

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Metodologia para o Ensino de
Matemática no Nível Médio.



Antonino de Araújo Farias
Roberto Paulo Bibas Fialho

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE MATRIZES

BELÉM/PA
2021

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}^t =$$

Clay Anderson Nunes Chagas
Reitor Universidade do Estado do Pará

Ilma Pastana Ferreira
Vice-Reitora Universidade do Estado do Pará

Renato da Costa Teixeira
Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação

Anderson Madson Oliveira Maia
Diretor do Centro de Ciências Sociais e Educação

Fábio José da Costa Alves
Coordenador do PPGEM

Natanael Freitas Cabral
Vice coordenador do PPGEM

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

Conselho Editorial

Profa. Dra. Acylena Coelho Costa
Profa. Dra. Ana Kely Martins da Silva
Prof. Dr. Antonio José Lopes
Prof. Dr. Benedito Fialho Machado
Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha
Profa. Dra. Celsa Herminia de Melo
Maranhão
Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei
Pereira
Profa. Dra. Claudianny Amorim Noronha
Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz
Prof. Dr. Dorival Lobato Junior
Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira
Profa. Dra. Eliza Souza da Silva
Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves
Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da
Silva
Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo
Profa. Dra. Glaudianny Amorim Noronha
Prof. Dr. Gustavo Nogueira Dias
Prof. Dr. Heliton Ribeiro Tavares

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg
Quaresma
Prof. Dr. José Antonio Oliveira Aquino
Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes
Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento
Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de
Araújo
Prof. Dr. Marcos Monteiro Diniz
Profa. Dra. Maria de Lourdes Silva
Santos
Profa. Dra. Maria Lúcia P. Chaves Rocha
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Prof. Dr. Raimundo Otoni Melo Figueiredo
Profa. Dra. Rita Sidmar Alencar Gil
Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho
Profa. Dra. Talita Carvalho da Silva de
Almeida

Comitê de Avaliação

Roberto Paulo Bibas Fialho
Fábio José da Costa Alves
Fernando Cardoso de Matos

FARIAS, Antonino de Araújo. FIALHO, Roberto Paulo Bibas. Uma Sequência Didática para o Ensino de Matriz. Produto Educacional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, (PPGEM/UEPA), 2021.

ISBN: 978-65-00-37099-7

Ensino de Matemática; Ensino de Matemática por Atividade; Ensino de Matrizes.

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO	5
2. ASPECTOS HISTÓRICOS	6
3. REVISÃO DE ESTUDOS	17
4. ENSINO POR ATIVIDADE	20
5. SEQUÊNCIA DIDÁTICA	23
5. 1. ATIVIDADE 01	27
5. 1. 1. Atividade de Aprofundamento da Atividade 1	29
5.2. ATIVIDADE 02	30
5. 2. 1. Atividade de Aprofundamento da Atividade 2	33
5. 3. ATIVIDADE 03	37
5. 3. 1. Atividade de Aprofundamento da Atividade 3	39
5. 4. ATIVIDADE 04	41
5. 4. 1. Atividade de Aprofundamento da Atividade 4	43
5. 5. ATIVIDADE 05	45
5. 6. ATIVIDADE 06	46
5. 6. 1. Atividade de Aprofundamento da Atividade 6	48
5. 7. ATIVIDADE 07	50
5. 7. 1. Atividade de Aprofundamento da Atividade 07	52
5. 8. ATIVIDADE 08	54
5. 8. 1. Atividade de Aprofundamento da Atividade 08	56
5. 9. ATIVIDADE 09	58
5. 9. 1. Atividade de Aprofundamento da Atividade 09	61
5.10. ATIVIDADE 10	64
5. 10. 1. Atividade de Aprofundamento da Atividade 10	66
6. CONSIDERAÇÕES.....	68
7. REFERÊNCIAS	70
ANEXO – FICHA DE AVALIAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL	75
APÊNDICE A – Mapa Conceitual do Assunto de Matrizes.....	76

1. APRESENTAÇÃO

O intuito deste produto é oferecer aos professores, um material que norteie o trabalho com o assunto de Matrizes de forma mais dinâmica.

A importância de se estudar o assunto de Matrizes é percebido não somente na Matemática, mas também em outras áreas como na Engenharia, na Medicina, na Química, na Física, na Economia, na Estatística, na Psicologia e outras. Neste trabalho, nos preocupamos em mostrar a importância de estudar esse assunto na Educação Básica e no Ensino Superior.

Este produto poderá beneficiar a atividade docente mediante a necessidade encontrada e alguns pontos que nos fizeram repensar o nosso fazer pedagógico.

Como docente e um dos autores deste produto tive a oportunidade de ensinar o conteúdo de Matrizes no Ensino Médio, com o cuidado de mostrar a importância dele na série em questão e incluso no assunto de Geometria Analítica.

Por isso, construímos este material, que apresenta uma Sequência Didática sobre Matrizes que foi utilizado em uma dissertação de mestrado do autor Farias (2021) com o título Ensino de Matrizes por Atividades em Sequências Didáticas: Estudos de Situações Didáticas e Aspectos Curriculares, que tem o objetivo de analisar e refletir sobre as potencialidades de uma sequência didática desenvolvida para o ensino de Matrizes, de modo a favorecer a construção do conhecimento de estudantes do 2ª ano do Ensino Médio contribuindo para a melhoria do desempenho e rendimento deles em relação à resolução de questões referentes ao tema.

Os resultados dessa dissertação foram satisfatórios, devido a isso temos o desejo de poder contribuir com a prática de ensino dos colegas docentes quando abordarem este assunto em suas aulas.

Os estudantes desde o Ensino Fundamental não são preparados para analisar situações que envolvem dados de tabelas e gráficos, e ao chegarem ao Ensino Médio se deparam com situações-problema que exigem uma maior habilidade. Essas dificuldades estão presentes nas pesquisas de Steinhorst (2011), Avila (2013), Messias, Sá e Vilhena (2007) principalmente quando falamos nas operações com Matrizes, pois ora os estudantes não compreendem a teoria, ora não compreendem a aplicação prática desse assunto.

O objetivo deste produto educacional é apresentar uma Sequência Didática para o ensino de Matriz para os professores. A construção do mesmo levou em

consideração documentos curriculares como Parâmetro Curriculares Nacionais - PCNs e Base Nacional Comum Curricular - BNCC, bem como um conjunto de questionamentos e potencialidades apresentadas por várias pesquisas nessa área.

2. ASPECTOS HISTÓRICOS

Nesse capítulo apresentamos um recorte histórico em relação a história da matemática sobre as matrizes, mesmo que sem ser da forma como a conhecemos na atualidade. Algo que possibilitou ter um vislumbre sobre como e quando a concepção das matrizes se estruturou.

Os Chineses eram povos das civilizações antigas do Ocidente que representavam os sistemas lineares, por meio de seus coeficientes, com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro, e assim descobriram o método de resolução por eliminação. Exemplos desse procedimento são encontrados nos nove capítulos sobre a arte da matemática, em um texto que data provavelmente do século 111 a.C. (EVES, 2004, p. 243).

No início de seus estudos desenvolveram livros relacionados ao tratamento de cálculos astronômicos, assim como, promoveram contribuições a respeito das propriedades relacionadas ao triângulo retângulo, frações, geometria relacionada à álgebra e na aritmética. Boyer e Merzback (2012, p. 143 – 144) destaca que “datar os documentos matemáticos da China não é nada fácil”, pois segundo os autores “Não se conhece nenhuma versão dos primeiros clássicos que tenha se preservado.” Por isso a importância do conteúdo do livro *Jiuzhang suan-chu* (Chui-chang suan-shu) ou Nove Capítulos sobre a arte matemática.

Eves (2004, p. 243) corrobora dizendo que este livro é “o mais importante dos textos de matemática chineses”. Pois nesse período, os chineses gostavam de manusear os diagramas, gosto que fez com que surgisse o primeiro registro de um quadrado mágico, onde a soma na horizontal, na vertical e na diagonal dos números fosse sempre iguais a 15, veja:

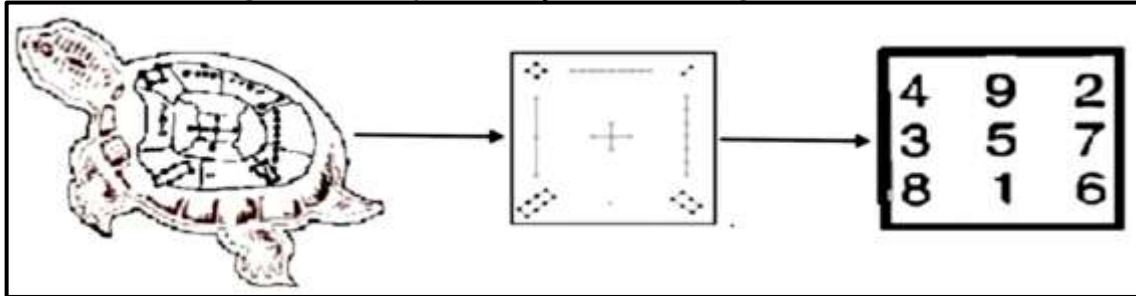
Figura 1 – Quadro mágico criado pelos chineses

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fonte: Boyer e Merzback (2012)

Boyer e Merzback (2012, p. 144) afirmam que esse quadro “foi supostamente trazido para os homens por uma tartaruga (considerado um animal sagrado) do Rio Luo nos dias do lendário Imperador Yü, considerado um engenheiro hidráulico.” Veja a próxima figura 13 que ilustra o que foi narrado por Boyer.

Figura 2 – Representação da tartaruga do Rio Luo



Disponível em: <http://matematicanaarea.blogspot.com/2009/12/v-behaviorurldefaultvml-o.html>
Acessado em: 14 de nov. 2020

Nessa obra é mencionado, também, um método que mostra como fazer para se obter a solução do sistema de equações lineares do primeiro grau:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Boyer e Merzback (2012) afirmam que “A preocupação com tais padrões levou o autor dos nove capítulos a resolver o sistema de equações lineares simultâneas”. É isso que mostraremos agora, pois assim, foram efetuadas operações sobre colunas na matriz.

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Para reduzi-la a

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

Observe que a única diferença entre o modo atual de representamos um sistema linear para o antigo modo chinês é que hoje, escrevemos as equações lineares como as linhas da matriz e não como colunas. A segunda forma de representação de acordo com Boyer e Merzback (2012, p. 144), era representado através das equações: $33z = 99$; $55y + z = 24$; $3x + 2y + z = 39$, das quais se calcula e obtém-se a seguinte solução do sistema linear como: $z = \frac{11}{4}$, $y = \frac{17}{4}$ e $x = \frac{37}{4}$

Lima e Pereira (2017, p. 60) verificam:

[...] uma caracterização inicial de matrizes, de forma intuitiva, associada ao diagrama do quadrado mágico. Como consequência objetivavam solucionar o sistema de equações lineares simultâneas por meio do escalonamento para se chegar a matriz escalonada.

Assim, observamos que a tabela utilizada no método chinês é atualmente denominada de matriz. Já a redução é conhecida hoje como um processo de eliminação Gaussiana, a qual nos mostra que o estudo das matrizes foi motivada historicamente pela necessidade de se resolver sistemas de equações lineares.

Bernardes e Roque (2016, p. 2) afirmam que:

[...] a ordem de exposição de alguns conceitos matemáticos com a ordem com a qual os mesmos surgiram na história, é comum se deparar com uma inversão. O conceito de matriz surgiu depois das noções de determinantes, sistemas lineares, transformações lineares e formas quadráticas.

Já Nunes (2016, p. 5), destaca que:

[...] a ordem em que estes elementos da álgebra foram formalizados matematicamente pode ser descrito pela sequência: sistemas lineares, determinantes e matrizes; e que tais conhecimentos foram construídos ao longo dos séculos à medida que o homem necessitou para resolver algum problema prático.

Segundo Nunes (2016, p. 3), em 1303, o chinês Chu Shi-kié (1249 – 1314) escreveu um trabalho intitulado como *The Precious Mirror of the Four Elements* (O Espelho Precioso dos Quatro Elementos), nessa obra são tratadas questões de álgebra com um elevado grau. Assim, Eves (2011, p. 246) acrescenta ao dizer que “Ele se utilizava dos métodos matriciais comuns hoje em dia e seu método de eliminação e substituição já foi comparado ao de Sylvester (1814-1897).”, entretanto, o chinês não empregava a mesma simbologia que é usada atualmente, já que está veio ser adotada somente no século XIX.

Temos também o trabalho do matemático Seki Shinsuke Kowa (1642-1708) com um manuscrito intitulado por Kai Fukudai no Ho (Método de Solução de Questões Secretas) e que através dos problemas envolvidos nessa obra tenha melhorado as considerações realizadas por Chu Shi-kié.

De acordo com Kraieski (1999, p. 3), Kowa foi a primeira pessoa a estudar determinantes em 1683. Dez anos mais tarde Leibniz, independentemente, usou determinantes para resolver equações simultâneas, embora a versão de Seki ainda fosse a mais geral.

Em seguida, surge Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) com uma notação de escrita associada ao método de determinantes, tornando-se a primeira referência no Ocidente sobre o assunto. No ano de 1693, segundo Boyer e Merzback (2012, p. 290), Leibniz apresentou por meio de cartas a L'Hospital, escrevendo que ocasionalmente usava números para indicar linhas e colunas (Matrizes), em uma

coleção de equações lineares simultâneas, como as utilizadas pelos chineses. Veja como Leibniz apresentou as equações lineares para L'Hospital.

$$\begin{array}{lcl} 10 + 11x + 12y = 0 & 1_0 + 1_1 + 1_2 = 0 \\ 20 + 21x + 22y = 0 & \text{ou} & 2_0 + 2_1 + 2_2 = 0 \\ 30 + 31x + 32y = 0 & 3_0 + 3_1 + 3_2 = 0 \end{array}$$

Escreviam isso como:

$$\begin{array}{l} a_1 + b_1x + c_1y = 0 \\ a_2 + b_2x + c_2y = 0 \\ a_3 + b_3x + c_3y = 0 \end{array}$$

Se as equações fossem consistentes, então:

$$\begin{array}{lcl} 1_0 \cdot 2_1 \cdot 3_2 & 1_0 \cdot 2_2 \cdot 3_1 \\ 1_1 \cdot 2_2 \cdot 3_0 = & 1_1 \cdot 2_0 \cdot 3_2 \\ 1_2 \cdot 2_0 \cdot 3_1 & 1_2 \cdot 2_1 \cdot 3_0 \end{array}$$

Que equivale ao moderno enunciado

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Boyer e Merzback (2012, p. 290) afirmam que a antecipação dos determinantes por Leibniz só foi publicada anos depois, em 1850, tendo que ser redescoberta mais de meio século depois. Fica evidente aqui que as matrizes são evidenciadas a partir de equações lineares simultâneas, como propostas pelos chineses. Porém, Leibniz enfatiza a indicação de linhas e colunas de matrizes para compor o método do determinante, este apresentado bem próximo ao que utilizamos atualmente.

O físico francês Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) nasceu em 25 de janeiro de 1736 e morreu em 10 de abril de 1813, por causa do excesso de trabalho e pagamento baixo, vindo este a sofrer com a sua saúde, ficando com uma constituição debilitada.

Apesar disso, Lagrange foi um dos cientistas matemáticos e físicos mais importantes do final do século XVIII, e ao lado de Euler, fizeram várias críticas à Análise, por meio de sua grande obra *Théorie des Fonctions Analytiques Contenant les Principes du Calcul Différentiel*¹, além das importantes atribuições à série de Taylor e ao conceito de função destacada por Lagrange em um livro de 1797.

Ele inventou e trouxe à maturidade ao cálculo de variações e depois aplicou a nova disciplina para Mecânica Celestial, especialmente para achar soluções melhoradas para o Problema de Três – Corpos.

¹ Teoria das funções analíticas que contém os princípios do cálculo diferencial. (Tradução nossa)

Boyer e Merzback (2012, p. 332) evidencia o trabalho desenvolvido por Lagrange que merece destaque que é o artigo intitulado “Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires²”, anunciado em 1773 e publicado em 1795. O qual apresentou resultados analíticos para o cálculo de área de um triângulo e o volume de um tetraedro, denotados respectivamente por A e V, como apresentamos a seguir, veja.

$$\frac{1}{2!} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ e } \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Essas formas compactas, embora expressas de maneira diferentes, de acordo com Boyer e Merzback (2012), retratam o pensamento de Lagrange, pois neste artigo não tem nenhuma representação, conforme os autores. E assim, os autores corroboram destacando uma fala de Lagrange sobre a solução do problema analítico apresentado no seu artigo.

