Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Luís Cláudio Pinto Costa
Fábio José da Costa Alves

O ESTUDO DE EQUAÇÃO EXPONENCIAL POR MEIO DO *GEOGEBRA*

Produto Educacional

BELÉM/PA

2022

Luís Cláudio Pinto Costa

Fábio José da Costa Alves

O ESTUDO DE EQUAÇÃO EXPONENCIAL POR MEIO DO *GEOGEBRA*

Produto Educacional

Produto Educacional apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Equação Exponencial. Orientador: Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves.

BELÉM/PA

2022

Clay Anderson Nunes Chagas
Reitor Universidade do Estado do Pará

Ilma Pastana Ferreira
Vice-Reitora Universidade do Estado do Pará

Renato da Costa Teixeira
Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação

Anderson Madson
Diretor do CCSE

Fábio José da Costa Alves
Coordenador do PPGEM

Natanael Freitas Cabral

Vice-Coordenador do PPGEM

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP) Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

COSTA, Luís Cláudio Pinto; ALVES, Fábio José da Costa. O ESTUDO DE EQUAÇÃO EXPONENCIAL POR MEIO DO *GEOGEBRA*.

Produto Educacional do Programa de PósGraduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, (PPGEM/UEPA), 2021.

ISBN: 978-65-00-40646-7

Ensino Matemática; Ensino por meio de aplicativos; Equação exponencial.

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO

Meus caros colegas, professores e professoras de matemática. Vocês, que assim como eu, têm dificuldades no ensino e aprendizagem dos seus alunos, especialmente, porque é objeto de nosso trabalho, no estudo da equação exponencial, a qual tem se tornado uma dificuldade na vida acadêmica dos estudantes e professores do ensino médio. Professores, que também já estão cansados com a maneira de ensinar matemática de um modo mecânico e sem direcionamento, principalmente em se tratando dessa equação. E essa maneira de ensinar tem se tornado desgastante, aquela em que o professor dá o conteúdo e espera que os alunos resolvam uma lista de exercícios. De certo modo, este método tem piorado as relações entre docentes e discentes.

Com certeza, a falta de um estudo, adequado e motivador, vem a se refletir, em certo modo, a resolução de problemas, normais e comuns do dia a dia, que estão colocadas externamente as práticas educativas, como por exemplo, o crescimento de uma quantia, em dinheiro, deixada em um banco por um certo período de tempo.

Além, é claro, a presença de outros fatores, que não fazem parte da vida acadêmica dos estudantes como: a renda da família, que muitas vezes se apresentam escassas, refletindo na aprendizagem do estudante; a falta de infraestrutura da escola; a paralisação escolar, por diversos motivos (não pretendemos dar esses motivos, mas apenas observando que eles contribuem para um rendimento abaixo do satisfatório); a falta de alimentação escolar; entre outros fatores.

Por outro lado, olhando pelo lado de dentro da prática educativa, observa-se os PCN e a BNCC. Esses documentos têm melhorado e muito o ensino e aprendizagem da equação exponencial e da matemática de um modo geral, pois trazem a construções de problemas cotidianos, problemas esses que se encontram no dia a dia, na própria vida do educando e influenciam a autonomia do discente, autonomia que é muito importante para aprender. Pois as crianças aprendem imitando ações que vão além do limite das suas capacidades, sempre orientada por um adulto, e importante, com autonomia (VYGOTSKY, 2001).

Nós desenvolvemos este produto educacional, que entre outras coisas apresenta um modo diferente e didaticamente muito interessante: uma sequência didática auxiliada por um Aplicativo *Geogebra*, para a resolução de Equação Exponencial.

A proposta, que eu tenho a seguir, será apresentada a vocês, professores de matemática. Trata-se de uma sequência didática, construída por mim e meu orientador, seguindo as orientações da Gênese Instrumental de Rabardel, Os Registros das Representações Semióticas de Duval e a Análise Microgenética, no sentido de melhorar o desempenho dos alunos. Desta maneira, essa pesquisa foi desenvolvida com o intuito de avaliar os efeitos de nossa sequência didática, auxiliada por um aplicativo *Geogebra* para o Ensino Aprendizagem de Equação Exponencial entre estudantes do ensino médio.

A seguir traçaremos uma abordagem sobre a equação exponencial: sua história, suas propriedades e métodos de resolução.

2. EQUAÇÃO EXPONENCIAL

2.1 ABORDAGEM HISTÓRICA

Nesta seção, sem querer esgotar o assunto, traçaremos alguns breves comentários sobre a evolução da equação exponencial até os dias de hoje. Como nasceu a ideia e como ela irá se apresentar até os dias de hoje, quem foram os criadores do logaritmo e das famosas tábuas de logaritmos?

A equação exponencial, uma forma particular de equação, está intimamente ligada à noção de logaritmo (tanto que podemos resolver com emprego dos logaritmos), pois temos um certo número b elevado a um certo expoente c igual a potência a conforme está aqui exposto $b^c = a$. Pois bem logaritmo é definido como sendo $\log_b a = c$, que transportando para a forma exponencial ficaria assim $b^c = a$. por isso nossa abordagem histórica da Função/Equação Exponencial a partir dos logaritmos de John Napier, que viveu entre 1550 a 1617 na majestosa propriedade em Merchiston, próximo a Edimburgo na Escócia e apesar de ser um cientista teve muitas controvérsias políticas e religiosas na sua época.

E é justamente para se descontrair de suas polêmicas que ele estudava Ciências e Matemática, em muitos desses estudos resultou na invenção de logaritmos. O poder dos logaritmos resulta no fato de que eles resultam em transformar multiplicação e divisão em simples adição e subtração, conforme diz Borges (2014). A formula trigonométrica 2Cos(A)Cos(B) = Cos(A+B)+Cos(A-B) e outras 3 fórmulas semelhantes a essa transformavam o produto do cosseno de dois ângulos na soma dos cossenos da soma pela diferença desses mesmos ângulos. O que ficou conhecido como protaférese.

Mas a abordagem de Napier para afastar as multiplicações e divisões difere da prostaférese, pois se baseia no fato de os termos da progressão Geométrica b^1 x b^2 x b^3 x ..b^n x b^m associado aos termos da progressão aritméticas 1, 2, 3, 4,...n, m assim como o produto de dois termos b^n **x** b^m está associado a soma de n + m de acordo com Borges, (2014). Daí surgiu o professor Henry Briggs, um admirador do trabalho de Napier que viveu entre os anos 1561 a 1631, ele lecionava geometria em Oxford.

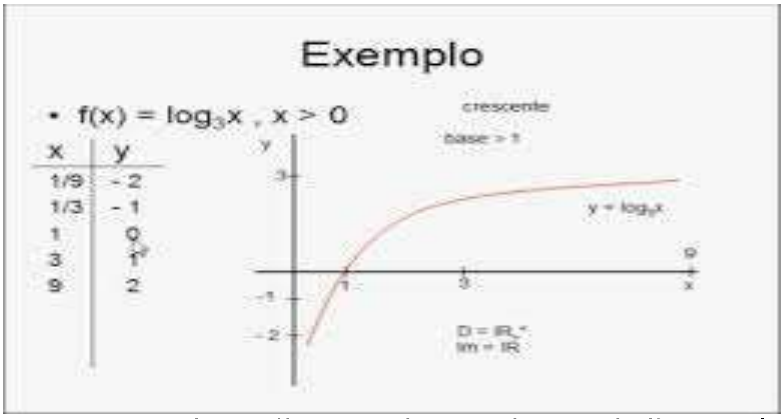
Briggs visitou Napier na Escócia e discutiu com ele possíveis modificações no método dos logaritmos. Desse encontro surgiram o uso de potência de dez e concordaram que o logaritmo de 1 fosse 0 e logaritmo de 10 fosse alguma potência de 10 (BORGES, 2014). Em 1617 com a morte de Napier, Briggs publica a sua obra intitulada *Logarithmorum Chilias Prima,* isto é, Logaritmos dos números de 1 a 100, cada um com catorze casas decimais. Em 1624, Briggs ampliou essa tabela. Após a publicação de seu livro *Arithmetica Logarithmica* que o trabalho de Briggs podia ser feito como hoje. Foi a partir desse mesmo livro que as palavras “mantissa” e “característica” passaram a ser usadas nas operações com a tábua de logaritmos.

A invenção de logaritmos foi adotada em toda a Europa, pois aumentava o poder de computação dos astrônomos, e fizeram surgir as Tábuas de Logaritmos *(*BORGES, 2014). Foi com base na noção de logaritmos que foi estabelecida a noção de função logarítmica e logo depois a sua inversa a função exponencial, como se segue.

Em 1673 o termo “função’ foi estabelecido por Leibniz “em uma tentativa de designar a relação entre quantidades variáveis associadas por uma dada curva” SILVA (2012), como abordado na figura 6. No século XVIII, Euler começou a representar função através de letras. Lima (2004) apresenta a noção de função f: A $\rightarrow$ B, representada por três partes: O conjunto A chamado de domínio, o conjunto B chamado de contradomínio e uma lei de formação SILVA (2012). Então algum tempo depois surgem, as primeiras funções e logo surge a noções da Função Logarítmica: uma função de R_*^+ R, cujo domínio é os números reais positivos.

> *Uma função real f: $R*+ \rightarrow R$ chama-se função logarítmica quando é caracterizada pelas seguintes propriedades: A) f é uma função crescente, isto é, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ B) $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer x, $y \in R*+$ Denotamos tal função por f(x) = log b x em que o número b é chamado base. Tradicionalmente, as bases dos logaritmos mais comuns são: base 10, chamado logaritmo decimal, pois, nossos números são escritos usualmente no sistema de numeração decimal. ROBALLO, 2014, p.13).*

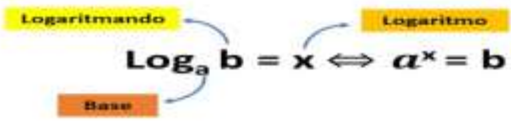
Figura 1: gráfico da função logarítmica



Fonte: https://www.todamateria.com.br/funcao-logaritmica/

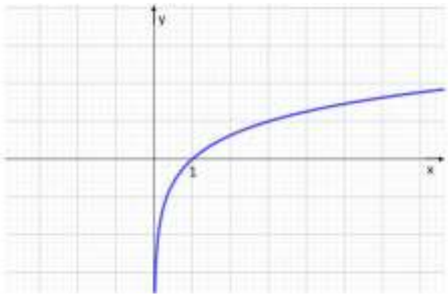
Para construir o gráfico da função logarítmica, além de conhecer os seus elementos, figura 7, é necessário ter um bom conhecimento sobre os logaritmos e suas propriedades. O domínio de uma função representa os valores de x onde a função é definida. No caso da função logarítmica, devemos levar em consideração as condições de existência do logaritmo, como na figura 8. Portanto, o logaritmando deve ser positivo e a base também deve ser positiva e diferente de 1.

Figura 2: Os elementos do Logaritmo



Fonte: https://www.estudopratico.com.br/logaritmos/

Figura 3: Gráfico da função logarítmica no *Geogebra*



Fonte: https://www.todamateria.com.br/funcao-logaritmica/

A função exponencial que vem a ser a função inversa da função logarítmica e é definida como y = ax, e seu domínio de R $\longrightarrow$ R*+, como sendo a base dessa função o a, diferente de (um) 01 e maior que (zero) 0 e o expoente o valor de X. Desta maneira, conhecendo o gráfico da função logarítmica de mesma base, por simetria podemos construir o gráfico da função exponencial.

Do mesmo modo também para se traçar o gráfico da função exponencial é necessário ter uma boa noção das propriedades das potências, em especial das equações exponenciais. O que é uma Equação Exponencial? Em primeiro lugar, antes de discorrer sobre equações exponenciais, temos que ater primeiro em equações, de uma forma geral. A história das equações remonta períodos antigos da humanidade e que segundo Sá (2003, p.124) “podemos citar os babilônicos que construíram tabelas de argila, e para cada valor da primeira coluna existia um número na segunda [...]”. e a Equações lembra igualdade entre dois membros, no qual esses membros são expressões algébricas. No dizer de Andrini e Vasconcelos (2015, página 205):

> *Vimos que equações são igualdades, em que há uma ou mais letras, representando números desconhecidos. As letras são chamadas de incógnitas, podendo ser x, y, a, b ...enfim qualquer letra minúscula (ANDRINI, VASCONCELOS, 2015. p.205).*

E também segundo Centurión e Jakubovic (2012, pág. 107): “Toda equação tem: Pelo menos uma letra que indica um número desconhecido; Um sinal de “=” entre duas expressões”. Durante o processo de Ensino aprendizagem em matemática, nos deparamos com equações diversas: Equações do 1º Grau, Equações do 2º Grau, Equações Modulares. Equações com uma ou várias incógnitas, com métodos simples ou complexos. Entre todas essas equações, tem-se a equação exponencial: Que vem a ser uma equação no qual a incógnita está no expoente de uma potência. Um exemplo de equação exponencial é: $3^x = 81$. Nós temos como propósito encontrar o valor de X, no caso do nosso exemplo o valor de X é 4. O que seria facilmente percebido.

No Livro Fundamentos da Matemática Elementar, Iezzi, Dolce e Murakami (1977, p. 34-b) usa uma definição de equação exponencial bem simples no qual ele diz que equação exponencial é aquela que apresenta a incógnita no expoente. É dentro dessa perspectiva curricular que se encontra inserido hoje a nossa Equação Exponencial, dentro do tópico da Função Exponencial, na proposta da BNCC para o Ensino Médio:

> *(EM13MAT304). Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros (BRASIL,2018, p.528),*

E, como diz a BNCC, que deve comparar situações que envolvem juros simples e juros compostos, para analisar o crescimento linear ou o exponencial:

> *Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso (BRASIL, 2019, p.432).*

E, também, como diz PCN, como na BNCC, dentro do tópico de Função Exponencial, na 1ª série do ensino médio: “1. Noção de função; funções analíticas e não-analíticas; análise gráfica; sequências numéricas; função exponencial ou logarítmica” (BRASIL, 2018, página 128). E se reportando à função exponencial:

> *Também populações de microorganismos podem variar exponencialmente, tornando a escala logarítmica igualmente conveniente em Biologia. Estas sugestões, que por acaso*

envolveram funções logarítmicas, poderiam ter envolvido funções trigonométricas, exponenciais ou distribuições estatísticas. Não só o professor de Matemática deve estar atento para ilustrar a utilidade dos instrumentos de representação que ensina, mas qualquer professor que estiver fazendo uso, em sua disciplina, de uma linguagem matemática já pode defini-la e ensiná-la sem esperar que o professor de Matemática seja o primeiro a desenvolver uma linguagem de uso amplo em todas as ciências. Cada professor deveria elaborar uma lista das linguagens, não só matemáticas, e estabelecer como regra de conduta promover o aprendizado delas entre seus alunos, não apenas como meio para o aprendizado de sua disciplina, mas como competência mais geral, instrumento para a vida (BRASIL,2018, p.121).

E, também:

As funções exponencial e logarítmica, por exemplo, são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras. (BRASIL, 2018, p.121)

Operavam as equações, Os Babilônios e Egípcios, que tinham basicamente um caráter prático, que em sua maior parte eram oriundas de problemas de ordem pragmática. A ideia de equação que de forma intuitiva, se igualava a duas quantidades com o objetivo de achar o valor da quantidade desconhecida. a tentativa de se encontrar o valor desconhecido estava ligada à equações particulares, para resolver problemas específicos e a metodologia utilizada estava ligada à noções aritméticas, sem a preocupação de se encontrar soluções que satisfizessem às equações de uma maneira geral, RIBEIRO (2009).

Já para os Gregos não, pois eles não viam as equações oriundas de problemas de ordem prática, assim elas eram concebidas de forma distinta dos babilônios e egípcios. A ideia de equação trazia um caráter geométrico e de forma dedutiva. A forma de resolver repousava em artifícios oriundos da geometria. Embora tenha havido uma mudança de concepção, aritmética da álgebra, nos babilônios e egípcios, para geométrica desta mesma álgebra, nos gregos, a tentativa de encontrar a as soluções ainda era ligada à equações particulares e não a uma metodologia geral (RIBEIRO, 2009);

Figura 4: Desenho Gregos estudando

Fonte:https://www.infoescola.com/historia/ciencias-na-grecia-antiga/

Já com Árabes e Hindus, a ideia de equação já tinha um perfil mais algébrico, mais generalista, pois passou de um catálogo de expressões que se sabia resolver para um catálogo de todas as formas canônicas possíveis. Houve preocupação na tentativa de encontrar formas canônicas. Trabalhavam tanto com equações oriundas de problema de ordem pragmática, quanto com interpretações e manipulações de geométricas. Por outro lado, para os Europeus as equações eram vistas dentro de um sistema estrutural, elas tinham propriedades e características bem definidas, ela é considerada em si mesma, operando-se sobre si, com o objetivo de se achar soluções gerais RIBEIRO (2009).

Com este estudo epistemológico–histórico, podemos verificar que o principal objetivo de pesquisa da álgebra, durante décadas, foi o estudo das equações algébricas. Houve uma mudança muito importante na natureza do objeto de investigação: o estudo das equações perde o foco de atenção para o estudo das estruturas matemática. Podemos dizer que tivemos dois grandes momentos históricos: Álgebra Clássica ou Elementar e Álgebra Moderna ou Elementar (RIBEIRO, 2009).

Estamos cercados de exemplos de variáveis que crescem de forma exponencial, basta lembrarmos de como o capital inicial cresce em um banco que trabalha com juros compostos, o que é normal, nesse caso temos simplesmente uma ligação entre a matemática financeira, montante de uma aplicação, e a equação exponencial, que não é nada menos que a fórmula $M = C.(1+i)^n$, onde M representa o montante no final da aplicação, C o capital inicial e n o número de meses da aplicação.

2.2 CONCEITOS E PROPRIEDADES

*"*Como diz Helena (2016), equações exponenciais são aquelas em que a incógnita aparece nos expoentes"*,* mais uma vez temos aqui o conceito reiterado por Einhardt (2016),

Seja **a** um número real positivo. Para todo $n \in N$ a potência a^n, de base **a** e expoente **n** é definida como o produto de **n** fatores iguais a **a**. Note que para n = 1 não há produto de um só fator e temos a 1 = a por definição. A definição indutiva de a^n é: $a^1 = a$ e $a^{n+1} = a \cdot a^n$. Para quaisquer $m, n \in N$ tem-se $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ pois em ambos os membros desta igualdade temos o produto de m + n fatores iguais a **a**. Segue-se que, para m1, m2, ..., mk quaisquer, vale $a^{m1} \cdot a^{m2} \cdot ... \cdot a^{mk} = a^{m1+m2+...+mk}$. Em particular, se m1 = ... = mk = m, vem $a^{m1} \cdot a^{m2} \cdot ... \cdot a^{mk} = a^{mk}$. Procuremos agora atribuir um significado à potência a^n , quando $n \in Z$ é um número inteiro, que pode ser negativo ou zero. Para isso é necessário manter a regra fundamental $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Iniciaremos por definir a^0. Como a igualdade $a^0 \cdot a^1 = a^{0+1}$ é válida, teremos $a^0 \cdot a = a$, logo $a^0 = 1$. Em seguida, dado qualquer $n \in N$, devemos ter $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$, logo $a^{-n} = 1/a^n$. Desta forma, conseguimos admitir expoentes inteiros preservando a igualdade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ definindo $a^0 = 1$ e $a^{-n} = 1/a^n$ para todo $n \in N$. Vejamos agora, quando o expoente é um número racional r = m/n (onde $m \in Z$ e $n \in N$) de modo que valha a regra $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$. Desta igualdade resulta, que se deve ter, para r = m/n: $(a^r)^n = a^r \cdot a^r \cdot ... \cdot a^r = a^{r+r+...+r} = a^{r.n} = a^m$.

Portanto a^r é o número real positivo, cuja n-ésima potência é igual a a^m. Por definição de raiz, este número é $\sqrt[n]{a}^{\,m}$ a raiz n-ésima de a^m. Assim, a única maneira de definir a potência a^r , com r = m/n, $m \in Z$, $n \in N$, é a m/n = $\sqrt[n]{a}^{\,m}$. Vejamos alguns detalhes importantes: como se tem m/n = mp/np para todo $p \in N$, é preciso ressaltar que $\sqrt[n]{a}^{\,m} = \sqrt[n.p]{a}^{\,m.p}$ para que a definição não seja ambígua.

Também é preciso ressaltar que a definição dada assegura a validez da regra $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ para $r, s \in Q$. As potências a^r , com expoente racional, embora não contenham todos os números reais positivos, estão espalhadas em toda parte em R + desde que seja $a \neq 1$, conforme afirma o lema abaixo:

Lema 4.1. Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de R^+ existe alguma potência a^r, com $r \in Q$.

Demonstração. Dados $0 < \alpha < \beta$, devemos encontrar $r \in Q$ tal que a potência a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$, i.é., $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Vamos supor a e α maiores que 1 (os demais casos serão análogos). Como as potências de expoente natural de números maiores do que 1 crescem acima de qualquer cota prefixada, podemos obter números naturais M e n tais que $\alpha < \beta < a^M$ e $1 < a < (1 + (\beta - \alpha)/a^M)^n$ da última relação decorrem sucessivamente $1 < a^{1/n} < 1 + (\beta - \alpha)/ a^M$ e $0 < a^M(a^{1/n} - 1) < \beta - \alpha$. Logo $m/n \leq M \Rightarrow 0 < a^{m+1/n} (a^{1/n} - 1) < \beta - \alpha \Leftrightarrow 0 < a^{(m+1)/n} - a^{m/n} < \beta - \alpha$. Assim as potências $a^0 = 1$, $a^{1/n}$, $a^{2/n}, \cdot \cdot \cdot , a^M$ são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que o comprimento $\beta - \alpha$ do intervalo $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, aM]$, pelo menos um desses extremos, digamos a m n está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$ Helena (2016).

Equações como essas, $4^x = 64$, transformando-as em uma **igualdade de potências de mesma base.**

$$\boxed{a^{x_1} = a^{x_2} \quad \Rightarrow x_1 = x_2}$$

Temos no quadro acima uma igualdade de duas potências, sendo elas a^{x_1} e a^{x_2}, as quais tem a **mesma base**, que é *a,* mas tem os seus **expoentes distintos**, x_1 e x_2. Assim, nós podemos trabalhar apenas com os expoentes, ou seja, podemos cancelar as bases e igualar os expoentes, como vocês veem acima também, de tal forma que $x_1 = x_2$.

É importante considerar que a base das nossas potências deve ser necessariamente **maior que zero** e **diferente de 1**, como a definição de funções exponenciais.

$$a^{x_1} = a^{x_2} \quad \Rightarrow x_1 = x_2$$
$$\boxed{a > 0 \text{ e } a \neq 1}$$

Podemos resolver as equações exponenciais, trabalhamos apenas as bases no sentido de torná-las iguais, quando nós tivermos as bases igualadas, trabalharemos apenas com os expoentes, e igualando-os, acharemos o valor da incógnita. Exemplo: $3^x = 81$.

Quando observarmos equações como a acima descrita, temos que igualar as bases das potências. Reparem que temos as bases 3 e 81. Existem equações que não é possível partirmos desse artifício. Como por exemplo $2^x = 5$, então partimos para resolução, levando em conta o uso de logaritmos. Isso está fora do contexto deste trabalho. Podemos transformar o 81 a base 3, fatorando:

$$3^{x+1} = 3^4$$
$$x + 1 = 4$$
$$x = 4 - 1$$
$$x = 3$$

Assim, podemos voltar a equação exponencial e substituindo o 81 por 3^4. Então podemos igualar as bases e trabalhar somente os expoentes: Encontramos a solução para o nosso primeiro exemplo que é 3! Em forma de conjunto solução podemos dizer que: S = {3}.

Esta equação é um exemplo muito simples, mas serve de modelo para termos uma noção de como resolver uma equação exponencial. Porém, na maioria dos casos, não vamos conseguir resolver equações exponenciais sem o uso das **propriedades da potenciação**.

Quadro 2: Propriedades das potências

P1.	$a^m . a^n = a^{m+n}$	**P5.**	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
P2.	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	**P6.**	$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$
P3.	$(a^m)^n = a^{m.n}$	**P7.**	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
P4.	$(a.b)^n = a^n . b^n$	**P8.**	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Fonte: Autoria própria

Observaremos que 25 e 125 são potências de 5. Podemos reduzi-los a base 5, já que 25 = 5^2, e 125 = 5^3.

No lado esquerdo da equação, $(5^2)^{x-1} = \frac{1}{5^3}$ fazendo uso das propriedades da potenciação. podemos aplicar a propriedade 3, uma **potência de potência**. E no lado direito da equação a propriedade 6. $5^{2x-2} = 5^{-3}$

Então como as bases são iguais então igualamos os expoentes:

$$2x - 2 = -3$$

Em forma de conjunto solução, temos que:

$$2x = -3 + 2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Equações como essas e outras mais complexas serão objeto desse trabalho para formação e implementação de nossa sequência didática que será aplicada aos alunos de escolas públicas.

Equações que não há condições de igualar as base serão resolvidas através de logaritmos como se segue: $3^X = 42$, como o 42 não é uma potência de 3, não podemos igualar as base, então a solução será logaritmando ambos os termos e trabalhando com a propriedade dos logaritmos:

$\text{Log } 3^X = \log 42$, daí segue pela propriedade dos logaritmos:

$X.\log 3 = \log 42$, então $X = \log 42/\log 3$

Aí procuramos na tábua dos logaritmos os valores do log 3, e encontramos log 3 = 0,47712125...e log 42 = 1,623249... , arredondamos conforme o número de casas que quisermos que o resultado saia X = 1,6232/0,4771 = 3,4022, que podemos arredondar para X = 3,4.

No próximo capítulo veremos algumas considerações acerca do *Geogebra: Um pouco da sua história e* seu conceito e suas propriedades.

3. O SOFTWARE *GEOGEBRA*

Trataremos aqui nesse ponto sobre o software *Geogebra*. Iremos falar sobre o software: sua história onde surgiu, qual o seu autor, o significado do nome *Geogebra*, o número de países abrangidos por ele.

3.1 UM POUCO DO SOFTWARE *GEOGEBRA*

Como a ênfase é mostrar um ensino que atenda as mudanças que ocorrem, não só em nível local, mas em nível de mundo, temos que atentar para o avanço das T.I. C. – Tecnologias da Informação e comunicação. Então preparamos essa sequência didática no qual a máquina está a nosso serviço para auxiliar-nos nesta tarefa, que de dar ao aluno suporte suficiente para a vida, diz o PCN:

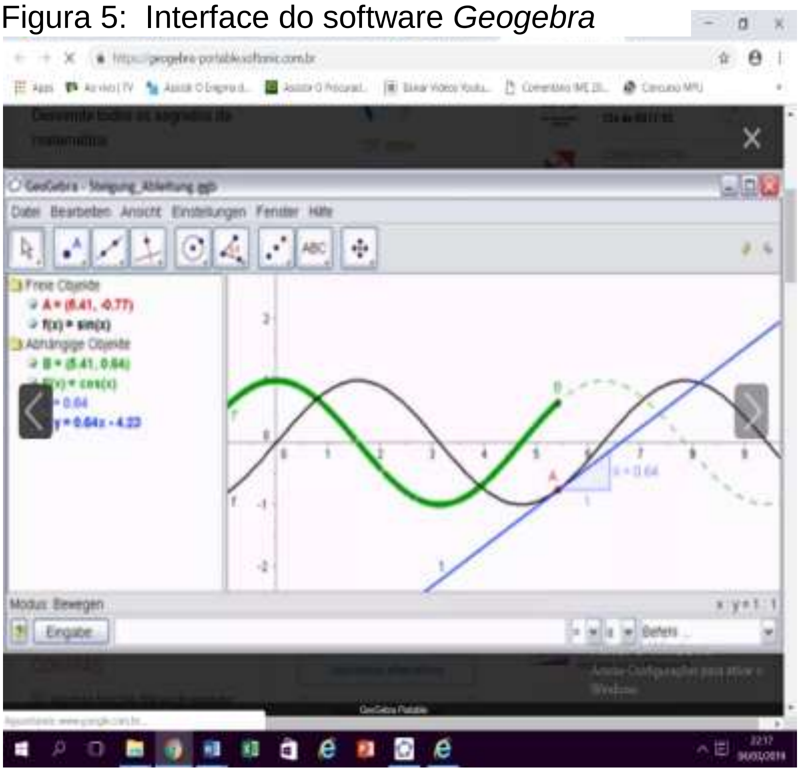
> *Não é possível também, em pleno século 21, renunciar aos recursos oferecidos pela tecnologia da informação e da comunicação e da capacitação dos professores para a utilização plena desses recursos. Nas últimas décadas, o custo financeiro desses equipamentos tem decrescido na mesma proporção da sua crescente relevância para a formação de alunos e professores, de forma que é inadiável nosso esforço em mudar atitudes refratárias a seu uso, uma vez que estão amplamente disseminados na vida social em geral (BRASIL, 2018, p.321).*

Nas atividades da nossa sequência didática foi usado o *Geogebra*. O que vem a ser o *Geogebra*? Para começar o nome vem da junção das palavras geometria e álgebra, e, como já exposto, um *software* livre, criado pela Markus Hahenwater (2001) na “Universidade de Salzburg para ser utilizado em ambiente de sala de aula e tem sido desenvolvido na Universidade Atlantic na Florida” (CARIDADE, 2012).

Utilizando aplicações capazes de estimularem o interesse do aluno pelos conteúdos programáticos, a aprendizagem torna-se mais flexível e estimulante permitindo o envolvimento do aluno no processo educativo. Assim, pretende-se que a utilização das TCIs, neste caso o computador e o *Geogebra*, permita a assimilação dos conhecimentos de forma cativante e motivadora.

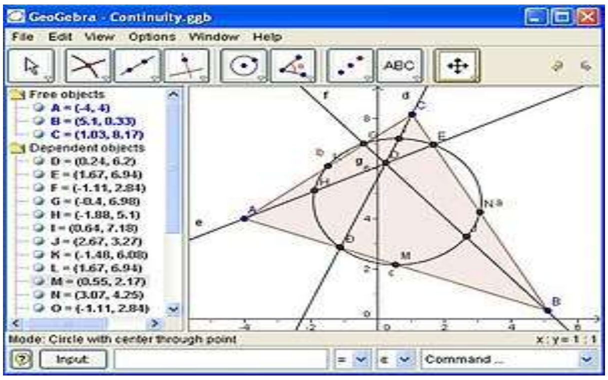
O software *Geogebra* foi escolhido por ser gratuito e de fácil interação e não necessita do conhecimento de informática e propicia uma interação dinâmica (SANTOS, 2011). Apresenta vários recursos que vão além da ideia de Hohenwarter, cálculo geométrico, avanços foram implementados e o *Geogebra* passou a dispor de vários meios numéricos, algébricos e gráficos, (figura 10, 11) (PANIZZI, 2016).

Figura 5: Interface do software *Geogebra*



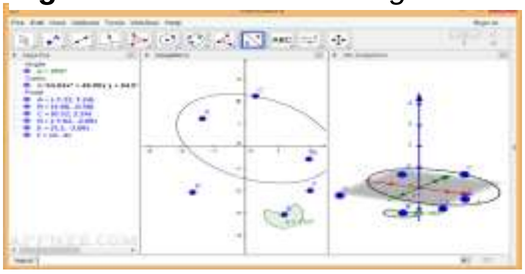
Fonte: https://www.geogebra.org/cas

Figura 6: Interface do *Geogebra*



Fonte: https://www.geogebra.org/cas

Figura 7: interface do *Geogebra*



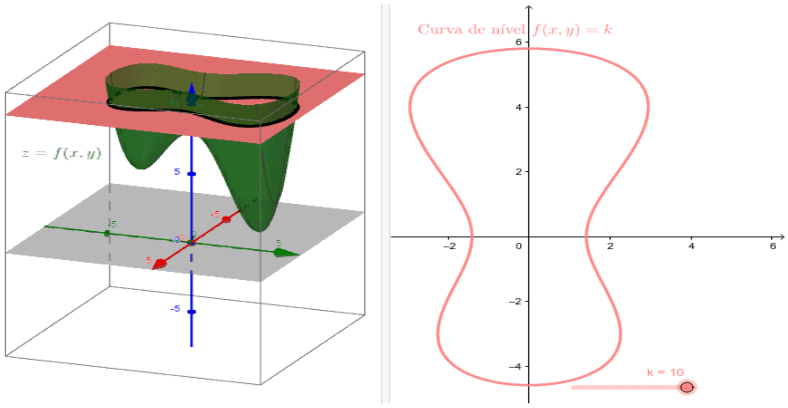
Fonte: https://www.geogebra.org/cas

E diz o autor que o *Geogebra* é um software livre, e foi desenvolvido para finalidade não comerciais e, não lucrativos para a instalação, tendo como prioridade acadêmicos e professores que possam usufruir do *Geogebra* em ambientes de educação, como: laboratórios, escolas, universidades e outras redes vinculadas ao ensino.

O *Geogebra* possui muitas funções e permitem com que o usuário faça a visualização gráfica, e, também, numérica e algébrica por meio janela CAS (Computer Algebra System) e por meio da janela de visualização gráfica, e recursos de planilhas. Alcança inclusive a geometria dinâmica, e oferece a utilização de determinação de ponto, reta, segmento e secções cônicas (PANIZZI, 2016). O *Geogebra* está embasado sob a égide de quatro liberdades, que são dadas ao usuário: Executar o programa, para qualquer fim, estudar como funciona o programa e o modelar às suas necessidades, o usuário tem acesso ao código-fonte que é pré-requisito para ter esta liberdade, redistribuir cópias, de aperfeiçoar o programa, e liberar os seus aperfeiçoamentos (GHIGGI, e KOCH, 2014).

A figura 11 mostra as curvas de nível, que é um trabalho feito no *Geogebra*. Aqui vocês podem notar os detalhes e a beleza com que um trabalho dessa envergadura pode ser produzido no *Geogebra*, a perfeição, as cores e o estilo de montagem, que fazem desse software um dos programas mais acessados da Rede Mundial de Computadores a *internet.*

Figura 8: Curvas de Nível no *Geogebra*



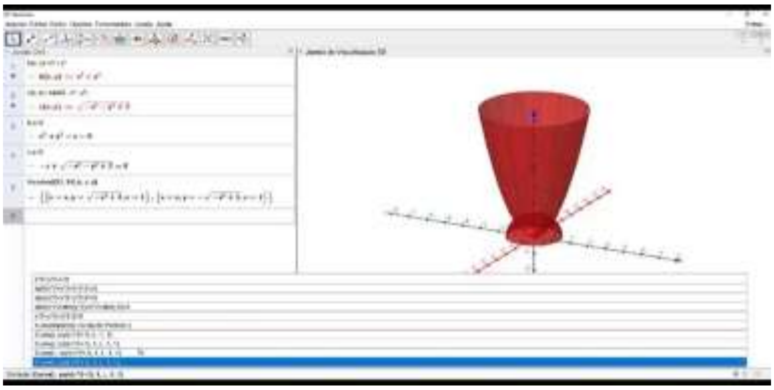
Fonte: Trabalho feito no *Geogebra*

Então, iremos introduzir uma ferramenta do *Geogebra* que é cognominada “Janela CAS” (Computer Algebra System), que possibilita realizar cálculos algébricos.

Esta Ferramenta há no software e de forma mais recente. Podemos calcular de forma muito mais rápida as raízes de qualquer equação, derivar funções polinomiais, fatorar números e demais operações algébricas. A janela CAS é acessada no menu Exibir da barra de ferramentas como visto na figura a seguir (DA SILVA, 2013). O professor pode sugerir atividades para que o aluno possa conhecer as funções da janela CAS do *Geogebra*.

A janela CAS (figura 12) possui tudo o que há de mais moderno em tecnologia. Com ela podemos calcular equações as mais complexas possíveis somente digitando as equações. E podemos também associar ao gráfico da função que será apresentado ao mesmo tempo. Isso possibilitará ao professor de matemática explorar diversos conteúdo. E o que é melhor para todos os níveis de educação dá para explorar a janela CAS. Dá para calcular as raízes, pontos de máximo e de mínimo da função, ponto de interseção com o eixo de Y e olhando para o gráfico que é apresentado, mostrar ao estudante esses pontos que foram mencionados, como é mostrado na figura a seguir:

· **Figura 9:** Calculadora CAS



Fonte: autoria própria

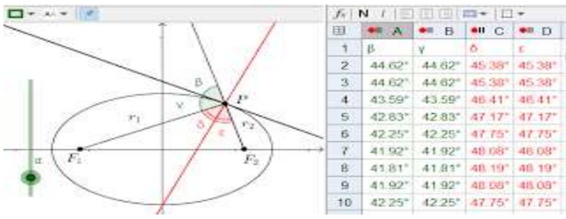
As tarefas da janela permitem até que você resolva um sistema de equações algebricamente e mostre como se dá a solução graficamente.

> *As tarefas matemáticas típicas de um CAS incluem: cálculos aritméticos, simplificações de expressões algébricas, substituições de símbolos em expressões, resoluções de equações e sistemas de equações lineares e não lineares, cálculos matriciais, cálculos de derivadas e integrais, resoluções de equações diferenciais ordinárias e parciais etc. (Bortolossi,*

Humberto José; Pesco, Dirce Uesu; Rezende, Wanderley Moura, 2013, p.143).

Muitas são os recursos dessa poderosa ferramenta, que muito nos auxiliou nesse trabalho. E fácil também de manipular e de instalar e pode se transformar em um dos melhores software (*Geogebra*) para ser usados em ambiente educacional, em sala de aula, pois permite que sejam estalados até dispositivos móveis (aparelhos de telefone celular). Isso facilita em muito o trabalho com os alunos, pois é do conhecimento de muitos o contato que eles possuem com esses aparelhos. Primeiro que, pelo fato de conhecerem as suas teclas e as suas funções, fica muito mais fácil manusear esses aparelhos de que um computados em um laboratório de informática.

Figura 10: Tela de apresentação do *Geogebra*



Fonte: https://www.geogebra.org/cas

A seguir daremos algumas orientações de como utilizar a nossa sequência didática e o *Geogebra.*

4. ORIENTAÇÕES AOS DOCENTES

Neste capítulo nós veremos orientações que são dadas a professores sobre como trabalhar com a nossa sequência didática e como acessar o software *Geogebra* e seus comandos de modo a não cometer falhas e a melhor aproveitar os recursos do programa.

4.1 ORIENTAÇÕES AOS PROFESSORES

É importante para início das atividades, que os docentes tenham em mão a SD e que leiam em voz alta todas as atividades, e perguntem a turma de alunos se eles entenderam, uma por uma, e depois à medida que forem passando para outra atividade leiam também em voz alta. Os docentes deverão instruir os alunos sobre como acessar o *Geogebra* e, também, sobre os diversos comandos, especialmente aqueles que fizerem parte da nossa SD.

Sempre que possível os docentes farão intervenção. Podendo ser uma dica, ou mandar que eles leiam o comando da questão, ou também uma pergunta sobre essa ferramenta e sobre as atividades em si. É muito recomendado que o docente trabalhe com a turma em oficinas, para passar para os estudantes assunto determinados, que serão de muita importância como a propriedade da potenciação.

Para o melhor aproveitamento de nossa SD, os professores deverão sempre fazer perguntas aos alunos sobre os assuntos abordados e, também, se eles conseguiram acessar o *Geogebra* e se recordam os comandos que serão usados ao longo de nossos trabalhos. O professor certifica-se de que o estudante possui todas as ferramentas necessárias para o início dos trabalhos: o computador, ou notebook, ou celular ligado e acessível à internet, o caderno de atividades, caneta, caderno.

Em relação as atividades desenvolvidas, temos que: Na atividade 1, temos como objetivo: que o aluno ao final do experimento saiba o conceito de equação exponencial, ou seja, $\mathbf{a^x = a^n}$. Nesta atividade, o professor deverá estar mostrando ao aluno como ele deverá acessar o *Geogebra,* na internet ou através de um aplicativo previamente instalado na máquina. Deverá também mostrar, depois que ele acessar o *Geogebra,* os comandos que ele deverá usar para resolver as atividades.

O aluno deverá preencher a tabela que foi colocada na atividade com os valores que são pedidos, conforme a tabela abaixo. O professor irá ler o problema para o aluno, e depois certificar-se que o aluno o entendeu bem, para depois começar a usar os comandos do *Geogebra* segundo o problema:

Em uma universidade da capital do Pará uma Fake News de que o reitor daquela universidade teria contraído convid-19 se espalha rapidamente. No primeiro dia, um aluno conta a notícia falsa a outros dois alunos, e no outro dia, cada um dos outros dois conta a notícia a outros dois, e assim por diante sempre no intervalo de um dia".

Pergunta-se: quantos aluno receberam essa notícia durante o décimo dia? Qual a expressão que relaciona o número de dias e o número de pessoas que receberam o *Fake News?*

Tempo t	Número de Pessoas no tempo t	Número de pessoas em forma de potência
1	2	$N = 2^1$
2	2x2=4	$N = 2^2$
3	2x2x2=8	$N = 2^3$
4	2x2x2x2	$N= 2^4$
5		
6		
7		
8		
9		
10		
T		

E depois só irá passar para a próxima atividade se ele tiver entendido bem a anterior.

Na atividade 2, tabela abaixo, temos como objetivo, que ao final do experimento o aluno saiba resolver, com o auxílio do *Geogebra,* uma equação exponencial do tipo $\mathbf{a^x = a^n}$. Além de estar de posse de todos os materiais descritos acima, o estudante deverá estar bem familiarizado com o conceito de equação exponencial segundo a atividade anterior.

Para resolver essa equação, ele deverá com a ajuda do *Geogebra*, fatorar o segundo membro da equação, e depois compará-lo com o membro da equação que possui o **X** conforme é mostrado na tabela**.**

Tabela 1: Resolução de uma equação exponencial do tipo $a^x = b$

Equação	Segundo membro da equação fatorado	Nova equação	Solução da equação
$2^x = 8$	$8=2^3$	$2^x= 2^3$	X=3
$7^x = 49$	$49=7^2$	$7^x = 7^2$	X=2
$5^x = 125$			
$3^X = 243$			
$11^X = 14641$			
$11^X = 1331$			
$13^X = 169$			
$13^X = 28561$			
$5^X = 3125$			
$11^X = 121$			
$5^X = 625$			
$7^x = 2401$			

Fonte: Trabalho de autoria própria

Na atividade 3, que o aluno saiba, ao final do experimento resolver uma equação exponencial do tipo $\mathbf{a^x = 1/a^n}$, ou seja, é uma equação parecida com a equação da atividade anterior, mas é tomada pela inversão de base das potências. Nesta atividade o aluno deveria ter uma noção completa e perfeita das propriedades das potências, pois ao inverter uma das bases o expoente ficará com o sinal trocado. Tudo conforme a tabela. Se o aluno esqueceu essa noção, seria bom o professor recordar a ele através de uma intervenção. Isso ele deverá com a ajuda do *Geogebra* o termo da equação que tiver invertido e compara com aquela que tiver o sinal de X, semelhantemente a atividade anterior.

Equação	Denominador da fração fatorado	Nova equação	Solução da equação
$2^x = 1/8$	$1/8=1/2^3= 2^{-3}$	$2^x= 2^{-3}$	X= -3
$(1/8)^x = 16$	$1/8=1/2^3= 2^{-3}$	$2^{-3x} = 2^4$	X=-4/3
$3^x = 1/27$	$1/27= 3^{-3}$	$3^x = 3^{-3}$	X=-3
$(1/25)^X = 1/625$			
$11^X = 1/14641$			
$11^X = 1/1331$			
$13^X = 1/169$			
$(1/13)^X = 28561$			
$(1/5)^X = 3125$			
$11^X = 1/121$			
$(1/5)^X = 1/625$			
$(1/7)^x = 2401$			

A atividade 4, tem como objetivo que o aluno saiba ao final do experimento resolver uma equação que se reduz a uma equação do 1º grau, através de um artifício $a^x = Y$, transformando-a em uma equação em Y. Ele deverá resolver a equação auxiliar no *Geogebra,* para depois comparar o seu resultado com o artifício que usou no início da equação, segundo a tabela abaixo. É importante o estudante não passar para a atividade 5, sem conhecer perfeitamente como operar com essa atividade.

A atividade 5, resolver uma equação que se reduz a uma equação do 2º grau, ENTÃO ele deve ter uma noção de equação do 2º grau para poder resolver a tarefa que está sendo proposta. Ele deverá utilizar o mesmo artifício que ele utilizou na atividade anterior. Com a diferença de que essa equação se reduz a equação do segundo grau em Y.

Ele deverá resolver essa equação auxiliar no *Geogebra* para então compará-la com o artifício que foi usado no começo da equação, de acordo com a tabela abaixo.

Equação	Equação auxiliar	Solução da equação auxiliar	Solução da equação principal
$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 14$	Y+2Y+4Y=14	Y=2	$2^x=2^1$ X=1
$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 117$	Y + 3Y + 9Y = 117		
$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 28$			
$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 56$			
$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 351$			
$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 1053$			
$5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 153$			
$5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 775$			
$4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2} = 84$			
$3^{x+2} + 3^{x+1} - 3^x = 33$			

E ainda mais interessante a equação da quinta atividade, pois como, a equação se reduz a uma equação do segundo grau, existe inúmeras possibilidades para se encontrar as soluções.

Equação	Equação auxiliar	Solução da Equação auxiliar	Solução da equação
$\mathbf{4^x - 2^x - 2 = 0}$			
$3^{2x} + 3^x = 12$			
$3^{2x} + 3^x = 2$			
$5^{2x} + 5^x = 2$			
$5^{2x} + 5^x = 30$			
$25^x - 5^x = 20$			
$9^x - 3^x = 72$			
$16^x - 4^x = 240$			
$2^{2x} – 2^x = 56$			
$3^{2x} – 3^x = 19656$			
$2^{2x} – 2^x = 992$			

Feitas essas atividades o professor poderia complementar com exercícios do ENEM, ENCEJA, etc, além dos exercícios que se encontram no final de cada atividade, para aprofundar o conhecimento.

5. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática se divide em cinco atividades, cada uma das quais abordando a resolução de equação exponencial e abrange desde o conceito de equação exponencial até àquela que podem ser resolvidas por meio de uma equação do 1º grau e, finalmente, ao tipo que se reduz a uma equação do 2º grau.

ATIVIDADE 1: Equação Exponencial tipo 1

Essa atividade consiste na resolução de um problema em uma tabela, cuja solução será dada em um aplicativo *Geogebra*, na janela de Cálculo Simbólico (CAS), em que o aluno fará a comparação do tempo (t), na tabela e o número de pessoas que escutam o *Fake News,* representada na forma de potência, será possível estabelecer um padrão para esse acontecimento.

Objetivo: Com o uso de um aplicativo *Geogebra*, o estudante irá adentrar no conceito de uma equação exponencial, qual seja $\mathbf{a^n = a^y}$.

Material: Caneta, lápis, caderno, celular, computador, notebook, tabletes ou smartphone etc.

Análise a Priori: Esperamos que com essa atividade o aluno perceba que o aumento do número de pessoas que escutam o *Fake News* é exponencial, ou seja, duplicando-se o número de pessoas que escutam o *Fake News, conforme o tempo avança uma unidade de tempo, será estabelecida uma regularidade.*

Tempo de duração: 0,5 HORA

Problema: "Em uma universidade da capital do Pará uma *Fake News* de que o reitor daquela universidade teria contraído convid-19 se espalha rapidamente. No primeiro dia, um aluno conta a notícia falsa a outros dois alunos, e no outro dia, cada um dos outros dois conta a notícia a outros dois, e assim por diante sempre no intervalo de um dia". Pergunta-se: quantos aluno receberam essa notícia durante o décimo dia? Qual a expressão que relaciona o número de dias e o número de pessoas que receberam o *Fake News*?

Tabela 2: O número de pessoas que recebe o Fake News em função do tempo.

Tempo t	Número de Pessoas no tempo t	Número de pessoas em forma de potência
1	2x1	$N = 2^1$
2	2x2=4	$N = 2^2$
3	2x2x2=8	$N = 2^3$

4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
T		

Fonte: autoria própria

Responda as perguntas

i) Ao fazer essa série de ações que você conclui?

ii) Qual a equação que dá o valor do número de pessoas em função do tempo?

iv) Qual seria a equação quando, em vez de duplicar, número de pessoas quadruplicasse?

v) Para um número de pessoas igual a 4096, quanto tempo se passou?

ATIVIDADE 2: Equação exponencial tipo 2

O aluno, de posse de uma tabela, no qual irá preenchê-la. Ela apresenta várias equações exponenciais, e ele terá que fatorar o segundo membro da equação com a ajuda do *Geogebra* e colocar o resultado na segunda coluna, e comparar com o primeiro membro, isso irá gerar uma nova equação, que ele irá colocar na terceira coluna e achar a solução da equação e colocar na quarta coluna. Então com base nesta atividade responder as questões que estão colocadas.

Objetivo: Resolver uma equação exponencial com o uso do *Geogebra*.

Material: Caneta, lápis, caderno, celular, computador, notebook, tabletes, ou smartphone etc. e uma calculadora.

Análise a Priori: Esperamos que com essa atividade e com o preenchimento da tabela o aluno perceba que quando temos uma equação exponencial do tipo $a^x = b$, e que o termo b pode ser fatorado em forma de potências de base a, de maneira que teríamos $a^x = a^y$, então a solução da equação seria $x = y$.

Tempo de duração: 0,5 HORA

Tabela 3: Resolução de uma equação exponencial do tipo $a^x = b$

Equação	Segundo membro da equação fatorado	Nova equação	Solução da equação
$2^x = 8$	$8=2^3$	$2^x= 2^3$	X = 3
$7^x = 49$	$49=7^2$	$7^x = 7^2$	X = 2
$5^x = 125$	$125=5^3$	$5^x = 5^3$	X = 3
$3^X = 243$			
$11^X = 14641$			
$11^X = 1331$			
$13^X = 169$			
$13^X = 28561$			
$5^X = 3125$			
$11^X = 121$			
$5^X = 625$			
$7^x = 2401$			

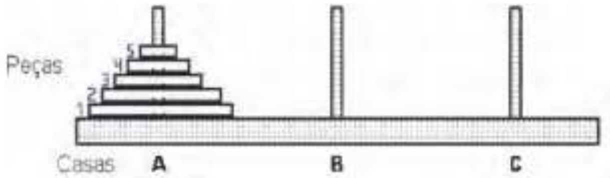
Fonte: autoria própria

Responda com o auxílio do *Geogebra*:

i) Ao fazer essa série de ações com o *Geogebra* o que você conclui?

ii) (ENEM, 2011) A torre de Hanói, figura 3, é um jogo que tem o objetivo de mover todos os discos de uma haste para outra, utilizando o menor número possível de movimento, respeitando-se as regras.

Figura 11: A Torre



Fonte: pesquisa na internet

As regras são:

1- Um disco maior não pode ser colocado sobre um disco menor;

2- Pode-se mover um único disco por vez;

3- Um disco deve estar sempre em uma das três hastes ou em movimento.

Usando a torre de Hanói e baseando-se nas regras do jogo, podemos montar uma tabela, conforme a tabela 3, entre o número de peças (X) e o número mínimo de movimentos (Y):

Tabela 4: número de movimentos na Torre de **Hanoi**

Número de peças	Número mínimo de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15

A relação entre (X) e (Y) é:

A) $Y = 2^X - 1$
B) $Y = 2^{X-1}$
C) $Y = 2^X$
D) $Y = 2X - 1$

iii) (UFVJM, 2017) Em uma gincana de alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola, foi feita a seguinte pergunta: “A soma das idades dos dois filhos do professor Pedro é o resultado da equação $2^{3x-2} - 4^{x+6} = 0$. Sabendo-se que a diferença de idade entre os dois filhos é de dois anos, podemos afirmar que a idade do filho mais novo do professor Pedro é?” A resposta CORRETA para esta pergunta é:

A) 10

B) 8

C) 6

D) 4

iv) O que aconteceria caso o valor de uma das bases seja um número negativo? Experimente digitando uma das bases negativas no *Geogebra*.

ATIVIDADE 3: Equação exponencial tipo 3

Nessa atividade, o aluno, de posse de uma tabela, que em valores se assemelha a tabela da atividade anterior, e com a ajuda do *Geogebra*, terá que decompô-lo, inverter o segundo membro e igualar as potências, isso vai gerar uma nova equação, Devido a isso, os respectivos expoentes da base que for invertida troca de sinal, e em seguida de acordo com as atividades anteriores, igualar os expoentes das bases, ou seja, fazer de $\mathbf{a^x = 1/a^y}$ então $\mathbf{a^x = a^{-y}}$, logo $\mathbf{x = -y}$. O aluno irá perceber que o resultado é similar ao da equação da atividade anterior, com exceção de uma.

Título: Inversão de base de uma potência em uma equação exponencial do tipo $a^x = 1/a^m$.

Objetivo: Resolver uma equação exponencial do tipo $a^x = 1/a^y$.

Material: Caneta, lápis, caderno, celular, computador, notebook, tabletes ou smartphone.

Análise a priori: Esperamos que com essa atividade o aluno comece a trabalhar o conceito da inversão de base de uma potência e com base na resolução da atividade anterior, possa resolver as equações exponenciais da tabela.

Tempo de duração: 0,5 HORA

Tabela 5: Resolução de uma equação exponencial do tipo $a^x = 1/b$

Equação	Denominador da fração fatorado	Nova equação	Solução da equação
$2^x = 1/8$	$1/8=1/2^3$	$2^x= 2^{-3}$	X= -3
$(1/8)^x = 16$	$8=2^3$	$2^{3x}= 2^4$	X= -4/3
$3^x = 1/27$	$27=3^{-3}$	$3^x = 3^{-3}$	X = -3
$(1/25)^X = 1/625$			
$11^X = 1/14641$			
$11^X = 1/1331$			
$13^X = 1/169$			
$(1/13)^X = 28561$			
$(1/5)^X = 3125$			
$11^X = 1/121$			
$(1/5)^X = 1/625$			
$(1/7)^x = 2401$			

Fonte: autoria própria

Responda: com o auxílio do *Geogebra*

i) O que você observou nessa atividade?

ii) Antônio aplica R$ 15.000,00 sem fazer novos aportes em Títulos do Tesouro Direto Selic a uma taxa anual de 6,50% ao ano, figura 4. a) Qual será o saldo no final de 12 meses? b) Qual o montante a ser resgatado após 3 anos?

iii) Você conseguiria resolver qualquer equação desse tipo no *Geogebra*?

iv) Resolva a equação $4^x = 1/13$ no *Geogebra*?

ATIVIDADE 4: Equação Exponencial tipo 4

Nessa atividade o aluno estará de posse de uma tabela na qual ele irá preencher, com a ajuda do *Geogebra*, em que terá uma série de equações exponenciais do tipo $a^x + a^x + a^{x+1}$ ...= b, ou seja, equações em que não é mais possível igualar as bases diretamente. Sua resolução é, em alguns detalhes, diferente das outras de atividades anteriores, pois ela é redutível a uma equação do 1º grau, por exemplo na equação $3^x + 3^{x+1} = 36$, transforma a equação auxiliar em **y**, fazendo $\mathbf{3^x = y}$, então a equação do exemplo ficará $\mathbf{y + 3y = 36,}$ trabalhando com as potências e, com o auxílio do *Geogebra*, calcular o valor de **y** na equação do 1º grau. Depois de achar o valor de **y**, voltar para a equação em **x**, e determiná-lo também com o *Geogebra*.

Título: Equação exponencial da forma $a^x + a^{x+1} + a^{x+2}$ ...= b.

Objetivo: Resolver uma equação exponencial do tipo $\mathbf{a^x + a^{x+1} + a^{x+2}}$ **...= b**.

Material: Caneta, lápis, caderno, celular, computador, notebook, tabletes ou smartphone.

Análise a Priori: Esperamos que com essa atividade o educando possa resolver uma equação exponencial do tipo $a^x + a^{x+1}$ ...= b no *Geogebra*, sempre percebendo que a soma ou diferença de fatores indica que a equação não se resolve inteiramente pelo método usado na atividade 2. No *Geogebra*, resolverá primeiro uma equação auxiliar em **y,** por meio do artifício $\mathbf{3^x = y,}$ logo depois voltará a equação principal em **x.** Por Exemplo: $\mathbf{3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 117}$, que se reduz a equação auxiliar y + 3y + 9y = 117, tendo o aluno resolvido a equação auxiliar em y, achado o valor de y = 9, retorna para a equação principal em x, resolvendo-a, no caso do nosso exemplo, achando a solução x = 2 e depois retornar para **x** e resolver a exponencial, agora igualando as bases como na atividade 2.

Tempo de duração: 0,5 HORA

Tabela 6: Equação Exponencial da forma redutível a equação do 1º Grau

Equação	**Equação auxiliar**	**Solução da equação auxiliar**	**Solução da equação principal**

$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 14$	Y+2Y+4Y=14	Y=2	$2^x=2^1$ X=1
$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 117$			
$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 28$			
$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 56$			
$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 351$			
$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 1053$			
$5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 153$			
$5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 775$			
$4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2} = 84$			
$3^{x+2} + 3^{x+1} - 3^x = 33$			

Fonte: autoria própria

Responda com a ajuda do *Geogebra*

i) O acidente do reator nuclear de Chernobyl, em 1986, lançou na atmosfera grande quantidade de estrôncio (90Sr) radioativo, cuja meia-vida é de 28 anos. Supondo que esse isótopo fosse a única contaminação radioativa e que o local poderá ser considerado seguro quando a quantidade de 90Sr se reduzir, por desintegração, a 1/16 da quantidade inicialmente presente, o local poderá ser habitado novamente a partir do ano de:

A função que relaciona a quantidade de 90Sr presente em função do tempo é dado por: $N(t) = N_o \cdot (1/2)^{t/28}$

a) 2014 b) 2098 c) 2266 d) 2986

ii) Resolva a equação $2^x + 2^{x+1} = 24$, primeiro utilizando o *Geogebra* e depois caneta e o caderno?

iii) Poderia haver o caso desse tipo de equação apresentar mais de uma solução?

IV) Haveria o caso desse tipo de equação não apresentar solução? Dê um exemplo.

ATIVIDADE 5: Equação Exponencial tipo 5.

Nessa atividade o aluno irá resolver uma equação exponencial do tipo $a^{2x} + a^x = b$, que se reduz a uma equação do 2º grau, de modo similar a atividade anterior. No *Geogebra*, resolverá primeiro uma equação auxiliar em **y,** por meio do artifício $\mathbf{3^x = y}$**,** logo depois voltará a equação principal em **x.** Por Exemplo: $3^{2x} + 3^x = 90$, que se reduz a equação auxiliar $y^2 + y = 90$, tendo o aluno resolvido a equação auxiliar em y, achado os valores $y = -10$ ou $y = 9$, retorna para a equação principal em x, resolvendo-a, no caso do nosso exemplo, achando a solução $x = 2$**.**

Objetivo: O objetivo é com o auxílio de um aplicativo *Geogebra*, o aluno possa resolver a equação exponencial $\mathbf{a^{2x} + a^x = b}$ redutível ao 2º grau.

Material: Caneta, lápis, caderno, celular, computador, notebook, tabletes ou smartphone.

Análise a priori: Esperamos que o aluno possa saber identificar quando precisa usar um artifício para resolver uma equação exponencial que se reduz a equação do 2º grau e resolvê-la no *Geogebra*.

Tempo de duração: 0,5 HORA

Tabela 7: Equação exponencial redutível a equação do 2º grau

Equação	Equação auxiliar	Solução da Equação auxiliar	Solução da equação
$4^x – 2^x – 2=0$			
$3^{2x} + 3^x = 12$			
$3^{2x} + 3^x = 2$			
$5^{2x} + 5^x = 2$			

$5^{2x} + 5^x = 30$			
$25^x - 5^x = 20$			
$9^x - 3^x = 72$			
$16^x - 4^x = 240$			
$2^{2x} - 2^x = 56$			
$3^{2x} - 3^x = 19656$			
$2^{2x} - 2^x = 992$			

Fonte: autoria própria

Responda com o auxílio do *Geogebra*

i) O que torna a resolução dessa diferente da resolução da solução da atividade anterior?

ii) Resolva a equação $3^{2x} + 3^x = 90$ usando o aplicativo *Geogebra*.

iii) Pode acontecer que essa equação não apresente solução?

iv) Pode acontecer que esse tipo de equação apresente só uma solução?

6. REFERÊNCIAS.

ALENCAR, Sergio Vicente et al. **A gênese instrumental na interação com o *Geogebra*: proposta de uma oficina para professores de matemática**. 2012.

BARROSO, Dejair Frank. **Construindo o Conceito de Função Exponencial a partir dos Objetos Digitais de Aprendizagem “Torre de Hanói” e “*Geogebra*”**. Juíz de Fora: UFJF, 2009.

BITTAR, Marilena; GUIMARÃES, Sheila Denize; VASCONCELLOS, Mônica. A integração da tecnologia na prática do professor que ensina matemática na educação básica: uma proposta de pesquisa-ação. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 3, n. 1, p. 84-94, 2008.

BITTAR, Marilena. Uma Proposta para o Estudo da Integração da Tecnologia na Prática Pedagógica de Professores de Matemática. **Em Teia| Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana-ISSN: 2177-9309**, v. 6, n. 3, 2016.

BORGES, Ulisses dos Santos. **Curso de Logaritmo para o Ensino Médio com Proposta de Atividades Alternativas**. 2014

Bortolossi, Humberto José; Pesco, Dirce Uesu; Rezende, Wanderley Moura. **COMPUTAÇÃO SIMBÓLICA NO ENSINO MÉDIO COM O SOFTWARE GRATUITO *GEOGEBRA***. 2012.

BRASIL, BNCC – Base Nacional Comum Curricular http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/BNCC_19dez2018_site.pdf, acesso em 13 de fevereiro de 2019.

BRASIL, PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf, acesso em 13 de fevereiro de 2019.

CABRAL, N.F. **O Papel nas Interações Professor - Aluno na Construção da Solução Lógico - Aritmética Otimizada de um Jogo com Regras**. 2004

CALADO, Tamires Vieira; BARROSO, M. M. Um estudo em livros didáticos com base na teoria dos registros de representação semiótica para o ensino de geometria. **IX Encontro de Produção Científica e Tecnologia**, 2014.

COELHO, Jose Renato Paveis. **O *GEOGEBRA* NO ENSINO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS.** 2016. Mestrado Profissional em Matemática. Em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Rio de Janeiro. Acessado em 04 de fevereiro de 2019.

COLL, César; ONRUBIA, Javier. A construção de significados compartilhados em sala de aula: atividade conjunta e dispositivos semióticos no controle e no acompanhamento mútuo entre professor e alunos. **Coll, C. y Edwards, D. Encino, aprendizaje e discurso em sala de aula. Aproximações ao estudo do discurso educacional**, p. 75-106, 1998.

CREASE, Robert P. **As grandes equações: a história das fórmulas matemáticas mais importantes e os cientistas que as criaram**. Zahar, 2011.

DALLEMOLE, Joseide Justin. REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E GEOMETRIA ANALÍTICA: UMA EXPERIÊNCIA COM O AMBIENTE VIRTUAL SIENA. **Teses e Dissertações PPGECIM**, 2014.

DA SILVA, Luiz Fernando, USANDO O SOFTWARE *GEOGEBRA* PARA EXPLORAR FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS: UMA PROPOSTA DE APLICAÇÕES, **Dissertação. Universidade Estadual de Londrina**. 2013

DA SILVA MACEDO, Shirley et al. Uso de material reciclado para a construção de material didático no ensino da matemática. **Research, Societyand Development**, v. 8, n. 3, p. 4883756, 2019.

DE GÓES, Maria Cecília Rafael. **A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade**. 2000.

DUVAL, Raymond; MORETTI, TradMériclesThadeu. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento Registres de représentation sémiotique et fonction nement cognitif de lapensée. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

Einhardt, van Fabrício Braum. Aplicações das Funções Exponenciais e Logarítmicas Usando o Aplicativo MalMath. 2016

ESTEVAM, Everton José Goldoni et al. Ensino Exploratório de Matemática e Tecnologias Digitais: a elaboração da lei dos senos mediada pelo software *Geogebra*. **Acta Scientiae**, v. 20, n. 3, 2018.

FERREIRA, Maria Eduarda Diniz; OLIVEIRA, Sergio Batista; NETO, João Coelho. Objetos de Aprendizagem e o Ensino da Matemática: um mapeamento dos recursos utilizados em sala de aula. **Research, Society and Development**, v. 8, n. 1, p. 3, 2019.

HELENA, Aline Fernanda Faquini. **Modelagem matemática no ensino médio: Uma abordagem para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas**. Universidade Estadual Paulista 'Júlio de Mesquita". Acessado em 04 de fevereiro de 2019. Dissertação Mestrado. 2016.

LOPES, Maria Maroni. Sequência didática para o ensino de trigonometria usando o software *Geogebra*. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 27, n. 46, p. 631-644, 2013.

MASETTI, Cristina. **Análise de livros didáticos de matemática: função exponencial**. 2016.

MOREIRA, Daniel Monteiro da Silva. **Geometria Espacial – Cálculo de Volume usando App Inventor**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

NICOLAU, Carlos. **Tendências em Educação Matemática–Resolução de Problemas: Como resolver um problema envolvendo função exponencial**. Acessado em 05 de fevereiro de 2019, 2010.

NOGUEIRA, Eduardo Leandro Peres. **O uso da calculadora gráfica *Geogebra* no smartphone como ferramenta para o ensino das funções exponencial e logarítmica**. Acessado em 04 de fevereiro de 2019. Dissertação de Mestrado. Brasil. 2019.

PADILHA, LUIZ CLÉBER SOARES. **Integração das Tecnologias na Prática Pedagógica de Professores de Matemática do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental que Atuam em Sala de Tecnologia de Escolas Públicas Participantes de um Projeto de Extensão para Formação de Multiplicadores. 2013.** Acessado em 12 de fevereiro de 2019.

PANIZZI, Luan Endlich. O Uso do software *Geogebra* em atividades exploratórias de ensino-aprendizagem no cálculo diferencial: Uma experiência com acadêmicos de licenciatura em matemática. 2016.

PETLA, Revelino J.; ROLKOUSKI, Emerson. *Geogebra*–Possibilidades para o ensino de matemática. **União da Vitória, PR**, p. 1419-6, 2008.

QUEIROZ, Rogeria Teixeira Urzêdo; ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Equação/Função Exponencial em dois Livros Didáticos antes e durante O Movimento da Matemática Moderna. (2016, página 01).

Rabardel, P. (1995a). Leshommes et lestechnologies: approche cognitive des instruments com temporains. Paris: Armand Colin.

ROBALLO, Murilo Sergio. Aplicações de Funções Exponenciais e Logarítimicas. 2014

ROSSI, Patrícia Rodrigues da Silva. Logaritmos no ensino médio: construindo uma aprendizagem significativa através de uma sequência didática. 2010.

SANTAELLA, Lúcia. **O que é semiótica**. Brasiliense, 2017.

SILVA, Rodrigo Sychocki da. O uso de problemas no ensino e aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas na escola básica. 2012.

SILVA, Deivi da. Softwares e aplicativos na educação matemática: auxílio para o ensino-aprendizagem da matemática na educação básica. **Matemática Licenciatura-Unisul Virtual**, 2018.

SOUZA JUNIOR, Airton Wagner de et al. Uso do software *Geogebra* e modelagem matemática no ensino de funções. 2018.

TOLEDO, Luciana Alcantara de. Ensino da função exponencial: análise de resultados. 2018.

TOMIO, Daniela; SCHROEDER, Edson; ADRIANO, Graciele Alice Carvalho. A análise microgenética como método nas pesquisas em educação na abordagem histórico-cultural. **Reflexão e Ação**, v. 25, n. 3, p. 28-48. 2017.

Fábio José da Costa Alves

Fábio José da Costa Alves

Pós-Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN Doutorado em Geofísica pela Universidade Federal do Pará - UFPa Mestrado em Geofísica pela Universidade Federal do Pará - UFPa graduação em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Pará-UFPa Possui Licenciatura em Matemática pela União das Escolas Superiores do Pará–UNESPa. Licenciatura em Ciências de 1º Grau pela União das Escolas Superiores do Pará – UNESPa

Luís Cláudio Pinto Costa

Luís Cláudio Pinto Costa

Graduado em Matemática pela Universidade do Estado do Pará. Foi Professor de Matemática nas Escolas Particulares: Colégio Nóbrega, Colégio Rui Barbosa e Instituto Dom Bosco. Atualmente Professor de Matemática em Escolas Pública do Estado do Pará.

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem