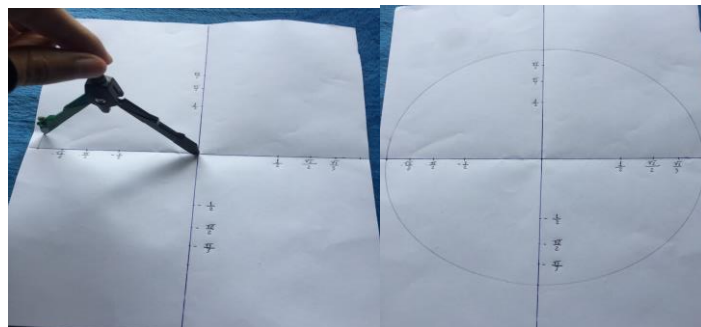
Figura 5 – Primeiras marcações



Fonte: Elaborado pelos autores.

- **5º Passo:** Traçar com o compasso uma circunferência de raio 10 cm partindo da origem (ver Figura 6).

Figura 6 – Traçando a circunferência



Fonte: Elaborado pelos autores.

- **6º Passo:** Dobrar a folha de forma que o primeiro quadrante fique voltado para cima (ver Figura 7).

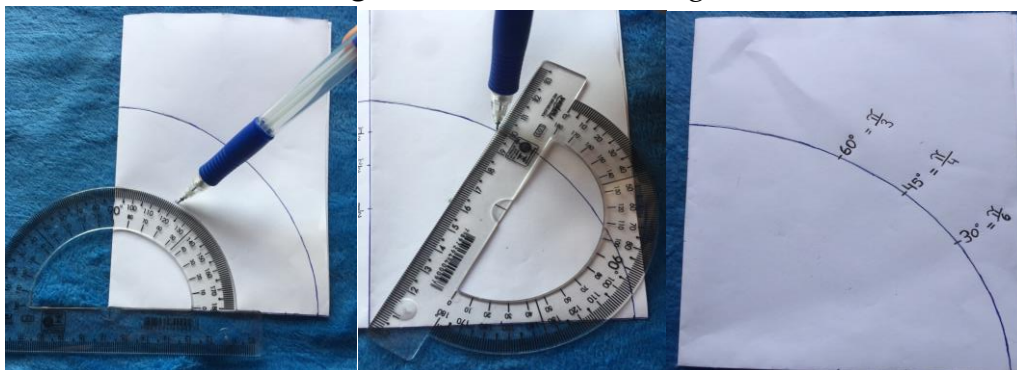
Figura 7 – Folha dobrada com o primeiro quadrante para cima



Fonte: Elaborado pelos autores.

- **7º Passo:** Marcar os ângulos de 30° , 45° e 60° com a ajuda de um transferidor. Vamos estender esses pontos até o arco também usando o transferidor. Feito este procedimento coloque os ângulos de 30° , 45° e 60° representados em radianos (ver Figura 8).

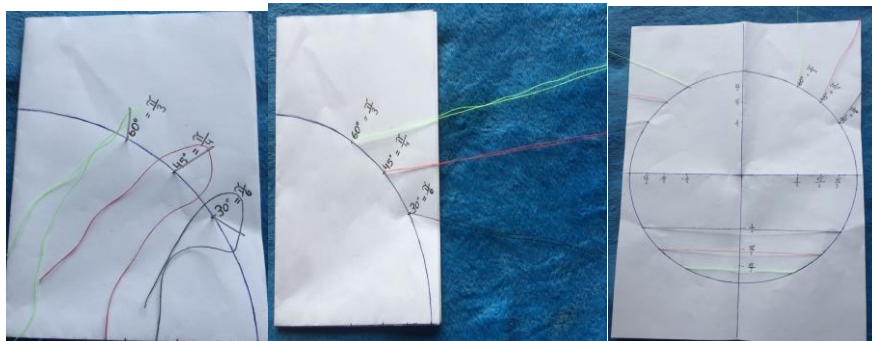
Figura 8 – Traçando os ângulos



Fonte: Elaborado pelos autores.

- **8º passo:** Furar com a agulha no ponto correspondente cada arco com cores diferentes. De modo que as pontas das linhas fiquem dos dois lados da folha. Abra a folha com cuidado e assim teremos marcados todos os arcos (ver Figura 9).

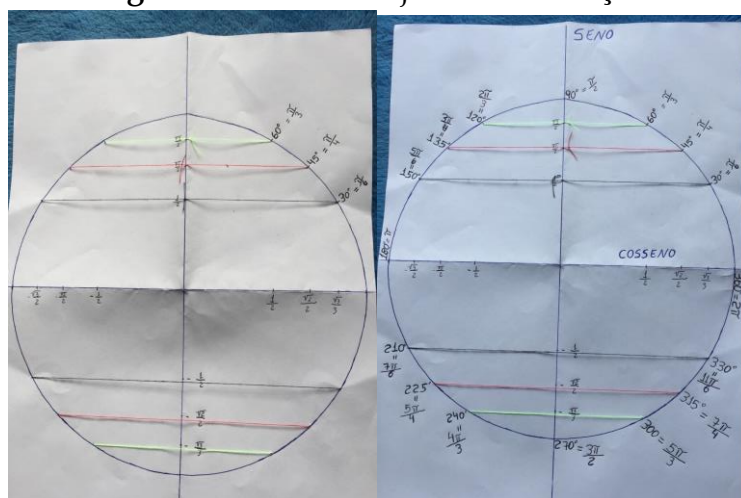
Figura 9 – Alocando as agulhas



Fonte: Elaborado pelos autores.

- **9º Passo:** Amarrar as pontas das linhas as suas cores correspondentes e cortar o excesso delas. Escreva o nome cosseno (linha horizontal) e seno (linha vertical) e continue a marcação dos arcos (ver Figura 10).

Figura 10 – Últimos ajustes e marcações



Fonte: Elaborado pelos autores.

Questão 2 – A medida de um arco no círculo trigonométrico pode ser dada em grau ($^{\circ}$) ou radiano (rad.). Um (1) radiano corresponde à medida de um arco da circunferência, cujo comprimento é igual ao raio da circunferência do arco que será medido. Com o auxílio do Ciclo Trigonométrico identifique em radiano os arcos 150° , 210° e 300° .

Quadro 2 – Espaço para registro dos radianos de cada arco

Arcos	150°	210°	300°
Radiano			

Fonte: Elaborado pelos autores.

Usando a regra de três simples, temos:

$$\begin{array}{l} 180^\circ \text{ ----- } \pi \\ 150^\circ \text{ ----- } x \\ 180^\circ \cdot x = 150^\circ \cdot \pi \\ x = \frac{150^\circ \pi}{180^\circ} \end{array}$$

Fatorando o numerador e denominador da fração por 10, obtemos a fração resultante $\frac{15\pi}{18}$. Em seguida, fatorando consecutivamente por 3, temos que $x = \frac{5\pi}{6}$. Logo, $150^\circ = \frac{5\pi}{6} \text{ rad.}$

$$\begin{array}{l} 180^\circ \text{ ----- } \pi \\ 210^\circ \text{ ----- } x \\ 180^\circ \cdot x = 210^\circ \cdot \pi \\ x = \frac{210^\circ \pi}{180^\circ} \end{array}$$

Fatorando o numerador e denominador da fração por 10, obtemos a fração $\frac{21\pi}{18}$. Em seguida, fatorando consecutivamente por 3, temos que $x = \frac{7\pi}{6}$. Logo, $210^\circ = \frac{7\pi}{6} \text{ rad.}$

$$\begin{array}{l} 180^\circ \text{ ----- } \pi \\ 300^\circ \text{ ----- } x \\ 180^\circ \cdot x = 300^\circ \cdot \pi \\ x = \frac{300^\circ \pi}{180^\circ} \end{array}$$

Fatorando o numerador e denominador da fração por 10, obtemos a fração $\frac{30\pi}{18}$. Em seguida, fatorando consecutivamente por 6, temos que $x = \frac{5\pi}{3}$. Logo, $300^\circ = \frac{5\pi}{3} \text{ rad.}$

Quadro 3 – Registro dos radianos de cada arco

Arcos	150°	210°	300°
Radiano	$\frac{5\pi}{6} \text{ rad.}$	$\frac{7\pi}{6} \text{ rad.}$	$\frac{5\pi}{3} \text{ rad.}$

Fonte: Elaborado pelos autores.

Questão 3 – O arco da Circunferência pode ser medido pelo seu ângulo central em (graus) ou pelo seu comprimento em (radianos), utilizado especialmente para casos de operações representadas no Círculo Trigonométrico. Quando dividimos o Círculo Trigonométrico em quatro partes iguais, temos os quatro quadrantes que o constituem.

Assinale (V) verdadeiro e (F) falso as alternativas a seguir.

a) () O arco 120° pertence ao terceiro quadrante.

- b) () 360° está no quarto quadrante e é representado na forma de radiano por $\frac{2\pi}{3}$ rad.
- c) () $\frac{3\pi}{4}$ rad. está localizado no primeiro quadrante.
- d) () 315° em radiano é representado por $\frac{7\pi}{4}$ rad.

Resolução:

- a) Falso, pois o arco 120° pertence ao segundo quadrante.
- b) Falso, pois 360° é representado em radiano na forma de 2π rad.
- c) Falso, $\frac{3\pi}{4}$ rad. está localizado no segundo quadrante.
- d) Verdadeiro.

Fechamento

Para o fechamento da sequência de atividades propostas, sugerimos que após todos os alunos concluírem as atividades, o professor discuta com a turma os valores encontrados no decorrer das ações e, assim, cada aluno expor o resultado do seu Ciclo Trigonométrico juntamente com o professor.

Variações

A construção do Ciclo Trigonométrico pode ser trabalhada com os alunos de forma remota ou presencial.

Remoto:

O professor deverá comunicar aos alunos que na aula seguinte cada um irá construir seu próprio Ciclo Trigonométrico a partir dos materiais listados pelo docente.

Presencial:

O docente poderá dividir a turma em duplas.

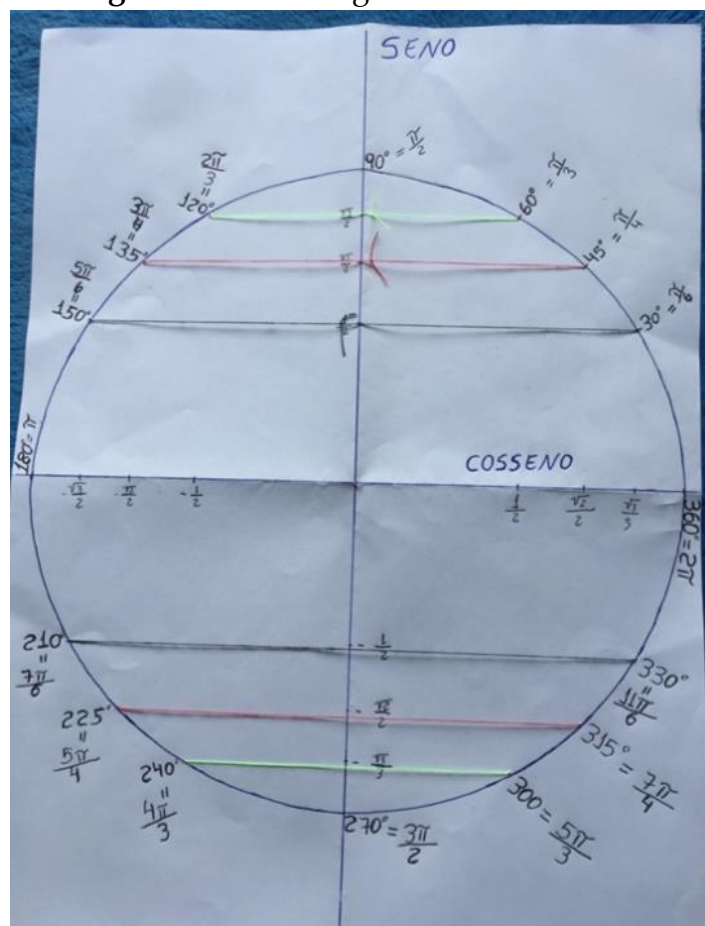
Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília, DF: MEC, 2018.

FOLHA DO ALUNO

Círculo Trigonométrico manual

Figura 1 – Ciclo Trigonométrico manual



Fonte: Elaborado pelos autores.

Comentários iniciais

O Ciclo Trigonométrico é o Círculo que possui raio um (1) e centro zero (0). Esse centro é colocado no ponto $0 = (0,0)$ de um plano cartesiano. Cada ponto dessa Circunferência está associado a um número real, geralmente exposto em função de π , que, por sua vez, relaciona-se a um ângulo desse Ciclo.

Prezado aluno, antes de iniciar o experimento, pegue uma folha de caderno ou papel A4 e desenhe um Círculo. Corte ele em dois eixos: eixos das abscissas (reta x) e eixo das ordenadas (reta y). Podemos observar que ao traçar uma reta na vertical e horizontal, dividimos o nosso círculo em quatro (4) partes iguais chamadas de 1º quadrante, 2º quadrante, 3º quadrante e 4º quadrante. O Círculo é composto por uma Circunferência de 360° podendo ser representado na forma de 2π rad.

Após essa breve explicação e com o slide orientador visto em sala de aula, vamos construir o nosso Ciclo Trigonométrico. Tendo como base os

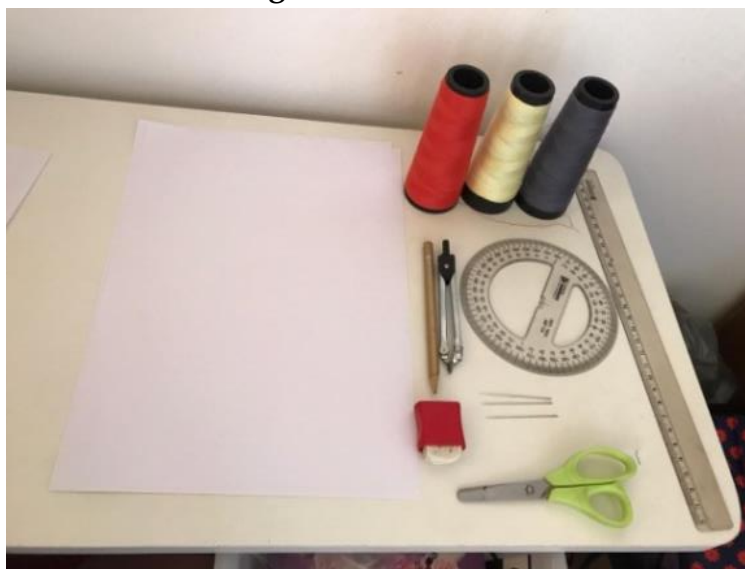
conhecimentos vistos em sala de aula sobre ângulos, plano cartesiano, radianos, graus e quadrantes.

Procedimento

Material Necessário:

Uma folha de papel A4, lápis com borracha, régua, transferidor, compasso, tesoura, três (3) agulhas, e três (3) cores de linhas diferentes (Figura 2).

Figura 2 – Materiais



Fonte: Elaborado pelos autores.

Atividade 1 – Construindo o Ciclo Trigonométrico.

Com base no que foi visto em sala de aula e com as ferramentas solicitadas, construa um Ciclo Trigonométrico seguindo as orientações do professor. O discente seguirá nove passos:

1º Passo: Dobrar a folha ao meio duas vezes. De forma que ao abrir a folhar esteja a marcação de uma linha vertical e horizontal.

2º Passo: Marcar os eixos do seno e do cosseno, utilizando uma régua.

3º Passo: levando em consideração que os eixos variam entre zero (0) e um (1), vamos usar como medida: um (1) equivale a 10 cm; cinco (5) cm equivale a $\frac{1}{2}$; sete (7) cm equivale a $\frac{\sqrt{2}}{2}$; oito vírgula cinco (8,5) cm equivale a $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Marque as medidas cinco, sete e oito vírgula cinco (5; 7; 8,5) e 10 cm e faça as devidas substituições. Em todas as direções.

4º Passo: Marcar os valores correspondentes do seno e cosseno dos arcos de 30°, 40° e 60°. Sendo da direita para cima valores positivos e da esquerda para baixo valores negativos.

5º Passo: Traçar com o compasso uma Circunferência de raio 10 cm partindo da origem.

6º Passo: Dobrar a folha de forma que o primeiro quadrante fique voltado para cima.

7º Passo: Marcar os ângulos de 30° , 45° e 60° com a ajuda de um transferidor. Vamos estender esses pontos até o arco também usando o transferidor. Feito este procedimento coloque os ângulos de 30° , 45° e 60° representados em radianos.

8º passo: Furar com a agulha no ponto correspondente a cada arco com cores diferentes. De modo que as pontas das linhas fiquem dos dois lados da folha. Abra a folha com cuidado e assim teremos marcados todos os arcos.

9º Passo: Amarrar as pontas das linhas as suas cores correspondentes e cortar o excesso delas. Escreva o nome cosseno (linha horizontal) e seno (linha vertical) e continue a marcação dos arcos.

Atividade 2 – A medida de um arco no Círculo Trigonométrico pode ser dada em grau ($^\circ$) ou radiano (rad). Um (1) radiano corresponde à medida de um arco da Circunferência, cujo comprimento é igual ao raio da Circunferência do arco que será medido. Com o auxílio do Ciclo Trigonométrico identifique em radiano os arcos 150° , 210° e 300° .

Quadro 1 – Espaço para registro dos radianos de cada arco

Arcos	150°	210°	300°
Radiano			

Fonte: Elaborado pelos autores.

Atividade 3 – O arco da Circunferência pode ser medido pelo seu ângulo central em (graus) ou pelo seu comprimento em (radianos), utilizado especialmente para casos de operações representados no Círculo Trigonométrico. Quando dividimos o Círculo Trigonométrico em quatro partes iguais, temos os quatro quadrantes que o constituem. Assinale (V) verdadeiro e (F) falso as alternativas a seguir.

O arco da Circunferência pode ser medido pelo seu ângulo central em (graus) ou pelo seu comprimento em (radianos), utilizado especialmente para casos de operações representados no círculo trigonométrico. Quando dividimos o Círculo Trigonométrico em quatro partes iguais, temos os quatro quadrantes que o constituem. Assinale (V) verdadeiro e (F) falso as alternativas a seguir.

e) () O arco 120° pertence ao terceiro quadrante.

f) () 360° está no quarto quadrante e é representado na forma de radiano por $\frac{2\pi}{3}$ rad.

g) $\left(\frac{3\pi}{4} \text{ rad.} \right)$ está localizado no primeiro quadrante.

h) $\left(315^\circ \text{ em radiano} \right)$ é representado por $\frac{7\pi}{4} \text{ rad.}$

CAPÍTULO 2

Dominando o ciclo
trigonométrico



CAPÍTULO 2

Dominando o Ciclo Trigonométrico

Anna Leticia de Araújo Silva

Anderson Vieira do Nascimento

INTRODUÇÃO

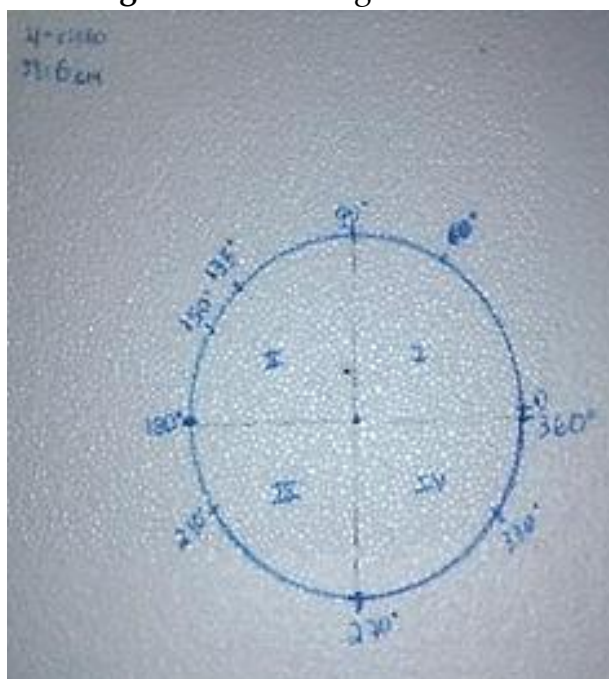
No ensino matemático nos deparamos com um “abismo” criado entre a Matemática e os alunos, pela complexidade dos temas abordados muitos tem “medo” na disciplina, isso costuma vim da grande abstração da matéria. A matemática estuda seres de racionalidade, o que traz a sensação de distanciamento entre a realidade concreta e a realidade Matemática, mas apesar disso, tudo está bem mais interligado do que muitos imaginam. Devido a abstração dos objetos de estudos matemáticos, faz-se necessário materiais didáticos palpáveis, para assim o aluno enxergar na sua realidade certos conceitos.

Nesta atividade, pretendemos construir o conhecimento que interliga o Ciclo Trigonométrico ao triângulo retângulo, utilizando o ciclo artesanal feito pelo professor e triângulos retângulos (segue anexo com moldes para triângulos retângulos com duas variações de raio/hipotenusa).

GUIA DO PROFESSOR

Material didático manipulável

Figura 1 – Ciclo trigonométrico



Fonte: Elaborado pelos autores.

Elementos que norteiam a prática**Quadro 1 – Resumo da prática**

Série/Ano		2º ano do Ensino Médio.
Unidade temática		Geometria.
Objeto de conhecimento		Seno, Cosseno e Tangente no triângulo retângulo e no Ciclo Trigonométrico, ângulos notáveis e seus respectivos valores para as relações trigonométricas, redução ao primeiro quadrante, simetria de arcos e transformação de graus e radianos.
Habilidade		(EM13MAT308) Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança (BRASIL, 2018, p. 529).
Objetivos	Docente	Promover o aprofundamento dos conhecimentos da ligação entre Ciclo Trigonométrico e triângulo retângulo.
	Aluno	Desenvolver a aprendizagem e fixação dos conceitos que envolvem o Ciclo Trigonométrico.
Materiais necessários		O Ciclo Trigonométrico (feitos pelo professor), os triângulos retângulos (feito pelo professor, segue em anexo com moldes ao final do guia) e a folha do aluno.
Conhecimentos prévios		Relações trigonométricas no triângulo retângulo e no Ciclo Trigonométrico. Ângulos notáveis e seus respectivos valores para as relações trigonométricas. Redução ao primeiro quadrante e simetria no Ciclo. Transformação de graus e radianos.
Duração		50min/a.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Aspectos gerais do experimento*Sinopse*

Inicialmente o professor fará uma revisão com os conteúdos que serão abordados. Com a turma separada em duplas, distribuirá um triângulo (segue um anexo com moldes ao final do guia) para cada dupla, seguindo as orientações da folha do aluno. Os alunos irão resolver as atividades que envolvem relações trigonométricas, tanto no ciclo trigonométrico como no triângulo retângulo, transformação de graus e radianos, simetria no Ciclo e redução ao primeiro quadrante.

Motivação

A ideia desta prática é fornecer através de materiais didáticos a possibilidade de compreensão de conceitos de difícil assimilação, em que o

acesso anteriormente se daria apenas por meio de informações teóricas e expositivas no contexto educacional.

O experimento

Na introdução o professor deve revisar os conteúdos que o experimento aborda, afim de não restar dúvidas para que o caminhar da prática seja fluido. Utilizando o Ciclo Trigonométrico e os triângulos retângulos os alunos vão observar conceitos geralmente vistos de forma abstrata para no fim o conhecimento está assimilado, e assim o aluno pode adquirir mais facilidade para os demais aprendizados trigonométricos que virão nas fases seguintes de formação.

Preparação

Para a aplicação da prática é necessário ter impresso a folha do aluno, os triângulos retângulos e o Ciclo Trigonométrico. A quantidade a ser confeccionada deve ser proporcional a quantidade de alunos.

A seguir o passo a passo para a confecção do Ciclo Trigonométrico:

Os materiais usados serão: uma folha de isopor, uma régua de 30 cm, um transferidor, um compasso e uma caneta permanente. Dividiremos a folha de isopor, que geralmente é vendida em formato retangular em duas partes, usando uma régua mediremos os diâmetros do nosso Ciclo, que será um de 20 cm (para raio 10 cm) e outro de 24 cm (para raio 12 cm).

Em seguida, será marcado onde será o centro da Circunferência (o ponto onde marca 12 cm ou 10 cm, dependendo do diâmetro, esse ponto será o ponto médio do segmento traçado). Usando o compasso faremos a Circunferência de raio 12 cm ou 10 cm. Com o transferidor marcaremos os arcos, na Circunferência, referentes aos ângulos notáveis, para facilitar a leitura do material pelo aluno. Lembre-se de marcar com a caneta permanente a Circunferência e os pontos dos arcos referentes aos ângulos notáveis. Para uma turma com 20 alunos, fizemos quatro Ciclos Trigonométricos.

Para a confecção dos triângulos, os materiais usados serão: tesoura, molde de triângulos (segue em anexo ao final do guia), caneta permanente para fazer as marcações do triângulo e folha de E.V.A. O primeiro passo para a confecção dos triângulos é imprimir os moldes, recortá-los e usá-los para marcar o E.V.A, assim faz-se os cortes dos triângulos na folha de E.V.A (o professor deve variar, conforme os modelos fornecidos, seis moldes, podendo o professor expandir tais moldes triângulo com o mesmo ângulo e tamanho para completar os 10, ou a quantidade necessária para sua turma). Com os triângulos já cortados, marcaremos, usando a caneta permanente, qual o ângulo central destes,

conforme os moldes molde. Para uma turma com 20 alunos fizemos 10 triângulos, já que serão dez duplas.

Etapas para o desenvolvimento do experimento

Antes de iniciar a prática o professor deve lembrar de revisar os conteúdos prévios, como as relações trigonométricas no Ciclo Trigonométrico e no triângulo retângulo. (Os conteúdos prévios estão em “aspectos gerais” no guia).

Etapas 1

Na primeira atividade o aluno irá “encaixar” o triângulo retângulo que lhe foi dado, no quadrante designado pela folha do aluno, lembre-se de especificar que o ângulo marcado é correspondente ao ângulo central da Circunferência. Usaremos para explicação o primeiro triângulo do molde (com hipotenusa de 12 cm e ângulo referente ao centro no ciclo de 30°), suponhamos que ele está situado no I quadrante.

Quando o triângulo for encaixado no Ciclo e seguindo para “atividade 1”, item A, o aluno verá que ele marca no primeiro quadrante o arco de 30 graus, essa descoberta se dá pelo ponto de encontro na hipotenusa, que no caso também é o raio da Circunferência, com o cateto paralelo ao eixo dos senos, o cateto oposto ao ângulo central. Já no item B ele observará a relação dos lados do triângulo com o Ciclo Trigonométrico, a altura é paralela ao eixo dos senos, a base está contida no eixo dos cossenos e a hipotenusa é igual ao raio.

Etapas 2

Na “atividade 2”, ainda usando o mesmo triângulo de exemplo da etapa anterior, no item “a” eles transformarão os seus ângulos pertencentes ao triângulo para radiano, no caso 30° , em que fazendo a regra de três acharemos $\frac{\pi}{6}$ rad., sendo que um triângulo retângulo ao ângulo reto é $\frac{\pi}{2}$ rad., e o terceiro ângulo é 60° , equivalente $\frac{\pi}{3}$ rad. No item b, eles irão descobrir através da simetria no Ciclo Trigonométrico, em que o ponto de marcação do arco de seu triângulo tocaria na Circunferência, caso estivesse em outro quadrante, ainda supondo que ele está no primeiro quadrante, I Q ele marca 30° (x°), no II Q (sabendo que a simetria tem $180^\circ - x^\circ$ é 150° , no III Q ($180^\circ + x^\circ$) é 210° e no IV Q ($360^\circ - x^\circ$) temos 330° .

Etapas 3

Na terceira etapa para olharmos de forma mais algébrica o aluno irá, no item “a”, usar o valor de raio dado no seu Ciclo, no caso do triângulo que usamos nas outras etapas $r = 12$ cm e já observamos que o raio é igual a hipotenusa. Usando isso acharemos os outros valores a partir das fórmulas das razões: $\text{sen} = \frac{c.o}{hip} = \frac{c.o}{12} = \frac{1}{2}$, em que acharemos cateto oposto igual seis (6) cm, $\text{cos} = \frac{c.a}{hip} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{c.a}{12}$, resultando em cateto adjacente = $6\sqrt{3}$ cm, identificando os catetos e já

de pose da hipotenusa (raio). Já no item “b” eles irão utilizar os valores visualizados no item “a” para completar as tabelas de razões trigonométricas de acordo com seu ângulo, em que segue:

Quadro 2 – Valores para o ângulo de 30°

ÂNGULO	SENO	COSSENO	TANGENTE
30°	$\frac{c.o}{h} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$	$\frac{c.a}{h} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{c.o}{c.a} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Fonte: Elaborado pelos autores.

No final deste guia segue o anexo II com a parte matemática dos demais triângulos que estão inseridos no molde.

Fechamento

Neste experimento trazemos a interação dos alunos com algo que em sua maioria é visto apenas de forma plana e convencional, buscamos a construção do conhecimento através de material artesanal e depois revertido em algo mais algébrico.

Variações

Pode ser feito em menor escala, confeccionado pelos alunos em papel A4, para lhes ensinar a construção do Ciclo Trigonométrico, essa variação terá as mesmas etapas do experimento original, mas com o material confeccionado pelos alunos.

O material utilizado será uma folha de ofício, canetas, régua, compasso e transferidor. O aluno irá fazer no papel A4 o Ciclo, com a régua para marcar o diâmetro e o compasso para a Circunferência, depois disso o professor pode sortear com os alunos qual ângulo cada um irá usar para atividade.

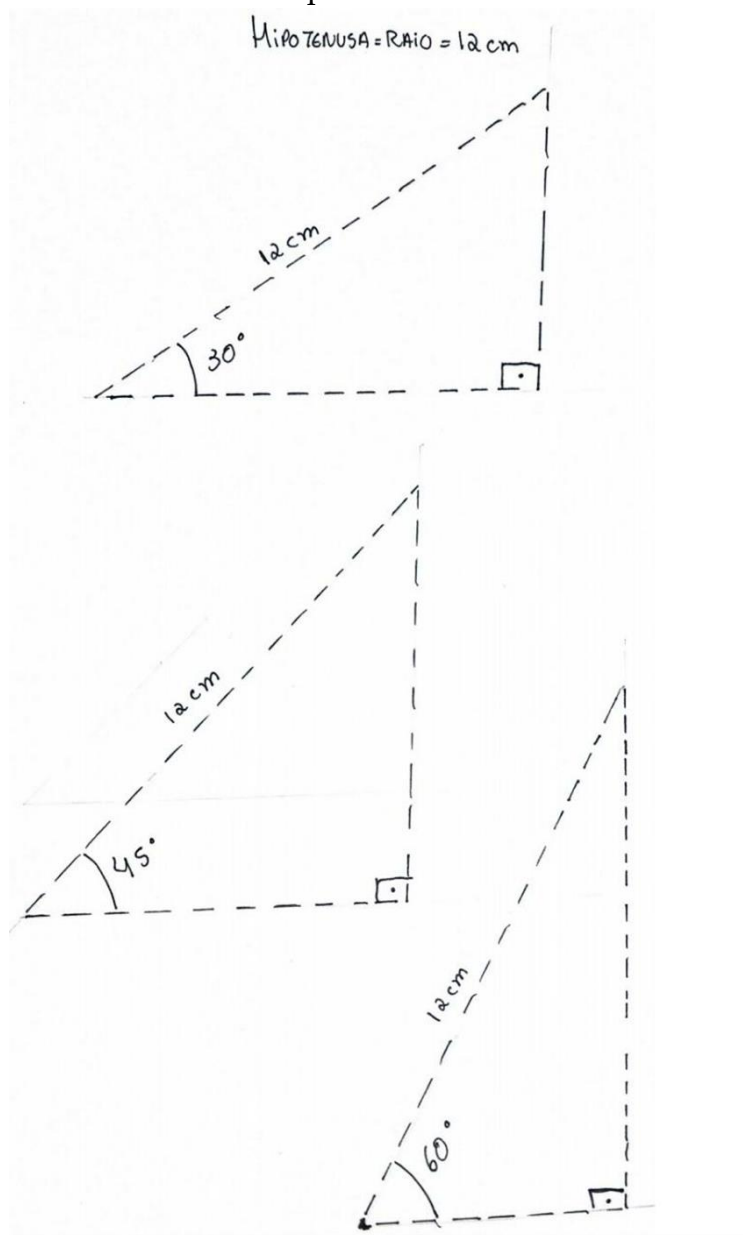
Depois do sorteio o aluno deverá com o transferidor e a régua desenhar dentro do Ciclo Trigonométrico o seu triângulo, essa aplicação pode ser feita usando a mesma folha do aluno que disponibilizamos, mas sendo cancelado o item ‘a’ da “Atividade 1”, já que o professor dará o valor do ângulo, o item perderá o sentido, que é da explicação da descoberta do ângulo.

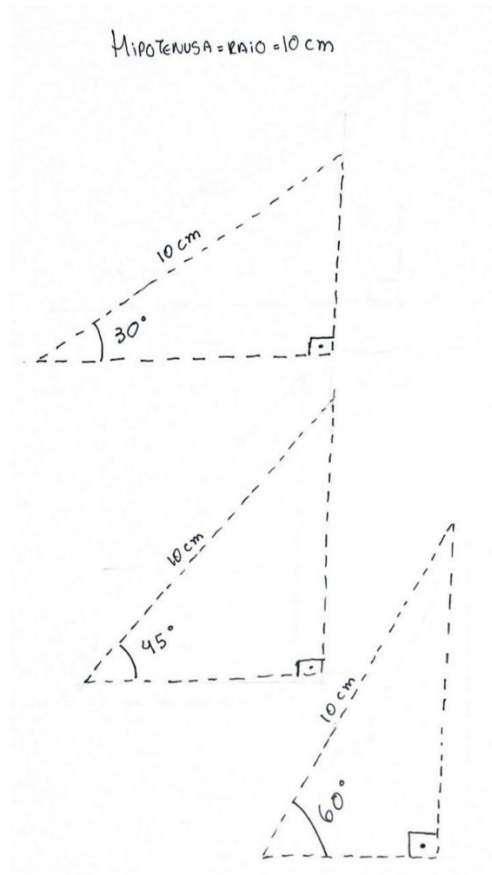
Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Ensino Médio. Brasília, DF: MEC, 2018.

Anexos

Anexo 1 – Moldes dos triângulos para os ciclos de raio 12 cm e 10 cm, respectivamente





Anexo II – Parte matemáticas dos demais triângulos envolvidos

1° A right-angled triangle with a 45° angle and a hypotenuse of 12 cm.

ATIVIDADE 2

① $180^\circ - \pi \text{ rad} \Rightarrow 180^\circ = 45^\circ \pi \Rightarrow \pi = \frac{45^\circ \pi}{180} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^\circ \text{ graus}$

② I Q $\rightarrow 45^\circ$; II Q $\rightarrow 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$; III Q $\rightarrow 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$; IV Q $\rightarrow 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$

ATIVIDADE 3

① RAIO = 12 cm = HIPOTENUSA

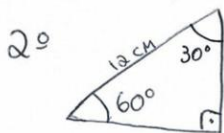
$\text{SEN } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{C \cdot O}{h} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{C \cdot O}{12} \Rightarrow 2 C \cdot O = 12 \sqrt{2} \Rightarrow C \cdot O = \frac{12 \sqrt{2}}{2} \Rightarrow C \cdot O = 6 \sqrt{2}$

$\text{COS } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{C \cdot A}{h} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{C \cdot A}{12} \Rightarrow 2 C \cdot A = 12 \sqrt{2} \Rightarrow C \cdot A = 6 \sqrt{2}$

*USANDO A TAN. PARA ACHAR O C.A

$\text{TAN } 45^\circ = 1 = \frac{C \cdot O}{C \cdot A} \Rightarrow 1 = \frac{6 \sqrt{2}}{C \cdot A} \Rightarrow C \cdot A = 6 \sqrt{2}$

② $45^\circ \mid \frac{6 \sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2} \mid \frac{6 \sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2} \mid \frac{6 \sqrt{2}}{6 \sqrt{2}} = 1$



ATIVIDADE 2

A. $60^\circ - x \text{ rad} \Rightarrow 60^\circ \pi = 180^\circ x \Rightarrow \frac{60\pi}{180} = x \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$
 $30^\circ - x \text{ rad} \Rightarrow 30^\circ \pi = 180^\circ x \Rightarrow \frac{30\pi}{180} = x \Rightarrow 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$

B. I Q $\rightarrow 60^\circ$; II Q $\rightarrow 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$; III Q $\rightarrow 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$; IV Q $\rightarrow 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

ATIVIDADE 3

A. $\text{Sen } 60 = \frac{c.o}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{c.o}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2 \cdot c.o = 12\sqrt{3} \Rightarrow c.o = \frac{12\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c.o = 6\sqrt{3} \text{ cm}$

ACHANDO c.a POR COS OU TAN:

$\text{Cos } 60 = \frac{c.a}{h} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c.a}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cdot c.a = 12 \Rightarrow c.a = 6 \text{ cm}$

$\text{Tan } 60 = \frac{c.o}{c.a} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{6\sqrt{3}}{c.a} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = c.a \Rightarrow c.a = 6 \text{ cm}$

B. $60^\circ \mid \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \mid \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \mid \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$



ATIVIDADE 2

A. $180^\circ - \pi \text{ rad} \Rightarrow 30^\circ \pi = 180^\circ x \Rightarrow \frac{30\pi}{180} = x \Rightarrow 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$
 $60^\circ - x \text{ rad} \Rightarrow 60^\circ \pi = 180^\circ x \Rightarrow \frac{60\pi}{180} = x \Rightarrow 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

B. I Q $\rightarrow 30^\circ$; II Q $\rightarrow 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$; III Q $\rightarrow 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$; IV Q $\rightarrow 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$

ATIVIDADE 3

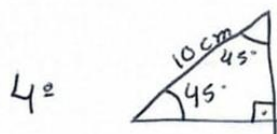
A. $\text{Sen } 30 = \frac{c.o}{h} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c.o}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cdot c.o = 10 \Rightarrow c.o = 5$

*ACHANDO c.a POR COS OU TAN

$\text{Cos } 30 = \frac{c.a}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{c.a}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2 \cdot c.a = 10\sqrt{3} \Rightarrow c.a = 5\sqrt{3}$

$\text{Tan } 30 = \frac{c.o}{c.a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{5}{c.a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3} \cdot c.a = 5 \Rightarrow c.a = \frac{5}{\sqrt{3}}$
 $\Rightarrow c.a = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$
 $\Rightarrow c.a = \frac{5\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$

B. $30^\circ \mid \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \mid \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \mid \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{5 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{15} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



ATIVIDADE 2

(A) $180^\circ - \pi \text{ rad} \Rightarrow 180x = 45\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$
 $45^\circ - x \text{ rad}$

(B) I Q $\rightarrow 45^\circ$; II Q $\rightarrow 180 - 45 = 135^\circ$; III Q $\rightarrow 180 + 45 = 225^\circ$; IV Q $\rightarrow 360 - 45 = 315^\circ$

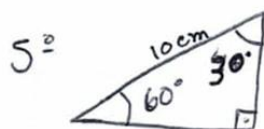
ATIVIDADE 3

(A) $\text{sen } 45^\circ = \frac{c.o}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{c.o}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2c.o = 10\sqrt{2} \Rightarrow c.o = 5\sqrt{2}$

$\cdot \text{cos } 45^\circ = \frac{c.a}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{c.a}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow c.a = 5\sqrt{2}$

$\cdot \text{TAN } 45^\circ = \frac{c.o}{c.a} = 1 \Rightarrow \frac{5\sqrt{2}}{c.a} = 1 \Rightarrow c.a = 5\sqrt{2}$

(B) $45^\circ \mid \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} \mid \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} \mid \frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = 1$



ATIVIDADE 2

(A) $180 - \pi \text{ rad} \Rightarrow 180x = 60\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$
 $60^\circ - x \text{ rad}$

(B) I Q $\rightarrow 60^\circ$; II Q $\rightarrow 180 - 60 = 120^\circ$; III Q $\rightarrow 180 + 60 = 240^\circ$; IV Q $\rightarrow 360 - 60 = 300^\circ$

ATIVIDADE 3

(A) $\text{sen } 60^\circ = \frac{c.o}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{c.o}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c.o = \frac{10\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c.o = 5\sqrt{3}$

$\cdot \text{cos } 60^\circ = \frac{c.a}{h} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c.a}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow c.a = \frac{10}{2} \Rightarrow c.a = 5$

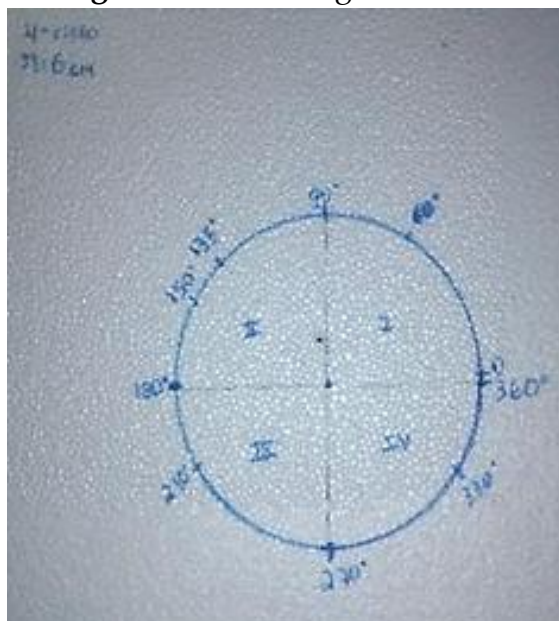
$\cdot \text{TAN } 60^\circ = \frac{c.o}{c.a} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{5\sqrt{3}}{c.a} = \sqrt{3} \Rightarrow c.a = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow c.a = 5$

(B) $60^\circ \mid \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \mid \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \mid \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}$

FOLHA DO ALUNO

Dominando o Ciclo Trigonométrico

Figura 1 – Ciclo Trigonométrico



Fonte: Elaborado pelos autores.

Comentários iniciais

Será distribuído um triângulo retângulo para cada dupla, que deverá ser encaixado no quadrante indicado no quadro (segue abaixo) de acordo com o número correspondente ao seu triângulo, para assim visualizarmos a relação entre triângulo retângulo, seus lados, seus ângulos e elementos do Ciclo Trigonométrico, tomando como peça de estudo os ângulos notáveis (30° , 45° , 60°) já marcados na Circunferência. O ângulo pintado é o mesmo correspondente ao ângulo central do Ciclo Trigonométrico.

Segue o quadro com a identificação do triângulo retângulo e à qual quadrante ele deve ser localizado:

Quadro 1 – Identificação do triângulo retângulo no respectivo quadrante

Triângulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrante	1°	1°	2°	4°	3°	4°	2°	2°	3°	1°

Fonte: Elaborado pelos autores.

Procedimento

Etapas

- Quanto mede o ângulo pintado do triângulo, ângulo esse formado no centro da Circunferência? Explique como você descobriu essa medida.

b) Observando o quadro dos comentários iniciais, compartilhe com as duplas ao lado qual a relação que vocês identificaram dos elementos do Ciclo com a:

Altura do seu triângulo	Base do seu triângulo	A hipotenusa/ 3º lado
--------------------------------	------------------------------	------------------------------

Etapa 2

a) Transforme para radiano os ângulos pertencentes ao seu triângulo.

b) Suponha que seu triângulo está em outro quadrante, usando a simetria de arcos e redução ao primeiro quadrante, qual grau do arco que ele marcaria estando no 1º, 2º, 3º e 4º quadrantes?

Etapa 3

a) Usando seus conhecimentos de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis, determine a medida dos lados do seu triângulo, utilizando a medida dada do raio.

b) Complete o quadro abaixo de acordo com o seu ângulo, usando os valores encontrados no item anterior:

Quadro 2 – Espaço para completar com os resultados identificados anteriormente

ÂNGULO	SENO	COSSENO	TANGENTE

Fonte: Elaborado pelos autores.

ANGLE

CAPÍTULO 3

Play

Tutorial

The “Angle”

Exit

ANGLE

Play

Tutorial

Exit

CAPÍTULO 3

The “Angle”

Pedro Henrique Sales Ribeiro

INTRODUÇÃO

A Redução ao Primeiro Quadrante é um conteúdo do Ensino Médio que é utilizado para que se possa efetuar operações com ângulos que inicialmente não se encontravam no intervalo $[0, 90^\circ]$, isto é, no primeiro quadrante do Círculo Trigonométrico.

Assim, este conteúdo é extremamente útil na resolução de problemas que envolvam ângulos fora do intervalo citado, já que por muitas vezes, a redução leva-nos a um ângulo notável conhecido e, portanto, se torna possível resolver uma questão que era anteriormente “impossível”.

GUIA DO PROFESSOR

Material didático manipulável

Figura 1 – Jogo The “Angle” de perguntas e respostas



Fonte: Elaborado pelo autor.

Elementos que norteiam a prática

Quadro 1 – Resumo da prática

Série/Ano	2º ano do Ensino Médio.
Unidade temática	Geometria.
Objeto de conhecimento	Redução ao primeiro quadrante.
Habilidade	(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria (BRASIL, 2018, p. 528).

Objetivos	Docente	Proporcionar um melhor entendimento do conteúdo de Redução ao Primeiro Quadrante.
	Aluno	Compreender o processo de Redução ao Primeiro Quadrante.
Materiais necessários		Celular Smartphone (Com o aplicativo PowerPoint ou similar instalado).
Conhecimentos prévios		Noção de Plano Cartesiano, Círculo Trigonométrico e de Sinais da Função Seno e da Função Cosseno.
Duração		50min/a.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Aspectos gerais do experimento

Sinopse

Esta experimentação será desenvolvida a partir da utilização do “*Angle*”, um jogo matemático de perguntas e respostas acerca do conteúdo de Redução ao Primeiro Quadrante, um tópico pouco abordado de maneira mais incisiva nas aulas regulares do ensino básico.

Motivação

Em termos gerais, o conteúdo matemático exposto nesse experimento é comumente esquecido pelos professores por ser erroneamente rotulado como pouco útil em problemáticas, não recebendo assim, a devida atenção. Dito isto, este experimento tem o propósito de mostrar que é possível introduzir a Redução ao Primeiro Quadrante nas aulas de uma maneira lúdica, e não só como uma mera obrigação curricular.

O experimento

O jogo “*Angle*” é composto por um total de sete fases, onde em cada uma delas é apresentada uma questão envolvendo o conteúdo de Redução ao Primeiro Quadrante, estas questões estão postas junto as suas resoluções no quadro 2.

Existe também um sistema de pontuação incluso no jogo, onde cada questão respondida corretamente acrescenta 100 *scores* para o jogador, sendo possível alcançar um máximo de 700 *scores* caso seja assinalada corretamente todas as questões propostas.

Quadro 2 – Questões do jogo “*Angle*”

Fase	Questão <i>ipsis litteris</i>	Questão interpretada	Resolução
	Depois de muito procurar, consegui achar o <i>angle</i> , ele está nos meus	O seno de 135° é equivalente à qual seno do	Como o ângulo de 135° pertence ao 2º quadrante, logo a sua redução será o que falta para

1	135°, você pode me ajudar a trazer ele de volta ao primeiro quadrante com a ajuda do seno? Se sim, qual seno do primeiro quadrante é igual ao seno de 135°?	primeiro quadrante?	180°, ou seja 45°, e como a função seno é positiva no 2° quadrante, logo a resposta será: Sen 45°.
2	O <i>angle</i> se perdeu novamente em um dos meus quadrantes, e precisa voltar ao primeiro com a ajuda do cosseno, a última vez que eu o vi ele estava em 240°, com que cosseno você pode trazer ele de volta?	O cosseno de 240° é equivalente à qual cosseno do primeiro quadrante?	Como o ângulo de 240° pertence ao 3° quadrante, logo a sua redução será o que passou de 180°, ou seja 60°, e como a função cosseno é negativa no 3° quadrante, logo a resposta será: - Cos 60°.
3	O <i>Angle</i> está precisando de uma pequena carona do seno para voltar ao primeiro quadrante, atualmente ele está parado em 330°, qual seno deve ser usado para que essa carona saia perfeitamente e seja cinco (5) estrelas?	O seno de 330° é equivalente à qual seno do primeiro quadrante?	Como o ângulo de 330° pertence ao 4° quadrante, logo a sua redução será o que falta para 360°, ou seja 30°, e como a função seno é negativa no 4° quadrante, logo a resposta será: - Sen 30°.
4	Após eu dar umas voltas por aí, encontrei o <i>Angle</i> tentando voltar para o primeiro quadrante, mas eu estava em 1.040°, então alguém tem que trazer ele pra primeira volta antes, depois disso eu posso chamar o cosseno pra ajudar, mas preciso saber, qual cosseno vai ser necessário?	O cosseno de 1040° é equivalente à qual cosseno do primeiro quadrante?	Como o ângulo de 1.020° excede a primeira volta, devemos primeiro saber seu resto na divisão por 360°, que será 300°, agora, como o ângulo de 300° pertence ao 4° quadrante, logo a sua redução será o que falta para 360°, ou seja, 60°, e como a função cosseno é positiva no 4° quadrante, logo a resposta será: Cos 60°.
5	Depois de mais algumas voltas, encontrei o <i>Angle</i> em 1.665° graus, mas preciso da ajuda do seno ou do cosseno para levá-lo de volta ao primeiro quadrante, qual eu devo usar e de qual ângulo?	O seno e o cosseno de 1.665° são equivalentes a quais senos e cossenos do primeiro quadrante?	Como o ângulo de 1.665° excede a primeira volta, devemos primeiro saber seu resto na divisão por 360°, que será 225°, agora, como o ângulo de 225° pertence ao 3° quadrante, logo a sua redução será o que passou de 180°, ou seja, 45°, e como a

			função seno e a função cosseno são negativas no 3º quadrante, logo a resposta será: - Sen 45° e - Cos 45°, porém somente o item - Cos 45° se encontra nas alternativas, e ele deve ser marcado.
6	O <i>Angle</i> estava dando uma volta pelo quarto quadrante e queria voltar para o primeiro, no entanto, eu não sei quem eu devo chamar para que se tenha um resultado seja positivo. Sabendo que ele estava em 315°, quem deve levar o <i>Angle</i> , e com que valor?	O cosseno (por ser o único positivo no 4º quadrante) de 315° é equivalente à qual cosseno do primeiro quadrante?	Como o ângulo de 315° pertence ao 4º quadrante, logo a sua redução será o que falta para de 360°, ou seja 45°, e como a função cosseno é positiva no 4º quadrante, logo a resposta será: Cos 45°.
7	Eu acabei dando voltas de mais e o <i>Angle</i> foi parar em 2.640°, agora não sei o que fazer para ele voltar ao primeiro quadrante, eu posso chamar o cosseno, mas não sei o que devo dizer a ele. Você pode me ajudar, qual o cosseno deve ser usado para o <i>Angle</i> voltar ao primeiro quadrante?	O cosseno de 2.640° é equivalente à qual cosseno do primeiro quadrante?	Como o ângulo de 2.640° excede a primeira volta, devemos primeiro saber seu resto na divisão por 360°, que será 120°, agora, como o ângulo de 120° pertence ao 2º quadrante, logo a sua redução será o que falta para 180°, ou seja, 60°, e como a função cosseno é negativa no 2º quadrante, logo a resposta será: - Cos 60°.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Preparação

Os alunos devem se reunir em grupo de até quatro, para que possam compartilhar os conhecimentos, dúvidas e percepções que forem surgindo ao longo do experimento. Além disso, é necessário que pelo menos um membro de cada equipe tenha acesso a um smartphone para que possa utilizar o arquivo (Anexo 1) que contém o jogo.

Etapas para o desenvolvimento do experimento

Etapas 1

Expondo o Jogo – Essa etapa consiste basicamente na apresentação do jogo aos alunos e, no como ele pode ajudar na construção e na compreensão do conhecimento matemático que está em destaque nesse experimento.

Etapas 2

Jogando – Nesta etapa os alunos irão, em grupos, jogar o “*Angle*”. Neste jogo, os alunos devem seguir as orientações de “*Circle*”, o Círculo Trigonométrico, para levar o “*Angle*” de volta ao primeiro quadrante. Além de envolver o conceito direito de redução ao primeiro quadrante, aparecem também desafios que envolvem outros conceitos trigonométricos, como a redução a primeira volta, ou primeira determinação positiva.

Etapa 3

Declarando os vencedores – Após o término de todas as sete fases por todos os alunos, o professor deve pedir para que os alunos mostrem a pontuação de sua equipe, para que desta forma seja possível declarar o vencedor. Caso haja duas ou mais equipes com a mesma pontuação, o professor pode adotar o tempo de resolução (quem terminou primeiro) como critério desempate.

Fechamento

Ao longo de todo o experimento, o professor deve analisar como os alunos reagem a cada questão, e quais eventuais dúvidas podem surgir dentro de cada equipe e, ao final de todas as etapas, o docente deve sanar tais dúvidas e dificuldades, para que dessa forma, seja possível alcançar o objetivo inicial desta experimentação.

Variações

Caso não haja a possibilidade de utilizar a versão digital deste jogo, é possível ainda sim aplicá-lo através de uma versão física. Para isso serão necessários os seguintes materiais: 1) Cartões de Perguntas (Anexo 2); 2) Tabuleiro de Pontuação (Anexo 3); e 3) Marcadores de Pontuação (Anexo 4).

Nesta variante, o professor deverá entregar os sete Cartões de Perguntas (Que contém as mesmas questões do jogo digital) para cada equipe, que deverá responder as questões de forma sequencial de um a sete (De 1 a 7), e devolver ao professor sempre que terminar. Caberá ao professor marcar as pontuações de cada equipe no Tabuleiro de pontuação, usando os Marcadores de pontuação de acordo com os Cartões de Perguntas que são devolvidos.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília, DF: MEC, 2018.

Anexos

Anexo 1 - Jogo “Angle” (Versão digital em .ppsx)

Disponível em: <https://bit.ly/let2019anglev2>

Anexo 2 - Cartões de Perguntas

Disponível em: <https://bit.ly/let2019cartoes>

Anexo 3 - Tabuleiro de Pontuação

Disponível em: <https://bit.ly/let2019tabuleiro>

Anexo 4 - Marcadores de Pontuação

Disponível em: <https://bit.ly/let2019marcadores>

FOLHA DO ALUNO

The “Angle”

Figura 1 – Jogo The “Angle” de perguntas e respostas



Fonte: Elaborado pelo autor.

Comentários iniciais

A Redução ao Primeiro Quadrante é um conteúdo que por muitas vezes é “esquecido” pelos professores de Matemática, possivelmente pelo fato de que, para muitos, este conteúdo é de maneira errônea rotulado como de pouca utilidade prática para os problemas de Matemática. No entanto, essa experimentação tem o propósito de mostrar que a Redução ao Primeiro Quadrante pode ser divertida, a partir da aplicação de um jogo chamado “Angle” e que deve ser dada uma maior atenção a este conteúdo, tanto por parte dos docentes quanto pelos discentes.

Procedimento

Etapa 1 – Se reunindo

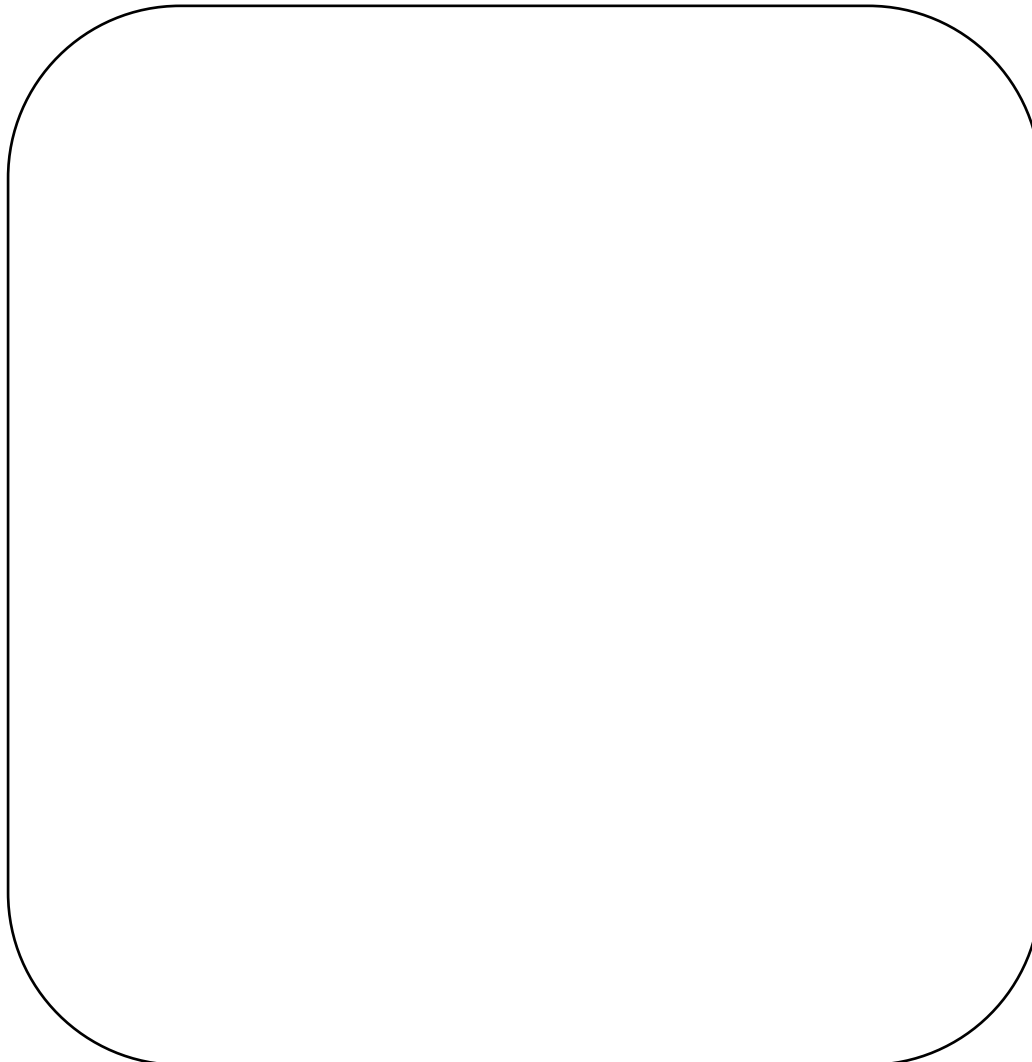
Vocês deverão se reunir em grupos de até quatro alunos, de forma que seja possível a aplicação do jogo e o compartilhamento dos conhecimentos matemáticos presentes na experimentação.

Etapa 2 – Jogando

Após terem se reunido em grupos, vocês devem começar a jogar. Neste jogo, devem seguir as orientações de “Circle”, o Círculo Trigonométrico, para levar o “Angle” de volta ao primeiro quadrante. Este jogo contém um sistema de pontuação simples, em que cada uma das suas sete fases você pode pontuar 100 scores caso acerte a questão proposta pelo “Circle”, portanto se todas as fases forem completas com sucesso, é possível alcançar um total de 700 scores.

Etapa 3 – Os vencedores

Após ter sido finalizada as sete fases do jogo, vocês devem expor para a turma o resultado final dos *scores* de sua equipe, para que, dessa forma o professor possa declarar os vencedores. Se necessário, use o espaço a seguir para possíveis cálculos.



CAPÍTULO 4

Charada Trigonométrica

CAPÍTULO 4

Charada trigonométrica

Livia Bezerra de Alencar
Kawoana da Costa Soares

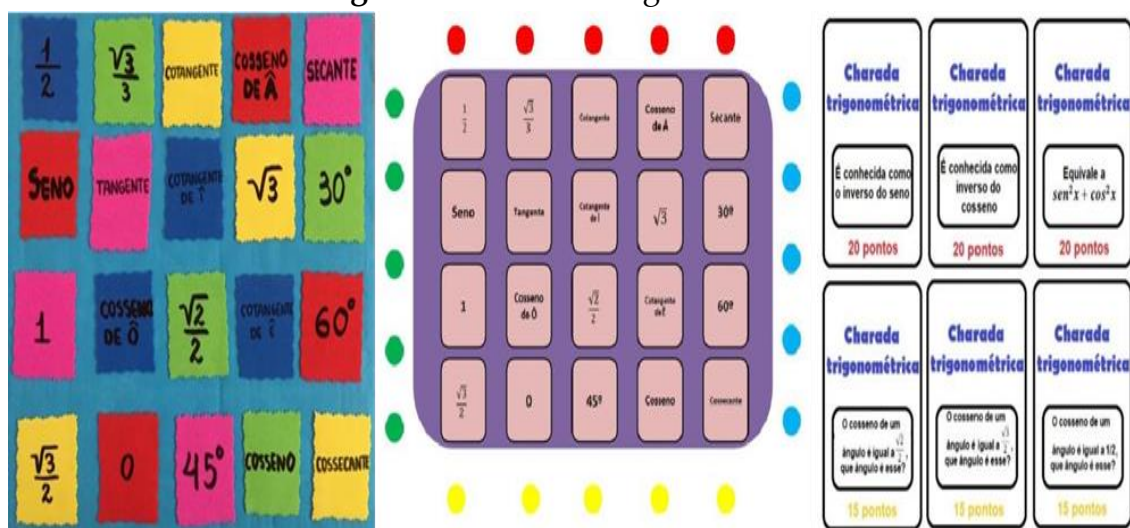
INTRODUÇÃO

As relações trigonométricas ou identidades trigonométricas expressam relações entre valores das funções trigonométricas de seno, cosseno e tangente em um arco do Círculo Trigonométrico. Essas relações também podem ser chamadas de identidades trigonométricas.

GUIA DO PROFESSOR

Material didático manipulável

Figura 1 – Charada Trigonométrica



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Elementos que norteiam a prática

Quadro 1 – Resumo da prática

Série/Ano	2º ano do Ensino Médio.
Unidade temática	Geometria.
Objeto de conhecimento	Relações trigonométricas.
Habilidade	(EM13MAT404) Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais (BRASIL, 2018, p. 531).

Objetivos	Docente	Explorar o raciocínio, a resolução de problemas e sanar todas as dúvidas sobre relações trigonométricas através da competitividade e agilidade dos alunos.
	Aluno	Compreender as relações trigonométricas.
Materiais necessários	Material físico: Dois tabuleiros com as respostas (disposto no Anexo I), 20 unidades de tampas de garrafa pet com cinco unidades de cada grupo com cores ou símbolos iguais, as perguntas já com suas respectivas pontuações (disposto no Anexo II). Material Online (remoto): É necessária a confecção do tabuleiro de respostas através do Google Apresentações, podendo seguir, ou não, o mesmo exemplo disposto no Anexo III.	
Conhecimentos prévios	Noção de relações trigonométricas, relações fundamentais da trigonometria e razões trigonométricas no triângulo retângulo.	
Duração	50min/a.	

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Aspectos gerais do experimento

Sinopse

Nesta experiência, desenvolvida a partir das relações trigonométricas, haverá charadas nas quais os alunos, trabalhando em duplas, deverão responder as perguntas o mais rápido possível, indicando a resposta correta no tabuleiro. Esse jogo é para quem quer se divertir e testar as suas habilidades em relação a Trigonometria. Ele é um jogo clássico, que nessa nova roupagem (com base na Trigonometria) irá animar a todos os jogadores por meio da competição e cooperação entre as duplas.

Motivação

Por ser um assunto considerado de difícil entendimento para os alunos, por envolver muitas propriedades, conceitos e fórmulas. Este experimento tem o intuito de mostrar que é possível trabalhar as Relações Trigonométricas nas aulas de uma maneira lúdica, e não só como um encargo curricular.

O experimento

O jogo “Charada Trigonométrica” é composto por um tabuleiro que contém as respostas de todas as questões, pelas perguntas e por pinos que são utilizados para marcar qual resposta já foi utilizada e para determinar qual dupla de jogador respondeu. As charadas são questionamentos envolvendo o conteúdo de Relações Trigonométricas (As relações das respostas das charadas se encontram no Quadro 2, em anexo). Existe também um sistema de pontuação

incluso no jogo, onde cada charada respondida pode valer entre 10, 15, 20 e 30 pontos, onde está pontuação determina o nível de dificuldade da pergunta.

Preparação

Os alunos devem se dividir em dois grupos e em seguida formarem duplas, para que possam compartilhar os conhecimentos, dúvidas e percepções que forem surgindo ao longo do experimento. Além dessa separação, deve haver a escolha de um narrador, que terá o papel de ler as charadas.

Etapas para o desenvolvimento do experimento

Etapa 1

Exposição do Jogo – Essa etapa consiste basicamente na apresentação do jogo, comunicar as instruções para que no momento da experimentação não haja dúvidas, explicar a grande relevância que esta experiência irá agregar na construção e a compreensão do conhecimento matemático que está em destaque neste experimento.

Etapa 2

Iniciando o jogo – Nesta etapa os alunos irão se dividir em dois grandes grupos e formar as duplas para jogar a “Charada Trigonométrica”. Neste jogo, os alunos devem seguir as orientações destinadas pelo professor(a) para atingir o objetivo final, que é responder as charadas corretamente para ficar sem nenhum marcador.

O jogo contém um sistema de pontuação simples, em que cada uma das charadas tem um score que varia de 10, 15, 20 e 30 pontos. Cada dupla irá ter a sua rodada para responder a charada que o narrador pegou do monte de cartas. Caso o dueto não responda corretamente, eles não ganharão a pontuação correspondente à charada e ela será usada novamente para a próxima dupla (em que esse processo ocorrerá até que uma das duplas acerte a charada). Com isso, ganha a dupla que tiver obtido a maior pontuação. Lembrando que cada dupla tem as mesmas chances de obter esses pontos, pois cada dueto recebe cinco pinos para dispor no tabuleiro de respostas e o jogo só acabará quando todos ficarem sem nenhum marcador.

Etapa 3

Finalizando o jogo – Após o término de todas as perguntas respondidas e todos os marcadores dispostos no tabuleiro, o professor deve pedir para que os alunos relatem a pontuação final da dupla, para que desta forma seja possível declarar o vencedor, que será somada pelo professor ou pelos próprios alunos, fica a critério de ambos. Assim o dueto que obtiver a maior pontuação é o vencedor. Caso haja duas ou mais duplas com a mesma pontuação, o professor pode adotar o tempo de resolução como critério para o desempate.

Fechamento

Neste experimento, o aluno é convidado a compreender este em diversos níveis. Assim, há a oportunidade de se desenvolver uma atividade de ensino contextualizada, na qual o aluno poderá demonstrar ou adquirir diferentes habilidades pessoais que poderão, ainda, ser compartilhadas com seus colegas.

Com isso, é de suma importância que ao longo de todo o experimento, o professor deve analisar como os alunos reagem a cada questão, e quais eventuais dúvidas podem surgir dentro de cada rodada e, ao final de todas as etapas, o orientador(a) deve sanar tais dúvidas e dificuldades, para que dessa forma, seja possível alcançar o objetivo inicial desta experiência.

Variações

O jogo citado é para dois orientadores em sala de aula, mas caso seja somente um professor(a), diminui-se a quantidade de tabuleiros para um e extingue a formação de dois grupos. E, caso não haja a possibilidade de utilizar a versão física deste jogo, é possível ainda sim aplicá-lo através de uma versão remota. Para isso serão necessários os seguintes materiais: 1) Para computador ou notebook: o aluno(a) deve estar logado no Gmail. Com isso, o aluno(a) tem acesso ao tabuleiro através de um link disposto pelo professor(a), o mesmo contido no Anexo III, com as respostas de forma online; e 2) Para smartphone: o aluno(a) precisa estar logado no Gmail e ter o aplicativo Apresentações do Google instalado. Com isso, o aluno(a) tem acesso ao tabuleiro através de um link disposto pelo professor(a), o mesmo contido no Anexo III, com as respostas de forma online. As perguntas (charadas) serão as mesmas contidas no Anexo II.

Nesta alteração, o professor deverá utilizar as mesmas perguntas (Anexo II) para que as duplas possam responder as charadas. Para marcar as respostas contidas no tabuleiro online, os duetos moverão seus marcadores, clicando sobre eles e arrastando até o destino, mostrando assim quem respondeu primeiro a charada.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília, DF: MEC, 2018.

Anexos

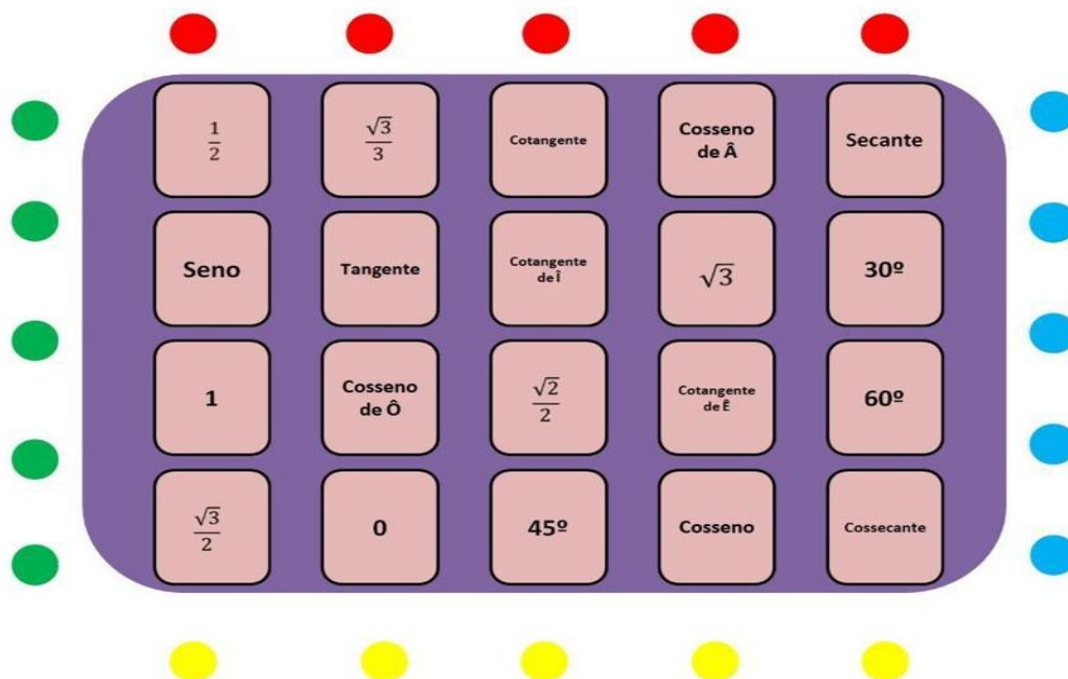
Anexo I



Anexo II



Anexo III



Anexo IV – Quadro 2

Quadro 2 – Perguntas e respostas da charada

CHARADAS	RESPOSTAS
Seno de 45 graus	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
Tangente de 30 graus	$\sqrt{3}$
Inverso do seno	Cossecante
Inverso do cosseno	Secante
Equivale a $\sin^2 x + \cos^2 x$	1
Cosseno dividido pelo seno	Cotangente
Seno dividido pelo cosseno	Tangente
Razão entre o cateto oposto e hipotenusa	Seno
Razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa	Cosseno
O seno de $\hat{A}$ pode ser equivalente	Cosseno de $\hat{O}$
Ângulo cujo cosseno é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$	30°

Fonte: Elaborado pelas autoras.

FOLHA DO ALUNO

Charada Trigonométrica
Figura 1 – Charada Trigonométrica



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Comentários iniciais

Na atividade proposta, é necessário relembrar e construir conhecimentos acerca da Trigonometria. Por meio de charadas, o jogo “Charada Trigonométrica” busca reforçar e fixar melhor os conceitos mais usuais da Trigonometria, estimulando o raciocínio lógico e a associação dos assuntos propostos (desde relações fundamentais da Trigonometria até relações trigonométricas no triângulo retângulo).

Procedimento

Etapa 1

Para a aplicação do jogo e o compartilhamento dos conhecimentos matemáticos presentes na experiência, dividam-se em duplas para que em seguida haja outro agrupamento feito pelo professor, onde ele formará grupos de até quatro duplas, para cada tabuleiro disposto em sala de aula.

Etapa 2

Ademais, cada agrupamento feito pelo professor deverá escolher um narrador para ler as charadas (que tenham em mãos o quadro de respostas no intuito de facilitar a dinâmica de acertos), em que o narrador estará isento de jogar. Em seguida, cada dupla deverá escolher uma cor, das quatro disponíveis, e se posicionar com os seus cinco pinos/tampinhas. Ademais, o jogo trabalhará por acumulações de pontos obtidos pelas respostas acertadas de cada charada (entre 10, 15, 20 e 30 pontos, de acordo com o nível de dificuldade).

Etapa 3

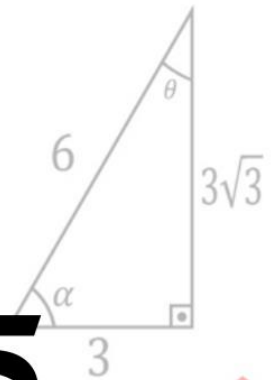
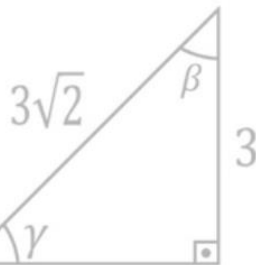
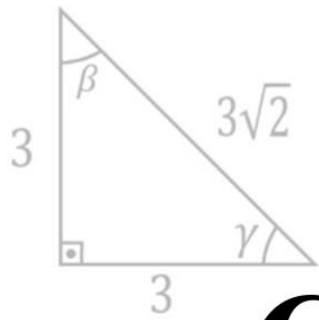
Agora, todos os jogadores devem se posicionar com seus pinos/tampinhas e escolher uma ordem entre as duplas para começar as rodadas e o jogo. O narrador pegará uma charada do monte de cartas e lerá para a primeira dupla (em sua rodada), caso a dupla acerte, ela colocará o pino/tampinha (da cor escolhida por ela) na casa correspondente a resposta e acumulará a pontuação da charada (apresentada na cartinha). Caso a dupla erre, a sua vez passará para a rodada do próximo dueto, e assim por diante, até uma dupla acertar a charada e acumular a pontuação da mesma. Lembrando que existem as mesmas chances de acertos para todas as duplas, uma vez que elas possuem a mesma quantidade de pinos/tampinhas. Portanto, quem acumular mais pontos ao final de todas as rodadas, será a dupla vencedora.

Etapa 4

A partir do que você aprendeu hoje, quais conhecimentos trigonométricos você não lembrava? Você acha que essa prática lhe mostrou o domínio que considerava não ter sobre as relações trigonométricas?

CAPÍTULO 5

Trigobaralho



$$\text{Sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

CAPÍTULO 5

Trigobaralho

Francimar Miguel da Silva Junior

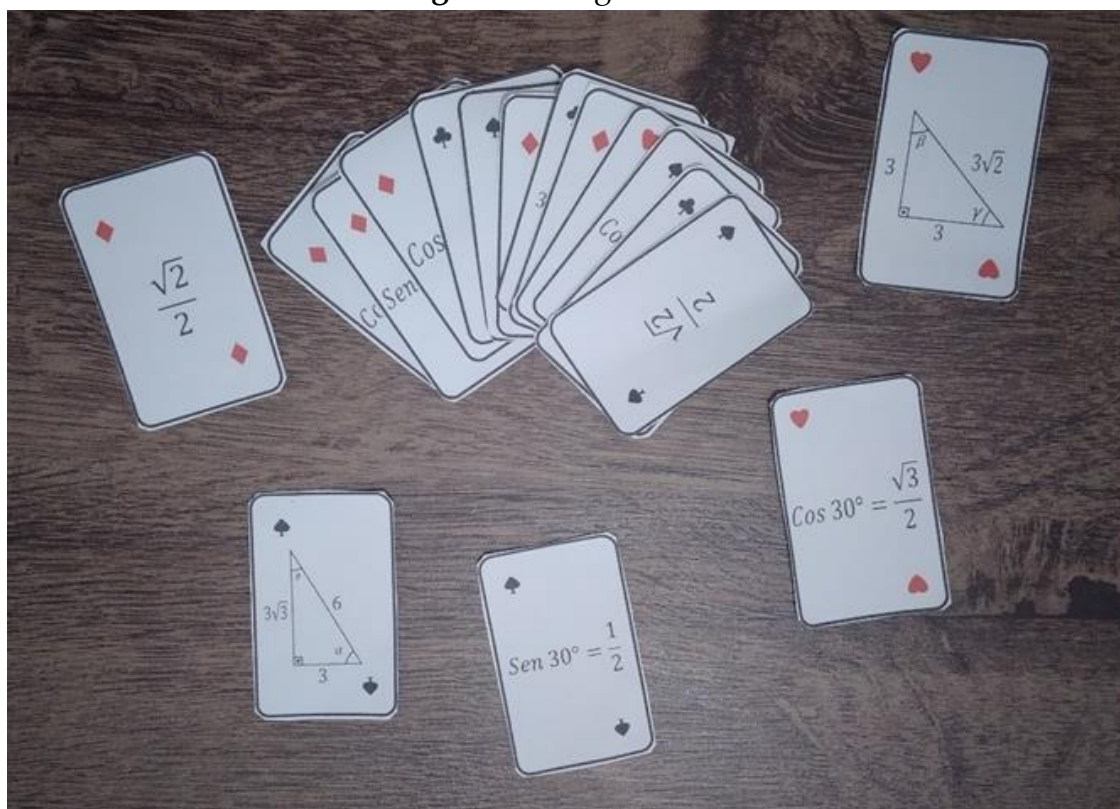
INTRODUÇÃO

O baralho proposto é conhecido usualmente pelas pessoas e com as devidas adaptações vamos usá-lo para propor uma investigação Matemática, assim favorecendo a criatividade, curiosidade e os questionamentos permanentes dos alunos. Nessa sequência de atividades iremos determinar as razões trigonométricas dos ângulos notáveis (30° , 45° e 60°), construindo dois triângulos retângulos com o auxílio do baralho e ao fazer isso questionaremos os alunos sobre as informações contidas nas cartas e sobre os resultados obtidos.

GUIA DO PROFESSOR

Material didático manipulável

Figura 1 – Trigobaralho



Fonte: Elaborado pelo autor.

Elementos que norteiam a prática

Quadro 1 – Resumo da prática

Série/Ano	9º ano do Ensino Fundamental.
Unidade temática	Geometria.

Objeto de conhecimento		Construções geométricas: ângulos de 90° , 60° , 45° e 30° e polígonos regulares.
Habilidade		(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenhos ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90° , 60° , 45° e 30° e polígonos regulares (BRASIL, 2018, p. 315).
Objetivos	Docente	Desenvolver habilidades conceituais na determinação das razões trigonométricas dos ângulos notáveis de 30° , 45° e 60° , em particular, seno e cosseno.
	Aluno	Compreender as razões trigonométricas dos ângulos de 30° , 45° e 60° , em particular seno e cosseno.
Materiais necessários		Para a realização do experimento é necessário que o professor esteja com os seguintes materiais disponíveis aos alunos: 1) Baralho (1 para dois alunos) e 2) Folha do aluno.
Conhecimentos prévios		Noções de Razões trigonométricas, Teorema de Pitágoras e conceitos e características do triângulo isósceles e equiláteros.
Duração		50min/a.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Aspectos gerais do experimento

Sinopse

Ao manipular um jogo de baralho os alunos serão expostos ao seno e cosseno para os ângulos de 30° , 45° e 60° , denominados ângulos notáveis. Esses valores surgiram por meio da observação das cartas do jogo. Ao manipular o baralho será proposto a construção de um triângulo equilátero e de um quadrado obtendo assim uma forma para construir demonstrações matemáticas desses valores.

O experimento

Prezado professor,

Para obter os valores do seno e cosseno dos ângulos 30° , 45° e 60° é preciso obter dois triângulos retângulos, um que tenha ângulos de 30° e 60° e outro que tenha ângulos de 45° e 45° . Dessa forma iremos investigar as cartas do jogo para obter esses triângulos e desenvolver a demonstração desses valores.

Preparação

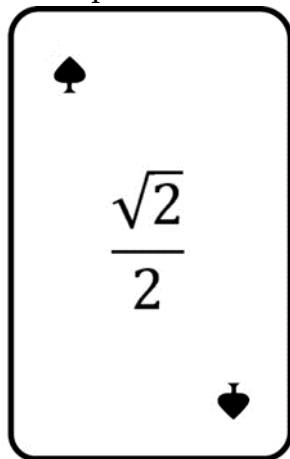
O professor deve imprimir os baralhos (anexos 1) de acordo com a quantidade de alunos que participarão da prática e as folhas do aluno.

Etapas para o desenvolvimento do experimento

Etapa 1

Inicialmente o professor deverá explicar o valor de cada tipo de carta do baralho e suas relações de equivalência e então ler as regras do jogo com os alunos. Existem três tipos de cartas, números, senos e cossenos e triângulos.

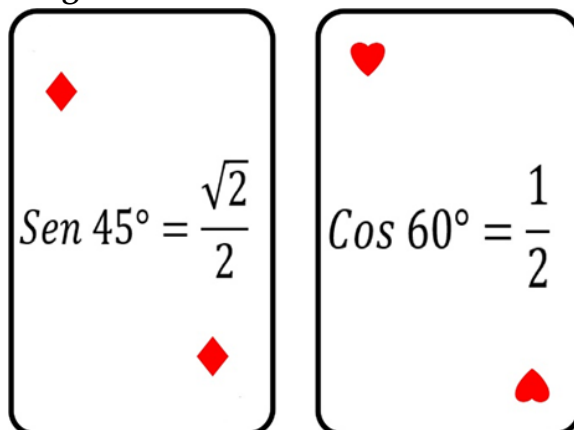
Figura 2 – Exemplo de carta dos números



Fonte: Elaborado pelo autor.

O valor das cartas dos números é imediato. Essa carta apresenta o valor de $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

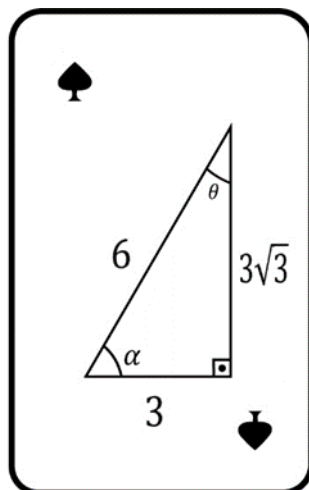
Figura 3 – Cartas de senos e cossenos



Fonte: Elaborado pelo autor.

O valor das cartas dos números é imediato. Essas cartas apresentam os valores de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{1}{2}$ respectivamente.

Figura 4 – Cartas de triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor.

Já as cartas de triângulos podem assumir quatro valores. Como cada triângulo tem dois ângulos diferentes de 90° o valor dessas cartas pode ser o seno ou cosseno de um desses ângulos.

Essa carta pode assumir os seguintes valores

$$\text{Sen } \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Sen } \theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Cos } \alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sendo assim, $\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Conhecendo os valores que cada tipo de carta pode assumir, podemos notar que cartas de diferentes tipos possuir valores iguais. Essa relação de equivalência é o que possibilita a criação das trincas de cartas, que serão propostas no jogo trigobaralho. As regras são:

1. As cartas são distribuídas, nove cartas para cada jogador.
2. O primeiro jogador deve puxar uma carta e então escolher se quer ficar com a carta ou não. Se desejar ficar ele deve descartar outra carta, caso não queira ficar deve descartar a carta puxada.
3. A partir do segundo jogador haverá a possibilidade de pegar a última carta descartada, desde que descarte uma carta de sua mão.
4. Vence o jogo quem obtiver três trincas de cartas de mesmo valor e de tipos diferentes.

Momento 1 – Realização do jogo.

A primeira atividade o professor deve ler as regras do jogo com os alunos, enfatizando que o aluno deve consultar as regras caso necessite. Após ler as

regras o professor deve conduzir a distribuição das cartas e observar se os alunos estão conseguindo entender as regras do jogo. Os alunos devem jogar por 20 minutos e ao término, deve ser orientado que cada aluno pegue todas as cartas de dois naipes distintos, preto e vermelho. Solicite que organizem as cartas de modo que consigam visualizar todas.

Etapa 2

Momento 2- Investigando as cartas do jogo.

Na segunda atividade, no momento inicial, o professor deve indicar aos alunos as perguntas a serem respondidas, apenas utilizando as informações contidas nas cartas. Analisando as cartas eles devem propor uma solução na “folha do aluno” e em seguida expor seu raciocínio.

O professor deve atuar na lousa se necessário, desenhando os triângulos a serem estudados pelos alunos e posteriormente colocando as ideias para solução dos alunos na lousa, pois a ideia de um aluno poderá ser usada pelos demais para solucionar a questão. Os alunos deverão solucionar as seguintes questões.

a) Achar os valores dos ângulos das cartas de triângulo usando as cartas de seno e cosseno.

Para determinar esses valores basta notar que o seno e o cosseno dos ângulos desconhecidos coincidem com os valores de seno e cosseno apresentados nas cartas de seno e cosseno, logo os ângulos desconhecidos devem ser estes. Peça que os alunos indiquem esses ângulos na “folha do aluno”. Nesse momento o professor pode dar a dica aos alunos de pensarem na definição de seno e cosseno caso os alunos tenham dificuldade.

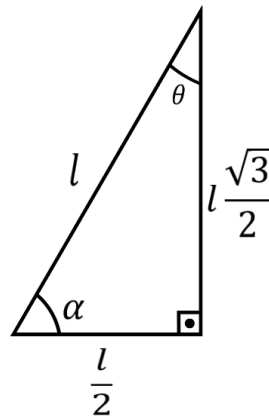
b) Possível relação entre os lados desses triângulos.

Dentre as várias hipóteses que os alunos podem considerar, temos a seguinte: No triângulo que possui 60° e 30° a hipotenusa tem o dobro do valor de um de seus catetos. O triângulo que possui 45° e 45° possui dois lados iguais.

c) Representar os lados desses triângulos por meio de uma variável l .

Com a hipótese formulada do item anterior o aluno deve indicar nos triângulos contidos na “folha do aluno” seus respectivos lados em função de uma variável l . Em seguida será necessário usar o teorema de Pitágoras para achar o terceiro lado de cada triângulo.

Matematicamente temos:

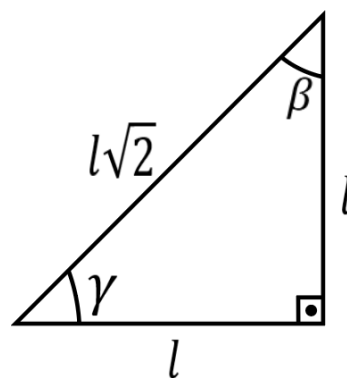


$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2$$

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3}{4}l^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$



$$x^2 = l^2 + l^2$$

$$x^2 = 2l^2$$

$$x = l\sqrt{2}$$

d) Usando as cartas de triângulos para encontrar os ângulos desconhecidos e comprovando as relações entre seus lados.

Nesse momento indique aos alunos para buscarem uma solução geométrica. Dentre várias justificativas que os alunos podem considerar, temos as seguintes: Para o triângulo com dois lados iguais podemos notar que ele é isósceles e, portanto, deve possuir os ângulos da base iguais. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180° , temos que:

$$90^\circ + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Como $\beta = \gamma$, temos

$$\beta = \gamma = 45^\circ$$

Comprovando geometricamente o resultado obtido no item a) pois todo triângulo isóscele tem dois lados iguais.

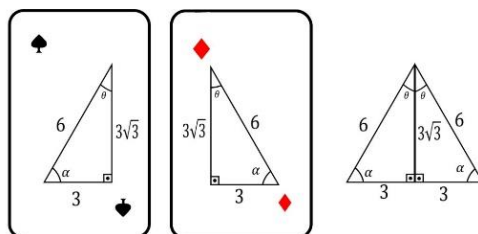
Para o triângulo com hipotenusa medindo o dobro de um dos catetos podemos notar que se usarmos duas cartas desse triângulo conseguimos juntá-las e formar um triângulo equilátero, já que o triângulo formado terá todos os lados iguais. Sabendo que no triângulo equilátero temos três ângulos iguais, temos que um dos ângulos dos triângulos originais medem 60° e como sabemos que esses triângulos são retângulos temos:

$$90^\circ + 60^\circ + \theta = 180^\circ$$

$$\theta = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ$$

$$\theta = 30^\circ$$

Comprovando geometricamente o resultado obtido no item a). Outra possibilidade seria ter notado que a altura do triângulo equilátero, que também é bissetriz, divide o ângulo de 60° na metade, tendo assim chegado ao mesmo ângulo de 30° . A relação entre os lados do triângulo estudado de fato ocorre, pois, ao juntar os dois triângulos é traçada uma altura do triângulo equilátero relativo a uma base, que então é dividida pela metade, logo cada metade é metade do lado. O terceiro lado é calculado via teorema de Pitágoras, assim como fizemos no item anterior.



Para o triângulo isósceles é imediato uma vez que comprovamos que os ângulos envolvidos são de fato 45° ou seja se os ângulos são 45° e 45° este triângulo deve ter dois lados iguais.

e) Sistematizando.

Essa atividade é apenas a sistematização das ideias e conceitos matemáticos encontrados nas atividades 1 e 2. O professor deve pedir que os alunos preencham o quadro calculando o seno e o cosseno dos ângulos notáveis utilizando os triângulos feitos no item c) do momento 2.

Matematicamente temos:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{1}{2l} = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{1}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{l\sqrt{3}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen} 60^{\circ} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{l\sqrt{3}}{2l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^{\circ} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2l} = \frac{1}{2}$$

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Fechamento

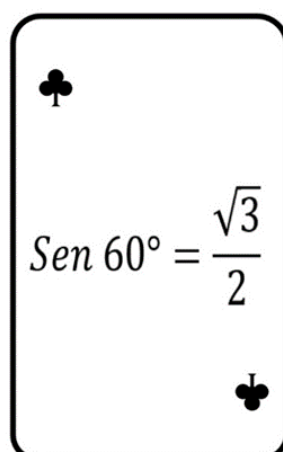
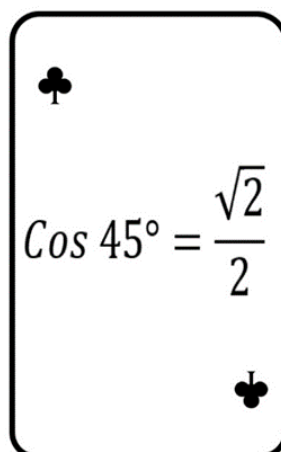
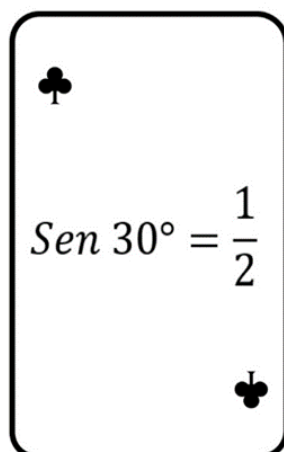
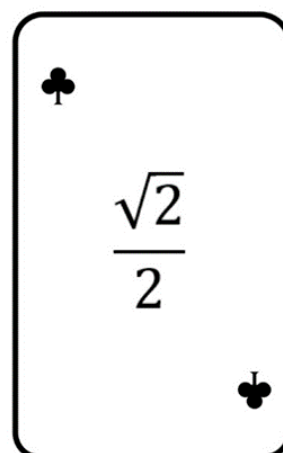
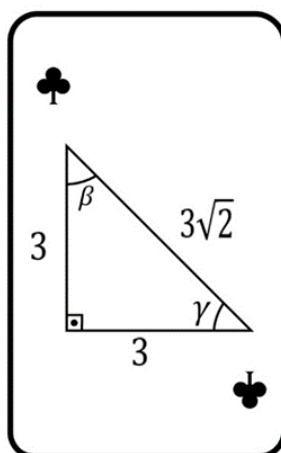
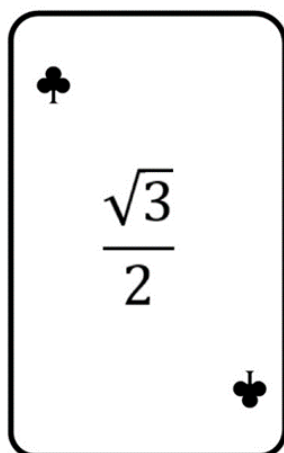
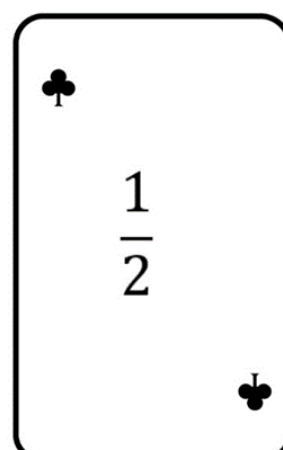
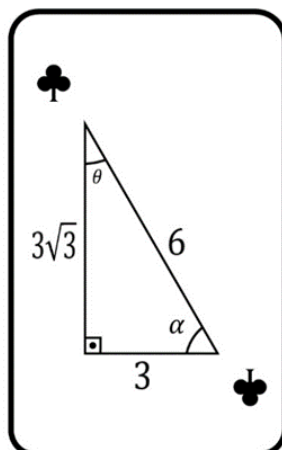
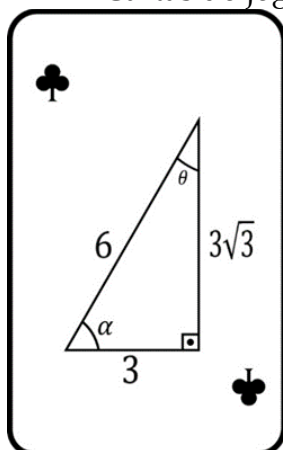
Para o fechamento da sequência da atividade sugerimos que o professor peça que os alunos montem o quadro preenchido na atividade 3 com as cartas do jogo. Também é interessante apresentar uma tabela trigonométrica, e mostrar como utilizá-la para achar aproximações de ângulos uma vez conhecido todos os lados de um triângulo retângulo. Se o professor desejar, uma possível variação da prática seria a inclusão de cartas de tangente para os ângulos notáveis.

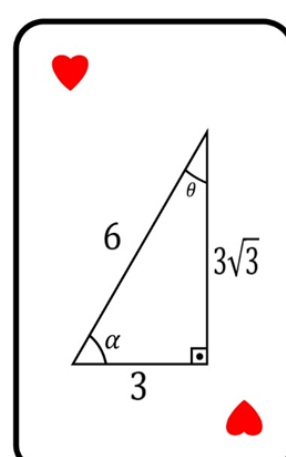
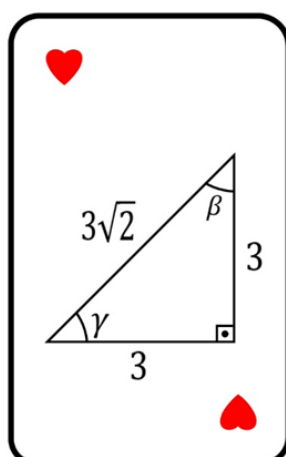
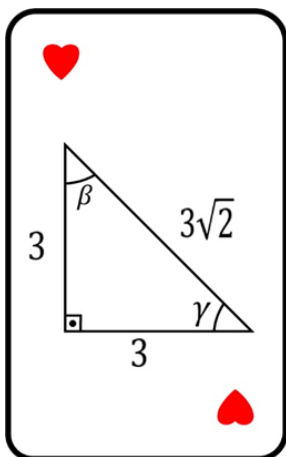
Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Ensino Médio. Brasília, DF: MEC, 2018.

Anexos

Cartas do jogo





$$\text{Sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

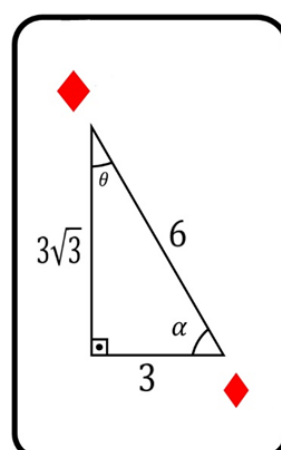
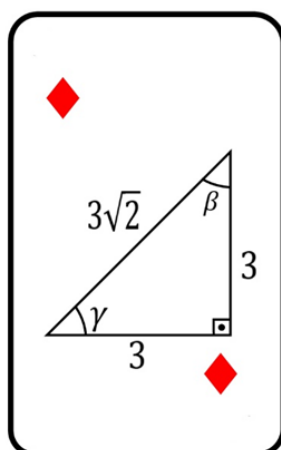
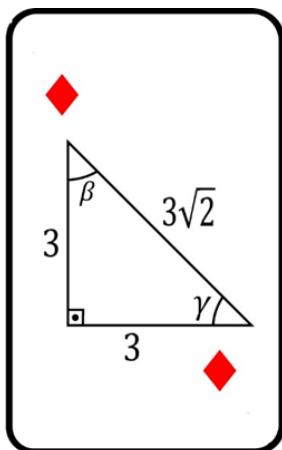
$$\text{Cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\frac{1}{2}$$

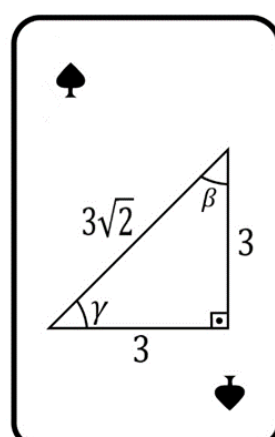
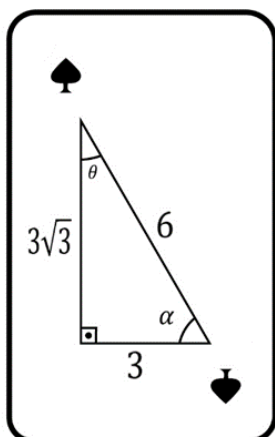
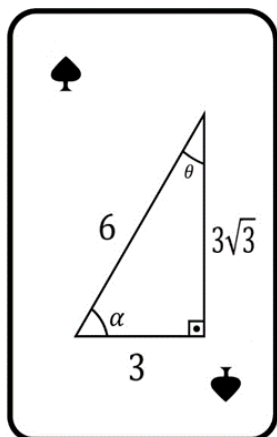
$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$



$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

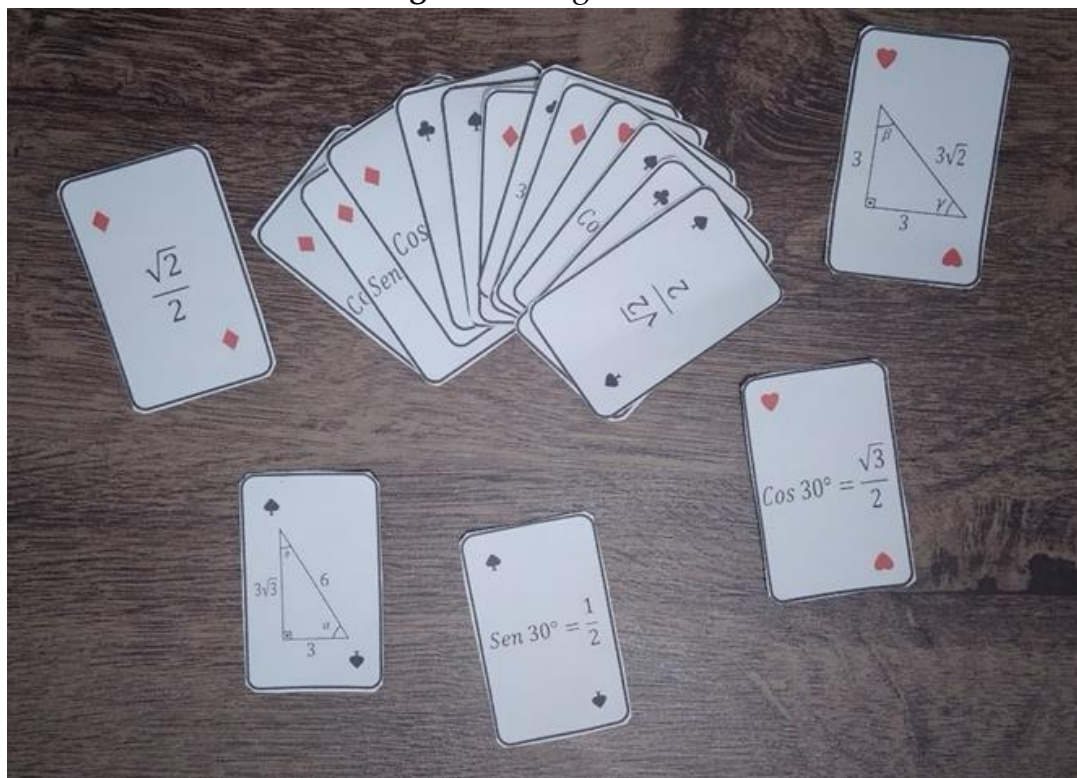
$$\text{Cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

FOLHA DO ALUNO

Trigobaralho

Figura 1 – Trigobaralho



Fonte: Elaborado pelo autor.

Comentários iniciais

Prezado aluno, as razões trigonométricas, em particular, dos ângulos de 30°, 45° e 60° são de grande importância para aplicações práticas do cotidiano. Seu aprendizado, que normalmente é apresentado ao aluno nos anos finais do ensino fundamental e ao longo do ensino médio, ajuda o aluno a desenvolver várias competências, por exemplo, interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos. Esse conteúdo é normalmente abordado com ênfase na teoria, utilizando definições e teoremas, e na preparação do estudante para o vestibular.

A partir do material concreto proposto na aula de hoje iremos estudar as razões trigonométricas dos ângulos 30°, 45° e 60° através de um jogo chamado trigobaralho.

Procedimento

Etapas

Momento 1. Leia as regras do jogo e em seguida forme uma dupla ou um grupo de quatro pessoas e jogue o jogo trigobaralho por 20 minutos.

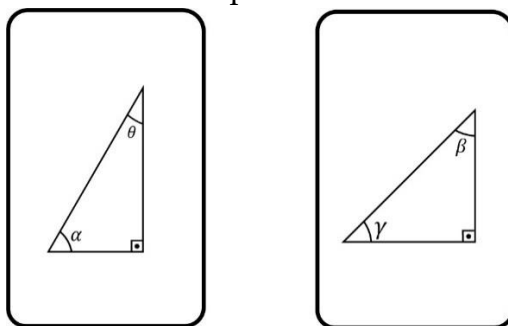
Regras do jogo:

1. As cartas são distribuídas, nove cartas para cada jogador.
2. O primeiro jogador deve puxar uma carta e então escolher se quer ficar com a carta ou não. Se desejar ficar ele deve descartar outra carta, caso não queira ficar deve descartar a carta puxada.
3. A partir do segundo jogador haverá a possibilidade de pegar a última carta descartada, desde que descarte uma carta de sua mão.
4. Vence o jogo quem obtiver três trincas de cartas de mesmo valor e de tipos diferentes.

Etapa 2

Momento 2. Responda as seguintes perguntas sobre o baralho.

- a) Use as cartas de seno e cosseno para achar os valores dos ângulos das cartas de triângulo. Escolhe duas cartas que tenham os ângulos indicados nas figuras, desenhe o naipes escolhido e indique os lados dos triângulos.



- b) Aparentemente existe alguma relação entre os lados desses triângulos? Justifique sua resposta.
- c) Em caso afirmativo no item anterior quais seriam os lados desses triângulos em função de uma variável l ?
- d) Use as cartas de triângulo para encontrar os ângulos dos triângulos e comprove a relação entre seus lados. Descreva seu raciocínio e faça uma figura.
- e) A partir da figura que você desenhou no item d) da atividade 2 calcule os seguintes valores. Use cálculos para justificar sua resposta.

	30°	45°	60°
Seno			
Cosseno			



CAPÍTULO 6

O uso do Teodolito
Caseiro no ensino das
Relações Trigonométricas
num triângulo retângulo

CAPÍTULO 6

O uso do Teodolito Caseiro no ensino das Relações Trigonométricas num triângulo retângulo

Vinicius de Sousa Paula

Amanda Cardoso Benicio de Lima

Jessica de Oliveira Dantas

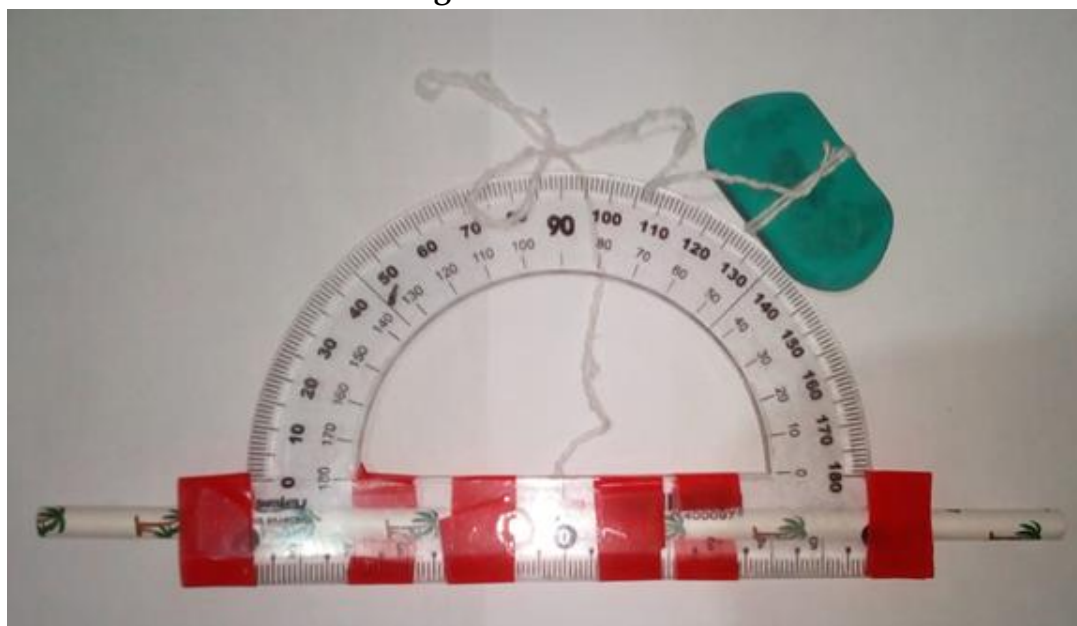
INTRODUÇÃO

Os materiais construídos pelos próprios alunos, os auxiliam na aprendizagem. O teodolito caseiro, como sendo um exemplo deles, é um instrumento de medida que pode ser caracterizado como um material manipulável. Aqui ele é utilizado com o objetivo de trazer para mais perto dos alunos as relações trigonométricas, antes vistas somente na lousa da sala de aula, possibilitando ao aluno a experiência de mobilizar conceitos a partir de uma prática concreta de uso do teodolito.

GUIA DO PROFESSOR

Material didático manipulável

Figura 1 – Teodolito



Fonte: Elaborado pelos autores.

Elementos que norteiam a prática

Quadro 1 – Resumo da prática

Série/Ano	1º ano do Ensino Médio
Unidade temática	Geometria

Objeto de conhecimento		Relações métricas no triângulo retângulo.
Habilidade		(EM13MAT308) Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança (BRASIL, 2018, p. 529).
Objetivos	Docente	Desenvolver a habilidade de aplicar conceitos básicos das relações trigonométricas na solução de um problema da construção civil e agrimensura, especificamente a topografia.
	Aluno	Aplicar conceitos básicos das relações trigonométricas na solução de um problema da construção civil e agrimensura, especificamente a topografia.
Materiais necessários		Para a realização do experimento é necessário que o professor esteja com os seguintes materiais disponíveis aos alunos: 1) Transferidor; 2) Canudo; 3) Fita adesiva; 4) Barbante (cerca de 40 cm); 5) Borracha (ou qualquer outro objeto que sirva de peso); 6) Trena; 7) Tabela trigonométrica (pode ser encontrada no livro didático); e 8) Folha do aluno.
Conhecimentos prévios		Para que a prática flua é necessário que os alunos tenham conhecimento sobre as relações trigonométricas básicas, ou seja, seno, cosseno e tangente; triângulo retângulo e semelhanças de triângulos.
Duração		2 horas/aulas

Fonte: Elaborado pelos autores.

Aspectos gerais do experimento

Sinopse

Neste experimento, os alunos deverão construir um instrumento de medição (teodolito), coletar dados em campo e por meio das relações trigonométricas determinar ângulos e medidas que não foram possíveis de serem coletadas a princípio.

O experimento

O experimento consiste em por meio do teodolito caseiro obtermos o ângulo complementar de referência e através das relações trigonométricas num triângulo retângulo determinarmos a altura da parede que escolhemos para realizar o experimento. Para isso, vão ser realizadas 3 atividades que consistem na construção do instrumento, manejo e captação de dados, e por fim cálculos onde utilizaremos as relações trigonométricas.

Preparação

Os alunos devem formar duplas ou trios para que trabalhem em grupo quando forem utilizar o instrumento na prática. A *Atividade 1* consiste na construção do teodolito caseiro com materiais de baixo custo. A *Atividade 2* se dá com os alunos em campo, realizando a manipulação do instrumento e a coleta de dados. A *Atividade 3* consiste na aplicação das relações trigonométricas por meio de cálculos, antes vistos em sala de aula.

Etapas para o desenvolvimento do experimento

Etapas 1

Construção do teodolito caseiro com materiais de baixo custo. Na primeira atividade, os alunos com os materiais em mãos, devem construir o teodolito caseiro com a ajuda do professor, seguindo os passos:

1° PASSO- O aluno deve amarrar o barbante na metade do canudo e fixar um pedaço de fita adesiva sobre o nó, para que o barbante não se mova, mas atenção o ponto do nó precisa ficar fora da fita.

2° PASSO- Posicionar o nó do canudo sobre o ponto 0 do transferidor, de maneira que possa visualizar as marcações no transferidor e que ao barbante ser esticado haja a formação de uma linha reta com o ângulo de 90° .

3° PASSO- Com o auxílio da fita adesiva o aluno deve grudar o canudo no transferidor.

4° PASSO- Amarrar a borracha na ponta do barbante, para servir como um peso.

Etapas 2

Em campo, os alunos realizam a manipulação do instrumento e a coleta de dados.

Na segunda atividade, o professor leva os alunos para fora da sala de aula e pede para eles tomarem um referencial para aferirem a altura, que pode ser a parede do colégio, uma coluna, entre outros. Depois de escolhido o referencial os alunos seguem agora outros passos, são eles:

1° PASSO- Os integrantes da equipe se dividem para utilizar o teodolito (Aluno 1), que também poderá se chamar de observador, e quem irá coletar os dados (Aluno 2).

2° PASSO- Marcar um ponto X no chão onde o Aluno 1 irá ficar posicionado para realizar o experimento.

3° PASSO- Com o auxílio da trena, o Aluno 2 faz a medição da distância entre o referencial escolhido e o ponto X, com isso é obtida a distância que chamaremos de d.

4° PASSO- Com o Aluno 1 posicionado no ponto X, ocorre a medição do ângulo $\hat{A}$.

5° PASSO- Novamente com o auxílio da trena, o Aluno 2 mede a altura do Aluno 1, essa altura chamaremos de h.

Medição do ângulo $\hat{A}$. Com o teodolito em mãos, o Aluno 1 posiciona o transferidor com a graduação 0 virada para o seu olho, logo após olha através do canudo até o ponto mais alto de seu referencial e espera o pêndulo, formado pelo barbante e a borracha, parar de balançar. Com isso fixa o dedo sobre o barbante para fazer a marcação do ângulo desejado e anota o valor obtido.

OBSERVAÇÃO: Como a atividade é pensada para ocorrer durante o período de ensino remoto, os alunos devem acessar o link <https://youtu.be/RPH653MCHew> onde contém o passo a passo do uso do teodolito caseiro e depois tentarem fazer individualmente em suas residências.

Etapa 3

Aplicação das relações trigonométricas por meio de cálculos. Depois do processo de utilização do teodolito o professor retorna com os alunos para a sala de aula, onde realizam os cálculos praticando os conhecimentos a respeito de relações trigonométricas.

Durante a atividade 2 os alunos escreverão as medidas obtidas no quadro abaixo:

Quadro 2 – Quadro para registro dos valores

MEDIDA	VALORES OBTIDOS
d	
$\hat{a}$	
h	

Fonte: Elaborado pelos autores.

O professor irá pedir para os alunos calcularem a altura do referencial, onde os levará a aplicar os conceitos de relações trigonométricas antes vistos em sala de aula. Para demonstrarmos o procedimento de cálculos que os alunos farão usaremos o seguinte exemplo:

Suponhamos que em campo, a distância medida entre o referencial e o Aluno 1 seja de 2,30m, chamaremos essa distância de d. Com o manejo do teodolito caseiro os alunos obtiveram um ângulo $\hat{A}=50^\circ$ e ao medir a altura do Aluno 1 viu que $h=1,66m$. Colocando os dados no quadro temos:

Quadro 3 – Quadro para registro dos valores

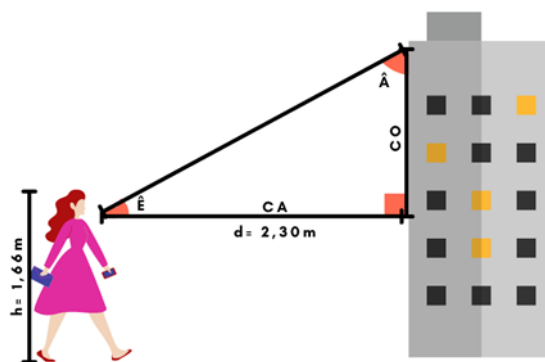
MEDIDA	VALORES OBTIDOS
--------	-----------------

d	2,30m
$\hat{A}$	50°
h	1,66m

Fonte: Elaborado pelos autores.

Os alunos provavelmente farão um desenho a fim de visualizarem melhor o problema que estão trabalhando. Visualmente os alunos percebem que há a formação de um triângulo retângulo, entre o referencial e o observador, com isso, como professor, você pode levantar a discussão sobre o posicionamento do ângulo $\hat{A}$, se está localizado no olho do observador ou se é o ângulo formado entre a hipotenusa e o cateto oposto, após perceber a posição do ângulo $\hat{A}$ os alunos podem obter uma imagem como a seguinte:

Figura 2 – Representação hipotética da situação



Fonte: Elaborado pelos autores.

Com isso, podem ser realizados os cálculos do seguinte modo:

Primeiro os alunos calculam o valor do ângulo $\hat{E}$, que é formado pela hipotenusa e o olho do observador. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo resulta em 180° , os alunos têm uma expressão semelhante à

$$\hat{E} + \hat{A} + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{E} + 50^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{E} = 180^\circ - 140^\circ$$

$$\hat{E} = 40^\circ$$

Portanto, o ângulo formado pela hipotenusa e o olho do observador é de 40° . Após isso, os alunos deverão observar que para calcular o valor de seu referencial, que agora usaremos a letra R para nos referirmos a ele, precisarão usar as relações trigonométricas da tangente do ângulo de 40° (os alunos poderão utilizar o quadro contido no livro onde apresenta os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos), logo

$$\text{tg } 40^\circ = \text{CO/CA}$$

$$0,83 = CO/2,30$$

$$CO = 1,90m$$

Com isso, o professor deve levantar a pergunta se o processo de resolução acabou por aí, e fazer os alunos lembrarem que terão que somar o valor de CO com o valor da altura do observador, por fim a relação que os alunos terão será semelhante a

$$R = CO + h$$

$$R = 1,90 + 1,66$$

$$R = 3,56m$$

Com isso, os alunos encontraram a altura do referencial adotado.

Fechamento

Para o fechamento da sequência de atividades sugerimos que o professor seja solicitado aos alunos para relatarem as suas experiências realizando o manejo do teodolito caseiro e a partir disso a proposta é que seja sistematizado os conceitos mobilizados durante a prática.

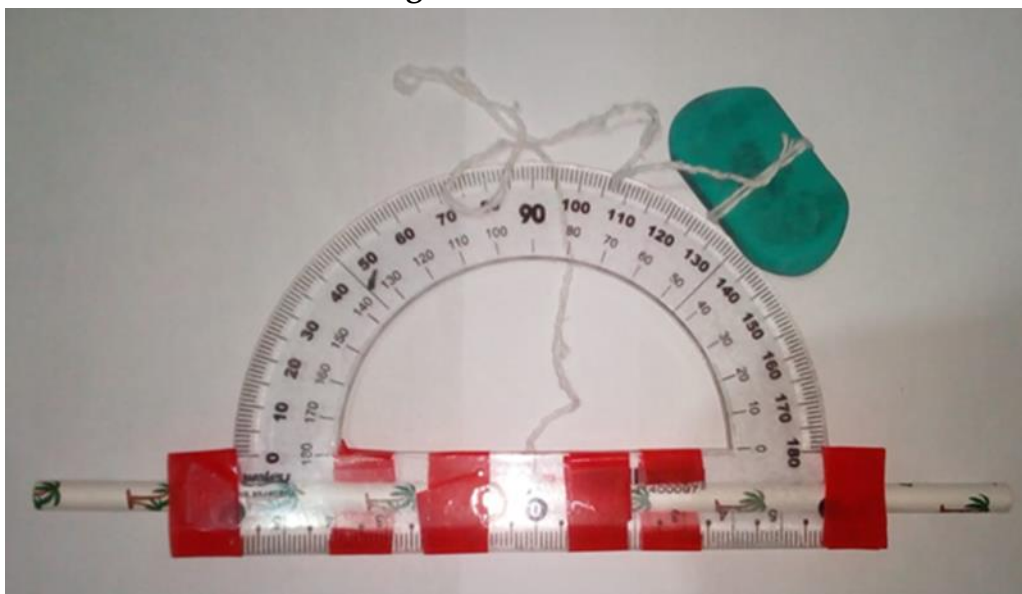
Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília, DF: MEC, 2018.

FOLHA DO ALUNO

O uso do Teodolito Caseiro no ensino das Relações Trigonométricas num triângulo retângulo

Figura 1 – Teodolito



Fonte: Elaborado pelos autores.

Comentários iniciais

Em 1720, Jonathan Sisson construiu o primeiro teodolito contendo quatro parafusos niveladores, Ignácio Porro, inventor de instrumentos óticos, contribuiu acoplado o telescópio, aprimorando assim o teodolito. Ao longo dos anos foi sendo transformado e a ele agregados sistemas e mecanismos que o tornaram mais preciso em suas medições. O teodolito é um instrumento óptico de medida utilizado na topografia, na Geodésia e na agrimensura para realizar medidas de ângulos verticais e horizontais, usado em redes de triangulação. (ZILKHA, 2014, p. 23).

Neste experimento, iremos construir um instrumento de medição (teodolito), coletar dados em campo e por meio das relações trigonométricas determinar ângulos e medidas que não foram possíveis de serem coletadas a princípio. Com isso, iremos conhecer um pouco mais sobre as relações trigonométricas além da importância da matemática em outras áreas de conhecimento.

Procedimento

Etapa 1

Construção do teodolito caseiro com materiais de baixo custo. Construa o instrumento seguindo os passos abaixo:

1° PASSO- Amarre o barbante na metade do canudo e fixe um pedaço de fita adesiva sobre o nó, para que o barbante não se mova, mas atenção o ponto do nó precisa ficar fora da fita.

2° PASSO- Posicione o nó do canudo sobre o ponto 0 do transferidor, de maneira que possa visualizar as marcações no transferidor e que ao barbante ser esticado haja a formação de uma linha reta com o ângulo de 90° .

3° PASSO- Com o auxílio da fita adesiva grude o canudo no transferidor.

4° PASSO- Amarre a borracha na ponta do barbante, para servir como um peso.

Etapa 2

Em campo, realizem a manipulação do instrumento e a coleta de dados.

De acordo com as orientações do professor e com os passos abaixo faça as medições necessárias e coloque os dados no quadro:

1° PASSO- A equipe deve se dividir entre o observador e quem realizará as medições do experimento.

2° PASSO- Marcar um ponto X no chão onde o observador ficará posicionado.

3° PASSO- Meça a distância entre o ponto X e o referencial adotado para o experimento.

4° PASSO- Meça o valor do ângulo $\hat{A}$.

5° PASSO- Meça a altura do observador.

Quadro 1 – Quadro para registro dos valores

MEDIDA	VALORES OBTIDOS
d	
$\hat{A}$	
h	

Fonte: Elaborado pelos autores.

d = a distância do ponto X e o referencial escolhido;

$\hat{A}$ = ângulo obtido através do teodolito caseiro;

h = altura do observador.

Orientação: Acessem o link <https://youtu.be/RPH653MCHew> onde contém passo a passo do uso do teodolito caseiro e depois tentem fazer individualmente em suas residências.

Etapa 3

Aplicação das relações trigonométricas por meio de cálculos. Após o retorno para a sala de aula, use o quadro com os dados e o assunto de relações trigonométricas num triângulo retângulo para realizar o que se pede:

- a) Qual o ângulo formado entre a hipotenusa e o olho do observador? Por que se usa esse ângulo?
- b) Qual é a altura do referencial escolhido?

Referências

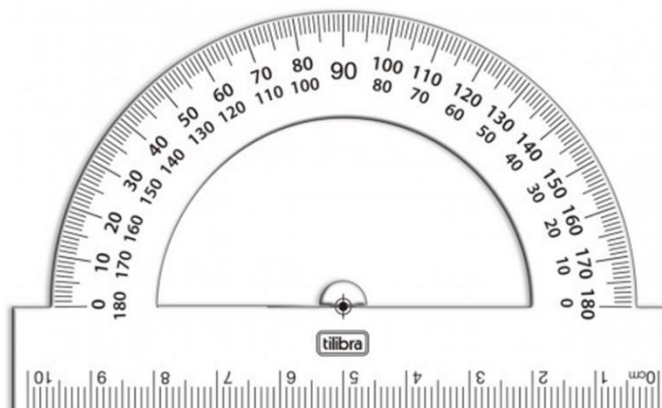
Zilkha, Esther. **Utilização do GeoGebra na Construção de Instrumentos - Teodolito**. Rio de Janeiro, 2014.

Anexos

Tabela trigonométrica

Tabela Trigonométrica				Tabela Trigonométrica			
	Seno	Cosseno	Tangente		Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9848	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,225	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1	90°	1	0	-----

Transferidor



CAPÍTULO 7

Estudando funções
trigonométricas por meio
do GeoGebra

CAPÍTULO 7

Estudando funções trigonométricas por meio do GeoGebra

Roberto Albuquerque da Silva

Roberta Vivian Campos Severino

Luiza Maria Moraes Lima⁴

INTRODUÇÃO

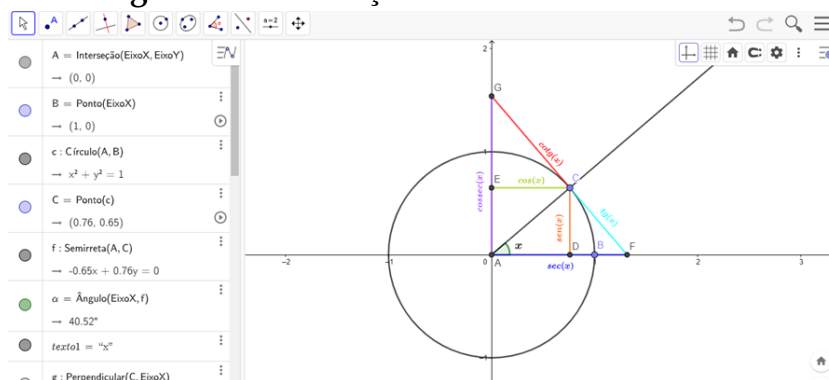
A trigonometria é uma área da geometria plana euclidiana, que pode ser definida como a relação entre os ângulos e o comprimento dos lados de um triângulo. Esta auxiliou no avanço da ciência, é aplicada no estudo da física, dos astros, das navegações, dentre outras situações. É na trigonometria que encontramos as chamadas razões trigonométricas, ou relações trigonométricas, as quais relacionam dois lados de um triângulo a um ângulo do mesmo. Dentre as razões mais conhecidas estão inclusos o seno, cosseno e a tangente, além de outras razões que são obtidas em função destas, como a secante, a cossecante e a cotangente.

Cada uma dessas razões pode ser calculada por meio da sua fórmula ou da análise do círculo trigonométrico. Nesta prática o estudante terá a possibilidade de identificar e calcular tais relações sem o uso de fórmulas, apenas com o seu conhecimento sobre o círculo trigonométrico, o teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos. Obtendo, assim, uma nova opção de como aplicar essas razões para a resolução de problemas.

GUIA DO PROFESSOR

Material didático manipulável

Figura 1 – Construção dinâmica no GeoGebra



Fonte: Elaborado pelos autores.

Elementos que norteiam a prática

⁴ A professora Ma. Luiza Maria Moraes Lima participa desse trabalho contribuindo como professora que orientou a referida prática dos discentes.

Quadro 1 – Resumo da prática

Série/Ano		2º ano do Ensino Médio
Unidade temática		Geometria
Objeto de conhecimento		Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemática (algébrico, geométrico, estatístico, computacional e etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
Habilidade		(EM13MAT404) Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais (BRASIL, 2018, p. 531).
Objetivos	Docente	Desmistificar a necessidade de decorar todas as fórmulas de trigonometria, apresentando um método construtivo para alcançá-las.
	Aluno	Compreender e utilizar as funções trigonométricas.
Materiais necessários		Para a realização do experimento é necessário que o professor esteja com os seguintes materiais disponíveis aos alunos: 1) Software GeoGebra; e 2) Folha do aluno.
Conhecimentos prévios		Noções de círculo trigonométrico, semelhança de triângulos e teorema de Pitágoras.
Duração		1 hora/aula

Fonte: Elaborado pelos autores.

Aspectos gerais do experimento

Sinopse

O experimento consiste em representar de forma geométrica as funções seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente sem sobreposição de segmentos. Além disso, mostrar as relações trigonométricas por meio de semelhança de triângulos.

O experimento

Para deduzir as relações e identidades trigonométricas de forma geométrica devemos construir triângulos semelhantes cujos lados são as funções seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente aplicando as propriedades de semelhança entre eles.

Preparação

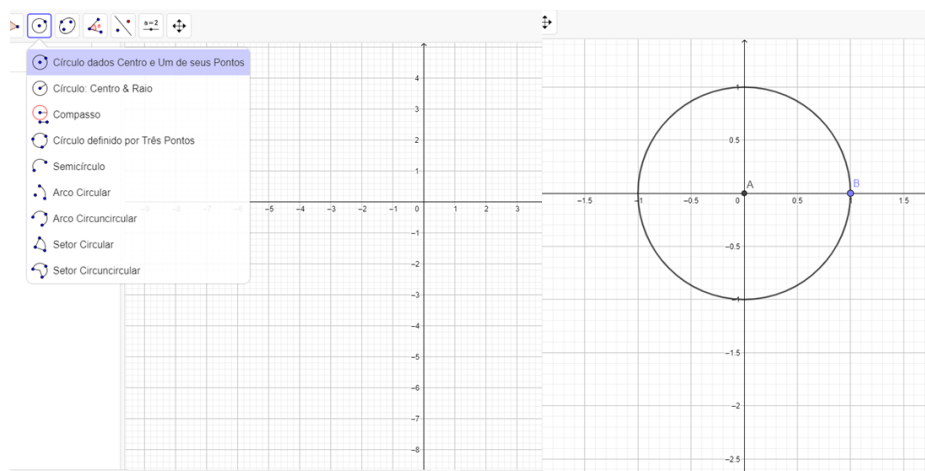
Os alunos devem instalar ou acessar de forma online o software no computador ou no celular.

Etapas para o desenvolvimento do experimento

Etapa 1 – Construção do ciclo trigonométrico

No menu superior escolha a opção círculo dado centro e raio. Posteriormente, selecione a origem do plano cartesiano e em seguida selecione o ponto 1 no eixo das abscissas (Figura 2).

Figura 2 – Construção do ciclo trigonométrico



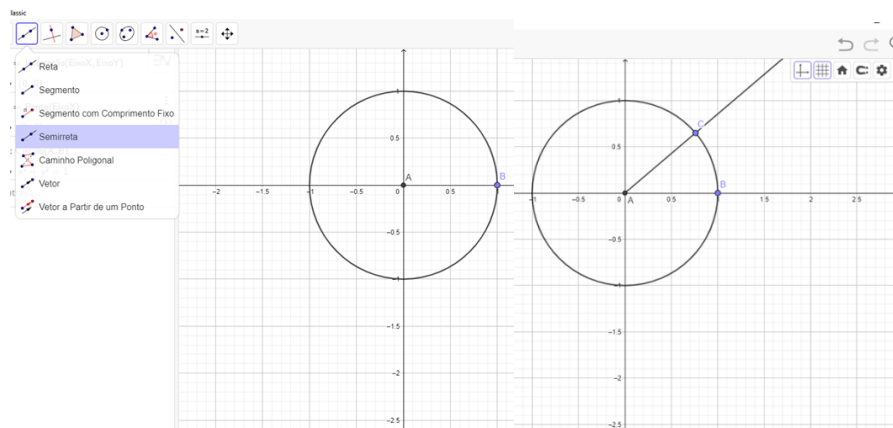
Fonte: Elaborado pelos autores.

Assim, finalizamos a construção do círculo trigonométrico.

Etapa 2 – Semirreta que parte da origem do plano e cruza a circunferência

No menu superior escolha a opção semirreta. Posteriormente, trace a semirreta de origem em A passando por um ponto C, conforme abaixo (Figura 3).

Figura 3 – Inserindo a semirreta que parte da origem do plano e cruza a circunferência

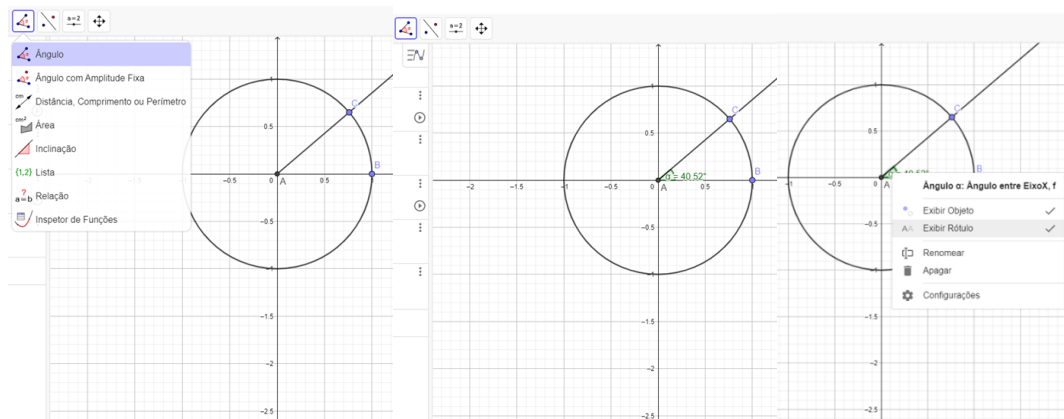


Fonte: Elaborado pelos autores.

Etapa 3 – Ângulo

No menu superior escolha a opção ângulo. Posteriormente, marque o ângulo formado pela semirreta S_{AC} e o eixo OX. Selecione o ângulo criado e desmarque a opção rótulo como abaixo (Figura 4).

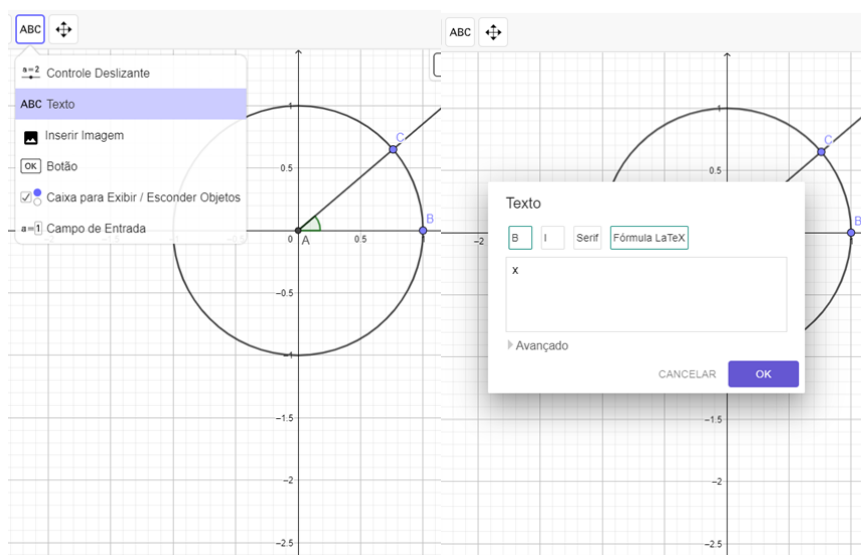
Figura 4 – Inserindo o ângulo



Fonte: Elaborado pelos autores.

No menu superior escolha a opção texto. Clique próximo do ângulo e na caixa de texto selecione fórmula LaTeX e B como abaixo digite “x” para nomearmos o ângulo. Posicione o “x” próximo do ângulo, como na Figura 5.

Figura 5 – Nomeando o ângulo

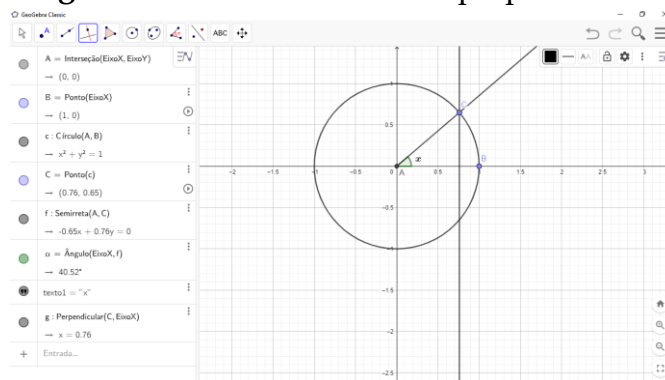


Fonte: Elaborado pelos autores.

Etapa 4 – $\text{Sen}(x)$ e $\text{Cos}(x)$

No menu superior escolha a opção reta perpendicular. Posteriormente, selecione o ponto C e na sequência o semieixo OX (Figura 6).

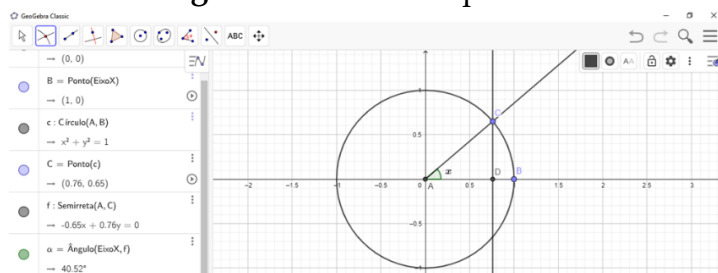
Figura 6 – Inserindo uma reta perpendicular



Fonte: Elaborado pelos autores.

No menu superior escolha a opção ponto de interseção de dois objetos. Em seguida, selecione a reta perpendicular à C e posteriormente o semieixo OX para criar o ponto D (Figura 7).

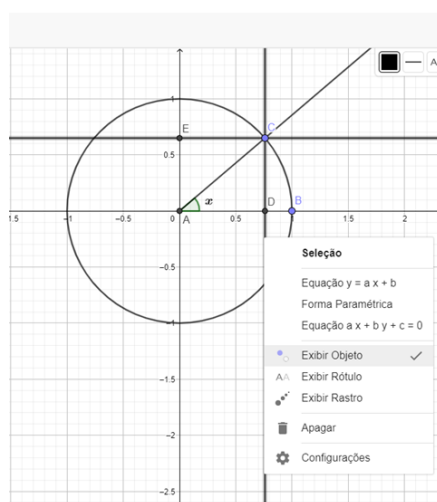
Figura 7 – Criando o ponto D



Fonte: Elaborado pelos autores.

Na sequência, de forma análoga marque o ponto E no semieixo OU. No menu superior selecione a opção mover. Posteriormente, segure a tecla Ctrl e selecione as duas retas paralela. Com botão direito desmarque a opção exibir objeto (Figura 8).

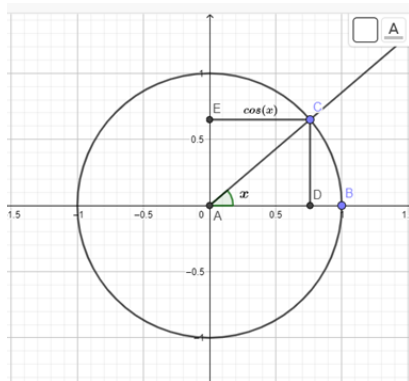
Figura 8 – Desmarcando a opção exibir objeto



Fonte: Elaborado pelos autores.

No menu superior selecione a opção segmento e posteriormente trace os segmentos DC e EC. No menu superior selecione a opção texto e digite $\cos(x)$ e posicione como abaixo (Figura 9).

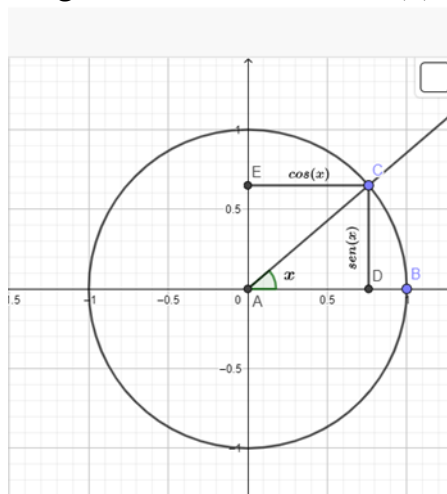
Figura 9 – Inserindo os seguimentos DC e EC



Fonte: Elaborado pelos autores.

No menu superior selecione a opção texto e digite $\sin(x)$. No menu de entrada digite a função “girar texto” e no campo texto digite texto3 e no campo ângulo digite 90° e posicione como abaixo. Por fim, desmarque a opção de exibir objeto do primeiro “ $\sin(x)$ ” digitado (Figura 10).

Figura 10 – Inserindo $\sin(x)$

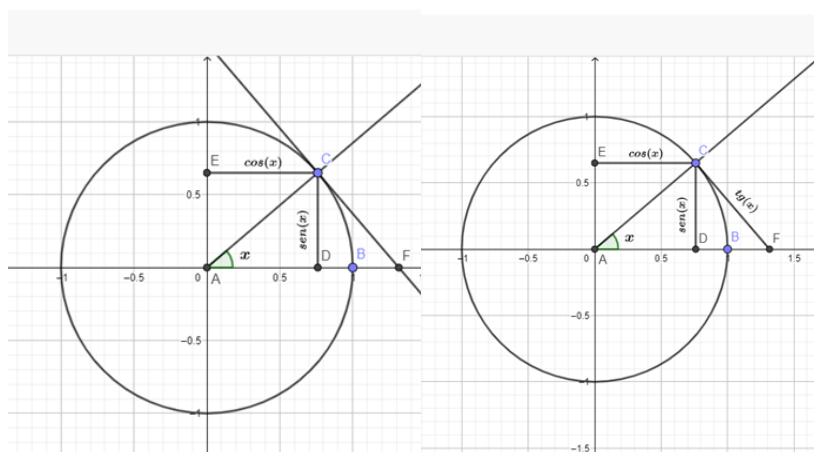


Fonte: Elaborado pelos autores.

Etapa 5 – $Tg(x)$

No menu superior selecione a opção reta tangente. Selecione o ponto C e o semieixo OX. Em seguida, marque o ponto de interseção da reta tangente com o semieixo OX. Desmarque a opção de exibir objeto da reta tangente. Em seguida, trace o segmento CF e o designe-o por $tg(x)$ e aplique a função girar no texto5, coloque o ângulo -45° . Por fim, desmarque a opção de exibir objeto do texto $tg(x)$ inicial como abaixo (Figura 11).

Figura 11 – Trabalhando com a reta tangente

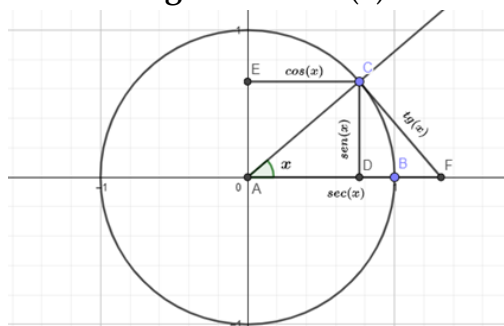


Fonte: Elaborado pelos autores.

Etapa 6 – $\sec(x)$

Trace o segmento AF e designe-o por $\sec(x)$ (Figura 12).

Figura 12 – $\sec(x)$

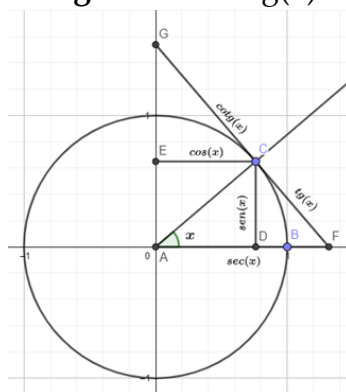


Fonte: Elaborado pelos autores.

Etapa 7 – $\cotg(x)$

No menu à esquerda selecione a reta tangente construída anteriormente e marque o ponto de interseção dela com o semieixo OY. Por fim, desmarque novamente a reta tangente e trace o segmento CG e designe-o por $\cotg(x)$ e repita o mesmo processo feito com o texto “tg(x)” para ajusta-lo (Figura 13).

Figura 13 – $\cotg(x)$

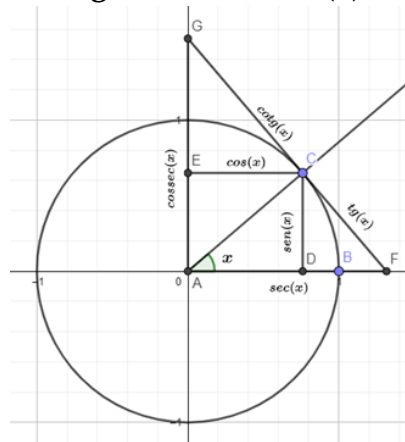


Fonte: Elaborado pelos autores.

Etapas 8 – Cossec(x)

Trace o segmento AG e designe-o por $\cossec(x)$ e gire 90° (Figura 14)

Figura 14 – Cossec(x)

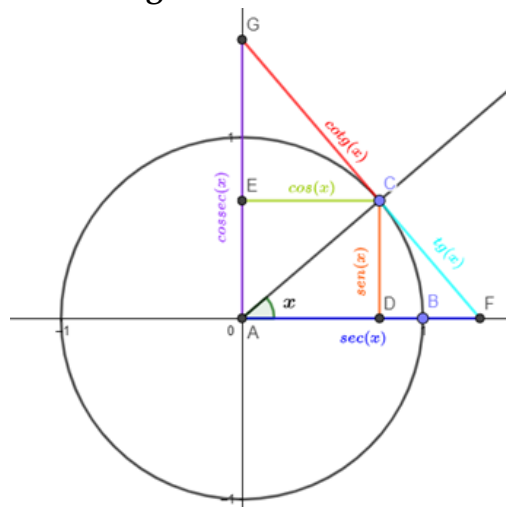


Fonte: Elaborado pelos autores.

Etapă 9 – Colorir

Mude a cor dos segmentos e dos seus respectivos nomes conforme queira. Para isso basta selecionar os objetos e na aba configuração mudar a cor (Figura 15).

Figura 15 – Colorido



Fonte: Elaborado pelos autores.

Etapa 10 – Relações

Demonstrar por meio de semelhança de triângulos as identidades trigonométricas.

Fechamento

No fechamento esperamos que os alunos não decorem as fórmulas, mas, sempre que necessário sejam capazes de deduzi-las e aplicá-las para resolução de problemas.

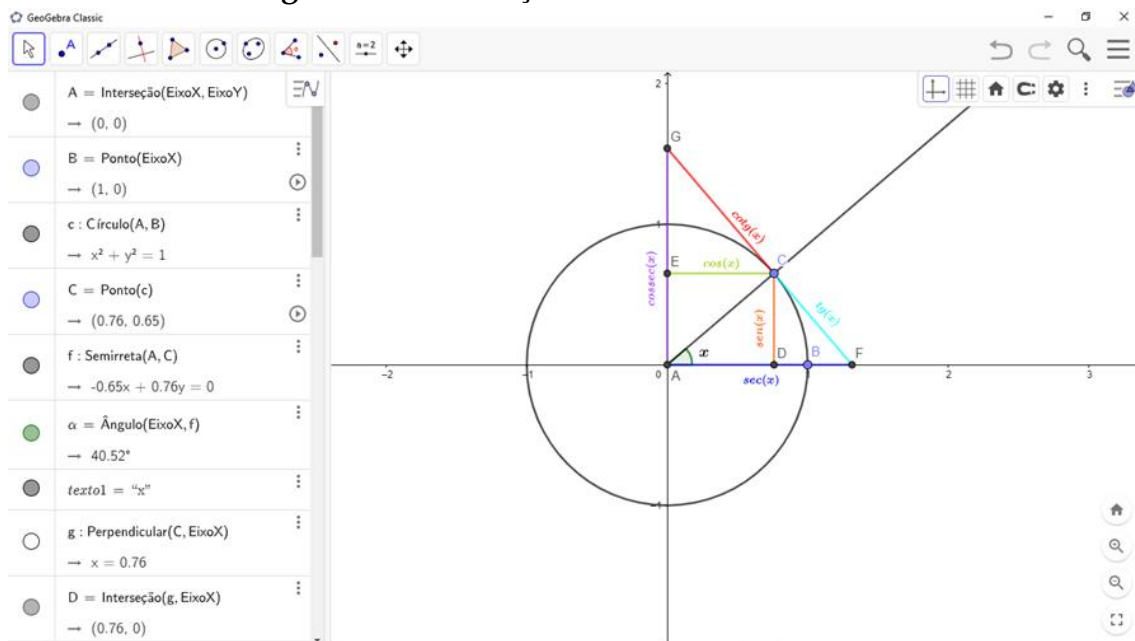
Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília, DF: MEC, 2018.

FOLHA DO ALUNO

Estudando funções trigonométricas por meio do GeoGebra

Figura 1 – Construção dinâmica no GeoGebra



Fonte: Elaborado pelos autores.

Comentários iniciais

A trigonometria é uma área da geometria plana euclidiana, que pode ser definida como a relação entre os ângulos e o comprimento dos lados de um triângulo. Esta auxiliou no avanço da ciência, é aplicada no estudo da física, dos astros, das navegações, dentre outras situações. É na trigonometria que encontramos as chamadas razões trigonométricas, ou relações trigonométricas, as quais relacionam dois lados de um triângulo a um ângulo do mesmo. Dentre as razões mais conhecidas estão inclusos o seno, cosseno e a tangente, além de outras razões que são obtidas em função destas, como a secante, a cossecante e a cotangente.

Cada uma dessas razões pode ser calculada por meio da sua fórmula ou da análise do círculo trigonométrico. Você saberia dizer quais são as fórmulas usadas para calcular essas razões? Quais fórmulas relacionam essas razões?

Apresentaremos uma nova forma de identificar as relações e identidades trigonométricas através do software GeoGebra possibilitando uma nova opção de aprendizagem do conteúdo sem a necessidade de decorar fórmulas.

Procedimento

Etapa 1 - Construção do Círculo trigonométrico

No menu superior escolha a opção círculo dado centro e raio. Posteriormente, selecione a origem do plano cartesiano e em seguida selecione o

ponto 1 no eixo das abscissas. Assim, finalizamos a construção do círculo trigonométrico

Etapa 2 – Semirreta que parte da origem do plano e cruza a circunferência

No menu superior escolha a opção semirreta. Posteriormente, trace a semirreta de origem em A passando por um ponto C.

Etapa 3 – Ângulo

No menu superior escolha a opção ângulo. Posteriormente, marque o ângulo formado pela semirreta S_{AC} e o eixo OX. Selecione o ângulo criado e desmarque a opção rótulo. No menu superior escolha a opção texto. Clique próximo do ângulo e na caixa de texto selecione fórmula LaTeX e B, digite “x” para nomearmos o ângulo. Posicione o “x” próximo do ângulo.

Etapa 4 – $\text{Sen}(x)$ e $\text{Cos}(x)$

No menu superior escolha a opção reta perpendicular. Posteriormente, selecione o ponto C e posteriormente o semieixo OX. No menu superior escolha a opção ponto de interseção de dois objetos. Em seguida, selecione a reta perpendicular a C e posteriormente o semieixo OX para criar o ponto D. De forma análoga marque o ponto E no semieixo OU. No menu superior selecione a opção mover. Posteriormente, segure a tecla Ctrl e selecione as duas retas paralela. Com o botão direito desmarque a opção exibir objeto. No menu superior selecione a opção segmento e posteriormente trace os segmentos DC e EC. No menu superior selecione a opção texto e digite $\cos(x)$. No menu superior selecione a opção texto e digite $\sin(x)$. No menu de entrada digite a função “girar texto” e no campo texto digite texto3 e no campo ângulo digite 90° e posicione como abaixo. Por fim, desmarque a opção de exibir objeto do primeiro “ $\sin(x)$ ” digitado.

Etapa 5 – $\text{tg}(x)$

No menu superior selecione a opção reta tangente. Selecione o ponto C e o semieixo OX. Em seguida, marque o ponto de interseção da reta tangente com o semieixo OX. Desmarque a opção de exibir objeto da reta tangente. Em seguida, trace o segmento CF e o designe-o por $\text{tg}(x)$ e aplique a função girar no texto5, coloque o ângulo -45° . Por fim, desmarque a opção de exibir objeto do texto $\text{tg}(x)$.

Etapa 6 – $\sec(x)$

Trace o segmento AF e designe-o por $\sec(x)$.

Etapa 7 – $\cotg(x)$

No menu à esquerda selecione a reta tangente construída anteriormente e marque o ponto de interseção dela com o semieixo OY. Por fim, desmarque novamente a reta tangente e trace o segmento CG e designe-o por $\cotg(x)$ e repita o mesmo processo feito com o texto “ $\text{tg}(x)$ ” para ajusta-lo.

Etapa 8 – $\text{Cossec}(x)$

Trace o segmento AG e designe-o por $\text{cossec}(x)$ e gire 90° .

Etapa 9 – Colorir

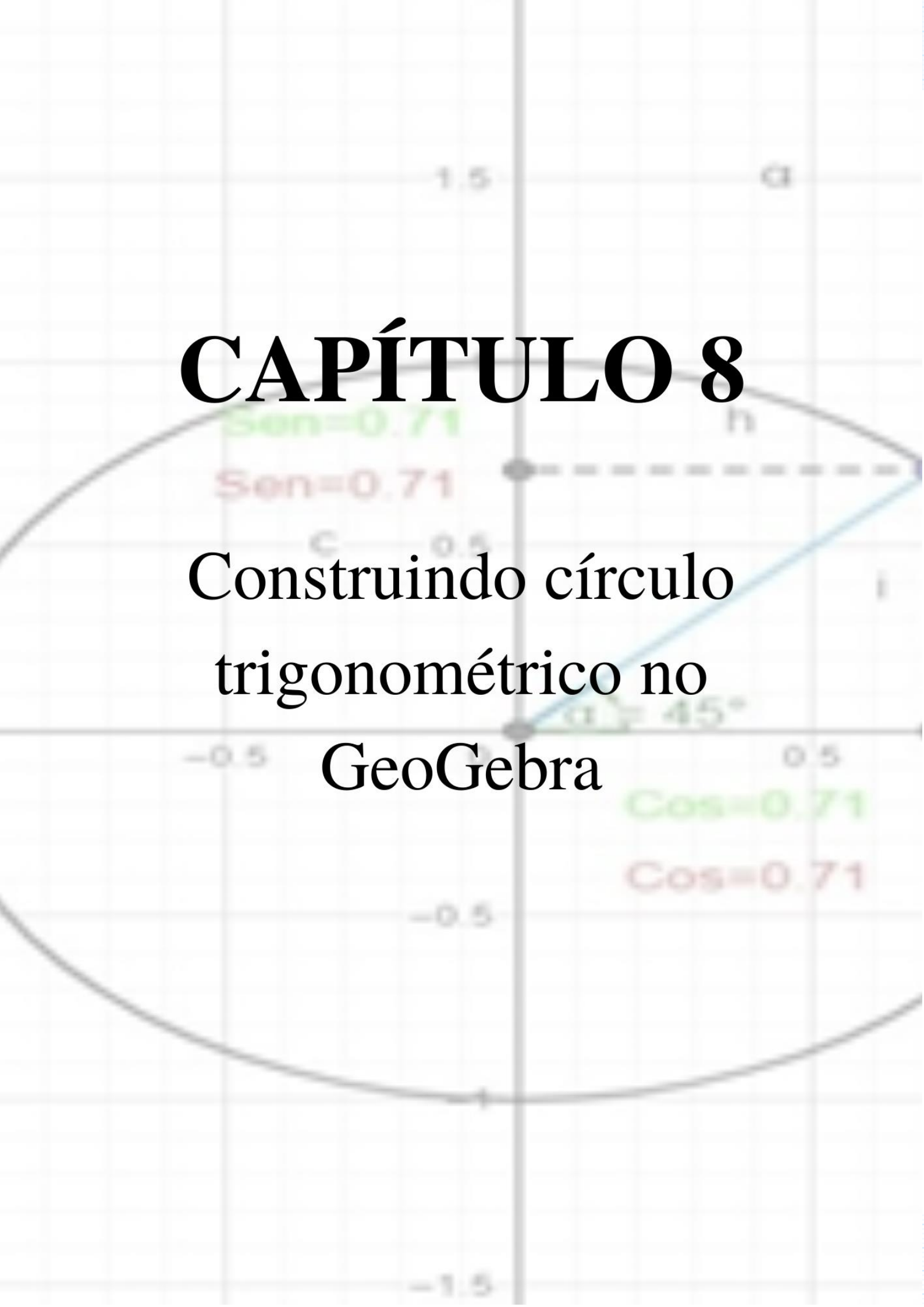
Mude a cor dos segmentos e dos seus respectivos nomes conforme queira. Para isso basta selecionar os objetos e na aba configuração mudar a cor.

Etapa 10 – Relações

Demonstrar por meio de semelhança de triângulos as identidades trigonométricas.

CAPÍTULO 8

Construindo círculo trigonométrico no GeoGebra



CAPÍTULO 8

Construindo círculo trigonométrico no GeoGebra

Karlos Santhiago de Melo Madeiro

Audrey Stephanie de Oliveira Gomes

Luiza Maria Moraes Lima⁵

INTRODUÇÃO

O círculo trigonométrico, também chamado de ciclo ou circunferência trigonométrica, é uma representação gráfica que auxilia no cálculo das razões trigonométricas. De acordo com a simetria do círculo trigonométrico temos que o eixo vertical corresponde a seno, o eixo horizontal ao cosseno e a medida da tangente de um ângulo no círculo trigonométrico é definida a partir de uma reta tangente ao círculo trigonométrico, paralelo ao eixo y.

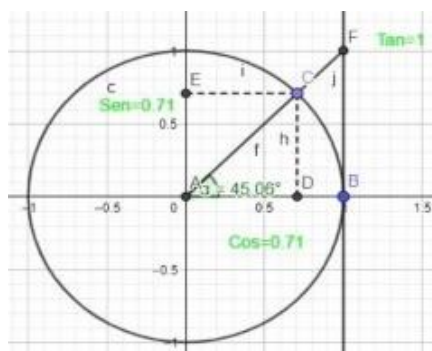
O círculo trigonométrico é uma circunferência de raio 1 usada para representar números reais relacionados a ângulos. Sendo assim, cada ponto desta circunferência está relacionado a um número real que, por sua vez, representa um ângulo. Assim, é possível representar também valores de seno, cosseno e tangente.

O centro desse círculo está sobre o ponto $O = (0,0)$ do plano cartesiano e, como o raio dele mede 1, podemos calcular seu comprimento. O círculo trigonométrico vai de um intervalo de 0° a 360° , os quais são divididos em 4 quadrantes, os quadrantes são definidos no sentido anti-horário tendo números reais para determinar seus ângulos. No primeiro quadrante teremos o intervalo de 0° a 90° , no segundo de 90° a 180° , no terceiro de 180° a 270° e no quarto quadrante teremos de 270° a 360° .

GUIA DO PROFESSOR

Material didático manipulável

Figura 1 – Construção dinâmica no GeoGebra do Círculo Trigonométrico



Fonte: Elaborado pelos autores.

⁵ A professora Ma. Luiza Maria Moraes Lima participa desse trabalho contribuindo como professora que orientou a referida prática dos discentes.

Elementos que norteiam a prática

Quadro 1 – Resumo da prática

Série/Ano	9º ano do Ensino Fundamental	
Unidade temática	Geometria	
Objeto de conhecimento	Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo.	
Habilidade	(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica (BRASIL, 2018, p. 317).	
Objetivos	Docente	Trabalhar a construção de um círculo trigonométrico e os conceitos envolvidos.
	Aluno	• Construir um círculo trigonométrico; • Identificar o seno, cosseno e tangente de um ângulo, e conseguir verificar se é positivo ou negativo em seus respectivos quadrantes; e • Manipulação do GeoGebra.
Materiais necessários	Para a realização do experimento é necessário que o professor esteja com os seguintes materiais disponíveis aos alunos: 1) Software GeoGebra; e 2) Folha do aluno.	
Conhecimentos prévios	Noções do que é quadrante no círculo trigonométrico e das funções seno, cosseno e tangente.	
Duração	1 hora/aula	

Fonte: Elaborado pelos autores.

Aspectos gerais do experimento

Sinopse

Construir um círculo trigonométrico e com um experimento descobrir se o seno, cosseno e tangente é positivo ou negativo em determinado quadrante.

O experimento

Para construir o círculo trigonométrico e conhecer onde encontrar os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos, realizaremos essa construção no GeoGebra online que é bem fácil de localizar no link em seguida: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT ou com o software instalado no seu computador ou aplicativo para celular.

Preparação

Todos os alunos devem ter instalado o software no computador ou no celular, ou com o GeoGebra em pronto controle, para que a prática possa ser iniciada.

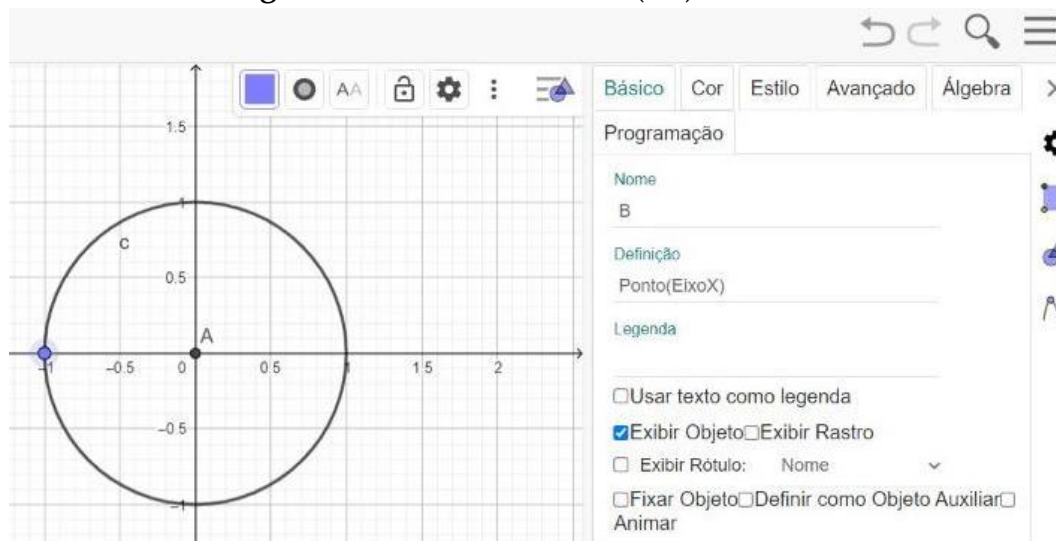
Etapas para o desenvolvimento do experimento

Etapa 1 – Construir o círculo trigonométrico

1º Passo: Construir um círculo trigonométrico de centro $(0,0)$ e de raio 1. Procure nos botões superior esquerdo o botão círculo dado centro e um de seus pontos. Em seguida, clique no centro dos eixos e arraste até o número 1.

Oculte os rótulos clicando com o botão direito. Em seguida, clique em exibir rótulos, faça isso clicando em cima da circunferência, no ponto A e antes de ocultar o rótulo do ponto B fixe esse ponto (Para fixa o ponto B, clique com o botão direito em cima do ponto B, vá em configurações e procure fixar objeto no lado direito da tela e em seguida desmarque a opção exibir rótulo) (Figura 2).

Figura 2 – Círculo de centro $(0,0)$ e de raio 1

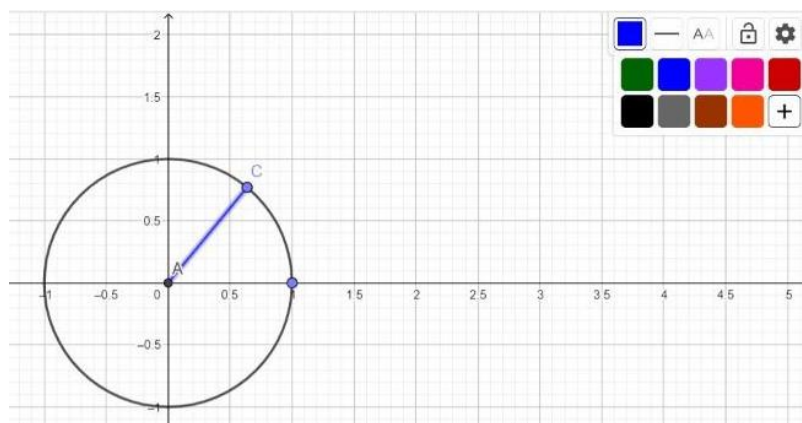


Fonte: Elaborado pelos autores.

2º Passo: Insira um ponto na circunferência. Novamente no botão superior esquerdo procure o botão ponto. Em seguida, leve seu mouse para qualquer lugar da circunferência e dê um clique.

3º Passo: Crie um segmento OC. Dentre os botões superior esquerdo procure o botão segmento, em seguida clique no centro O e clique no ponto C. Clique no segmento que construiu e oculte o rótulo. (Caso queira modificar a cor, clique com o botão esquerdo em cima do segmento, na aba esquerda procure por cor e selecione a cor que desejar) (Figura 3).

Figura 3 – Círculo com o segmento OC



Fonte: Elaborado pelos autores.

4º Passo: Insira o ângulo

Nos botões esquerdos procure o botão ângulo. Em seguida, dê um clique no segmento horizontal (eixo X), e depois dê um clique no segmento OC. Após criar esse ângulo oculte o ponto C.

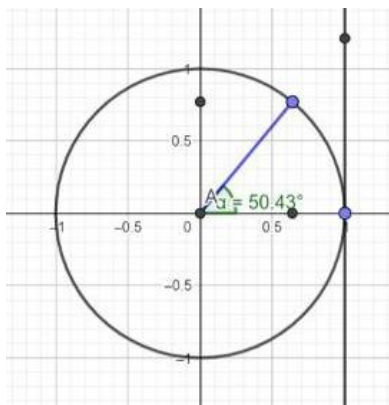
5º Passo: Insira o eixo da tangente

Na aba esquerda superior encontre o botão **reta perpendicular** e selecione, dê um clique com o botão esquerdo do mouse no ponto B e em seguida no eixo X, posteriormente oculte o eixo da tangente.

6º Passo: Insira os pontos de projeções das funções seno, cosseno e tangente
Função cosseno: na aba entrada digite o comando $(x(C),0)$, clique em enter. Função seno: na aba entrada digite o seguinte comando $(0,y(C))$, e aperte enter.

Função tangente: para conseguir o ponto de projeção da tangente siga esses passos. Vá na aba esquerda no canto superior e procure o botão texto, clique em qualquer lugar da malha, depois clique em avançado, em seguida procure a letra α clicando no botão vizinho ao botão Fórmula LaTeX. Ao clicar em α , selecione-o e em seguida selecione e copie, para que seja colado sempre que necessário. Feito isso digite o comando $(1, \tan(\text{cole aqui o } \alpha))$ e aperte enter. Em seguida, oculte os rótulos. Lembre-se que sempre que quiser o α , aperte (CTRL+V) (Figura 4).

Figura 4 – Círculo com os pontos de projeção das funções trigonométricas



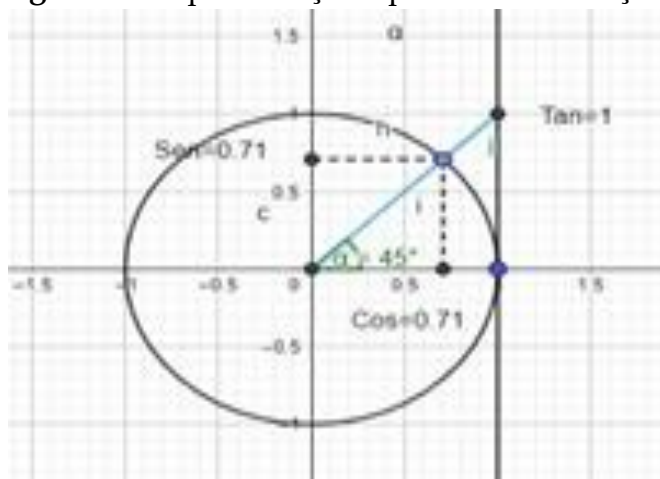
Fonte: Elaborado pelos autores.

7º Passo: Crie os segmentos CD, CE e CF. Com o botão segmento, dê um clique no ponto C, em seguida um clique no ponto D, faça o mesmo clicando no ponto C em seguida no ponto E. Oculte os pontos e depois trace esses segmentos, clique no segmento na aba direita e procure o botão estilo. Em seguida, clique no terceiro traço e oculte os rótulos desses segmentos. Agora em segmento clique no ponto C, em seguida clique no ponto F, clique no segmento CF e na aba direita vá no botão cor e deixe com a mesma cor do segmento OC, e o oculte também.

8º Passo: insira comandos para representar os valores das funções. Função seno: na aba entrada digite o seguinte comando "Sen =" + $\sin(\alpha)$, clique em enter. Função cosseno: Na aba entrada digite o seguinte comando "Cos =" + $\cos(\alpha)$, clique em enter. Função tangente: na aba entrada digite o comando "Tan =" + $\tan(\alpha)$, e em seguida clique em enter.

Agora clique nos comandos da barra esquerda, e selecione os círculos referente às funções. Clique em cima dos valores obtidos, na aba direita procure o botão posição, na opção origem selecione o botão respectivo ao valor desejado e posicione. Para que ao movimentar o ponto C, os valores sigam as projeções (Figura 5).

Figura 5 – Representação a partir das instruções



Fonte: Elaborado pelos autores.

9º Passo: para finalizar modifique as cores dos valores para diferenciar quando as funções estiverem positivas ou negativas nos seus quadrantes. Clique nos valores obtidos, e na barra direita selecione o botão cor, e clique na cor verde. Agora na barra esquerda nas funções seno, cosseno e tangente, clique nos três pontos e selecione duplicar entrada. Em seguida selecione e posicione os valores conforme o 8º passo.

Clique nos valores obtidos, e na barra direita selecione o botão cor, e clique na cor vermelha. Agora clique em cima dos valores obtidos, na aba direita procure o botão posição, na opção origem selecione o botão respectivo ao valor desejado e posicione. Para que ao movimentar o ponto C, os valores sigam as projeções.

Para os valores na cor verde faça os seguintes procedimentos:

Função Seno: Clique no valor referente ao sen, na barra direita clique no botão avançado em condição para exibir objeto(s), digite o seguinte comando $y(E) > 0$.

Função Cosseno: Clique no valor referente ao cos, na barra direita clique no botão avançado em condição para exibir objeto(s), digite o seguinte comando $x(D) > 0$.

Função tangente: Clique no valor referente ao tan, na barra direita clique no botão avançado em condição para exibir objeto(s), digite o seguinte comando $\tan(\alpha) > 0$.

Para valores na cor vermelho, faça os seguintes procedimentos:

Função Seno: Clique no valor referente ao sen, na barra direita clique no botão avançado em condição para exibir objeto(s), digite o seguinte comando $y(E) < 0$.

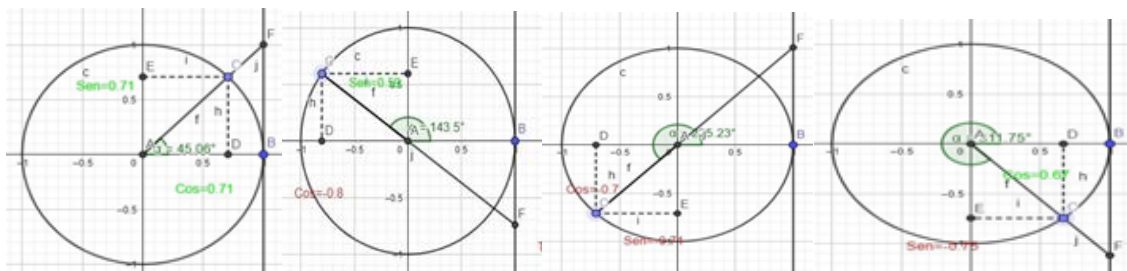
Função Cosseno: Clique no valor referente ao cos, na barra direita clique no botão avançado em condição para exibir objeto(s), digite o seguinte comando $x(D) < 0$.

Função tangente: Clique no valor referente ao tan, na barra direita clique no botão avançado em condição para exibir objeto(s), digite o seguinte comando $\tan(\alpha) < 0$.

Etapa 2 - Verificar os quadrantes e identificar onde cada função é positivo ou negativo

Coloque o ponto C no 1º quadrante, posteriormente no segundo, no terceiro e no quarto, assim como indicado na imagem a seguir (Figura 6).

Figura 6 – Representação de movimentação do ponto C



Fonte: Elaborado pelos autores.

Fechamento

Consideramos fundamental que no fechamento desta atividade os alunos entendam a construção que lhes foi apresentada e que não apenas decore o assunto proposto. Para alunos que já estiverem familiarizados com construções no GeoGebra, esta atividade mostrará uma aplicação interessante e contextualizada destas ferramentas. Que o professor discuta com os alunos sobre a experiência da manipulação no software e sobre o conteúdo abordado.

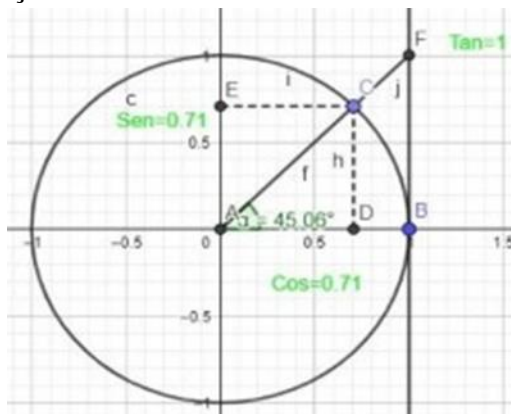
Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Ensino Médio. Brasília, DF: MEC, 2018.

FOLHA DO ALUNO

Construindo círculo trigonométrico no GeoGebra

Figura 1 – Construção dinâmica no GeoGebra do Círculo Trigonométrico



Fonte: Elaborado pelos autores.

Comentários iniciais

O círculo trigonométrico, também chamado de ciclo ou circunferência trigonométrica, é uma representação gráfica que auxilia no cálculo das razões trigonométricas. De acordo com a simetria do círculo trigonométrico temos que o eixo vertical corresponde ao seno, o eixo horizontal ao cosseno e a medida da tangente de um ângulo no círculo trigonométrico é definida a partir de uma reta tangente ao círculo trigonométrico, paralelo ao eixo y.

O círculo trigonométrico é uma circunferência de raio 1 usada para representar números reais relacionados a ângulos. Sendo assim, cada ponto desta circunferência está relacionado a um número real, que, por sua vez, representa um ângulo. Assim, é possível representar também valores de seno, cosseno e tangente.

O centro desse círculo está sobre o ponto $O = (0,0)$ do plano cartesiano e, como o raio dele mede 1, podemos calcular seu comprimento. O círculo trigonométrico vai de um intervalo de 0° a 360° , que são divididos em 4 quadrantes, os quadrantes são definidos no sentido anti-horário tendo números reais para determinar seus ângulos. No primeiro quadrante teremos o intervalo de 0° a 90° , no segundo de 90° a 180° , no terceiro de 180° a 270° e no quarto quadrante teremos de 270° a 360° .

Procedimento

Etapa 1 - Construí o Círculo trigonométrico

1º PASSO: Construir um círculo trigonométrico de centro $(0,0)$ e de raio 1. Procure nos botões superior esquerdo o botão círculo do centro e um de seus pontos. Em seguida, clique no centro dos eixos e arraste até o número 1. Oculte os rótulos clicando com o botão direito. Em seguida, clique em exibir rótulos, faça

isso clicando em cima da circunferência, no ponto A e antes de ocultar o rótulo do ponto B fixe esse ponto (Para fixar o ponto B, clique com o botão direito em cima do ponto B, vá em configurações e procure fixar objeto no lado direito da tela e em seguida desmarque a opção exibir rótulo).

2º PASSO: Insira um ponto na circunferência. Novamente no botão superior esquerdo e procure o botão ponto, em seguida leve seu mouse para qualquer lugar da circunferência e dê um clique.

Etapa 2

Conforme o que foi apresentado na construção do gráfico do círculo trigonométrico, solicitamos que identifiquem os elementos geométricos, tais como: o ponto de origem da circunferência; o raio da circunferência; os catetos e a hipotenusa que o constituem e suas localizações; e a quantidade de quadrantes e os valores (positivo ou negativo) de (x, y) em cada um deles. Em seguida, calculamos o seno, cosseno e a tangente do ângulo formado.

CAPÍTULO 9

Trigonometria na prática
utilizando o Vicmetro



CAPÍTULO 9

Trigonometria na prática utilizando o Vicmetro

Werther Xisto Cardoso

José Edson Euzebio Neto

INTRODUÇÃO

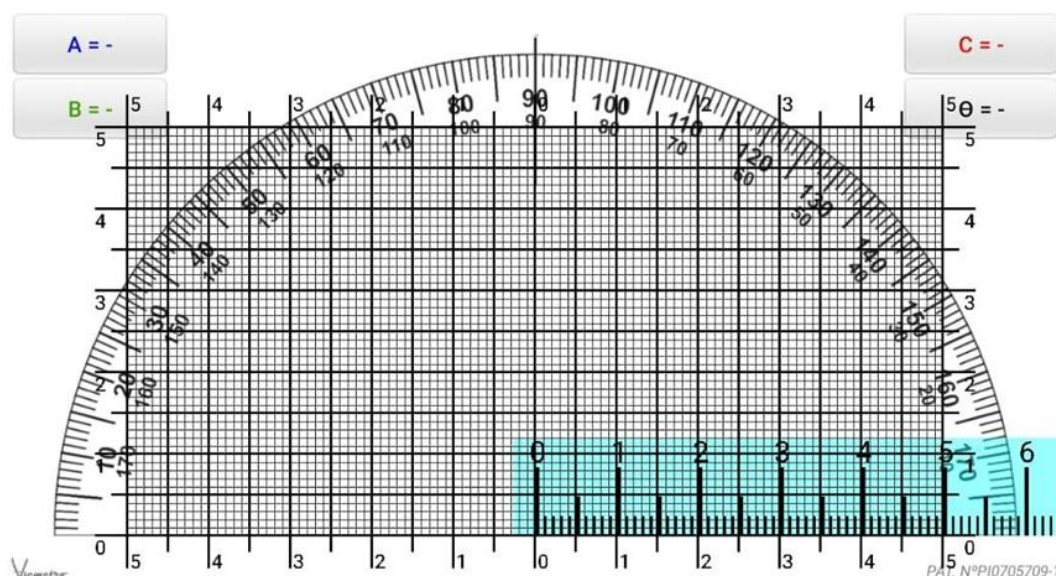
Os materiais manipuláveis didáticos podem ser de grande ajuda para que os alunos saiam do campo da abstração e entendam os assuntos abordados em sala de aula de forma prática. O Vicmetro pode ser apresentado como um material manipulável, apesar de não ter sido criado com essa intenção, pode ser explorado nas aulas de matemática. Através de atividades, será mostrado como este aparelho, capaz de auferir medidas, pode auxiliar na fixação de conceitos como razões trigonométricas.

O conteúdo de razões trigonométricas é de grande importância para os alunos do ensino fundamental e médio, pois além de conteúdo obrigatório, é muito importante na resolução de problemas que podem aparecer diariamente envolvendo medidas de distância. Para repassar este conteúdo, a utilização de material concreto pode ser de grande auxílio, já que muitas vezes tal conteúdo é tratado de forma abstrata pelos docentes. Com o Vicmetro, o aluno poderá ter uma visão mais concreta desse conteúdo.

GUIA DO PROFESSOR

Material didático manipulável

Figura 1 – Vicmetro



Fonte: Elaborado pelos autores.

Elementos que norteiam a prática

Quadro 1 – Resumo da prática

Série/Ano		2º ano do Ensino Médio
Unidade temática		Geometria
Objeto de conhecimento		Conhecimentos de razões trigonométricas no triângulo retângulo.
Habilidade		(EM13MAT308) Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança (BRASIL, 2018, p. 529).
Objetivos	Docente	Demonstrar o funcionamento do Vicmetro para ajudar o aluno no encontro de razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) no triângulo retângulo.
	Aluno	Compreender conceitos de razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) a partir do uso do Vicmetro.
Materiais necessários		Para a realização do experimento é necessário que o professor esteja com os seguintes materiais disponíveis aos alunos: 1) Smartphone; 2) Aplicativo do Vicmetro; 3) Tabela trigonométrica; e 4) Folha do aluno.
Conhecimentos prévios		Noções sobre as Razões trigonométricas (Seno, Cosseno e Tangente) e de transformações de grandezas numéricas.
Duração		1 hora/aula

Fonte: Elaborado pelos autores.

Aspectos gerais do experimento

Sinopse

Neste experimento, os alunos serão apresentados a um aparelho que vai auxiliá-los na aferição de medidas e ângulos. Com medição, terão maior facilidade de encontrar as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente).

O experimento

Para determinar as razões trigonométricas com auxílio do Vicmetro, basta que seja apresentado o funcionamento do aparelho e que o conhecimento de razões trigonométricas já tenha sido visto anteriormente. Dessa forma, iremos fazer uma atividade, que deve ser resolvida com o Vicmetro, para fixar o conteúdo de razões trigonométricas.

Preparação

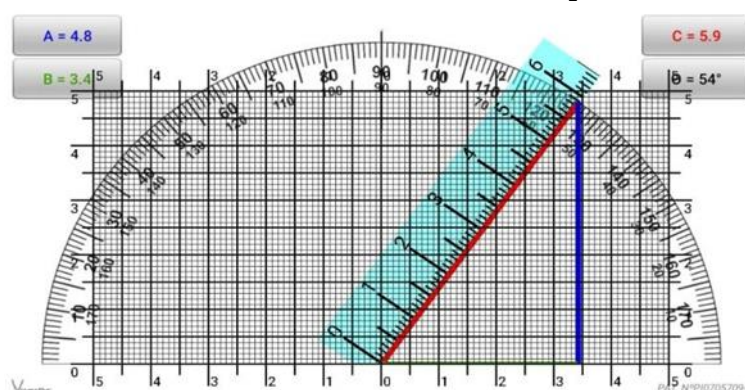
Primeiramente, o professor deve solicitar aos alunos que baixem o aplicativo do Vicmetro no link disponibilizado na folha do aluno. Após o download ele poderá iniciar a prática.

Etapas para o desenvolvimento do experimento

Etapa 1

Inicialmente, o professor pode explicar o funcionamento do Vicmetro, movendo a régua virtual, como observamos na imagem abaixo em que a régua foi movida e formou um triângulo de catetos $A=4,8$, $B=3,4$ e hipotenusa $C=5,9$. Também formou um ângulo de 54° (Figura 2).

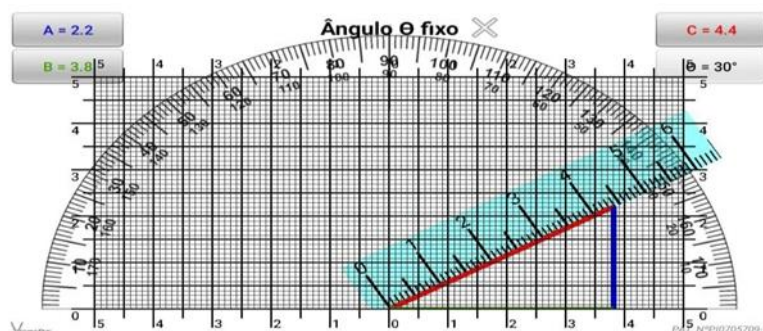
Figura 2 – Uma amostra do funcionamento do aplicativo do Vicmetro



Fonte: Elaborado pelos autores.

O professor também pode mostrar aos alunos uma função do aplicativo do Vicmetro, que consiste em fixar um lado do triângulo ou um ângulo para auxiliar na conferência dos cálculos (Figura 3).

Figura 3 – Foi fixado o ângulo de 30° , para que possa ser encontrado variados triângulos que possuem este ângulo



Fonte: Elaborado pelos autores.

Etapa 2

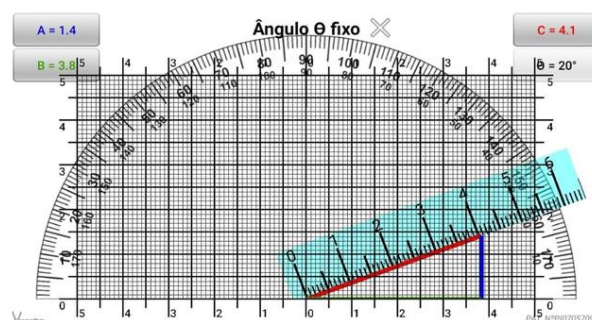
Após a explicação do Vicmetro, o professor deve solicitar aos alunos que formem grupos de até 3 componentes, para que possam iniciar a prática laboratorial.

Etapa 3

Exercício 1 - Construa triângulos com o Vicmetro e encontre os seguintes valores:

Seno de 20°; Resolução: Com auxílio do Vicmetro, formamos um triângulo que possui um ângulo de 20°, que tem Cateto Oposto (A) = 1,4, Cateto Adjacente (B) = 3,8 e a Hipotenusa (C) = 4,1 (Figura 4).

Figura 4 – Representação da aferição



Fonte: Elaborado pelos autores.

Após a aferição, vamos calcular o seno 20°:

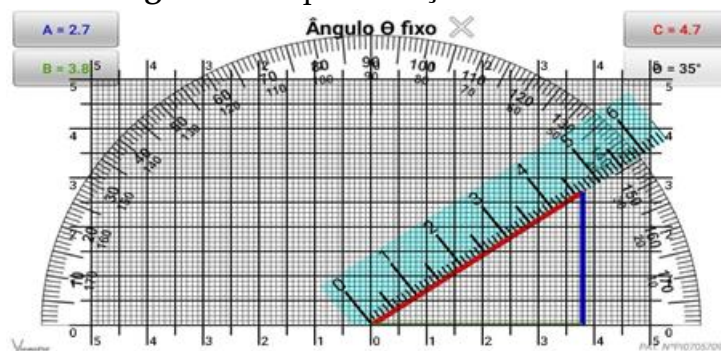
$$\text{Seno } 20^\circ = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{1,4}{4,1} = 0,3414$$

Quando conferimos na tabela trigonométrica, observamos que o valor é muito próximo: tabela trigonométrica – Seno de 20° = 0,3420.

Os alunos poderão encontrar outros triângulos, e encontrar o seno de 20° próximo ao valor acima.

Seno de 35°; Resolução: com auxílio do Vicmetro, fixando o ângulo de 35°, formamos o triângulo com as seguintes medidas (Figura 5):

Figura 5 – Representação da medida



Fonte: Elaborado pelos autores.

Cateto Oposto (A) = 2,7, Cateto Adjacente (B) = 3,8 e Hipotenusa (C) = 4,7.

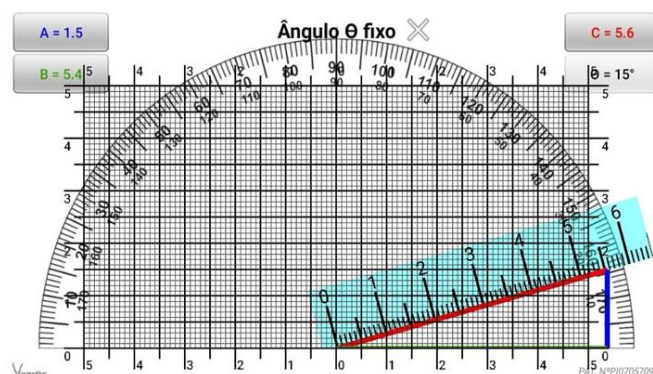
Após aferição, vamos calcular o seno de 35°:

$$\text{Seno } 35^\circ = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{2,7}{4,7} = 0,5744$$

Quando conferimos na tabela trigonométrica, o valor encontrado é Seno de $35^\circ = 0,5736$. Os alunos poderão encontrar outros triângulos e determinar o seno de 35° próximo ao valor acima.

Cosseno de 15° . Resolução: utilizando o Vicmetro, fixando o ângulo de 15° , encontramos o triângulo abaixo (Figura 6):

Figura 6 – Representação da medida



Fonte: Elaborado pelos autores.

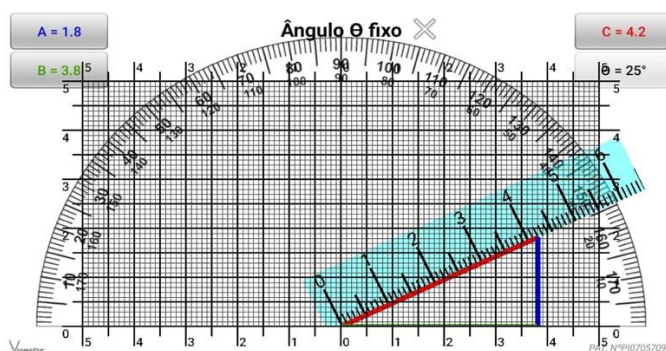
As medidas do triângulo foram: Cateto Oposto (A) = 1,5, Cateto Adjacente (B) = 5,4 e Hipotenusa (C) = 5,6. Após a aferição, vamos calcular o cosseno de 15° :

$$\cos 15^\circ = \frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{5,4}{5,6} = 0,9642$$

Quando conferimos na tabela trigonométrica, o valor encontrado é: Tabela Trigonométrica – Cosseno de $15^\circ = 0,9659$. Os alunos poderão encontrar outros triângulos, e encontraram o cosseno de 15° próximo ao valor acima.

Cosseno de 25° . Resolução: utilizando o Vicmetro, fixando o ângulo de 25° , encontramos o triângulo abaixo (Figura 7):

Figura 7 – Representação da medida



Fonte: Elaborado pelos autores.

As medidas do triângulo foram:

Cateto Oposto (A) = 1,8, Cateto Adjacente (B) = 3,8 e Hipotenusa (C) = 4,2.

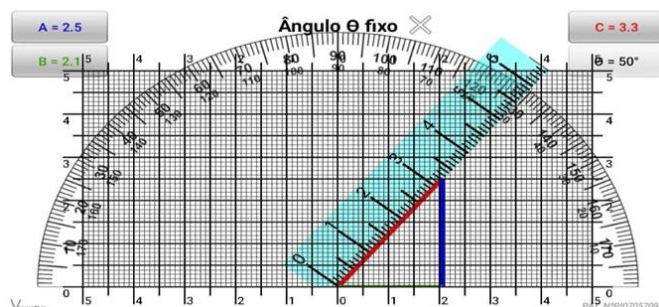
Após a aferição, vamos calcular o cosseno de 25° :

$$\cos 25^\circ = \frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{3,8}{4,2} = 0,9047$$

Quando conferimos na tabela trigonométrica, o valor encontrado é cosseno de $25^\circ = 0,9063$. Os alunos poderão encontrar outros triângulos, e encontraram o cosseno de 25° próximo ao valor acima.

Tangente de 50° . Utilizando o Vicmetro, fixando o ângulo de 50° , encontramos o triângulo abaixo (Figura 8):

Figura 8 – Representação da medida



Fonte: Elaborado pelos autores.

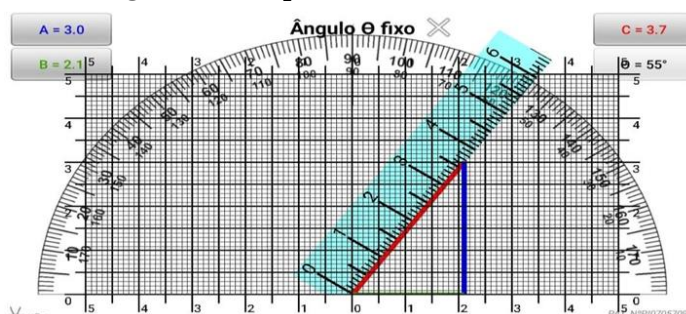
As medidas do triângulo foram: Cateto Oposto (A) = 2,5, Cateto Adjacente (B) = 2,1 e Hipotenusa (C) = 3,3. Após a aferição, vamos calcular o tangente de 50° :

$$\text{Tg } 50^\circ = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto adjacente}} = \frac{2,5}{2,1} = 1,1904$$

Quando conferimos na tabela trigonométrica, o valor encontrado é: Tabela Trigonométrica – Tangente de $50^\circ = 1,1918$. Os alunos poderão encontrar outros triângulos, e encontraram a tangente de 50° próximo ao valor acima.

Tangente de 55° . Utilizando o Vicmetro, fixando o ângulo de 50° , encontramos o triângulo abaixo (Figura 9):

Figura 9 – Representação da medida



Fonte: Elaborado pelos autores.

As medidas do triângulo foram: Cateto Oposto (A) = 3,0, Cateto Adjacente (B) = 2,1 e Hipotenusa (C) = 3,7. Após a aferição, vamos calcular o tangente de 55° :

$$\text{Tg } 55^\circ = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto adjacente}} = \frac{3,0}{2,1} = 1,4285$$

Quando conferimos na tabela trigonométrica, o valor encontrado é tangente de $55^\circ = 1,4281$. Os alunos poderão encontrar outros triângulos, e encontraram a tangente de 55° próximo ao valor acima.

2- Preencha o quadro abaixo com valores encontrados e compare com os outros grupos, para saber quem se aproximou mais dos valores da tabela trigonométrica (Quadro 02).

Quadro 2 – Resumo dos valores encontrados

Razões trigonométricas	Valores encontrados	Valores da tabela trigonométrica
Seno de 20°	0,3420	0,3414
Seno de 35°	0,5744	0,5736
Cosseno de 15°	0,9642	0,9659
Cosseno de 25°	0,9047	0,9063
Tangente de 50°	1,1904	1,1918
Tangente de 55°	1,4285	1,4281

Fonte: Elaborado pelos autores.

Variação

Como variação, sugerimos que o professor, ao invés de usar o aplicativo do Vicmetro, produza seu próprio aparelho com material concreto. Ele pode utilizar diversos materiais para produzir o Vicmetro. Poderá fazer alguns vicmetros e dividir a sala em grupos, para que os alunos possam realizar a prática de forma cooperativa. Com aparelhos, os alunos podem encontrar as razões trigonométricas de outros ângulos.

Fechamento

Para o fechamento desta prática, a sugestão é que o professor mostre como o Vicmetro pode ser usado, de forma prática, na indústria, por exemplo, já que o Vicmetro foi criado com intuito de ser utilizado no mercado de trabalho. Pode-se ainda sistematizar os conceitos trigonométricos mobilizados durante a prática.

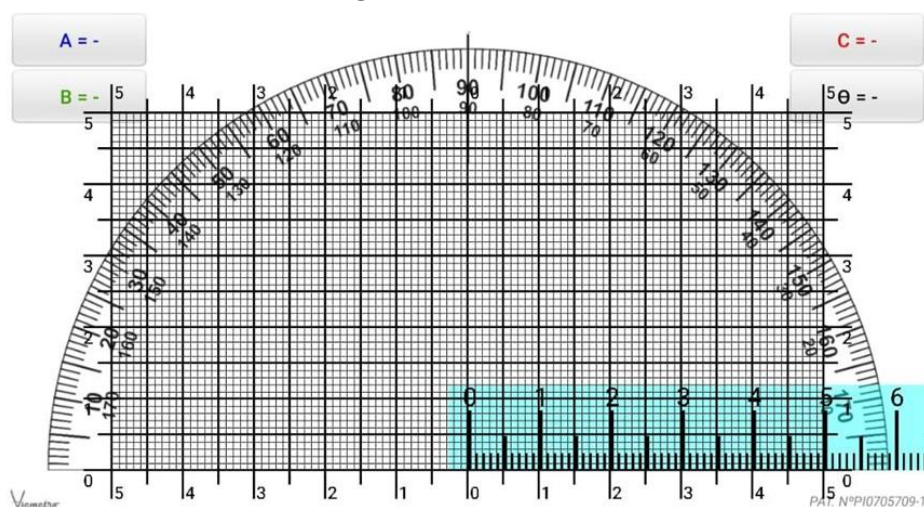
Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília, DF: MEC, 2018.

FOLHA DO ALUNO

Trigonometria na prática utilizando o Vicmetro

Figura 1 – Vicmetro



Fonte: Elaborado pelos autores.

Comentários iniciais

Para determinar o seno, o cosseno e a tangente do ângulo de um triângulo, precisamos pelo menos de dois lados desse triângulo ou um lado desse triângulo e um de seus ângulos. Nesta prática, através de exercícios, iremos aprender a utilizar um instrumento que vai facilitar a visualização dessas razões trigonométricas. Esse aparelho, de nome Vicmetro, segundo seu criador, Vicente Parra Filho, é um aparato tecnológico de medição e aferição de ângulos, assim como de catetos, hipotenusa e cálculos trigonométricos. Ele possibilita a leitura direta dos elementos matemáticos, ou seja, possibilita observar respostas imediatas aos exercícios sem o uso de calculadoras, tabelas de seno, cosseno, tangente e cotangente.

Na atividade a seguir, vamos estudar, com auxílio deste aparelho, as razões trigonométricas de seno, cosseno e tangente.

Procedimento

Para que os alunos participem da prática, basta que eles baixem o aplicativo do Vicmetro, disponibilizado no seguinte link: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.applab.pythagoras.vicmetro&hl=pt>

Etapa 1

Construa triângulos com o Vicmetro e encontre os seguintes valores:

- Seno de 20° ;
- Seno de 35° ;
- Cosseno de 15° ;

- d. Cosseno de 25° ;
- e. Tangente de 50° ;
- f. Tangente de 55° .

Etapa 2

Preencha o quadro abaixo com valores encontrados e compare com os outros grupos.

Quadro 2 – Resumo dos valores encontrados

Razões trigonométricas	Valores encontrados
Seno de 20°	
Seno de 35°	
Cosseno de 15°	
Cosseno de 25°	
Tangente de 50°	
Tangente de 55°	

Fonte: Elaborado pelos autores.

Após a comparação, o professor informará qual grupo se aproximou mais dos valores da tabela trigonométrica.

CAPÍTULO 10

Estudando as relações
trigonométricas no
triângulo retângulo a
partir da Dama
Trigonométrica

CAPÍTULO 10

Estudando as relações trigonométricas no triângulo retângulo a partir da Dama Trigonométrica

Milena Carneiro Almeida

Gláucio Alexandre Pereira

INTRODUÇÃO

A origem da dama é desconhecida. Pinturas e tabuleiros encontrados em túmulos no antigo Egito, além de outros achados arqueológicos, em diversos lugares do mundo, nos dão conta da existência de jogos bem semelhantes ao atual jogo de Damas. Mas não existem indícios seguros que possam nos afirmar onde e quando ele surgiu. Ele é um jogo de tabuleiro para dois jogadores.

Nesta atividade, pretendemos discutir conceitos relacionados ao conteúdo de razões trigonométricas no triângulo retângulo, utilizando um jogo de dama adaptado com conceitos trigonométricos no interior do seu tabuleiro, trabalhando assim com material concreto no ensino de matemática. A partir disso, seguiremos os seguintes passos: inicialmente, separaremos a turma em grupos de três pessoas; em seguida, serão distribuídos os tabuleiros, as peças, a folha do aluno e as folhas de papel A4. Posteriormente, os alunos começarão a jogar dama no tabuleiro, e no decorrer do jogo irão resolver questões que facilitará o aprendizado dos conteúdos estudados.

A utilização de material concreto em sala de aula para o processo de ensino e de aprendizagem é um fator motivador para os alunos, pois desperta seu interesse e atenção. Além disso, realizar o uso desses materiais (jogos, instrumentos, software entre outros), em conjunto com a competitividade e o trabalho em equipe, muda as expectativas do aluno em relação aos conteúdos matemáticos estudados em sala de aula, contribuindo com que o mesmo construa seu próprio conhecimento.

GUIA DO PROFESSOR

Material didático manipulável

Figura 1 – Dama Trigonométrica



Fonte: Elaborado pelos autores.

Elementos que norteiam a prática

Quadro 1 – Resumo da prática

Série/Ano		1º ano do Ensino Médio
Unidade temática		Geometria
Objeto de conhecimento		Relações trigonométricas no triângulo retângulos, ângulos notáveis (30° , 45° e 60°) e seus respectivos valores de seno cosseno e tangente.
Habilidade		(EM13MAT306). Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria (BRASIL, 2018, p.536). (EM13MAT308). Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança (BRASIL, 2018, p.536).
Objetivos	Docente	Desenvolver habilidades para resolver situações problemas que envolva o uso das relações trigonométricas.
	Aluno	Interpretar situações que envolvam o uso das relações trigonométricas e identificar e aplicar corretamente as relações: seno, cosseno e tangente.

Materiais necessários	Para a realização do experimento é necessário que o professor esteja com os seguintes materiais disponíveis aos alunos: 1) Tabuleiros feitos em tabua de madeira quadrada ou em folha de EVA cortada no tamanho 32cmX32cm (a quantidade depende de quantos grupos serão formados); 2) Tampas de garrafas; 3) Canetas e lápis; 4) Questões impressas em forma de cartões; e 5) Folhas de papel A4.
Conhecimentos prévios	Para obter resultados positivos, com o experimento, é necessário que os alunos tenham conhecimentos prévios sobre razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) e conceitos do teorema de Pitágoras, dando ênfase aos ângulos de 30°, 45° e 60°.
Duração	1 hora/aula

Fonte: Elaborado pelos autores.

Aspectos gerais do experimento

Sinopse

Este experimento consiste em um jogo de dama que envolve conceitos de relações trigonométricas no triângulo retângulo. Os alunos irão receber tabuleiros de dama, peças do jogo e “cartões questão” para realizarem o experimento. Após estarem com o material em mãos, serão informados sobre as regras do jogo podendo dá início as partidas.

No decorrer de toda a atividade eles irão se deparar com conceitos matemáticos que estão espalhados pelo tabuleiro e responder as questões problemas presentes no experimento, que tem como finalidade tornar tais conceitos compreensivos e significativos.

O experimento

Construção da dama trigonométrica. A dama é composta por um tabuleiro e vinte e quatro peças. O tabuleiro pode ser construído de duas maneiras:

- Em tabuas de madeiras, na qual será desenhado um quadrado de tamanho 32cmX32cm. Em seguida esse quadrado será dividido em 64 quadrados menores com medidas 4cmX4cm cada. Enumerando os quadrados de 1 a 8 do lado vertical e de A à H do lado horizontal, formando assim o tabuleiro.
- Em folhas de EVA, seguindo os mesmos passos da construção anterior. (No Anexo I, encontra-se o modelo do tabuleiro completo para impressão)

As peças podem ser feitas de tampas de garrafa ou EVA, sendo doze peças pretas e doze brancas.

Preparação

Para alcançar o objetivo de desenvolver e fixar os conteúdos propostos, precisaremos:

- Dividir a turma em grupos de até três alunos;
- Distribuir um tabuleiro, vinte quatro peças, os cartões questões e folhas de A4 para cada grupo.

Etapas para o desenvolvimento do experimento

Etapas 1

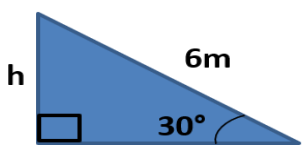
A turma será dividida em grupos de três e todos os grupos receberão um tabuleiro da Dama Trigonométrica e os “cartões questão”. Tendo em mãos seu tabuleiro, inicialmente, dois jogadores irão jogar e o terceiro membro será o “suporte” (o jogador suporte é o que direciona os questionários e pode auxiliar com as respostas, caso seja solicitado) e a partir disso, será determinado quem iniciará a rodada. No momento que as equipes decidirem quem serão os primeiros jogadores e o suporte, o professor realizará a leitura da folha do aluno, explicando as regras e o papel de cada participante no jogo.

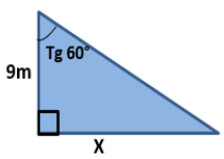
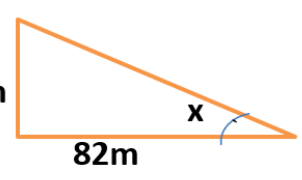
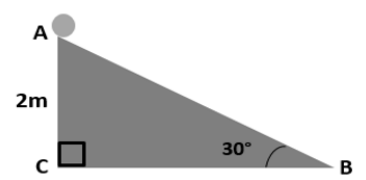
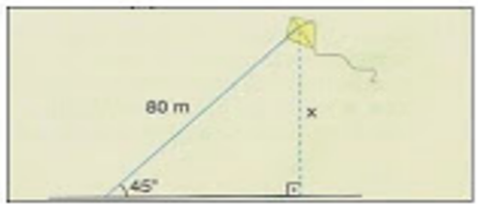
Etapas 2

Após a leitura das regras do jogo, as equipes poderão iniciar a partida. Dentre as regras lidas, uma delas é a de que, se o jogador cair em uma casa que possui o nome “PUXE”, o mesmo só poderá permanecer na casa se responder corretamente a uma das questões que estarão nos “cartões questão” que será lida pelo suporte. (No Anexo II, encontra-se as regras do jogo).

A seguir, apresentamos algumas sugestões de questões e suas resoluções para dar suporte ao professor (No Anexo III, estão os cartões questão para impressão) (Figura 2).

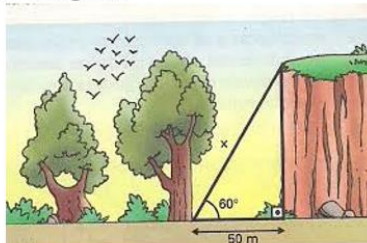
Figura 2 – Sugestão de questões

Cartão	Resolução
Cartão 01: Uma escada rolante de 6m de comprimento liga dois andares de uma loja e tem inclinação de 30°. Determine em metros, a altura entre esses dois andares. Use os valores: $\cos 30^\circ = 0,87$, $\sin 30^\circ = 0,5$, $\tan 30^\circ = 0,58$.	Resolução 01: Podemos representar a situação na seguinte figura:  Na figura, o h representa a altura entre os dois andares. Utilizaremos a razão seno para encontrar o valor de h: $\sin 30^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$ $0,5 = \frac{h}{6}$ $h = 6 \times 0,5$ $h = 3m$

Cartão 02: Determine o valor de x. 	Resolução 02: Observe que os dados que a figura apresenta são: cateto adjacente e cateto oposto a tangente de 60°. Portanto, através da razão tangente, temos: $tg 60^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$ $\sqrt{3} = \frac{x}{9}$ $x = 9\sqrt{3}$
Cartão 03: Uma mangueira tem 30 metros de altura. João está a 82 metros de distância da mangueira. Qual o ângulo (aproximadamente) formado entre João e a mangueira? Use os valores: $\sin 20^\circ = 0,3420$, $\cos 20^\circ = 0,9397$, $\tan 20^\circ = 0,3640$.	Resolução 03: Podemos representar a situação na seguinte figura:  Observe que os dados que a figura apresenta são: cateto adjacente, cateto oposto e x o ângulo que deseja encontrar. Portanto, através da razão tangente, temos:
	$tg x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$ $tg x = \frac{30}{82}$ $tg x = 0,3658$
Questão 04: Uma esfera foi liberada no ponto A de uma rampa. Conforme o desenho a baixo  Determine a distância que a esfera percorreu até atingir o solo no ponto B.	Resolução 04 Observe que os dados que a figura apresenta são: cateto adjacente, e o ângulo de 30°. O lado a ser encontrar é o AB. Portanto, através da razão seno, temos: $\sin 30^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$ $\frac{1}{2} = \frac{2}{AB}$ $AB = 4m$
Cartão 05: Uma pipa é presa a um fio esticão que forma um ângulo de 45° com o solo. O comprimento do fio é 80 m. Determine a altura da pipa em relação ao solo. Dado: $\sqrt{2} = 1,41$ 	Resolução 05 Observe que os dados que a figura apresenta são: hipotenusa, e o ângulo de 45°. Queremos encontrar a altura que está expressa por x. Portanto, através da razão seno, temos: $\sin 45^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$ $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{80}$ $2x = 80\sqrt{2}$ $x = \frac{80\sqrt{2}}{2}$ $x = 40\sqrt{2}$ $x = 40 \times 1,41$ $x = 56,4 m$

Cartão 06:

Um cabo é ligado do topo de uma encosta ao pé de uma árvore formando um ângulo de 60° . Sabendo que o pé da árvore está distante 50 m da base da encosta, que medida deve ter esse cabo que as ligam?

**Resolução 06:**

Observe que os dados que a figura apresenta são: cateto adjacente, e o ângulo de 60° . Queremos encontrar a hipotenusa que é expressa por x . Portanto, através da razão cosseno, temos:

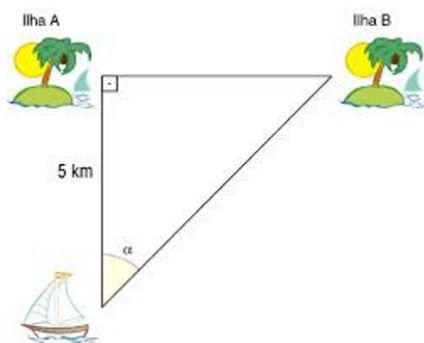
$$\cos 60^\circ = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{50}{x}$$

$$x = 100\text{m}$$

Cartão 07:

Ao ancorar seu barco no litoral norte do estado de São Paulo, um pescador pode observar duas ilhas, A e B, como mostra a ilustração



Qual a distância do barco o pescador em relação a ilha B? (Use: $\cos \alpha = 0,8$)

Resolução 07:

Observe que os dados que a figura apresenta são: cateto adjacente, e o ângulo α . Queremos encontrar a hipotenusa que é expressa pela distância do barco a ilha B e a chamaremos de x . Portanto, através da razão cosseno, temos:

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$0,8 = \frac{5}{x}$$

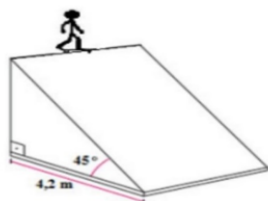
$$0,8x = 5$$

$$x = \frac{5}{0,8}$$

$$x = 6,25 \text{ km}$$

Cartão 08:

Fábio está prestes a descer uma rampa de skate. A rampa tem o comprimento de 4,2 metros e o ângulo que a rampa faz em relação ao solo é de 45° . Observe o desenho a seguir.



Qual será a distância percorrida por Fábio até atingir o solo? (Considere: $\sqrt{2} = 1,4$)

Resolução 08:

Observe que os dados que a figura apresenta são: cateto adjacente, e o ângulo 45° . Queremos encontrar a hipotenusa que é expressa pela distância de Fábio ao solo e a chamaremos de x . Portanto, através da razão cosseno, temos:

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4,2}{x}$$

$$\sqrt{2} x = 4,2 \times 2$$

$$\sqrt{2} x = 8,4$$

$$x = \frac{8,4}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{8,4}{1,4}$$

$$x = 6\text{m}$$

Fonte: Elaborado pelos autores.

Etapas 3

Após todos os membros da equipe terem jogado, o professor encerra as partidas. Caso haja tempo, pode-se resolver, junto a classe, alguma das questões que eles tiveram dúvidas ou dificuldades no decorrer do experimento. Além disso, pode se reforçar algum conceito que ainda gere dúvidas nos alunos.

Fechamento

Em todas as etapas, o experimento tem como proposta convidar os alunos a se divertirem aprendendo matemática. Além disso, ilustra ainda que é possível ensinar e aprender matemática de forma lúdica.

Ao final de todas as etapas, esperamos que os alunos tenham compreendido os conceitos de relações trigonométricas no triângulo retângulo e consigam alcançar os objetivos do experimento.

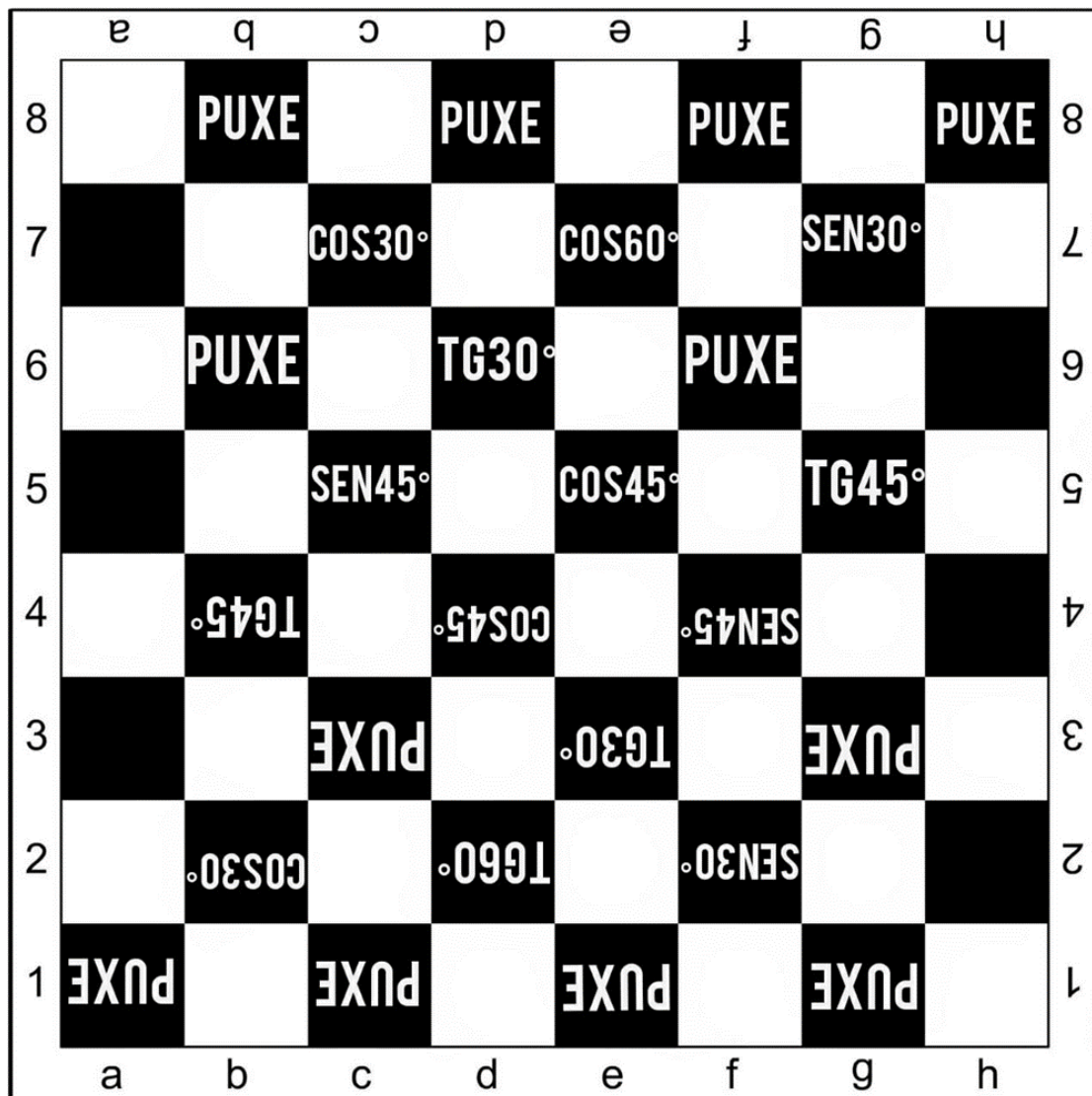
Neste sentido, propomos que o professor tenha o desejo de incentivar e motivar seus alunos em sala de aula através de aulas mais leves e descontraídas que impulsionam o desenvolvimento e interesse de seus alunos, seja através de jogos ou outro material concreto e palpável que proporcione o ensino dos conteúdos estudados.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Ensino Médio. Brasília, DF: MEC, 2018.

Anexos

Anexo I



Anexo II

Regras do Jogo:

1. As peças deverão ser posicionadas nas três primeiras linhas à frente de cada jogador e ocupar apenas as casas pretas.
2. Em algumas das casas pretas do tabuleiro encontrasse questionários como: "sen 45°", "cos 30°", "tg 60°" entre outros. Inicialmente, algumas peças se localizam em casas com esses questionários, mas eles só começam a ser respondido a partir do primeiro lance.
3. O jogador que estiver com as peças brancas inicia a partida, dando o primeiro lance.

4. As peças comuns só podem se movimentar para a frente, indo para uma casa preta livre na próxima linha diagonal à sua casa atual.
5. Somente em caso de captura, as peças comuns poderão se movimentar para trás.
6. As damas podem se movimentar em diagonal para frente e para trás, podendo ir para qualquer casa livre, desde que o caminho esteja livre.
7. O jogador suporte fica fora da partida, mas tem o papel de auxiliar os jogadores com as perguntas e confirmar se as respostas estão corretas.
8. A cada lance que o jogador realizar, ele escolherá uma casa para ir, se na casa escolhida o jogador encontrar um questionário ele só poderá permanecer nela respondendo corretamente para o jogado suporte, que confirmará se a resposta está correta ou não.
9. Caso o jogador suporte tenha dúvidas sobre a resposta, ele poderá se direcionar ao professor para que o mesmo a tire.
10. Se a resposta do questionário estiver incorreta, o jogador retorna a casa que estava anteriormente, passando a vez para o próximo jogador.
11. Para realizar uma captura o jogador passa por cima da peça do seu adversário e vai para a casa seguinte. Caso essa casa tenha um questionário a captura só será concluída se o jogador responder corretamente ao mesmo. Caso contrário, o jogador retorna a casa anterior, não realiza a captura e passa a vez para o próximo jogador.
12. Quando a peça chegar a última casa do tabuleiro ela se torna dama. Porém na última casa o jogador encontrar o nome “PUXE”, que indica que o jogador puxará um dos cartões questão.
13. A questão presente no cartão será lida pelo suporte e o jogador terá em média dois minutos para responde-la.
14. Para responder os questionários, os jogadores deverão utilizar os conhecimentos do assunto: relações trigonométricas no triângulo retângulo, visto na aula passada.
15. Se a resposta estiver correta, o jogador permanece na casa e sua peça se torna dama. Caso contrário, o jogador retorna a casa anterior, passando a vezes para o outro jogador.
16. A palavra “PUXE” também pode estar presente em outras casas do tabuleiro e o jogador também deve puxar o cartão questão e responder à pergunta corretamente para permanecer na casa.

Objetivo do jogo: o participante tem por objetivo principal captura todas as peças do seu adversário com habilidade e respondendo corretamente os questionários disponibilizados ao decorrer da partida.

Critérios de empate:

- Se em algum momento dá partida ocorrerem vinte lances sucessivos de damas, sem captura ou movimento de peças comuns;
- Se um jogador possuir três damas contra uma dama do outro jogador, será considerado empate se o jogador com o maior número de peças não conseguir obter vitória em vinte lances; e
- Se a partida estiver bloqueada, onde nenhum dos jogadores conseguem fazer mais lances.

Anexo III

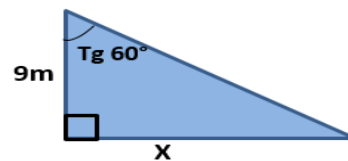
Cartão 01:

Uma escada rolante de 6m de comprimento liga dois andares de uma loja e tem inclinação de 30° . Determine em metros, a altura entre esses dois andares.

Use os valores: $\cos 30^\circ = 0,87$, $\sin 30^\circ = 0,5$, $\tan 30^\circ = 0,58$.

Cartão 02:

Determine o valor de x.

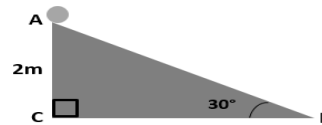
**Cartão 03:**

Uma mangueira tem 30 metros de altura. João está a 82 metros de distância da mangueira. Qual o ângulo (aproximadamente) formado entre João e a mangueira?

Use os valores: $\sin 20^\circ = 0,3420$, $\cos 20^\circ = 0,9397$, $\tan 20^\circ = 0,3640$.

Cartão 04:

Uma esfera foi liberada no ponto A de uma rampa. Conforme o desenho a baixo

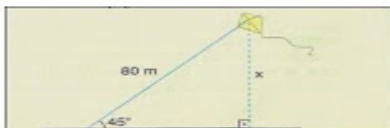


Determine a distância que a esfera percorreu até atingir o solo no ponto B.

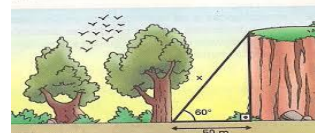
Cartão 05:

Uma pipa é presa a um fio esticado formando um ângulo de 45° com o solo. O comprimento do fio é de 80m. Determine a altura da pipa em relação ao solo.

Dado: $\sqrt{2} = 1,4$

**Cartão 06:**

Um cabo é ligado do topo de uma encosta ao pé de uma árvore formando um ângulo de 60° . Sabendo que o pé da árvore está distante 50 m da base da encosta, que medida deve ter esse cabo que as ligam?



FOLHA DO ALUNO

Estudando as relações trigonométricas no triângulo retângulo a partir da Dama Trigonométrica

Figura 1 – Dama Trigonométrica



Fonte: Elaborado pelos autores.

Comentários iniciais

Os jogadores devem capturar as peças do seu adversário com habilidade e mobilizando seu conhecimento responder aos questionários sobre razões trigonométricas no triângulo retângulo espalhados pelo tabuleiro. Ganhará o jogador que capturar todas as peças do seu adversário.

Procedimento

Preparação:

- Formam-se grupos de até 3 pessoas;
- Cada grupo receberá seu tabuleiro e vinte e quatro peças;
- Cada participante deverá escolher uma cor;
- O jogador suporte tem o papel de auxiliar os jogadores com as perguntas e confirmar se as respostas estão corretas. Inicialmente ele ficará de fora, acompanhando e auxiliando na partida;

- Cada participante deverá portar folhas de papel A4 brancas, lápis e canetas para a realização dos cálculos;

Definições:

- Dama – a peça coroada após parar na última linha do tabuleiro. A peça fica com uma peça de mesma cor em cima para representá-la;
- Grande diagonal – a maior linha formada diagonalmente pelas casas escuras;
- Lance – o deslocamento de uma peça para outra casa;
- Captura – um lance onde uma peça passa por cima de uma peça adversária que está entre a sua casa e a sua casa de destino; e

- Captura em cadeia – um lance onde uma peça captura duas ou mais peças de uma vez.

Regras do Jogo:

- 1 As peças deverão ser posicionadas nas três primeiras linhas à frente de cada jogador e ocupar apenas as casas pretas;
- 2 Em algumas das casas pretas do tabuleiro encontrasse questionários como: “ $\text{sen } 45^\circ$ ”, “ $\text{cos } 30^\circ$ ”, “ $\text{tg } 60^\circ$ ” entre outros. Inicialmente, algumas peças se localizam em casas com esses questionários, mas eles só começam a ser respondido a partir do primeiro lance;
- 3 O jogador que estiver com as peças brancas inicia a partida, dando o primeiro lance;
- 4 As peças comuns só podem se movimentar para a frente, indo para uma casa preta livre na próxima linha diagonal à sua casa atual;
- 5 Somente em caso de captura, as peças comuns poderão se movimentar para trás;
- 6 As damas podem se movimentar em diagonal para frente e para trás, podendo ir para qualquer casa livre, desde que o caminho esteja livre;
- 7 O jogador suporte fica fora da partida, mas tem o papel de auxiliar os jogadores com as perguntas e confirmar se as respostas estão corretas;
- 8 A cada lance que o jogador realizar, ele escolherá uma casa para ir, se na casa escolhida o jogador encontrar um questionário ele só poderá permanecer nela respondendo corretamente para o jogador suporte, que confirmará se a resposta está correta ou não;
- 9 Caso o jogador suporte tenha dúvidas sobre a resposta, ele poderá se direcionar ao professor para que o mesmo a tire;
- 10 Se a resposta do questionário estiver incorreta, o jogador retorna a casa que estava anteriormente, passando a vez para o próximo jogador;
- 11 Para realizar uma captura o jogador passa por cima da peça do seu adversário e vai para a casa seguinte. Caso essa casa tenha um questionário a captura só será concluída se o jogador responder corretamente ao mesmo. Caso contrário, o jogador retorna a casa anterior, não realiza a captura e passa a vez para o próximo jogador;
- 12 Quando a peça chegar a última casa do tabuleiro ela se torna dama. Porém na última casa o jogador encontrar o nome “PUXE”, que indica que o jogador puxará um dos cartões questão;
- 13 A questão presente no cartão será lida pelo suporte e o jogador terá em média dois minutos para respondê-la;

14 Para responder os questionários, os jogadores deverão utilizar os conhecimentos do assunto: Relações trigonométricas no triângulo retângulo, visto na aula passada;

15 Se a resposta estiver correta, o jogador permanece na casa e sua peça se torna dama. Caso contrário, o jogador retorna a casa anterior, passando a vez para o outro jogador;

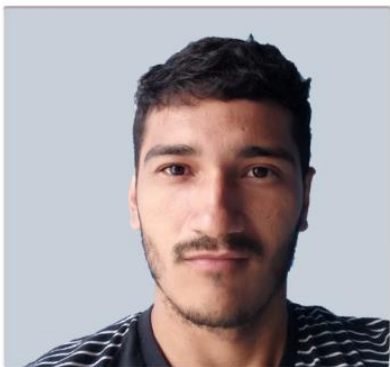
16 A palavra "PUXE" também pode estar presente em outras casas do tabuleiro e o jogador também deve puxar o cartão questão e responder à pergunta corretamente para permanecer na casa.

Objetivo do jogo: O participante tem por objetivo principal captura todas as peças do seu adversário com habilidade e respondendo corretamente os questionários disponibilizados ao decorrer da partida.

Critérios de empate:

- Se em algum momento de a partida ocorrerem vinte lances sucessivos de damas, sem captura ou movimento de peças comuns.
- Se um jogador possuir três damas contra uma dama do outro jogador, será considerado empate se o jogador com o maior número de peças não conseguir obter vitória em vinte lances.
- Se a partida estiver bloqueada, onde nenhum dos jogadores conseguem fazer mais lances.

OS ORGANIZADORES



**Francisco Wagner Soares
Oliveira**

Doutorando pelo Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) da Universidade Estadual do Ceará (UECE). Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (PGECEM/IFCE) (2019), especialista em Metodologia do ensino de matemática e física pela Universidade Candido Mendes (2018).



Gisele Pereira Oliveira

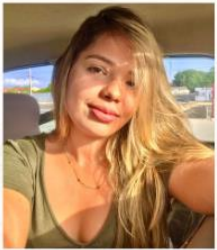
Possui graduação em Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará- UFC (2011), graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Ceará - UFC (2013), especialização em Ensino de Matemática pela Faculdade Farias Brito (2013) e Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Ceará - UFC (2018). Atualmente é professora efetiva da Secretaria de Educação do Estado do Ceará - SEDUC e doutoranda do programa de pós-graduação em Educação Matemática pela Universidade Estadual do Ceará – PPGE/ UECE. Tem experiência na área de Educação Matemática, com ênfase em Ensino de Matemática, atuando na Formação inicial e continuada de Professores de Matemática sobre o uso e produção de Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) no Ensino de Matemática, em especial Objetos de Aprendizagem.



Ana Carolina Costa Pereira

Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará, mestrado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte e pós-doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

OS AUTORES



**Hemanoele
Alexandre Santos**



Dailson Silva Santos



**Anna Letícia de
Araújo Silva**



**Anderson Vieira do
Nascimento**



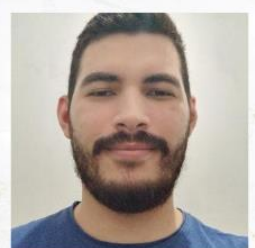
**Pedro Henrique
Sales Ribeiro**



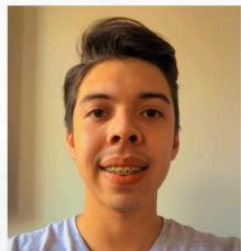
**Lívia Bezerra de
Alencar**



**Kawoana da Costa
Soares**



**Francimar Miguel
da Silva Junior**



**Vinicius de Sousa
Paula**



**Amanda Cardoso
Benício de Lima**



**Roberto
Albuquerque da Silva**



**Roberta Vivian
Campos Severino**



**Luiza Maria Morais
Lima**



**Karlos Santhiago de
Melo Madeiro**



**Audrey Stephanie
de Oliveira Gomes**



**Werther Xisto
Cardoso**



**José Edson Euzebio
Neto**



**Milena Carneiro
Almeida**



**Gláucio Alexandre
Pereira**



**Jessica de Oliveira
Dantas**

ISBN 978-658459923-9



9

786584

599239


Editora
UNIESMERO