Eu alimento a esperança de que a solução que vou dar será de interesse para os geômetras tanto pelos métodos quanto pelos resultados. Essas soluções são puramente analíticas e podem ser compreendidas mesmo sem figuras.” (BOYER E MERZBACK, 2012, p. 332)

Assim, Lagrange fiel à sua promessa não apresenta em seu artigo nenhum diagrama como o que consta em Boyer e Merzback (2012), para representar a solução do problema em relação ao cálculo de área de um triângulo e o volume de um tetraedro.

Lima e Pereira (2017, p. 62) afirmam que “Lagrange buscou artifícios analíticos para caracterizar os elementos que compõe as linhas e colunas das matrizes”, querendo mostrar que esses elementos não representavam apenas “números tabulados”.

Augustin Louis Cauchy (1780 – 1857), filho de pais instruídos, ingressou na École Polytechnique³ em 1805 e foi a estrela da década de 1820, apesar de ter nascido no ano da revolução francesa. Segundo Boyer e Merzback (2012, p. 334 – 335) esse francês trabalhou como engenheiro até 1813 e escreveu sobre a Matemática pura e aplicada, vindo destaca-se por produções em Séries Infinitas, Teoria das Funções

² Soluções analíticas de alguns problemas em pirâmides triangulares. (Tradução nossa)

³ Universidade Politécnica. (Tradução nossa)

Reais Complexas, Equações Diferenciais, Probabilidade, Física – Matemática e Determinantes.

Dentre estas produções destacou-se pelos estudos acerca dos Determinantes, o qual influenciou a apresentar significativas considerações a respeito das matrizes. Lima e Pereira (2017, p. 61 e 62) afirmam que Cauchy:

[...] foi o matemático que mais desenvolveu estudos acerca dos Determinantes, conseqüentemente apresentou considerações significativas a respeito das matrizes. Ente as contribuições, a demonstração de um teorema que envolvem ambos os conteúdos. O qual foi proposto da seguinte maneira:

“Se A e B são matrizes $n \times n$, então $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ ”

Assim, a partir do teorema exposto, verifica-se que apesar de ele não citar a nomenclatura “ordem”, mas considera que A e B são matrizes $n \times n$ (classificação intuitiva das matrizes quadradas), caracterizando mais um elemento para construção deste estudo. Além disso, destaca-se a relação entre o determinante e as matrizes, a qual, também foi citada na abordagem feita por Leibniz.

Boyer e Merzback (2012, p. 335) corroboram destacando que Cauchy, no seu artigo de 1812, apresentou o termo “determinante” para aquilo que descreveu como uma classe de funções simétricas alternadas, sendo representada assim: $a_1b_2 - b_1a_2$. Nesse artigo Cauchy começou com os n elementos ou números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, formando o produto deles, por todas as diferenças de elementos distintos $a_1a_2a_3 \dots a_n: (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1})$.

Cauchy define o determinante como sendo a expressão resultante da transformação da potência que aparecia em um segundo índice assim a_r^s , e com a mudança ficou assim $a_{r,s}$. Com isso, Cauchy escreveu o determinante como $S(\pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} \dots a_{n,n})$ e ele dispôs as n^2 diferentes quantidades em uma tabela quadrada semelhante ao usado atualmente, segundo Boyer e Merzback (idem).

James Joseph Sylvester nasceu na cidade de Londres em 03 de setembro de 1814 e faleceu em 15 de março de 1897, em Oxford. Atuou como professor de filosofia e matemática em universidades na Inglaterra e nos Estados Unidos por dois períodos de sua vida acadêmica. Na matemática contribuiu no desenvolvimento da teoria matricial, teoria dos invariantes, teoria dos números, análise combinatória e também nas formas quadráticas.

Boyer e Merzback (2012, p. 380) destaca que três anos após 1838, Sylvester vai ensinar no *University College*⁴, em Londres, onde seria colega de seu antigo professor, De Morgan. Bernardes e Roque (2016, p. 9) afirmam que “Entre 1850 e

⁴ Faculdade Universitária. (Tradução nossa)

1851, Sylvester publicou uma série de memórias analisando os tipos de interseções e contatos entre duas cônicas e entre duas quádricas.”

De acordo com Bernardes e Roque (2016, p. 9), foram essas memórias que mostraram uma das principais contribuições de Sylvester, em relação aos trabalhos de outros matemáticos, como o recurso que ele usou ao realizar o cálculo de determinante menores. E assim, Sylvester fez a generalização da técnica de extração de sistemas de determinantes menores que foi baseada em uma representação em forma de tabela retangular à qual Sylvester denominou de matriz.

Bernardes e Roque (2016) observaram que Sylvester usa a noção de matriz como uma tabela retangular, geradora de vários sistemas de determinantes menores que foram utilizados para classificar o tipo de contato entre duas cônicas.

Como as matrizes não foram o objeto de estudo de Sylvester em suas pesquisas, elas foram inseridas com o propósito de extração de determinantes menores, baseando-se na tabela que envolvia o determinante. Assim, as matrizes foram usadas para ajudar a classificação dos tipos de contatos entre as duas cônicas que Sylvester utilizou.

Temos agora nosso personagem principal, Arthur Cayley, que segundo Boyer (2012) e Bernardes e Roque (2016, p. 11) destacaram mais contribuições do personagem que foram:

[...] reunidas em 13 volumes nos *The collected mathematical papers of Arthur Cayley*⁵, versavam sobre temas em geometria analítica, transformações lineares, matrizes, determinantes, teoria dos invariantes e covariantes, teoria das equações, cálculo, funções homogêneas, equações diferenciais, teoria dos grupos, etc.

Segundo Bernardes e Roque (2016) a noção de matriz foi utilizada pela primeira vez por Cayley, em 1855, no artigo denominado de *Remarques sur la notation des fonctions algébriques*⁶. Cayley introduziu uma notação sobre matrizes para representar sistemas lineares e formas quadráticas nesse artigo.

De acordo com Boyer e Merzback (2012, p. 379), Cayley foi o primeiro a estudar matrizes e, três anos após a utilização da notação sobre matrizes em um artigo, ele lança uma memória sobre a teoria das matrizes. Essa obra foi recebida em 10 de dezembro de 1857 e lido em 14 de janeiro de 1858.

⁵ Os papéis matemáticos coletados de Arthur Cayley. (Tradução nossa)

⁶ Notas sobre a notação de funções algébricas. (Tradução nossa)

Bernardes e Roque (idem) destacam ainda que Cayley descreve nesse artigo o que é uma matriz, definindo as operações com matrizes, enunciando as propriedades das operações, proclama e demonstra um resultado que ele se refere como “teorema notável” e apresenta aplicações desse resultado. O nome desse artigo é *A Memoir on the Theory of Matrices*⁷ a partir da Teoria das Transformações Lineares Simultâneas que apresentaremos a seguir, mas apenas as partes que foram utilizadas neste trabalho.

Cayley (1858) define matriz como sendo “um conjunto de quantidades dispostas na forma de um quadrado”, como apresentada por ele, vejamos.

“Representação de uma matriz

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$$

Fonte: CAYLEY, 1858, p. 17, tradução nossa

Quanto à definição feita por Cayley temos Matos e Nunes (2014, p. 16) destacando que “[...] ele introduziu uma notação para matrizes, como sendo prática para representar sistemas lineares e formas quadráticas [...]”

E assim, Cayley (1858) afirma que “a noção de tal matriz surge naturalmente da notação abreviada para um conjunto de equações lineares”, as quais mostraremos em seguida.

$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz, \\ Y &= a'x + b'y + c'z, \\ Z &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

Essas equações podem ser representadas por:

“Representação das equações por matriz

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} (x, y, z)$$

Fonte: CAYLEY, idem, tradução nossa

O autor afirma ainda que:

E a consideração de tal sistema de equações leva à maior parte das noções na teoria das matrizes. Ver-se-á que as matrizes (atendendo apenas às da mesma ordem) comportam-se como quantidades únicas; eles podem ser adicionados, multiplicados ou compostos juntos, etc. A lei da adição de matrizes é precisamente semelhante ao da adição de quantidades algébricas ordinárias; no que diz respeito à sua multiplicação (ou composição), existe a peculiaridade de que matrizes não são em geral conversíveis; no entanto, é possível formar os poderes (positivos ou negativos, integral ou fracionário) de uma matriz, e daí chegar à noção de uma racional e função integral, ou

⁷ Um livro de memórias sobre a teoria das matrizes. (Tradução nossa)

geralmente de qualquer função algébrica de uma matriz (CAYLEY, 1858, p. 17 – 18, tradução nossa)

Essa representação de sistema de equações, segundo Cayley (1958, p. 18), nos leva a representação do conjunto de funções lineares que equivale as quantidades (X, Y, Z), vejamos o procedimento.

$$((a, b, c)(x, y, z), (a', b', c')(x, y, z), (a'', b'', c'')(x, y, z))$$

Conforme o autor essas quantidades (X, Y, Z) serão:

“[...] identicamente zero, se todos os termos da matriz são zero, e podemos dizer que é a matriz zero.

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

(CAYLEY, 1858, p. 18, tradução nossa)

Temos aqui, a conhecida matriz nula, chamada por Cayley de matriz zero. A próxima matriz apresentada será a matriz identidade que Cayley identificou em seu artigo assim:

“Novamente, (X, Y, Z) será identicamente igual a (x, y, z), se a matriz for e isso é dito ser a unidade da matriz

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos, é claro, quando, por distinção, é necessário, digamos, o zero da matriz ou (conforme o caso) a unidade da matriz de tal ordem. O zero da matriz pode na maioria das vezes ser representado simplesmente por 0, e a matriz unidade por 1.” (CAYLEY, 1858, p. 18, tradução nossa)

Feita a observação percebe-se que temos até agora dois importantes resultados, pois até então não havia uma nomenclatura para denominar tais matrizes, apesar de Cayley já a ter utilizadas em 1855. Boyer e Merzback (2012) afirmam que:

A matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que é usualmente denotada por I , deixa toda matriz quadrada de segunda ordem invariante por multiplicação; por isso é chamada a matriz identidade para a multiplicação. A única matriz que deixa outra matriz invariante por adição é, evidentemente, a matriz zero

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que é, portanto, a matriz identidade para a adição. (BOYER, 2012, p. 379)

E, com essas definições dada por Cayley, ele passou a pensar nas operações sobre as matrizes como nas que envolvem a “Álgebra”. Cayley (1958) aborda as operações de adição e subtração da seguinte forma:

As equações

$$\begin{pmatrix} X, Y, Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} (x, y, z), \quad \begin{pmatrix} X', Y', Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{pmatrix} (x, y, z)$$

Dar

$$(X + X', Y + Y', Z + Z') = (a + \alpha, \quad b + \beta, \quad c + \gamma)(x, y, z),$$

$$\begin{vmatrix} a' + \alpha' & b' + \beta' & c' + \gamma' \\ a'' + \alpha'' & b'' + \beta'' & c'' + \gamma'' \end{vmatrix}$$

e isso leva a

$$(a + \alpha, \quad b + \beta, \quad c + \gamma) = (a, \quad b, \quad c) \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a' + \alpha' & b' + \beta' & c' + \gamma' \\ a'' + \alpha'' & b'' + \beta'' & c'' + \gamma'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

como regra para adição de matrizes; que para sua subtração é obviamente similar para isso. Uma matriz não é alterada pela adição ou subtração do zero da matriz, ou seja, nós temos $M \pm 0 = M$. (CAYLEY, 1858, p. 19, tradução nossa)

Cayley (1958) aborda em seguida a igualdade de matrizes ao dizer que “A equação $L = M$, que expressa que as matrizes L , M são iguais, também pode ser escrito na forma $L - M = 0$, isto é, a diferença de duas matrizes iguais é a matriz zero”. Assim, ele uso o termo matriz oposta para explica que:

A equação $L = -M$, escrita na forma $L + M = 0$, expressa que a soma das matrizes L , M são iguais à matriz zero, as matrizes assim relacionadas são consideradas opostos um ao outro; em outras palavras, uma matriz cujos termos são iguais, mas oposto em sinal aos termos de uma dada matriz, é dito ser oposto ao dado matriz. (CAYLEY, 1858, p. 19, tradução nossa)

Dando continuidade, observamos agora Cayley (1858, p. 19, tradução nossa) que mostra algumas propriedade da adição, ao afirmar que “É claro que temos $L + M = M + L$, ou seja, a operação de adição é comutativa, e além disso que $(L + M) + N = L + (M + N) = L + M + N$, isto é, a operação de adição também é associativa.” Temos aqui Cayley organizando o assunto de matriz de forma bem parecida com as quais encontramos nos livros didáticos atuais, impressionante.

Agora, apresentamos a propriedade da multiplicação de uma matriz por um escalar m , em que Cayley (1858) expôs no seu trabalho da seguinte forma:

A equação

$$(X, Y, Z) = (a, \quad b, \quad c)(mx, my, mz)$$

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

escrito sob os formulários

$$(X, Y, Z) = m(a, \quad b, \quad c)(x, y, z) = (ma, \quad mb, \quad mc)(x, y, z)$$

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ma' & mb' & mc' \\ ma'' & mb'' & mc'' \end{vmatrix}$$

Dá

$$m(a, \quad b, \quad c) = (ma, \quad mb, \quad mc)$$

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ma' & mb' & mc' \\ ma'' & mb'' & mc'' \end{vmatrix}$$

Como regra para a multiplicação de uma matriz por uma única quantidade. O multiplicador m pode ser escrito antes ou depois da matriz e, portanto, a operação é comutativa. Temos claro que $m(L + M) = mL + mM$, ou a operação é distributiva.

Pode-se dizer que as matrizes L e mL são semelhantes umas às outras; em particular, se $m = 1$, eles são iguais e, se $m = -1$, são opostos. Temos, em particular,

$$m(1, 0, 0) = (m, 0, 0)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix}$$

ou substituindo a matriz no lado esquerdo por unidade, podemos escrever

$$m = (m, 0, 0),$$

$$\begin{vmatrix} 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix}$$

A matriz no lado direito é considerada a quantidade única m considerada como envolvendo a unidade da matriz. (CAYLEY, 1858, p. 19 – 20, tradução nossa)

Antes de Cayley definir matriz transposta, ele fez a seguinte observação em que:

Uma matriz como

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

onde o número de colunas excede o número de linhas, é considerado uma matriz ampla; uma matriz como

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix}$$

onde o número de linhas excede o número de colunas, é considerado uma matriz profunda. (CAYLEY, 1858, p. 35, tradução nossa)

Após essa observação, Cayley definiu a matriz transposta da seguinte forma:

A noção de transposição e o símbolo tr. aplicar a matrizes retangulares, o efeito de uma transposição ser converter uma matriz ampla em uma matriz profunda e reciprocamente. Pode-se notar que o símbolo tr. pode ser usado com a finalidade de expressar a lei da composição de matrizes quadradas ou retangulares. Assim, tratar (a, b, c) como um matriz retangular, ou representando-a por $\begin{pmatrix} a & b & c \\ | & | & | \end{pmatrix}$, temos

$$\text{tr.} \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, "$$

(CAYLEY, 1858, p. 36, tradução nossa)

E assim, Cayley também definiu a matriz simétrica como sendo:

“Uma matriz como que por transposição é transformada em seu oposto, é dito que é inclinado simétrico.

$$\begin{pmatrix} 0 & v & -\mu \\ -v & 0 & \lambda \\ \mu & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{CAYLEY, 1858, p. 31, tradução nossa})$$

Nosso trabalho se restringiu até aqui nas memórias de Cayley, mas, ainda há muito a ser feito e descoberto sobre a história da matriz. Pelo o que fizemos, observamos que a coordenação dessa memória de Cayley não está organizada como a conhecemos atualmente, fato este observado pelas páginas que destacamos do seu trabalho.

Uma das importâncias de se conhecer a história dos objetos matemáticos é apresentado por Matos e Nunes (2014, p. 12) ao afirmarem que “[...] tal abordagem pode contribuir para um saber, transcendendo meros processos algorítmicos, pois de um modo geral o professor desconhece o porquê de se estudar matrizes por exemplo.”

Por fim, finalizamos este histórico com uma frase de Rinaldi e Rizzato (2005, p.1) em que registram o seguinte “Charles Hermite registrou as seguintes palavras “talento de Cayley se caracterizou pela clareza e extrema elegância da forma analítica; reforçando por uma capacidade incomparável de trabalho...”, mostrando a preocupação britânica com forma e estrutura em álgebra, traços que Cayley apresentou no seu trabalho.

Ressaltamos também que a partir do trabalho realizado por Cayley em relação as matrizes, encontra-se hoje facilmente nos livros didáticos atuais esse assunto; organizado e mantendo ainda as mesmas características e traços que o autor apresentou em 1858, no seu artigo.

3. REVISÃO DE ESTUDOS

Neste capítulo apresentamos os resultados de uma revisão de estudos que tratam sobre o ensino e aprendizagem de Matrizes. Ela foi construída para conhecer o que se tem discutido na literatura acadêmica e científica sobre o processo de ensino e aprendizagem do referido assunto, e isso nos auxiliou no direcionamento para a construção e planejamento da Sequência Didática proposta.

Essa revisão foi dividida em duas partes, as quais são:

- 1) Estudos Teóricos: são trabalhos em que os estudos teóricos apresentados propuseram e concretizaram atividades para o ensino de matrizes, com objetivo de diminuir as dificuldades no ensino do assunto em questão.
- 3) Estudos Experimentais: Os trabalhos descritos nessa categoria destacam o processo de investigação dos dados, obtidos nos trabalhos que conseguiram resultados satisfatórios, nos aspectos voltados aos conceitos sobre o ensino de matrizes.

As pesquisas revisadas possuem conhecimentos importantes acerca do ensino e aprendizagem de matrizes. Conhecimentos estes ligados a questionamentos e potencialidades no ensino, no diagnóstico da aprendizagem, e assim como as reflexões conceituais. Diante de todo esse conhecimento, construiu-se o quadro 1 que

sintetiza as principais informações pelos trabalhos revisados, de acordo com cada categoria.

Quadro 1 – Síntese dos resultados mais importantes por categoria

Estudos Teóricos	Contribuições
Messias, Sá e Vilhena (2007), Oliveira Júnior (2014), Rocha (2015), Silva (2016), Klein (2018), Borges (2018)	- Averiguou as dificuldades apresentadas pelos estudantes ao resolverem questões referentes às Matrizes; Elaborou novas alternativas para ensinar o assunto de Matrizes através da proposta de resolução de problemas; Refletiu sobre a necessidade de novas metodologias para o ensino em todos os níveis de ensino. - Mostrou abordagens diferenciadas no Ensino de Matrizes, levando em consideração a contextualização do assunto para os estudantes do 2º ano do Ensino Médio. - Apresentou uma maneira de ensino aprendizagem dos assuntos, de forma que o estudante se sinta motivado e desafiado a aprender matemática com o uso do aplicativo <i>Microsoft Excel</i> 2013. Elaborou um projeto de extensão para qualificar os professores de matemática através de oficinas com diversos softwares grátis ou pagos. - Avaliou a potencialidade de uma sequência didática baseada na resolução de problemas no Ensino de Matrizes; Aplicou os conhecimentos em diversas situações e estimulou o desenvolvimento da capacidade de raciocínio na resolução de problemas. - Propôs aplicar e buscar evidências de uma aprendizagem fundamentada na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel em relação aos conceitos de Matrizes; Modificou o ensino e a aprendizagem de matrizes fazendo com que o estudante explicita, participe, questione, compreenda, socialize suas ideias e incremente à sua bagagem cognitiva a novos conhecimentos. - Introduziu ferramentas para a introdução do conceito de Matrizes através da metodologia de resolução de problemas; Apresentou a teoria, sugeriu e analisou as aplicações com a resolução de problemas e utilizou essa metodologia como uma estratégia fundamental no auxílio do professor a essa tarefa árdua que é ensinar Matemática.
Estudos Experimentais	Contribuições
Steinhorst (2011), Borba (2011), Fonseca (2013), Avila (2013), Pereira (2015), Reis (2016), Real (2017), Silva (2017), Brandão (2018)	- Verificou como a planilha pode contribuir para o melhor entendimento de matrizes, determinantes e sistemas lineares para estudantes do Ensino Médio; Utilizou a abordagem de resolução de problemas e da interdisciplinaridade; Contribuiu para aproximar a tecnologia da sala de aula; Valorizou os conhecimentos tecnológicos dos estudantes para manter o interesse deles; Facilitou para que o estudante pudesse prosseguir em seus estudos de Matrizes sem se preocupar em realizar grandes cálculos, pois estes agora passam a se preocuparem com a interpretação a ser feita em cada questão e com os métodos que irão aplicar. - Permitiu a exploração de Matrizes maiores e do uso do algoritmo de escalonamento com os recursos da informática e

	de applets disponíveis na internet; Elaborou atividades de matrizes que contemplem o uso das ferramentas computacionais; Desempenhou um duplo papel em que facilita a compreensão dos conceitos e auxiliar os estudantes na resolução dos passos repetitivos sobrando mais tempo para a conexão com problemas reais e motivadores. - Facilitou o ensino dos conteúdos de matrizes, determinantes e sistemas lineares através de recursos didáticos como o correio eletrônico e de software de fácil acesso; Verificou a aceitação do uso de softwares no Ensino de matemática e se houve melhora na aprendizagem a partir do uso desses recursos tecnológicos; Serviu como instrumento desafiante na busca das soluções através das ferramentas; Continuou a aplicar softwares às práticas pedagógicas e motivar professores a sempre buscarem ferramentas que despertem nos estudantes a motivação de aprender. - Analisou a compreensão dos estudantes sobre as quatro operações e sua influência na aprendizagem de Matrizes; Investigou a própria prática de ensino para identificar os erros cometidos pelos estudantes na realização das operações aritméticas que influenciam nas operações com Matrizes; Apesar dos estudantes terem dificuldades em aplicar as quatro operações básicas em outros conteúdos de matemática, isso não os impede de aprenderem novos conteúdos, independente de conseguirem realizar as operações ou não. - Propôr a construção de imagens usando o conceito de Matrizes no ambiente numérico Scilab como instrumento de apoio computacional; Apesar de 3% dos discentes pesquisados não terem habilidades com as tecnologias, a sequência didática foi bem aceita, tendo 100% de aproveitamento nas correções das atividades; Explorou as ferramentas computacionais associadas a metodologias alternativas na aprendizagem. - Utilizou o aplicativo Whatsapp com estudantes da EJA, do Ensino Médio, na resolução de problemas com Matrizes; Fez com que os estudantes trabalhassem de forma dialogada nos grupos e buscassem a autonomia da aprendizagem. - Analisou as contribuições dos conceitos de transformações geométricas com o uso da computação gráfica para a aprendizagem das operações de Matrizes; Estimulou os estudantes a trabalharem com a informática; Utilizou o software GeoGebra na identificação e na construção das Matrizes. - Utilizou o Arduíno como atividade de investigação e experimentação matemática para o ensino dos conceitos iniciais de Matrizes; Contribuiu com a produção teórica e produzir um roteiro de ensino de Matrizes através do Arduíno. - Buscou alternativas para despertar o interesse dos estudantes e aguçar a curiosidade deles sobre o assunto de Matrizes através de jogos e atividade que promovesse a interação entre os educandos; Promoveu discursos e reflexões sobre o Ensino de Matrizes no Ensino Médio, visando à importância e a aplicação do assunto no dia a dia dos discentes.
--	--

Fonte: Autoria própria (2021)

Ao todo foram revisados 15 trabalhos nos quais as Matrizes estavam inseridas, sendo que para uma melhor compreensão do assunto em questão foram criadas 2 categorias. Uma com o título de Estudos Teóricos e outra com o título de Estudos Experimentais.

Ao analisarmos as pesquisas sobre Matrizes percebemos que tanto os trabalhos sobre estudos teóricos quanto aos de estudos experimentais, apontam em suas conclusões a ocorrência da diminuição nas dificuldades no processo de ensino-aprendizagem, dos problemas envolvendo as operações com Matrizes quando se utilizou metodologias de ensino diferentes da tradicional. Um bom exemplo referente ao assunto é a formulação e resolução de problemas por parte dos estudantes com utilização de situação do cotidiano na introdução do assunto ou na utilização de tecnologias com o uso de metodologias adequadas a cada situação do ensino, para que ocorra de fato, a aprendizagem.

Neste levantamento bibliográfico identificou-se também o aparecimento de apenas uma tese que trata sobre as Matrizes, e é bem recente. Isso nos mostra que pesquisas mais avançadas ainda precisam ser realizadas sobre o assunto, voltada é claro para a melhoria da aprendizagem.

Esta revisão nos possibilitou identificar um panorama geral sobre o processo de ensino-aprendizagem de problemas com Matrizes. Sua finalização facilitou termos uma maior percepção quanto ao ensino deste conteúdo, e que ele pode se tornar mais significativo para o estudante e para o professor, quanto a utilização de metodologias e tecnologias que contextualizam o que está sendo ensinado e que pode ser percebido no dia a dia.

O direcionamento desta revisão de estudos possibilitou ter um uma visão sobre muitos fatos relativos ao tema diante dos trabalhos revisados na área de matrizes, os quais contribuíram com o planejamento desse produto educacional no sentido de revelar a necessidade de estratégias didáticas e metodológicas para o ensino de matriz, além de apresentar algumas sugestões importantes para a elaboração da Sequência Didática.

4. ENSINO POR ATIVIDADE

A Sequência Didática proposta nesse trabalho foi construída com base no Ensino por Atividade. De acordo Silva (2018) o “Ensino por Atividade” é uma tendência da Educação Matemática, que é caracterizada como uma metodologia de ensino de

conteúdos matemáticos mediados por atividades que possibilitam, ao aluno, desenvolver habilidades de cunho prático, pois, ela está ligada no construtivismo⁸, propiciando, com isso, ao aprendiz participar de forma ativa, através das orientações do professor, na construção do seu conhecimento, ao invés de recebê-lo passivamente, isto é, por meio da aula expositiva, como geralmente acontece.

O “Ensino por Atividades” pode ser realizado por dois tipos básicos de atividades: de conceituação ou de redescoberta.

A atividade de conceituação, segundo Sá (2019, p. 17), tem como objetivo principal “levar o estudante a perceber a ocorrência de determinado tipo de situação/tipo de objeto matemático.” Segundo o autor, esta definição do objeto percebido é o objetivo desta atividade de conceituação.

Já a atividade de redescoberta, segundo Sá (2019, p. 17), tem como objetivo “levar o estudante a descobrir uma relação ou propriedade relativa a um dado objeto ou operação matemática.” O autor destaca que essa atividade corresponde a um momento em que o estudante faz a exploração do objeto matemático e esta sim antecederá a demonstração do resultado matemático.

Sá (2019) destaca que as atividades experimentais servem tanto para serem trabalhadas como atividades de conceituação ou como atividades de descoberta. O autor ressalta que apesar da diferença dos objetivos de cada uma, ambas devem ser desenvolvidas obedecendo os seguintes momentos: organização, apresentação, execução, registro, análise e institucionalização.

No quadro 2 fizemos uma síntese de cada um desses momentos, para que o leitor compreenda as atribuições do professor e dos estudantes em cada um dos momentos da atividade.

Quadro 2 – Os momentos do ensino por atividade e as contribuições/competências dos envolvidos

MOMENTOS	ATRIBUIÇÕES/COMPETÊNCIAS
Organização	Neste momento a turma deve ser, preferencialmente, organizada em equipes com no máximo 4 alunos e no mínimo 2. Mas pode também ocorrer de forma individual o que não é recomendável, por não estimular a troca de ideias entre os participantes que é fundamental para o processo de aprendizagem.

⁸ Construtivismo considera que há uma construção do conhecimento e que, para que isso aconteça, a educação deve criar métodos que estimulem essa construção. Disponível em: <https://escoladainteligencia.com.br/blog/entenda-o-conceito-de-construtivismo-na-educacao/>. Acesso em: 05 Out. 2021.

	O professor deve dirigir as ações, orientar a formação das equipes sem imposições, demonstrar segurança e evitar que os estudantes desperdicem tempo com ações alheias à organização da turma. Os estudantes, neste momento, são livres para escolher os grupos que desejam participar.
Apresentação	Neste momento compete ao professor distribuir o material necessário para a realização da atividade incluindo um roteiro que pode ser, preferencialmente, impresso ou disponibilizado no quadro o que vai depender das condições estruturais da escola. Esse material deve estar organizado em kits ou em envelopes para facilitar a distribuição. Enquanto isso, os estudantes escutam com atenção às orientações apresentadas pelo professor.
Execução	Este momento corresponde à etapa da experimentação que é quando o pesquisador manipula os materiais, realiza medidas e/ou cálculo, compara e/ou observa. Neste momento, espera-se que cada equipe realize os procedimentos estabelecidos para a atividade. O professor neste momento deve deixar as equipes trabalharem livremente, supervisionar o desenvolvimento das ações e auxiliar nas dúvidas, quando solicitado ou perceber dificuldade de execução, que possam surgir em cada equipe no ocorrer da realização do procedimento. Os estudantes neste momento devem procurar seguir as instruções previstas no roteiro da atividade, sem conversas paralelas ou atenção para assuntos alheios à atividade. Também devem evitar deixar o grupo ou ficar visitando outros grupos. Eles devem ter a oportunidade de agir para obter os resultados buscados, mas também de receber orientações cuidadosas quando tiverem dificuldades ou dúvidas para realizar alguma ação prevista na atividade. As orientações devem ser claras e precisas para permitir o prosseguimento da atividade sem constranger os estudantes. Quando um questionamento ou dúvida evidenciar que sua origem é fruto de uma falha das orientações contidas no procedimento ou da confecção do material a ser utilizado, o professor deve imediatamente socializar com a turma o fato e apresentar orientações que contorne o ocorrido e permita o prosseguimento da atividade, se possível.
Registro	Corresponde ao momento da sistematização das informações na pesquisa. Neste momento espera-se que cada equipe registre as informações obtidas durante a execução dos procedimentos no respectivo espaço destinado no roteiro. O professor deve supervisionar o desenvolvimento das ações e auxiliar as eventuais dúvidas que possam ocorrer durante o processo.
Análise	Neste momento espera-se que cada equipe analise as informações que foram registradas e percebam as características do objeto matemático que desejam conceituar ou definir entre as informações registradas. Este é o momento em que os estudantes deverão ter o primeiro acesso às informações desejadas pelo professor. Caso ocorra que durante a análise alguma equipe apresente dificuldade para registrar uma relação válida a partir das informações registradas o professor deve auxiliar a equipe por meio da formulação de questões que os auxiliem a perceberem uma relação válida. Caso ele não consiga fazer com que a equipe perceba o desejado deve deixar para o momento da institucionalização.

Institucionalização	É o momento em que o professor a partir das observações elaboradas pelas equipes apresentará o conceito ou definição planejada à turma. É muito raro no início os estudantes apresentarem observações próximas do conceito a ser apresentado. O professor, independente do formato das observações elaboradas pelas equipes, deve solicitar que um representante de cada equipe vá ao quadro e registre a(s) observação(ões) elaborada(s) por sua equipe. Após analisar as observações registradas o professor deverá destacar as características desejadas do objeto a ser definido e apresentar o conceito ou definição na forma padrão. Este momento é oportuno para que o professor teça considerações das características históricas sobre o conceito, caso seja possível, pois isso mostra o lado humano da produção do conhecimento matemático. Com a apresentação do conceito chega ao fim o momento da institucionalização e da atividade. O recomendado é que após a institucionalização seja proposto um conjunto de questões relacionadas com o conhecimento trabalhado na atividade.
---------------------	---

Fonte: Adaptado de Sá (2019 - **grifo nosso**)

No contexto geral da aplicação das atividades, Sá (2019) afirma que é na primeira atividade onde emergem as primeiras dúvidas/dificuldades por parte dos estudantes, por desconhecerem o processo que exige deles a participação na construção de conclusões através das observações feitas no produto matemático que podem vir não a atender as condições de um texto conclusivo, porém o professor não deve preocupar-se caso esse fato venha a ocorrer.

Outra característica do “Ensino por Atividade” é que ela torna o estudante um agente ativo no processo de aprendizagem, percebe-se que a eficácia dessa metodologia dependerá dos conhecimentos prévios dos estudantes, das suas manifestações e representações simbólicas, aliados ao ambiente da experimentação.

5. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo, apresentamos uma proposta de Sequência Didática como metodologia para o ensino de Matrizes. As atividades que a compõe foram elaboradas levando-se em conta as conclusões e entendimentos obtidos na revisão de estudos, assim como da metodologia de Ensino por Atividade.

As etapas dessa sequência foram definidas tendo como base as habilidades estabelecidas nos documentos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), bem como das habilidades avaliadas pelo

Sistema Paraense de Avaliação (SISPAE) e dos descritores do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB).

Quadro 3 – Habilidades requisitadas em componentes curriculares

Documentos Curriculares	Habilidades
BNCC	▪ (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais. ▪ (EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. ▪ (EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de <i>softwares</i> que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra. ▪ (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
PCN	▪ Reconhecer que existem números que não são racionais. ▪ Resolver situações-problema envolvendo números irracionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. ▪ Selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo com números irracionais.
SISPAE	▪ MPA14 - Resolver situações-problemas por intermédio de sistemas lineares até 3ª ordem.
SAEB	▪ D31 - Determinar a solução de um sistema linear, associando-o a uma matriz

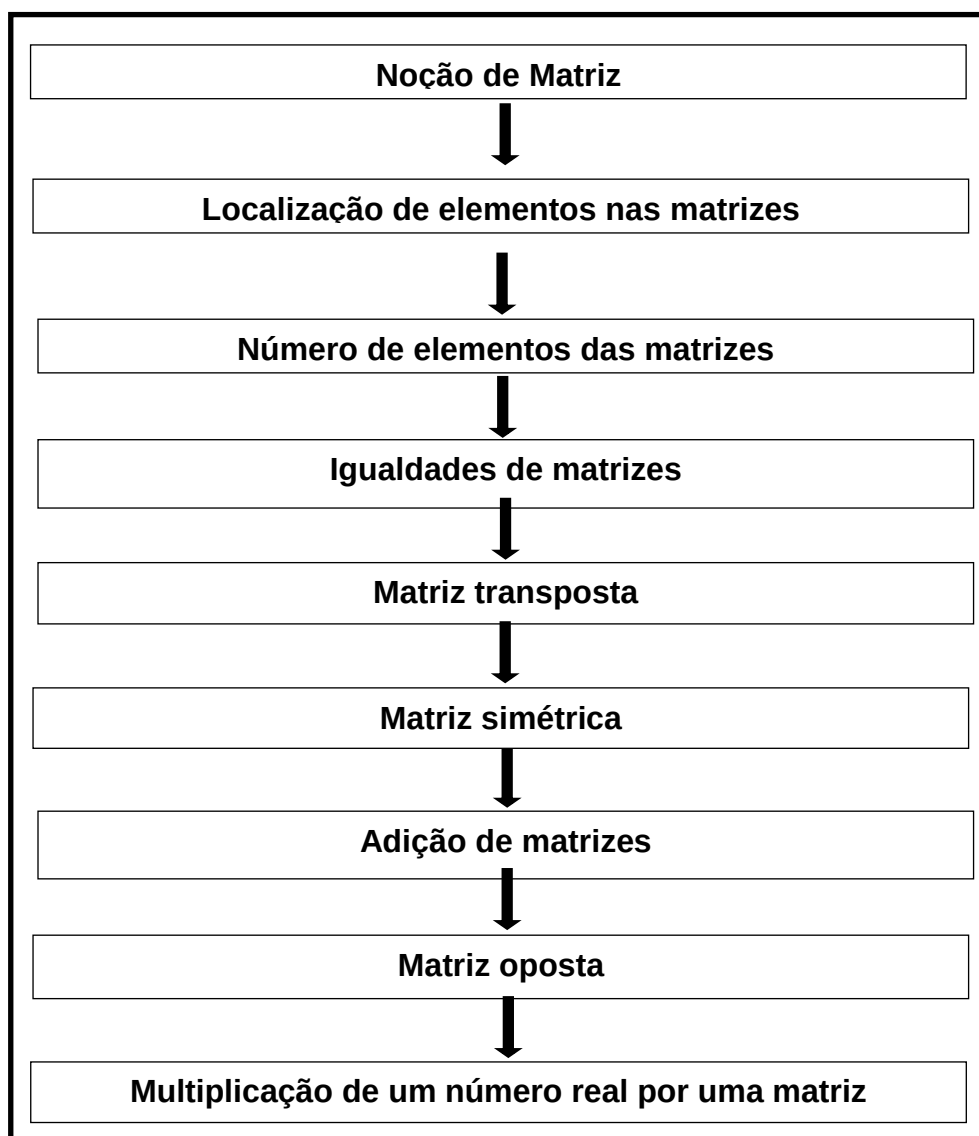
Fonte: Brasil (2018); Brasil (2002); Sispaes (2016); Saeb (2001)

Com base nas habilidades anteriores, foi construído um mapa conceitual sobre Matrizes que se encontra no apêndice A. Com base nos elementos desse mapa

conceitual foram definidos tópicos e objetivos para cada atividade que compõe a sequência didática.

Acompanhe como ficou organizado o assunto de Matrizes que tomamos por base na elaboração das atividades, segundo o levantamento bibliográfico feito anteriormente.

Quadro 4 –Tópicos abordados na Sequência Didática



Fonte: Levantamento de dados do autor (2019)

Diante das informações apresentadas no quadro anterior, apresentamos agora esses elementos que fazem parte da Sequência Didática proposta nesse trabalho, no quadro que segue na próxima página, veja:

Quadro 5 – Elementos de planejamento das atividades da Sequência Didática

Aula	Tópicos	Objetivos das Atividades	Tempo Sugerido
1 ^a	Noção de Matriz	Conceituar matriz.	50 min
2 ^a	Localização de elementos da matriz	Descobrir uma maneira de descrever elementos em uma matriz.	45 min
3 ^a	Número de elementos da matriz	Descobrir a relação que existe entre o número de elementos da matriz e a quantidade de linhas e colunas.	45 min
4 ^a	Igualdade de Matrizes	Descobrir as condições para termos a igualdade de matrizes.	45 min
5 ^a	Nomes de algumas matrizes	Conceituar alguns tipos especiais de matrizes.	20 min
6 ^a	Matriz Transposta	Conceituar matriz transposta.	30 min
7 ^a	Matriz Simétrica	Conceituar Matriz Simétrica	25 min
8 ^a	Adição de Matrizes	Conceituar adição de matrizes.	30 min
9 ^a	Matriz Oposta	Conceituar matriz oposta	30 min
10 ^a	Multiplicação de um número real por uma Matriz	Encontrar uma maneira de multiplicar um número real por uma matriz qualquer	30 min

Fonte: Autoria própria (2021)

Com esse levantamento de dados construímos nossa sequência didática com o intuito de fazer com que os estudantes consigam resolver as atividades de forma independente e, caso necessite, o professor/pesquisador deve estar à disposição para esclarecer qualquer dúvida referente as atividades.

Ressaltamos ainda que as atividades da Sequência Didática foram elaboradas e adequadas para estudantes do Ensino Médio, e cada uma dessas atividades estão associadas com seus respectivos objetivos.

Na atividade 1 a seguir temos a situação do texto indicando que se faz necessário à organização dos dados. Esperamos que através da observação desses dados e com algumas intermediações do professor, os estudantes sejam induzidos a construir uma tabela que facilitará a organização, a busca e a visualização dos dados, agora organizados. Essa situação tende a levar intuitivamente o estudante a trabalhar com matrizes, percebendo que é mais viável trabalhar com dados organizados em tabelas do que como estavam anteriormente, ou seja, completamente desorganizados.

5. 1. ATIVIDADE 01

a. Título: Matriz

b. Objetivo: Conceituar matriz.

c. Material: Roteiro da atividade, borracha e lápis ou caneta, papel.

d. Procedimento:

- Leia o texto;
- Observe as informações contidas nele;
- E com base na organização dessas informações, resolva a questão proposta.

Texto: O que é inflação e como ela afeta sua vida? (Adaptado de G1, 2018, p.1)

Você se surpreende ao lembrar que, com a mesma quantia que seria suficiente para comprar um carro zero no final dos anos 1990, não é possível adquirir mais que um modelo usado e não tão novo nos dias de hoje? Isso pode ser explicado pelos efeitos da inflação.

A inflação é o termo utilizado em economia para falar da alta dos preços de um conjunto de produtos e serviços em um determinado período.

Considere que um recenseador tenha levantado os seguintes dados referentes à inflação das cinco regiões brasileiras no primeiro semestre do ano. Após coletados, os dados foram os seguintes:

No mês 1: Norte 1,7%; Sul 2,0%; Centro-Oeste 1,8%; Nordeste 1,5%; Sudeste 1,0%

No mês 3: Sul 1,6%; Nordeste 1,2% Sudeste 1,3%; Norte 1,6%; Centro-Oeste 1,7%

No mês 2: Centro-Oeste 1,7%; Norte 1,8%; Nordeste 1,4%; Sudeste 1,2%; Sul 1,7%

No mês 4: Nordeste 1,1%; Sul 1,8%; Sudeste 2,0%; Centro-Oeste 2,4%; Norte 1,6%

No mês 6: Sudeste 2,0%; Centro-Oeste 2,1%; Sul 1,8%; Nordeste 2,8%; Norte 2,2%

No mês 5: Norte 2,8%; Nordeste 1,9%; Sudeste 2,5%; Sul 3,6%; Centro-Oeste 2,9%

Questão: Em um dia numa entrevista coletiva um agente recenseador do IBGE precisou de uma informação, mas em meio a tantos dados diferentes, não conseguiu localizá-la de imediato. Se o responsável pela organização dos dados fosse você, como a faria para melhorar a visualização de cada informação?

Observação:
Conclusão:

Orientações Didáticas ao Professor (a):

PROCEDIMENTO 1

A atividade 1 é composta por um texto sobre inflação e uma questão que direcionará o estudante a realizar a organização dos dados em tabela.

Após a organização desses dados, os estudantes devem fazer a observação sobre o que responderam na questão. Daí, essa observação irá fazer com que eles realizem a conclusão conforme seus registros.

Assim que todos os estudantes tiverem respondido, o conceito de Matriz deve ser formalizada, mas deixamos ao critério do professor ajustá-la para um melhor entendimento dos alunos. E assim, possibilitará o alcance do objetivo que esta atividade se propôs que é de conceituar matriz.

PROCEDIMENTO 2

1. Organizar os estudantes em equipes, as quais devem ser formadas de maneira espontânea pelos alunos, de no máximo quatro integrantes;
2. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;
3. Auxiliar os estudantes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;
4. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;
5. Orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações sobre as características encontradas;
6. Orientar os discentes para a socialização de suas observações sobre as características encontradas;
7. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações deles;
8. Orientar para que os estudantes resolvam as atividades de aprofundamento da atividade 1.

Prezado Professor (a), as Atividades de Aprofundamento foram organizadas obedecendo o seguinte critério que é começar com questões de nível mais fácil para as questões de níveis mais difíceis de dificuldades, segundo as orientações de Sá (2019).

5. 1. 1. Atividade de Aprofundamento da Atividade 1

1. Escreva a matriz correspondente à tabela de notas abaixo:

	Matemática	Física	Química	Biologia
Ana	6	4	5	8
Antônio	5	7	5	5
Beatriz	5	6	7	4

2. Com relação à matriz do exercício 1, responda:

- O que significa os números da 1ª linha?
- O que significa m os números da 2ª coluna?
- O que significa o número da 3ª linha e 3ª coluna?

3. Durante o ano letivo um aluno registrou as notas obtidas, respectivamente nas 1ª, 2ª, 3ª e 4ª avaliações. Nas disciplinas de Matemática: 5,0; 8,0; 7,5 e 7,0; Português: 6,0; 7,0; 9,5 e 6,5 e Geografia: 10,0; 5,0; 6,5 e 8,0. Represente, por meio de matriz, esses dados e verifique se a visualização dessas notas ficou melhor.

4. A tabela mostra o consumo mensal, em quilogramas, de três alimentos básicos, durante um trimestre, por uma família. Escreva esses dados em forma de matriz.

	ABRIL	MAIO	JUNHO
Arroz	10	8	9
Feijão	4	5	6
Carne	5	7	10

5. Uma pesquisa realizada por estudantes da Faculdade de Estatística mostra, em horas por dia, como os jovens entre 12 e 18 anos gastam seu tempo, tanto durante a semana (de segunda-feira a sexta-feira), como no fim de semana (sábado e domingo). A seguinte tabela ilustra os resultados da pesquisa.

Rotina Juvenil	Durante a semana	No fim de semana
Assistir à televisão	3	3
Atividades domésticas	1	1
Atividades escolares	5	1
Atividades de lazer	2	4
Descanso, higiene e alimentação	10	12
Outras atividades	3	3

De acordo com esta pesquisa, quantas horas de seu tempo gasta um jovem entre 12 e 18 anos, na semana inteira (de segunda-feira a domingo), nas atividades escolares?

6. Complete o quadrado da figura ao lado, de modo que as somas dos números inteiros das linhas, das colunas e das diagonais sejam iguais. Calcule a soma $a + b + c$.

d	b	-4
a	-3	c
-2	e	0

Fonte: 1) e 2) Dante (2017), 3) Corrêa (2019), 4) ENEM (2012), 5) Iezzi e Hazzan (2013), 6) Corrêa (2019)

A atividade 2 vem tratar a maneira de como fazer a localização de elementos em uma matriz. Nela, os estudantes possivelmente não terão muita dificuldade e esperamos que eles consigam localizar, nas matrizes, os elementos solicitados, pelos conhecimentos adquiridos na atividade 1. Espera-se que os participantes consigam identificar facilmente as linhas e colunas dos elementos de uma matriz.

5.2. ATIVIDADE 02

a. Título: Localização de elementos da matriz

b. Objetivo: Descobrir uma maneira de descrever elementos em uma matriz.

c. Material: Roteiro da atividade, borracha e lápis ou caneta, papel.

d. Procedimento:

- Observe as matrizes dadas na tabela;
- Localize os elementos solicitados nessa tabela abaixo;
- Responda a questão proposta, após os elementos das Matrizes serem todos localizados.

MATRIZ	ELEMENTOS DA MATRIZ				
	a_{11}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & -5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} -15 & 1 & 2 \\ 10 & 8 & 5 \\ 2 & -7 & 10 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -4 & 5 \\ -6 & 25 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} -8 & 12 & 9 \\ 1 & 15 & 0 \\ -13 & 10 & -5 \end{pmatrix}$					
$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 7 \\ 3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$					

Questão: Qual a maneira mais ágil de localizar qualquer elemento em uma matriz?

Observação:

Conclusão:

Orientações Didáticas ao Professor (a):

PROCEDIMENTO 1

A atividade 2 é composta de um quadro que direciona o estudante a localizar vários elementos em matrizes. Ao nosso ver, esta atividade possibilitará a reflexão sobre um padrão já existente e com o reforço do professor, esperamos que o estudante consiga perceber algo próximo do padrão que é de localização (a_{ij}) que usualmente, utilizamos ao ensinar matrizes.

Assim que todos os estudantes tiverem preenchido o quadro, respondido à questão e terem feito a observação e a conclusão, eles devem ser encaminhados para a etapa de formalização, onde o professor deve auxiliar a maneira mais ágil de localizar qualquer elemento em uma matriz.

PROCEDIMENTO 2

1. Organize os estudantes em equipes, as quais devem ser formadas de maneira espontânea pelos alunos, de no máximo quatro integrantes;
2. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;
3. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução da atividade;
4. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;
5. Orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações sobre as características encontradas;
6. Orientar os discentes para a socialização de suas observações sobre as características encontradas;
7. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações dos mesmos;
8. Orientar para que os estudantes resolvam as atividades de aprofundamento da atividade 2.

5. 2. 1. Atividade de Aprofundamento da Atividade 2

1. Uma indústria tem quatro fábricas A, B, C, D, cada uma da qual produz três produtos 1, 2 e 3. A tabela mostra a produção da indústria durante uma semana.

	Fábrica A	Fábrica B	Fábrica C	Fábrica D
Produto 1	560	360	380	0
Produto 2	340	450	420	80
Produto 3	280	270	210	380

- Quantas unidades do produto 2 foram fabricadas pela fábrica C?
- Qual foi a Fábrica que produziu mais produto 3?
- Qual foi a Fábrica que produziu menos produto 2?
- Qual a quantidade de linhas e de colunas dessa tabela?

2. Um técnico de basquetebol descreveu o desempenho dos titulares de sua equipe em sete jogos através da matriz:

$$\begin{bmatrix} 18 & 17 & 18 & 17 & 21 & 18 & 20 \\ 15 & 16 & 18 & 18 & 22 & 21 & 18 \\ 20 & 19 & 20 & 21 & 14 & 14 & 22 \\ 18 & 22 & 20 & 20 & 18 & 22 & 23 \\ 19 & 18 & 12 & 14 & 20 & 17 & 18 \end{bmatrix}$$

Cada elemento a_{ij} dessa matriz é um número de pontos marcados pelo jogador de número i no jogo j . Responda:

- Quantos pontos marcou o jogador de número 3 no jogo 5?
- Quantos pontos marcou a equipe no jogo 4?
- Quantos pontos marcou o jogador de número 2 em todos os jogos?

3. Em uma editora, as vendas de livros de Matemática, Física e Química, no primeiro trimestre de um ano, podem ser expressas pela matriz a seguir:

$$\begin{array}{ccccc} & \text{Jan} & \text{Fev} & \text{Mar} & \\ \text{Matemática} & 2000 & 3200 & 5000 & \\ \text{Física} & 4000 & 2000 & 2500 & \\ \text{Química} & 2500 & 2200 & 2300 & \end{array} \Bigg]_{3 \times 3}$$

- Se quisermos saber quantos livros de matemática foram vendidos em fevereiro qual local da matriz devemos procurar?

b) Qual elemento da matriz representa o número de livros de Física vendidos no mês de janeiro?

c) O que representa o número 5000, localizado na 1ª linha e 3ª coluna da matriz?

4. Na matriz seguinte, estão representadas as quantidades de sorvetes de 1 bola e de 2 bolas comercializados no primeiro bimestre de um ano em uma sorveteria:

$$A = \begin{pmatrix} 1320 & 1850 \\ 1485 & 2040 \end{pmatrix}$$



Cada elemento a_{ij} dessa matriz representa o número de unidades do sorvete do tipo i ($i = 1$ representa uma bola e $i = 2$, duas bolas) vendidas no mês j ($j = 1$ representa janeiro e $j = 2$, fevereiro).

a) Quantos sorvetes de duas bolas foram vendidos em janeiro?

b) Em fevereiro, quantos sorvetes de duas bolas foram vendidos a mais que os de uma bola?

c) Se o sorvete de uma bola custa R\$ 3,00 e o de duas bolas custa R\$ 5,00, qual foi a arrecadação bruta da sorveteria no primeiro bimestre com a venda desses dois tipos de sorvete?

5. Dada a matriz A, responda:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & \pi & 0 & \frac{7}{8} \\ 1,5 & 8 & 19 & \sqrt{3} & -4 \end{bmatrix}$$

a) Qual é a ordem dessa matriz?

b) Que elemento está na posição:

i. a_{13} ?

ii. a_{24} ?

iii. a_{21} ?

iv. a_{25} ?

c) Qual é a posição ocupada pelo elemento:

i. π ?

ii. -4 ?

iii. $\frac{7}{8}$?

iv. 8 ?

6. Determine a palavra que se obtém ao organizar os elementos da matriz A da seguinte maneira:

$$A = \begin{bmatrix} R & T & N & C \\ G & U & A & O \\ L & E & D & Z \\ B & V & J & I \end{bmatrix}$$

a) $a_{22}a_{42}a_{23}$

b) $a_{14}a_{23}a_{43}a_{22}$

c) $a_{21}a_{24}a_{44}a_{23}a_{41}a_{23}$

d) $a_{23}a_{41}a_{23}a_{14}a_{23}a_{12}a_{32}$

7. No projeto Sobremesa musical, o Instituto de Cultura Musical da PUC-RS realiza apresentações semanais gratuitas para a comunidade universitária. O número de músicos que atuaram na apresentação de número j do i-ésimo mês da primeira temporada de 2009 está registrado como elemento a_{ij} da matriz a seguir:

$$\begin{bmatrix} 43 & 12 & 6 & 6 & 5 \\ 43 & 5 & 5 & 12 & 12 \\ 43 & 13 & 20 & 13 & 0 \\ 3 & 5 & 54 & 43 & 43 \end{bmatrix}$$

Qual a semana e o mês em que atuou o maior número de músicos nessas apresentações?

8. A tabela a seguir apresenta o faturamento, em dólares, de cada loja nos quatro primeiros dias de janeiro:

$$\begin{bmatrix} 1.950 & 2.030 & 1.800 & 1.950 \\ 1.500 & 1.820 & 1.740 & 1.680 \\ 3.010 & 2.800 & 2.700 & 3.050 \\ 2.500 & 2.420 & 2.300 & 2.680 \\ 1.800 & 2.020 & 2.040 & 1.950 \end{bmatrix}$$

Cada elemento a_{ij} dessa matriz é o faturamento da loja i no dia j.

a) Qual foi o faturamento da loja 3 no dia 2?

b) Qual foi o faturamento de todas as lojas no dia 3?

c) Qual foi o faturamento da loja 1 nos 4 dias?

9. Um Biólogo comparou, durante os três primeiros dias do mês de julho, o crescimento populacional de duas culturas de bactérias, as quais denominou cultura 1 e cultura 2. Após esse estudo, o cientista construiu a tabela:

$$A = \begin{pmatrix} 5 \times 10^9 & 5,2 \times 10^9 & 5,408 \times 10^9 \\ 8 \times 10^6 & 8,4 \times 10^6 & 8,904 \times 10^6 \end{pmatrix},$$

em que cada elemento a_{ij} é o número de indivíduos da cultura i no dia j do mês de julho.

- Qual era a população de bactérias da cultura 1 no dia 2 de julho?
- De quantos por cento aumentou a população da cultura 2, do dia 1º para o dia 2 de julho?

10. Na tabela a seguir, estão representadas as quantidades de proteínas, colesterol, cálcio e carboidrato encontradas em alguns tipos de queijos.

Composição por 100 g

	Proteínas (g)	Colesterol (mg)	Cálcio (mg)	Carboidrato (g)
Queijo minas frescal	17,4	62	579	3,2
Queijo mozzarella	22,6	80	875	3,0
Queijo parmesão	35,6	106	992	1,7

- A essa tabela é possível associar uma matriz $Q = (q_{ij})_{m \times n}$. Quais são os valores de m e n ?
- Obtenha os valores de q_{23} e q_{31} , explicando seus respectivos significados.
- Danilo consome, semanalmente, duas porções de 500 g de queijo musarela cada uma. Substituindo-o por queijo minas frescal, quantos miligramas a menos de colesterol ele terá ingerido ao fim de um ano? Considere o ano com 53 semanas.

Fonte: 1) Corrêa (2019), 2) Dantes (2000), 3) Silva (2016), 4) Iezzi. . . [et. al.] (2017), 5) e 6) Balestri (2016), 7) PUC – RS (2010), 8), 9) Paiva (2005), 10) Iezzi. . . [et. al.] (2017)

A atividade 3 que segue, trata sobre o número de elementos de uma matriz. Nela, os estudantes possivelmente não terão muita dificuldade, pois ao fazerem a contagem do número de linhas e do número de colunas, esperamos que eles possam relacionar essa contagem com o número de elementos da matriz e assim determinar,

intuitivamente, o padrão $m \times n$, que será chamado de ordem da matriz. O professor deverá intervir caso alguma dúvida surja, sempre apontando caminhos que leve o estudante a realizar as devidas conclusões.

5. 3. ATIVIDADE 03

a. Título: Número de elementos da matriz

b. Objetivo: Descobrir a relação que existe entre o número de elementos da matriz e a quantidade de linhas e colunas.

c. Material: Roteiro da atividade e, borracha e lápis ou caneta, papel.

d. Procedimento:

- Preencha o quadro dado;
- Identifique o número de linhas, o número de colunas e o número de elementos de cada matriz dada;
- Após o preenchimento do quadro responda a questão proposta.

Matriz	Número de linhas da matriz	Número de Colunas da matriz	Número de Elementos da matriz
$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$			
$B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 15 \\ 10 & 20 & 5 \\ 7 & 15 & 10 \end{pmatrix}$			
$C = \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 1 & 12 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$			
$D = \begin{bmatrix} 20 & 1 & 16 & -2 \\ 10 & 12 & 8 & 4 \end{bmatrix}$			
$E = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 1 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}$			
$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 9 & 15 & 1 \end{pmatrix}$			
$G = (1 \ 5 \ 10 \ 15)$			
$H = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 28 \\ -1 & 12 & 80 \end{bmatrix}$			
$I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$			

$J = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$			
$K = (-1000)$			
$L = \begin{bmatrix} -1 \\ -90 \\ 7 \end{bmatrix}$			

Questão: Descubra uma maneira de se obter o número de elemento de uma matriz sem ter que contar esses elementos.

Observação:

Conclusão:

Orientações Didáticas ao Professor (a):

A atividade 3 é composta de um quadro que leva o estudante a realizar o preenchimento, através da contagem do número de linhas, de números de colunas e de números de elementos de cada matriz dada. Os estudantes terão que encontrar uma relação entre o número de linha e de coluna da matriz relacionando-os para obter o número de elemento de uma matriz qualquer sem ter que conta-los.

Sugerimos que o professor dê atenção quanto ao preenchimento do quadro realizado pelos estudantes, pois há a possibilidade deles fazerem a contagem errada e isso pode interferir no resultado esperado.

Após o preenchimento do quadro, os estudantes devem responder à questão, fazer em seguida a observação. Daí, com base nessas observações, eles devem apresentar a conclusão à qual chegaram, que pode ou não estar de acordo com o objetivo proposto nessa atividade.

A partir desse momento o professor pode escolher formalizar o assunto abordado nessa atividade ou pode conduzi-los diretamente para a atividade de aprofundamento. Recomendamos a segunda escolha, pois alguns estudantes têm dificuldade de escrever a conclusão, por não estarem acostumados a fazê-la. A capacidade em resolver a atividade de aprofundamento pode indicar se realmente compreenderam a atividade.

5. 3. 1. Atividade de Aprofundamento da Atividade 3

1. Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, em que $a_{ij} = i - j$.

2. Seja a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ em que $a_{ij} = 4i - 2j + 3$. Determine a matriz A respeitando a condição dada.

3. Escreva a matriz quadrada de ordem 3, tal que $a_{ij} = i + 3j$

4. A Transferência Eletrônica Disponível (TED) é uma transação financeira de valores entre diferentes bancos. Um economista decide analisar os valores enviados por meio de TEDs entre cinco bancos (1, 2, 3, 4, 5) durante um mês. Para isso, ele dispõe esses valores em uma matriz $A = [a_{ij}]$, em que $1 \leq i \leq 5$ e $1 \leq j \leq 5$, e o elemento a_{ij} corresponde ao total proveniente das operações feitas via TED, em milhão de real, transferidos do banco i para o banco j durante o mês. Observe que os elementos $a_{ij} = 0$, uma vez que TED é uma transferência entre bancos distintos. Esta é a matriz obtida para essa análise:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, qual o banco que transferiu a maior quantia via TED?

5. A tabela abaixo apresenta a população desocupada de fevereiro a junho de 2015 em São Paulo (SP).

População desocupada de fevereiro a junho de 2015 em São Paulo (SP) – 1000 pessoas

Mês	Homens	Mulheres
Fevereiro	272	341
Março	277	328
Abril	313	338
Maio	349	358

peessoas, respectivamente; e, na região Centro-Oeste, são 12.482.963 e 1.575.131 pessoas, respectivamente.

Numerando as grandes regiões brasileiras com 1, 2, 3, 4 e 5, na ordem em que elas aparecem no texto, e numerando as áreas urbanas e rural com 1 e 2, respectivamente, responda aos itens a seguir sobre a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, em que a_{ij} representa a população da região i na área j .

- a) Construa a matriz A.
- b) O que representa a soma dos elementos da 1ª coluna dessa matriz?
- c) O que representa a soma dos elementos da 2ª coluna dessa matriz?
- d) O que representa a soma de todos os elementos dessa matriz?

Fonte: 1) Iezzi. . . [et. al.] (2016), 2) e 3) Dantes (2016), 4) ENEM (2018), 5) e 6) Chavante e Prestes (2016), 7) Iezzi. . . [et. al.] (2010), 8) Paiva (2015).

A atividade 4 que está apresentada a seguir, trata sobre a igualdade de matrizes. Nela os estudantes deverão perceber que para duas matrizes serem iguais elas devem ter as mesmas ordens e seus elementos correspondentes têm que ser iguais.

5. 4. ATIVIDADE 04

a. Título: Igualdade de Matrizes

b. Objetivo: Descobrir as condições para termos a igualdade de matrizes.

c. Material: Roteiro da atividade, lápis ou caneta, papel, folha de Matrizes para a atividade 4.

d. Procedimento:

- Preencha o quadro com as matrizes dadas na folha da atividade 4;
- Logo após preencher o quadro, responda a questão proposta;
- Em seguida, faça as devidas observações e conclusões que achar necessário.

Questão: Quais as matrizes que têm, ao mesmo tempo, as mesmas ordens e os elementos correspondentes iguais?

Observação:
Conclusão:

Orientações Didáticas ao Professor (a):

A atividade 4 é composta de um quadro que exige marcação das matrizes que tenham as mesmas ordens e elementos correspondentes iguais. Em seguida os estudantes irão responder à questão observando o quadro preenchido.

Após o preenchimento do quadro, os estudantes devem descrever a observação sobre o que foi feito no quadro que possa ser interpretado como uma regularidade. Daí, com base nessas observações, eles deverão apresentar na área de conclusão a regularidade que perceberam sobre as características que duas matrizes devem ter, para que sejam consideradas iguais.

A partir desse momento o professor pode escolher formalizar o assunto abordado nessa atividade ou pode conduzi-los diretamente para a atividade de aprofundamento. Recomendamos a segunda opção, pois alguns estudantes tem dificuldade de escrever as conclusões da atividade, pois a capacidade em resolver a atividade de aprofundamento pode indicar se realmente compreenderam o assunto.

5. 4. 1. Atividade de Aprofundamento da Atividade 4

1. Determine os números reais **a**, **b**, **c** e **d** para que se tenha $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & b \\ d & 6 \end{pmatrix}$.
2. Determine **x**, **y** e **z** reais que satisfaçam $\begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 4 & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & z \\ z^2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Em cada item determine, caso exista, o número real **m** que satisfaz a igualdade:

$$a) \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 1-m & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2m \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 9-m^2 & 1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 7 \end{pmatrix}$$

4. Quais são os valores de **x**, **y** e **z** que tornam a igualdade de matriz verdadeira.

$$\begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 4 & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & z \\ z^2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Determine os números reais **p** e **q** de modo que as matrizes $\begin{pmatrix} p+q & -2 \\ 0 & 2p-q \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sejam iguais.

6. Sejam as matrizes $D = \begin{pmatrix} 35+d & 45a \\ 3c & 5b \end{pmatrix}$ e $F = \begin{pmatrix} 49 & 45 \\ 99 & 25 \end{pmatrix}$. Quais os valores de **a**, **b**, **c** e **d**, para que a matriz D seja igual à matriz F?

7. Determine os valores de **a**, **b** e **c** na expressão abaixo:

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 & 8 \\ 4 & a+c & 3 \\ -1 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & c-2b & 8 \\ 4 & 8 & 3 \\ a+3b & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

Fonte: 1), 2), 3), 4), 5) Iezzi. . . [et. al.] (2016), 6) Silva (2016), 7) Chavante e Prestes (2016)

Quando estiverem respondendo a atividade de aprofundamento os estudantes possivelmente não terão dificuldades em realizar as questões. Esperamos que eles se recordem das resoluções de equações estudadas em anos anteriores e, com isso consigam realizar com êxito a atividade.

A atividade 5 trata sobre as características das matrizes descritas na primeira coluna da tabela. Com os exemplos mostrados na segunda coluna, os estudantes serão instigados a dar um nome específico a cada uma das matrizes com características especiais. Na terceira coluna os estudantes terão possibilidade de nomeá-las, podendo contar com o auxílio do professor para direcioná-los. Dessa forma os alunos irão criar familiaridade com os nomes usados na representação de Matrizes.

5. 5. ATIVIDADE 05

- a. Título:** Matrizes especiais (Adaptado de Silva, 2016, p. 114)
- b. Objetivo:** Conceituar alguns tipos especiais de matrizes.
- c. Material:** Roteiro da atividade, borracha, lápis ou caneta e papel.
- d. Procedimento:**
- Leia as características especiais de cada matriz;
 - Observe os exemplos dados e relacione-os com suas características. Após complete os que faltam;
 - Escreva nos espaços, referido aos nome, qual o nome que você daria para essas matrizes.

Característica	Exemplo	Nome
Uma matriz que possui apenas uma Coluna.	$\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	
Uma matriz que possui apenas uma Linha.		Matriz linha
Uma matriz que possui o mesmo número de linhas e de colunas.	$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 9 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$	
Uma matriz em que todos os elementos tem valor 0 (valor nulo).		
Uma matriz que possui valores não nulos somente em sua diagonal.	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	
Uma matriz que só possui valores nulos e em sua diagonal somente o valor 1.	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Uma matriz que possui número de linhas diferentes do número de coluna.	$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 4 & 10 & 8 \end{bmatrix}$	

Fonte: Silva (2016)

Orientação Didática ao Professor (a):

1. Organize os estudantes em equipes, as quais devem ser formadas de maneira espontânea de no máximo quatro integrantes;
2. Orientar os estudantes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;

3. Auxiliar os estudantes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução da atividade;
4. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;
5. Orientar os estudantes para o preenchimento do nome das matrizes de acordo com suas características dadas.
6. Orientar os alunos para a socialização das observações sobre as características encontradas.

A atividade 6 trata sobre matriz transposta. Nela, os estudantes não terão muita dificuldade, e farão a inversão dos elementos que estão dispostos em forma de linha para a forma de coluna. Essa mudança deve ocorrer também na ordem das matrizes.

5. 6. ATIVIDADE 06

a. Título: Matriz Transposta

b. Objetivo: Conceituar matriz transposta.

c. Material: Roteiro da atividade, borracha, lápis ou caneta e papel.

d. Procedimento:

- Para cada Matriz dada, inverta essas matrizes de forma que os elementos que estão dispostos em forma de linhas, agora, fiquem dispostos na forma de coluna e vice e versa;
- Na coluna da esquerda, a nova matriz que teve suas linhas e colunas trocadas;
- Responda a questão, observando a tabela preenchida.

MATRIZ INICIAL	MATRIZ RESULTANTE DA TROCA DAS LINHAS PELAS COLUNAS DA MATRIZ INICIAL
$A = (10 \quad -7 \quad 5)_{1 \times 3}$	
$B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -15 \\ 4 & -20 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$	
$C = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -5 & -10 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$	

$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$	
$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$	
$F = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$	
$G = (2 \quad 4 \quad 5 \quad 4 \quad 1)_{1 \times 5}$	
$H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 9 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$	
$I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$	
$J = [-10 \quad 10]_{1 \times 2}$	

Questão: O que aconteceu com a ordem das matrizes quando as mudanças foram realizadas?

Observação:

Conclusão:

Orientações Didáticas ao Professor (a):

Acreditamos que as atividades antes vista darão o direcionamento, para que os estudantes façam a transformação de uma matriz linha (matriz A) para uma matriz coluna (matriz D). Havendo alguma dúvida o professor deverá intervir apontando caminhos, pois esta atividade é pré-requisito para as seguintes, portanto tem que ser bem compreendida.

Dessa forma, recomendamos que seja realizado as seguintes etapas:

1. Organizar os estudantes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea de no máximo quatro integrantes;

2. Distribuir o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe;
3. Orientar os estudantes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;
4. Auxiliar os estudantes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;
5. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;
6. Orientar os estudantes no preenchimento do quadro;
7. Orientar os estudantes no registro de suas observações e conclusões após o preenchimento do quadro;
8. Orientar os estudantes para a socialização de suas observações e conclusões;
9. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações e conclusões realizadas por eles;
10. Orientar para que os estudantes resolvam as questões de aprofundamento propostas.

5. 6. 1. Atividade de Aprofundamento da Atividade 6

1. Em cada caso, obtenha a transposta da matriz dada:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e) } E = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 11 \\ 0,5 & 7 \\ 3 & 4,1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{f) } F = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{g) } G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } D = (-8 \quad 7 \quad 5)$$

2. Seja $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, em que $a_{ij} = 2i + 3j$. Escreva a matriz A^t .

3. Associe cada matriz a sua transposta escrevendo a letra e o número romano correspondentes.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

I) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

II) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

III) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

4. Observe a tabela e responda.

Cinco primeiros colocados ao final do campeonato brasileiro de futebol da série A, em 2015			
Equipe	Vitórias	Empates	Derrotas
Corinthians/SP	24	9	5
Atlético/MG	21	6	11
Grêmio/RS	20	8	10
São Paulo/SP	18	8	12
Internacional/RS	17	9	12

Fonte: Balestri (2016)

- Escreva uma matriz F que represente os dados da tabela.
- Determine F^t .
- Qual é a posição do elemento da matriz F que representa a quantidade de empates da equipe do São Paulo/SP? E na matriz F^t ?
- Escreva a matriz transposta de F na forma de tabela.

5. Num campeonato de basquete verificou-se o seguinte: Anselmo fez 40 lançamentos e 18 cestas, cometendo 10 faltas. Alexandre fez 32 lançamentos e 22 cestas, cometendo 9 faltas. Andréa e Aluísio fizeram, cada um, 20 lançamentos e 10 cestas, cometendo 4 faltas. Escreva a matriz transposta da matriz atleta $\times$ resultado.

6. Coloque (V) se a alternativa for verdadeira ou (F) se for falsa.

() A matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 1}$ é uma matriz linha.

() A matriz $B = (b_{ij})_{1 \times 5}$ é uma matriz coluna.

() A matriz $C = (c_{ij})_{3 \times 3}$, com $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ é uma matriz identidade.

() As matrizes $D = (d_{ij})_{2 \times 2}$ e $E = (e_{ij})_{2 \times 2}$, com $d_{ij} = -e_{ij}$ $0 < i < 3$ e $0 < j < 3$, são opostas.

() A matriz $X = (x_{ij})_{3 \times 3}$ é a transposta da matriz $Y = (y_{ij})_{3 \times 3}$ se $x_{ij} = y_{ij}$ para $0 < i < 4$ e $0 < j < 4$.

7. Obtenha a matriz transposta de $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, sendo $a_{ij} = 2i - j$.

8. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$.

- Classifique a matriz A segundo o seu tipo.
- Determine os elementos a_{13} , a_{21} e a_{32} .
- Obtenha A^t .

9. Sabendo que a matriz $\begin{bmatrix} 5 & x^2 & 2-y \\ 49 & y & 3x \\ -1 & -21 & 0 \end{bmatrix}$ é igual a sua transposta, calcule o valor de $x + 2y$.

Fonte: 1) Autoria própria (2020), 2), 3), 4) Balestri (2016), 5) Filho e Silva (2000), 6) Autoria própria (2020), 7), 8), Diniz e Somole (2013), 9) Paiva (2005)

A atividade 7 trata sobre matriz simétrica. Nela os estudantes não terão dificuldades em realizar as transpostas solicitadas visto que na atividade anterior o assunto já foi estudado.

5. 7. ATIVIDADE 07

a. Título: Matriz Simétrica

b. Objetivo: Conceituar Matriz Simétrica

c. Material: Roteiro da atividade, borracha, lápis ou caneta e papel.

d. Procedimento:

- Para cada Matriz dada, inverta-as de forma que os elementos que estão dispostos na forma de linhas, agora, fiquem dispostos na forma de coluna;
- Preencha a tabela com as **transpostas das matrizes**;
- Responda a questão observando a tabela preenchida e faça as observações e conclusões necessárias.

Matriz dada	Transposta da matriz
$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$	
$B = \begin{pmatrix} 3 & 10 & -1 \\ 10 & 5 & -5 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$	
$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$	
$D = [15]_{1 \times 1}$	
$E = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$	
$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$	
$G = (-3)_{1 \times 1}$	
$H = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$	
$I = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$	
$J = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$	

Questão: No preenchimento da tabela acima, você observou alguma mudança nas transposta das matrizes? O que aconteceu?

Observação:

Conclusão:

Orientações Didáticas ao Professor (a):

A atividade 7 é composta de um quadro que direciona o estudante a realizar as transpostas das matrizes dadas. Esperamos que durante o preenchimento do quadro, eles percebam que quando há a troca, as matrizes resultantes permanecem a mesma.

Após o preenchimento do quadro, os estudantes devem fazer o registro sobre o que observaram no quadro que possa ser interpretado como uma regularidade. Daí, com base nessas observações, eles terão que escrever na área de conclusão a regularidade que perceberam sobre as matrizes transpostas, que pode ou não estar de acordo com o que o objetivo proposto nessa atividade.

Caso os estudantes tenham dificuldade em escrever as observações e conclusões, o professor deve intervir com questionamentos.

A partir desse momento o professor pode escolher formalizar o assunto abordado nessa atividade ou pode conduzi-los diretamente para a atividade de aprofundamento.

5. 7. 1. Atividade de Aprofundamento da Atividade 07

1. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2x & y \\ z & -t \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, com $A^t = -B$, calcule o valor de $x + y + z + t$.

2. Sabendo que as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} x^2 - 2 & 5 \\ x + 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ obedecem à condição $A^t = B$. Neste caso, calcule o valor de x .

3. Diz-se que uma matriz quadrada é simétrica se ela for igual à sua matriz transposta. Nessas condições, a matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 & x^2 - 4 \\ x + 1 & 1 & 2y \\ 0 & 2 + y & 2 \end{bmatrix}$ é simétrica, então encontre os valores de x e y .

4. Uma matriz quadrada **A** é dita simétrica se $A = A^t$. Sabendo que a matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & y \\ x & -2 & 5 \\ 3 & z & 1 \end{pmatrix} \text{ é simétrica, qual é o valor de } x + 2y - z?$$

5. Uma matriz **A** é simétrica se e só se, $A = A^t$. Determine **a**, para que $A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & a^2 \\ a & 2 \end{pmatrix} \text{ seja simétrica.}$$

6. Se a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ x^2 & 0 & 1-y \\ x & y-3 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica, então calcule o valor de $x + y$.

7. Uma matriz **A** é dita simétrica quando $A = A^T$. Sabendo que a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ x & 4 & 5 \\ 3 & z & 6 \end{pmatrix} \text{ é simétrica, qual é o valor de } x + y + z?$$

8. Matrizes são arranjos retangulares de números e possuem inúmeras utilidades. Considere seis cidades A, B, C, D, E e F; vamos indexar as linhas e colunas de uma matriz 6×6 por essas cidades e colocar 1 na posição definida pela linha X e coluna Y, se a cidade X possui uma estrada que a liga diretamente à cidade Y, e vamos colocar 0 (zero), caso X não esteja ligado diretamente por uma estrada à cidade Y. Colocaremos também 1 na diagonal principal.

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Indique a alternativa INCORRETA.

- a) É possível ir, passando por outras cidades, da cidade C até a cidade E.
- b) É possível ir, passando por outras cidades, da cidade A até a cidade C.
- c) A matriz ao lado é simétrica.
- d) Existem dois caminhos diferentes para ir da cidade A para a cidade D.

Fonte: 1) Autoria Própria (2020), 2) Paiva (2005), 3) Iezzi. . . [et. al.] (2004), 4) Iezzi. . . [et. al.] (2016), 5) Diniz e Smole (2013), 6) FCMSC-SP (s. d), 7) Iezzi. . . [et. al.] (2004), 8) Laya (2016).

A atividade 8 trata sobre a operação de adição de matrizes. Nela, os estudantes possivelmente não terão muita dificuldade em resolver o problema, nem em responder a questão, fazendo observação e conclusão referente a atividade.

5. 8. ATIVIDADE 08

a. Título: Adição de Matrizes

b. Objetivo: Conceituar adição de matrizes

c. Material: Roteiro da atividade, borracha, lápis ou caneta e papel.

d. Procedimento:

- Leia o problema a seguir;
- Considerar as quantidades vendidas de cada modelo como sendo elementos de uma linha;
- Considerar as quantidades vendidas de cada combustível como sendo elementos de uma coluna;
- Resolva a questão e faça as devidas observações e tire suas próprias conclusões.

Problema: As tabelas abaixo representam o número de unidades vendidas, em uma concessionária, de dois veículos 0 km, modelos **A** e **B**, de acordo com o tipo de combustível, durante os dois primeiros meses de determinado ano:

Janeiro				Fevereiro			
Combustível Modelo	Flex	Gasolina	Álcool	Combustível Modelo	Flex	Gasolina	Álcool
A	4 453	1 985	415	A	5 893	2 031	531
B	2 693	1 378	289	B	3 412	1 597	402

Fonte: Adaptado de lezzi... [et.al.] (2017, p. 75)

Questão: Monte uma tabela que represente a quantidade total de veículos vendidos nos dois meses?

Observação:

Conclusão:

Orientações Didáticas ao Professor (a):

Na atividade 8 esperamos que os estudantes resolvam o problema sem dificuldade utilizando a técnica da adição, ou seja, somando os respectivos valores das tabelas referentes aos meses de janeiro e fevereiro das vendas de dois veículos 0 km. Assim, cremos que naturalmente, a ideia da soma de matrizes, vá ficando claro e seja de imediato percebido pelos estudantes e com isso, descobrirão o padrão que devem seguir.

Dessa forma, recomendamos que seja realizado as seguintes etapas a seguir pelo professor.

1. Organizar os estudantes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea de no máximo quatro integrantes;
2. Distribuir o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe;
3. Orientar os estudantes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;
4. Auxiliar os estudantes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;
5. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;
6. Orientar os estudantes quanto a montagem da tabela solicitada na questão;
7. Orientar os estudantes no registro de suas observações e conclusões após responderem a questão;
8. Orientar os estudantes para a socialização de suas observações e conclusões;
9. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações e conclusões realizadas por eles;
10. Orientar para que os estudantes resolvam as questões de aprofundamento.

5. Uma pesquisa realizada com alguns alunos do Ensino Médio de duas escolas tinha o objetivo de indicar o tipo de computador que eles preferiam utilizar para estudar fora da sala de aula. Os resultados de cada escola foram organizados em planilhas eletrônicas.

	A	B	C	D
1	Escola X			
2	Tipo de computador	1º ano	2º ano	3º ano
3	mesa	12	8	14
4	portátil	6	11	13
5				

	A	B	C	D
1	Escola Y			
2	Tipo de computador	1º ano	2º ano	3º ano
3	mesa	10	11	15
4	portátil	14	12	12
5				

a) Determine a matriz Z que representa a preferência pelo tipo de computador, de acordo com o nível de escolaridade dos alunos entrevistados dessas duas escolas.

b) Considerando essas duas escolas, em qual ano do Ensino Médio 25 entrevistados preferem computadores portáteis?

6. Uma revendedora de peças vende três modelos diferentes de capacete, A, B e C, o consumidor pode comprar qualquer modelo com proteção para queixo ou sem proteção. As duas tabelas abaixo registram as quantidades vendidas durante as duas primeiras semanas de novembro.

Semana 1			
	A	B	C
Com proteção	7	10	0
Sem proteção	1	4	1

Semana 2			
	A	B	C
Com proteção	7	8	1
Sem proteção	2	6	1

Determine a tabela que registra os totais das vendas de cada modelo, indicando se foi com proteção ou sem, nas duas semanas.

7. Uma empresa fabrica dois produtos X e Y. Suas despesas de produção estão divididas em três categorias. Abaixo estão os valores dos gastos (em milhões de reais) para produção no primeiro e no segundo semestre.

Tabela I – 1º semestre

Categorias	Prod. A	Prod. B
Matéria Prima	3,4	4,3
Pessoal	2	2,2
Desp. Gerais	1,1	1

Tabela II – 2º semestre

Categorias	Prod. A	Prod. B
Matéria Prima	4	4
Pessoal	3,2	3,8
Desp. Gerais	2,1	2,2

De acordo com essas informações, represente uma tabela (dividida por categoria e tipo de produto) com os totais dos gastos dessa empresa no ano de 2015.

Fonte: 1) e 2) Dante (2000), 3) Autoria própria, 4) Iezzi. . . [et. al.] (2016), 5) Balestri (2016), 6) e 7) Silva (2016).

A atividade 9 trata de matriz oposta. Nela esperamos que os estudantes não tenham muita dificuldade em preencher o quadro com o resultado das adições das matrizes, nem resolver o problema, sempre respondendo a questão e realizando observação e conclusão referente a atividade em questão.

5. 9. ATIVIDADE 09

a. Título: Matriz Oposta

b. Objetivo: Conceituar matriz oposta

c. Material: Roteiro da atividade, borracha, lápis ou caneta e papel.

d. Procedimento:

- Responda a atividade.
- Com as informações da atividade preencha o quadro.
- Responda a questão que segue fazendo as observações e conclusões percebidas.

Problema: O professor Paulo pediu aos estudantes que realizassem as seguintes adições com as matrizes dadas. Depois, pediu que eles preenchessem a seguinte tabela com os resultados dessas adições.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ -3 & 7 & -10 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad G = (100)$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 0 \\ 3 & -7 & 10 \end{bmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$D = (-100) \quad I = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

- i. $A + I$ iii. $C + F$ v. $B + J$ vii. $D + G$ ix. $E + H$
 ii. $I + A$ iv. $F + C$ vi. $J + B$ viii. $G + D$ x. $H + E$

Itens	Soma das Matrizes	Resultado
i.	$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$	
ii.	$\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$	
iii.	$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 0 \\ 3 & -7 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ -3 & 7 & -10 \end{bmatrix} =$	
iv.	$\begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ -3 & 7 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 8 & 0 \\ 3 & -7 & 10 \end{bmatrix} =$	
v.	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} =$	
vi.	$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} =$	
vii.	$(-100) + (100) =$	
viii.	$(100) + (-100) =$	
ix.	$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -15 \end{pmatrix} =$	
x.	$\begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} =$	

Questão: O que você identificou nos resultados obtidos das adições feitas?

Observação:

Conclusão:

Orientações Didáticas ao Professor (a):

Na atividade 9 os estudantes não terão dificuldades em realizar a atividade, por isso espera-se que ela seja feita muito mais rápido do que a atividade anterior. A matriz nula que será a matriz solução, já foi apresentada aos estudantes na atividade 5. Aguardamos que eles façam a relação com o conhecimento adquirido anteriormente, porém o professor estará sempre atento para direcioná-los sempre que for solicitado.

Dessa forma, recomendamos ao professor que realize as seguintes etapas:

1. Organizar os estudantes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea e de no máximo quatro integrantes;
2. Distribuir o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe;
3. Orientar os estudantes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;
4. Auxiliar os estudantes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;
5. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;
6. Orientar os estudantes quanto a montagem da tabela solicitada na questão;
7. Orientar os estudantes no registro de suas observações e conclusões após responderem a questão;
8. Orientar os estudantes para a socialização de suas observações e conclusões;
9. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações e conclusões deles;
10. Orientar para que os estudantes resolvam as questões de aprofundamento propostas.

5. 9. 1. Atividade de Aprofundamento da Atividade 09

1. Associe cada matriz a sua oposta escrevendo a letra e o número romano correspondentes.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$

I) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$

II) $\begin{bmatrix} -5 & 6 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \\ -6 & 9 & -8 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 5 & -6 & -1 \\ 6 & -9 & 8 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

III) $\begin{bmatrix} -5 & 6 & 1 \\ -6 & 9 & -8 \\ 3 & -4 & -7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & -6 & -1 \\ -3 & 4 & 7 \\ 6 & -9 & 8 \end{bmatrix}$

IV) $\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

2. Com a correspondência feita na 1ª questão, faça agora a adição dessas matrizes com sua oposta.

3. Determine o valor da expressão $[(-A) + C] + [B + (-C)]$, dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -9 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $A + B =$

c) $B + C =$

b) $A + C =$

d) $A + B + C =$

5. Efetue as seguintes subtrações abaixo quando possível:

a) $\begin{bmatrix} 22 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 10 \end{bmatrix} =$

b) $\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 10 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} =$

c) $\begin{bmatrix} 19 & 26 & 14 \\ 11 & 6 & 32 \\ 45 & 12 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 16 & 3 \\ 7 & -6 & 5 \\ 15 & 3 & -11 \end{bmatrix} =$

d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} =$

e) $\begin{pmatrix} -4 \\ 44 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -22 \\ -3 \end{pmatrix} =$

f) $\begin{bmatrix} 35 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 \\ 10 \end{bmatrix} =$

g) $\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix} =$

6. Uma equipe de criadores de jogos para celular acabou de lançar dois jogos, o “Avião Maluco” e o “Fura Bolo”, nas versões **A** e **B**. as tabelas abaixo mostram o número de *downloads* de cada jogo, em cada tipo de versão, por dia:

 Downloads em 23 de outubro

Jogo	Versão A	Versão B
Avião Maluco	23	21
Fura Bolo	28	36

 Downloads em 24 de outubro

Jogo	Versão A	Versão B
Avião Maluco	67	89
Fura Bolo	122	104

De acordo com os dados das tabelas, façam o que se pede.

- Elabore a matriz A , quadrada de ordem 2, com os dados da tabela do dia 22 de outubro.
- Elabore a matriz B , quadrada de ordem 2, com os dados da tabela do dia 24 de outubro.
- Elabore a matriz $A + B$ e interprete o que são os valores dessa matriz, de acordo com o contexto do enunciado.
- Elabore a matriz $A - B$ e interprete o que são os valores dessa matriz, de acordo com o contexto do enunciado.
- Exatamente 10% do total de usuários que fizeram o download dos jogos nesses dois dias avaliaram os jogos como ótimos. Qual alternativa abaixo contém a operação matricial que gera a matriz C contendo a quantidade de usuários que nesses dois dias avaliou cada jogo, em cada versão, como ótimo?

(A) $C = 0,1 \cdot A + B$

(C) $C = 0,1 \cdot (A + B)$

(B) $C = 0,1 \cdot A^t + B$

(D) $C = 0,1 \cdot (A^t + B)$

7. Uma empresa é formada pelas lojas A e B, concessionárias de automóveis. Realizado um estudo sobre a aceitação de dois novos modelos de veículos nos quatro primeiros dias de fevereiro, foram obtidos os seguintes resultados:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Sendo que:

- A matriz A descreve o desempenho da loja A, de modo que cada elemento a_{ij} é o número de unidades vendidas no modelo i no dia j ;
- A matriz B descreve o desempenho da loja B, de modo que cada elemento b_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo i no dia j .

a) Quantas unidades do modelo 2 foram vendidas no dia 3 de fevereiro pela loja A?

b) Quantas unidades do modelo 1 foram vendidas no dia 2 de fevereiro pela loja B?

c) Construa uma matriz que descreve, dia a dia, as vendas de cada modelo nas duas lojas juntas e no período considerado.

No período considerado, construa uma matriz que compare o desempenho da loja A em relação à loja B, nas vendas diárias de cada modelo.

8. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, determine:

$(A + B) - (A + C)$.

9. Observe as tabelas.

População da região Sul do Brasil, em 2000			
	Rio grande do Sul	Santa Catarina	Paraná
Homens	4 994 719	2 669 311	4 737 420
Mulheres	5 193 079	2 687 049	4 826 038

População da região Sul do Brasil, em 2010			
	Rio grande do Sul	Santa Catarina	Paraná
Homens	5 202 057	3 100 360	5 130 994
Mulheres	5 488 872	3 148 076	4 826 038

- a) Utilizando as linhas para representar o sexo dos habitantes e as colunas para representar a unidade de federação, escreva as matrizes A e B que indicam a população da região Sul do Brasil no ano de 2000 e 2010, respectivamente.
- b) Calcule $B - A$.
- c) O que representa a matriz formada pelo resultado da operação $B - A$?

Fonte: 1) Balestri (2016), 2) Autoria própria (2020), 3) Balestri (2016), 4) e 5) Autoria própria (2020), 6) Dante (2016), 7) Paiva (2015), 8) Leonardo (2016), 9) Balestri (2016)

A atividade 10 trata sobre multiplicação de um número real por uma matriz. Nela, os estudantes possivelmente não terão muita dificuldade em responder à questão gerada após a leitura do texto sobre produção de televisores. Esperamos que os estudantes após responderem à questão, façam a observação e a conclusão referente a atividade em questão.

5. 10. ATIVIDADE 10

a. Título: Multiplicação de um número real por uma Matriz

b. Objetivo: Encontrar uma maneira de multiplicar um número real por uma matriz qualquer

c. Material: Roteiro da atividade, borracha, lápis ou caneta e papel.

d. Procedimento:

- Ler o texto abaixo;
- Responder à questão proposta, fazendo em seguida as observações e conclusões necessárias.

Texto: PRODUÇÃO DE TELEVISORES (Adaptado de Paiva, 2015, p. 77) Uma indústria de televisores possui algumas filiais. A filial A produz o modelo 1 e o modelo 2 de televisores. As tabelas abaixo apresenta a produção dessa filial nos três primeiros dias de fevereiro.

Produção da filial A		
Dia 1	Dia 2	Dia 3

Modelo 1	175	115	92
Modelo 2	97	120	95

Questão: Considere agora que essa filial decida dobrar sua produção diária no mesmo período do ano seguinte. Construa uma tabela que represente a quantidade total de televisores que deverão ser produzidos por essa filial no próximo ano.

Observação:

Conclusão:

Orientações Didáticas ao Professor (a):

A partir da atividade 10, esperamos que os estudantes desenvolvam os cálculos pedidos, multiplicando cada elemento da matriz pelo valor que é dado na questão, ou que somem o número de vezes a matriz dada percebendo que a matriz resultante é uma matriz de mesma ordem; e que cada elemento da matriz é igual a duas vezes os correspondentes da matriz dada. Assim os estudantes se aproximaram da definição de multiplicação de matrizes por um número real que é o nosso objetivo nesta atividade.

Dessa forma, recomendamos que as seguintes etapas sejam realizadas pelo professor antes de iniciar a aplicação da atividade.

1. Organizar os estudantes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea e de no máximo quatro integrantes;
2. Distribuir o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe;
3. Orientar os estudantes para que cumpram os procedimentos descritos no roteiro da atividade;
4. Auxiliar os estudantes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;

5. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;
6. Orientar os estudantes quanto a montagem da tabela solicitada na questão;
7. Orientar os estudantes no registro de suas observações e conclusões após responderem a questão;
8. Orientar os estudantes para a socialização de suas observações e conclusões;
9. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações e conclusões deles;
10. Orientar para que os estudantes resolvam as questões de aprofundamento propostas.

5. 10. 1. Atividade de Aprofundamento da Atividade 10

1. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, determine:

- | | |
|-----------------|--------------------|
| a) $A + B$ | g) $A + B^t$ |
| b) $A - B$ | h) $-3 \cdot A^t$ |
| c) $-5 \cdot A$ | i) $(5A - B)^t$ |
| d) A^t | j) $(3A)^t - 3A^t$ |
| e) B^t | k) $-(A^t + B^t)$ |
| f) $A^t + B$ | |

2. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, determine o valor da expressão $3A - 2B$.

3. A matriz **S** associa sua 1ª linha à quantidade de proteínas, em gramas, e a 2ª linha à quantidade de fibra alimentar, em gramas, que um copo de 200 ml de três marcas de suco à base de soja oferece.

$$S = \begin{bmatrix} 5,2 & 5 & 4,8 \\ 1,9 & 2,1 & 1,8 \end{bmatrix}$$

Determine a matriz que indica a quantidade de proteínas e fibra alimentar que cada uma dessas marcas de suco oferece em cada embalagem de 1 L.

4. Uma empresa de componentes eletrônicos compra baterias e resistências a dois distribuidores A e B. A seguinte tabela mostra o número de

transmissores e resistências que adquiriu a cada um dos distribuidores durante o mês de abril do presente ano.

	A	B
Baterias	40	80
Resistências	60	50

- a) Escreva esses dados em forma de matriz;
- b) Devido à demanda no mês de março, a empresa decide triplicar a compra desses componentes para o mês de abril. Represente por uma matriz essas quantidades?
- c) Explique o processo para o cálculo dos elementos da matriz que é o triplo da compra dos componentes.

5. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, calcule $3A + 2B - 4C$.

6. Resolva o problema:

Suponhamos que uma empresa produz três sabores de sorvete e cada sabor tem os seguintes ingredientes, conforme a seguinte tabela.

Sabor \ Ingredientes				
	Leite (litros)	Chocolate (l)	Baunilha (mg)	Liga (mg)
Chocolate	20	700	0	10
Creme	40	0	500	14
Flocos	15	450	40	8

Para aumentar a produção de sorvetes em 40%, qual a quantidade a mais de cada ingrediente a empresa terá que comprar para cada sabor de sorvete?

7. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} X + Y = 3A + B \\ X - Y = A - 5B \end{cases}$

b) $\begin{cases} X + Y = 2A + 3B \\ X - Y = 4A - B \end{cases}$

8. Se $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, calcule a matriz transposta de $P - 2 \cdot Q$.

9. A loja COMPROU GANHOU apresentou as quantidades vendidas do Produto A e do Produto B, por meio da tabela abaixo:

TIPO	QUANTIDADE VENDIDA	
	Janeiro	Fevereiro
PRODUTO A	10	36
PRODUTO B	20	48

No mês seguinte, as quantidades vendidas dos mesmos produtos foram reduzidas pela metade. Construa a matriz que representa esta situação.

10. Dadas $A^t = [20 \ 12 \ 5]$, $B^t = [8 \ 2 \ 10]$ e $C^t = [-10 \ 0 \ -8]$, determine a matriz X tal que $2A - B + 2X + C = 0$.

Fonte: 1) Dante (2017), 2) e 3) Balestri (2016), 4) Corrêa (2019), 5) Dante (2000), 6) Silva (2016), 7) Filho e Silva (2000), 8) UFBA (s.d), 9) ENCEJA (2005), 10) Diniz e Smole (2013)

6. CONSIDERAÇÕES

O objetivo deste produto educacional foi apresentar uma Sequência Didática para o ensino de Matrizes. Para sua construção levamos em consideração os aspectos curriculares, históricos, matemáticos e a revisão de estudos sobre matrizes, utilizando para tal a metodologia do Ensino por Atividades.

Por meio dos aspectos históricos, é possível perceber a evolução do assunto de matrizes, com destaque para Arthur Cayley que utilizou e desenvolveu o assunto. Afirmamos que até hoje são utilizadas, nos livros didáticos, as mesmas definições que Arthur Cayley usou em seu artigo publicado em 1958.

Na revisão de estudos averiguamos que o ensino apresenta a necessidade dos professores de matemática inovarem suas práticas através de metodologias ativas, mesmo que isso demandem tempo para o preparo e efetivação. Desejamos que o resultado no final, seja positivos, frutos dessas metodologias, as quais colocam os estudantes no centro do um aprendizado que faça com que eles se sintam inseridos no processo de aprendizagem, no qual

estão submetido, além de apresentar algumas sugestões importantes para a elaboração da Sequência Didática.

Em meio às compreensões obtidas na revisão de estudos, bem como a busca de estratégias de ensino que poderiam ser eficazes para o assunto de Matrizes, surgiu a possibilidade de utilizar a metodologia Ensino por Atividade. No estudo realizado sobre este direcionamento, foi possível construir a sequência didática, a qual apresentamos no capítulo 5.

Tudo o que está aqui já foi testado e validado. No texto original há recomendações que poderão ser muito úteis para o usuário que pretenda utilizar a Sequência Didática deste trabalho. É importante que o material original seja mais explorado pois nele há recomendações e dados mais completos provando que nosso trabalho deu certo.

Mencionamos aqui a questão do tempo utilizado para a aplicação da Sequência Didática, havíamos previsto um tempo médio de 41 minutos para cada atividade e na aplicação da SD, contabilizamos um tempo médio de 16 minutos. Observe como o tempo diminui muito pois, de acordo com Sá (1999), o estudante passa a realizar as atividades de maneira mais rápida de acordo com o seu avanço.

Destacamos ainda o desempenho médio que os estudantes tiveram no pré-teste com apenas 31% de acertos, já no pós-teste esse índice de acertos atingiu a porcentagem de 85%. Temos ainda o caso do Estudante I, que teve 10% de acerto no pré-teste e no pós-teste obteve 100% de acertos. Então, esses fatos comprovam que a Sequência Didática deu certo.

Por meio deste produto educacional, esperamos contribuir para facilitar a prática docente no que diz respeito ao planejamento e execução de aulas sobre o assunto de Matrizes no Ensino Médio e Ensino Superior.

Para nós, o verdadeiro ensino não consiste apenas na transferência de conhecimentos de uma cabeça para outra. Ensinar é fazer pensar, é estimular para a identificação e resolução de problemas; é ajudar a criar novos hábitos de pensamento e de ação. O professor deve ser um facilitador interativo e não um transmissor unilateral de informações que o que passa para os estudantes, muitas vezes, não tem sentido algum.

7. REFERÊNCIAS

AVILA, Tiago Pereira de. **O conhecimento das operações aritméticas e a aprendizagem de matrizes no ensino médio**: análise de interferências. São Paulo: UNICSUL, 2013. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=790492> Acesso em: 05 jun. 2019.

BERNARDES, Aline. ROQUE, Tatiana. **História da Noção de Matriz**: Uma releitura sob a luz de novas abordagens historiográficas. Rio de Janeiro: RBHM, 2016. Disponível em: <<http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-%20vol.16,no31/1%20-%20Aline%20Bernardes.pdf>> Acesso em: 20 ago. 2020.

BORBA, Elizandro Max. **Uma proposta para o ensino de matrizes com o apoio de tecnologia**. Porto Alegre: UFRS, 2011. Disponível em: <<https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/31617/000784022.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Acesso em: 26 fev. 2019.

BORGES, Thiago da Silva. **A metodologia de resolução de problemas no ensino de matrizes no ensino médio**. Rio de Janeiro: UERJ, 2018. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6883628>. Acesso em: 05 jun. 2019.

BOYER, Carl. B. MERZBACK, Uta. C. **História da Matemática**. Trad. Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

BRANDÃO, Pâmela Catarina de Sousa. **Estudo de matrizes de maneira significativa**. Três Lagoas: UFMS, 2018. Disponível em: <https://sca.profmatsbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160360344>. Acesso em: 30 abr. 2019.

BRASIL. Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). **Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: INEP/MEC, 2012. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf> Acesso em 12 jun. 2020.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCNs+ Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, 2002. P.144.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular**. Brasília, DF, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site.pdf>. Acesso em: 19 maio 2019.

BRASIL, Ministério da Educação. **Plano de Desenvolvimento da Educação/ Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB)**: PDE/SAEB: Prova Brasil: ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores.

Brasília: MEC/INEP, 2008. 127 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/saeb_matriz2.pdf> Acesso em: 12 fev. 2020.

CAYLEY, A. 1858. **A memoir on the theory of matrices**⁹. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*¹⁰. 148, 17 – 37.

CORRÊA, Tonival de Sarges. **O ensino de matrizes por meio de Sequências Didáticas integrado ao ensino tradicional**. Belém: UEPA, 2019.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto & aplicações**. 3. Ed. São Paulo: Ática, 2017.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Trad.: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução por Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FARIAS, Antonino de Araújo, **Ensino de Matrizes por Atividades em Sequências Didáticas: Estudos de Situações Didáticas e Aspectos Curriculares**. Belém: UEPA, 2021.

FONSECA, Marco Aurélio Meira. **O uso da planilha e correio eletrônico como recursos didáticos no ensino de matrizes, determinantes e sistemas lineares: uma experiência com alunos do ensino médio**. Vitória da Conquista: UESB, 2013. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2198433> Acesso em: 05 jun. 2019.

G1. **O que é inflação e como ela afeta sua vida?** Atualizado em 01/06/2018. Disponível em: <<https://g1.globo.com/economia/educacao-financeira/noticia/o-que-e-inflacao-e-como-ela-afeta-sua-vida.ghtml>> Acesso em: 18 dez. 2019.

IEZZI, Gelson. HAZZAN, Samuel **Fundamentos de Matemática Elementar: Sequências Matrizes Determinantes Sistemas**. Vol. 4. 8. Ed. Editora Atual. 2013.

KLEIN, Marjúnia Édita Zimmer. **O ensino e a aprendizagem de matrizes tendo como fundamentação teórica a teoria da aprendizagem significativa**. Porto Alegre: UFRS, 2018. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6430414>. Acesso em: 05 jun. 2019.

KRAIESKI, Protasio. **Abordagem de matrizes no ensino médio: uma avaliação crítica através dos Livros didáticos, com sugestões de aplicações**. Florianópolis:

⁹ Um livro de memórias sobre a teoria das matrizes.

¹⁰ Transações filosóficas da Royal Society of London

UFSC, 1999. P. 83. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/94914>> Acesso em: 09 dez. 2019.

LIMA, Lucas Antonio Mendes de. PEREIRA, Mayara Gabriella Grangeiro. **História da Matemática: Contribuições para o ensino de funções, equação quadrática e matrizes.** Belém: UEPA, 2017. P. 94.

MATOS, Fernando Cardoso de. NUNES, José Messildo Viana. **Práticas com matrizes a partir do estudo histórico epistemológico.** Belém: REMATEC, 2014. Número 32, p. 09 – 28. Disponível em: <<http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/201>>. Acesso em: 09 ago. 2021.

MESSIAS, Maria Alice de Vasconcelos Feio; SÁ, Pedro Franco de; VILHENA, Rubens Fonseca. **Um Estudo Diagnóstico Sobre as Dificuldades em Matrizes.** In: Diálogos entre a Pesquisa e a Prática Educativa, 9, 2006. Belo Horizonte. Pôsteres.

NUNES, Daniel Martins. **A abordagem histórica dos tópicos matriz, determinante e sistemas lineares presentes nos livros didáticos.** Pôster. São Paulo – SP: ENEM, 2016. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/7065_3067_ID.pdf> Acesso em: 13 jul. 2020.

OLIVEIRA JÚNIOR, Levindo Felício de, **A contextualização de matrizes no ensino médio: uma proposta de trabalho.** Palmas: UFT, 2014. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2268026>. Acesso em: 05 jun. 2019.

PAIVA, Manoel. **Matemática: conceitos, linguagem e aplicações.** Vol. 2. São Paulo: Moderna, 2015.

PARÁ. Secretaria Estadual de Educação. Sistema Paraense de Avaliação Educacional (SisPAE). **Revista do Sistema Paraense de Avaliação Educacional: Referências e Resultados. Ensino Fundamental matemática:** VUNESP, 2016. Disponível em: <https://sispae.vunesp.com.br/Arquivos/Revistas2016/SumarioExecutivo_2016.pdf> Acesso em: 28 mar. 2020.

PEREIRA, Nilce Maria de Oliveira. **Uma proposta para o ensino do conceito de matrizes em ambiente computacional.** Sorocaba: UFSCAR, 2015. Disponível em: <<https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/7673/DissNMOP.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Acesso em: 30 mar. 2019.

RINALDI, Bárbara Leister. RIZZATO, Fernanda Buhner. **Arthur Cayley.** IME: USP, 2005. Disponível em: <<http://milanesa.ime.usp.br/historia/cayley.html>> Acesso em: 05 jun. 2020.

REAL, Luana Pereira Villa. **Transformações Geométricas: aplicação de matrizes na computação gráfica**. Santa Maria: PRPGPE, 2017. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5416841>. Acesso em: 05 jun. 2019.

REIS, Michel Silva dos. **O Whatsapp no apoio à resolução de problema de matrizes: um produto educacional na EJA**. Belém: UFPA, 2016. Disponível em: <http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/10496/1/Dissertacao_EnsinoAprendizagemMatrizes.pdf>. Acesso em: 30 mar. 2019.

ROCHA, Jesiel Souza da. **Ensino – aprendizagem de matrizes, determinantes e sistemas lineares através da planilha Excel**. Porto Velho: UNIR, 2015. Disponível em: <<http://www.ri.unir.br/jspui/bitstream/123456789/1890/1/ENSINO%20DE%20MATRIZES%20C%20SISTEMAS%20LINEARES%20E%20DETERMINANTES%20ATRAV%20S%20DO%20EXCEL%20%20JESIEL%20%20SOUZA%20D%20ROCHA%20-%20DISSERTA%20C%2087AO.pdf>> Acesso em: 01 abr. 2019.

SÁ, Pedro Franco de. **Possibilidades do ensino de matemática por atividade**. Belém: IFPA, 2019.

SILVA, Fábio Anderson de Assumpção. **Utilizando o Arduíno como atividade aberta de investigação e experimentação matemática para o ensino de conceitos de matrizes**. São Paulo: IFSP, 2017. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5738218>. Acesso em: 05 jun. 2019.

SILVA, Hugo Carlos Machado da. **O ensino de matrizes a partir da resolução de problemas**. Belém: UEPA, 2016. Disponível em: <http://ccse.uepa.br/ppged/wpcontent/uploads/dissertacoes/09/hugo_carlos_machado_da_silva.pdf>. Acesso em: 02 maio 2019.

SILVA, José Augusto Ribeiro da. **Sistema de equações lineares: possibilidades de ensino por meio de uma sequência didática**. Belém: UEPA, 2018.

STEINHORST, Aroldo César. **O processo de construção dos conceitos de matrizes, determinantes e sistemas lineares no ensino médio, utilizando a planilha como recurso: um estudo comparativo**. Porto Alegre: PUCRS, 2011. Disponível em: <<http://repositorio.pucrs.br/dspace/handle/10923/3109>> Acesso em: 17 jun. 2019.

ANEXO: FICHA DE AVALIAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: **UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE MATRIZES**

Mestrando (a): **ANTONINO DE ARAÚJO FARIAS**

Data da avaliação: 29 / 11/ 2021

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado à:*

- | | |
|--|---|
| ☐ Estudantes do Ensino Fundamental | ☐ Estudantes do Ensino Médio |
| ☐ Professores do Ensino Fundamental | ☒ Professores do Ensino Médio |
| ☐ Outros: _____ | |

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

- | | | |
|--|---|-------------------------------------|
| ☒ Sequência Didática | ☐ Página na Internet | ☐ Vídeo |
| ☐ Texto Didático (alunos/professores) | ☐ Jogo Didático | ☐ Aplicativo |
| ☐ Software | ☐ Outro: _____ | |

b) *Possui URL:* ☐ Sim, qual o URL: _____
☒ Não ☐ Não se aplica

c) *É coerente com a questão-foco da pesquisa?*

☒ Sim ☐ Não. Justifique? _____

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*

☒ Sim ☐ Não. Justifique? _____

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*

☒ Sim ☐ Não. Justifique? _____

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

- | | | | |
|--|---|------------------------------|---|
| a) <i>Possui sumário:</i> | ☒ Sim | ☐ Não | ☐ Não se aplica |
| b) <i>Possui orientações ao professor:</i> | ☒ Sim | ☐ Não | ☐ Não se aplica |
| c) <i>Possui orientações ao estudante:</i> | ☐ Sim | ☐ Não | ☒ Não se aplica |
| d) <i>Possui objetivos/finalidades:</i> | ☒ Sim | ☐ Não | ☐ Não se aplica |
| e) <i>Possui referências:</i> | ☒ Sim | ☐ Não | ☐ Não se aplica |
| f) <i>Tamanho da letra acessível:</i> | ☒ Sim | ☐ Não | ☐ Não se aplica |
| g) <i>Ilustrações são adequadas:</i> | ☒ Sim | ☐ Não | ☐ Não se aplica |

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Foi aplicado?*

☒ Sim, onde: Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio São Francisco Xavier-
Abaetetuba – PA

☐ Não, justifique: _____

☐ Não se aplica

b) *Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?*

☒ Sim, onde: Escolas públicas e privadas e ambientes presenciais e não presenciais

- () Não, justifique: _____
- () Não se aplica
- c) O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?
- (X) Sim, onde: Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio São Francisco Xavier-
Abaetetuba - PA
- () Não, justifique: _____
- () Não se aplica
- d) Em qual condição o produto educacional foi aplicado?
- (X) na escola, como atividade regular de sala de aula
- () na escola, como um curso extra
- () outro: _____
- e) A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):
- () Alunos do Ensino Fundamental
- (X) Alunos do Ensino Médio
- () Professores do Ensino Fundamental
- () Professores do Ensino Médio
- () outros membros da comunidade escolar, tais como _____
- () outros membros da comunidade, tais como _____

O produto educacional foi considerado:

(X) APROVADO () APROVADO COM MODIFICAÇÕES () REPROVADO

MEMBROS DA BANCA

Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho (Presidente)
Doutor em Ciências e Matemática
IES de obtenção do título: UFPA

Assinaturas



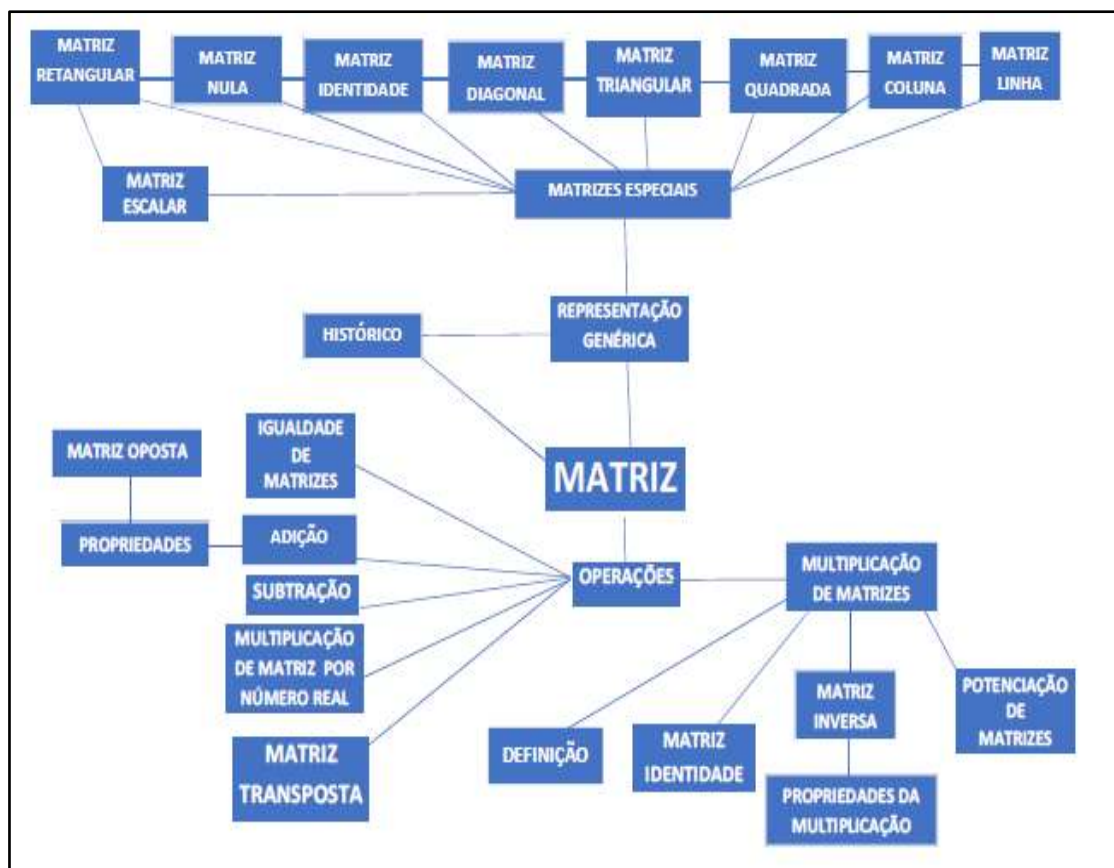
Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves (Examinador 01)
Doutor em Geofísica
IES de obtenção do título: UFPA

Fábio José da Costa Alves

Prof. Dr. Fernando Cardoso de Matos (Examinador 02)
Doutor em Ciências e Matemática
IES de obtenção do título: UFPA



APÊNDICE A – Mapa Conceitual do Assunto de Matrizes



Fonte: Autoria própria (2020)

Sobre os autores

Antonino de Araújo Farias

Possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal do Pará (UFPA - 2006). Especialização em Metodologia do Ensino de Matemática pela Faculdade Montenegro (2011). Tem experiência no Ensino Superior pela Faculdade Montenegro (2012 – 2017). Mestrado em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação da Universidade do Estado do Pará (UEPa – 2021). Tem experiência na área do ensino a distância. Atualmente é professor efetivo na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Cristo Redentor (Abaetetuba-PA) e na Escola Municipal Guaraci Mendes (Tailândia-PA).

Roberto Paulo Bibas Fialho

Possui graduação em Arquitetura e Urbanismo pela União das Escolas Superiores do Pará (1989), graduação em Educação Artística do 1 Grau pela Universidade Federal do Pará (1993), graduação em Educação Artística Licenciatura Plena pela Universidade Federal do Pará (1994) e mestrado em Desenvolvimento Sustentável do Trópico Úmido pela Universidade Federal do Pará - UFPA (1998). É artista plástico e especialista em educação pela UNAMA (1994) e em design de móveis pela Universidade do Estado do Pará - UEPA (2006). Desenvolve atividades como professor adjunto na Universidade do Estado do Pará e professor titular da Faculdade de Estudos Avançados do Estado do Pará - FEAPA, atuando principalmente nos seguintes temas: metodologia científica, educação matemática, psicologia e composição visual, arquitetura e design gráfico. Desenvolveu tese doutoral intitulada "A MATEMÁTICA DO SENSÍVEL PELAS MÃOS DO ARTESÃO: Marcas da aprendizagem matemática e da cultura material dos ceramistas de Icoaraci" (2013), junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM), pertencente à Universidade Federal do Pará. Atuou como coordenador de TCC no Curso de Bacharelado em Secretariado Executivo Trilíngue da UEPA do ano 2013 a 2018, onde atualmente integra o colegiado deste curso. É também membro do Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, do CCSE/UEPA, ministrando a disciplina Metodologia da Pesquisa em Ensino de Matemática e atuando como colaborador na disciplina Modelagem Matemática.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}^t =$$



Universidade do Estado do Pará
 Centro de Ciências Sociais e Educação
 Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
 Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
 66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem