Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Antonino de Araújo Farias

Ensino de Matrizes por Atividades em Sequências Didáticas: Estudos de Situações Didáticas e Aspectos Curriculares

Belém
2021

Antonino de Araújo Farias

Ensino de Matrizes por Atividades em Sequências Didáticas: Estudos de Situações Didáticas e Aspectos Curriculares

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará.
Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.
Orientador: Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho

Belém

2021

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Farias, Antonino de Araújo

Ensino de matrizes por atividades em sequências didáticas: estudos de situações didáticas e aspectos curriculares /Antonino de Araújo Farias; orientador; Roberto Paulo Bibas Fialho, 2021.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2021.

1.Matrizes (Ensino médio). 2.Engenharia didática. 3. Sequência didática. I. Fialho, Roberto Paulo Bibas (orient.). II. Título.

CDD. 23º ed. 512.896

Elaborada por Regina Coeli A. Ribeiro – CRB-2/739

ANTONINO DE ARAÚJO FARIAS

ENSINO DE MATRIZES POR ATIVIDADES EM SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS:
ESTUDOS DE SITUAÇÕES DIDÁTICAS E ASPECTOS CURRICULARES.

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Gaduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho

Data de aprovação: 29/11/2021

Banca examinadora

____________________________________ Orientador
Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho
Doutor em Ciências e Matemática – Universidade Federal do Pará / UFPA
Universidade do Estado do Pará

Fabio José Alves

____________________________________. Examinador Interno
Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves
Doutor em Geofísica – Universidade Federal do Pará / UFPA
Universidade do Estado do Pará

____________________________________. Examinador Externo
Prof. Dr. Fernando Cardoso de Matos
Doutor em Ciências e Matemática – Universidade Federal do Pará / UFPA
Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Pará

Belém – PA

2021

“A missão do professor é provocar a inteligência, é provocar o espanto, é provocar a curiosidade.”
Rubens Alves

“De modo que, tendo diferentes dons, segundo a graça que nos é dada: [...] se é ensinar, haja dedicação ao ensino.” (Rom cap. 12 ver 6, 7)
Bíblia Sagrada

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço ao nosso grande Deus, através de nosso Senhor Jesus Cristo por ter me concedido forças e vigor para que eu pudesse concluir mais essa etapa da minha vida com êxito e por todas as oportunidades e bênçãos que ainda estão por vim.

A minha família, por sempre me incentivar em busca de novos desafios, e por sempre acreditar que eu era capaz.

Em especial a minha querida esposa Marcela Farias de Araújo, pelo seu amor, por sua amizade, pelo seu companheirismo, compreensão, por sua paciência, pelo incentivo em sempre ajudar-me a ir além. Obrigado por sempre acreditar que eu iria consegui e agora sei que foi Deus quem colocou você em meu caminho, obrigado, pois esta conquista é nossa.

As minhas queridas filhas Ayla Magelly Farias de Araújo e Agenys Mônicky Farias de Araújo por serem filhas amáveis, obedientes, estudiosas e trazerem orgulho para mim, vocês foram o melhor presente que eu poderia receber.

A todos os meus familiares, em especial meus pais Antônio Gomes de Araújo (In memoriam) e a Maria Luiza Gonçalves de Araújo por tudo que fizeram por mim, aos meus irmãos e sobrinhos (as). Sinto um grande amor por vocês.

A todos os estudantes que participaram do experimento e que contribuíram com a realização deste trabalho.

A Universidade do Estado do Pará, pela disponibilidade da vaga no Programa de Mestrado Profissional e Ensino de Matemática, pela recepção no primeiro dia de aula e pela qualidade da formação recebida no decorrer do curso.

A meu orientador Roberto Paulo Bibas Fialho, pela paciência, descontrações e praticidade nas orientações e pelos esclarecimentos que sozinho não conseguiria resolvê-los.

Em especial ao professor e amigo Pedro Franco de Sá que demonstrou em todos os momentos ser um excelente profissional o qual, admiro pela sua competência e compromisso com a educação e o ensino de Matemática do nosso Estado.

À banca de qualificação composta pelo professor Fernando Cardoso de Matos, membro externo da banca examinadora, e pelo professor Fábio José da Costa Alves, membro interno da banca examinadora, pelas considerações no texto da qualificação, como orientações, dicas, sugestões e críticas, que muito contribuíram para o desenvolvimento da pesquisa e a avaliação do texto final.

A todos os professores do curso que, com seus conhecimentos, contribuíram com uma formação de qualidade nas disciplinas. Especialmente aos professores Ana Kely, Cínthia Pereira, Ducival Carvalho Pereira, Francisco Hermes, Miguel Chaquian, Maria de Lurdes, Natanael Cabral e Pedro Franco de Sá.

Aos amigos da turma de 2019, especialmente, Carlos Magno de Moraes, Francisca Valdielle Gomes Silva e Valdilene dos Santos Araújo por compartilharem conhecimentos e momentos de descontração.

Aos meus amigos e companheiros de trabalho da cidade de Tailândia/PA, Carlos Eduardo Valente Batista e Mauricio Macedo Sardinha pelo incentivo e por terem assumido as turmas que eu ensinava. Que minha conquista possa servir de incentivo para que vocês realizem também este sonho.

Aos meus diretores das Instituições Municipal, Anelise Magedans Preuss e Estadual, Ernani Cesar Dantas de Sousa, pelo grande incentivo, orientações e carinho nos momentos em que escolhas difíceis precisavam serem feitas e ao serem tomadas influenciaram positivamente para que eu conseguisse conclui o mestrado, obrigado.

Ao amigo Ascendino Leite de Souza que nos deu bastante forças nos momentos em que eu ia na Prefeitura buscar informações sobre minha licença aprimoramento, sem o apoio financeiro seria impossível obter essa conquista.

A Secretaria Estadual de Educação (SEDUC/PA) e a Prefeitura de Tailândia pelo incentivo que a mim foi dado com a licença aprimoramento, sem esse financiamento financeiro seria impossível eu iniciar e concluir essa etapa da minha vida profissional. De retorno, levo a sociedade, muitos conhecimentos que contribuíram para a melhoria da Educação de nosso Estado.

A todos meus irmãos da Igreja Pentecostal Luz do Mundo que me apresentaram em suas orações, principalmente quando, nesta caminhada, eu passei por uma enfermidade. Mesmo assim, busquei forças em Deus e presenteio-me com este sonho realizado.

RESUMO

FARIAS, Antonino de Araújo. **Ensino de Matrizes por Atividades em Sequências Didáticas**: Estudos de Situações Didáticas e Aspectos Curriculares. 2021, 319 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2021.

Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa que tem como objetivo analisar e refletir sobre as potencialidades de uma sequência didática desenvolvida para o ensino de Matrizes, de modo a favorecer a construção do conhecimento de estudantes do 2º ano do Ensino Médio contribuindo para a melhoria do desempenho e rendimento destes em relação à resolução de questões. Para isso, usamos como métodos de pesquisa as abordagens qualitativa, quantitativa, métodos descritivo, exploratório e estudo de caso. A parte experimental da pesquisa foi desenvolvida em uma escola estadual pública da cidade de Abaetetuba/PA com 9 estudantes do 2º ano do Ensino Médio e essa quantidade de participantes por causa da Pandemia do COVID 19 que nos impôs vários desafios. Adotou-se como metodologia de pesquisa para a parte específica envolvendo a investigação do objeto de estudo matemático, a Engenharia Didática. A análise dos resultados se deu pelo registro dos participantes nas atividades, pela a confrontação das análises a priori e a posteriori, pela comparação entre os resultados do pré-teste com o pós-teste e análise dos erros ocorridos no pós-teste. Os resultados da comparação apontaram aumento nas notas do pós-teste, constatando que o bom resultado do experimento deveu-se sobretudo à metodologia utilizada. Concluiu-se que a sequência didática testada com os estudantes foi positiva para aprendizagem deles, além de ser um caminho viável para o ensino do conteúdo matemático abordado e pode ser adotada por escolas e professores, no processo de ensino, uma vez que a aplicabilidade da sequência criada e experimentada apresentou resultados expressamente positivos.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Matrizes. Engenharia Didática. Sequência Didática.

ABSTRACT

FARIAS, Antonino de Araújo. **Teaching Matrices by Activities in Didactic Sequences**: Studies of Didactic Situations and Curriculum Aspects. 2021, 319 f. Dissertation (Professional Master in Mathematics Teaching) – University of the State of Pará, Belém, 2021.

This work presents the results of a research that aimed to analyze and reflect on the potential of a didactic sequence developed for the teaching of Matrices, in order to favor the construction of knowledge of 2nd year high school students, contributing to the improvement of performance and performance of these in relation to the resolution of questions, for this, we use as research methods the qualitative, quantitative, descriptive, exploratory and case study methods. The experimental part of the research was developed in a public state school in the city of Abaetetuba/PA with 9 students from the 2nd year of high school and this number of participants because of the COVID 19 Pandemic that imposed several challenges on us, it was adopted as a methodology of research, for the specific part, involving the investigation of the mathematical object of study, Didactic Engineering. The analysis of the results was carried out by registering the participants in the activities, comparing the a priori and a posteriori analyses, by comparing the results of the pre-test with the post-test and analysis of the errors that occurred in the post-test. The results of the comparison showed an increase in the post-test scores, noting that the good result of the experiment was mainly due to the methodology used. The conclusion was that the didactic sequence tested with the students was positive in their learning, in addition to being a viable way to teach the mathematical content addressed and can be adopted by schools and teachers in the teaching process, since the applicability of created and tested sequence gave expressly positive results.

Key words: Teaching of Mathematics. Matrices. Didactic Engineering. Following teaching.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O conteúdo de Matrizes enquanto componentes curriculares do Ensino Médio tem se configurado como um tema que precisa ser melhor ensinado aos estudantes. A maneira como vem sendo abordado o assunto pelos professores tem causado muitas dúvidas nos estudantes e isso não se encaixa perfeitamente nos parâmetros das propostas curriculares do Ensino Médio.

A importância de se estudar o assunto de Matrizes é percebido não somente na Matemática, mas também em outras áreas como na Engenharia, na Medicina, na Química, na Física, na Economia, na Estatística, na Psicologia e outras. Neste trabalho, nos se preocupamos em mostrar a importância de estudar esse assunto na Educação Básica, nas Escolas Militares e no Ensino Superior.

Desse modo, o conteúdo de Matriz fez parte da minha vida escolar do Ensino Médio ao Ensino Superior. No segundo ano do ensino médio tive o primeiro contato com esse assunto, achei muito interessante a apresentação feita pelo professor principalmente quando ele abordava o assunto na forma de problemas contextualizados. Já na licenciatura, voltei a estudar as Matrizes na disciplinas de Fundamentos Elementares de Matemática 2 e na disciplina de Álgebra Linear de modo mais avançado.

Como docente já tive oportunidade de ensinar o conteúdo de Matrizes no Ensino Médio incluso, por exemplo, no assunto de Geometria Analítica com o cuidado de mostrar a importância dele na série em questão.

Assim, a pesquisa aqui desenvolvida apresenta um experimento didático sobre o ensino de Matrizes e alguns pontos que nos fizeram repensar o nosso fazer pedagógico. Com isso apresento uma breve trajetória acadêmica e profissional minha vivida até o presente momento.

Sou natural de Abaetetuba, interior do Pará, foi nesse município que fiz o Ensino Fundamental e concluir o Médio em 1999. Em 2000 consegui um emprego no comércio que me afastou dos estudos, porém, por influência de amigos, no ano de 2002 me matriculei em um cursinho.

Para minha surpresa nesse mesmo ano, passei no vestibular para cursar Licenciatura Plena em Matemática, turma 2003, pela Universidade Federal do Pará (UFPA) no campus de Abaetetuba. Minha família foi fundamental nessa conquista, sendo eu apenas o único universitário entre meus quatro irmãos.

O curso de matemática proporcionou-me conhecer a disciplina de matrizes de uma maneira que jamais imaginaria, ou seja, mostrou-me um novo horizonte e as várias possibilidades encontradas que possibilitou maior entendimento do assunto foi um divisor de águas na minha vida profissional, e em 14 de dezembro de 2006 finalmente recebia meu diploma de Licenciatura Plena em Matemática.

No ano de 2007 consegui um contrato para trabalhar no Sistema Modular de Ensino (SOME) como professor de matemática, essa foi minha primeira experiência como docente. Nesse mesmo ano fiz muitos concursos públicos em busca de estabilidade e consegui ser aprovado no concurso da Prefeitura Municipal de Tailândia (PMT), onde fui nomeado somente em março de 2009. Também no ano de 2007, houve o concurso da Secretaria Estadual de Educação (SEDUC/PA) e fui classificado, mas sendo somente nomeado em Agosto de 2012.

Assim que comecei trabalhar no município de Tailândia, um colega me incentivou a fazer o curso de Especialização em Metodologia do Ensino da Matemática e; em Setembro de 2009 iniciei o curso de Pós graduação e antes de finalizá-lo eu já tinha inscrito minha Monografia, vindo com isso em março de 2011 receber meu diploma de Especialista pela Faculdade Montenegro.

Já em 2010 soube de um processo seletivo para trabalhar como Tutor de Matemática, na modalidade de Educação à Distância pela Universidade Federal do Pará (UFPA), mas no momento não ouve interesse da minha parte. Porém, em 2011 como não houve candidatos selecionados para trabalhar como Tutor em 2010, ocorreu uma nova seleção na qual me inscrevi. Minha família me incentivou muito, principalmente minha esposa e, após a prova de seleção e entrevista consegui a vaga de Tutor.

Os cinco anos de experiência como Tutor mostrou-me que a licenciatura era apenas o primeiro passo dado, muitas informações e conhecimentos estavam por vim. Durante a tutoria fiz muitos cursos de capacitação e eles preencheram lacunas que ficaram sem respostas durante a minha graduação.

Em 2012 tomei posse no concurso da SEDUC/PA e comecei a ministrar aulas no Ensino Médio. Por coincidência, nesse mesmo ano soube que a Faculdade Montenegro estava precisando de professor para trabalhar com as turmas de Pós Graduação e interessei-me. Após entrevista e avaliação curricular realizada pela a diretora da Faculdade fui contratado e incluído no quadro de docência desta Faculdade até o ano de 2017. Em 2016 terminei o estágio probatório na SEDUC/PA e com isso, consegui ser removido para a cidade de Tailândia/PA, onde sou efetivo tanto no município como no estado.

É importante destacar que sempre busquei qualificar-me, fazendo os exames de acesso ao Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) e os exames do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM/UEPA). Após fazer uma leitura minuciosa do edital do mestrado da UEPA ele me chamou atenção, pois era justamente o que eu estava buscando e se encaixou dentro das minhas necessidades.

De tanto insistir, em 2018, fui aprovado no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) para a turma de 2019, era justamente o curso que eu almejava.

E, com relação ao Mestrado, afirmo, com toda certeza, que fiz a escolha certa, pois as disciplinas direcionaram-me as tão almejadas respostas que ficaram em aberto, durante a explicação do assunto em sala e, que vinham acompanhados de desabafos feitos pelos estudantes quando reclamavam dizendo que não tinham compreendido o assunto ou uma parte dele.

As disciplinas cursadas durante o mestrado mostraram-me que as minhas práticas de docente tinham que ser melhoradas, no entanto, fiquei feliz por constatar que muitas coisas que nos foram apresentadas eu já praticava, mesmo sem saber, como por exemplo: fazer do estudante um ser ativo e crítico na construção de seu conhecimento, incentivar os discentes a irem ao quadro/lousa fazendo dos erros uma aprendizagem e a utilização de metodologias que despertam a curiosidade nos estudantes sobre os assuntos ministrados.

Os estudantes desde o Ensino Fundamental não são preparados para analisar situações que envolvem dados de tabelas e gráficos, e ao chegarem ao Ensino Médio se deparam com situações-problema que exigem uma maior habilidade. Essas dificuldades estão presentes nas pesquisas de Steinhorst (2011), Avila (2013), Messias, Sá e Vilhena (2007) principalmente quando falamos nas operações com Matrizes, pois ora os estudantes não compreendem a teoria, ora não compreendem a aplicação prática desse assunto.

O ensino – aprendizagem de matemática ganha destaque quando o tema é sobre a necessidade de mudanças no modelo de ensino que tem sido adotado atualmente. Sim, estamos falando do conhecido “Ensino Tradicional” que continua tendo importância na história do Ensino da Matemática, mas distancia a escola da realidade do estudante como veremos citado por Santos (2004), Guiomar (2014), Godoy e Santos (2012), Costa e Lopes (2015) e outros que tratam dessa realidade.

É nesse contexto que desenvolvemos o trabalho com Matrizes buscando meios que facilitassem a forma de ensinar, pois como o assunto vem sendo tratado, em grande parte, apenas na teoria, os estudantes não conseguem relacionar seu cotidiano com a aplicabilidade desse conteúdo.

Segundo Libâneo (2013, p. 83), “o ensino tradicional é visto, comumente, como transmissão da matéria aos alunos, realização de exercícios repetitivos, memorização de definições e fórmulas”.

A escolha do tema se deu pelas dificuldades percebidas nos olhares dos estudantes e pela não compreensão/entendimento do assunto de matrizes por eles, pois assim como a matemática, esse assunto tem muitas propriedades e regras que quando envolve à parte das operações, essas “barreiras” tornam-se mais visíveis. E foi isso que nos levou a buscar novas metodologias que viessem auxiliar o estudante a assimilar o conteúdo dessa pesquisa de forma diferenciada.

Porém, Sanches (2002, p. 6) menciona que “o ensino–aprendizagem de matrizes é um ensino voltado para a transmissão de regras descontextualizadas da realidade e da própria Matemática [...].”. O autor reforça o que dizemos a cima e detectamos em nossa pesquisa traços desse ensino que atrelado a outros fatores, influenciam diretamente na aprendizagem, por não estarem voltados para o dia a dia dos estudantes e isso percebe-se com clareza no avanço deste trabalho.

Assim, podemos dizer que a forma com o ensino de matrizes tem ocorrido faz com que os estudantes tenham dificuldades de avançar com êxito nesse assunto. Entretanto, tais conceitos têm grande importância nas mais diversas áreas de conhecimento, como descreve Costa e Lopes (2015, p. 2).

> Os estudos de matrizes se justificam por contribuir com os avanços científicos e tecnológicos, destacando-se nos campos mais variados como: na engenharia, na informática, na administração, na economia, dentre outros segmentos que possam envolver organização de dados em tabelas. O ensino de matrizes traz consigo as ideias de estrutura, além de constituir uma ferramenta que auxilia na resolução dos sistemas lineares. Sendo muito útil no ensino de Matemática de nível básico como um importante instrumento, tanto no uso em seu cotidiano quanto na Álgebra Linear estudada na Matemática do ensino superior.

Mas, adotar uma metodologia que vem completar e aperfeiçoar o ensino tradicional do qual fui submetido e fiz uso, por não ter tido contato com outras metodologias inovadoras e não tão recente que me fizeram grande falta e ao mesmo tempo, me levaram a repensar sobre o meu método de ensino.

Quanto à aprendizagem do assunto de Matrizes a pesquisa será definida como uma pesquisa quantitativa, qualitativa, descritiva e exploratório. A pesquisa quantitativa, conforme Oliveira (2002) significa quantificar opiniões e dados nas formas de coleta de informações, assim como emprego de recursos e técnicas estatísticas desde as mais simples, como percentagem, média, moda, mediana e desvio padrão.

Oliveira (2002) diz ainda que a pesquisa qualitativa difere da pesquisa quantitativa pelo fato de não empregar dados estatísticos como centro do processo de análise de um problema. A diferença entre elas está no fato de que o método qualitativo não tem a pretensão de numerar ou medir unidades ou categorias homogêneas.

Gil (2010) descreve as características de determinadas populações ou fenômenos, utilizando-se de técnicas padronizadas de coleta de dados, como por exemplo, o questionário e a observação imediata. Em nossa pesquisa esse procedimento ocorreu em uma escola do Ensino Médio da cidade de Abaetetuba/PA através do questionário socioeconômico e do pré-teste.

Assim, Gil (1999, p. 128), diz que o questionário pode ser definido.

> [...] como a técnica de investigação composta por um número mais ou menos elevado de questões apresentadas por escrito às pessoas, tendo como objetivo o conhecimento de opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas, etc.

O autor continua dizendo que o questionário, como técnica, apresenta as seguintes características:

> a) possibilita atingir grande número de pessoas, mesmo que estejam dispersas numa área geográfica muito extensa, já que o questionário pode ser enviado pelo correio;
> b) implica menores gastos com pessoal, posto que o questionário não exige o treinamento dos pesquisadores;
> c) garante o anonimato das respostas;
> d) permite que as pessoas o respondam no momento em que julgarem mais convenientes;
> e) não expõe os pesquisadores à influência das opiniões e do aspecto pessoal do entrevistado. (Idem, p. 128 – 129)

Segundo Andrade (2003, p. 124), “uma das características da pesquisa descritiva é a técnica padronizada da coleta de dados, realizada principalmente através de questionários e da observação sistemática.” D’Ambrosio (2011, p. 102) nos diz “sempre que se pensa em pesquisa em educação, vem à ideia de fazer uma tomada de dados, aplicar um questionário e uma estatística.” Diante disso, optamos por utilizar a pesquisa quantitativa e qualitativa para uma melhor análise e compreensão dos dados que serão levantados.

Segundo Gil (2017), as pesquisas exploratórias tendem a ser mais flexíveis em seu planejamento, pois pretendem observar e compreender os mais variados aspectos relativos ao fenômeno.

Essas pesquisas exploratórias mais comuns são os levantamentos bibliográficos, porém, em algum momento, a maioria das pesquisas científicas passam por uma etapa exploratória, visto que o pesquisador busca familiarizar-se com o fenômeno que pretende estudar. Em nosso trabalho diagnosticamos a situação de ensino e aprendizado e também previmos soluções através de uma sequência didática voltada para o nosso produto de ensino.

Assim, elaboramos a seguinte questão de pesquisa: Quais as potencialidades que uma sequência didática por atividades de Matrizes tem sobre o desempenho dos estudantes em uma turma do 2º ano do Ensino Médio?

Na pesquisa iremos apresentar a finalidade de estudar o assunto de Matrizes, sua aplicabilidade no meio científico e a importância que esse conteúdo tem tido em outras áreas. Sabemos que quando alguém vai comprar um aparelho de celular, geralmente lhes é apresentado a maior parte de suas funções e uma delas é à resolução da câmera frontal ou traseira. Esta resolução é conhecida como pixel e por incrível que pareça o assunto de Matrizes ai está presente.

Nosso objetivo geral é analisar e refletir sobre as potencialidades de uma sequência didática desenvolvida para o ensino de Matrizes, de modo a favorecer a construção do conhecimento de estudantes do 2ª ano do Ensino Médio contribuindo para a melhoria do desempenho e rendimento deles em relação à resolução de questões referentes ao tema.

Os objetivos específicos são: identificar o que os estudantes sabem sobre o assunto de Matrizes; aplicar uma sequência didática que torne eficaz a aprendizagem de Matrizes; desenvolver as atividades de aprendizagem propostas em uma Escola de Ensino Médio e analisar os resultados.

Este trabalho encontra-se dividido em 7 capítulos. No primeiro capítulo apresentamos a justificativa, a questão da pesquisa e os objetivos geral e específicos.

No segundo capítulo abordamos uma síntese das teorias que serviram de base para o desenvolvimento desta pesquisa, como a Sequência Didática no Brasil, a Engenharia Didática na Pesquisa e a Análise Microgenética.

Como forma de comprovar ou não essas hipóteses, adotamos nesta pesquisa os pressupostos da Engenharia Didática por meio das seguintes etapas: Análises prévias; Concepção e Analise a *priori*; Experimentação e Análise a posteriori e Validação. A partir do terceiro capítulo apresentamos de que forma essas fases estão organizadas no decorre do nosso trabalho.

O terceiro capítulo corresponde a fase das Análises Preliminares da Engenharia Didática, onde realizamos pesquisa sobre os aspectos históricos sobre as Matrizes, buscamos conhecer a inserção das matrizes nos livros didáticos de 1930 a 1980, também fizemos um levantamento curricular sobre o assunto pesquisando-os nos editais das escolas militares. Por fim, realizamos uma revisão da literatura e a concepção de 100 estudantes do Ensino Médio sobre o assunto de Matrizes.

O quarto capítulo traz a concepção e análise a priori. Nele apresentamos a descrição da metodologia, acompanhada do momento do ensino por atividade e da sequência didática composta por 10 atividades, sobre o Ensino de Matrizes com questões de aprofundamentos referente a cada uma delas, além do pré teste e pós teste.

O quinto capítulo trata da experimentação. Nele descrevemos como desenvolvemos nosso trabalho com estudantes da 2ª série do Ensino Médio, para isso produzimos um cronograma que serviu para a coleta de dados e registros ocorridos durante o experimento, usamos o pré-teste, o questionário socio-educacional, a ficha de observação de aula e o pós-teste.

No sexto capítulo constam a análise da experimentação e da validação da sequência didática que tratam do desempenho dos estudantes, na resolução das atividades referentes ao assunto de Matrizes, confirmando se as hipóteses foram comprovadas, ou seja, se o objetivo de nosso estudo foi alcançado.

E no sétimo capítulo, tecemos nossas considerações finais ressaltando as dificuldades que os estudantes apresentaram de imediato, por não estarem acostumado com o método utilizado.

No final de todos os processos será elaborado um produto educacional, com objetivo de auxiliar professores no desenvolvimento e facilitação das aulas de matrizes do ensino básico ao superior.

2. CONTRIBUIÇÕES TEÓRICAS PARA A PESUISA

Apresentamos nesse capitulo as bases teóricas que nos deram suporte para o desenvolvimento desta pesquisa, com isso, destacamos Zabala (1998), Oliveira (2013) e Cabral (2017) que tratam sobre Sequência Didática (SD) e que serão importantes no desenvolvimento da nossa Sequência Didática para o ensino de Matrizes, proposto neste trabalho.

Também dispomos de uma síntese referente a Análise Microgenética com as contribuições de Vygotsky (1896 – 1934) no trabalho de Moysés (1997), de Cabral (2004) e por fim, com as grandiosas contribuições de Góes (2000) que tem se destacado e sido bastante utilizada no campo da educação e da psicologia. Esses autores, baseados nos pressupostos da teoria histórico-cultural de Vygotsky, serão nosso foco na identificação da aprendizagem dos estudantes no decorrer da aplicação das atividades que serão propostas.

2.1. Sequência Didática no Brasil

A partir da década de 90 chegou ao Brasil o termo Sequência Didática que apareceu pela primeira vez nos documentos oficiais, no caso dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) nos anos de 1997 e 1998. No início, as Sequências Didáticas estavam postas como “projetos” e “atividades sequenciadas” voltadas, nesse período, apenas para a Linguística.

Porém, ela é indicada para ser aplicada em qualquer campo conceitual e assim chegou à Matemática e está presente na Engenharia Didática.

Mas o que é uma Sequência Didática? Encontramos a resposta a essa pergunta nos argumentos de Zabala (1998), Mantovani (2015), Pais (2002), Oliveira (2013) e nos PCN (2002).

As contribuições desses autores são peças fundamentais para que os estudantes alcancem as habilidades esperadas, pois de acordo com Zabala (1998, p. 18), uma Sequência Didática é composta por “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”.

Então, essas atividades possibilitam, ao professor, pensar o trabalho pedagógico de modo articulado, sistemático e contextualizado com vistas ao desenvolvimento das capacidades previstas nos direitos de aprendizagem.

Essa ideia de Zabala (1998) está de acordo com as ideias de Mantovani (2015, p. 17) onde destaca que:

> Uma sequência didática é composta por várias atividades encadeadas de questionamentos, atitudes, procedimentos e ações que os alunos executam com a mediação do professor. As atividades que fazem parte da sequência são ordenadas de maneira a aprofundar o tema que está sendo estudado e são variadas em termos de estratégia: leituras, aula dialogada, simulações computacionais, experimentos, etc.

De acordo com a ideia de Mantovani (2015) temos Zabala (1998, p. 20) afirmando que:

> [...] sequências didáticas, são uma maneira de encadear e articular as diferentes atividades ao longo de uma unidade didática. Assim, pois, poderemos analisar as diferentes formas de intervenção segundo as atividades que se realizam e, principalmente, pelo sentido que adquirem quanto a uma seqüência orientada para a realização de determinados objetivos educativos. As seqüências podem indicara função que tem cada uma das atividades na construção do conhecimento ou da aprendizagem de diferentes conteúdos e, portanto, avaliar a pertinência ou não de cada uma delas, a falta de outras ou a ênfase que devemos lhes atribuir.

Através da Sequência Didática percebemos que o professor poderá orientar suas atividades práticas, através da escolha de um recurso didática, para ser trabalhado com um determinado conteúdo, já predeterminado e de suas estratégias metodológicas que podem auxilia-lo nesse trabalho. Zabala (1998) diz que toda pratica pedagógica exige uma organização metodológica do professor para sua prática, fazendo desta, agora, um trabalho profissional.

Assim, a aprendizagem se concretizará através da intervenção do professor, no cotidiano da sala de aula, e esta intervenção será fundamental para o sucesso da Sequência Didática planejada e aplicada.

O Pacto Nacional pela Alfabetização na idade certa (BRASIL, 2012, p, 21) reconhecem as Sequências Didáticas como sendo muito importantes para a construção do conhecimento:

> Ao organizar a sequência didática, o professor poderá incluir atividades diversas como leitura, pesquisa individual ou coletiva, aula dialogada, produções textuais, aulas práticas, etc., pois a sequência de atividades visa trabalhar um conteúdo específico, um tema ou um gênero textual da exploração inicial até a formação de um conceito, uma ideia, uma elaboração prática, uma produção escrita.

Pereira (2017, p. 20) traz uma importante contribuição para que possamos entender/compreender melhor o que é uma Sequência Didática:

> A sequência didática tem como movimento metodológico principal a ideia de que o professor levará o aluno a estudar um determinado tema passo a passo para que ele possa ser induzido a perceber suas características próprias, ou seja, trata-se de um movimento de observar para analisar e chegar à conclusão de como aquele conteúdo se organiza.

Pais (2002) concorda com os autores ao afirmar que uma sequência didática, pode ser entendida por um número de aulas planejadas e previamente analisadas, com a finalidade de observar situações de aprendizagem envolvendo os conceitos previstos.

Oliveira (2013, p. 39) define Sequência Didática como:

> [...] um procedimento simples que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade para trabalhar os conteúdos disciplinares de forma integrada para uma melhor dinâmica no processo ensino aprendizagem.

A autora aborda alguns passos básicos da Sequência Didática como: a escolha do tema a ser trabalhado; planejamento dos conteúdos; questionamentos do assunto para a problematização a ser trabalhado; objetivos a serem atingidos no processo de ensino aprendizagem; delimitação da sequência de atividades, levando-se em consideração a formação de grupos, material didático, cronograma, integração entre cada atividade e etapas, e avaliação dos resultados (OLIVEIRA, 2013, p. 40).

Segundo Zabala (1998 apud PEREIRA, 2017, p. 20 e 21) a elaboração das sequências didáticas deve-se ter um conjunto de relações interativas que beneficie o processo de ensino aprendizagem, a partir do planejamento do professor, que deve seguir alguns pontos, como:

> - Flexibilidade na ação docente de modo a permitir adaptações às necessidades apresentadas pelos alunos durante o desenvolvimento da sequência;
> - Levar em consideração o conhecimento e as considerações dos alunos do decorrer da sequência;
> - Oferecer ajuda de modo adequado aos alunos no sentido de fazer com que eles conheçam o que têm que fazer, sintam-se seguros e confiantes com seus progressos e estimulados a enfrentar os obstáculos nos quais se depara, de maneira autônoma para alcançar as metas estabelecidas;
> - Suscitar meios para a comunicação que possam regular a negociação e a participação de modo a criar um ambiente de respeito mútuo e o sentimento de confiança;
> - Avaliar os alunos de acordo com suas evoluções individuais, levando em conta seus esforços, o ponto pessoal de partida, incentivando a auto avaliação para a regulação da própria atividade.

Conforme mencionado pelos autores e, se esses pontos forem seguidos, haverá uma grande chance de se obter sucesso na aplicação da sequência didática, além do professor ter seu trabalho facilitado se ele utilizar de situações problemas e vários exercícios que envolva o assunto, no caso das Matrizes, também permitirá que os estudantes tenham compreensão dos conceitos, regras e procedimentos de resolução dos problemas, dando agora a eles o real significado e entendimento dos conceitos matemáticos utilizados pelo professor.

Temos agora as contribuições de Cabral (2017) e Cabral e Costa (2019) que propõem um modelo estruturante, na elaboração de uma sequência didática para o ensino de Matemática na Educação Básica. Cabral (2017, p. 12) utiliza o termo sequência didática como:

> [...] um conjunto articulado de dispositivos comunicacionais de natureza escrita ou oral que sistematiza as intervenções de ensino com a intencionalidade objetiva de estimular a aprendizagem de algum conteúdo disciplinar de Matemática a partir da percepção de regularidades e do estabelecimento de generalizações adotando-se uma dinâmica de interações empírico-intuitivas.

Esse conjunto articulado de dispositivos comunicacionais torna-se importantíssimo nas aplicações das atividades em sala, pois nesse sentido, Cabral e Costa (2019, p. 25) afirmam que:

> [...] o construto sugerido por esse autor, sugere uma Sequência Didática sob a lógica das interações verbais em que o papel fundamental do professor é se conduzir, durante todo o processo, como um gerente do cenário didático.

E a partir daqui Cabral (2017) nos apresenta as Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC), a qual define como sendo um conjunto de argumentações empírico-intuitivas construído por meios de categorias estruturantes, visando estimular a reconstrução de um conceito do saber matemático. O interessante é que cada uma das UARC podem ser considerada como uma atividade dentro da sequência didática, e dentro de cada UARC é explorada várias argumentações e interações entre professo-estudante e estudante-estudante.

Mas, o que é uma UARC? Cabral (2017, p. 59) apresenta a seguinte definição:

> [...] UARC é, portanto, definida pelo conjunto de argumentações empírico-intuitivas construído por todas as Intervenções Estruturantes pré-formais que antecedem e inclui alguma Intervenção Formalizante. Em outros termos, cada Intervenção Formalizante estabelece um recorte argumentativo unitário que, em tese, contribuiu/estimula a reconstrução de um conceito do saber matemático escolar e, além disso, armazena a história epistemológica dessa reconstrução.

É fundamental que haja um planejamento para o sucesso da sequência didática logo após ser feita o diagnostico inicial como: adotar critérios das etapas seguintes estimulando o tempo previsto para cada sequência; organizar a turma em equipes; flexibilizar as atividades para que todos possam realizá-las e por fim, avaliar o que os estudantes aprenderam, seus pontos positivos e negativos sempre que possível.

Pois Cabral (2017, p. 33) aborda que “esse procedimento metodológico de SD é concebido por quatro fases distintas, quais sejam: apresentação da situação de ensino, a produção inicial, os módulos e a produção final.”

Daí, surge a motivação que fez Cabral (2017) criar uma alternativa que somasse com o modelo já usados pelos professores, mas que ao mesmo tempo os aproximasse de uma prática discursiva, agora, dialógica de intervenções verbais reflexivas em que eles fizessem dos estudantes, exploradores das regularidades e passassem a ter necessidades de fazer generalizações.

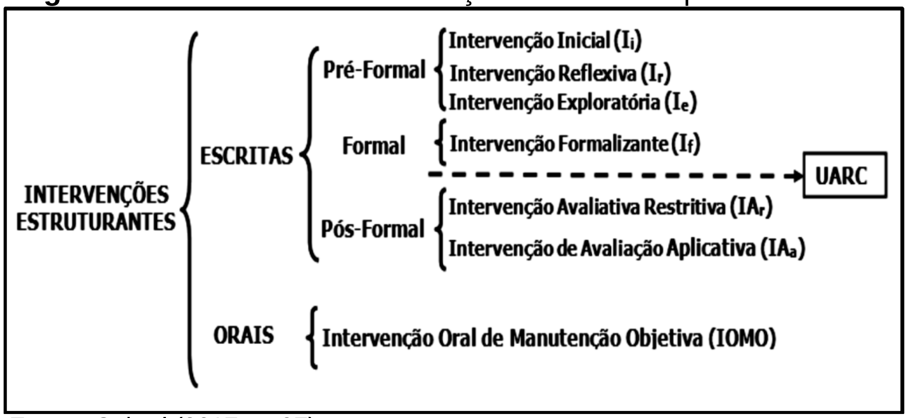
Assim, Cabral (2017) representa o conceito a ser reconstruído por uma superfície *S*. A partir dessa superfície *S*, o autor passa para uma segunda superfície “*S”*, utilizada como unidade de medida. Assim, Cabral (2017) passa a denominar a primeira dessas unidade de Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual de Primeira Geração (UARC-1), sendo o ponto de partida. Feita a primeira escolha o professor terá que seguir a risco a segunda escolha, denominada de Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual de Segunda Geração (UARC-2), pois esta estará condicionada a primeira escolha.

Cabral (2017, p. 40) descreve as categorias que se deve seguir para a construção das UARC’S da seguinte forma:

> [...] Para que o construto analógico das UARC’s seja bem compreendido, passo a descrevê-lo em termos de seis categorias estruturantes que materializam o texto de uma *SD* de acordo como eu concebi em suas adaptações necessárias para o ensino-aprendizagem de Matemática nos níveis fundamental e médio, são elas: Intervenção Inicial (I_i), Intervenção Reflexiva (I_r), Intervenção Exploratória (I_e), Intervenção Formalizante (I_f),Intervenção Avaliativa Restrita(IA_r) e, finalmente, as Intervenção Avaliativa Aplicativa (IA_a).

Vamos fazer a descrição de cada uma delas, de acordo com o autor e com base na figura 1 que apresenta a divisão estrutural das intervenções.

Figura 1 – Estrutura das intervenções de uma sequência didática



Fonte: Cabral (2017, p. 97)

A Intervenção Inicial (I_i) corresponde ao primeiro elemento da atividade que será elaborada pelo professor. Neste momento o professor tem a intenção de estimular os estudantes para "à percepção de alguma verdade do pensamento matemático e que, associada com outras percepções articuladas a essa primeira, pode exercer um papel facilitador na reconstrução conceitual pretendida." (CABRAL, 2017, p. 41)

O autor utiliza o termo "Intervenção" no sentido de que existe uma intencionalidade nas ações dirigidas pelo professor diante de seus estudantes e isso fica bem claro nos discursos dialógico – didático que ele utiliza.

Já a Intervenção Reflexiva (I_r) caracteriza-se por meio de questionamento apresentado pelo professor aos estudantes sobre determinado objeto que será reconstruído. Nesta categoria o estudante é levado a todo tempo a refletir sobre o que está fazendo e as consequências desse fazer, pois nesse momento eles, já estimulados, passam a levantar hipóteses, fazer conjecturas, verificar possibilidades e estabelecer consequências. Tudo isso é o que o professor espera que ocorra.

A Intervenção Exploratória (I_e) tem por finalidade fazer com que o estudante tenha um olhar mais profundo sobre determinado assunto e faça uma reflexão sobre as respostas encontradas a partir das Intervenções Reflexivas (I_r) já feitas. Neste momento os estudantes ao avançarem no conhecimento dessa matéria, principalmente estabelecendo suas respostas através da participação em simulações, em experimentos, em descrições, em preenchimento de tabelas, em elaborar gráficos, nas observações e em perceber regularidades.

Surge aqui uma cooperação entre as intervenções reflexivas e exploratórias, que passa a ser de extrema importância durante o andamento da sequência didática, pois a partir daqui, o estudante é estimulado a perceber quais regularidades estão envolvidas no processo de reconstrução conceitual, revelando as formas de pensamento dos estudantes sobre determinado objeto matemático.

Porém Cabral e Costa (2019, p. 33) abordam que:

> [...] Os aprendizes verbalizam seus pensamentos e ao professor cabe a retomada das principais informações em torno dos objetos e deve disponibilizar à toda classe, reorganizando tais proposições de modo formal usando o rigor adequado ao formalizar os resultados. Essa ação é na concepção do autor devida ao professor reconhecendo que os aprendizes não poderiam fazê-lo sem a sua ajuda.

Essa formalização realmente cabe ao professor, pois dependendo do objeto matemático os estudantes não conseguirão por si só chegar ao resultado esperado pelo docente. Mesmo que eles identifiquem as regularidades de um objeto, mas apresentem dificuldade para fazer a formalização então esse papel, realmente cabe ao professor, o que nos leva a concordar com Cabral e Costa (2019) nesse ponto.

A Intervenção Formalizante (I_f) ocorre no momento em que o professor, a partir das (re)descobertas dos estudantes, introduz a abstração, linguagem matemática e formaliza o conteúdo fechando assim, um ciclo na aprendizagem do objeto de ensino.

Cabral (2017, p. 42) segue sugerindo que:

> [...] com esse modelo estruturante para as Sequências Didáticas não é o abandono das exigências formais do saber disciplinar da Matemática, mas que se valorize um cenário didático amplificado que pressupõe um olhar mais compassivo em respeito às limitações dos aprendizes [...].A meu ver, esse estímulo às generalizações consolida uma etapa importante da aprendizagem de conceitos matemáticos que, infelizmente, tem sido sistematicamente negada ao se adotar, em geral, a formalização como a primeira peça de um quebra-cabeça, quase sempre, sem sentido para a maioria dos alunos.

Cabral e Costa (2019, p. 33 – 34) mostram que esse recorte determina um conjunto de intervenções pré-formais, que os autores apresenta assim (**1** inicial + **n** exploratória + **m** reflexivas) guarda a historicidade necessária à identificação dos indícios de aprendizagem do objeto de ensino.

Cabral (2017) afirma que as generalizações empírico – intuitivas necessitam valorizar-se, pois esse estímulo consolida uma etapa importante no aprendizado matemático, principalmente na parte de conceitos. O autor destaca que esses estímulos estão sendo negado quando se adota, primeiramente, a formalização e a compara com uma peça de quebra-cabeça, sem sentido para a grande maioria dos estudantes.

Temos agora a Intervenção Avaliativa Restrita(IA_r) que trata dos "primeiros passos" a serem dados para checar se os rudimentos do conceito foram aprendidos, e têm por finalidade verificar se a aprendizagem do conceito do objeto de reconstrução foi compreendida pelos estudantes.

Nesse momento Cabral e Costa (2019, p. 35) destacam que essas intervenções:

> [...] buscam aferir as aprendizagens dos alunos em dois aspectos fundamentais do saber matemático, quais sejam: O que é o objeto matemático em estudo? (o significado, o sentido) e, além disso, como se justificam e operam os algoritmos decorrentes? (Propriedades e operações)

Por fim, chegamos a última categoria que nos apresenta a Intervenção Avaliativa Aplicativa (IA_a) que tem a finalidade de Resolução de Problemas de Aplicação. Cabral (2017) afirma que temos aqui o nível mais elevado do processo conceitual de avaliação. O foco aqui é para as implicações conceituais do objeto reconstruído e; para as propriedades operacionais (algoritmos) com a manipulação desses algoritmos envolvidos.

Segundo Cabral e Costa (2019, p. 35) existe uma sétima categoria de intervenção denominada de Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (I – OMO), que tem por finalidade manter a objetividade planejada e o foco da reconstrução pretendida pela sequência didática.

Assim, os autores destacam ainda que:

> [...] Essa sétima categoria de intervenções, concebida como uma espécie de sequência didática paralela, oculta de natureza complementar é tão importante quanto àquela que está materializada em papel, escrita, e que serve de orientação para as ações dos alunos e professor e onde estão delineados o objeto e objetivos de aprendizagem. (CABRAL E COSTA, 2019, p. 36)

Essas intervenções orais, de acordo com Cabral (2017), estão ligadas as tensões discursivas que são típicas dos ambientes de interações entre os envolvidos (professores e estudantes), modulados pelo professor nesse jogo do ensinar – aprender.

2.2. Engenharia Didática na Pesquisa

Em busca de uma metodologia que contemplasse e estivesse de acordo com nossa pesquisa, fizemos um levantamento e encontramos diversas metodologias de ensino que estão sendo utilizadas em várias pesquisas no campo da Educação Matemática. Dentre elas nos chamou a atenção a Engenharia Didática que foi desenvolvida e amplamente descrita em Artigue (1996), que posteriormente se difundiu em nível mundial.

Aqui no Brasil, temos alguns representantes dessa metodologia como Machado (2002), Almouloud (2007), Pais (2001 e 2002), Sá e Alves (2011) e Pommer (2013) que realizaram várias pesquisas sobre o assunto.

Escolhida a metodologia de ensino que nos serviu como ponto de partida, nos utilizamos uma sequência didática, visando os conceitos, para alcançar nossos objetivos sobre os estudos de Matrizes. Pra isso seguimos todas as etapas que compõe a referida Engenharia Didática que nos direcionou e embasou nossa pesquisa e também utilizamos as orientações da autora a seguir que nesse processo compara o papel do professor/pesquisador como:

> [...] um trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia nos conhecimentos científicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objectos muito mais complexos do que os objectos depurados da ciência, e portanto a estudar de uma forma prática, com todos os meios ao seu alcance, problemas de que a ciência não quer ou ainda não é capaz de se encarregar. (ARTIGUE, 1996, p.193)

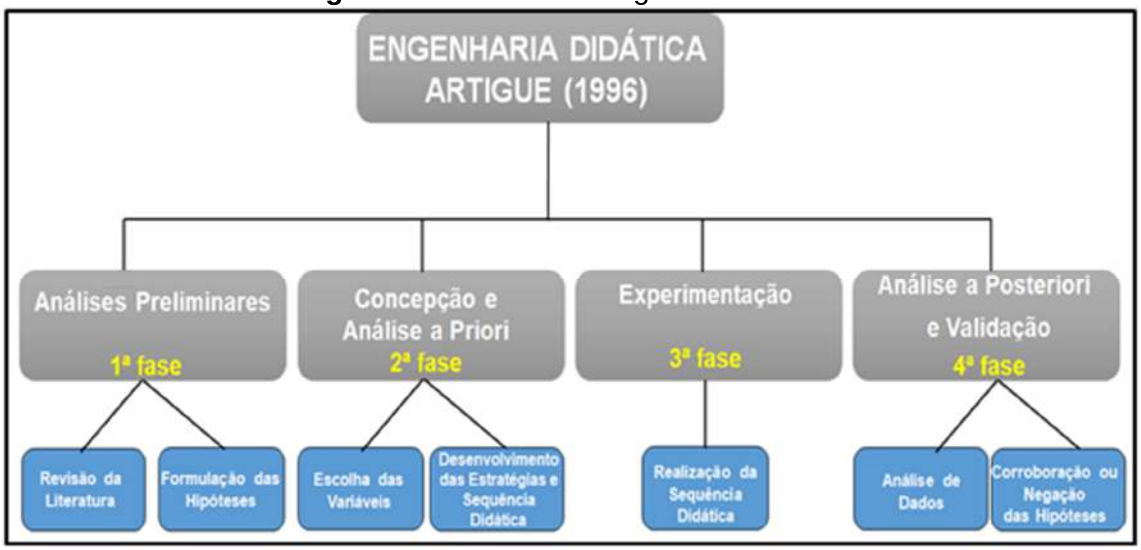
Pais (2001) destaca que, assim como o trabalho do engenheiro o educador necessita também de um conjunto de conhecimentos sobre os quais ele desempenha o seu domínio profissional. Portanto, quando se faz essa relação entre didática e o trabalho do engenheiro, temos que evidenciar que o modelo teórico não é capaz de dar conta de todos os desafios relativos à complexidade do objeto educacional, e por isso se faz necessária essa investigação.

Seguindo o mesmo viés de Artigue (1996) apontamos Pommer (2013, p. 20) realizando outra comparação, só que desta vez, ele compara o papel do professor/pesquisador análogo a de um cozinheiro:

> [...] Ao preparar um prato, o cozinheiro precisa saber o que ele quer fazer, obter os ingredientes, assegurar-se de que possui os utensílios necessários e cumprir as etapas requeridas no processo. Um prato será saboroso na medida do envolvimento do cozinheiro com o ato de cozinhar e de suas habilidades técnicas na cozinha. O sucesso de uma pesquisa também dependerá do procedimento seguido, do seu envolvimento com a pesquisa e de sua habilidade em escolher o caminho adequado para verificar os objetivos da pesquisa. (POMMER, 2013, p. 20)

Pommer (2013) ainda afirma que pesquisar significa buscar respostas para indagações e através dessas respostas, fazer aproximações entre a teoria e os dados. Com isso, Pommer (2013, p. 22) destaca que a Engenharia Didática, descrita por Artigue (1996), está compreendida em quatro fases: a 1ª das análises preliminares; a 2ª da concepção e da análise a *priori*; a 3ª da experimentação e a 4ª da análise a posteriori e validação, conforme apresentado no diagrama 1.

Diagrama 1 - Fases da engenharia didática



Fonte: Autoria própria (2020)

Pommer (2013, p. 22) destaca que “as quatro fases não ocorrem, em geral, de forma linear e estanque.” E continua dizendo que “elas necessitam da articulação, da antecipação e até da superposição dos elementos caracterizadores destas quatro fases.” Com isso, compreendemos que os estudantes não podem ir de uma fase a outra sem terem adquirido autonomia para prosseguir, correndo o risco do fracasso e desanimo, caso a mudança de fase ocorra sem planejamento e de qualquer maneira.

Sendo assim, nesta pesquisa trabalhamos as fases citadas anteriormente, referente à Engenharia Didática.

2.2.1. Análises Preliminares

Nesta primeira fase, temos as Análises preliminares de quadros teóricos gerais da organização didática sobre o assunto de Matrizes e que Artigue (1996, p. 198) destaca como sendo:

> • A análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
> • A análise do ensino habitual e dos seus efeitos;
> • A análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;
> • A análise do campo de constrangimento no qual virá a situar-se a realização didática efetiva;
> • e, naturalmente, tendo em conta os objetivos específicos da investigação.

Sendo assim, apresentamos mais adiante, no terceiro capítulo e na página 47, as atividades preliminares que foram realizadas como: levantamento bibliográfico; análise de documentos oficiais; levantamento dos descritores de sistemas de avaliação nacional e estadual; levantamento junto a estudantes através de um questionário sócio – educacional respondido por 100 estudantes do Ensino Médio e percepções sobre o ensino do assunto de Matrizes.

As informações levantadas foram importantes para o direcionamento das estratégias de intervenção que adotamos, levando em consideração a epistemologia do objeto a ser ensinado, além das questões cognitivas dos estudantes.

Sá e Alves (2011, p. 149) abordam que e na primeira etapa que se “constituem o momento da investigação em que o pesquisador busca o referencial teórico para fundamentar suas categorias e escolhas para elaboração da sequência didática a ser desenvolvida”. Assim, Artigue (1996, p. 202) destaca ainda que um ponto de apoio da analise preliminares são encontradas "na fina análise prévia das concepções dos alunos, das dificuldades e dos erros tenazes, e a engenharia é concebida para provocar, de forma controlada, a evolução das concepções”.

Ainda sobre a análises preliminares, temos Pais (2002, p. 101) dizendo que:

> [...] Para melhor organizar a análise preliminar, é recomendável proceder a uma descrição das principais dimensões que definem o fenômeno a ser estudado e que se relacionam com o sistema de ensino, tais como a epistemologia cognitiva, pedagógica, entre outras. Cada uma dessas dimensões participa na constituição do objeto de estudo.

Portanto, a realização dessa análise preliminar feita de forma controlada, seguida de formulações de hipóteses permitirá que se alcance e supere eventuais dificuldades encontradas.

2.2.2. Concepção e Analise a *Priori*

Nesta fase caracteriza-se o momento de elaboração e análise da sequência didática com finalidade de validar nossas hipóteses didáticas. Desta forma, destacamos que nossa variável é o ensino de Matrizes. Artigue (1996, p. 205) nos direciona como deve ser feita essa análise a *priori*.

> [...] deve ser concebida como uma análise do controle do sentido; muito esquematicamente, se a teoria construtivista coloca o princípio do compromisso do aluno na construção dos seus conhecimentos por intermédio das interações com determinado meio, a teoria das situações didáticas que serve de referência à metodologia de engenharia [didática], teve, desde sua origem a ambição de se constituir como uma teoria de controle das relações entre sentido e situações.

O papel do professor aqui torna-se indispensável, pois é justamente ele quem vai realizar a interação dos estudantes com o conhecimento. A autora afirma que seu objetivo, com relação a análise a *priori*, é:

> [...] determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Para isso, ela funda-se em hipóteses; será a validação destas hipóteses que estará, em princípio, indiretamente em jogo no confronto, operado na quarta fase, entre a análise a *priori* e a análise a posteriori (ARTIGUE, idem).

É ao nosso ver neste ponto que ocorrem uma melhor interação entre os envolvidos no processo de ensino aprendizagem (professor e estudante), dependendo da concentração de cada estudante, eles poderão ou não realizar as atividades, tudo depende do andamento das questões selecionadas.

Aqui faremos as previsões das ações e dos comportamentos dos estudantes que poderá ocorrer no desenvolvimento deste trabalho. Sá e Alves (2011, p. 151) destacam os objetivos centrais presentes nessa etapa da pesquisa, que é a construção da sequência didática para o ensino de matrizes, além da formulação das hipóteses.

> [...] A construção da sequência didática tem como objetivo a produção e a seleção de todo material que será necessário ao desenvolvimento da sequência de atividades propostas para o trabalho pedagógico a ser realizado. A sequência didática não precisa ser limitada por uma tendência didática vigente ou preferência do investigador. No caso específico da Educação Matemática, uma sequência didática pode ser baseada somente numa das tendências da mesma ou na conjunção de várias tendências.

Assim, destacamos que a sequência didática é totalmente centrada no estudante, pois aqui ele torna-se atuante no processo de aprendizagem. O papel do professor agora é oferecer atividades para que eles continuem prosseguindo e avançando nas etapas da sequência didática. As atividades serão apresentadas aos estudantes por meio de um material didático contendo atividades didáticas; material que serão utilizados; além de procedimentos, com listas de questões de aprofundamentos sobre os conceitos de Matrizes, trabalhados no decorrer das atividades.

2.2.3. Experimentação

Nesta fase aplicamos a sequência didática que trata da execução do planejamento feito nas fases anteriores, com observância a avaliação que deve ser constante em todo o percurso durante as seções. Sá e Alves (2011, p. 156 e 157) afirmam que:

> Este momento da pesquisa tem com *locus* a sala de aula e se inicia quando a primeira atividade é desenvolvida. Cada encontro ocorrido na sala de aula é denominado de “sessão”, mesmo que seja uma atividade diagnóstica e termina quando o pesquisador realiza a última atividade com a turma. Nesta fase o pesquisador ou a equipe de pesquisa deve desenvolver as atividades planejadas e, ao mesmo tempo, realizar o maior número de registros possíveis em quantidade e diversidade.

É Por isso que nesta fase do trabalho deve-se ter a total atenção para os fatos que foram levantados anteriormente, considerando as ações positivas e negativas, e assim, alcancem os objetivos da pesquisa com o máximo de êxito possível. Com isso, Machado (2002, p. 206) destaca que a experimentação pressupõem que:

> - a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa a população de alunos que participará da experimentação;
> - o estabelecimento do contrato didático;
> - a aplicação do instrumento de pesquisa;
> - o registro das observações feitas durante a experimentação.

Afirmamos que nesta etapa da Engenharia Didática é que se dar o contato direto do pesquisador/professor/observador(es) com os estudantes, foi nela que aplicamos as atividades planejadas do produto matemático pesquisado, as Matrizes. Aqui fazemos o registro das atividades através de filmagens, gravações e outras apenas descritas. O que determina a escolha do tipo de registro da sequência didática são as variáveis que emergirão na análise a *priori*.

2.2.4. Analise a Posteriori e a Validação

Esta fase é construída e se apoia nos dados obtidos na fase anterior, a da experimentação. Aqui, fizemos a descrição, a análise dos dados das observações em relação ao comportamento dos pesquisados e todas os subsídios obtidas durante a aplicação da sequência didática. Segundo Artigue (1996, p. 208), essa fase se apoia "no conjunto dos dados recolhidos aquando da experimentação: observações realizadas nas sessões de ensino, mas também produções dos alunos em sala de aula ou fora dela".

Segundo a autora, esta fase se caracteriza pelo tratamento dos dados colhidos e a confrontação com a análise *a priori*, permitindo que se faça a interpretação desses resultados, levando em conta as condições em que essas questões levantadas foram respondidas. Desse modo, Sá e Alves (2011, p. 158) afirmam que:

> [...] A etapa da análise *a posteriori* e validação é o momento em que os resultados/informações produzidos no relatório da experimentação serão confrontados com o previsto e descrito na etapa da análise *a priori* com a intenção de obter argumentos que justifiquem e expliquem o desenvolvimento do experimento, e apontem uma posição favorável ou desfavorável ao ocorrido.

Pais (2008, p. 103) aborda que a validação dos resultados é realizada pela confrontação entre os dados obtidos nas análises *a priori* e *a posteriori*, verificando as hipóteses feitas no início da pesquisa. É isso que será feito com os dados obtidos por nossa pesquisa.

Neste ponto, destacamos a grande importância que essa teoria passa a acrescentar na educação, pois a partir do contato com essas quatro fases que Artigue (1996) traz, passamos, quanto a pesquisador/educador, à olhar nossas práticas/metodologias com outros olhares, só que desta vez com muito mais possibilidades de se considerar, adequar e aperfeiçoar nossas próprias práticas educacionais já utilizadas com as propostas dadas pela autora.

2.3. Análise Microgenética

Aqui damos início a uma parte muito importante do nosso trabalho, pois será abordado as contribuições de Vygotsky (1896 – 1934). Iniciamos fazendo uma apresentação bem resumida de alguns traços da história de vida, focando nas origens do enfoque teórico do autor.

Segundo Moysés (1997, p. 20) "em quanto Vygotsky fazia seu curso superior, frequentou cursos de psicologia, literatura e filosofia" na Universidade Popular de Shanyavskii. Com isso, conseguiu em pouco tempo acumular um vasto conhecimento sobre várias áreas do saber, pois nessa época a União Soviética tinha intercâmbio intelectual com outros países da Europa Ocidental e com os Estados Unidos.

Nesse período as ideias filosóficas de Marx e Engels influenciaram uma geração de jovens soviéticos e Vygotsky está inserido nesse contexto, pois ele já tinha uma formação filosófica, onde incluía o pensamento marxista. Moysés (1997, idem) afirma que em seus primeiros escritos já estavam presentes as categorias intelectuais da dialética.

E é em torno do método dialético que ele passou a estudar os fenômenos psíquicos, pois, para Vygotsky a principal tarefa da psicologia deveria ser a de reconstruir a origem e a forma de como se dava o desenvolvimento do comportamento humano e da consciência (MOYSÉS, 1997, p. 21).

O autor aborda ainda que:

> No período transcorrido entre a sua graduação e a sua ida para Moscou, Vygotsky exerceu uma intensa atividade: dava aula de literatura, história da arte e estética, fundou um laboratório de psicologia na Escola Normal de Gomel (cidade onde viveu antes de se transferir definitivamente para Moscou), fazia conferencias, escrevia e publicava (MOYSÉS, idem).

Tudo o interessava e assim, Vygotsky chega ao Instituto de Psicologia de Moscou como colaborador e, com uma bela bagagem de conhecimentos. E ali se junta com os jovens psicólogos Alexander Luria e Alexei Nikolaievich Leontiev que, posteriormente, criariam um grupo de pesquisa autodenominado de troika, desse grupo, emerge suas principais contribuições à defectologia[1] e que foram reunidas no livro Psicologia Pedagógica.

De acordo com Ivic (2010, p. 14) que destaca:

> [...] É aí, durante uma prodigiosa década (1924-1934), que Vygotsky, cercado por um grupo de colaboradores apaixonados como ele pela elaboração de uma verdadeira reconstrução da psicologia, cria sua teoria histórico-cultural dos fenômenos psicológicos.

E em 1924 acontece o 2ª Congresso Russo de Psiconeurologia, em Leningrado, e Vygotsky, expõem um trabalho que vai de encontro ao pensamento psicológico tradicional, onde ele critica a reflexologia e aponta para a necessidade de analisar o comportamento humano de modo geral. Ele teve seus escritos ignorados por um longo tempo.

Mas Ivic (2010, p. 15) ainda destaca que:

---

[1]A **defectologia** é o estudo do desenvolvimento e da educação da criança anormal (VYGOTSKY, 2011)

> [...] Se houvesse que definir a especificidade da teoria de Vygotsky por uma série de palavras e de fórmulas chave, seria necessário mencionar, pelo menos, as seguintes: sociabilidade do homem, interação social, signo e instrumento, cultura, história, funções mentais superiores. E se houvesse que reunir essas palavras e essas fórmulas em uma única expressão, poder-se-ia dizer que a teoria de Vygotsky é uma "teoria socio-histórico-cultural do desenvolvimento das funções mentais superiores", ainda que ela seja chamada mais frequentemente de "teoria histórico-cultural".

Nosso intuito é de resumir a teoria de Vygotsky, por isso destacaremos aqueles aspectos que têm implicações mais claras para o ensino e aprendizagem e que abordam adequadamente sua obra, como fez Leontiev, em 1989, ao afirmar que a questão da mediação do comportamento por meio de um instrumento foi uma das primeiras premissas levantadas por Vygotsky.

Com isso, apresentaremos alguns conceitos que Vygotsky criou, influenciado por vários teóricos do maxismo, como: a mediação, o processo de internalização e a zona de desenvolvimento proximal.

A primeira fase, a mediação, inspirada nas ideias filosóficas de Marx deu base para se desenvolver importantes conceitos como o fator histórico-social e; com isso o homem passa a buscar meios para sua realização, modificando a natureza psíquica do próprio ser humano.

Da mesma forma que o instrumento mediatizado era concedido por Marx, através da atividade laboral do homem, Vygotsky se depara com um instrumento psicológico de excelência, o signo. Esse instrumento passa a mediatizar não apenas o pensamento humano, mas todo o processo social. Assim, Vygotsky (1981a apud MOYSÉS, 1997, p. 23) inclui que:

> [...] dentre os signos, a linguagem, os vários sistemas contagem, as técnicas de mnemônicas, os sistemas simbólicos algébricos, os esquemas, diagramas, mapas, desenhos, e todo tipo de signos convencionais. Sua ideia básica é a de que, ao usá-los, o homem modifica as suas próprias funções psíquicas superiores.

Essa nova teoria inusitada para a época apresenta um novo elemento na noção de estímulo – resposta, estamos falando do Instrumento Psicológico que fez com que a relação deixasse de ser dual[2] e passasse a ser triangular. Segundo Moysés (1997, p. 24) esse elemento "poderia ser, por exemplo, uma marca no papel para recordar

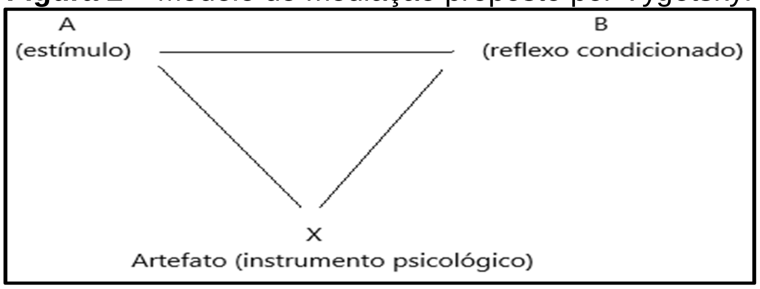
---

[2] Nas suas primeiras produções na área psicológica. Vygotsky ainda se mostrava um tanto atrelado aos estudos dos reflexos, provavelmente como uma influência da concepção então vigente no Instituto de Psicologia, tendência logo substituída pelo enfoque sociocultural.

uma palavra, um barbante amarrado no dedo para se lembrar de algo, uma figura associada a algo que precise ser lembrado, etc.”

Em seguida, Vygotsky configurou o seguinte esquema em que está bem representado cada elemento e a relação que há entre eles, veja na figura 2.

Figura 2 – Modelo de mediação proposto por Vygotsky.



Fonte: Autoria própria (2020)

Nessa imagem A é o estímulo e B, um estimulo associado a A e X é o artefato psicológico. Vygotsky aproveitou a ideia do esquema tradicional, no caso A ⟶ B, em que, no caso da memória, existe virtudes de forças associativas, ligadas ao reflexo, restando agora a presença do segundo sinal que completaria essa ligação. Com essa ideia de segundo sinal, Vygotsky articulou com a ideia de instrumento e passou a fazer experimentos que concluía que o sujeito ao longo da história e do seu desenvolvimento introduziu, na mediação de suas ações, novos sinais, elementos e símbolos.

Vamos exemplificar o conceito da mediação com um dos experimentos de Vygotsky, onde um experimentador e um sujeito participam da experiência. São mostrados a eles de 25 – 30 cartões com figuras e uma lista de palavras que eles devem memorizar, através das cartas. Em seguida, o experimentador lhe apresenta cartões com as figuras aleatoriamente e que o sujeito lembre-se das palavras, a partir dos cartões com figuras apresentadas.

Lurya (1979, p. 89 – 90 apud. MOYSÉS, 1997, p. 25) afirma que esse experimento possui duas variantes, em que:

> Na primeira, há sempre uma figura que está obviamente relacionada com a palavra a ser lembrada. Exemplo: *inverno/lareira*. Na segunda, a relação precisa ser procurada pelo sujeito. Exemplo: *fogo/machado*. Com o machado corta-se a lenha para acender o fogo. Em ambos os casos os cartões funcionam como mediadores entre o estímulo e a resposta, levando a pessoa a se lembrar da resposta solicitada.

Vygotsky também fez esse experimento com crianças em idade escolar e com as que se encontravam em estágio anteriores obtendo o seguinte resultado, onde conferiu que as crianças com idade escolar usam meios externos que os auxiliam no processo de memorização. Moysés (1997, p. 26) afirma que “Com o passar do tempo, a criança deixa de necessitar desse elemento auxiliar externo, e passa a utilizar signos internos.”

É nesse sentido que Vygotsky (1982-1984, p. 281 apud IVIC, 2010, p.16) destaca que “É por meio de outros, por intermédio do adulto que a criança se envolve em suas atividades. Absolutamente, tudo no comportamento da criança está fundido, enraizado no social.” E assim, a criança vai se tornando mais independente com o passar do tempo sobre o significado dos signos a ela apresentados.

Moysés (1997) aborda que a obra de Vygotsky está cheia de exemplos, como o anterior. Mas somente com relação à mediação, com a linguagem oral, que seus estudos se destacaram, nas décadas seguintes como nos dias atuais, essa temática direcionou para outro ponto na sua teoria, o ponto da internalização.

No segundo conceito o da internalização Vygotsky deixa claro que a ideia de internalização de comportamentos externos já havia sido apresentado por diferentes autores como Pierre Janet, James Mark Baldwin, Ernst Kretschmer, Charlotte Buhler e Jean Piaget. Afirma ser de Janet a ideia do processo de desenvolvimento, onde as crianças usam as mesmas formas de comportamentos que outros usaram em relação a elas.

Já em relação as ideias de Piaget ele reconhecem que elas trazem o cerne dessa concepção no qual primeiro aparece entre as crianças e só depois é internalizada pelo indivíduo, tudo através do campo da linguagem onde o conceito de internalização é comprovado, especificamente na “linguagem egocêntrica”[3]. Esse termo expressava o fato de que a criança “fala para si mesma”, mesmo acompanhada e ainda afirma que o termo *egocentrismo* significava a incapacidade da criança de se deslocar da sua própria perspectiva mental, não conseguindo colocar-se no lugar do outro.

Contrapondo o que afirmava Piaget temos Vygotsky defendendo a ideia de que o verdadeiro curso do desenvolvimento do pensamento infantil tem uma direção que vai do social para o individual. Ele comprovou através de experimentos que a criança

[3] Tema desenvolvido por Piaget poucos anos antes – 1923 – em uma das suas primeiras obras: *A linguagem e o pensamento da criança* (PIAGET, 1961).

é um ser social desde o seu nascimento e quando uma criança se esforça para pegar um objeto fora do seu alcance, é interpretado como um desejo de tê-lo.

Assim, outra pessoa interpretara essa ação com um gesto de apontar, usando o indicador, e esse gesto interpretado pelo outro atribui um significado que ainda não é o da criança. Aqui, percebe-se então a passagem de uma situação externa, em que um movimento fora direcionado para um objeto transformou-se em um movimento direcionado para outro ser humano, graças a interação social que ocorreu o movimento passou a ser reduzido e abreviado.

Com isso, Vygotsky (1981b, p. 163 apud MOYSÉS, 1997, p. 28) afirma que:

> Qualquer função presente no desenvolvimento cultural da criança aparece duas vezes, ou em dois planos distintos. Primeiro, aparece no plano social, e depois, então, no plano psicológico. Em princípio, aparece entre as pessoas e como uma categoria interpsicológica, para depois aparecer na criança, como uma categoria intrapsicológica. Isso é válido para atenção voluntária, a memória lógica, a formação de conceitos e o desenvolvimento da vontade. [...] a internalização transforma o próprio processo e muda sua estrutura e funções. As relações sociais ou relações entre as pessoas estão na origem de todas as funções psíquicas superiores.

O autor destaca ainda que com essa lei, Vygotsky esclarece que a passagem do plano externo para o plano interno não se dá por uma simples cópia, mas sim através de um processo de interação. Esse fato levou Vygotsky a se preocupar com o papel do discurso nesse processo, pois o sujeito transforma o próprio processo e com isso, muda sua estrutura e funções. Essa lei explica outro conceito da teoria sócio histórica, chamada de Zona de Desenvolvimento Proximal, conceito básico para a educação, segundo Vygotsky.

A Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) é um dos conceitos mais importantes de Vygotsky, pois ela se relaciona com a diferença entre o que pode ser realizado sozinho pela criança (zona de desenvolvimento real), com aquilo que ela é capaz de aprender e fazer, mas com a ajuda de uma pessoa mais experiente (zona de desenvolvimento potencial) que aqui representamos por um adulto ou de alguém mais adiantado do que ela e que tenha facilidade de aprendizado, como destaca Moysés (1997, p. 34) ao descrever que essa ajuda pode ocorrer através de:

> [...] Perguntas-guias, exemplos e demonstrações constituem o cerne dessa ajuda. A aprendizagem mediante demonstrações pressupõem imitação. Trata-se, porém, de um conceito amplo, que implica imitação de um modelo dado socialmente não no sentido de copiá-lo exatamente, mas algo que envolve uma experimentação construtiva. Ou seja, a criança realiza ações semelhantes à do modelo de uma forma construtiva, imprimindo-lhe modificações[...] Desse processo resulta a internalização da compreensão do modelo.

Isso mostra como essa ideia da internalização ocupa os pensamentos de Vygotsky, concebendo-as como um esquema de regulação geral. Baseado nos estudos sobre a zona de desenvolvimento proximal (ZDP), ele propõem uma situação para o ensino/aprendizagem, dizendo que “O bom ensino é aquele que se adianta ao desenvolvimento.” (VYGOTSKY, 1984, p. 101 apud MOYSÉS, 1997, p. 34)

Moysés (1997, idem) afirma que o professor, ao criar zona de desenvolvimento proximal estará possibilitando o aparecimento de funções não completamente desenvolvidas. Pois, de acordo com Vygotsky (1988, p. 115 apud MOYSÉS, 1997, p. 35) “, a aprendizagem é um momento intrinsecamente necessário e universal para que se desenvolva na criança essas características humanas não-formais, mas formadas historicamente.”

Neste ponto, destacamos as aplicações do conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) como a formação de conceitos, que se obteve através de experimentos, onde as principais conclusões emanaram do confronto estabelecido entre o desenvolvimento dos conceitos espontâneos (são aqueles que a criança aprende no seu cotidiano, através do contato diário com objetos, fatos, fenômenos, etc.) e os conceitos científicos (são aqueles ensinados intencionalmente por meio de uma metodologia específica), são os conceitos que as crianças aprendem nas escolas.

Vygotsky (1970, p. 70 apud MOYSÉS, 1997, p. 35 – 36) aborda que é no ambiente escolar que a criança passa a fazer parte de um sistema hierarquizado, pois agora ela tem a presença do professor que assume o papel de mediador entre o estudante e o objeto de conhecimento, o que antes não havia no conceito espontâneo. Vygotsky (1970, p. 98 apud MOYSÉS, 1997, p. 36) afirma ainda que “[...] o professor, trabalhando com o aluno, explicou, deu informações, questionou, corrigiu o aluno e o fez explicar.”

E assim, Vygotsky resumi o que seria a essência de um ensino direcionado para a compreensão através das seguintes expressões: “trabalhando com o aluno”, “explicou” e “deu informações”, “questionou e corrigiu o aluno” e “... e o fez explicar”.

Dentre as expressões acima, Vygotsky afirma que o ponto alto de todo o processo é quando o estudante consegue explicar com suas próprias palavras o que entendeu/compreendeu do assunto tratado.

Moysés (1997, p. 38) destaca que:

> A forma metódica e intencional como os conceitos científicos são – ou deveriam ser - trabalhados na escola abre caminho para a revisão e a melhor compreensão dos conceitos espontâneos que cada aluno traz dentro de si. Assim, refletindo o cotidiano de sua classe social, o aluno leva para a escola, sob a forma de conceitos espontâneos, certos conhecimentos e valores, dos quais vai adquirindo progressiva consciência através desse movimento.

Cabral (2004, p. 97) define que a ZDP possibilita “a construção de uma visão de como este processo de cooperação com o adulto ou entre pares contribui para o desenvolvimento e aprendizagem da criança.”

Para a realização de uma análise que tenha como objetivo a identificação desses indícios de aprendizagem necessitamos de planejamento, tempo, atenção para os mínimos detalhes ocorridos no diálogo entre os sujeitos e; ainda de uma metodologia adequada que atenda a essas necessidades de construção de conhecimento entre sujeitos.

Para as etapas da nossa sequência didática usamos a análise Microgenética, com isso nos se baseamos nas contribuições de Góes (2000) que vem sendo utilizada amplamente nos campos da educação e da psicologia. Apesar de Vygotsky não ter feito muitas contribuições sobre Análise Microgenética, temos Góes (2000, p. 9) afirmando que:

> [...] trata-se de uma forma de construção de dados que requer a atenção a detalhes e o recorte de episódios interativos, sendo o exame orientado para o funcionamento dos sujeitos focais, as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação, resultando num relato minucioso dos acontecimentos.

A autora ressalta que o objetivo dessa análise é construir uma história do processo, composta por pequenos episódios interpretados numa perspectiva semiótica e numa remissão a condições mais amplas da cultura e da história, o que pode ser verificado nos pressupostos da teoria Vygotskyana.

Já Cabral (2004, p. 106) destaca ainda que:

> [...] a Análise Microgenética constitui-se em um poderoso instrumento metodológico de investigação da construção de conhecimento quando pensamos no encontro de sujeitos em situações de ensino no ambiente escolar. Sendo a sala de aula, um palco das interações dialógicas que proporciona ao professor um ambiente de investigação pedagógica.

Percebemos que os autores citados acima concordam que a Análise Microgenética é usada, pelo primeiro, como uma forma de construção de dados, já para o segundo, como investigação da construção de conhecimento. Isso ocorre porquê esta é uma característica do construtivismo de Vygotsky.

Góes (2000, p. 15) continua a afirmando:

> [...] essa análise não é *micro* porque se refere à curta duração dos eventos, mas sim por ser orientada para minúcias indiciais – daí resulta a necessidade de recortes num tempo que tende a ser restrito. É genética no sentido de ser histórica, por focalizar o movimento durante processos e relacionar condições passadas e presentes, tentando explorar aquilo que, no presente, está impregnado de projeção futura. É genética, como sociogenética, por buscar relacionar os eventos singulares com outros planos da cultura, das práticas sociais, dos discursos circulantes, das esferas institucionais.

Assim, em Góes (2000) fica subentendido o vínculo fundamental com o exame das minúcias e das dimensões semiótica, histórica e cultural. Apesar de tudo é um dos seguidores de Vygotsky que mais enfatiza a questão semiótica, e o faz de maneira muito interessante, ao relacioná-la com os temas da enunciação e da dialogia.

Segundo Siegler e Crowley (1991 apud MACEDO, 2019, p. 32) há três passos básicos que definem a abordagem Microgenética:

1. As observações abrangem todo o período do processo, desde o início da mudança até o momento em que atinge um estado relativamente estável;
2. A densidade das observações se acentua em relação à alteração do fenômeno;
3. O comportamento observado é submetido à análise e experimentação intensiva, buscando inferir os processos que deram origem a ambos os aspectos quantitativos e qualitativos da mudança.

Desse modo o pesquisador deve observar e analisar esses três passos para tirar daí a melhor abordagem Microgenética que irá usar em sua pesquisa. E essa escolha poderá ser as teorias de aprendizagem, teorias educacionais, propostas pedagógicas e metodologias de ensino que servem como base para aplicação da sequência didática.

3. ANÁLISES PRELIMINARES

Nas análises preliminares apresentamos primeiro a parte histórica sobre nosso assunto, depois mostraremos um estudo sobre como o currículo da Educação Básica, no nosso país, aborda o conteúdo de Matrizes no Ensino Médio, envolvendo a análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), do Plano de Desenvolvimento da Educação (PDE) e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Em seguida, será comentado os resultados da revisão de estudos sobre o Ensino de Matrizes dividida em duas categorias, em estudos diagnósticos e experimentais. Na continuação comentamos sobre o ensino de matrizes, segundo a opinião dos estudantes, a qual contém a metodologia utilizada na pesquisa, assim como as análises, os resultados e as considerações.

3.1. Aspectos Históricos Sobre o Assunto de Matrizes

Muitos conteúdos matemáticos são ensinados sem que os estudantes saibam os verdadeiros percursos que estes tiveram ao longo da história da humanidade. Essa falta de contextualização é uma das consequências do desinteresse apresentado por muitos estudantes, quando não conseguem relacionar o conteúdo com sua realidade ou não compreendem certos conteúdos, dentre eles, as matrizes.

Chaquiam (2017, p. 14) aborda que iniciar uma aula mostrando fatos do passado, relacionando com o assunto matemático estudado é uma alternativa para conduzi-lo, isso possibilitará ao estudante perceber o ensino da matemática como uma construção da humanidade, que surgiu a partir da necessidade de solucionar problemas do cotidiano. Esse autor apresenta o seguinte argumento, em que.

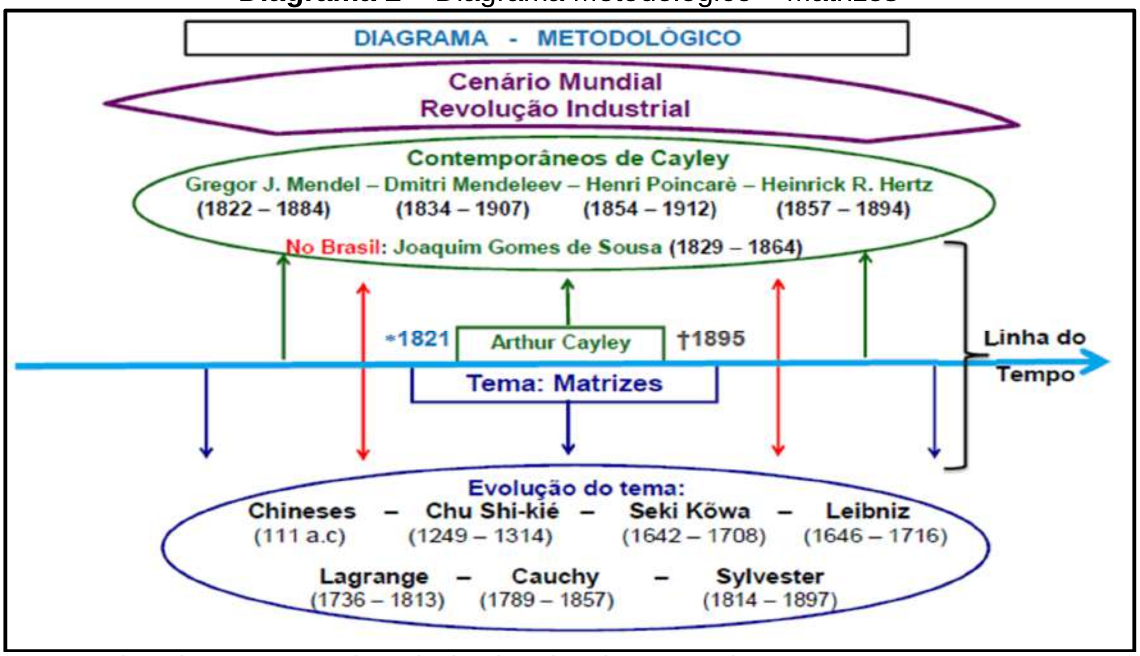
> [...] os estudos apontam que a história da matemática, combinada com outros recursos didáticos e metodológicos, pode contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática, emerge como uma possibilidade de buscar uma nova forma de ver e entender a Matemática, tornando-a mais contextualizada, mais integrada com as outras disciplinas, mais agradável, mais criativa, mais humanizada.

Esse argumento está de acordo com OCEM (BRASIL, 2006, p. 86) que afirma.

> A utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. [...] A História da Matemática pode contribuir também para que o próprio professor compreenda algumas dificuldades dos alunos, que, de certa maneira, podem refletir históricas dificuldades presentes também na construção do conhecimento matemático.

A matemática é uma das ciências mais antiga da humanidade; e ela desenvolve-se conforme o homem progride em experimentos que procuram aproximar a teoria da prática. Nesta seção, procuramos trilhar os avanços que o conteúdo de Matrizes sofreu até os dias atuais e, para isso utilizaremos o diagrama 2 que mostra alguns personagens que foram importantes na evolução desse assunto, tendo como destaque Arthur Cayley (1821 – 1895). Desta maneira, segue o diagrama metodológico adaptado ao conteúdo de Matrizes.

Diagrama 2 – Diagrama Metodológico – Matrizes



Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de Chaquiam (2017, p. 26)

Lima e Pereira (2017, p. 55) destacam que a história das matrizes, representada na figura acima.

> [...] está dividido na seguinte ordem: contexto histórico do personagem principal, Arthur Cayley, seus contemporâneos em ordem cronológica, seus traços biográficos, evolução do conteúdo de matrizes e por fim outros olhares referentes a esse conteúdo.

Assim, apresentamos os contemporâneos de Arthur Cayley em ordem cronológica, seus traços bibliográficos. Olhando para o Brasil, nesse período, destacamos um contemporâneo brasileiro chamado de Joaquim Mendes de Sousa, mas conhecido como o “Sousinha” e seguimos apresentando os personagens que fizeram o tema de Matrizes evoluir, com destaque para o nosso personagem principal.

3.1.1. Contemporâneos de Arthur Cayley

Como já mencionado anteriormente, escolhemos como personagem principal Arthur Cayley (1821 – 1895), devido suas contribuições para as Matrizes. No entanto, para uma melhor compreensão dos fatos, descreveremos outros personagens que viveram no mesmo período que Cayley. São eles: Gregor Mendel (1822 – 1884); Dmitri Mendeleev (1834 – 1907); Henri Poincarè (1854 – 1912); Heinrich Rudolf Hertz (1857 – 1894) e Joaquim Mendes de Sousa, *"O Souzinha"* (1829 – 1864), este último brasileiro. Frisamos aqui que nos se baseamos nos livros de Boyer e Merzback(2012); Eves (2004) e D'Ambrosio (2011), nos quais destacarmos um breve relato sobre cada personagem escolhido, de acordo com a ordem elencada.

Gregor Michael Mendel (1822 – 1884) nasceu no povoado chamado de Heinzendorf, na atual Áustria, em 20 de julho de 1822. Em 1847 ele foi ordenado monge e com isso, trocou seu nome de batismo de Johann Mendel para o nome Gregor Mendel e logo em seguida ingressou na Universidade de Viena, entre os anos de 1851 e 1853, vindo a estudar História Natural.

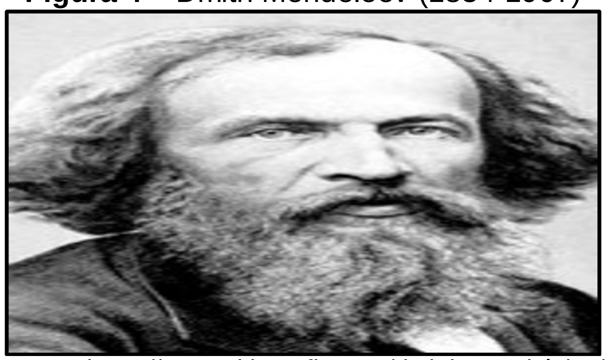
Figura 3 – Gregor Johann Mendel

Fonte: https://www.ebiografia.com/gregor_mendel/
Acessado em: 14 de set. 2020

Mendel é considerado o pai da genética por ter desenvolvido as Leis de Hereditariedade ou Leis de Mendel, apresentadas em 1865, em dois encontros da Sociedade de História Natural de Brno. Essas descobertas que Mendel fez mudariam o rumo da Biologia. Sua teoria principal era a de que as características das plantas deviam-se a elementos hereditários (atualmente conhecidos como genes) que posteriormente serviriam de base para o desenvolvimento de suas Leis já citadas. No entanto, as suas teorias só foram reconhecidas após sua morte que ocorreu em 06 de janeiro de 1884.

Dmitri Mendeleev (1834 – 1907) foi um matemático russo que nasceu na cidade de Tobolsk, na região leste da Sibéria, no dia 8 de fevereiro de 1834, falecendo no dia 2 de fevereiro de 1907 em São Petersburgo. Sua família tinha uns membros muito interessante, pois seu pai era o diretor da escola localizada em sua cidade natal. Seu avô, em 1787, inaugurou na cidade a primeira máquina impressora, e com isso fundou o primeiro jornal local. Já por parte da família da mãe foi instada a primeira fábrica de vidro da cidade.

Figura 4 – Dmitri Mendeleev (1834-1907)



Fonte: https://www.ebiografia.com/dmitri_mendeleiev/
Acessado em: 14 de set. 2020

Enquanto isso, na escola, Mendeleev destacava-se na área das Ciências. Porem com a destruição da fábrica de sua família por parte da mãe, o pai de Mendeleev ficar cego. Então, a mãe resolve mudar-se para Moscou, onde o filho muito estudioso poderia entrar para a universidade, e foi o que aconteceu. Seguiram para São Petersburgo, lá Dmitri aprendeu russo e ao ingressar no ensino superior interessou-se pela química, especializando-se também em Matemática, Física, Literatura e Línguas Estrangeiras. Em 1857 concluir sua graduação como o melhor de seu curso em Química.

Em 1859, Mendeleev recebe do governo russo uma bolsa e foi estudar química experimental, na França, com Henri Reynault. Em 1860 estudou na Alemanha, na Universidade de Heidelberg, onde montou seu próprio laboratório. Estudou também com Robert Bunsen e com Gustav Kirchhof e com eles foi criando o espectroscópio.

Em 1861, Mendeleev volta para São Petersburgo e escreveu um manual de Química Orgânica em sessenta dias. Obteve o doutorado de Química com um tratado sobre "A União do Álcool a Água" e em 1861, com apenas 31 anos, torna-se professor pela Universidade que se formou.

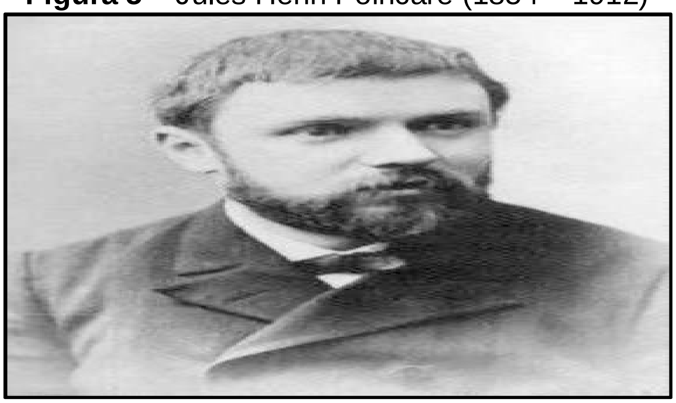
Mendeleev organizou os elementos químicos conhecidos, criando uma carta para cada um com seus próprios símbolos, massa atómica e propriedades químicas e físicas. Com isso, ele organizou esses símbolos em ordem crescente de massas atómicas, agrupando-os em elementos de propriedades semelhantes.

A tabela que Mendeleev construiu serviu de base para a elaboração da atual tabela periódica, que além de catalogar os 118 elementos químicos conhecidos, fornece ainda inúmeras informações sobre o comportamento de cada um. Os elementos, silício, gálio, germânio e escandido, foram encontrados depois com propriedades que Mendeleev previra. Desde então, a tabela periódica tem sido revista constantemente.

Dmitri Mendeleev faleceu em decorrência de uma pneumonia, em São Petersburgo, na Rússia, no dia 2 de fevereiro de 1907.

Jules Henri Poincaré (1854 – 1912)**,** nasceu em Nancy. Foi engenheiro de minas, vindo a obter doutorado em ciências Matemáticas em 1879, defendendo sua tese sobre Equações Diferenciais.

Figura 5 – Jules Henri Poincaré (1854 – 1912)



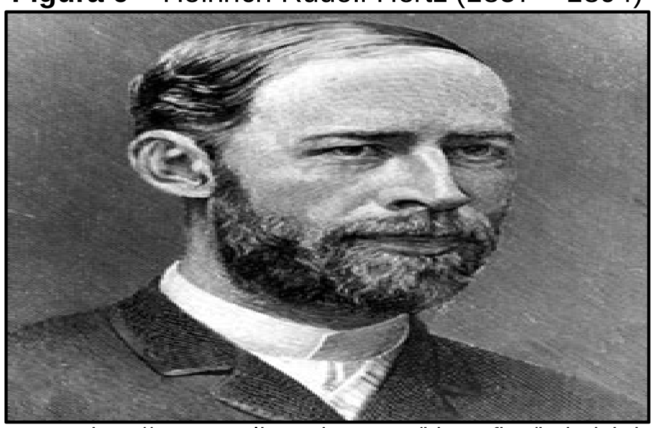
Fonte: https://www.infoescola.com/biografias/henri-poincare/
Acessado em: 14 de set. 2020

Em 1886, é nomeado professor de Cálculo das Probabilidades e de Física Matemática da Universidade de Paris. Segundo Boyer e Merzback (2012, p. 404 – 408) este era versátil e a cada ano escolar lecionava um tópico diferente: capilaridade, elasticidade, termodinâmica, óptica, eletricidade, telegrafia, cosmogonia e outros. Boyer e Merzback (2012, p. 405) destaca que um contemporâneo de Poincaré dizia que ele “era um conquistador, não um colonizador” sendo que não demorava muito em um assunto para dar-lhe uma forma generalizada.

Com isso, Eves (2004) afirma que Henri Poincaré enriqueceu uma grande quantidade de assuntos na matemática, sendo seus escritos numerosos, deixando mais de 30 livros e 500 artigos técnicos. Boyer e Merzback (2012, p. 405 – 406) diz que sua visão concreta da Matemática fez com que ele se interessasse com o que estava acontecendo tanto na Física quanto na Matemática, na virada do século XIX para o século XX, o que resultou em inúmeras contribuições nessas áreas.

Heinrich Rudolf Hertz (1857 - 1894) foi um físico alemão, de origem judaica, que nasceu no dia 22 de Fevereiro de 1857. Foi o responsável pela descoberta das ondas eletromagnéticas em 1888, e em sua homenagem foi atribuído à unidade de frequência “Hertz”. Demonstrou a existência da radiação eletromagnética criando aparelhos emissores e detentores de ondas de rádio, as quais em 1873 já tinham sido prevista por James Maxwell.

Figura 6 – Heinrich Rudolf Hertz (1857 – 1894)



Fonte: http://www.explicatorium.com/biografias/heinrich-hertz.html
Acessado em: 14 de set. 2020

Hertz interessou-se desde muito cedo pela construção de mecanismos, tema que sempre o atraiu, mesmo enquanto trabalhou na área da física. Levado por essa sua apetência, frequentou uma faculdade de engenharia durante dois anos. No entanto, a sua vontade de realizar investigação científica fê-lo optar pela física, tendo ingressado na Universidade Humboldt de Berlim em 1878.

Em 1880, torna-se assistente de Von Helmholtz, ocupação durante a qual estudou a elasticidade dos gases e a propagação de descargas elétricas através deles. A partir de 1883, muda para trabalhar na Universidade de Kiel onde inicia estudos sobre a eletrodinâmica de Maxwell e descobriu também a produção e propagação das ondas eletromagnéticas, além de encontrar formas de controlar a frequência das ondas produzidas. Essas experiências permitiram-lhe demonstrar a existência de radiação eletromagnética, como já havia sido previsto teoricamente por Maxwell.

Hertz passa a estudar as propriedades das ondas eletromagnéticas e com isso, descobre que a sua velocidade de propagação é igual à velocidade da luz no vácuo e que a propagação tem comportamento semelhante ao da luz, oscilando num plano que contém essa direção.

Desse modo, Hertz demonstra a refração, a reflexão e a polarização das ondas e prova, ainda, que os materiais condutores elétricos refletem as ondas e que os não-condutores favorecem a passagem delas. O seu trabalho permitiu o desenvolvimento do rádio, da televisão e do radar. Em 1888 apresentou os resultados das suas experiências à comunidade científica, os quais obtiveram o sucesso merecido.

No início de 1893, Hertz adoece e é operado de um tumor na orelha, no final desse ano, adoece de novo e acaba por falecer em 1 de Janeiro de 1894.

D'Ambrosio (2004) destaca que "A Academia Militar foi transformada em Escola Militar da Corte em 1839 e em 1842 foi instituído o grau de Doutor em Ciências Matemáticas". E com isso o primeiro brasileiro a obter o doutorado foi o jovem maranhense Joaquim Gomes de Sousa (1829 – 1864), conhecido como o "Sousinha" e isso aos 19 anos com uma tese atual e bem elaborada sobre Equações Diferenciais.

Figura 7 – Joaquim Gomes de Sousa (1829 – 1864)

Fonte: D'Ambrosio (2011, p. 49)

Souzinha nasceu em Itapecuru-Mirim, Maranhão, em 1829, e faleceu em Londres, em 1864. Foi para o Rio de Janeiro e ingressou na Escola Militar, em 1843, mas por questões de saúde, logo desiste, ingressando no ano seguinte na Faculdade de Medicina do Rio de Janeiro e não conclui este curso também, isso mostra que sua vida era atribulada, segundo D'Ambrósio (2011, p. 50).

D'Ambrosio (idem) destaca ainda que em 1847 volta a estudar na Escola Militar e em 1848 recebe o grau de Bacharel em Ciências Físicas e Matemática. Nesse mesmo ano, submete-se à defesa de uma tese de doutorado e recebe o grau de doutor com a tese "Dissertação sobre o modo de indagar novos astros sem auxílio das observações directas." Essa tese trata sobre a estabilidade de sistemas de equações diferenciais.

Ao retornar ao Maranhão estudou Línguas, Economia Política e Direito constitucional, vindo regressar ao Rio de Janeiro, em 1849, como professor da Escola Militar da Corte. Na Escola Militar, ele focaliza seus trabalhos em métodos gerais de integração a teoria do Som e a sua propagação em meios elétricos. Seus trabalhos, agora, são impressos na própria Escola da Corte e alguns foram publicados na *Revista Literária Guanabara*.

Em D'Ambrosio (2011, p. 51) temos que Souzinha foi para a Europa estudar. E em 1854, matricula-se na Faculdade de Medicina de Paris, doutorando-se dois anos após a matricula. Em 1855 e 1856 ele submeteu à apreciação da *Academie des Sciences*[4], uma *Mémoire sur la détermination de fonctions inconnues qui rentrent sous lê signe d'intégration définie*[5], e depois submeteu duas *Addition à um Mémoire*[6].

Com isso, o autor afirma que as dificuldades em entender as notações e as sequências de demonstrações foi um obstáculo que ocorreu entre seus avaliadores, pois Souzinha tinha regressado ao Brasil em 1857.

Em 1856, Souzinha submete à *Royal Society*[7] de Londres o trabalho *On the determination of unknown functions which are involved under definite integrals*[8]. Assim, observamos aqui que as mesmas dificuldades ocorridas na *Académie des Sciences*, que foram as trocas de correspondências entre os avaliadores do trabalho, também acontece na *Royal Society* e apontam: ausência de exemplos, reclamam da utilização de notação confusa e de falta de clareza.

O secretário da *Royal Society* G. G. Stokes (1820 – 1903) diz que o trabalho de Gomes de Sousa aborda "o problema famoso, cuja solução tem sido procurada em vão nos últimos duzentos anos." D'Ambrósio (2011, p. 52) destaca que "A troca de

---

[4] Academia de Ciências. (Tradução nossa)
[5] Academia das Ciências, uma Dissertação sobre a determinação das funções desconhecidas que estão sob o signo da integração definida. (Tradução nossa)
[6] Adição a uma memória. (Tradução nossa)
[7] Sociedade Real. (Tradução nossa)
[8]Na determinação de funções desconhecidas que estão envolvidas em integrais definidas. (Tradução nossa)

correspondência com Souzinha deixa claro que o trabalho não seria aceito.” Mas a decisão da rejeição do trabalho foi dada de forma sutil, fato ocorrido talvez, pela influência que Dom Pedro II tinha nas academias da França e da Inglaterra.

Em 1857 Gomes de Sousa recebe a notícia de que havia sido eleito deputado pelo Maranhão. E antes de regressar ao Brasil, casou-se com Rosa Edith, de 18 anos, Inglesa. Ela faleceu em 1860 e em 1862 morre seu filho. Porém, em fevereiro 1864, já muito doente, casou-se novamente, e em seguida fez uma viagem à Inglaterra para tratar da saúde, vindo este a falecer em 1º de junho do mesmo ano.

D’Ambrosio (2011, p. 54) destaca que quando a notícias da morte de Souzinha chegou à Câmara, em 06 de julho de 1864, a sessão foi suspensa como manifestação de pesar pelo falecimento de “um vulto majestoso que não encontrará substituto, porque àquele molde não são vazados muitos homens. Era um gênio, e eles são raríssimos.” Em 7 de julho é feito necrológio no periódico Paiz, de São Luiz, onde se lê que “Lamenta o Maranhão a perda de mais um filho ilustre, talvez a inteligência mais elevada que essa terra tenha produzido, o Dr. Joaquim Gomes de Sousa”.

D’Ambrósio (2011, p. 54) chama a atenção para o seguinte fato:

> Um erro que, lamentavelmente, foi incorporado à historiografia da matemática no Brasil, é a data de morte de Joaquim Gomes de Sousa, que aparece erroneamente com 1º de junho de 1863. A origem do erro é o capítulo de Antonio Henrique Leal, publicado no *Pantheon Maranhense*[9], São Luiz, em 1873.

Todo o ocorrido nos revela que Souzinha era reconhecido pela sociedade brasileira e maranhense, no que se refere a seu esforço em colocar o país em outro patamar em relação à questão da ciência e da política brasileira. Para isso contou com ajuda de Líderes, como Dom Pedro II, sem falar no prestígio que o mesmo levou para o Estado do Maranhão. Em 1860, ele pronunciou um importante discurso sobre a reforma das escolas militares, mostrando a importância que este deu à educação.

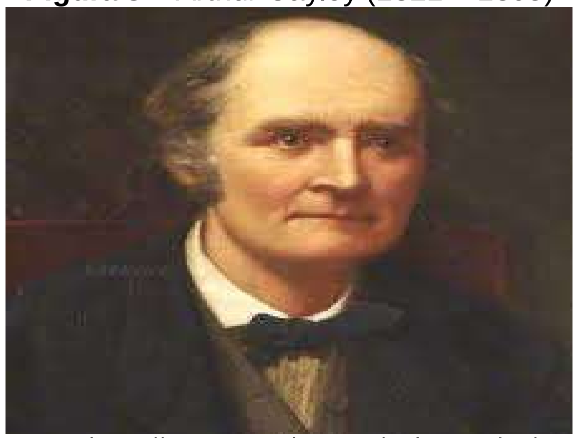
3.1.2. Traços Biográficos de Arthur Cayley

Arthur Cayley (1821 – 1895) foi um matemático, nasceu em 16 de agosto de 1821 em Richmond na Inglaterra. Passou os primeiros sete anos de sua vida em St. Petersburg, onde seu pai desejava que continuasse os negócios da família, mas em

[9] Panteão Maranhense. (Tradução nossa)

1835 ingressa no King´s College School, onde sua aptidão para a matemática o destacou, sendo encaminhado pelo o pai para estudar em Cambridge.

Figura 8 – Arthur Cayley (1821 – 1895)



Fonte: https://www.sapaviva.com/arthur-cayley/
Acessado em: 14 de set. 2020

Em 1838 começou seus estudos no Trinity College em Cambridge, onde se graduou em 1842, obtendo o título de *Sensior Wranger*, termos que designavam a melhor colocação nos exames do *Mathematical Tripos*[10]. Boyer e Merzback (2012, p. 380) destaca que “Cayley dedicou-se ao direito durante quatorze anos. Isso quase não interferiu com sua pesquisa matemática, e ele publicou várias centenas de artigos durante esses anos.”

Em 1843 trabalhou fundamentalmente em álgebra, mas, também trabalhou em geometrias não-euclidianas e geometria n-dimensional, nelas usou determinantes como elemento essencial, além do estudo de formas binarias, ternarias, teoria das funções abelianas, tretas, elípticas e as matrizes.

Lima e Pereira (2017, p. 59) destacam evidencias sobre Cayley entre:

> [...] suas publicações o livro, “Menoir on the Theory of Matrices” no ano de 1858. Este livro revelava o poder da álgebra matricial a partir de algumas considerações acerca das matrizes de Cayley. Por isso e por suas contribuições Cayley foi chamado “o matemático dos matemáticos”.

Assim, Cayley veio a falecer no dia 26 de janeiro de 1895, em Cambridge, Inglaterra. Terminado assim, a história de nosso personagem principal, tendo este deixado grandes contribuições para seus contemporâneos e para as gerações futuras.

[10]Tripos Matemáticos. (Tradução nossa)

3.1.3. Evolução do Conteúdo de Matrizes

Os Chineses eram povos das civilizações antigas do Ocidente que representavam os sistemas lineares, por meio de seus coeficientes, com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro, e assim descobriram o método de resolução por eliminação. Exemplos desse procedimento são encontrados nos nove capítulos sobre a arte da matemática, em um texto que data provavelmente do século 111 a.C. (EVES, 2004, p. 243).

No início de seus estudos desenvolveram livros relacionados ao tratamento de cálculos astronômicos, assim como, promoveram contribuições a respeito das propriedades relacionadas ao triangulo retângulo, frações, geometria relacionada à álgebra e na aritmética. Boyer e Merzback (2012, p. 143 e 144) destacam que “datar os documentos matemáticos da China não é nada fácil”, pois segundo os autores “Não se conhece nenhuma versão dos primeiros clássicos que tenha se preservado.” Por isso a importância do conteúdo do livro *Jiuzhang suanchu* (Chui-chang suan-shu) ou nove capítulos sobre a arte matemática.

Eves (2004, p. 243) corrobora dizendo que este livro é “o mais importante dos textos de matemática chineses”. Pois nesse período, os chineses gostavam de manusear os diagramas, gosto que fez com que surgisse o primeiro registro de um quadrado mágico, onde a soma na horizontal, na vertical e na diagonal dos números fosse sempre iguais a 15.

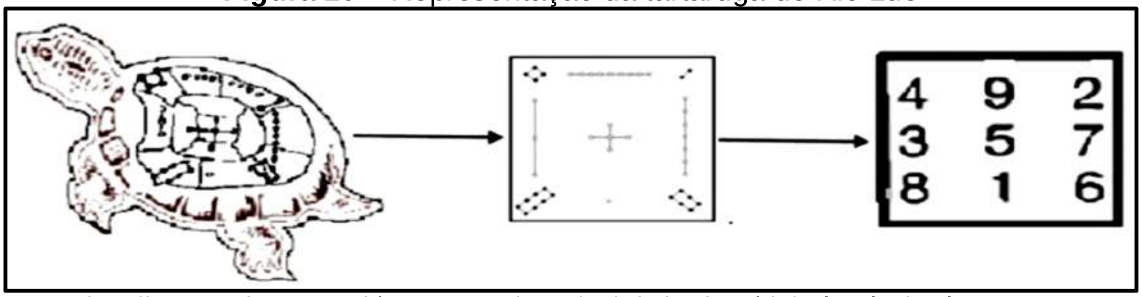
Figura 9 – Quadro mágico criado pelos chineses

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fonte: Boyer e Merzback (2012)

Boyer e Merzback (2012, p. 144) afirmam que esse quadro “foi supostamente trazido para os homens por uma tartaruga (considerado um animal sagrado) do Rio Luo nos dias do lendário Imperador Yii, considerado um engenheiro hidráulico.” Veja a próxima figura 13 que ilustra o que foi narrado por Boyer.

Figura 10 – Representação da tartaruga do Rio Luo



Fonte: http://matematicanaarea.blogspot.com/2009/12/v-behaviorurldefaultvml-o.html
Acessado em: 14 de nov. 2020

Nessa obra é mencionado, também, um método que mostra como fazer para se obter a solução do sistema de equações lineares do primeiro grau:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Boyer e Merzback (2012) afirmam que “A preocupação com tais padrões levou o autor dos nove capítulos a resolver o sistema de equações lineares simultâneas”. E é isso que mostraremos agora, pois assim, foram efetuadas operações sobre colunas na matriz.

$$\begin{array}{|ccc|} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array} \text{ Para reduzi-la a } \begin{array}{|ccc|} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array}$$

Observa-se que a única diferença entre o modo atual de representamos um sistema linear para o antigo modo chinês é que atualmente, escrevemos as equações lineares como as linhas da matriz e não como colunas. A segunda forma de representação de acordo com Boyer e Merzback (2012, p. 144), era representado através das equações: $33z = 99$; $55y + z = 24$; $3x + 2y + z = 39$, das quais se calcula e obtém-se a seguinte solução do sistema linear como: $z = \frac{11}{4}$, $y = \frac{17}{4}$ e $x = \frac{37}{4}$.

Lima e Pereira (2017, p. 60) verificaram que:

> [...] uma caracterização inicial de matrizes, de forma intuitiva, associada ao diagrama do quadrado mágico. Como consequência objetivavam solucionar o sistema de equações lineares simultâneas por meio do escalonamento para se chegar a matriz escalonada.

Assim, observamos que a tabela utilizada no método chinês é atualmente denominada de matriz. Já a redução é conhecida como um processo de eliminação

Gaussiana, a qual nos mostra que o estudo das matrizes foi motivada historicamente pela necessidade de se resolver sistemas de equações lineares.

Bernardes e Roque (2016, p. 2) afirmam que:

> [...] a ordem de exposição de alguns conceitos matemáticos com a ordem com a qual os mesmos surgiram na história, é comum se deparar com uma inversão. O conceito de matriz surgiu depois das noções de determinantes, sistemas lineares, transformações lineares e formas quadráticas.

Já Nunes (2016, p. 5) destaca que:

> [...] a ordem em que estes elementos da álgebra foram formalizados matematicamente pode ser descrito pela sequência: sistemas lineares, determinantes e matrizes; e que tais conhecimentos foram construídos ao longo dos séculos à medida que o homem necessitou para resolver algum problema prático.

Segundo Nunes (2016, p. 3), em 1303, o chinês Chu Shi-kié (1249 – 1314)[11] escreveu um trabalho intitulado como The Precious Mirror of the Four Elements (O Espelho Precioso dos Quatro Elementos), nessa obra são tratadas questões de álgebra com um elevado grau. Assim, Eves (2011, p. 246) acrescenta ao dizer que “Ele se utilizava dos métodos matriciais comuns hoje em dia e seu método de eliminação e substituição já foi comparado ao de Sylvester (1814-1897).”, entretanto, o chinês não empregava a mesma simbologia que é usada atualmente, já que está veio ser adotada somente no século XIX.

Temos também o trabalho do matemático Seki Shinsuke Kowa (1642-1708) com um manuscrito intitulado por Kai Fukudai no Ho (Método de Solução de Questões Secretas) e que através dos problemas envolvidos nessa obra tenha melhorado as considerações realizadas por Chu Shi-kié.

De acordo com Kraieski (1999, p. 3), Kowa foi a primeira pessoa a estudar determinantes em 1683. Dez anos mais tarde Leibniz, independentemente, usou determinantes para resolver equações simultâneas, embora a versão de Seki ainda fosse a mais geral.

Em seguida, surge Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) com uma notação de escrita associada ao método de determinante, tornando-se a primeira referência no Ocidente sobre o assunto. No ano de 1693, segundo Boyer e Merzback (2012, p. 290), Leibniz apresentou por meio de cartas a L’Hospital, escrevendo que ocasionalmente usava números para indicar linhas e colunas (Matrizes), em uma

[11] Desconhecida a causa da morte segundo as fontes estudadas.

coleção de equações lineares simultâneas, como as utilizadas pelos chineses. Veja como Leibniz apresentou as equações lineares para L'Hospital.

$$\begin{array}{lcl} 10 + 11x + 12y = 0 & & 1_0 + 1_1 + 1_2 = 0 \\ 20 + 21x + 22y = 0 & \text{ou} & 2_0 + 2_1 + 2_2 = 0 \\ 30 + 31x + 32y = 0 & & 3_0 + 3_1 + 3_2 = 0 \end{array}$$

Escreviam isso como:

$$\begin{array}{c} a_1 + b_1x + c_1y = 0 \\ a_2 + b_2x + c_2y = 0 \\ a_3 + b_3x + c_3y = 0 \end{array}$$

Se as equações fossem consistentes, então:

$$\begin{array}{ccc} 1_0.2_1.3_2 & & 1_0.2_2.3_1 \\ 1_1.2_2.3_0 & = & 1_1.2_0.3_2 \\ 1_2.2_0.3_1 & & 1_2.2_1.3_0 \end{array}$$

Que equivale ao enunciado moderno

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Boyer e Merzback (2012, p. 290) afirmam que a antecipação dos determinantes por Leibniz só foi publicada anos depois, em 1850, tendo que ser redescoberta mais de meio século depois. Fica claro aqui que as matrizes são evidenciadas a partir de equações lineares simultâneas, como propostas pelos chineses. Porém, Leibniz enfatiza a indicação de linhas e colunas de matrizes para compor o método do determinante, este apresentado bem próximo ao que utilizamos atualmente.

O físico francês Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) nasceu em 25 de janeiro de 1736 e morreu em 10 de abril de 1813, por causa do excesso de trabalho e pagamento baixo, vindo ele a sofrer ficando com uma saúde bem debilitada.

Apesar disso, Lagrange foi um dos cientistas matemático e físico mais importantes do final do século XVIII, e ao lado de Euler, fizeram várias críticas à Análise, por meio de sua grande obra Théorie des Functions Analytiques Contenant les Principes du Calcul Différentiel[12], além das importantes atribuições a série de Taylor e ao conceito de função destacada por Lagrange em um livro de 1797.

Lagrange inventou e trouxe maturidade ao cálculo de variações e depois aplicou a nova disciplina para Mecânica Celestial, especialmente para achar soluções melhoradas para o Problema de Três – Corpos.

---

[12] Teoria das funções analíticas que contém os princípios do cálculo diferencial. (Tradução nossa)

Boyer e Merzback (2012, p. 332) evidenciam o trabalho desenvolvido por Lagrange que é o artigo intitulado “Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires[13]”, anunciado em 1773 e publicado em 1795. O qual apresentou resultados analíticos para o cálculo de área de um triangulo e o volume de um tetraedro, denotados respectivamente por A e V.

$$\frac{1}{2!}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ e } \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Essas formas compactas, embora expressas de maneira diferentes, de acordo com Boyer e Merzback (2012), retratam o pensamento de Lagrange, pois neste artigo não tem nenhuma representação, conforme o autor. E assim, os autores corroboram destacando uma fala de Lagrange sobre a solução do problema analítico apresentado no seu artigo.

> Eu alimento a esperança de que a solução que vou dar será de interesse para os geômetras tanto pelos métodos quanto pelos resultados. Essas soluções são puramente analíticas e podem ser compreendidas mesmo sem figuras.” (BOYERE MERZBACK, 2012, p. 332)

Assim, Lagrange fiel à sua promessa ele não apresenta em seu artigo nenhum diagrama como o que consta em Boyer e Merzback (2012), para representar a solução do problema em relação ao cálculo de área de um triangulo e o volume de um tetraedro.

Lima e Pereira (2017, p. 62) afirmam que “Lagrange buscou artifícios analíticos para caracterizar os elementos que compõe as linhas e colunas das matrizes”, querendo mostrar que esses elementos não representavam apenas “números tabulados”.

Algustin Louis Cauchy (1780 – 1857), filho de pais instruídos, ingressou na École Polytechnique[14] em 1805e foi a estrela da década de 1820, apesar de ter nascido no ano da revolução francesa. Segundo Boyer e Merzback (2012, p. 334 – 335) esse francês trabalhou como engenheiro até 1813 e escreveu sobre a Matemática pura e aplicada, vindo destaca-se por produções em Séries Infinitas, Teoria das Funções Reais Complexas, Equações Diferenciais, Probabilidade, Física – Matemática e Determinantes.

---

[13] Soluções analíticas de alguns problemas em pirâmides triangulares. (Tradução nossa)
[14] Universidade Politécnica. (Tradução nossa)

Dentre estas produções destacou-se pelos estudos acerca dos Determinantes, o qual influenciou a apresentar significativas considerações a respeito das matrizes. Lima e Pereira (2017, p. 61 e 62) afirmam que Cauchy:

> [...] foi o matemático que mais desenvolveu estudos acerca dos Determinantes, consequentemente apresentou considerações significativas a respeito das matrizes. Entre as contribuições, a demonstração de um teorema que envolvem ambos os conteúdos. O qual foi proposto da seguinte maneira:
>
> "*Se A e B são matrizes n × n, então | A . B | = | A | . | B |*"
>
> Assim, a partir do teorema exposto, verifica-se que apesar de ele não citar a nomenclatura "ordem", mas considera que A e B são matrizes n × n (classificação intuitiva das matrizes quadradas), caracterizando mais um elemento para construção deste estudo. Além disso, destaca-se a relação entre o determinante e as matrizes, a qual, também foi citada na abordagem feita por Leibniz.

Boyer e Merzback (2012, p. 335) corroboram destacando que Cauchy, no seu artigo de 1812, apresentou o termo "determinante" para aquilo que descreveu como uma classe de funções simétricas alternadas, sendo representada assim: $\mathrm{a}_1\mathrm{b}_2 - \mathrm{b}_1\mathrm{a}_2$. Nesse artigo Cauchy começou com os *n* elementos ou números $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \dots \mathrm{a}_\mathrm{n}$, formando o produto deles, por todas as diferenças de elementos distintos $\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3 \dots \mathrm{a}_\mathrm{n}: (\mathrm{a}_2 - \mathrm{a}_1)(\mathrm{a}_3 - \mathrm{a}_1) \dots (\mathrm{a}_\mathrm{n} - \mathrm{a}_1)(\mathrm{a}_3 - \mathrm{a}_2) \dots (\mathrm{a}_\mathrm{n} - \mathrm{a}_2) \dots (\mathrm{a}_\mathrm{n} - \mathrm{a}_{\mathrm{n}-1})$.

Cauchy define o determinante como sendo a expressão resultante da transformação da potência que aparecia em um segundo índice assim $\mathrm{a}_\mathrm{r}^\mathrm{s}$, e com a mudança ficou assim $\mathrm{a}_{\mathrm{r.s}}$. Com isso, Cauchy escreveu o determinante como $\mathrm{S}(\pm \mathrm{a}_{1.1}\mathrm{a}_{2.2}\mathrm{a}_{3.3} \dots \mathrm{a}_{\mathrm{n.n}})$ e ele dispôs as n^2 diferentes quantidades em uma tabela quadrada semelhante ao usado atualmente, segundo Boyer e Merzback (idem).

James Joseph Sylvester nasceu na cidade de Londres em 03 de setembro de 1814 e faleceu em 15 de março de 1897, em Oxford. Atuou como professor de filosofia e matemática em universidades na Inglaterra e nos Estados Unidos por dois períodos de sua vida acadêmica. Na matemática contribuiu no desenvolvimento da teoria matricial, teoria dos invariantes, teoria dos números, análise combinatória e também nas formas quadráticas.

Boyer e Merzback (2012, p. 380) destaca que três anos após 1838, Sylvester vai ensinar no *University College*[15], em Londres, onde seria colega de seu antigo professor, De Morgan. Bernardes e Roque (2016, p. 9) afirmam que "Entre 1850 e

[15] Faculdade Universitária. (Tradução nossa)

1851, Sylvester publicou uma série de memórias analisando os tipos de interseções e contatos entre duas cônicas e entre duas quádricas.”

De acordo com Bernardes e Roque (idem), foram essas memórias que mostraram uma das principais contribuições de Sylvester, em relação aos trabalhos de outros matemáticos, como o recurso que ele usou ao realizar o cálculo de determinantes menores. Assim, Sylvester fez a generalização da técnica de extração de sistemas de determinantes menores que foi baseada em uma representação em forma de tabela retangular a qual Sylvester denominou de matriz.

Bernardes e Roque (2016) observaram que Sylvester usa a noção de matriz como uma tabela retangular, geradora de vários sistemas de determinantes menores que foram utilizados para classificar o tipo de contato entre duas cônicas.

Como as matrizes não foram o objeto de estudo de Sylvester em suas pesquisas, elas foram inseridas com o propósito de extração de determinantes menores, baseando-se na tabela que envolvia o determinante. Assim, as matrizes foram usadas para ajudar a classificação dos tipos de contatos entre as duas cônicas que Sylvester utilizou.

Temos agora nosso personagem principal, Arthur Cayley, que segundo Boyer (2012) e Bernardes e Roque (2016, p. 11) destacam mais contribuições do personagem que foram:

> [...] reunidas em 13 volumes nos The collected mathematical papers of Arthur Cayley[16], versavam sobre temas em geometria analítica, transformações lineares, matrizes, determinantes, teoria dos invariantes e covariantes, teoria das equações, cálculo, funções homogêneas, equações diferenciais, teoria dos grupos, etc.

Segundo Bernardes e Roque (2016) a noção de matriz foi utilizada pela primeira vez por Cayley, em 1855, no artigo denominado de Remarques sur la notation des functions algébriques[17]. Cayley introduziu uma notação sobre matrizes para representar sistemas lineares e formas quadráticas nesse artigo.

De acordo com Boyer e Merzback (2012, p. 379), Cayley foi o primeiro a estudar matrizes e, três anos após a utilização da notação sobre matrizes em um artigo, este lança uma memória sobre a teoria das matrizes. Essa obra foi recebida em 10 de dezembro de 1857 e lida em 14 de janeiro de 1858.

---

[16] Os papéis matemáticos coletados de Arthur Cayley. (Tradução nossa)
[17] Notas sobre a notação de funções algébricas. (Tradução nossa)

Bernardes e Roque (idem) destacam ainda que Cayley descreve no artigo o conceito de matriz, definiu as operações com matrizes enunciando as propriedades das operações, proclamou e demonstrou um resultado que ele se refere como “teorema notável” e apresenta aplicações desse resultado. O nome desse artigo é A Memoir on the Theory of Matrices[18] a partir da Teoria das Transformações Lineares Simultâneas apresentadas a seguir, nos as restringimos, pois colocamos apenas as partes que foram utilizadas neste trabalho.

Cayley (1858) define matriz como sendo “um conjunto de quantidades dispostas na forma de um quadrado”. O autor as apresentou assim:

“Representação de uma matriz

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}\text{”}$$

Fonte: CAYLEY, 1858, p. 17, tradução nossa

Quanto à definição feita por Cayley temos Matos e Nunes (2014, p. 16) destacando que “[...] ele introduziu uma notação para matrizes, como sendo prática para representar sistemas lineares e formas quadráticas [...]”

E assim Cayley (1858) afirma que “a noção de tal matriz surge naturalmente da notação abreviada para um conjunto de equações lineares”. Apresentadas em seguida.

$$X = ax + by + cz,$$

$$Y = a'x + b'y + c'z,$$

$$Z = a''x + b''y + c''z,$$

Essas equações podem ser representadas por:

“Representação das equaçõespor matriz

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}(x, y, z)\text{”}$$

Fonte: CAYLEY, idem, tradução nossa

O autor afirma ainda que:

> E a consideração de tal sistema de equações leva à maior parte das noções na teoria das matrizes. Ver-se-á que as matrizes (atendendo apenas às da mesma ordem) comportam-se como quantidades únicas; eles podem ser adicionados, multiplicados ou compostos juntos, etc. A lei da adição de matrizes é precisamente semelhante ao da adição de quantidades algébricas ordinárias; no que diz respeito à sua multiplicação (ou composição), existe a peculiaridade de que matrizes não são em geral conversível; no entanto, é

[18] Um livro de memórias sobre a teoria das matrizes. (Tradução nossa)

> possível formar os poderes (positivos ou negativos, integral ou fracionário) de uma matriz, e daí chegar à noção de uma racional e função integral, ou geralmente de qualquer função algébrica de uma matriz (CAYLEY, 1858, p. 17 – 18, tradução nossa)

Essa representação de sistema de equações, segundo Cayley (1958, p. 18), nos leva a representação do conjunto de funções lineares que equivale as quantidades (X, Y, Z), vejamos o procedimento.

$$\big((a, b, c)(x, y, z), (a', \ b', c')(x, y, z), (a", b", c")(x, y, z)\big)$$

Conforme o autor essas quantidades (X, Y, Z) serão:

> “[...] identicamente zero, se todos os termos da matriz são zero, e podemos dizer que é a matriz zero.
>
> $$\begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}\text{”}$$
>
> (CAYLEY, 1858, p. 18, tradução nossa)

Temos aqui, a conhecida matriz nula, chamada por Cayley de matriz zero. A próxima matriz apresentada será a matriz identidade que Cayley identificou em seu artigo assim:

> Novamente, (X, Y, Z) será identicamente igual a (x, y, z), se a matriz for e isso é dito ser a unidade da matriz
>
> $$\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$
>
> Podemos, é claro, quando, por distinção, é necessário, digamos, o zero da matriz ou (conforme o caso) a unidade da matriz de tal ordem. O zero da matriz pode na maioria das vezes ser representado simplesmente por 0, e a matriz unidade por 1. (CAYLEY, 1858, p. 18, tradução nossa)

Feita a observação percebe-se que temos até agora dois importantes resultados, pois até então não havia uma nomenclatura para denominar tais matrizes, apesar de Cayley já a ter utilizadas em 1855. Boyer e Merzback (2012) afirmam que:

> A matriz
>
> $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
>
> que é usualmente denotada por *I*, deixa toda matriz quadrada de segunda ordem invariante por multiplicação; por isso é chamada a matriz identidade para a multiplicação. A única matriz que deixa outra matriz invariante por adição é, evidentemente, a matriz zero
>
> $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
>
> que é, portanto, a matriz identidade para a adição. (BOYER, 2012, p. 379)

E, com essas definições dada por Cayley, ele passou a pensar nas operações sobre as matrizes como nas que envolvem a “Álgebra”. Cayley (1958) aborda as operações de adição e subtração da seguinte forma:

As equações

$$(X, Y, Z) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)(x, y, z), \qquad (X', Y', Z') = \left(\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}\right)(x, y, z)$$

Dar

$$(X + X', Y + Y', Z + Z') = \left(\begin{array}{ccc} a + \alpha, & b + \beta, & c + \gamma \\ a' + \alpha', & b' + \beta', & c' + \gamma' \\ a'' + \alpha'', & b'' + \beta'', & c'' + \gamma'' \end{array}\right)(x, y, z),$$

e isso leva a

$$\left(\begin{array}{ccc} a + \alpha, & b + \beta, & c + \gamma \\ a' + \alpha', & b' + \beta', & c' + \gamma' \\ a'' + \alpha'', & b'' + \beta'', & c'' + \gamma'' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}\right)$$

como regra para adição de matrizes; que para sua subtração é obviamente similar para isso. Uma matriz não é alterada pela adição ou subtração do zero da matriz, ou seja, nós temos $M \pm 0 = M$. (CAYLEY, 1858, p. 19, tradução nossa)

Cayley (1958) aborda em seguida a igualdade de matrizes ao dizer que "A equação L = M, que expressa que as matrizes L, M são iguais, também pode ser escrito na forma L – M = 0, isto é, a diferença de duas matrizes iguais é a matriz zero". Assim, ele uso o termo matriz oposta para explica que:

A equação L = - M, escrita na forma L + M = 0, expressa que a soma das matrizes L, M são iguais à matriz zero, as matrizes assim relacionadas são consideradas opostos um ao outro; em outras palavras, uma matriz cujos termos são iguais, mas oposto em sinal aos termos de uma dada matriz, é dito ser oposto ao dado matriz. (Idem, tradução nossa)

Dando continuidade, observamos agora Cayley (1858, p. 19, tradução nossa) que mostra algumas propriedade da adição, ao afirmar que "É claro que temos L + M = M + L, ou seja, a operação de adição é comutativa, e além disso que (L + M) + N = L + (M + N) = L + M + N, isto é, a operação de adição também é associativa." Temos aqui Cayley organizando o assunto de matriz de forma bem parecida com as quais encontramos nos livros didáticos atuais, impressionante.

Agora, apresentamos a propriedade da multiplicação de uma matriz por um escalar *m*, em que Cayley (1858) expôs no seu trabalho da seguinte forma:

A equação

$$(X, Y, Z) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)(mx, my, mz)$$

escrito sob os formulários

$$(X, Y, Z) = m\left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)(x, y, z) = \left(\begin{array}{ccc} ma, & mb, & mc \\ ma', & mb', & mc' \\ ma'', & mb'', & mc'' \end{array}\right)(x, y, z)$$

Dá

$$\begin{array}{l} m(a,\quad b,\quad c) = (ma,\quad mb,\quad mc) \\ \begin{vmatrix} a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ma', & mb', & mc' \\ ma'', & mb'', & mc'' \end{vmatrix} \end{array}$$

> Como regra para a multiplicação de uma matriz por uma única quantidade. O multiplicador m pode ser escrito antes ou depois da matriz e, portanto, a operação é comutativa. Temos claro que m (L + M) = mL + mM, ou a operação é distributiva.
> Pode-se dizer que as matrizes L e mL são semelhantes umas às outras; em particular, se m = 1, eles são iguais e, se m = -1, são opostos.
> Temos, em particular,
>
> $$\begin{array}{l} m(1,\quad 0,\quad 0) = (m,\quad 0,\quad 0) \\ \begin{vmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0, & m, & 0 \\ 0, & 0, & m \end{vmatrix} \end{array}$$
>
> ou substituindo a matriz no lado esquerdo por unidade, podemos escrever
>
> $$\begin{array}{l} m = (m,\quad 0,\quad 0), \\ \begin{vmatrix} 0, & m, & 0 \\ 0, & 0, & m \end{vmatrix} \end{array}$$
>
> A matriz no lado direito é considerada a quantidade única m considerada como envolvendo a unidade da matriz. (CAYLEY, 1858, p. 19 – 20, tradução nossa)

Antes de Cayley definir matriz transposta, ele fez a seguinte observação em que:

> Uma matriz como
>
> $$\begin{array}{l} (a,\quad b,\quad c) \\ |a',\quad b',\quad c'| \end{array}$$
>
> onde o número de colunas excede o número de linhas, é considerado uma matriz ampla; uma matriz como
>
> $$\begin{array}{l} (a,\quad b) \\ \begin{vmatrix} a', & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \end{array}$$
>
> onde o número de linhas excede o número de colunas, é considerado uma matriz profunda. (CAYLEY, 1858, p. 35, tradução nossa)

Após essa observação, Cayley definiu a matriz transposta da seguinte forma:

> A noção de transposição e o símbolo tr. aplicar a matrizes retangulares, o efeito de uma transposição ser converter uma matriz ampla em uma matriz profunda e reciprocamente. Pode-se notar que o símbolo tr. pode ser usado com a finalidade de expressar a lei da composição de matrizes quadradas ou retangulares. Assim, tratar (a, b, c) como um matriz retangular, ou representando-a por $\begin{array}{c}(a,b,c)\\ |\quad|\end{array}$, temos
>
> $$\mathrm{tr.}\begin{array}{c}(a',\quad b'\quad c')\\ |\quad\quad|\end{array} = \begin{array}{c}(a')\\ \begin{vmatrix} b' \\ c' \end{vmatrix}\end{array}$$
>
> (CAYLEY, 1858, p. 36, tradução nossa)

E assim, Cayley também definiu a matriz simétrica como sendo:

> “Uma matriz como que por transposição é transformada em seu oposto, é dito que é inclinado simétrico.
>
> $$\begin{array}{l} (0,\quad \nu,\quad -\mu) \\ \begin{vmatrix} -\nu & 0 & \lambda \\ \mu & -\lambda & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$
>
> ” (CAYLEY, 1858, p. 31, tradução nossa)

Nosso trabalho se restringe até aqui nas memórias de Cayley, mas, ainda há muito a ser feito e descoberto sobre a história da matriz. Pelo o que fizemos, observamos que a coordenação dessa memória de Cayley não está organizada como a conhecemos atualmente, fato este observado pelas páginas que destacamos do seu trabalho.

Uma das importâncias de se conhecera história dos objetos matemáticos é apresentado por Matos e Nunes (2014, p. 12) ao afirmarem que “[...] tal abordagem pode contribuir para um saber, transcendendo meros processos algorítmicos, pois de um modo geral o professor desconhece o porquê de se estudar matrizes por exemplo.”

Por fim, finalizamos este histórico com uma frase de Rinaldi e Rizzato (2005, p.1) em que registram o seguinte “Charles Hermite registrou as seguintes palavras "talento de Cayley se caracterizou pela clareza e extrema elegância da forma analítica; reforçando por uma capacidade incomparável de trabalho...", mostrando a preocupação britânica com forma e estrutura em álgebra, traços que Cayley apresentou no seu trabalho.

Ressaltamos também que a partir do trabalho realizado por Cayley em relação as matrizes, encontra-se facilmente nos livros didáticos atuais esse assunto; organizado e mantendo ainda as mesmas características e traços que o autor apresentou em 1858, no seu artigo.

3.2. A Inserção das Matrizes nos Livros Didáticos de 1930 a 1980

Iremos nos apoiar aqui na dissertação feita por Lopes (2012), intitulado de “matrizes: história de um conteúdo escolar”. Lopes (2012) processou uma pesquisa bibliográfica referente à como o assunto de matrizes foi inserido nos livros didáticos no período de 1930 a 1980; e com isso ele passa por vários Reformas Educacionais ocorridas no período.

3.2.1. A Reforma Francisco Campos

Ocorreu no período de 1930 com o objetivo de alcançar o país inteiro como nunca havia ocorrido antes. Essa reforma, feita por Francisco Campos foi importantíssima, pois ela possibilitou a realização de uma organização curricular da matemática que foi dividida em dois ciclos, como menciona Ribeiro (2006, p. 30) apud.

Lopes (2012, p. 18) “[...]o ensino secundário, sendo o primeiro com cinco anos de Curso Fundamental e o segundo ciclo com dois anos para os Cursos Complementares”.

Ainda segundo Ribeiro (2006, p. 111) apud. Lopes (2012, p. 19):

> Nos programas de matemática dos Cursos Complementares, foi observada a formação de “blocos de conteúdos” que eram ensinados isoladamente: Aritmética Teórica, Álgebra, Álgebra Vetorial, Geometria, Geometria Analítica e Trigonometria. Esta organização dos Ensinos de Matemática com matérias agrupadas tinha “(...) a finalidade de adaptar os jovens à prestação dos exames de admissão às faculdades correspondentes às opções dos Cursos Complementares.”

Acima, observamos a ausência do assunto de matrizes nos “blocos de conteúdos” proposto pelo programa dos Cursos Complementares e isso ficará claro no quadro 1 que traz as contribuições de alguns livros didáticos sobre o tópicos de matrizes.

Quadro 1 – Como o tópico de matrizes foi inserido nos livros didáticos de 1938 a 1945

O conteúdo de matrizes nos livros didáticos de Matemática dos Cursos Complementares		
AUTOR/ANO	**NOME DO LIVRO**	**CONTRIBUIÇÃO**
CARVALHO, Thales Mello(1938)	Lições de Matemática	A única citação feita no livro, que se aproxima da ideia de Matriz, aparece no capitulo IV, intitulado de Teoria dos Determinantes [...], no intuito de introduzir o processo de cálculo de determinantes de ordem n de n² elementos (LOPES, 2012, p. 41).
LIMA, Gumercindo (1938)	Pontos de Matemática	Ao introduzir a definição de determinante, observamos que em nenhum momento se atribui um nome à disposição dos n² elementos indicados acima. O mesmo ocorre na apresentação dos métodos de Sarrus e de Laplace - embora não mencione o nome deste último - para o cálculo de determinantes. A regra de Cramer foi utilizada como método de resolução de sistemas lineares e não foi observada a presença de matrizes ou de algo semelhante a esta ideia. (LOPES, 2012, p. 46).
CASTRO, J. E.; MAURER, W. A. (1942)	Exercícios de Matemática, Curso Pré – Politécnico	Este é o primeiro fascículo da obra voltada para o curso Pré-Politécnico que aborda exercícios de determinantes, limites e séries. [...]As matrizes não foram mencionadas em nenhum dos exercícios do livro que tratava dos conteúdos descritos acima. (LOPES, 2012, p. 47 – 48)
SERRÃO, Alberto Nunes (1945)	Análise Algébrica	[...] é mencionado o conceito de matriz quadrada no subitem “Definição de

		determinante” no capítulo 3 intitulado “Determinantes” [...] são definidos os significados de diagonal principal e secundária do quadro que contém n linhas e n colunas. No capítulo IV que trata dos sistemas lineares, o primeiro subitem descrito como “Generalidades” apresenta um quadro com m linhas e n colunas, denominado matriz retangular de mn quantidades, que será chamada de matriz do sistema [...] (LOPES, 2012, p. 42).

Fonte: Adaptado de Lopes (2012)

Após as observações das contribuições feitas nos livros didáticos, nesse período, sobre o conteúdo de matrizes, percebemos que este assunto era trabalhado de forma bem secundária, com o único intuito de se ajudar no cálculo de Determinantes e Sistemas lineares.

3.2.2. A Reforma Gustavo Capanema e a Matemática no Curso Colegial

Criado na década de 40, os Cursos Clássicos e Científicos vieram reorganizar o Ensino Secundário no Brasil. Esse curso aumentou de 2 anos para 3 o segundo ciclo do Ensino Secundário, conforme destaca Lopes (2012, p. 48) e com isso, buscou aperfeiçoar e melhorar a formação de estudante.

Valente (2010b, p. 6, apud LOPES, 2012) aborda também as transformações que ocorreram na organização dos conteúdos de matemática ao destacar que “Ocorreu um processo de agrupamento, seriação e criação de “unidades didáticas” interligadas, dentro dos ramos matemáticos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria”.

Dessa organização curricular se fez necessário a produção de novos livros didáticos que atendessem, agora, as três séries dos Cursos Clássicos e Científicos que tendia a geração de unidades didáticas. Lopes (2012, p. 51) afirma que “[...] Na análise das obras a seguir, observamos que o tema matrizes é mencionado em livros de 2ª série para o colegial ao tratar da teoria dos determinantes e da resolução de sistemas de equações lineares”.

É isso que veremos a partir de agora no quadro 2 que traz as contribuições de três livros publicados no período pesquisado.

Quadro 2 – Como o tópico de matrizes foi inserido nos livros didáticos de 1949 a 1954

O conteúdo de matrizes nos livros didáticos de Matemática dos Cursos Clássico e Científico		
AUTOR/ANO	**NOME DO LIVRO**	**CONTRIBUIÇÃO**
ROXO, Euclides. et. al.(1949)	Matemática 2º Ciclo – 2ª série	Nesta 4ª edição voltada para os estudantes da 2ª série, foram apresentadas as seguintes partes que estão inseridas na disciplina Matemática: Álgebra, por Cesar Dacorso Neto; Geometria, por Euclides Roxo e Trigonometria elaborada por Roberto Peixoto. [...] Observando ainda a apresentação dos programas da segunda série, verifica-se que o conteúdo “matrizes” não aparece em nenhum dos tópicos. [...] Assim, o livro não faz menção a matrizes no que diz respeito às operações, propriedades e a seus vários tipos, antecipando-se ao estudo de determinantes, como é comum nos livros atuais. (LOPES, 2012, p. 53 – 54)
MAEDER, Algacyr Munhoz. (1951)	Curso de Matemática	No capítulo VIII, que trata da teoria dos determinantes, o 4º e 5º itens se intitulam “Matrizes” e “Matriz quadrada”, respectivamente. [...] esta publicação apresenta a mesma definição de uma matriz qualquer, e a representação de seus elementos com uma letra e dois índices. [...] Ao final dos capítulos VIII e IX, foram propostos cinquenta exercícios que não citam em nenhum de seus enunciados o termo “matriz” (LOPES, 2012, p. 55)
NETTO, F. A. L. (1954)	Teoria Elementar dos Determinantes	No prefácio da 1ª edição da obra que data de 1943, o autor critica a falta de compêndios adequados que contemplem os programas estabelecidos [...] O conteúdo do livro não aborda o conteúdo “matrizes” como um objeto matemático que possui propriedades específicas, operações etc. A abordagem deste tema é feita de forma semelhante aos dois livros analisados anteriormente. [...] No entanto, no prefácio da última edição desta obra, que data de 1954, o autor promete aos leitores que futuramente os capítulos “Determinantes Cúbicos”, “Determinantes Infinitos” e “Determinantes Funcionais” podem ser inseridos “(...) em um compêndio que estamos escrevendo, sobre matrizes.” (LOPES, 2012, p. 59)

Fonte: Adaptado de Lopes (2012)

Assim como na Reforma Francisco Campos, o assunto de matrizes na Reforma Gustavo Capanema continuou a ser utilizado como pré-requisito, para se estudar o assunto de Determinantes e Sistema Lineares. E isso está bem claro nas contribuições que Lopes (2012) fez, mostrando como o assunto de matrizes era visto pelos programas e tratados pelos autores da época.

3.2.3. Os Programas Mínimos

Os "Programas Mínimos" criado em 1951, estabelecia um limite inferior em que todas as instituições estariam sujeitas e teriam condições de executá-los. Segundo Lopes (2012, p. 59).

> [...] esta proposta não está veiculada somente à ideia de redução de conteúdos, mas também à flexibilização na elaboração de programas que cada região do país pode propor a partir dos *programas mínimos*, levando em conta suas especificidades.

Temos a partir daqui a unificação dos programas de matemática que antes eram destinados aos cursos clássico e científico, vindo a ser bastante criticado por causa das modificações nas organizações dos conteúdos.

Mesmo ocorrendo a unificação dos programas de matemática, percebe-se que as matrizes ainda não seriam vistas como conteúdo. O quadro 3 traduz nossas observações.

Quadro 3 – Como o tópico de matrizes foi inserido nos livros didáticos de 1952 a 1962

O conteúdo matrizes nos livros didáticos de Matemática dos Programas Mínimos		
AUTOR/ANO	**NOME DO LIVRO**	**CONTRIBUIÇÃO**
CARVALHO, Thales Mello (1952)	Matemática para os cursos clássico e científico – 2º ano	No capítulo III, deste livro, que aborda a teoria dos determinantes, são introduzidos o conceito de matriz quadrada e a representação dos seus elementos indicados com uma letra e dois índices, define-se o que é diagonal principal e secundária, e é descrito o conceito de matriz simétrica. O capítulo seguinte, que trata dos sistemas de equações lineares, apresenta a matriz dos coeficientes das incógnitas de um sistema de m equações e n incógnitas no 5º item que aborda a "Discussão de um sistema de *m* equações lineares com *n* incógnitas", objetivando, em seguida, definir *característica da matriz*. Nos exercícios dos capítulos III e IV, as matrizes não são mencionadas nos enunciados. (LOPES, 2012, p. 63)
ABDELHAY, J. (1956)	Matemática para os candidatos às escolas superiores.	No capítulo II intitulado de "Determinantes", são fornecidos conceitos semelhantes aos livros didáticos analisados até aqui, tais como: matriz qualquer, matriz quadrada e matrizes completa e incompleta de um sistema. Além disso, esta obra oferece um dado novo em seu conteúdo no que diz respeito às matrizes comparado às obras anteriores. Na seção de "Exercícios", o primeiro exercício define *Matrizes equivalentes* [...]. No entanto, o conceito de matriz

		equivalente não é utilizado posteriormente como forma alternativa para a resolução de sistemas lineares, conhecido hoje por *método do escalonamento de matrizes*. No capítulo 3 que trata dos sistemas lineares, são apresentadas as definições de matrizes completa e incompleta do sistema no item 3.3 “Matrizes de um sistema”. (LOPES, 2012, p. 66 a 67)
QUINTELLA, A. (1962)	Matemática segundo ano colegial. 10ª edição	As primeiras definições apresentadas na unidade III que trata dos Determinantes são de matriz, matriz quadrada, ordem de uma matriz, diagonal principal e diagonal secundária. A representação genérica dos elementos da matriz é feita de forma distinta das publicações anteriores: cada coluna é representada com uma letra fixa, seguida de um índice que indica o número da linha que se encontra tal elemento. No exemplo dado de uma matriz de 3 linhas e 4 colunas, a 1ª coluna da matriz é composta pelos elementos a_1, a_2, a_3, a 2ª coluna pelos elementos b_1, b_2, b_3 e assim por diante. O assunto Matriz volta a ser mencionada brevemente no estudo dos sistemas lineares de *m* equações e *n* incógnitas no subitem “Determinante principal”, ao afirmar que “os coeficientes das incógnitas formam a matriz de m.n elementos”. Na última seção do capítulo III intitulada “Questões de Concurso de Habilitação”, foram apresentadas doze questões de concursos propostas por instituições de ensino superior para seleção de candidatos aos seus cursos. Nestas questões, o conteúdo de matrizes não estavam presentes. (LOPES, 2012, p. 65 a 66)

Fonte: Adaptado de Lopes (2012)

Analisando o quadro 3, percebemos que o assunto de matrizes continuou tendo os mesmos olhares que os programas anteriores lhes atribuíam. Assim pouquíssima ou nenhuma mudança houve deste para os demais programas, referente ao assunto abordado aqui.

3.2.4. O Movimento Matemática Moderna no Brasil e suas Influências

No início da década de 60, no Brasil, ocorreram profundas mudanças no ensino da Matemática, devido a chegada das novas diretrizes trazidas pelo movimento internacional que ficou conhecido como “Movimento Matemática Moderna” (MMM).

Segundo Godoy e Santos (2012, p. 259) esse movimento tinha a finalidade de:

> [...] modernizar o ensino dessa área do conhecimento, adequando-a às necessidades de expansão industrial que orientavam a reconstrução no pós-guerra, e atendendo às exigências de uma sociedade em acelerado avanço tecnológico.

Desse modo, concordando com Godoy e Santos (2012), temos Lopes (2012, p. 68) destacando o surgimento desse movimento:

> A partir do final dos anos 50, os programas e as metodologias no ensino de Matemática passariam a ser transformados consideravelmente devido às propostas de mudança no ensino apresentadas no livro *L´enseignement des mathématiques*[19] – lançado em 1955 pelo CIEAEM (*Commission internationale pour l´étude et l´amélioration de l´enseignement des mathématiques*[20]) – ganharem força em nível internacional.

Segundo Lopes (2012) a aceitação das ideias contidas nesse livro ocorreria a partir de 1957, nos II, III e IV Congresso Brasileiro de Ensino de Matemática. O II Congresso Brasileiro de Ensino de Matemática apenas ratificou os Programas de Matemática que haviam sidos aprovados no congresso anterior, ocorrido em 1955, sem nenhuma mudança com relação ao assunto de matrizes.

No III Congresso Brasileiro de Ensino de Matemática ocorrido em 1959 na cidade do Rio de janeiro, pouca mudança com relação ao currículo se observou. Porém, houve uma importante recomendação aos professores que realizassem experiências no curso secundário (o que equivale ao Ensino Médio), com relação à introdução de noções da Matemática Moderna e os resultados colhidos das observações deveriam ser apresentados no IV Congresso.

Godoy e Santos (2012, p. 261) afirmam que “O MMM tinha como um de seus propósitos modernizar a linguagem dos assuntos considerados imprescindíveis na formação do jovem estudante usando os conceitos de conjunto e de estruturas”, pois foi somente no IV Congresso que as matrizes ganharam status de assunto com as estruturas algébricas das operações com matrizes.

Destacamos que foi no IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, realizado em junho de 1962, na cidade de Belém do Pará que se colocou em pauta, pela primeira vez, o problema da introdução da Matemática Moderna no Ensino Secundário. A coordenação e divulgação da introdução do MMM ficou a cargo do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), fundado em outubro de 1961 por professores universitários e secundários de Matemática, psicólogos e pedagogos.

---

[19] Ensino de matemática. (Tradução nossa)

[20] Comissão Internacional para o Estudo e Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática. (Tradução nossa)

De acordo com Godoy e Santos (2012, p. 261) esse movimento foi responsável por mobilizar:

> [...] a comunidade de professores e pesquisadores do ensino da Matemática e deu início a uma nova etapa no processo de organização curricular da Matemática escolar e também na produção de materiais destinados aos professores.

Foi nesse contexto que o assunto de Matrizes passa a ser trabalhado separadamente dos assuntos de Determinantes e Sistemas Lineares; devido ao forte empenho do professor Sangiorgi que se destacou na elaboração e divulgação de materiais de apoio pelo GEEM.

Lopes (2012, p. 73 a 74) destaca que houve parceria do GEEM com outras instituições para produzirem materiais didáticos:

> [...] Em parceria com o IBECC[21], o GEEM produz o livro "Matemática Moderna para o ensino secundário" em 1962, que foi direcionado à atualização dos professores de matemática. Nesta obra, é seguida a proposta dos assuntos mínimos citados anteriormente, bem como orientações metodológicas de como tratar os conteúdos sob o novo olhar moderno da matemática. Na 2ª edição, que data de 1965, um dos capítulos se intitula "Introdução elementar de matrizes no curso colegial" elaborado por Ruy Madsen Barbosa (GEEM, 1965, p. 207 - 242). O capítulo seguinte, elaborado por Carlos Alberto Callioli, trata da "Resolução de sistemas de equações lineares por matrizes" (GEEM, 1965, p. 243-258).

De tal modo, a partir da organização curricular proposta pelo GEEM, sobre os conteúdos é que foi proposto a formação para professores, utilizando os materiais produzidos pelo grupo, sendo que esse material fornecia agora novas perspectivas para o ensino de determinantes e sistemas lineares, como demonstra o quadro 4.

Quadro 4 – Como o tópico de matrizes foi inserido nos livros didáticos de 1968 a 1978

O conteúdo de matrizes nos livros didáticos de Matemática em tempos do Movimento da Matemática Moderna no Brasil		
AUTOR/ANO	**NOME DO LIVRO**	**CONTRIBUIÇÃO**
NETO, Scipione Di Pierro; ROCHA, Luiz Mauro; BARBOSA, Ruy Madsen. (1968)	Matemática 2 – Curso Colegial Moderno	O estudo das matrizes está inserido no capítulo V da obra com os seguintes subitens: elementos das matrizes; igualdade de matrizes; matriz diagonal, escalar e transposta; operações com matrizes: adição e multiplicação de matrizes. Na introdução do capítulo V que trata das matrizes, [...] o autor destaca a importância do ensino de tal conteúdo. São apresentados dois métodos de resolução dos sistemas lineares no capítulo VI. O primeiro consiste na utilização de determinantes pela regra de Cramer e o segundo introduz o conceito de matriz inversa para em seguida desenvolver o

[21]Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura.

		processo de triangularização de matrizes. (LOPES, 2012, p. 86 e 91)
CAROLI, CALLIOLI, FEITOSA. (1971)	Matrizes e Sistemas Lineares	Todo o conteúdo de “Matrizes” é abordado no primeiro e segundo capítulos possuindo os seguintes tópicos: Noção de matriz; Adição de matrizes; produto de um número real por uma matriz; Somatórias; Produto de matrizes; Matriz transposta; Matrizes simétricas e anti-simétricas; Matrizes invertíveis. Tanto após o primeiro tópico “Noção de matriz”, quanto no segundo que trata da “adição de matrizes”, foram apresentados alguns exercícios seguidos de resposta. No terceiro capítulo que trata da resolução de sistemas lineares através das matrizes, é necessária a definição de *matrizes equivalentes*, para que, em seguida, seja apresentada a resolução pelo método que conhecemos hoje por “escalonamento”. (LOPES, 2012, p. 83)
CASTRUCCI, Benedito. et al. (1976)	Somatórios, Produtórios, Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares – 3ª edição	[...] ao contrário das publicações até aqui observadas, nesta obra há um capítulo (capítulo II) exclusivo para o assunto “matrizes”. Este capítulo apresenta os seguintes itens: introdução; igualdade de matrizes; adição de matrizes; multiplicação de um número real por uma matriz; multiplicação de matrizes; transformações elementares e matrizes equivalentes; matriz inversa. Na introdução, trabalha-se inicialmente com a noção de matriz, fornecendo um exemplo de tabela que, segundo o autor, aparece frequentemente nas páginas de esporte: os times de futebol nas linhas e nas colunas a indicação do número de jogos, de vitórias, empates, derrotas, pontos ganhos, e pontos perdidos. Com este exemplo e outro logo a seguir, é colocada a ideia de localização de um elemento da matriz. Depois de estabelecidas as noções, a introdução é dividida em subitens, tais como: definição (de matriz), definição de matriz nula, definição de matriz identidade de ordem n, exercícios resolvidos. O item “igualdade de matrizes” apresenta os seguintes subitens: definição, exercícios. Já em “adição de matrizes”, observamos os subitens: definição, definição de matriz oposta, propriedades da adição. Em “multiplicação de um número real por uma matriz”, temos a seguinte divisão: definição, propriedades da multiplicação de um número real por uma matriz, exercícios resolvidos. O 5º item “multiplicação de matrizes” possui os subitens: definição, propriedades, matriz diagonal, matriz escalar, matriz transposta,

		propriedades da transposição de matrizes, matriz simétrica, matriz anti-simétrica, exercícios resolvidos. No tópico “transformações elementares e matrizes equivalentes”, temos os subitens: “Uma matriz B é transformada elementar de uma matriz A, se e somente se: ...” e definição (matriz equivalente). O último tópico do capítulo II, intitulado de “matriz inversa”, apresenta os subitens: definição de matriz singular, definição de matriz não singular, definição (matriz quadrada), métodos de determinação de matriz inversa, definição de matriz adjunta. Ao final do capítulo foram propostos quatorze exercícios, que requisitaram o entendimento dos diversos assuntos abordados no capítulo. [...] No prefácio, o autor menciona que “Os sistemas lineares foram estudados pelas matrizes como é usual atualmente e, também, de modo clássico, pelos determinantes”. Esta nova abordagem para a resolução de sistemas se encontra no capítulo IV “Sistemas de equações lineares” que possui como subitens “Sistemas equivalentes”, “Resolução de um sistema pelas matrizes” e “Método geral de resolução”. (LOPES, 2012, p. 76 – 77)
BOULOS, Paulo; WATANABE, Renate. (1976)	Matemática – 2º Grau – Vol. 2	[...] são abordados seis tópicos: definição de matriz; igualdade de matrizes, adição de matrizes; multiplicação de uma matriz por um número real; multiplicação de matrizes; e Matrizes – parte final que expõe alguns tipos de matrizes, tais como, diagonal, transposta e simétrica. O primeiro grupo de exercícios (grupo 1) apareceu depois de serem apresentadas a “definição de matriz” e a “igualdade de matrizes”, seguidos de dois exercícios resolvidos. Assim, após a apresentação de alguns tópicos do capítulo, surge o grupo de exercícios para fixar os conteúdos vistos até aquele momento. Neste capítulo de matrizes, foram apresentados seis grupos de exercícios. No segundo tópico do segundo capítulo, que trata dos “sistemas lineares”, é ressaltado que a resolução de um sistema linear será trabalhada a partir do conceito de matriz completa do sistema. Como ocorre com a obra anteriormente analisada, o enfoque da resolução dos sistemas lineares muda com a introdução do estudo das matrizes, que neste caso, recorre às ideias de forma matricial do sistema e de matriz inversa. O primeiro grupo de exercícios propostos apareceu neste capítulo após os tópicos “Introdução” e “Matrizes associadas a um

		sistema", seguidas do "exercício resolvido" acima. O último grupo de exercícios abordou tema "inversão de matrizes" com um exercício que pedia para determinar, caso existisse, a inversa de matrizes dadas. Na introdução do terceiro capítulo intitulado de "Determinantes", os autores destacam que a atual ordem didática "matrizes – sistemas lineares – determinantes" se diferencia da histórica "sistemas lineares – determinantes – matrizes", além de afirmar que os determinantes não constituem, nos tempos atuais, uma ferramenta prática para a resolução de sistemas lineares. (LOPES, 2012, p. 78, 79, 80)
IEZZI, Gelson. et al. (1976)	Matemática: 2ª série, 2º grau	No índice do livro é destacado um capítulo à parte para o estudo das matrizes (capitulo 3), contendo os seguintes subitens: noção de matriz; representação; igualdade de matrizes; operações: adição, multiplicação de um número por matriz, multiplicação de matrizes; matriz inversa. O primeiro parágrafo do capítulo expõe a justificativa do estudo das matrizes na escola secundária, que se apóia no argumento relacionado às aplicações deste objeto matemático nos vários ramos da ciência e na resolução dos sistemas lineares. No capítulo seguinte, que trata dos sistemas lineares (capitulo 4), são introduzidos os conceitos de matriz associada a um sistema, matrizes equivalentes, método da eliminação e transformações de matrizes. Esses conceitos, inseridos no subitem "Resolução de sistemas lineares", foram aplicados na resolução dos sistemas lineares, na classificação de um sistema quanto ao número de soluções e para realizar a discussão dos sistemas lineares. [...] (LOPES, 2012, p. 83, 84 – 85)
LEMOS, Aluisio Andrade. (1978)	Matemática: álgebra, geometria e trigonometria: 2º grau	Este livro apresenta no capítulo "Matrizes, Determinantes, Sistemas Lineares", o subtítulo "matrizes" com os seguintes itens: *definição; representação, matriz quadrada; igualdade de matrizes; adição de matrizes; diferença de matrizes; produto de um número real por uma matriz; produto de matrizes.* Neste capítulo, a primeira seção de exercícios propostos apareceu após a apresentação dos itens *definição e representação*. A segunda seção de exercícios foi colocada para reforçar o entendimento dos itens *matriz quadrada; igualdade de matrizes; adição de matrizes; diferença de matrizes; produto de um número por uma matriz.* A última seção abordou o produto de matrizes.

		A definição de *matriz inversa* não foi mencionada. Além disso, no capítulo que trata dos sistemas lineares, o livro não apresenta a resolução dos sistemas lineares através do escalonamento de matrizes e sim, pelo modo clássico no uso dos determinantes. Desta maneira, esta obra traz consigo elementos contraditórios no que diz respeito à apresentação das matrizes para o ensino secundário no período em que ela se insere. Apesar de expor toda a álgebra das matrizes e os seus diversos tipos, não é feita uma ligação deste estudo com a resolução de sistemas lineares que, por sua vez, se apoiou exclusivamente no Teorema de Cramer em seu desenvolvimento. (LOPES, 2012, p. 91 – 92)

Fonte: Adaptado de Lopes (2012)

Diferentemente dos demais programas já vistos, encontramos aqui as Matrizes sendo tratadas como assunto e não mais como pré requisitos para o estudo de Determinantes e Sistemas Lineares.

Aqui percebemos que o assunto de Matrizes “ganha” finalmente sua independência e passa a ter nas obras de Matemática um capítulo só para si. Isso é importante, pois nos programas anteriores o assunto não era explorado. Atualmente as obras trazem as operações com matrizes, com suas propriedades e exercícios que passam agora a fazerem sentido para os estudantes que relacionam o conteúdo com seu cotidiano, ainda de forma tímida.

O Movimento da Matemática Moderna (MMM) foi importantíssimo para a divulgação do assunto de Matrizes, pois atualmente percebemos essa influência no nosso dia a dia.

3.3. Aspectos Curriculares Sobre o Ensino de Matrizes

Na Matemática do Ensino Médio temos a necessidade de trabalharmos os conteúdos privilegiando a apropriação cientifico cultural, indo em direção a novas descobertas. Aqui temos a finalidade de apresentar o estudo com Matrizes, sua aplicabilidade no meio científico e a importância que esse conteúdo tem tido em outras áreas e em documentos oficiais como nos PCN (1997), PCNEM (2000), PCN+ (2002), OCEM (2006) e BNCC (2018).

Aqui também ressaltamos a importância que as avaliações de larga escala têm como: o Sistema de Avaliação Básica (Saeb), o Sistema Paraense de Avaliação

Educacional (SisPAE) e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), este último criado pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) para testar o nível de aprendizado dos estudantes que cursam o ensino médio no Brasil.

Para isso, trazemos Mello (2014, p. 1) afirmando que “currículo é tudo aquilo que uma sociedade considera necessário que os alunos aprendam ao longo de sua escolaridade”. Com isso Sacristán (1998, p. 15 e 16) apud. Pires (2013, p. 31 e 32) apresenta uma outra abordagem em que currículo:

> [...] é uma práxis antes que um objeto estático emanado de um modelo coerente de pensar a educação ou as aprendizagens necessárias das crianças e dos jovens, que tampouco se esgota na parte explícita do projeto de socialização cultural nas escolas. É uma prática, expressão da função socializadora e cultural que determinada instituição tem, que reagrupa em torno dele uma série de subsistemas ou práticas diversas, entre as quais se encontra a prática pedagógica desenvolvida em instituições escolares que comumente chamamos ensino.

Pires (2013, p. 32) destaca a diferença ainda existente entre ela e aquela concepção de que “currículo é simplesmente o processo centrado na definição de objetivos e conteúdo a serem trabalhados em cada etapa da escolaridade”. O currículo definido pelos autores não é imparcial, mas é social e culturalmente definido passando a refletir uma concepção de mundo, de sociedade e de educação.

Assim, com esse olhar que o currículo nos apresenta damos passagens para mostrarmos que os documentos oficiais proporcionam essas mesmas características, definindo interesses que o currículo defende e que são cruciais para qualquer sociedade.

O primeiro deles é o Parâmetros Curriculares Nacionais (1997, p. 19) do ensino fundamental onde destaca-se que:

> [...] a Matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar. A Matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente. A atividade matemática não é olhar para coisas prontas e definitivas, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade. O ensino da Matemática deve relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras) e também relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, deve favorecer conexões com outras disciplinas, com o cotidiano do aluno e também conexões com os diferentes temas matemáticos. O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem.

Esse documento já reconhecia a importância do ensino e aprendizagem da matemática no Ensino Fundamental para que os estudante relacionassem os novos conceitos no Ensino Médio, os quais já tinham sido ensinados. Isso é fundamental para o Ensino de Matrizes, pois nesse conteúdo verificamos que é imprescindível que os estudantes tenham boas noções das quatro operações; das frações; dos números decimais; das equações e sistemas de equações do primeiro e segundo graus e; saber ler e interpretar tabelas e gráficos estatísticos, por exemplo. Tudo isso irá ajuda-los na compreensão do nosso produto de ensino.

Temos também a contribuição de Corrêa (2019, p. 28) que destaca:

> [...] a importância de o aluno ter conseguido adquirir todo o conhecimento matemático necessário durante o Ensino Fundamental, pois muito do que se aprendeu nesse período é utilizado com frequência no Ensino Médio, devendo-se destacar, inclusive a importância de revisar o conteúdo do Ensino Fundamental no início do Ensino Médio e sempre que se fizer necessário. São estes conteúdos básicos e a forma como foram ministrados e absorvidos pelos estudantes no Ensino Fundamental, quando foram, que dão a base e podem determinar, ou não, a empatia pela matéria, influenciando diretamente no rendimento dos estudantes. As questões surgem à medida que se aumentam as situações vivenciadas em sala.

Os PCNEM (2000, p. 52) fazem um importante destaque sobre os conhecimentos prévios que os estudantes trazem, eles afirmam que essa bagagem é importante para o aprendizado científico e matemático.

> [...] Os alunos chegam à escola já trazendo conceitos próprios para as coisas que observam e modelos elaborados autonomamente para explicar sua realidade vivida, inclusive para os fatos de interesse científico. É importante levar em conta tais conhecimentos, no processo pedagógico, porque o efetivo diálogo pedagógico só se verifica quando há uma confrontação verdadeira de visões e opiniões; o aprendizado da ciência é um processo de transição da visão intuitiva, de senso comum ou de auto – elaboração, pela visão de caráter científico construída pelo aluno, como produto do embate de visões.

Entre os educadores há um consenso, no processo de autonomia dos estudantes, que é “à necessidade de se adotarem métodos de aprendizado ativo e interativo” (BRASIL, idem) e que façam esses estudantes se envolverem mais nas aulas. Ainda segundo esse documento o professor e a escola contribuem no aprendizado dos estudantes ao fazerem a ligação do processo complexo de ensino.

> [...] o professor e a escola contribuem permitindo ao aluno se comunicar, situar-se em seu grupo, debater sua compreensão, aprender a respeitar e a fazer-se respeitar; dando ao aluno oportunidade de construir modelos explicativos, linhas de argumentação e instrumentos de verificação de contradições; criando situações em que o aluno é instigado ou desafiado a participar e questionar; valorizando as atividades coletivas que propiciem a

> discussão e a elaboração conjunta de idéias e de práticas; desenvolvendo atividades lúdicas, nos quais o aluno deve se sentir desafiado pelo jogo do conhecimento e não somente pelos outros participantes. (BRASIL, idem)

Nesse contexto, apresentamos as finalidades do ensino de Matemática no nível médio e os objetivos para que o ensino dessa disciplina venha resultar em aprendizagem real e significativa para os estudantes, como:

> • compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
> • aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
> • analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
> • desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
> • utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
> • expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
> • estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
> • reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
> • promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (BRASIL, 2000, p. 43)

Esse documento chama atenção para os aspectos de formação dos estudantes em relação ao desenvolvimento de valores, habilidades e atitudes no que se refere aos colegas e professores. Essa preocupação com esses valores, habilidades e atitudes são vistas como centrais na educação, pois são elas que permitem (ou impossibilitam) a aprendizagem e isso ocorre independente de conteúdo e de metodologias, segundo os PCNEM (2000).

No quadro 5 apresentamos as competências e habilidades que os estudantes devem estudar com relação a Matemática ensinada no ensino médio.

Quadro 5 – Competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática segundo os PCNEM

COMPETÊNCIAS	HABILIDADES
Representação e comunicação	•Ler e interpretar textos de Matemática. **• Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc).** **• Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.**

	• Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta. • Produzir textos matemáticos adequados. •Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação. • Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.
Investigação e compreensão	• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc). • Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema. • Formular hipóteses e prever resultados. • Selecionar estratégias de resolução de problemas. • Interpretar e criticar resultados numa situação concreta. • Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos. • Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades. • Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.
Contextualização sócio – cultural	**• Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.** **• Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.** **• Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.** • Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

Fonte: Autoria própria (2020 - **grifos nosso**)

Os destaque que fizemos acima revela traços onde se faz sentido estudar o assunto de matrizes, sua importância na representação e comunicação e, no contexto socio cultural. Essas competências munidas de suas habilidades nos mostram os caminhos que devemos seguir quando os estudantes nos questionam com as perguntas: para que serve esses assunto? ou onde vamos utilizar esse assunto?

Os PCN+ (Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais/2002) são vistos como complementações aos PCNEM (2000), destacando o ensino e a aprendizagem de Matemática no Ensino Médio como algo que deve ser feito de forma contextualizada, integrada e relacionado as competências e habilidades dentro desse âmbito e com outras matérias.

Observamos que apenas na primeira e na última competência temos habilidades que lembram o assunto de Matrizes. Aqui fica claro que apesar do avanço que esse conteúdo teve nos últimos anos, ele continua sem espaço nos documentos oficiais.

As Orientações Curriculares para o Ensino (2006, p. 77 e 78) é outro documento, no qual observamos o conteúdo de matrizes posto de uma maneira superficial através do uso das planilhas eletrônicas, que servem para manipular tabelas. Esse documento afirma que:

> No estudo de sistemas de equações, além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas, é recomendável colocar a álgebra sob o olhar da geometria. A resolução de um sistema 2 X 2 de duas equações e duas variáveis pode ser associada ao estudo da posição relativa de duas retas no plano. Com operações elementares simples, pode-se determinar a existência ou não de soluções desse sistema, o que significa geometricamente os casos de intersecção/coincidência de retas ou paralelismo de retas. A resolução de sistemas 2 X 3 ou 3 X 3 também deve ser feita via operações elementares (o processo de escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem solução). Quanto à resolução de sistemas de equação 3 X 3, a regra de Cramer deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única. Dessa forma, fica também dispensado o estudo de determinantes.

Temos aqui mais um documento que não trata em nenhum momento do assunto de Matrizes, porém, este assunto é pré requisito para o estudo dos Determinantes e Sistemas Lineares e, isso não está posto na citação a cima.

As diretrizes da educação brasileira apontam para o desenvolvimento de competências que envolvem: raciocinar, representar, comunicar e argumentar. Elas não têm uma ordem preestabelecida, ou seja, rigorosa, porem o desenvolvimento de uma requer a mobilização de outra. Nesse ponto, para serem desenvolvidas ou exploradas pelos estudantes, elas necessitam de que o conceito de Matrizes esteja claro ou relacionado a outros conteúdos matemáticos.

A relação entre conteúdos matemáticos devem estabelecer um melhor entendimento por parte dos estudantes, tais como aparecem nas habilidades: “Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra”. (BRASIL, 2018, p. 539)

O quadro 6 apresenta algumas habilidades e competências, as quis a Base Nacional Comum Curricular (BNCC/2018) define como sendo um conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica.

Quadro 6 – Habilidades e competências referentes a matrizes segundo a BNCC

HABILIDADES	COMPETÊNCIAS	CONTEÚDO ASSOCIADO
(EM13MAT301)	Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem **equações lineares simultâneas**,	- Identificação, representação, elaboração e

	usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	solução de **equações lineares**.
(EM13MAT404)	Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	- Representações algébricas de funções por meio de sentenças.
(EM13MAT406)	**Construir e interpretar tabelas** e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e **álgebra**.	- Construir e interpretar tabelas e gráficos.
(EM13MAT501)	**Investigar relações entre números expressos em tabelas** para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.	- Função polinomial do 1º grau. - Relações entre números expressos em tabelas para identificar padrões e fazer conjecturas.
(EM13MAT502)	**Investigar relações entre números expressos em tabelas** para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.	- Função polinomial do 2º grau. - Relações entre números expressos em tabelas para identificar padrões e fazer conjecturas.

Fonte: Autoria própria (2020 - **grifos nosso**)

Neste documento não encontramos claramente o assunto de Matrizes, porém, em suas competências visualizamos o uso desse assunto em outros conteúdos da matemática, o que nos mostra a não abrangência do assunto de Matrizes no documento que agora é lei e que está sendo implantado em todas as escolas públicas do Brasil.

No Brasil o governo federal e estadual, no caso do Pará, criaram sistemas de avaliações em larga escala para aferir o desempenho dos estudantes na educação básica. O Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) é composto por um conjunto de avaliações externas, em larga escala, na coleta de dados e permiti que o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) realize um diagnóstico completo da educação básica e, de fatores que interferem no desempenho dos estudantes, conforme apresentamos no quadro 7.

Quadro 7 – Habilidades e competências de Matrizes segundo o Saeb

HABILIDADES	COMPETÊNCIAS	CONTEÚDO ASSOCIADO
D9	Relacionar a determinação do ponto de interseção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas	- Sistema de equações com duas incógnitas
D17	Resolver problema envolvendo equação do 2.º grau	- Problemas de equações do 2º grau
D18	Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela	- Representação de uma função por meio de uma tabela.
D31	**Determinar a solução de um sistema linear, associando-o a uma matriz**	**- Solução de um Sistema Linear associado a matriz**
D34	Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos	- Problemas envolvendo tabelas e gráficos.
D35	Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa	- Problemas presentes em tabelas simples e gráficos.

Fonte: Autoria própria (2020 - **grifo nosso**)

Neste sistema de avaliação percebemos uma única habilidade, no caso a D31, que se associa as Matrizes por se tratar em suas competências da determinação de solução de um Sistema Linear, destacada no quadro 7. As outras habilidades trazem em suas competências assuntos matemáticos que são fundamentais quando trabalhamos com as Matrizes, como no caso dos sistemas de equações com duas incógnitas, que se utiliza de tabelas para representar funções e resolver problemas.

Já o Sistema Paraense de Avaliação Educacional (SisPAE) tem como objetivo concretizar um mecanismo de análise das atuações que a Secretaria Estadual de Educação (SEDUC/PA), juntamente com o apoio das Prefeitura Municipais, tem que desenvolver políticas públicas para fortalecer o processo de ensino e de aprendizagem no Estado e melhorar a classificação na prova do Saeb.

No quadro 8 destacamos as principais habilidades e competências desse sistema de avaliação que tem alguma relação com o assunto de Matrizes.

Quadro 8 – Habilidades e competência de Matrizes segundo o SISPAE 2016

HABILIDADES	COMPETÊNCIAS	CONTEÚDO ASSOCIADO
MPA12	Resolver equações e inequações simples, usando propriedades de potências e logaritmos, inclusive em situações-problemas.	- Equações e inequações do 1ª e 2ª graus.

MPA14	Resolver situações-problemas por intermédio de sistemas lineares até 3ª ordem.	- Sistema lineares.
MPA22	Representar graficamente inequações lineares por regiões planas.	- Representação de inequações lineares.

Fonte: Autoria própria (2020)

O SisPAE (2016) apresenta apenas três habilidades nas quais encontramos traços matemáticos do nosso produto educacional, isso mostra claramente que nesse sistema de avaliação as Matrizes, mais uma vez, não foram abordadas como já tínhamos observando em outros documentos.

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é a porta de entrada dos estudante das Escolas Públicas e Privadas nas Universidade Públicas e Particulares do Brasil. Destacamos desse exame apenas uma competência e habilidade que se encontra na área 6 referente ao assunto de Matrizes.

Quadro 9 – Habilidades e competências de matrizes segundo o ENEM

COMPETÊNCIA DA ÁREA 6	HABILIDADES	COMPETÊNCIAS DAS HABILIDADES
Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.	H24	- Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
	H25	Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
	H26	Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Fonte: Autoria própria (2020)

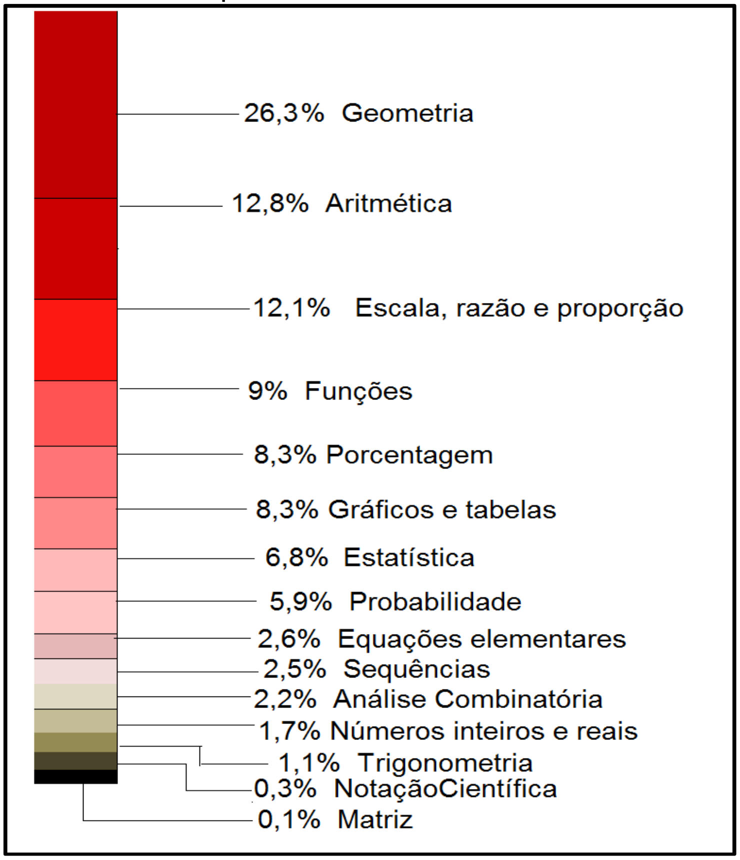
Nesse exame, assim como já tínhamos observados nos demais documentos e exames nacionais, o assunto de Matrizes não está contemplado de forma clara e destacada como o fazem com outros assuntos.

De acordo com o professor Ademar que realizou a seguinte análise dos assuntos que mais aparecem no ENEM de 2009 a 2016 para o portal G1 (2017, p. 1):

> Em matemática também predominam questões que cobram conteúdo do ensino fundamental. Esses assuntos são aqueles que na vida do aluno têm muito mais sentido que geometria analítica, por exemplo. As questões são muito mais de geometria plana. Funções com 9%, é o primeiro assunto do ensino médio. Buscam muito menos conta do que de raciocínio. O ponto de vista é muito mais o que o aluno enxerga de perspectiva. Por ser uma prova interdisciplinar, o Enem não contempla assuntos como matrizes, determinantes, binômio de Newton. Porque não são práticas do cotidiano.

Como foi observado pelo professor acima e apresentado no gráfico 1 abaixo, nós temos que relacionar o assunto de Matrizes com a vida cotidiana dos nossos estudantes e; para isso as Tecnologias tornaram-se uma aliada fundamental em nossa prática de ensino.

Gráfico 1 – O que mais cai no Enem de 2009 a 2016



Fonte: Adaptado de G1 (2017, p. 1)

Conforme apresentado, fica claramente provado que o assunto de Matrizes vem sendo deixado de ser explorado nos exames de acesso, principalmente no ENEM, e isso torna-se desmotivador para os estudantes que estudam certos assuntos que não são exigidos nos concursos e nas provas de seleção, mesmo eles constando nas matrizes curriculares.

Esse fato nos levou a expandir nossa pesquisa, procurando onde o assunto de Matrizes é cobrado e por que ele não é exigido nos documentos oficiais e nas provas que avaliam o desempenho desses estudantes. Com essa busca encontramos uma provável resposta para a exclusão desse assunto dos documentos oficiais.

3.3.1. O Assunto de Matrizes nos Editais das Escolas Militares

No levantamento de dados que fizemos para determinar onde o assunto de Matrizes é exigido, nos deparamos com algumas escolas militares que trazem em seus editais esse assunto são elas: Escolas de Formação de Oficiais da Marinha Mercante (EFOMM), Escola de Especialistas de Aeronáutica (EEAR) e a Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx), ambas vinculadas ao Ministério da Defesa.

No quadro 10 apresentamos as datas do lançamento dos editais referente as escolas e os referidos conteúdos de Matrizes que são exigidos dos futuros estudantes militares.

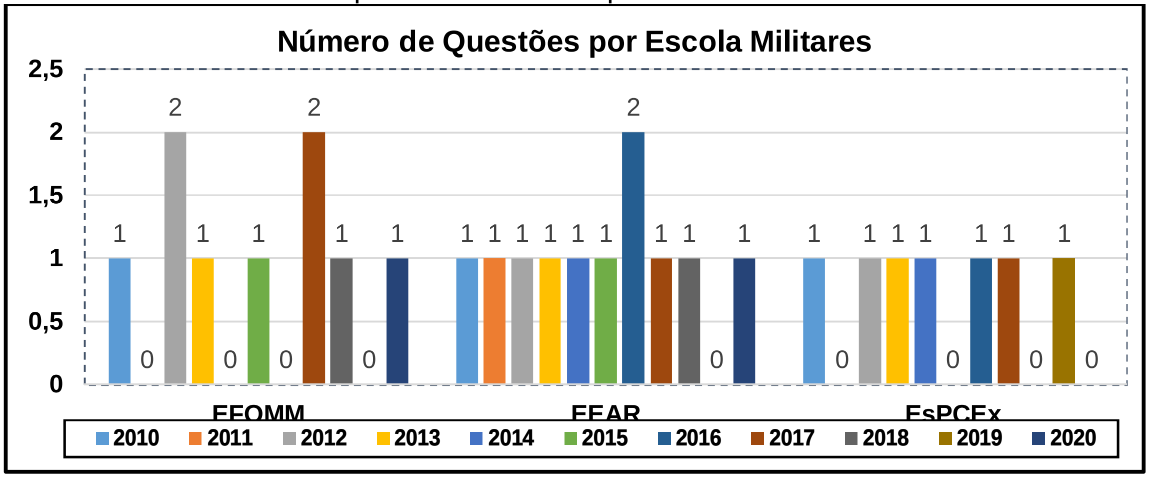
Quadro 10 – O Conteúdo de Matrizes nos editais das escolas militares em 2020

MINISTÉRIO DA DEFESA			
COMANDOS	**INSTITUIÇÃO**	**DATA DO EDITAL**	**CONTEÚDO DE MATRIZES**
Comando da Marinha (CMAR)	Escolas de Formação de Oficiais da Marinha Mercante (EFOMM)	10 de junho de 2020	a) Operações com matrizes; b) Equação matricial; c) Matriz transposta; d) Matriz inversa; e) Sistema de equações lineares; f) Emprego do método Gauss-Jordan na solução dos sistemas; e g) Matriz de Vadermonde.
Comando da Aeronáutica (COMAER)	Escola de Especialistas de Aeronáutica (EEAR)	10 de junho de 2020	**ÁLGEBRA II**: Matrizes: conceitos, igualdade e operações. Determinantes. Sistemas lineares.
Comando do Exército (CEX)	Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx)	17 de abril de 2020	**Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares:** operações com matrizes (adição, multiplicação por escalar, transposição e produto); matriz inversa; determinante de uma matriz: definição e propriedades; e sistemas de equações lineares.

Fonte: Autoria própria (2020 - **grifos nosso**)

A Investigação sobre o assunto de Matrizes nos direcionou a verificar se esse conteúdo, presente nos editais, eram cobrados realmente nas aplicações das provas militares. Para isso fizemos um levantamento dessas questões no período de onze anos (de 2010 a 2020) e o resultado desse levantamento colocamos no gráfico 2 e no quadro, sendo que este último segue no apêndice G localizado na página 305.

Gráfico 2 – Número de questões cobrados pelas escolas militares de 2010 a 2020



Fonte: Autoria própria (2020)

O levantamento das questões nos mostrou que o conteúdo de Matrizes é cobrado sim pelas escolas militares, isso está provado no quadro que se encontra no apêndice G, na página 305 e no gráfico 2, onde o levantamento foi organizado assim: o nome da escola militar, o ano da aplicação da questão e o número de questões de Matriz por provas.

Nas provas das escolas militares são cobradas questões que se referem aos assuntos de Matrizes, Determinantes e Sistema Lineares. Algumas questões envolvem até dois assuntos. Organizamos aqui o número de questões que são cobradas do assunto, as quais os candidatos precisam resolver. Por exemplo: 1 questão é para identificar o Tipo de Matrizes, outras 2 questões é para fazer a Construção de Matrizes, 1 questão é para obter a Matriz Identidade, outras 6 questões é para fazer o Produto com Matrizes, 1 questão é para fazer a Soma de Matrizes, 1 questão é para obter a Matriz Oposta, 2 questões é para encontrar a Matriz Inversa, 1 questão é para fazer a Multiplicação por um número real, 2 questões é para obter a Matriz Transposta, 10 questões é para calcular o determinante de uma matriz e apenas 1 questão é para resolver Sistema Lineares através de uma matriz.

Este levantamento mostra a importância do assunto no âmbito das instituições militares, pois elas têm várias práticas de trabalho que envolvem o cálculo com matrizes, e é por isso que o assunto é cobrado. Pois, na formação de pilotos de embarcações militares e de aeronaves estão envolvidos o conhecimento do cálculo com matrizes.

3.3.2. Análise Global dos Aspectos Curriculares do Assunto de Matrizes

Lopes (2012) no trabalho denominado por “matrizes: história de um conteúdo escolar”, o autor observa o tratamento dado ao assunto de Matrizes por várias reformas que ocorrem no período de 1930 a 1980. Esse assunto era considerado apenas como pré-requisito para o estudo de sistema linear e determinantes e, não sendo visto como conteúdo.

O tratamento dado as Matrizes de 1930 a 1980 continuam e isso está claro no levantamento que fizemos do assunto nos documentos oficiais como PCN (1997), PCNEM (2000), PCN+ (2002), OCEM (2006) e BNCC (2018). Nesses documentos o assunto de Matrizes, por incrível que pareça, continua com as mesmas características que Lopes (2012) destacou em seu trabalho. Porque isso continua ocorrendo? Para responder a essa pergunta, saímos de nossa zona de conforto e fomos buscar resposta nos editais das escolas militares.

Nesses editais o assunto de Matrizes é cobrado. Tudo foi provado pelo levantamento descrito no quadro 10 e no quadro que se encontra no apêndice G**,** na página 305. Ao analisarmos o levantamento percebemos que este conteúdo tem sido utilizado como forma de seleção/exclusão de candidatos, pois se ao estudante da escola pública não se ensina o conteúdo, como ele irá conseguir resolver uma prova em que o assunto é cobrado com uma chance de quase 100% dele aparecer.

Ao nosso ver, o mais sensato seria que as escolas militares, as bancas que realizam provas de seleção e concursos adotassem a BNCC (2018) como base. Assim, os estudantes da escola pública não seriam prejudicados, pois da forma que está posto, fica claro que este assunto está sendo usado de propósito, para excluir.

O que nos deixa indignado é que o assunto de matrizes não está presente na recém aprovada BNCC (2018), que é a base mínima ensinada em todo o território nacional. Quanto aos professores universitários terão, no futuro próximo, que ensinar o assunto de Matrizes para poderem dá continuidade na disciplina de Álgebra Linear. Caso isso não ocorra o ensino dessa disciplina será prejudicado, sem falar em outras cursos superiores que dependem da base do assunto de Matrizes, para poderem prosseguir em suas devidas áreas como é o caso das Engenharias e do Curso de Computação, por exemplo.

3.4. Estudos Sobre o Ensino de Matrizes

Para realizar a revisão de estudos iniciamos delimitando nosso tema. Pela minha experiência como docente da Educação Básica, percebe-se o quanto é importante que os estudantes aprendam e compreendam o assunto de Matrizes com todas as suas regras e propriedades, pois ao chegarem ao 3º ano do Ensino Médio, vão precisar desse assunto em geometria analítica, na parte referente a determinar à condição de alinhamento de três pontos, para encontrar a equação da reta e no cálculo da área de um triângulo. Além de precisarem do assunto, em outras disciplinas como na química e na física.

Buscamos trabalhos, no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), na plataforma SUCUPIRA, no portal de Teses e Dissertações da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), no Google Acadêmico e no catálogo de Teses do PROFMAT, digitamos as palavras chaves: MATRIZ, ENSINO DE MATRIZES, TECNOLOGIA E AS MATRIZES, SOFTWARE DE MATEMÁTICA e EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Tendo em vista nosso interesse em aprofundar os conhecimentos sobre Matrizes foi constatado que existem muitas publicações sobre o tema.

Na revisão de estudos encontramos 20 (vinte) trabalhos relacionados a Matrizes, porém consideramos, para efeito de análise aqui, apenas 15 (quinze), composto por 1 (um) pôster, 13 dissertações e 1 (uma) tese finalizados nos últimos 12 anos.

Na etapa seguinte de nossa revisão fizemos o estudo e o registro dos trabalhos selecionados, os textos da revisão foram organizados, sempre que possível, segundo as informações: objetivos, metodologia, resultados, técnicas de sistematização, técnicas de análise e conclusões. Alguns trabalhos foram descartados por não conterem as informações que procurávamos.

Para tanto, adotamos alguns critérios na busca desse material, tais como: trabalhos que contemplassem o tema “Matrizes”, e de modo específico, trabalhos que enfatizassem o tópico de Matrizes, Determinantes e Sistema Lineares, por haver uma relação entre esses assuntos.

Em seguida categorizamos os trabalhos revisados em estudos teóricos e estudos experimentais. Segundo Demo (2000, p. 20) os estudos teóricos são "dedicados a reconstruir teorias, conceitos, ideias, ideologias, polêmicas, tendo em vista, em termos imediatos, aprimorar fundamentos teóricos" sobre o ensino de determinado assunto. Já as pesquisas experimentais segundo Chevallard visam aumentar a experiência em torno de uma temática, nele temos a intervenção ativa do pesquisador. Na última etapa do trabalho será apresentado a avaliação global sobre as revisões de estudos feitos.

No quadro 11 destacamos em ordem cronológica de publicação os trabalhos analisados e organizados, com seus respectivos: Autor/ano, Natureza, Instituição e Título do Trabalho, com o objetivo de oferecer uma visão rápida e clara das produções sobre o tema no período de 2007 a 2018.

Quadro 11 – Trabalhos analisados de 2007 a 2018

AUTOR/ANO	NATUREZA	INSTITUIÇÃO	TÍTULO DO TRABALHO
MESSIAS, SÁ e VILHENA (2007)	Pôster	Centro Universitário de Belo Horizonte (UNIBH)	Um estudo diagnóstico sobre as dificuldades em matrizes
BORBA (2011)	Dissertação	Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRS)	Uma Proposta para o Ensino de Matrizes com o Apoio de Tecnologia.
STEINHORST (2011)	Dissertação	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS)	O processo de construção dos conceitos de matrizes, determinantes e sistemas lineares no ensino médio, utilizando a Planilha como recurso: um estudo comparativo.
ÁVILA (2013)	Dissertação	Universidade Cru zeiro do Sul (UNICSUL)	O conhecimento das operações aritméticas e a aprendizagem de matrizes no ensino médio: análise de interferência
FONSECA (2013)	Dissertação	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)	O uso da planilha e correio eletrônico como recurso didático no ensino de matrizes, determinantes e sistemas lineares: uma experiência com alunos do ensino médio.
OLIVEIRA JÚNIOR (2014)	Dissertação	Universidade Federal do Tocantins (UFT)	A contextualização de matrizes no ensino médio: uma proposta de trabalho
PEREIRA (2015)	Dissertação	Centro Universitário de Belo Horizonte (UNIBH)	Uma proposta para o ensino do conceito de matrizes em ambiente computacional
ROCHA (2015)	Dissertação	Universidade Federal de Rondônia (UNIR)	Ensino aprendizagem de matrizes, determinantes e sistemas lineares através da planilha Excel.

REIS (2016)	Dissertação	Universidade Federal do Pará (UFPA)	O Whatsapp no apoio à resolução de problemas de matrizes: um produto educacional na EJA.
SILVA (2016)	Dissertação	Universidade Estadual do Pará (UEPA)	O ensino de matrizes a partir da resolução de problemas.
REAL (2017)	Dissertação	Centro Universitário Franciscano (UNIFRA)	Transformações geométricas: aplicação de matrizes na computação gráfica
SILVA (2017)	Dissertação	Instituto Federal de São Paulo (IFSP)	Utilizando o Arduino como atividade aberta de investigação e experimentação matemática para o ensino de conceitos de matrizes.
BORGES (2018)	Dissertação	Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)	A metodologia de resolução de problemas no ensino de matrizes no ensino médio.
BRANDÃO (2018)	Dissertação	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)	Estudo de matrizes de maneira significativa.
KLEIN (2018)	Tese	Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)	O ensino e a aprendizagem de matrizes tendo como fundamentação teórica a teoria da aprendizagem significativa.

Fonte: Pesquisa bibliográfica (2019)

No quadro 12 é possível visualizar com clareza os trabalhos organizados pelas duas categorias, ou seja, estudos teóricos e experimentais.

Quadro 12 – Revisão de estudo por categorias

ESTUDOS TEÓRICOS	ESTUDOS EXPERIMENTAIS
Messias, Sá e Vilhena (2007), Oliveira Júnior (2014), Rocha (2015), Silva(2016), Klein (2018), Borges (2018).	Steinhorst (2011), Borba (2011), Fonseca (2013), Avila (2013), Pereira (2015), Reis (2016), Real (2017), Silva (2017), Brandão (2018).

Fonte: Pesquisa bibliográfica (2019)

A seguir apresentaremos uma síntese desses trabalhos nas duas categorias apresentadas acima.

3.4.1. Estudos Teóricos

Os estudos teóricos apresentados a seguir propuseram e concretizaram atividades para o ensino de matrizes, com objetivo de diminuir as dificuldades no ensino do assunto em questão.

Messias, Sá e Vilhena (2007) realizaram um artigo titulado como *um estudo diagnóstico sobre as dificuldades em matrizes*. Ele teve como objetivo averiguar quais as principais dificuldades apresentadas pelos estudantes, ao resolverem questões referentes ao assunto matrizes.

O público-alvo foi um grupo de estudantes do ensino superior, porém todos ingressantes no primeiro semestre dos seguintes cursos: 22 estudantes de Matemática, 31 de Sistema da Informação e 56 de Ciência da Computação, totalizando 109 universitários. A pesquisa correu no período de 5 até 15 de novembro de 2006, na Universidade do Estado do Pará.

A metodologia do trabalho seguiu várias etapas: levantamento bibliográfico, formulação e aplicação de protocolos de pesquisa e sistematização dos resultados. Na primeira etapa foi realizado o levantamento bibliográfico, com o intuito de (re) conhecer estudos voltados para o processo de ensino – aprendizagem em matemática.

A segunda etapa consistiu na formulação de protocolos de pesquisa, a partir do referencial teórico e de nossa experiência na prática docente. A terceira e última etapa abordou a sistematização dos resultados que foram dispostos em quadros e gráficos.

A pesquisa visou responder duas questões centrais: Qual o procedimento mais adotado para ensinar matrizes? e Quais as principais dificuldades apresentadas pelos estudantes ao resolverem questões referentes a matrizes?

Os resultados descritos pelos autores fazem menção ao fato de que muitos dos estudantes apresentam dificuldades, no que se refere ao conceito e à resolução de operações, principalmente no que concerne ao produto entre matrizes e no cálculo de determinantes.

Quando questionados sobre a metodologia utilizada referente ao assunto de matrizes, no ensino médio, a maioria afirmaram que o professor iniciava a aula com a definição do conteúdo, seguido de exemplos, de propriedades e de exercícios. Segundo os autores, essa descrição confirma uma predominância do ensino de matrizes por meio de uma metodologia tradicional.

Os autores concluíram afirmando que os resultados encontrados, na pesquisa, deixaram claro que os estudantes chegam ao nível superior com significativas dificuldades em matemática. E essas dificuldades refletem a necessidade de novas metodologias para o ensino da disciplina em todos os níveis educacionais. Eles acreditavam ser importante que os docentes encontrassem novas alternativas para o ensino da matemática e; é nesse contexto que se encaixa a proposta de resolução de problemas.

Oliveira Júnior (2014) apresentou o tema *Contextualização de Matrizes no Ensino Médio: Uma Proposta de Trabalho* que teve como objetivo apresentar abordagens diferenciadas no ensino de matrizes, levando em consideração a contextualização do tema, com assuntos pertinentes para estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

No trabalho há uma preocupação, com a interdisciplinaridade, que se faz presente nas atividades apresentadas, assim como ela está presente nas definições e no rigor matemático atribuído aos conceitos sobre matrizes e transformações geométricas.

A dissertação é abordada no conceito de contextualização, embasado em documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais e também em pesquisa de autores como Brousseau (1996), D'Ambrósio (1997) e Freire (1987) que apontam preocupação com os métodos de ensino empregados nas escolas, afirmando por si só que sem contexto não há significação do aprendido.

A pesquisa também aborda um pequeno histórico de matrizes, ressaltando a importância de seu uso em sala de aula, trazendo justificativas para os algoritmos da multiplicação entre matrizes.

Oliveira Júnior (2014) apresenta o resultado da pesquisa afirmando que as aplicações das atividades obteve êxito, verificando-se que as aplicabilidades de matrizes são inúmeras e que a abordagem sobre isometrias no plano foi fundamental para a obtenção desse objetivo.

A metodologia sugerida pelo autor foi a teoria da problematização que auxiliou no ciclo contextualizar/descontextualizar/recontextualizar, procurando fazer com que o estudante se apropriasse do saber, tornando o produto do aprendizado em algo significativo.

O autor apresenta as atividades que envolvem o conceito de grafos dirigidos que também é fundamental na conceituação de matrizes. Com isso, ele acredita que o trabalho possa servir de apoio ao professor, no momento de consultar, verificar a viabilização de sua aplicação, enriquecendo com isso seu rol de materiais e metodologias.

Rocha (2015) desenvolveu um estudo sobre o *ensino-aprendizagem de Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares através da Planilha Excel*. A pesquisa teve como objetivo apresentar uma maneira de ensino aprendizagem dos assuntos, de forma que o estudante se sentisse motivado e desafiado a aprender matemática, e para isso o autor usou o aplicativo *Microsoft Excel* 2013.

A metodologia procedeu-se em três etapas. Na primeira o autor entrou em contato com diversos professores de Matemática e diretores de escolas públicas nas esferas Municipal, Estadual e Federal; com a finalidade de encontrar duas escolas aptas para a pesquisa, isto é, que tivessem laboratório de informática funcionando, disponibilidade de carga horária para aplicação da pesquisa, além de estudantes do 2º ano do ensino médio que já haviam estudado no ano letivo corrente o conteúdo de matrizes, determinantes e sistemas lineares.

Na segunda etapa aplicou-se aos estudantes uma atividade com 7 questões sobre o conteúdo abordado que poderiam ser resolvidas por simples processos mecânicos, como construção de matrizes, problemas matemáticos representados por sistemas lineares, ou com exigência de interpretação e análise. Foram colocadas questões de fácil resolução em dois tempos de aula, 1h 40min.

Na terceira etapa foi desenvolvido a oficina, onde as 7 (sete) questões colocadas na atividade da etapa anterior foram resolvidas através da planilha *Exce*l 2013. Após o encerramento da oficina foi distribuído questionário aos 56 estudantes das duas escolas públicas, com a finalidade de identificar o sexo e se eles eram repetentes. Explorou-se também o conhecimento deles em relação ao conteúdo abordado e sobre o aplicativo utilizado, bem como a opinião dos estudantes referente ao uso do computador para o ensino aprendizagem de Matemática.

O autor diz que não houve a possibilidade de aplicar a oficina no laboratório de informática, em razão não estarem instalado o aplicativo da planilha eletrônica *Microsoft Excel*, devido esse programa não ser gratuito e há existência de poucos recursos financeiros recebidos nas escolas. Sendo que as verbas que chegam no estabelecimento de ensino geralmente são aplicadas na compra de material de expediente, reformas e merenda escolares, entre outras despesas básicas. Evidenciando-se assim, a realidade das escolas públicas no Brasil.

O resultado da pesquisa obtido através de questionário, tabelas e gráficos, demonstrou que a maioria dos estudantes acreditam que a matemática fica mais interessante e de fácil entendimento quando utilizamos a informática como ferramenta de auxiliar para o processo de ensino-aprendizagem, haja visto que 100% dos estudantes concordaram que o método aplicado facilitou a aprendizagem.

O autor conclui dizendo que o ensino-aprendizagem da matemática aplicados nos dias atuais não estão atendendo aos objetivos da educação, pois uma grande quantidade de informação são transmitidas aos estudantes, mas poucas são apreendidas por eles. Assim Rocha (2015) lança a ideia de se elaborar um projeto de extensão, com o objetivo de qualificar os professores de matemática das escolas públicas estaduais e municipais, por meio de oficinas com os diversos softwares matemáticos disponíveis no mercado, sejam eles softwares free ou pagos.

Silva (2016) realizou um estudo sobre o *ensino de matrizes a partir da resolução de* problemas. Esse estudo teve como objetivo avaliar a potencialidade de uma sequência didática baseada na utilização da resolução de problemas, como ponto de partida no ensino de matrizes.

A metodologia usada pelo autor foi através de analise previas que, em primeiro lugar contou com: 1) Revisão de literatura; 2) Histórico do conteúdo; 3) Informações de professores e estudantes, sobre o processo de ensino e aprendizagem de matrizes.

Em segundo lugar realizou-se a concepção e análise a *priori*. Com base nas análises prévia, o pesquisador expões e justificou as escolhas tomadas para a elaboração de uma sequência didática, revelando também o que espera sobre o comportamento dos estudantes diante da sequência formulada.

Todo esse material foi produzido visando a etapa 3 da engenharia didática que é o da experimentação, em que o *locus* é a sala de aula, onde foram desenvolvidas as atividades já analisadas a *priori* na etapa anterior. Nesse momento também foi realizado o recolhimento de um conjunto de dados e observações confrontados com o que se esperava para cada atividade, fundamentada no teste das hipóteses.

Nessa pesquisa ele contou com informações de 100 professores de matemática e de 100 estudantes de escola pública que opinaram sobre o processo de ensino e aprendizagem de matrizes.

Os resultados revelaram que a sequência didática interferiu diretamente na melhoria de aprendizagem dos estudantes em relação as matrizes. Além de um maior domínio do conteúdo, a sequência favoreceu o tratamento matemático das questões por parte destes estudantes. Também foi possível observar avanços em relação à linguagem e simbologia matemática.

O autor conclui dizendo que o trabalho com os problemas permitiu aos estudantes a aplicação dos conhecimentos em diversas situações, associando o desenvolvimento de tecnologias e atividades presentes em nosso cotidiano. Além de estimular o desenvolvimento das capacidades de raciocínio e resolução de problemas com espírito crítico e criativo.

Klein (2018) realizou um estudo sobre *o ensino e a aprendizagem de matrizes tendo como fundamentação teórica a teoria da aprendizagem significativa* e fundamentou-se na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (TAS) e seus colaboradores. Teve como objetivos propor, aplicar e buscar evidências de uma aprendizagem significativa, em relação aos conceitos envolvidos no campo conceitual de Matrizes.

A questão de pesquisa surgiu em função da preocupação da professora pesquisadora com as dificuldades conceituais e procedimentais, já apresentadas pelos estudantes em anos anteriores, em relação ao conteúdo de matrizes. Essa Teoria ressalta que a aprendizagem significativa tem chance de acontecer quando há uma interação não arbitrária e substantiva entre os novos conhecimentos (ideias, proposições, informações, conceitos, símbolos); e os conhecimentos prévios (subsunções), contribuindo para a diferenciação, (re)elaboração e estabilidade dos mesmos.

A metodologia foi baseada nas TAS de Ausubel que poderia contribuir para a construção de uma aprendizagem significativa no campo conceitual das matrizes. Optou-se por utilizar uma metodologia qualitativa, por considerar que ela poderia auxiliar de uma forma mais adequada a compreensão do fenômeno, suas variáveis e relações, seus participantes e o local da pesquisa, uma vez que esse ambiente era o mesmo onde a autora também exercia a profissão de professora.

O planejamento contou com um questionário que foi respondido de forma individual, cujas respostas foram tabuladas e auxiliaram para a construção das Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS), nas quais os estudantes, individualmente ou em pequenos grupos, poderiam explicitar, discutir e (re)constuir seus conhecimentos em relação ao tema proposto.

A coleta de dados aconteceu durante o processo e envolveu o registro oral e escrito, o registro das observações em sala de aula e o das avaliações formais, na busca de evidências de uma aprendizagem significativa. Ao final da pesquisa, foi, novamente, aplicado um questionário individual, tendo como objetivo coletar as novas impressões dos estudantes após a mudança na metodologia de sala de aula.

Os resultados obtidos confirmaram a importância de: identificar os conhecimentos prévios dos estudantes para se valer deles e desenvolver os conteúdos; elaborar atividades potencialmente significativas que permitam ao estudante explicitar suas ideias e interagir com os colegas e com o professor, evoluindo assim, progressivamente, em um determinado campo conceitual.

A autora conclui dizendo que as evidências coletadas mostraram que uma metodologia baseada nas TAS de Ausubel pode modificar o ensino e a aprendizagem de matrizes, fazendo com que o estudante explicite, participe, questione, compreenda e socialize suas ideias, reelaborando-as e incrementando à sua bagagem cognitiva a novos conhecimentos. Também contribui-se para a formação de um estudante mais crítico, criativo e autônomo, melhor preparado e capacitado para participar da sociedade, que exige cada vez mais habilidades e competências para a tomada de decisões.

Borges (2018) realizou um estudo sobre a *metodologia de resolução de problemas no ensino de matrizes no ensino médio* e fez uma experiência com cinco turmas de 3º ano do Ensino Médio de uma Escola Tradicional do Rio de Janeiro, no ano de 2017. A pesquisa contou com 132 estudantes de 17 a 19 anos e teve a intenção de comparar o rendimento das turmas. O autor escolheu esse tema pela necessidade de encontrar uma metodologia que auxiliasse suas aulas, atrelando o ensino a prática de resolver problemas.

Este trabalho apresenta dois aspectos que destacamos: Em uma parte das turmas o ensino de matrizes foi desenvolvido para a resolução de problemas. Já nas turmas restantes, o ensino de matrizes foi realizado através da resolução de problemas. Essas aplicações possuem intenção qualitativa de natureza interpretativa, elaborados por registros dos próprios estudantes, em quatro listas de problemas resolvidas por eles em sala de aula.

O objetivo da dissertação foi a apresentação da teoria, sugestão e análise das aplicações realizadas na teoria de resolução de problemas. Borges (2018) escolheu o tópico de Matrizes para desenvolver esse trabalho. O autor nesse assunto deu prioridade com maior foco na soma e na multiplicação de matrizes, com o objetivo de dar sentido a essas operações.

Os resultados da pesquisa foram aflorando naturalmente na medida que os grupos iam executando as tarefas orientadas pelo professor pesquisador. Muitos estudantes questionaram sobre o porquê da não utilização da metodologia de resolução de problemas nos anos anteriores, pois de acordo com eles, isso poderia ter modificado/facilitado o modo como eles olhavam a matemática em seu cotidiano.

O autor, após realizar uma alta crítica sobre o modo de ensinar, concluiu dizendo que estratégias como a Resolução de Problemas devem ser parte integrante do programa de Matemática. Em relação ao trabalho do professor Borges (2018) defendeu o uso de metodologia de forma regular, pois dessa forma o estudante pode melhorar seu rendimento gerenciando suas próprias ideias, acertos, erros e criando novas habilidades de identificação, distinção, reconhecimento, relacionamento, compra, hipótese, resolução, entre outras. Dessa maneira, a metodologia de resolução de problemas é uma estratégia fundamental que auxilia o professor de Matemática a essa difícil tarefa que é ensinar.

3.4.2. Estudos Experimentais

Os estudos experimentais a seguir destacam o processo de investigação dos dados, obtidos nos trabalhos que conseguiram resultados satisfatórios, nos aspectos voltados aos conceitos sobre o ensino matrizes.

A pesquisa de Steinhorst (2011) realizou um estudo com o tema *o processo de construção dos conceitos de matrizes, determinantes e sistemas lineares no ensino médio, utilizando a Planilha como recurso: um estudo comparativo*. Esse estudo ocorreu no primeiro semestre de 2010 com estudantes do Ensino Médio de uma escola particular de Porto Alegre. O estudo fez comparação entre duas turmas trabalhando de forma alternada com ou sem o recurso da planilha.

Segundo o autor essa pesquisa foi uma tentativa de contribuir para aproximar a tecnologia em sala de aula na disciplina de matemática, valorizando os conhecimentos tecnológicos dos estudantes, relacionando-os com conteúdo matemáticos. Isso tornou as atividades didáticas mais próximas do cotidiano dos educandos, pois eles estão em boa parte do tempo ligados a um computador, conectados à rede, criando e comentando blogs e participando de jogos interativos.

A metodologia da pesquisa foi qualitativa com a análise textual dos dados, e teve como suporte teórico a aprendizagem significativa de Ausubel e a metodologia de ensino, baseada da resolução de problemas, segundo Polya. O trabalho foi desenvolvido na forma de um projeto interdisciplinar envolvendo disciplinas de Física, Educação Física e Biologia.

Ainda segundo Steinhorst (2011), o trabalho com os conteúdos de Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares (MDSL) apresentam dificuldades, pois são estruturas extensas que necessitam de muitas operações aritméticas precisas para serem realizadas. A multiplicação de matrizes torna-se virtualmente impraticável de ser realizada, em sala de aula, quando a ordem da matriz é superior a três.

Para ele o excesso de cálculos não contribui para manter o interesse dos estudantes, principalmente daqueles que apresentam dificuldades e isso é um grande problema a ser enfrentado.

Os resultados obtidos demostraram que a abordagem de resolução de problemas agregada ao uso da Planilha foi bem aceita pelos estudantes, pois fortaleceu as atividades em grupo, melhorou a aprendizagem e despertou o gosto pelo estudo da Matemática.

O principal motivo foi que erros de operações aritméticas considerado antes como um entrave para a aprendizagem e fator de desestímulo, agora foram facilmente superados, permitindo que o estudante avançassem para um estágio antes não atingido por eles. O que antes era descaso na vida dos estudantes tornou-se importante, pois eles passaram a se preocupar mais com a interpretação, com a aplicação e discussão dos métodos e, finalmente com a interpretação dos resultados.

Essas fases distintas são parte do processo de aprendizagem e sofriam interrupções constantes pelos erros nas operações elementares, já com a utilização da planilha isso não ocorreu mais.

A conclusão vem acompanhada de recomendações para quem deseja realizar um trabalho semelhante com a elaboração de um cronograma por aula no laboratório com os estudantes, detalhadamente num Power Point, para que eles possam se sentirem seguros e satisfeitos suprindo suas necessidades a cada momento; tendo um bom andamento em suas aulas e como consequência um bom rendimento.

É essencial também utilizar estudantes que apresentam um rendimento superior como monitores ou auxiliares do professor. Isso facilitará bastante o trabalho, principalmente de atendimento dos demais, durante as aulas no laboratório de Informática. Pois foi justamente nesse ponto que o pesquisador declara ter tido maior dificuldade.

Borba (2011) realizou um estudo sobre *uma Proposta para o Ensino de Matrizes com o Apoio de Tecnologia*. O autor propõe uma abordagem através do uso de recursos de informática como planilhas eletrônicas e applets disponíveis na Internet, a fim de permitir a exploração de matrizes maiores, além do uso do Algoritmo de Escalonamento para resolver Sistemas Lineares, com aplicações reais para cada um desses tópicos.

O objetivo foi fazer uma análise da abordagem costumeira sobre o assunto, com isso ele pesquisou sobre aplicações que pudessem ser apresentadas no Ensino Médio realizando adaptações necessárias, para o uso de atividades que contemplem ferramentas computacionais. As atividades ocorreram em uma disciplina eletiva no Colégio de Aplicação da UFRGS, que foi oferecida a 15 estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

A metodologia que Borba (2011) utilizou baseou-se na Abordagem Incorporada e Recursos de Informática. Ele criou um site através do Google Sites que permitia a edição em plena aula. A primeira defende que o caminho para os níveis mais abstratos do pensamento matemático é facilitado se passar por uma fase de interação visual e inativa. O segundo utilizou-se de recursos de software de dois tipos: planilha eletrônica e applets.

O resultado que Borba (2011) percebeu foi que o estudante, agora, não precisava realizar uma grande quantidade de contas na montagem de matrizes ou no cálculo do valor de um determinante. Agora o estudante se encontrava livre desse fardo, passando a ter mais liberdade na visualização do conteúdo usando um ponto de vista mais elevado para a extensão de conteúdo mais avançados.

O autor conclui reforçando que o uso das ferramentas computacionais permitiu o rompimento das barreiras, mesmo com a presença de limitações. Esses recursos desempenham um duplo papel positivo, pois se por um lado facilitam a compreensão dos conceitos, por outro auxiliam na resolução de passos repetitivos, sobrando mais tempo para a conexão de problemas reais e mais motivadores.

Fonseca (2013) realizou uma pesquisa sobre *o uso da planilha e correio eletrônico como recursos didáticos no ensino de matrizes, determinantes e sistemas lineares: uma experiência com alunos do ensino médio*. O autor apresenta esse estudo acerca da utilização de recurso didático do correio eletrônico, da planilha, de software que facilitam o acesso e o uso nos ensino dos conteúdos de matrizes, determinantes e sistemas lineares.

O objetivo foi Investigar as possíveis contribuições que o uso das planilhas eletrônicas, como recurso didático, ofereceriam no estudo e entendimento dos conteúdos de matrizes, determinantes e sistemas lineares, com estudantes do 2º ano do Ensino Médio, através da resolução de situações problemas.

O estudo foi realizado no 2º semestre de 2012, com 79 estudantes em três turmas do 2º ano do Ensino Médio do Instituto Federal do Norte de Minas – Campus Salinas. O trabalho foi desenvolvido após o estudo em sala de aula dos conteúdos de matrizes, determinantes e sistemas lineares. Ele consistiu na aplicação de atividades que requeriam o uso da planilha eletrônica e de conhecimento adquirido dos conteúdos, para a solução de situações problemas propostos.

A metodologia usada foi a qualitativa e a quantitativa, com a observação durante o desenvolvimento do processo e, análise dos dados obtidos. Visando assim, a verificação da aceitação do uso de softwares no ensino de matemática, da melhoria da aprendizagem com o uso deste recurso, bem como aplicações práticas dos conteúdos de matemática estudados em sala de aula.

Desde o princípio, quando o autor propôs o desenvolvimento deste trabalho, a aceitação e interesse demonstrados pelos estudantes foi imediata. O que não foi surpresa, visto que era perceptível neles o desejo e facilidade de trabalharem e manusearem equipamentos e aplicativos tecnológicos. Aliado a esse fato, percebeu-se ainda, o entusiasmo deles em experimentarem essa nova metodologia.

Após o término das atividades realizadas pelos estudantes e aplicação do questionário, o autor deu início à análise dos dados coletados. Serviram como instrumentos para a coleta as atividades e o uso do questionário, além de observações feitas ao longo de todo o processo, bem como os *e-mails* trocados, falas, discussões durante as aulas e encontros. Esse período de pesquisa e de aproximação durou um mês e meio.

Fonseca (2013) ressaltou a importância que a utilização da planilha eletrônica teve na obtenção destes resultados. Não somente porque contribuiu significativamente na simplificação, na agilidade, nas resoluções das atividades propostas, no entendimento do conteúdo de matrizes, determinantes e sistemas lineares, como também serviu como instrumento desafiador na busca de soluções com uso de ferramentas de programa e estímulo; para posteriormente aferir o resultado obtido através da solução manual, levando à apreensão dos conceitos e algoritmos necessários à aprendizagem desses conteúdos pelos estudantes.

Por fim, essas práticas contribuíram para a melhoria do entendimento do conteúdo e houve um aumento de interesse e de participação dos estudantes durante as aulas de matemática. Verificou-se ainda que os resultados obtidos pelos pesquisados foram superiores aos resultados obtidos em anos anteriores, quando o pesquisador trabalhava apenas de forma expositiva e com resoluções de exercícios.

Desta forma, pretende-se continuar a aplicar *softwares* às práticas, visto que demonstraram ser um importante recurso, para o incentivo e suporte, ao estudo da matemática. Espera-se com tudo isso que este trabalho contribua e sirva para motivar professores, na incessante busca pelo aprimoramento e crescimento profissional quanto ao uso de recursos computacionais em suas práticas pedagógicas.

Avila (2013) realizou um estudo sobre *o conhecimento das operações aritméticas e a aprendizagem de matrizes no ensino médio: análise de interferências*. O autor analisou a compreensão dos estudantes sobre as quatro operações e sua influência para a aprendizagem de matrizes. A experiência do autor como docente no Ensino Médio permitiu de maneira clara a identificação de erros na realização das quatro operações aritméticas, no Ensino Fundamental maior e a interferência na aprendizagem de matrizes no Ensino Médio.

O objetivo dessa pesquisa foi investigar e analisar a influência do domínio das operações aritméticas na aprendizagem de matrizes. Já os erros cometidos pelos estudantes são próprios do conteúdo ou resultam de um domínio precário das operações básicas na resolução de atividades de matrizes.

A metodologia escolhida foi a abordagem qualitativa, pois o professor pesquisador passa a investigar a própria prática no ensino. Foi escolhido o conteúdo de matrizes para realizar a análise, porque ele exige bastante as quatro operações. Como fundamentação teórica, são apresentados autores como Ifrah, Boyer, Brasil, Piaget, Teixeira e Pinto.

Para esse estudo o autor utilizou a pesquisa qualitativa com 12 estudantes, entre 15 e 18 anos, do 2º ano do Ensino Médio que participaram da pesquisa antes de começarem as aulas, pois foi uma condição proposta pela direção para que os estudantes, participantes da pesquisa, não fossem prejudicados quanto ao conteúdo.

Nessa pesquisa foram utilizadas para coletar os dados técnicas de observação simples como entrevistas e testes, com questões discursivas e de múltipla escolha. As perguntas foram desenvolvidas visando à problemática e os objetivos da pesquisa. Foi utilizado também um teste com questões relacionadas ao problema da pesquisa (junto da entrevista), devido ter sido constatado por parte do pesquisador uma compreensão conceitual insuficiente das quatro operações básicas na vida dos estudantes em sala e no cotidiano deles.

A aplicação dos testes de conhecimentos prévios começou no dia 27 de Março de 2012, pouco depois das 17:00 horas. O autor fez a leitura das questões para que não houvesse duvidas devido os sinais de operações, e em seguida foi pedido aos estudantes que resolvessem os exercícios de maneira mais propícia para eles. Após 40 minutos houve a conclusão de duas folhas de questões pelo primeiro estudante.

Avila (2013) afirma que um fator negativo para a realização da pesquisa foi a frequência dos estudantes que faltavam muito e apresentavam um péssimo costume de não acompanhar as aulas nas sextas feiras, ainda mais no período noturno. Eram quatro aulas de matemática por semana em cada sala, porém nas sextas feiras compareciam uma média de 4 ou 5 estudantes por sala, e em quase todas as ocasiões esses não eram os estudantes da pesquisa, o que, praticamente, reduziu de quatro para três aulas por semana, a inadimplência foi um dos elemento que prejudicou a compreensão do conteúdo para alguns estudantes.

O autor conclui afirmando que os estudantes não foram bem nos testes que usavam cálculo matemático, porém saíram-se bem na avaliação sobre o conteúdo em si, usando apenas procedimentos e conceitos. A partir dos dados coletados, percebeu-se uma certa dificuldades em aplicar as quatro operações básicas em outros conteúdos da matemática, pois os entrevistados não conseguem ver sua importância no cotidiano em que vivem, entretanto, aprendem novos conteúdos independentemente de conseguirem realizar as quatro operações básicas ou não.

Pereira (2015) realizou uma pesquisa sobre u*ma proposta para o ensino do conceito de matrizes em ambiente computacional*. O autor propôs a construção de imagens usando o conceito de matrizes por meio de situações didáticas e pelo o uso do ambiente numérico *Scilab* como instrumento pedagógico.

As atividades foram aplicadas a estudantes da terceira série do Ensino Médio de uma escola da Rede Pública Estadual SEE – SP (Secretaria de Educação do Estado de São Paulo). A análise dessa pesquisa se dá sobre a prova específica aplicada a terceira série do Ensino Médio que ocorreu no início de 2015.

Para que se tornasse possível a realização da pesquisa na escola acima citada, foram assinados termos de consentimentos, nos quais a pesquisadora se comprometeu a manter sigilo acerca da identidade dos estudantes; bem como manifestar sua livre e espontânea vontade em realizar o trabalho de pesquisa.

A metodologia adotada aqui foi a Engenharia Didática associada aos métodos de avaliação, a saber: diagnóstica, formativa e somativa. A escolha dessa metodologia se deve ao fato de que as atividades a serem desenvolvidas junto aos estudantes, parte da observação de uma avaliação diagnóstica aplicada pela SEE – SP.

Nessa dissertação percebe-se então que alguns dos estudantes já possuíam habilidades para manusear os recursos tecnológicos, apenas cerca de 3% não apresentavam tais habilidades, os quais exigiam maior atenção. Apesar dessa pequenas dificuldades pôde-se perceber por Pereira (2015) que a ideia do que estava sendo estudado foi assimilada por todos.

O resultado foi satisfatório na avaliação realizada pelos estudantes, demonstrando que eles reagiram positivamente quanto à utilização de uma metodologia alternativa com a utilização de tecnologia. O resultado de 100% de aproveitamento obtido no resultado da correção das atividades desenvolvidas assinalou para que se chegasse à conclusão do sucesso.

A autora conclui dizendo que o computador e os recursos associados a procedimentos metodológicos alternativos podem auxiliar na aprendizagem. Isso pode sugerir que novas pesquisas acerca da introdução de recursos tecnológicos nos procedimentos metodológicos utilizados por professores de matemática se fazem necessárias.

Reis (2016) realizou um estudo sobre a *Resolução de problemas por matrizes: um caso de uso do Whatsapp na EJA do ensino médio*. A metodologia adotada foi a da pesquisa qualitativa, que utilizou o estudo de caso e trouxe comentários dos estudantes pesquisados. Analisou-se dois ambientes de maneira alternada: no primeiro a sala de aula, no qual tratou do método de Polya para a resolução de problemas e no segundo, utilizou-se do ambiente virtual na plataforma Whatsapp.

Os resultados obtidos pelo autor foi a iniciativa por parte dos estudantes em buscar novas formas de organizar o seu aprender, fazendo com que este conhecimento matemático trabalhado não se torne estático. Reis (2016) diz que o grupo no Whatsapp acabou funcionando como um “diário de experiência”, pois sempre que precisasse o estudante acionaria o celular para observar as mensagens e então poderia obter algo que fosse necessário para resolver o problema proposto.

A pesquisa faz referência a 25 estudantes, com idades entre 22 a 52 anos, do Ensino da modalidade da Educação de Jovens e Adultos, da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio da Cidade de Emaús localizada no Bairro do Benguí, na turma da 2º Etapa do ensino médio (2º ano e 3º ano condensados).

A conclusão mostrou que houve crescimento dos estudantes nos aspectos de interação, de compreensão da resolução de problemas, de ampliação dos vocabulários e repertórios dos estudantes, além da superação de muitas dificuldades que apresentavam no início do trabalho de pesquisa.

Real (2017) realizou uma pesquisa sobre as *transformações geométricas: aplicação de matrizes na computação gráfica*. O autor apresentou os resultados dessa pesquisa que buscou analisar as contribuições dos conceitos de transformações geométricas, utilizadas na Computação Gráfica, para a aprendizagem de operações com Matrizes.

A teoria que embasou esse estudo foi a Aprendizagem Significativa, para o desenvolvimento da aprendizagem dos estudantes. As atividades ocorreram no período de 29 de março a 26 de abril de 2017, no turno da manhã, no Laboratório de Informática da escola, contendo duas turmas de 3º ano. A turma A tinha 19 estudantes e turma B 21 estudantes, totalizando 40 participantes de uma Escola Estadual localizada no município de Santo Ângelo/RS.

As atividades propostas foram organizadas em uma unidade de aprendizagem, estruturada de acordo com a metodologia dos Três Momentos Pedagógicos (TMP), a qual é apresentada por Delizoicov, Angotti e Pernambuco (2011) como: Problematização inicial (PI), Organização do conhecimento (OC) e Aplicação do conhecimento (AC). O recurso tecnológico utilizado para explorar esse assunto foi o *software* GeoGebra.

Essa pesquisa tem o caráter qualitativo e quantitativo. Sendo utilizados como instrumentos para a coleta de dados, dois questionários (com questões do tipo fechadas e abertas) e dois testes (Pré-teste e Pós-Teste). Com a realização das atividades de ensino e aprendizagem, a observação dos participantes e o diário de bordo, foi possível verificar que os estudantes apresentaram dificuldades nos conceitos de Matrizes, nas operações e nas Transformações Geométricas.

Com isso conclui-se que as atividades de ensino e aprendizagem desenvolvidas nessa pesquisa com a utilização do *software* GeoGebra, contribuíram para que os participantes estudassem os conceitos de Transformações Geométricas e Computação Gráfica, e perceberem como esses conceitos podem auxiliar na compreensão e reforço dos conceitos de Matrizes e suas operações.

Como produto educacional deste trabalho, o autor elaborou um livro digital (com o *software* eXe Learning) que contemplou todas as atividades de ensino e aprendizagem apresentadas na pesquisa e que servirá como possibilidade de ensino do tema Matrizes, no Ensino Médio.

Os resultados das atividades mostraram que os estudantes tem facilidade de adaptação e aprendizagem com a informática, precisando apenas de um estimulo.

O autor conclui dizendo que os estudantes demonstraram disposição e autonomia para desenvolver as atividades de ensino e aprendizagem propostas, pois eles têm grande vontade de aprender esses conceitos trabalhados com o uso de *software* GeoGebra, porque esses programas proporcionaram uma visualização melhor das Transformações Geométricas e da identificação de cada par ordenados para a construção das Matrizes.

Silva (2017) realizou uma pesquisa com o tema *utilizando o Arduino como atividade aberta de investigação e experimentação matemática para o ensino de conceitos de matrizes*. A autora utilizou a metodologia de pesquisa qualitativa, tendo como método a pesquisa bibliográfica, pesquisa-ação, entrevista semi estruturada e a análise de conteúdo mencionado.

A pesquisa foi aplicada em uma turma do 2º ano do curso Técnico Integrado ao Ensino Médio de Eletrônica do campus do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP - Campus São Paulo) no ano letivo de 2016.

Objetivo geral da pesquisa foi analisar as reais possibilidades e limites do uso do Arduino no ensino dos conceitos iniciais e operações de matrizes, para o ensino médio, em especial para o ensino Técnico Integrado ao Ensino Médio de Eletrônica, que foi a turma escolhida para a aplicação do roteiro didático elaborado na pesquisa.

Como resultado o autor diz que por intermédio da pesquisa-ação, conseguiu criar a interação entre o pesquisador e a comunidade (estudantes e o professor regente da sala). Iniciou a elaboração de uma ação concreta resultante da interação entre o pesquisador e a comunidade com a produção de um roteiro de ensino de matrizes utilizando o Arduino. Além de ampliar o nível de conhecimento da comunidade por meio de troca de experiências.

O professor regente mostrou-se interessado em mudar sua metodologia de ensino e implementando as aulas com recursos tecnológicos. Novos conhecimentos foram desenvolvidos pelo pesquisador a partir dos debates com os estudantes com a ideia de oferecer oficinas para os estudantes ampliarem seus conhecimentos em Arduino.

Concluiu-se que o trabalho contribuiu para a produção teórica e práticas pedagógicas relacionadas ao tema, como também a produção de um roteiro de ensino de matrizes utilizando o Arduino. Silva (2017) disponibiliza os códigos-fonte de cada uma das aplicações e os deixou no modelo *open-source,* para que qualquer pesquisador ou professor que queira utilizá-lo tenha total liberdade para realizar quaisquer modificações ou implementações que achar necessária, para manter a pesquisa viva, compartilhada e dentro da inteligência coletiva.

Brandão (2018) realizou um e*studo de matrizes de maneira significativa*. A autora buscou despertar o interesse dos estudantes e ao mesmo tempo aguçar a curiosidade deles sobre o assunto, o que, em tese, permitiu desenvolver o trabalho mais facilmente e aproveitar melhor o tempo. A intervenção ocorreu na Escola Estadual Padre João Tomes, do município de Três Lagoas – MS e foi realizada com 40 estudantes do segundo ano do Ensino Médio.

A autora introduziu um jogo conhecido como Batalha Naval, com o objetivo de auxiliar o estudo inicial de matrizes, permitindo que o estudante se familiarizasse com a notação matricial e elementos de matrizes. Pois o uso da atividade permitiu promover a interação entre os estudantes.

O trabalho caracterizou-se como pesquisa descritiva, com abordagem qualitativa. A autora cita Gil (2010) que descreve as características de determinadas populações ou fenômenos, utilizando técnicas padronizadas de coleta de dados, como por exemplo, o questionário e a observação imediata. A metodologia qualitativa buscou analisar e interpretar aspectos mais profundos, descrevendo a complexidade do comportamento humano, além de fornecer análise mais detalhada sobre as investigações, hábitos, atitudes, tendências de comportamento, dentre outros (LAKATOS, 2011)[22].

O objetivo foi a utilização do jogo como ferramenta para incentivar o estudo de matrizes e fixar os primeiros conceitos como a notação utilizada. Após a finalização das atividades, apresentou aos estudantes os primeiros conceitos de Matrizes, fazendo uma ligação com a atividade no decorrer da explicação.

Os resultados do trabalho mostraram que os estudantes ficaram muito interessados, participaram ativamente da aula se familiarizando rapidamente com a notação matricial e com os elementos das matrizes. Tanto a professora como os estudantes fizeram uma avaliação muito positiva da atividade realizada.

Depois de realizado o estudo teórico de matrizes e suas propriedades, a professora sentiu a necessidade de trabalhar com situações problemas. Para melhor consciência e entendimento do conteúdo que tem sua importância e aplicações no dia a dia, a pesquisadora escolheu um problema que descreve uma tabela nutricional para perda de peso.

A autora concluiu dizendo que o jogo ajudou os docentes a despertar maior interesse em seus estudantes referente ao conteúdo e a obter uma melhor aprendizagem, bem como a promoção de discussões e reflexões a respeito do estudo das matrizes.

[22]LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Metodologia cientifica.** 6.ed. São Paulo: Atlas, 2011

3.5. Análise Global da Revisão de Estudos

A revisão de estudos, feita por categorias, revelou alguns aspectos de como o assunto de Matrizes vem sendo trabalhado nesses últimos 12 anos. Tais aspectos foram sintetizados no quadro 13.

Quadro 13 – Contribuições da revisão de estudos

AUTOR	CONTRIBUIÇÕES
Messias, Sá e Vilhena (2007)	Averiguou as dificuldades apresentadas pelos estudantes ao resolverem questões referentes às Matrizes; Elaborou novas alternativas para ensinar o assunto de Matrizes através da proposta de resolução de problemas; Refletiu sobre a necessidade de novas metodologias para o ensino em todos os níveis de ensino.
Steinhorst (2011)	Verificou como a planilha pode contribuir para o melhor entendimento de matrizes, determinantes e sistemas lineares para estudantes do Ensino Médio; Utilizou a abordagem de resolução de problemas e da interdisciplinaridade; Contribuiu para aproximar a tecnologia da sala de aula; Valorizou os conhecimentos tecnológicos dos estudantes para manter o interesse deles; Facilitou para que o estudante pudesse prosseguir em seus estudos de Matrizes sem se preocupar em realizar grandes cálculos, pois estes agora passam a se preocuparem com a interpretação a ser feita em cada questão e com os métodos que irão aplicar.
Borba (2011)	Permitiu a exploração de Matrizes maiores e do uso do algoritmo de escalonamento com os recursos da informática e de applets disponíveis na internet; Elaborou atividades de matrizes que contemplem o uso das ferramentas computacionais; Desempenhou um duplo papel em que facilita a compreensão dos conceitos e auxiliar os estudantes na resolução dos passos repetitivos sobrando mais tempo para a conexão com problemas reais e motivadores.
Fonseca (2013)	Facilitou o ensino dos conteúdos de matrizes, determinantes e sistemas lineares através de recursos didáticos como o correio eletrônico e de software de fácil acesso; Verificou a aceitação do uso de softwares no Ensino de matemática e se houve melhora na aprendizagem a partir do uso desses recursos tecnológicos; Serviu como instrumento desafiante na busca das soluções através das ferramentas; Continuou a aplicar softwares às práticas pedagógicas e motivar professores a sempre buscar essas ferramentas que despertam nos estudantes a motivação de apreender.
Avila (2013)	Analisou a compreensão dos estudantes sobre as quatro operações e sua influência na aprendizagem de Matrizes; Investigou a própria pratica de ensino para identificar os erros cometidos pelos estudantes na realização das operações aritméticas que influenciam nas operações com Matrizes; Apesar dos estudantes terem dificuldades em aplicar as quatro operações básicas em outros conteúdos de matemática isso não os impede de aprenderem novos conteúdos, independente de conseguirem realizar as operações ou não.
Oliveira Júnior (2014)	Mostrou abordagens diferenciadas no Ensino de Matrizes, levando em consideração a contextualização do assunto para os estudantes do 2º ano do Ensino Médio;

Pereira (2015)	Propôs a construção de imagens usando o conceito de Matrizes no ambiente numérico Scilab como instrumento de apoio computacional; Apesar de 3% dos discentes pesquisados não terem habilidades com as tecnologias, a sequência didática foi bem aceita, tendo 100% de aproveitamento nas correções das atividades; Explorou as ferramentas computacionais associadas a metodologias alternativas na aprendizagem.
Rocha (2015)	Apresentou uma maneira de ensino aprendizagem dos assuntos, de forma que o estudante se sinta motivado e desafiado a aprender matemática com o uso do aplicativo *Microsoft Excel* 2013. Elaborou um projeto de extensão para qualificar os professores de matemática através de oficinas com diversos softwares grátis ou pagos.
Silva (2016)	Avaliou a potencialidade de uma sequência didática baseada na resolução de problemas no Ensino de Matrizes; Aplicou os conhecimentos em diversas situações e estimular o desenvolvimento da capacidade de raciocínio na resolução de problemas.
Reis (2016)	Utilizou o aplicativo Whatsapp com estudantes da EJA, do Ensino Médio, na resolução de problemas com Matrizes; Fez com que os estudantes trabalhassem de forma dialogada nos grupos e buscassem a autonomia da aprendizagem.
Real (2017)	Analisou as contribuições dos conceitos de transformações geométricas com o uso da computação gráfica para a aprendizagem das operações de Matrizes; Estimulou os estudantes a trabalharem com a informática; Utilizou o software GeoGebra na identificação e na construção das Matrizes.
Silva (2017)	Utilizou o Arduíno como atividade de investigação e experimentação matemática para o ensino dos conceitos iniciais de Matrizes; Contribuiu com a produção teórica e produzir um roteiro de ensino de Matrizes através do Arduíno.
Brandão (2018)	Buscou alternativas para despertar o interesse dos estudantes e aguçar a curiosidade deles sobre o assunto de Matrizes através de jogos e atividade que promovesse a interação entre os educandos; Promoveu discursos e reflexões sobre o Ensino de Matrizes no Ensino Médio, visando à importância e a aplicação do assunto no dia a dia dos discentes.
Borges (2018)	Introduziu ferramentas para a introdução do conceito de Matrizes através da metodologia de resolução de problemas; Apresentou a teoria, sugerir e analisar as aplicações com a resolução de problemas e utilizar essa metodologia como uma estratégia fundamental no auxílio do professor a essa tarefa árdua que é Ensinar Matemática.
Klein (2018)	Propôs aplicar e buscar evidências de uma aprendizagem fundamentada na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel em relação aos conceitos de Matrizes; Modificou o ensino e a aprendizagem de matrizes fazendo com que o estudante explicite, participe, questione, compreenda, socialize suas ideias e incremente à sua bagagem cognitiva a novos conhecimentos.

Fonte: Autoria própria (2019)

Ao todo foram revisados 15 trabalhos nos quais as Matrizes estavam inseridas, sendo que para uma melhor compreensão do assunto em questão foram criadas 2 categorias. Uma com o título de Estudos Teóricos e outra com o título de Estudos Experimentais.

Ao analisarmos as pesquisas sobre Matrizes percebemos que tanto os trabalhos sobre estudos teóricos quanto aos de estudos experimentais, apontam em suas conclusões a ocorrência da diminuição nas dificuldades no processo de ensino-aprendizagem, dos problemas envolvendo as operações com Matrizes quando se utilizou metodologias de ensino diferentes da tradicional. Um bom exemplo referente ao assunto é a formulação e resolução de problemas por parte dos estudantes com utilização de situação do cotidiano na introdução do assunto ou na utilização de tecnologias com o uso de metodologias adequadas a cada situação do ensino, para que ocorra de fato, a aprendizagem.

Neste levantamento bibliográfico identificou-se também o aparecimento de apenas uma tese que trata sobre as Matrizes, e é bem recente. Isso nos mostra que pesquisas mais avançadas ainda precisam ser realizadas sobre o assunto, voltada é claro para a melhoria da aprendizagem.

Esta revisão nos possibilitou identificar um panorama geral sobre o processo de ensino-aprendizagem de problemas com Matrizes. Sua finalização facilitou termos uma maior percepção quanto ao ensino deste conteúdo, e que ele pode se tornar mais significativo para o estudante e para o professor quanto a utilização de metodologias e tecnologias que contextualizam o que está sendo ensinado e que pode ser percebido no dia a dia.

3.6. Contribuições

Os trabalhos que fizeram parte desta revisão nos possibilitou perceber a importância dos recursos didáticos, para o ensino e aprendizagem de Matrizes como a Resolução de Problemas, Jogos, GeoGebra, o Arduíno, Planilhas Eletrônicas, o Correio Eletrônico, o Whatsapp, o Ambiente Numérico Scilab, e a Teoria da aprendizagem Significativa de Ausubel (TAS). Eles se mostraram como recursos satisfatórios nos trabalhos, o que corrobora com a orientações dos PCN (2000), OCEM (2006) e da BNCC (2018) que ressaltam para o ensino do assunto de Matrizes de maneira diferenciada.

Percebemos nesses estudos uma maior ênfase nas abordagens através de *software* como o GeoGebra e o uso das Planilhas Eletrônicas da Microsoft Excel, pois esses *softwares* fazem com que os estudantes tenham mais liberdade de avançarem em seus estudos, sem precisarem realizar tantas operações aritméticas como ocorria antes, pois agora os estudantes conseguem, com essas tecnologias, resolver matrizes de ordens maiores que 3.

Essa revisão também nos possibilitou perceber as dificuldades encontradas no ensino de Matrizes que são bem razoáveis de serem superadas, pois de acordo com Steinhorst (2011) e Borba (2011), as barreiras eram visíveis quando os estudantes tinham que realizar as operações aritméticas, mas com o uso do *software e applets* esses problemas foram superados.

Os estudantes, na grande maioria dos trabalhos pesquisados, declararam que houve uma melhora significante quanto a utilização de metodologias diferentes das que eram usadas pelos seus professores, as ditas “Tradicionais”. Reforçando que o uso das tecnologias possibilitaram uma melhor compreensão do assunto, passando a ter outro significado para os estudantes.

A partir dessa revisão conseguimos identificar as lacunas que ainda estão presentes no cotidiano escolar. Percebemos neste trabalho que o nosso objeto de estudo está relacionado ao estudo dos Determinantes e Sistemas Lineares e muitas pesquisas foram feitas relacionando os três conteúdos, como apresenta Rocha (2015), Steinhorst (2011), dentre outros que tiveram esses conteúdos como objeto de suas pesquisas.

Por fim, essa revisão nos possibilitou ter uma visão ampla para desenvolvermos nossa pesquisa. Ela nos mostrou o quanto é importante termos conhecimentos prévios de nossos estudantes, além de mantermos contatos com metodologias para podermos mesclar o ensino tradicional com o uso das tecnologias, fazendo com que os estudantes sejam mais ativos, participativos e criativos em sala.

3.7. O Ensino de Matrizes Segundo Estudantes do 3ª ano Ensino Médio

A pesquisa de campo ou estudo diagnóstico foi planejada/aplicada durante a realização da disciplina: Currículo e Avaliação da Aprendizagem em Matemática do Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, da Universidade do Estado do Pará, ministrada pelas professoras Profª. Drª Maria de Lourdes da Silva Santos e Profª. Drª Ana Kely Martins da Silva, durante o primeiro semestre de 2019. Esse seminário nos possibilitou ter um norte a seguir no curso e friso este momento como um dos mais importantes, pois através dele obtivemos muitos dados que eram desconhecidos por nós sobre as instituições e sobre os estudantes.

Nesse planejamento foram elaborados os instrumentos da pesquisa de campo, com os seguintes procedimentos:

a) Ofício a ser entregue na instituição onde a pesquisa seria realizada;

b) Minuta do trabalho de campo, com apresentação, caracterização e justificativa da pesquisa pretendida;

c) Termos de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), com modelos para estudantes maiores e menores de 18 anos de idade; (Apêndice A e B, nas páginas 297 e 298)

d) Questionário de dados sócio – educacionais e sobre as formas metodológicas de ensino, de avaliação e dificuldades sobre o assunto pesquisado; (Apêndice C na página 299 e 300)

e) Teste de conhecimentos sobre o assunto de matrizes contendo 10 questões objetivas. (Apêndice D na página 301)

O Questionário de dados sócio – educacionais e sobre as formas metodológicas de ensino foi organizado em quatro categorias:

Categoria 1 – Perfil sócio – econômico dos estudantes e família;

Categoria 2 – Currículo;

Categoria 3 – Impressões dos estudantes acerca das metodologias de ensino;

Categoria 4 – Impressões dos discentes acerca das avaliações de aprendizagem.

O quadro de dificuldades trata-se das hipotéticas dificuldades de aprendizagem sobre o assunto de Matrizes, elaborado a partir de resultados apontados no referencial teórico e bibliográfico, bem como nas prerrogativas curriculares e avaliativas sobre aprendizagem de matemática para o Ensino Médio a nível nacional e no Estado do Pará.

No primeiro dia de trabalho de campo ocorrido em 15/04/2019, tive o primeiro contato com a escola através da Vice – Diretora no horário vespertino e noturno, a qual garantiu as condições necessárias para a realização da pesquisa, mediante apresentação aos professores de matemática dessa escola. Na semana seguinte foi agendado a aplicação do questionário e teste de conhecimentos aos estudantes de apenas quatro (4) turmas, pois algumas estavam em período de avaliação. Na semana do dia 22/04/2019 apresentamo-nos aos coordenadores do horário vespertino para organizar a aplicação da pesquisa nas quatro (4) turmas informadas.

Do dia 22 ao dia 26 foram aplicados os instrumentos da pesquisa a 117 estudantes do Ensino Médio que já haviam estudado o assunto de Matrizes no 2ª ano. Os estudantes demonstraram grande interesse em participar da pesquisa e observou-se na escola um clima organizacional motivador e de grande boa vontade pela melhoria da educação.

Também foi informado aos estudantes sobre os procedimentos para responderem aos questionários, assegurando-lhes o anonimato sobre suas identidades. Os professores ajudaram na realização das atividades. No total, foram aplicados questionários acompanhados do TCLE e teste a 117 estudantes, porém apenas 100 foram tabulados, havendo o descarte dos demais por informações incompletas ou insuficientes. Foi informado pelos estudantes e corpo técnico escolar que todos entrevistados estudaram com o mesmo professor no 2º ano do Ensino Médio, sobre o qual fizeram questão de expressar satisfação, sendo rara as queixas com relação ao professor do ano anterior.

A organização dos dados foi realizada com o auxílio do Google Drive que é um dispositivo prático utilizado para este fim, disponível na internet de forma gratuita. A escolha deste dispositivo deu-se pela facilidade de análise de dados e gráficos. Nele foram gerados, gráficos, tabelas e dados percentuais dos resultados da pesquisa todos analisados.

O teste de verificação conteve 10 questões objetivas, que foram formuladas com grau crescente de dificuldade, ou seja, da mais fácil a mais difícil, contendo 4 questões de nível fácil, 4 de nível médio de dificuldade e apenas 2 questões de nível mais elevado que foram aplicados no período informado.

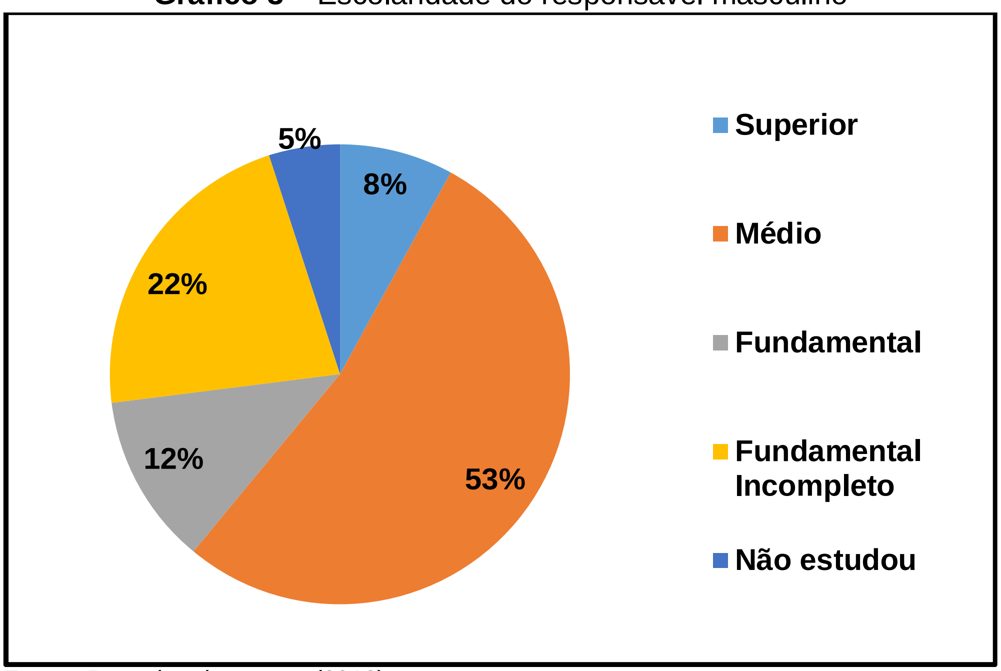
3.7.1. Categoria 1 – Perfil sócio – econômico dos estudantes e família

Sobre o perfil sócio – econômico dos 100 estudantes analisados, foram selecionadas 7 questões (q1, q2, q3, q4, q7, q8 e q9) do questionário para serem analisados. Esses dados nos mostram que apenas 91% dos entrevistados estão dentro da faixa etária que corresponde de 15 a 17 anos, considerada, pela LDB (1996), a idade certa para um estudante iniciar (15 anos) e terminar (17 anos) o Ensino Médio, enquanto apenas 9% encontram-se fora da margem considerada ideal, dentro do que chamam de “distorção idade – série”.

Outro dado analisado foi sobre o gênero dos estudantes, a pesquisa nos revelou que 62% dos pesquisados são do sexo feminino enquanto 38% correspondem ao sexo masculino. O que está de acordo à pesquisa feita pelo IBGE (2017), onde mostra a superioridade do sexo feminino no Brasil e, como isso se reflete nas turmas do terceiro ano do referido lócus pesquisado.

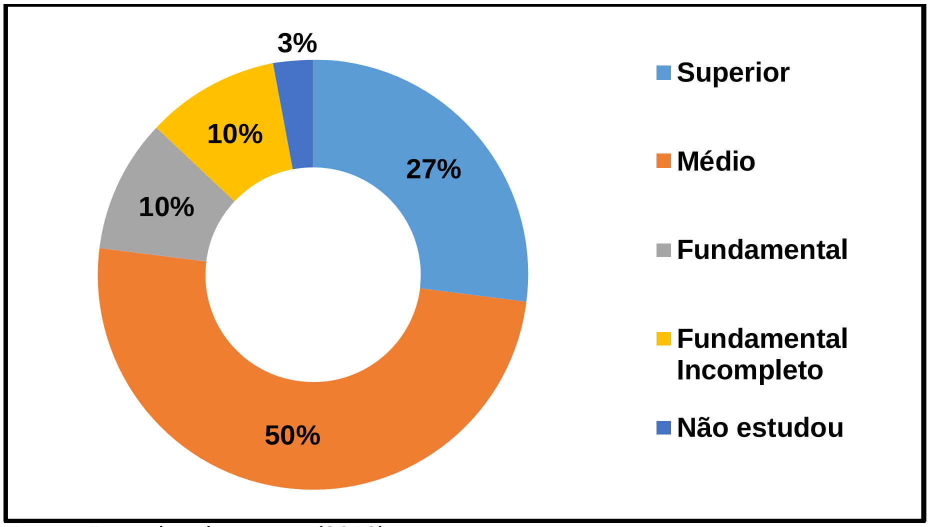
Outro dado coletado foi sobre a escolaridade dos responsáveis masculino e feminino. A pesquisa mostrou que está tecnicamente empatada a escolaridade dos responsáveis quando se compara o ensino médio, ambos com 50%. Mas quando comparado o ensino Superior, as mulheres se destacam, pois enquanto o responsável masculino representam apenas 8% do total pesquisado, as mulheres, nesse ponto, representam 27%, ou seja, mais que o triplo dos responsáveis masculino com nível superior. Esses dados foram revelados em nossa pesquisa, conforme mostra o gráfico 3 e o gráfico 4.

Gráfico 3 – Escolaridade do responsável masculino



Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Gráfico 4 – Escolaridade do responsável feminino

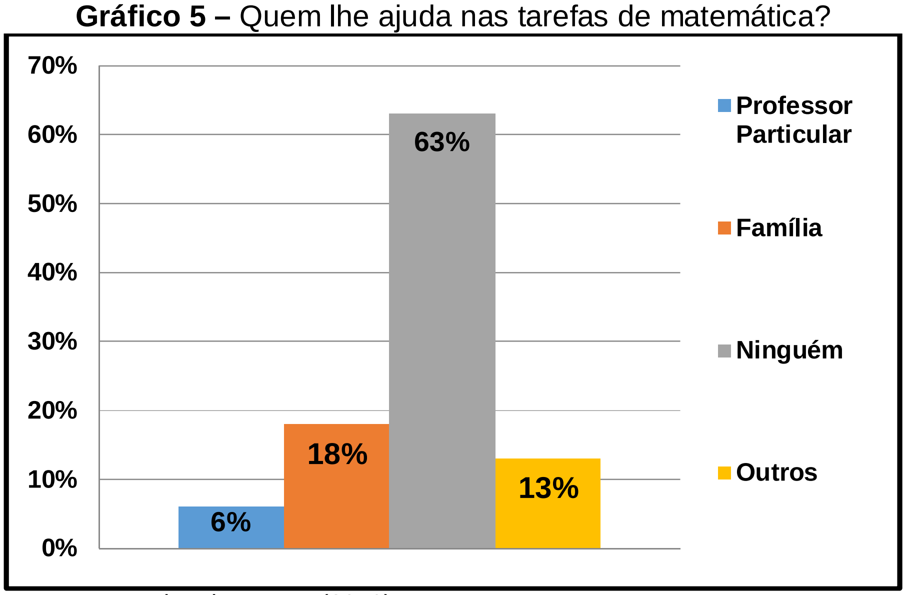


Fonte: Pesquisa de campo (2019)

De acordo com o IBGE (2017) a maior diferença percentual por sexo está no nível "superior completo", especialmente entre as pessoas da faixa etária mais jovem, de 25 a 44 anos de idade, em que o percentual de homens que completou a graduação foi de 15,6%, enquanto o de mulheres atingiu 21,5%, indicador 37,9% superior ao dos homens. Segundo ainda o IBGE, isso ocorre devido à entrada precoce dos homens no mercado de trabalho.

Mas o que nos chama a atenção são os próximos dados obtidos dos próprios estudantes através da seguinte pergunta 9: Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática? A resposta será apresentada no gráfico 5.

Gráfico 5 – Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?



Fonte: Pesquisa de campo (2019)

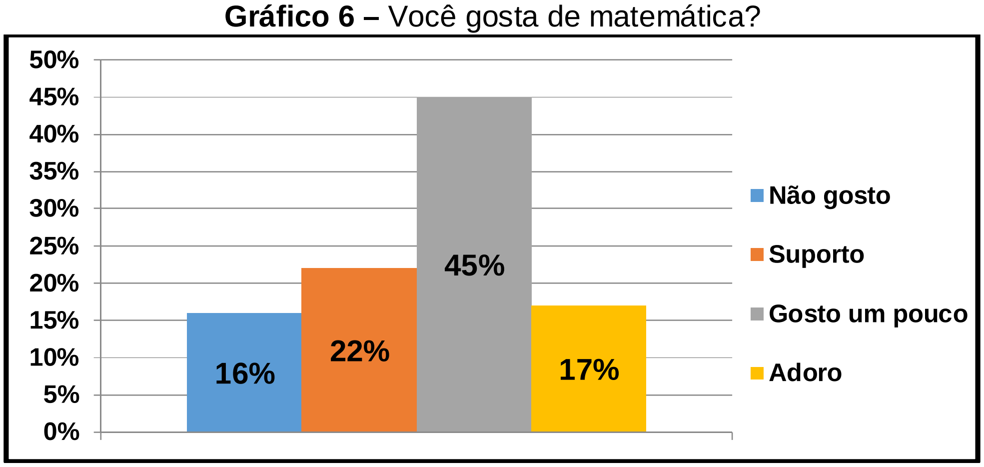
A partir da análise dos dados fica claramente constatado que os estudantes não têm ajuda de ninguém nas tarefas de matemática, com 63% afirmando isso. Buscamos respostas para essa questão, pois de acordo com a Constituição Federal (1988), no artigo 205 “A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, (...)”. A lei 8069/1990, que diz respeito ao Estatuto da Criança e Adolescente (ECA), no artigo 22 diz que “Aos pais incube o dever de sustento, guarda e educação dos filhos menores**,** (...)” e, por fim a Lei 9394/1996, Leis de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), no artigo 2º nos afirma que “A educação, dever da família e do Estado (...)”, fica evidente nesta última lei a importância da família na vida escolar dos estudantes.

Ainda segundo Fevorini (2009, p. 11 – 12) “o acompanhamento da vida escolar dos filhos pelos pais é um fator importante para a aprendizagem e para o sucesso acadêmico da criança e do jovem”. Isso nos mostra que a família não tem cumprido seu papel, dados comprovados pela pesquisa, pois esse acompanhar faz toda a diferença na vida escolar de uma criança ou de um jovem, conforme a autora citada mostra em sua dissertação.

3.7.2. Categoria 2 – Currículo

Nesta categoria ficou para serem analisados 6 questões do questionário (q6, q10, q16, q17, q18 e q22) referente ao currículo, onde a questão 6 queria saber se o estudante “gosta de matemática?”. Observe as respostas no gráfico 6.

Gráfico 6 – Você gosta de matemática?



Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Para Mandarino (2004) o gosto por esta disciplina pode estar ligado a questões metodológicas, curriculares e interpessoais relacionadas com o ensino e aprendizagem da matemática. A autora considera que a formação docente e a postura em relação à matemática podem ser decisivas no desenvolvimento, nos estudantes, do gosto por esta área do conhecimento.

Miguel (2005) analisou as dificuldades de professores e estudantes para compreender os conceitos matemáticos. Constatou-se que nas séries iniciais as crianças geralmente gostam da matemática, porém esta afinidade vai declinando ao longo dos anos, passando muitas vezes a aversão. Além de verificar uma série de outros fatores que levam a isso, como formação deficitária do professor, condições inadequadas de trabalho (por exemplo, infraestrutura escolar), dificuldades dos estudantes, currículos defasados, entre outros.

De acordo com Sanchez (2004) a falta de preparo dos professores pode gerar tais dificuldades, seja porque a organização dos conteúdos não está bem sequenciada, seja porque a metodologia é muito pouco motivadora ou ineficaz. Frente a essas dificuldades, é importante definir as estratégias pedagógicas em relação aos conteúdos, pois a problemática na Matemática Básica é um dos fatores determinantes para a desmotivação dos estudantes na aprendizagem dos conteúdos não apenas na presença do professor em sala de aula, mas também em estudos complementares, desestabilizando a rotina de estudos.

Os autores citados reforçam o que apareceu na pesquisa, pois apenas 62% dos entrevistados gostam um pouco ou adora a disciplina matemática, e isso chega a ser até um bom resultado se levarmos em consideração o que D'Ambrosio (2011. p. 31) afirma em seu livro "Educação matemática: da teoria à prática" que a matemática que é ensinada nas escolas é morta. Em Santos (2004, p. 67 – 68) temos um estudo de caso em que um estudante repetente não ver a hora de completar seus 15 anos para poder sair da escola com o consentimento do pai, pois ele diz que está ficando velho e há um mundo de coisas que precisa apreender.

A questão 2 respondida pelos estudantes, referente a frequência que os estudantes estudam matemática fora da escola, nós obtivemos os seguintes resultados em que 27% estudam só na véspera da prova, 29% no período de prova, 31% somente nos finais de semana, 7% estudam todo dia e para finalizar, 6% responderam não estudar fora da escola. Isso é preocupante, pois analisando os gráficos 02, 03 e 04 percebemos que esses estudantes não têm nenhum acompanhamento por parte dos seus responsáveis e isso reflete na vida escolar deles. Segundo Brum (2013) os pais têm se omitido da vida escolar de seus filhos, e estão cada vez mais terceirizando sua educação, jogando essa responsabilidade para a escola.

Mendes (2012) afirma que "os alunos em geral não sabem estudar. Passamos doze anos na educação básica e não temos uma aula de como estudar. E somos cobrados por uma tarefa que não aprendemos a fazer". Então como os estudantes vão gostar de algo que os mesmos não têm domínio e a grande maioria não conta com ninguém que possa lhes ajudar nessas tarefas? É isso que buscamos alcançar neste trabalho.

Mas Pacheco e Andreis (2015) completam dizendo que “sem a orientação da família, os alunos não têm a organização necessária para o estudo, deixando tudo para a última hora. Esta falta de apoio pode ter como consequência o desinteresse pelas atividades, acarretando um baixo índice de rendimento em Matemática”.

Outro fato surpreendente foi observado nas respostas da seguinte questão 16: Você já estudou Matrizes (Produto de Matriz, matriz transposta e matriz inversa)? Pois, conforme os dados informados 94% dos estudantes já estudou esse assunto. Segundo Messias, Sá, Vilhena (2006, p. 2) afirmam que:

> [...] No que concerne ao processo de ensino-aprendizagem de matrizes, podemos inferir que este se caracteriza pela utilização de regras que, de um modo geral, apresentam-se completamente desvinculadas da realidade dos alunos. [...] Percebemos ainda, que poucos são os livros didáticos adequados para auxiliar o ensino de matemática, particularmente de matrizes, dado que muitos apresentam confusões conceituais, linguagem inadequada, raras contextualizações e exercícios repetitivos, o que prejudica o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático dos educandos.

Apesar da maioria dos estudantes afirmarem que já estudaram o assunto de matrizes, concordamos com os autores acima, pois o fato de afirmarem que viram o assunto não quer dizer que eles realmente aprenderam esse conteúdo. Ainda mais se foram ensinados da forma descrita pelos estudantes, o que fortalece esses comentários são as respostas coletadas e que foram organizadas no quadro 14, na página 126. Provando a resposta da maioria dos estudantes quando responderam que já estudaram o assunto de Matrizes.

Também foi perguntado aos estudantes, na questão 18, se já havia estudado o assunto de matriz, que informasse o ano/série, as respostas foram as seguintes: 89% dos estudantes estudou o assunto no 2º ano do Ensino Médio, 3% dos estudantes estudou no 3º ano do Ensino Médio, 2% afirmaram que estudaram no 9º ano do Ensino Fundamental e 6% dos estudantes afirmaram que nunca estudaram o assunto.

Sendo assim, o assunto de Matrizes é um conteúdo a ser ministrado no ensino médio como consta nas Orientações Curriculares. Os conteúdos básicos estão organizados em quatro blocos: Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade. [...] O estudo de Matrizes é essencial nesse bloco de conteúdo. (BRASIL, 2006, p. 70 e 79).

A pesquisa nos revelou que 2% dos estudantes estudaram o assunto de matrizes no Ensino Fundamental. Esses dados pareceram-nos, de início, incoerente, mas de acordo com os PCNs+ do Ensino Médio nos afirmam que:

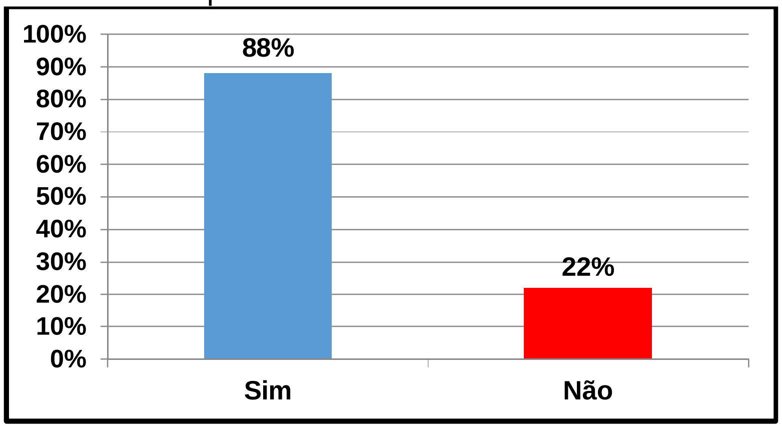
> [...] Com relação à álgebra, há ainda o estudo de equações polinomiais e de sistemas lineares. Esses dois conteúdos devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo graus e sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares 3 por 3, aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas do conhecimento. Uma abordagem mais qualitativa e profunda deve ser feita dentro da parte flexível do currículo, como opção específica de cada escola (BRASIL, 2002, p. 122).

Então, quando os estudantes afirmam que estudaram o assunto de matrizes no Ensino Fundamental, deve ser com relação a resolução de equações de primeiro e segundo graus e também quando se refere aos sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas, conforme abordado pelos PCNs+ Ensino Médio citado acima. Também, é importante o comentário de Lima (2011) apud Cardoso (2014, p. 28) ao dizer que:

> [...] Matrizes é um assunto que aparece no Ensino Médio meio que caído do céu, ou do inferno, não sei; sem nenhuma justificativa, assim plum! Com definições, uma delas até normal, somar matrizes, você soma elemento a elemento, mas multiplicação de matrizes é um negócio que caiu do céu. De onde veio isso? Pra que é que serve?

Quando perguntado aos estudantes se “Seu professor de matemática demonstra domínio do conteúdo Matrizes?” as respostas foram 88%, que sim e 22% que não, conforme o gráfico 7.

Gráfico 7 – O professor demostra domínio do conteúdo?



Fonte: Pesquisa de campo (2019)

É importante destacar que os estudantes percebem quando o professor está preparado didaticamente e encontra-se organizado para administrar as aulas. Na BNCC (2018) notamos referência em contribuir para o alinhamento e orientação de ações e políticas públicas nos três entes da federação, para a formação de docentes. Formação de professores será norteada pelas regras da BNCC (2018), [...] a formação inicial e continuada deve ser baseada em três dimensões: conhecimento, prática e engajamento. A dimensão do conhecimento está relacionada ao domínio dos conteúdos. (BRASIL, 2018, p. 21).

Segundo o Conselho Nacional de Educação (CNE – 2015), na resolução nº 2, de 1º de julho de 2015, no artigo 3º, a formação inicial e a formação continuada destinam-se, respectivamente, à preparação e ao desenvolvimento de profissionais para funções de magistério na educação básica em suas etapas – Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio – e modalidades – Educação de Jovens e Adultos (EJA), Educação Especial, Educação Profissional e técnica de Nível Médio, Educação Escolar Indígena, Educação do Campo, Educação Escolar Quilombola e Educação à Distância. (BRASIL, 2015, p. 3).

Conforme consta na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, 1996) no artigo 62º, a formação de docentes para atuar na educação básica far-se-á em nível superior, em curso de licenciatura plena, [...]. Já no § 2º, a formação continuada e a capacitação dos profissionais de magistério poderão utilizar recursos e tecnologias de educação à distância. (BRASIL, 1996, p. 43 – 44).

Apesar de termos leis que amparam a capacitação dos profissionais da educação, pouco incentivos temos visto por parte dos governos nessa questão. De acordo com Melo (2014, p. 12), “É amplamente reconhecido que a formação do professor no Brasil é um dos cursos superiores de pior qualidade, [...] O exercício da autonomia profissional têm como pré-requisito a competência pedagógica e didática que a grande maioria dos professores não tem porque não lhes foi dada oportunidade de aprender.” Isso é preocupante, pois muitas pessoas estão tendo acesso as Licenciaturas, mas estás nem sempre são as opções escolhida em primeiro lugar por eles nos cursos de acesso, como o ENEM por exemplo.

Por fim, chegamos à questão 22 desta categoria que queria saber dos estudantes se: Com base na sua experiência quando você estudou Matrizes (Produto de Matrizes, Transposta e Inversa) preencha o quadro.

O quadro 14 foi construído com base nas respostas dos próprios estudantes participantes da pesquisa que nos revelou os seguintes dados, onde fica claro e nos confirmam as respostas já dadas antes, quando a maioria, que corresponde a 89%, responderam que sim, sobre a questão que perguntava se eles já haviam estudado o assunto de matriz.

É importante observarmos que quando a pergunta era “você lembra-se de ter estudado?”, em média mais de 50% responderam que sim, que se lembrava de ter estudado os tópicos referentes ao assunto de matrizes. Quando a pergunta era “Qual grau de dificuldade que você teve para aprender?”, referente aos tópicos de matrizes, a média das respostas considerada Regular foi de 46%, sendo esta a mais destacada pelos estudantes.

Quadro 14 – Você lembra-se de ter Estudado o conteúdo? E qual o grau de dificuldade que teve?

CONTEÚDO		Você lembra de ter estudado?		Qual grau de dificuldade que você teve para aprender?				
		Sim	**Não**	**MF**	**F**	**R**	**D**	**MD**
01	Ideia de Matriz	81%	19%	6%	33%	43%	15%	3%
02	Definição de Matriz.	85%	15%	9%	35%	42%	12%	2%
03	Representação genérica de Matriz.	48%	52%	4%	18%	47%	25%	6%
04	Matriz quadrada	75%	25%	9%	32%	37%	18%	4%
05	Matriz identidade	76%	24%	13%	33%	35%	15%	4%
06	Matriz nula	87%	13%	18%	27%	40%	11%	4%
07	Matriz transposta.	81%	19%	13%	27%	46%	11%	3%
08	Igualdade de Matrizes.	63%	37%	8%	17%	52%	20%	3%
09	Problemas sobre igualdades de Matriz.	60%	40%	6%	17%	58%	16%	3%
10	Adição de Matrizes.	76%	24%	16%	28%	41%	12%	3%
11	Problemas sobre Adição de Matriz	63%	37%	11%	21%	43%	20%	5%
12	Propriedades da Adição de Matriz (Comutativa, Associativa, Oposto e o Elemento Neutro).	47%	53%	3%	14%	52%	25%	6%
13	Problemas sobre Propriedades da Adição de Matriz	47%	53%	8%	16%	53%	20%	3%
14	Matrizes Opostas.	73%	27%	12%	25%	45%	15%	3%
15	Problemas sobre Matriz Opostas.	62%	38%	8%	22%	45%	20%	5%
16	Subtração de Matrizes.	81%	19%	10%	32%	40%	14%	4%
17	Problemas sobre Subtração de Matrizes.	70%	30%	10%	22%	46%	16%	6%
18	Multiplicação de um número real por uma Matriz.	59%	41%	5%	18%	53%	16%	8%
19	Problemas de Multiplicação de número real por Matriz.	49%	51%	5%	14%	53%	19%	9%
20	Produto de Matrizes.	72%	28%	7%	22%	46%	20%	5%
21	Problemas sobre Produto de Matrizes.	62%	38%	9%	15%	49%	21%	6%
Média das Respostas		67,48 %	32,52 %	**9,05 %**	**23,24 %**	**46%**	**17,19 %**	**4,52 %**

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Analisando o quadro 14, podemos destacar que os estudantes, em suas respostas, marcaram que os assuntos de Matrizes, em relação ao grau de dificuldade, ficou em média, abaixo de 5% no quesito Muito Difícil, destacado no quadro 14 pela cor vermelha. Enquanto que no grau de dificuldade Difícil, os resultados, em média, ficaram um pouco acima dos 17%, este destacado no quadro 14 pela cor verde.

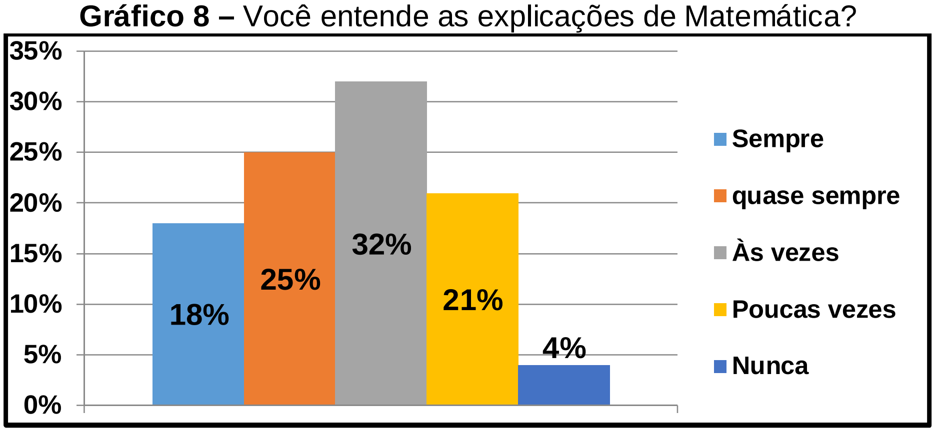
Porém, quando observamos as médias dos graus de dificuldades, Regular e Fácil destacado no quadro 16 pela cor amarela, percebemos que os resultados foram, respectivamente, 46% e 23,24%. Isso deixa claro que os estudantes egressos lembraram de terem estudado o assunto de Matrizes e isso, em média com mais de 67% dos estudantes afirmando lembrarem do assunto.

O estranho é esses mesmos estudantes demostrarem um comportamento incomum, pois o normal era que com o avanço do assunto a dificuldade aumentasse. Porém não foi isso que a pesquisa nos revelou.

3.7.3. Categoria 3 – Impressões dos Estudantes Sobre as Metodologias de Ensino

Nesta categoria iremos analisar 6 perguntas do questionário (q11, q12, q13, q19, q20, q21) referente a metodologia. A primeira pergunta, de número 11 feita aos estudantes, diz respeito a “Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?”, com relação a metodologia, obtivemos os seguintes dados.

Gráfico 8 – Você entende as explicações de Matemática?



Fonte: Pesquisa de campo (2019)

De acordo com o gráfico 8, percebemos que 32% dos estudantes responderam que às vezes conseguem entender as explicações de matemática e 43% entende sempre e quase sempre as explicações. Enquanto 25% dos entrevistados afirmam que poucas vezes e nunca conseguem entender as explicações de matemática.

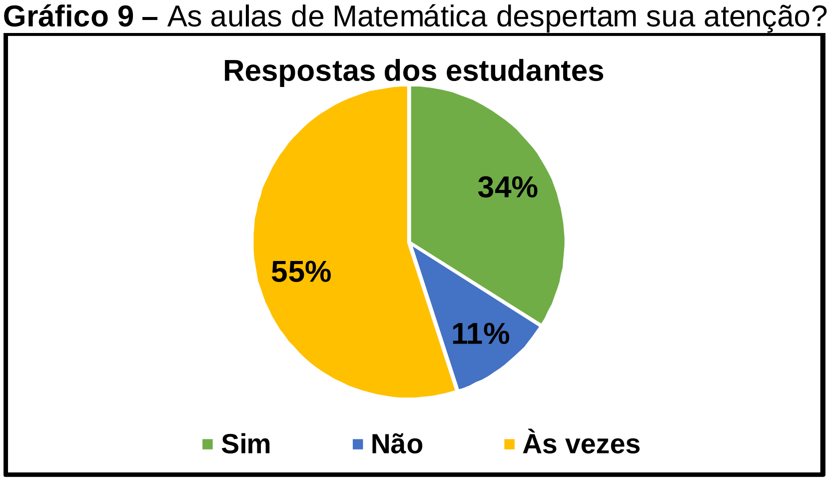
É preocupante o que está ocorrendo nas escolas de nosso país, pois Mendes (2012) vem afirma que o professor prepara a aula, ensina o conteúdo, passa exercício, provas, recuperação e percebe que o estudante aprendeu o básico do básico, às vezes, nem isso. O que está de acordo com Santos (2004) onde diz que "as práticas curriculares são práticas disjuntivas, muitas vezes sem sentido para os alunos, distante de uma realidade cotidiana que, na maioria das vezes, não produzem significado e, nas quais não há significado, não há aprendizagem".

Porém, quando grande parte dos estudantes afirmam que a explicação do professor é boa, significa que fazem alusão ao domínio de conteúdo que eles possuem fato este, enfatizado por Ângelo (2012).

Desse modo, a metodologia precisa ser revista para que não haja prejuízo na aprendizagem dos estudantes, pois como veremos a seguir, as aulas até tem despertado a atenção da maioria deles, mesmo assim, há uma margem considerável de estudantes que não estão conseguindo compreender os assuntos de Matemática em sala de aula.

A questão 12 perguntava se "as aulas de Matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?". Apresentamos as respostas dos estudantes no gráfico 9 abaixo, acompanhe os resultados.

Gráfico 9 – As aulas de Matemática despertam sua atenção?



Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Ao observarmos as respostas dos estudantes no gráfico, percebemos que 34% deles responderam que sim, as aulas têm despertado sua atenção em apreender o conteúdo ministrado. Outros 55% dos estudantes responderam que às vezes as aulas ministradas despertam sua curiosidade e com isso sua atenção, mas 11% dos estudantes entrevistados responderam que as aulas não tem despertado sua atenção nos conteúdos ministrados.

Destacamos, neste ponto, o que Masetto (2012) apud. Paixão (2014, p. 239) diz quanto à participação ativa dos estudantes nas aulas.

> Ações do aluno para que possa aprender o que se propõe; que a aprendizagem desejada engloba, além dos conhecimentos necessários, habilidades, competências, análise e desenvolvimento de valores. Não há como promover a aprendizagem sem a participação e parceria dos próprios aprendizes. Aliás, só eles poderão “aprender”. Ninguém aprenderá por eles.

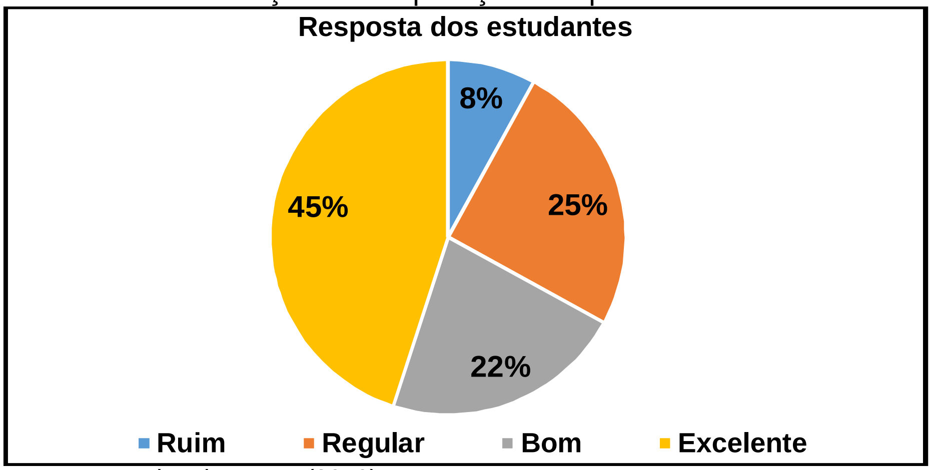
Mendes (2012) vem confirmar o que Paixão (2014) expõe ao dizer que o diagnóstico compartilhado por profissionais de educação mundo afora é que o modelo de aula expositiva tradicional está falido, pois ensina pouco, e não desenvolve as habilidades necessárias para o século XXI, que são os novos paradigmas para o ensino. Por isso que 66% dos estudantes responderam que as aulas, às vezes, despertam sua curiosidade e outros estudantes desse mesmo grupo afirmaram que essas mesmas aulas não tem despertado interesse algum neles.

Outra, refere-se a q13, em que perguntava se “Você consegue relacionar os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula com seu dia a dia?”. Obtivemos os seguintes dados em que 23% afirmaram que sim, conseguem relacionar os conteúdos de matrizes com seu dia a dia, 56% responderam que às vezes conseguem relacionar e os demais, que correspondem a 21%, responderam que não.

Esses resultados obtidos nos mostram que dos 34% que responderam que sim na questão anterior, representam agora apenas 23% dos que conseguem relacioná-las com o seu cotidiano. A predominância de que os estudantes relacionam os conteúdos com o cotidiano vai ao encontro do que afirma D’Ambrósio (1989, p. 2) o estudantes, acreditando e supervalorizando o poder da Matemática formal perde qualquer autoconfiança em sua instituição Matemática, perdendo dia a dia, o seu bom senso matemático.

A questão 19 perguntou: Como você avalia as explicações do seu professor de matemática? Para essa questão foi gerado o gráfico 10 com as respostas dos estudantes.

Gráfico 10 – Avaliação das explicações do professor de matemática.



Fonte: Pesquisa decampo (2019)

Nesse gráfico observamos que 67% dos estudantes afirmam que as explicações do professor de matemática é boa ou excelente e isso está de acordo com o que Werneck (2008, p. 26) aborda, pois “Se o aluno, ao concluir o curso numa escola, consegue seguir seus estudos onde desejar e com a competência que os títulos conferem, esta escola é, indiscutivelmente, boa”.

Porém, o gráfico revela também que 33% dos estudantes pesquisados afirmaram que essas mesmas explicações são regular ou ruim e isso merece uma preocupação, pois de acordo com Werneck (1992, p. 14 – **grifo nosso**) que destaca:

> O professor pode estar em sala, no entanto, não sabe se há algum ensino. Enquanto espera-se o tempo passar tudo pode acontecer. Na maioria das vezes nem provas ocorrem, há apenas uma nota de participação dentro do processo de auto – avaliação, onde cada aluno dá para si aquilo que julgar justo. Ora, diante do nada, qualquer acúmulo de conhecimento pode merecer a nota máxima. Distorce-se a aplicação dos conhecimentos de auto – avaliação, importante para a vida dos profissionais futuros, avilta-se o processo de participação e, em nome de muita coisa séria, instala-se a didática do fingimento, agradando a gregos e troianos. Os alunos, em casa, nada fazem, os professores, por sua vez, nada corrigem. Uns **fingem ensinar**, enquanto outros **fingem aprender**.

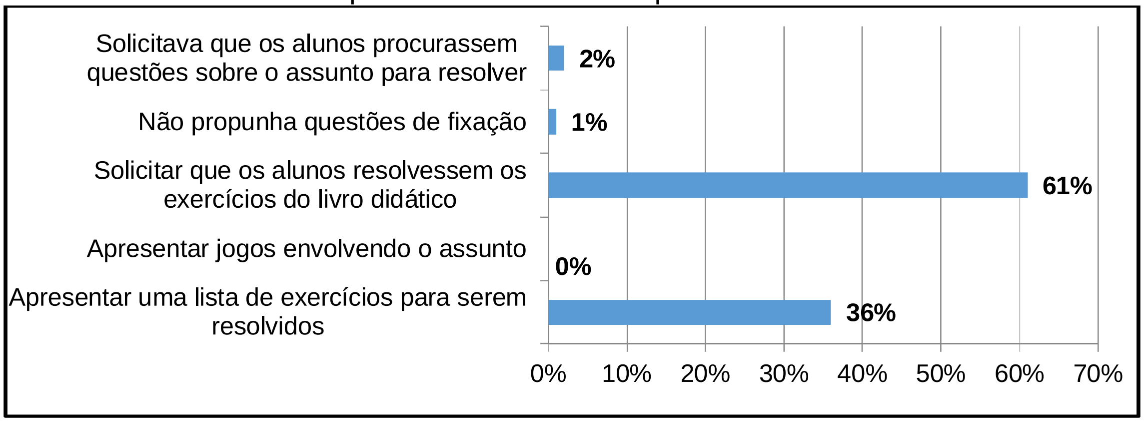
Ao nosso ver, Werneck (1992) tem uma visão bem ampla do que ocorre, realmente, em muitas escolas e essa realidade não é exceção da escola pesquisada por nós.

Questionados sobre a maneira que o professor iniciam as aulas, na q20, foram obtidos os seguintes resultados em que a grande maioria, 79% responderam que as aulas iniciaram pela definição, seguida de exemplos e exercícios. Mostrando que o Ensino Tradicional ainda se faz presente nas aulas de matemática. 12% responderam que as aulas iniciaram com a história do assunto para depois explorar os conceitos;

7% responderam que as aulas iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto e apenas 2% responderam que as aulas iniciaram com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo.

Para finalizar essa categoria, temos as respostas da q21, onde os estudantes deveriam informar como o professor costumava praticar o conteúdo de Matrizes, e o resultado registramos no gráfico 11.

Gráfico 11 – Como o professor costumava apresenta o assunto de Matrizes?



Fonte: Pesquisa de campo (2019)

É importante observar que da forma como o assunto vem sendo apresentado e trabalhado com os estudantes é preocupante, pois de acordo com o resultado da provado SISPAE (2016), que encontra-se no Anexo A na página 293, em que o grau de concordância (em %) dos professores por ano escolar, em relação às suas práticas pedagógicas, nos apresenta alguns resultados em que os professore do Ensino Fundamental, de modo geral, tira mais tempo para organizar suas aulas, metodologias, correção do dever de casa, dentre outros, do que os professores do Ensino Médio que, em todas as práticas analisadas, tiram pouco tempo para organizar essas mesmas práticas feitas no Ensino Fundamental.

De acordo com os resultados divulgados pelo SAEB (2017), as metas almejadas, tanto para o Ensino Fundamental como para o Ensino Médio pelo Estado do Pará não tem sido alcançado nas sete últimas edições, conforme observamos no gráfico que está nos anexos B e C nas respectivas páginas 294 e 295. O Ensino Fundamental até que está próximo da meta, mas quando analisamos os resultados do Ensino Médio, percebemos que o Estado do Pará está bastante longe de se aproximar dessas metas, de acordo com o gráfico, que encontra-se no Anexo D na página 296, onde mostra a classificação dos estados quanto à nota do IDEB.

É interessante destacar que o assunto de Matrizes está presente nos descritores do SISPAE, como em: Resolver situações-problema por intermédio de sistemas lineares até a 3ª ordem, na habilidade MPA 14 e Interpretar tabelas e gráficos de frequências a partir de dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, que está na habilidade MPA 35. Destacando a importância deste assunto para a vida acadêmica dos nossos estudantes.

3.7.4. Categoria 4 – Impressões dos Estudantes Acerca das Avaliações de Aprendizagem

Nesta categoria analisaremos 3 questões (q5, q14, q15) do questionário referente a avaliação, além do teste de conhecimento que foi aplicado. A primeira pergunta, referente a q5 queria saber se os estudantes já tinham ficado em dependência e a resposta foi que 95% dos entrevistados nunca ficaram em dependência e apenas 5% deles já ficaram em dependência.

A próxima q14 do questionário, queria saber como o estudante se sentia diante de uma avaliação de matemática. 48% responderam que ficam preocupados com a avaliação de matemática, já 30% dos estudantes afirmaram ficarem tranquilos diante de uma avaliação de matemática. Outros 10% afirmaram que ficam com medo da avaliação de matemática, 6% ficam com calafrios, 4% contentes e 2% ficam com raiva.

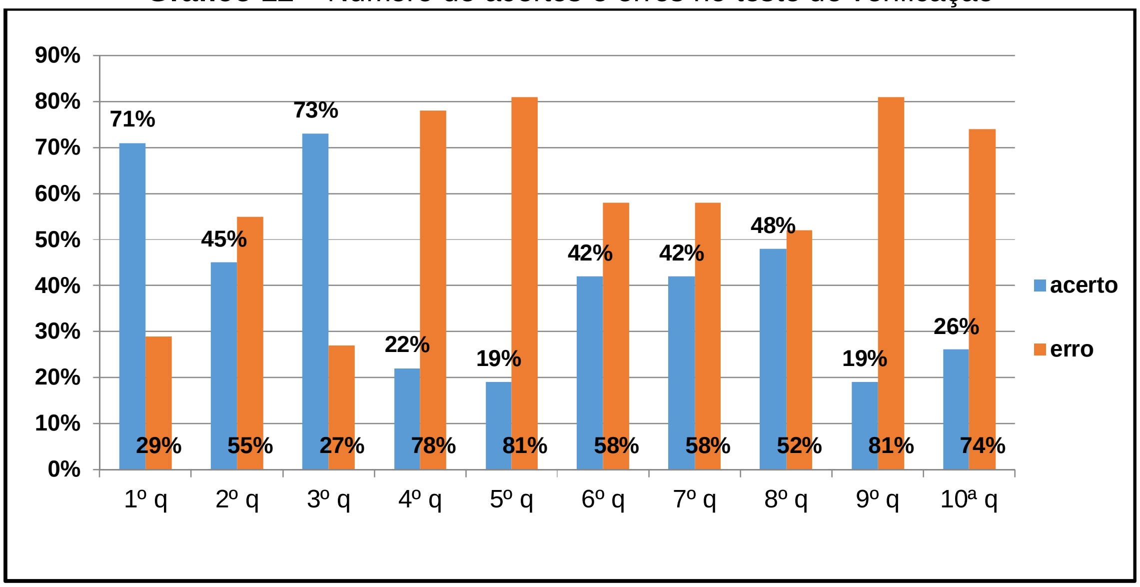
A avaliação deve ser uma orientação para o professor na condução de sua prática docente e jamais um instrumento para reprovar ou reter estudantes na construção de seus esquemas de conhecimento teórico e prático. Reprovar, selecionar, classificar, filtrar indivíduos não é missão do educador. Outros setores da sociedade devem se encarregar dessa missão. (D'AMBRÓSIO, 2001, p.98)

Para finalizar o questionário chegamos à última q15, sobre a categoria avaliação. Essa questão queria saber dos estudantes quais eram as formas de atividades ou avaliação que o professor de matemática mais utilizava para verificar a aprendizagem. Obtivemos os seguintes resultados, 65% responderam que o professor usava provas/simulados para fazer a avaliação, 17% responderam que eram usados testes semanais, 13% responderam que o professor usava outros meios para fazer a avaliação e apenas 5% responderam que o professor utilizava seminários para fazer a avaliação.

Segundo D’Ambrósio (2001, p.98), embora o papel do educador não seja de transmitir, testar e registrar, essa metodologia ainda vem sendo executada por muitos professores, onde testam seus estudantes através de provas e testes, e reforça: “A situação de exame ou teste é uma cobrança artificial, sem qualquer elemento motivador além de nota ou conceito” e, “exames e testes dizem quase nada sobre aprendizagem e criam enormes deformações na prática educativa.”. Isso nos ajuda a compreender os resultados obtidos pela maioria dos estudantes na pergunta anterior.

Temos, em seguida, o gráfico 12, que traz o resultado de um teste de verificação respondido pelos estudantes, observe os resultados.

Gráfico 12 – Número de acertos e erros no teste de verificação



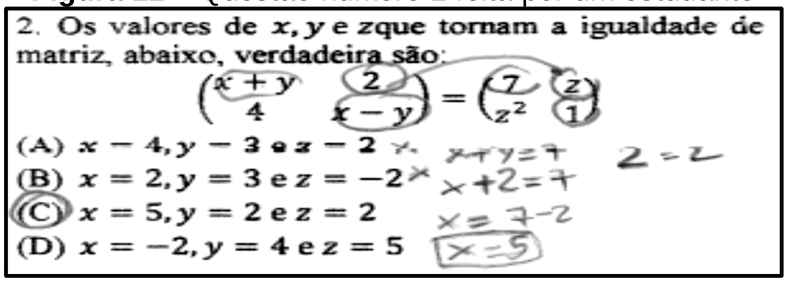
Fonte: Pesquisa de campo (2019)

O gráfico acima nos mostra que na análise desses dados, apenas em duas questões os estudantes conseguiram 72% de acertos (q1 e q3), em quanto nas outras oito questões o resultado ficou abaixo dos 50%, em média.

Gitirana (2006) aborda sobre o desenvolvimento da aprendizagem do estudante a partir do planejar-avaliar-reavaliar a atividade docente. Também Ferraz (2003) nos chama a atenção para a importância da compreensão do ato de avaliar, apontando diferentes instrumentos e possibilidades de fazê-lo de forma renovadora.

O teste foi formulado de forma objetiva, embora muitos estudantes, de fato, resolveram seus testes e deixaram registrados nos mesmos suas anotações como veremos a seguir um exemplo em que houve erro e em outro que houve acerto, acompanhe as figuras 14 e 15.

Figura 11 – Questão número 2 feita por um estudante



2. Os valores de x, y e zque tornam a igualdade de matriz, abaixo, **verdadeira são**:

$$\begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 4 & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & z \\ z^2 & 1 \end{pmatrix}$$

(A) $x - 4, y - 3$ e $z - 2$ x. $x+y=7$ $2=2$

(B) $x = 2, y = 3$ e $z = -2$ x $x+2=7$

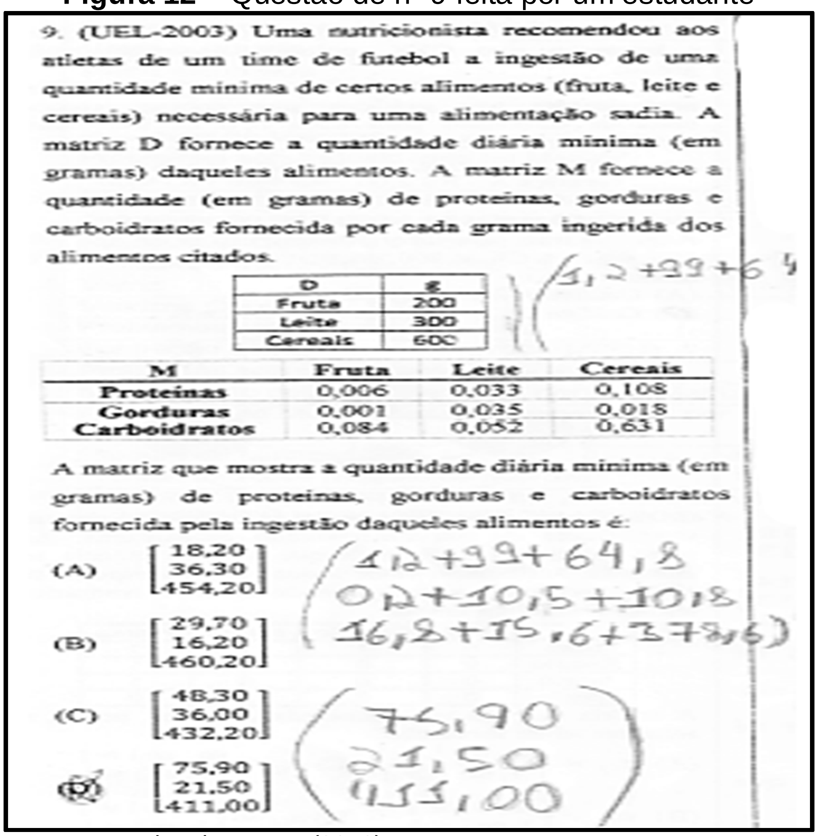
(C) $x = 5, y = 2$ e $z = 2$ $x=7-2$

(D) $x = -2, y = 4$ e $z = 5$ $\boxed{x=5}$

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Os obstáculos encontrados pelos estudantes são considerados estágios necessários à exploração de problemas e podem ser utilizados, pelo professor ou pelos próprios estudantes, para novas descobertas e para discussão dos conceitos envolvidos em um determinado problema matemático. (CURY, 1994, p. 132).

Figura 12 – Questão de nº 9 feita por um estudante



9. (UEL-2003) Uma nutricionista recomendou aos atletas de um time de futebol a ingestão de uma quantidade mínima de certos alimentos (fruta, leite e cereais) necessária para uma alimentação sadia. A matriz D fornece a quantidade diária mínima (em gramas) daqueles alimentos. A matriz M fornece a quantidade (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida por cada grama ingerida dos alimentos citados.

D	g
Fruta	200
Leite	300
Cereais	600

M	Fruta	Leite	Cereais
Proteínas	0,006	0,033	0,108
Gorduras	0,001	0,035	0,018
Carboidratos	0,084	0,052	0,631

A matriz que mostra a quantidade diária mínima (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida pela ingestão daqueles alimentos é:

(A) $\begin{bmatrix} 18,20 \\ 36,30 \\ 454,20 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 29,70 \\ 16,20 \\ 460,20 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 48,30 \\ 36,00 \\ 432,20 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 75,90 \\ 21,50 \\ 411,00 \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1,2+99+6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1,2+99+64,8 \\ 0,2+10,5+10,8 \\ 16,8+15,6+378,6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 75,90 \\ 21,50 \\ 411,00 \end{pmatrix}$$

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Na questão anterior o estudante resolveu obtendo a resposta correta, mostrando que apesar de ter visto o assunto de Matrizes no ano anterior, ainda se lembrava de como fazer as operações para se chegar ao resultado da questão.

Para Moraes (2013), o erro é um conhecimento, é um saber que o estudante possui e não a falta dele. Ele não considera que os erros demonstram aquilo que os estudantes não sabem, assim como não é possível assumir que os acertos demonstram aquilo que eles sabem. Os estudantes podem acertar um raciocínio por inúmeras razões sem ter, de fato, absorvido o conteúdo em questão.

Com esses dois exemplos, esperamos direcionar nossa sequência didática para obtermos realmente os resultados esperados na aplicação da sequência, levando em consideração que o erro faz parte do processo de aprendizagem e assim, concordamos com as ideias dos autores citados.

4. CONCEPÇÃO E ANÁLISE A *PRIORI*

Nesta seção apresentamos a concepção e a análise a priori que foram baseadas nas análises prévias realizadas. É aqui que expomos a fundamentação teórica que utilizamos, ou seja, o ensino de matemática por atividade, a qual foi a metodologia de ensino que embasou nossa sequência didática, com as análises a priori sendo completada com as questões de aprofundamento de cada atividade sobre Matrizes.

Também apresentaremos nesta seção o Pré – Teste e o Pós – Teste, composto pelas as mesmas questões, com as suas devidas análises a *priori,* que foram utilizadas para verificar o nível de conhecimento dos estudantes antes e depois da experimentação.

4.1. Fundamentação Teórica

Neste tópico apresentamos a fundamentação teórica que serviu como embasamento metodológico das atividades que constituem a sequência didática, que é o Ensino de Matemática por Atividade e o Momento do Ensino por Atividade.

4.1.1. Ensino de Matemática por Atividade

As atividades propostas em nossa sequência didática foram elaboradas levando em consideração o Ensino de Matemática por Atividade constituída sobre o ensino de Matrizes. Essas atividades têm o objetivo de oportunizar aos estudantes o protagonismo da sua própria aprendizagem, por proporcionar que eles mesmo possam fazer a sistematização do conhecimento, tornando-o mais ativo e participativo no processo educativos em à intervenção inicial do professor.

Segundo Sá (2009, p. 14 e 15) que destaca:

> [...] Desse modo a prática metodológica do ensino de Matemática por atividade dá oportunidade ao aluno de construir sua aprendizagem, por meio da aquisição de conhecimentos e redescoberta de princípios. Esse tipo de abordagem interativa permite ao aluno realizar um grande número de experimentos, interpretá-los para depois discuti-lo em classe com o professor e colegas.

Nessa proposta metodológica o professor passa a ter um outro papel, diferente do tradicional, no processo de ensino aprendizagem em que a colaboração mútua ocorra entre o professor e os estudantes durante toda a construção do saber. Sá (2009, p. 15, **grifo nosso**) afirma ainda que:

> [...] O êxito depende muito mais de um bom planejamento das atividades por parte dos professores e do envolvimento dos alunos nas resoluções das atividades. Assim, torna-se relevante que o professor **queira** e **acredite** que pode melhorar sua forma de ensino, acrescentando a ela qualidade e empregabilidade nos conhecimentos aprendidos. Imbuído dessas motivações, certamente ele buscará adaptar-se às condições da escola e às necessidades e nível de sua turma.

Com essa colaboração de Sá (2009 e 2019) apresenta as características do ensino por atividades que antes não encontrávamos destacado em Sá (2009, p. 16 e 17).

> 1) É diretivo
> 2) Tem compromisso com o conteúdo;
> 3) Tem compromisso com o desenvolvimento de habilidades para além do conteúdo;
> 4) É estruturado
> 5) É sequencial
> 6) Não está necessariamente associado à resolução de problemas
> 7) Leva em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes
> 8) Os resultados são institucionalizados ao final da atividade
> 9) Não dispensa a participação do professor
> 10) É adequado para formação de conceitos e acesso a resultados operacionais ou algorítmicos.
> 11) É iterativo entre estudantes e professor.

Assim, o autor afirma que essas características do Ensino de Matemática por Atividades são diferentes das demais tendências e com isso, busca a sua inserção no rol das tendências da Educação Matemática.

Deste modo, Sá (2009, p. 18) já chamava atenção para o fato de que no momento da elaboração das atividades alguns cuidados devem ser seguidos, quanto ao planejamento e execução das atividades de ensino, tais como:

> • As atividades devem apresentar-se de maneira auto-orientadas para que os alunos consigam conduzir-se durante a construção de sua aprendizagem;
> • Toda a atividade deve procurar conduzir o aluno a construção das noções matemáticas através de três fazes: a experiência, a comunicação oral das ideias apreendidas e a representação simbólica noções construídas;
> • As atividades devem prever um momento de socialização das informações entre os alunos, pois isso é fundamental para crescimento intelectual do grupo. Para que isso ocorra, o professor deve criar um ambiente adequado e de respeito mútuo entre os alunos e adotar a postura de um membro mais experiente do grupo e que possa colaborar na aprendizagem deles;
> • As atividades devem ter características de continuidade, visto que precisam conduzir o aluno ao nível de representação abstrata das ideias matemáticas construídas a partir das experiências concretas vivenciadas por ele;
> • De acordo com o modelo proposto por Dockweiller (1996), as atividades propostas pelo professor podem se apresentar de três maneiras: desenvolvimento, conexão e abstração, de modo que sejam sequencialmente

> apresentadas e possam contribuir para a construção gradual dos conceitos matemáticos.

O que nos chama atenção aqui é que o Ensino de Matemática por Atividade conduz e orienta o estudante no processo de ensino aprendizagem, desenvolvendo neles o prazer e o gosto por estarem apreendendo realmente a Matemática, seja pelo processo de descobertas ou ao fazerem generalizações através das verbalizações que estes, agora, demonstram ao comunicar seus avanços intelectuais aos seus parceiros de grupo ou ao professor.

Neste sentido Fossa e Sá (2008, p. 10 – 11) destacam que “O professor, geralmente, determina a agenda proposta, orienta a construção e valida os resultados, mas ao final das contas é o aluno quem deve fazer as construções.” E é isso que esperamos dos estudante no final do processo do Ensino por Atividade com o assunto de Matrizes, que eles sejam autônomos e capazes de realizar essas construções tendo a mínima interferência do professor. Sá (2009, p. 18) afirma que agora.

> [...] Cabe, porém, ao professor preocupar-se com o modo de elaboração dessas atividades e com as orientações dadas aos estudantes durante a realização das mesmas, pois isso poderá ser decisivo no processo de aprendizagem do aluno.

E assim, cada uma das atividades que fazem parte desta pesquisa foram estruturadas com título, com objetivo, com os materiais necessários e os procedimentos a serem realizados. Para a maioria das atividades solicitamos que fossem feitas observações para que se chegue a uma conclusão final que se aproxime da expressada nas análises *a priori,* que serão feitas no final de cada uma delas.

4.1.2. Momento do Ensino por Atividade

Os Momentos de Ensino por Atividade que abordaremos neste trabalho correspondem a um minicurso que Sá (2019) apresentou no Simpósio Nacional Sobre o Ensino e Pesquisa de Matemática no Contexto da Educação, Ciência e Tecnologia (SINEPEM), denominado de Possibilidades do Ensino de Matemática por Atividades, em maio de 2019, na cidade de Belém do Pará. Nele, o autor afirma que o ensino por atividade pode ser realizado por dois tipos de atividades a conceituação ou a redescoberta, ambas com características distintas.

A atividade de conceituação, segundo Sá (2019, p. 17), tem como objetivo principal “levar o estudante a perceber a ocorrência de determinado tipo de situação/tipo de objeto matemático." Segundo o autor, está definição do objeto percebido é o objetivo desta atividade de conceituação.

Já a atividade de redescoberta, segundo Sá (2019, p. 17), tem como objetivo "levar o estudante a descobrir uma relação ou propriedade relativa a um dado objeto ou operação matemática." O autor destaca que essa atividade corresponde a um momento em que o estudante faz a exploração do objeto matemático e ela antecederá a demonstração do resultado matemático.

Sá (2019) destaca que as atividades experimentais servem tanto para serem trabalhadas com atividades de conceituação ou como atividades de descoberta. O autor ressalta que apesar da diferença dos objetivos de cada uma, ambas devem ser desenvolvidas obedecendo os seguintes momentos: organização, apresentação, execução, registro, análise e institucionalização.

No quadro 15 fizemos uma síntese de cada um desses momentos para que o leitor compreenda as atribuições do professor e dos estudantes na situação em questão.

Quadro 15 – Os momentos do ensino por atividade e as contribuições/competências dos envolvidos

MOMENTOS	ATRIBUIÇÕES/COMPETÊNCIAS
Organização	Neste momento a turma deve ser, preferencialmente, organizada em equipes de no máximo 4 alunos e no mínimo 2. Mas pode também ocorrer de forma individual o que não é recomendável, pois isso não estimula a troca de ideias, que é fundamental para o processo de aprendizagem. O **professor** deve dirigir as ações, orientar a formação das equipes sem imposições, demonstrar segurança e evitar que os estudantes desperdicem tempo com ações alheias à organização da turma. Os **estudantes**, neste momento, são livres para escolherem o grupo que desejam participar.
Apresentação	Neste momento compete ao **professor** distribuir o material necessário para a realização da atividade, incluindo o roteiro que pode ser, preferencialmente, impresso ou disponibilizado no quadro dependendo das condições estruturais da escola. Esse material deve estar organizado em kits ou em envelopes para facilitar a distribuição dele. Enquanto isso, os **estudantes** escutam com atenção às orientações apresentadas pelo professor.
Execução	Este momento corresponde à etapa da experimentação que é quando o pesquisador manipula os materiais, realiza medidas e/ou cálculo, compara e/ou observa. Neste momento, espera-se que cada equipe realize os procedimentos estabelecidos para a atividade. O **professor** neste momento deve deixar as equipes trabalharem livremente, supervisionar o desenvolvimento das ações e auxiliar nas dúvidas que possam surgir em cada equipe no decorrer da realização do procedimento.

	Os **estudantes** neste momento devem procurar seguir as instruções previstas no roteiro da atividade, sem conversas paralelas ou atenção para assuntos alheios à atividade. Também devem evitar deixar o grupo ou ficar visitando outros grupos. Eles devem ter a oportunidade de agir para obter os resultados esperados, mas também precisam receber orientações cuidadosas quando existirem dificuldades ou duvidas para realizar alguma ação prevista na atividade. As orientações devem ser claras e precisas para permitir o prosseguimento da atividade sem constranger os estudantes. Quando um questionamento ou dúvida evidenciar que sua origem é fruto de uma falha das orientações contidas no procedimento ou da confecção do material a ser utilizado, o professor deve imediatamente socializar com a turma o fato e apresentar uma orientação que contorne o ocorrido e permita o prosseguimento da atividade, se possível.
Registro	Ele corresponde ao momento da sistematização das informações na pesquisa cientifica. Neste momento espera-se que **cada equipe** registrem as informações obtidas durante a execução dos procedimentos no respectivo espaço destinado no roteiro. O **professor** deve supervisionar o desenvolvimento das ações e auxiliar dirimindo as eventuais dúvidas que possam ocorrer durante o processo.
Análise	Neste momento espera-se que cada equipe, analise as informações que foram registradas e percebam as características do objeto matemático que desejar conceituar ou definir entre as informações registradas. Este é o momento em que os **estudantes** deverão ter o primeiro acesso à informação desejada pelo professor. Se durante a análise alguma equipe tiver dificuldade para apresentar uma relação válida a partir das informações registradas, o **professor** deve auxiliar a equipe por meio da formulação de questões que os auxiliem a perceberem uma relação válida. Caso ele não consiga fazer a equipe perceber o desejado deve deixar para o momento da institucionalização.
Institucionalização	É o momento em que o **professor** a partir das observações elaboradas pelas equipes apresentará o conceito ou definição planejada à turma. É muito raro no início os estudantes apresentarem observações próximas do conceito a ser apresentado. O professor, independente do formato das observações elaboradas pelas equipes, deve solicitar que um representante de cada equipe vá ao quadro e registre a(s) observação(ões) elaborada(s) por sua equipe. Após analisar as observações registradas o professor deverá destacar as características desejadas do objeto a ser definido e apresentar o conceito ou definição na forma padrão. Este momento é oportuno para que o professor teça considerações das características históricas sobre o conceito, caso seja possível, pois isso mostra o lado humano da produção do conhecimento matemática. Com a apresentação do conceito chega ao fim o momento da institucionalização e da atividade. O recomendado é que após a institucionalização seja proposto um conjunto de questões relacionadas com o conhecimento trabalhado na atividade.

Fonte: Adaptado de Sá (2019 - **grifo nosso**)

No contexto geral da aplicação das atividades, Sá (2019) afirma que é na primeira atividade onde emergem as primeiras duvidas/dificuldades por parte dos estudantes, por desconhecerem o processo e; ao realizarem as atividades que exige agora, a participação deles na construção de conclusões, através das observações feitas no produto matemático, que não podem atender as condições de um texto conclusivo. Porém o professor não deve preocupar-se caso esse fato venha a ocorrer.

Segundo Corrêa (2019, p. 142 e 143):

> [...] o professor ao realizar algumas perguntas durante o processo de elaboração da conclusão pode auxiliar em uma construção mais eficaz da mesma, levando à elaboração de uma conclusão adequada para atividade. E que a existência da possível demora na conclusão da atividade por conta da dificuldade na elaboração da construção da conclusão por parte da turma não deve ser encarada com preocupação, uma vez que o tempo gasto nestas atividades tende a diminuir a medida em que vão sendo desenvolvidas atividades de mesma natureza.

É isso que esperamos que aconteça com a aplicação da nossa sequência didática, pois conforme Corrêa (2019) e Sá (2019) o tempo planejado para cada seção tende a diminuir bastante e com isso esperamos que, em certo momento, possamos trabalhar mais de uma atividade por seção diminuindo assim o tempo da aplicação de nossa sequência.

4.2. Sequência Didática Sobre o Ensino de Matrizes

Para a elaboração da sequência didática composta por 10 atividades e por questões de aprofundamentos referente a cada atividade sobre o assunto de Matrizes. Selecionamos como tópicos os pontos de dificuldades obtidos em nossa análise prévia e, indicados pela revisão de estudos organizados no quadro 16 e na observação que tivemos ao elaborarmos o Mapa Conceitual, que encontra-se no apêndice H na página 311.

Quadro 16 –Tópicos abordados na Sequência Didática

Noção de Matriz

↓

Localização de elementos nas matrizes

↓

Número de elementos das matrizes

↓

Igualdades de matrizes

↓

Matriz transposta

↓

Matriz simétrica

↓

Adição de matrizes

↓

Matriz oposta

↓

Multiplicação de um número real por uma matriz

Fonte: Levantamento de dados do autor (2019)

Com esse levantamento de dados construímos uma sequência didática com o intuito de fazer com que os estudantes consigam resolver as atividades de forma independente e, caso necessite, o professor/pesquisador estará à disposição para esclarecer qualquer dúvida referente ao assunto trabalhado.

4.2.1. Atividade 1

Título: Matriz

Objetivo: Conceituar matriz.

Material: Roteiro da atividade, borracha, lápis ou caneta e papel.

Procedimento:

- Leia o texto;
- Observe as informações contidas nele;
- E com base na organização dessas informações, resolva a questão proposta.

Texto: O que é inflação e como ela afeta sua vida? (Adaptado de G1, 2018, p.1)

Você se surpreende ao lembrar que, com a mesma quantia que seria suficiente para comprar um carro zero no final dos anos 1990, não é possível adquirir mais que um modelo usado e não tão novo nos dias de hoje? Isso pode ser explicado pelos efeitos da inflação.

A inflação é o termo utilizado em economia para falar da alta dos preços de um conjunto de produtos e serviços em um determinado período.

Considere que um recenseador tenha levantado os seguintes dados referentes à inflação das cinco regiões brasileiras no primeiro semestre do ano. Após coletados, os dados foram os seguintes:

No mês 1: Norte 1,7%; Sul 2,0%; Centro-Oeste 1,8%; Nordeste 1,5%; Sudeste 1,0%

No mês 3: Sul 1,6%; Nordeste 1,2% Sudeste 1,3%; Norte 1,6%; Centro-Oeste 1,7%

No mês 2: Centro-Oeste 1,7%; Norte 1,8%; Nordeste 1,4%; Sudeste 1,2%; Sul 1,7%

No mês 4: Nordeste 1,1%; Sul 1,8%; Sudeste 2,0%; Centro-Oeste 2,4%; Norte 1,6%

No mês 6: Sudeste 2,0%; Centro-Oeste 2,1%; Sul 1,8%; Nordeste 2,8%; Norte 2,2%

No mês 5: Norte 2,8%; Nordeste 1,9%; Sudeste 2,5%; Sul 3,6%; Centro-Oeste 2,9%

Questão: Em um dia numa entrevista coletiva um agente recenseador do IBGE precisou de uma informação, mas em meio a tantos dados diferentes, não conseguiu localizá-la de imediato. Se o responsável pela organização dos dados fosse você, como a faria para melhorar a visualização de cada informação?

Observação:

Conclusão:

Análise *a priori* da atividade 1: A situação do texto indica que se faz necessário à organização dos dados em tabelas. Esperamos que através da observação desses dados e com algumas intermediações do professor, os estudantes sejam induzidos a construir uma tabela que facilitará a organização, a busca e a visualização dos dados, agora organizados. Essa situação tende a levar intuitivamente o estudante a trabalhar com matrizes, percebendo que é mais viável trabalhar com dados organizados em tabelas do que como estavam anteriormente, ou seja, completamente desorganizados.

Este trabalho está de acordo com os estudos de Brandão (2018) e de Rocha (2015). O primeiro buscou despertar o interesse e a curiosidade dos estudantes sobre o assunto de Matrizes, já o segundo apresentou uma forma de ensino – aprendizagem dos assuntos de Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares fazendo com que os estudantes se sentissem motivados e desafiados a aprender a matemática.

Apresentamos para cada atividade uma lista de questões de aprofundamento que foram elaboradas a partir de nossa busca por questões que contemplassem os tópicos do assunto de Matrizes. Dessa forma, as questões que apresentaremos nas listas foram baseadas em questões já existentes.

As principais fontes de pesquisa foram os sites de instituições que promovem preparação em processos seletivos para o ingresso em universidades, livros didáticos do Ensino Médio, além do banco de questões do ENEM, os quais estão referenciados e não constaram nas atividades de aprofundamento que foram entregue aos estudantes, para aprimorar cada atividade estudada.

4.2.2. Questões de Aprofundamento sobre a atividade 1

1. Escreva a matriz correspondente à tabela de notas abaixo:

	Matemática	Física	Química	Biologia
Ana	6	4	5	8
Antônio	5	7	5	5
Beatriz	5	6	7	4

2. Com relação à matriz do exercício 1, responda:

a) O que significa os números da 1ª linha?

b) O que significam os números da 2ª coluna?

c) O que significa o número da 3ª linha e 3ª coluna?

3. Durante o ano letivo um aluno registrou as notas obtidas, respectivamente nas 1ª, 2ª, 3ª e 4ª avaliações. Nas disciplinas de Matemática: 5,0; 8,0; 7,5 e 7,0; Português: 6,0; 7,0; 9,5 e 6,5 e Geografia: 10,0; 5,0; 6,5 e 8,0. Represente, por meio de matriz, esses dados e verifique se a visualização dessas notas ficou melhor.

4. A tabela mostra o consumo mensal, em quilogramas, de três alimentos básicos, durante um trimestre, por uma família. Escreva esses dados em forma de matriz.

	ABRIL	MAIO	JUNHO
Arroz	10	8	9
Feijão	4	5	6
Carne	5	7	10

5. Complete o quadrado da figura a baixo, de modo que as somas dos números inteiros das linhas, das colunas e das diagonais sejam iguais. Calcule a soma a + b + c.

d	b	−4
a	−3	c
−2	e	0

Fonte: 1) e 2) Dante (2017), 3) Corrêa (2019), 4) ENEM (2012), 5) Corrêa (2019).

Análise a priori: As questões de aprofundamento 1, são importantes para que os estudantes compreendam a definição de Matrizes, assim nas primeiras questões acreditamos que eles possivelmente não terão dificuldade para dá o significado de cada elemento situado em tabelas, linhas e colunas. Cremos que os estudantes, com base na atividade 1, conseguirão escrever as matrizes pedidas em outras questões, e com isso eles possam compreender a ideia inicial de Matrizes. Talvez ocorra algum obstáculo na 6ª questão e caso isso ocorra, o professor deverá intervir para que os estudantes possam superar tal obstáculo.

4.2.3. Atividade 2

Título: Localização de elementos da matriz

Objetivo: Descobrir uma maneira de descrever elementos em uma matriz.

Material: Roteiro da atividade, borracha, lápis ou caneta e papel.

Procedimento:

- Observe as matrizes dadas na tabela;
- Localize os elementos solicitados na tabela abaixo;
- Responda a questão proposta, após os elementos das Matrizes serem todos localizados.

	ELEMENTOS DA MATRIZ				
MATRIZ	a_{11}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & -5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} -15 & 1 & 2 \\ 10 & 8 & 5 \\ 2 & -7 & 10 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -4 & 5 \\ -6 & 25 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} -8 & 12 & 9 \\ 1 & 15 & 0 \\ -13 & 10 & -5 \end{pmatrix}$					
$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 7 \\ 3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$					

Questão: Qual a maneira mais ágil de localizar qualquer elemento em uma matriz?

Observação:

Conclusão:

Análise *a priori* da atividade 2: Os estudantes possivelmente não terão dificuldades nesta atividade e esperamos que eles consigam localizar, nas matrizes, os elementos solicitados, pelos conhecimentos adquiridos na atividade 1. Identificando assim linhas e colunas, com possibilidade, agora, de localizar qualquer elemento em uma matriz. Ao nosso ver, esta atividade possibilitará a reflexão sobre um padrão e com o reforço do professor, esperamos que o estudante consiga perceber algo próximo do padrão de localização (a_{ij}) que usualmente, utilizamos ao ensinar matrizes.

4.2.4. Questões de Aprofundamento sobre a atividade 2

1. Uma indústria tem quatro fábricas *A, B, C, D*, cada uma da qual produz três produtos 1, 2 e 3. A tabela mostra a produção da indústria durante uma semana.

	Fábrica A	Fábrica B	Fábrica C	Fábrica D
Produto 1	560	360	380	0
Produto 2	340	450	420	80
Produto 3	280	270	210	380

a) Quantas unidades do produto 2 foram fabricadas pela fábrica *C*?

b) Qual foi a Fábrica que produziu mais produto 3?

c) Qual foi a Fábrica que produziu menos produto 2?

d) Qual a quantidade de linhas e de colunas dessa tabela?

2. Um técnico de basquetebol descreveu o desempenho dos titulares de sua equipe em sete jogos através da matriz:

$$\begin{bmatrix} 18 & 17 & 18 & 17 & 21 & 18 & 20 \\ 15 & 16 & 18 & 18 & 22 & 21 & 18 \\ 20 & 19 & 20 & 21 & 14 & 14 & 22 \\ 18 & 22 & 20 & 20 & 18 & 22 & 23 \\ 19 & 18 & 12 & 14 & 20 & 17 & 18 \end{bmatrix}$$

Cada elemento $\mathbf{a_{ij}}$ dessa matriz é um número de pontos marcados pelo jogador de número **i** no jogo **j**. Responda:

a) Quantos pontos marcou o jogador de número 3 no jogo 5?

b) Quantos pontos marcou a equipe no jogo 4?

c) Quantos pontos marcou o jogador de número 2 em todos os jogos?

3. Em uma editora, as vendas de livros de Matemática, Física e Química, no primeiro trimestre de um ano, podem ser expressas pela matriz a seguir:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{Jan} & \text{Fev} & \text{Mar} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Matemática} \\ \text{Física} \\ \text{Química} \end{array} & \begin{bmatrix} 2000 & 3200 & 5000 \\ 4000 & 2000 & 2500 \\ 2500 & 2200 & 2300 \end{bmatrix}_{3x3} \end{array}$$

a) Se quisermos saber quantos livros de matemática foram vendidos em fevereiro qual local da matriz devemos procurar?

b) Qual elemento da matriz representa o número de livros de Física vendidos no mês de janeiro?

c) O que representa o número 5000, localizado na 1ª linha e 3ª coluna da matriz?

4. Determine a palavra que se obtém ao organizar os elementos da matriz A da seguinte maneira:

$$A = \begin{bmatrix} R & T & N & C \\ G & U & A & O \\ L & E & D & Z \\ B & V & J & I \end{bmatrix}$$

a) $a_{22}a_{42}a_{23}$

b) $a_{14}a_{23}a_{43}a_{22}$

c) $a_{21}a_{24}a_{44}a_{23}a_{41}a_{23}$

d) $a_{23}a_{41}a_{23}a_{14}a_{23}a_{12}a_{32}$

5. Dada a matriz A, responda:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & \pi & 0 & \frac{7}{8} \\ 1{,}5 & 8 & 19 & \sqrt{3} & -4 \end{bmatrix}$$

a) Qual é a ordem dessa matriz?

b) Que elemento está na posição:
i. a_{13}? ii. a_{24}? iii. a_{21}? iv. a_{25}?

c) Qual é a posição ocupada pelo elemento:
i. π? ii. -4? iii. $\frac{7}{8}$? iv. 8?

Fonte:1) Corrêa (2019), 2) Dantes (2000), 3) Silva (2016), 4) e 5) Balestri (2016),

Análise a priori: Para as questões de localização de elementos em uma matriz, esperamos que os estudantes não tenham dificuldade no entendimento das questões de 1 a 4, pois são parecidas. Porém, com essas questões, esperamos que os estudantes entendem a definição e consigam superar alguma dificuldade que possa ocorrer no entendimento do enunciado. Talvez ocorra alguma dificuldade nas questões 6 e 7, pois são questões que vão exigir bastante atenção dos estudantes para encontrar as palavras, no caso da questão 6, e descobri a semana e o mês, no caso da questão 7.

4.2.5. Atividade 3

Título: Número de elementos da matriz

Objetivo: Descobrir a relação que existe entre o número de elementos da matriz e a quantidade de linhas e colunas.

Material: Roteiro da atividade, borracha. lápis ou caneta e papel.

Procedimento:

- Preencha o quadro dado;
- Identifique o número de linhas, o número de colunas e o número de elementos de cada matriz dada;
- Após o preenchimento do quadro dado, responda a questão proposta.

Matriz	Número de linhas da matriz	Número de Colunas da matriz	Número de Elementos da matriz
$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$			
$B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 15 \\ 10 & 20 & 5 \\ 7 & 15 & 10 \end{pmatrix}$			
$C = \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 1 & 12 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$			
$D = \begin{bmatrix} 20 & 1 & 16 & -2 \\ 10 & 12 & 8 & 4 \end{bmatrix}$			
$E = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 1 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}$			
$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 9 & 15 & 1 \end{pmatrix}$			
$G = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 10 & 15 \end{pmatrix}$			
$H = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 28 \\ -1 & 12 & 80 \end{bmatrix}$			

$I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$			
$J = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$			
$K = (-1000)$			
$L = \begin{bmatrix} -1 \\ -90 \\ 7 \end{bmatrix}$			

Questão: Descubra uma maneira de se obter o número de elemento de uma matriz sem ter que contar esses elementos.

Observação:

Conclusão:

Análise *a priori* da atividade 3: Os estudantes possivelmente não terão dificuldade nesta atividade, pois ao fazerem a contagem do número de linhas e de colunas, esperamos que eles possam relacionar essa contagem com o número de elementos da matriz e assim determinar, intuitivamente, o padrão m × n, que será chamado de ordem da matriz. O professor deverá intervir caso alguma dúvida surja, sempre apontando caminhos que leve o estudante a reralizar suas conclusões.

4.2.6. Questões de Aprofundamento sobre a atividade 3

1. A tabela abaixo apresenta a população desocupada de fevereiro a junho de 2015 em São Paulo (SP).

População desocupada de fevereiro a junho de 2015 em São Paulo (SP) – 1000 pessoas		
Mês	**Homens**	**Mulheres**
Fevereiro	272	341
Março	277	328
Abril	313	338
Maio	349	358
Junho	335	401

Baseando-se nos dados apresentados, na tabela, resolva as questões abaixo.

a) Construa uma matriz 5 × 2 para representar as informações da tabela.

b) Na matriz do item a), o que representa:

I. A primeira coluna? iii. A terceira linha?

II. O elemento a_{51}? iv. O elemento a_{22}?

2. Considere a matriz A de ordem 4 × 4 abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 9 & 3 \\ 85 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 15 & 5 \\ 3 & 5975 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Determine:

a_{23} b) a_{12} c) a_{43} d) a_{33}

3. Escreva a matriz A = $(a_{ij})_{2\times3}$, em que a_{ij} = i – j.

4. A Transferência Eletrônica Disponível (TED) é uma transação financeira de valores entre diferentes bancos. Um economista decide analisar os valores enviados por meio de TEDs entre cinco bancos (1, 2, 3, 4, 5) durante um mês. Para isso, ele dispõe esses valores em uma matrizA = $[a_{ij}]$, em que $1 \leq i \leq 5$ e $1 \leq j \leq 5$, e o elementoa_{ij}corresponde ao total proveniente das operações feitas via TED, em milhão de real, transferidos do banco i para o banco *j* durante o mês. Observe que os elementos a_{ij} = 0, uma vez que TED é uma transferência entre bancos distintos. Esta é a matriz obtida para essa análise:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, qual o banco que transferiu a maior quantia via TED?

5) Em um final de semana, registrou-se o número de fregueses que fizeram compras em uma padaria, bem como o período (manhã, tarde ou noite) da visita.
Na matriz a seguir, o elemento a_{ij} indica o número de fregueses que foram à padaria no dia *i* e no período *j*.

$$\begin{bmatrix} 64 & 90 & 42 \\ 82 & 55 & 38 \end{bmatrix}$$

Sabendo que sábado e domingo correspondem, respectivamente, aos índices 1 e 2 e que manhã, tarde e noite são representados pelos índices 1, 2 e 3, respectivamente, determine: a) O número de clientes que a padaria recebeu sábado à tarde; b) O número total de clientes no domingo.

Fonte:1) e 2) Chavante e Prestes (2016), 3) Iezzi. . . [et. al.] (2017), 4) ENEM (2018), 5) Iezzi. . . [et. al.] (2010)

Análise a priori: As questões de aprofundamento 3, solicita que seja feito a construção de Matrizes, dada sua regra geral e ainda obedeça uma condição. Os estudantes podem ter dificuldade nas questões 3) e 4) respectivamente, porém com o avanço nessas questões e com a ajuda do professor, esperamos que os eles superem estas dificuldades e entendam a linguagem usada nas construções das Matrizes.

4.2.7. Atividade 4

Título: Igualdade de Matrizes **Objetivo:** Descobrir as condições para termos a igualdade de matrizes. **Material**: Roteiro da atividade, lápis ou caneta, papel, folha de Matrizes para a atividade 4. **Procedimento:** • Preencha o quadro com as matrizes dadas na folha de atividade 4; • Logo após preencher o quadro, responda a questão proposta; • Em seguida, Faça as devidas observações e conclusões que achar necessário.

	Matriz(es) com a mesma ordem e os elementos correspondentes iguais								
Matrizes	A $\begin{bmatrix}2&5\\3&1\\4&0\end{bmatrix}_{3\times 2}$	B $(1000)_{1\times 1}$	C $\begin{bmatrix}20&10\\1&12\\16&8\end{bmatrix}_{3\times 2}$	D $\begin{bmatrix}20&1&16\\10&12&8\end{bmatrix}_{2\times 3}$	E $\begin{bmatrix}2&5\\3&1\\4&0\end{bmatrix}_{3\times 2}$	F $(1000)_{1\times 1}$	G $\begin{bmatrix}20&1&16\\10&12&8\end{bmatrix}_{2\times 3}$	H $\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}_{2\times 2}$	I $\begin{pmatrix}-5\\-7\end{pmatrix}_{2\times 1}$
A $\begin{bmatrix}2&5\\3&1\\4&0\end{bmatrix}_{3\times 2}$									
B$(1000)_{1\times 1}$									
C $\begin{bmatrix}20&10\\1&12\\16&8\end{bmatrix}_{3\times 2}$									
D $\begin{bmatrix}20&1&16\\10&12&8\end{bmatrix}_{2\times 3}$									
E $\begin{bmatrix}2&5\\3&1\\4&0\end{bmatrix}_{3\times 2}$									
F$(1000)_{1\times 1}$									
G $\begin{bmatrix}20&1&16\\10&12&8\end{bmatrix}_{2\times 3}$									
H $\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}_{2\times 2}$									
I $\begin{pmatrix}-5\\-7\end{pmatrix}_{2\times 1}$									

Questão: Quais as matrizes que têm, ao mesmo tempo, as mesmas ordens e os elementos correspondentes iguais?

Observações:

Conclusão:

Análise *a priori* da atividade 4: Nesta atividade os estudantes deverão perceber que para duas matrizes serem iguais elas devem ter a mesma ordem e seus elementos correspondentes têm que ser iguais. A atividade 3 será importantíssima, pois o estudante identificará as matrizes pelas ordens. Pode ocorrer algum equívoco ao compararem a matriz C com as matrizes D e G, visto que estas últimas possuem a mesma ordem e a matriz C, ordem inversa. Por isso o professor deverá estar atento caso isso venha ocorrer.

4.2.8. Questões de Aprofundamento sobre a atividade 4

1. Determine os números reais **a**, **b**, **c** e **d** para que se tenha $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & b \\ d & 6 \end{pmatrix}$.

2. Determine **x**, **y** e **z** reais que satisfaçam $\begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 4 & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & z \\ z^2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Determine os números reais **p** e **q** de modo que as matrizes $\begin{pmatrix} p+q & -2 \\ 0 & 2p-q \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sejam iguais.

4. Sejam as matrizes D = $\begin{pmatrix} 35+d & 45a \\ 3c & 5b \end{pmatrix}$ e F = $\begin{pmatrix} 49 & 45 \\ 99 & 25 \end{pmatrix}$. Quais os valores de ***a***, ***b***, ***c*** e ***d***, para que a matriz D seja igual à matriz F?

5. Determine os valores de *a, b* e *c* na expressão abaixo:

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 & 8 \\ 4 & a+c & 3 \\ -1 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & c-2b & 8 \\ 4 & 8 & 3 \\ a+3b & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

Fonte: 1), 2), 3) Iezzi. . . [et. al.] (2017), 4) Silva (2016), 5) Chavante e Prestes (2016).

Análise a priori: Os estudantes possivelmente não terão tanta dificuldade em realizar estas questões de aprofundamento. Esperamos que eles se recordem das resoluções de equações e com isso, consigam realizar com êxito as questões.

4.2.9. Atividade 5

Título: Matrizes especiais (Adaptado de Silva, 2016, p. 114) **Objetivo:** Conceituar alguns tipos especiais de matrizes. **Material**: Roteiro da atividade, borracha, lápis ou caneta e papel. **Procedimento:** • Leia as características especiais de cada matriz; • Observe os exemplos dados e relacione-os com suas características, após, complete os que faltam; • Escreva nos espaços, referido aos nome, qual o nome que você daria para essas matrizes.

Característica	Exemplo	Nome
Uma matriz que possui apenas uma Coluna.	$\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	
Uma matriz que possui apenas uma Linha.		Matriz linha
Uma matriz que possui o mesmo número de linhas e de colunas.	$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 9 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$	
Uma matriz em que todos os elementos tem valor 0 (valor nulo).		
Uma matriz que possui valores não nulos somente em sua diagonal.	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	

Uma matriz que só possui valores nulos e em sua diagonal somente o valor 1.	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Uma matriz que possui número de linhas diferentes do número de coluna.	$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 4 & 10 & 8 \end{bmatrix}$	

Fonte: Silva, 2016

Análise a priori da atividade 5: Com as indicações de características das matrizes descritas na primeira coluna da tabela e com os exemplos mostrados na segunda coluna, os estudantes serão instigados a dar um nome específico a cada uma das matrizes com características especiais. Na terceira coluna os estudantes terão possibilidade de nomeá-las, podendo contar com o auxílio do professor para direcioná-los. Dessa forma os pesquisados irão criar familiaridade com os nomes usados na representação de Matrizes.

4.2.10. Atividade 6

Título: Matriz Transposta

Objetivo: Conceituar matriz transposta.

Material: Roteiro da atividade, borracha, lápis ou caneta e papel.

Procedimento:

- Para cada Matriz dada, inverta as matrizes de forma que os elementos que estão dispostos em forma de linhas, agora, fiquem dispostos em forma de coluna e vice e versa;
- Na coluna da esquerda, a nova matriz que teve suas linhas e colunas trocadas;
- Responda a questão, observando a tabela preenchida.

MATRIZ INICIAL	**MATRIZ RESULTANTE DA TROCA DAS LINHAS PELAS COLUNAS DA MATRIZ INICIAL**
A = $\begin{pmatrix} 10 & -7 & 5 \end{pmatrix}_{1\times 3}$	
B = $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -15 \\ 4 & -20 \end{bmatrix}_{3\times 2}$	
C = $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -5 & -10 \end{pmatrix}_{2\times 2}$	
D = $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}_{4\times 1}$	
E = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$	
F = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$	
G = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}_{1\times 5}$	
H = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 9 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 4}$	
I = $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$	
J = $\begin{bmatrix} -10 & 10 \end{bmatrix}_{1\times 2}$	

Questão: O que aconteceu com a ordem das matrizes quando as mudanças foram realizadas?

Observação:

Conclusão:

Análise *a priori* da atividade 6: Os estudantes, com base em atividades de aprofundamento anteriores, conseguirão realizar sem muita dificuldade a tarefa. Acreditamos que a atividades antes vista darão o direcionamento, para que os estudantes façam a transformação de uma matriz linha (matriz A) para uma matriz coluna (matriz D). Havendo alguma dúvida o professor deverá intervir apontando caminhos, pois esta atividade é pré-requisito para as seguintes, portanto tem que ser bem compreendida.

4.2.11. Questões de Aprofundamento sobre a atividade 6

1. Em cada caso, obtenha a transposta da matriz dada:

a) $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 11 \\ 0{,}5 & 7 \\ 3 & 4{,}1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

2. Associe cada matriz a sua transposta escrevendo a letra e o número romano correspondentes.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

I) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

II) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

III) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$.

a) Classifique a matriz A segundo o seu tipo.

b) Determine os elementos a_{13}, a_{21} e a_{32}.

c) Obtenha A^t.

4. Num campeonato de basquete verificou-se o seguinte: Anselmo fez 40 lançamentos e 18 cestas, cometendo 10 faltas. Alexandre fez 32 lançamentos e 22 cestas, cometendo 9 faltas. Andréa e Aluísio fizeram, cada um, 20 lançamentos e 10 cestas, cometendo 4 faltas. Escreva a matriz transposta da matriz atleta × resultado.

5. Sabendo que a matriz $\begin{bmatrix} 5 & x^2 & 2-y \\ 49 & y & 3x \\ -1 & -21 & 0 \end{bmatrix}$ é igual a sua transposta, calcule o valor de $x + 2y$.

Fonte: 1) Autoria própria (2020), 2) Balestri (2016), 3) Diniz e Somole (2013), 4) Filho e Silva (2000), 5) Paiva (2005).

Análise a priori: Acreditamos que os estudantes possivelmente conseguirão realizar as questões propostas nesta atividade de aprofundamento, sem tanta dificuldade. Talvez apareça alguns obstáculos nas questões 7, 8 e 9, pois acreditamos que elas exigem mais atenção dos estudantes do que as demais.

4.2.12. Atividade 7

Título: Matriz Simétrica

Objetivo: Conceituar Matriz Simétrica

Material: Roteiro da atividade, borracha, lápis ou caneta e papel.

Procedimento:

- Para cada Matriz dada, inverta as matrizes de forma que os elementos que estão dispostos em forma de linhas, agora, fiquem dispostos em forma de coluna;
- Preencha a tabela com as **transpostas das matrizes**;
- Responda a questão, observando a tabela preenchida, faça as observações e conclusões necessárias.

Matriz dada	Transposta da matriz
A = $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2}$	
B = $\begin{pmatrix} 3 & 10 & -1 \\ 10 & 5 & -5 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 3}$	
C = $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}_{3\times 3}$	
D = $[15]_{1\times 1}$	
E = $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2}$	
F = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$	

$G = (-3)_{1\times 1}$	
$H = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}_{4\times 4}$	
$I = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}_{2\times 2}$	
$J = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 2}$	

Questão: No preenchimento da tabela acima, você observou alguma mudança nas transposta das matrizes? O que aconteceu?

Observação:

Conclusão:

Análise *a priori* da atividade 7: Com o conhecimento adquirido na atividade 6, os estudantes não terão dificuldades na atividade 7, fazendo com que eles percebam a regularidade que ocorrerão, pois ao realizarem a transposta, nas matrizes dadas, verão que as matrizes resultantes não mudará em nada. Neste momento o professor faz a formalização de matriz simétrica que é o objetivo dessa atividade.

De acordo com Pires (2000, p. 30) os autores dos livros didáticos, em sua maioria, não abordam a matriz simétrica e os que as utilizam apresentam o assunto apenas como complemento. A autora chama a atenção para observarmos os resultados que envolvem as matrizes transpostas e as simétricas, ela afirma que os livros didáticos não destacam essa comparação. E é nesse ponto que queremos chegar, pois acreditamos que os estudantes, ao realizarem as atividades referente a matriz transposta, conseguirão chegar as conclusões a que Pires (2000) observou em sua pesquisa.

4.2.13. Questões de Aprofundamento sobre a atividade 7

1. Sendo A = $\begin{pmatrix} 2x & y \\ z & -t \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, com $A^t = -B$, calcule o valor de $x + y + z + t$.
2. Uma matriz A é dita simétrica quando $A = A^T$. Sabendo que a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ x & 4 & 5 \\ 3 & z & 6 \end{pmatrix}$ é simétrica, qual é o valor de $x + y + z$?
3. Sabendo que as matrizes A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} x^2 - 2 & 5 \\ x + 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ obedecem à condição $A^t = B$. Neste caso, calcule o valor de x.
4. Diz-se que uma matriz quadrada é simétrica se ela for igual à sua matriz transposta. Nessas condições, a matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 & x^2 - 4 \\ x + 1 & 1 & 2y \\ 0 & 2 + y & 2 \end{bmatrix}$ é simétrica, então encontre os valores de x e y.
5. Uma matriz quadrada **A** é dita simétrica se $A = A^t$. Sabendo que a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & y \\ x & -2 & 5 \\ 3 & z & 1 \end{pmatrix}$ é simétrica, qual é o valor de $x + 2y - z$?

Fonte: 1) Autoria Própria (2020), 2) Iezzi. . . [et. al.] (2004), 3) Paiva (2005), 4) Iezzi. . . [et. al.] (2004), 5) Iezzi ... [et. al) (2017).

Análise a priori: Com base nas questões de aprofundamento 5, feitas pelos estudantes, acreditamos que as atividades de aprofundamento 7 serão resolvidas de maneira análogo as das outras atividade. Talvez nas questões 4 e 5 ocorram a necessidade do professor intervi, mas nas demais, o raciocínio se dará de imediato.

4.2.14. Atividade 8

Título: Adição de Matrizes

Objetivo: Conceituar adição de matrizes

Material: Roteiro da atividade, borracha, lápis ou caneta e papel.

Procedimento:

- Leia o problema a seguir;
- Considerar as quantidades vendidas de cada modelo como sendo elementos de uma linha;
- Considerar as quantidades vendidas de cada combustível como sendo elementos de uma coluna;
- Resolva a questão e faça as devidas observações e, tire sua conclusão.

Problema: As tabelas abaixo representam o número de unidades vendidas, em uma concessionária, de dois veículos 0 km, modelos **A** e **B**, de acordo com o tipo de combustível, durante os dois primeiros meses de determinado ano:

Janeiro

Combustível / Modelo	Flex	Gasolina	Álcool
A	4453	1985	415
B	2693	1378	289

Fevereiro

Combustível / Modelo	Flex	Gasolina	Álcool
A	5893	2031	531
B	3412	1597	402

Fonte: Adaptado de Iezzi... [et.al.] (2017, p. 75)

Questão: Monte uma tabela que represente a quantidade total de veículos vendidos nos dois meses?

Observações:

Conclusão:

Análise *a priori* da atividade 8: Esperamos que os estudantes resolvam o problema sem dificuldade, utilizando a técnica da adição, ou seja, somando os respectivos valores das tabelas referentes aos meses de janeiro e fevereiro das vendas de dois veículos 0 km. Assim, cremos que naturalmente, a ideia da soma de matrizes, vá ficando claro e seja de imediato percebido pelos estudantes e com isso, descobrirão o padrão que devem seguir.

Steinhorst (2011) detectou que o excesso de cálculos não contribui para manter o interesse dos estudantes, principalmente daqueles que apresentam dificuldades, no caso representado pela maioria dos estudantes, isto é um grande problema. Steinhorst (2011) enfrentou esses obstáculos e conseguiu fazer com que seus participantes superassem os erros das operações aritméticas, passando a se preocupar agora com a interpretação e os métodos que os levariam ao resultado.

É nesse sentido que direcionamos este trabalho ao continuarmos o estudo das matrizes envolvendo, agora, as operações aritméticas.

4.2.15. Questões de Aprofundamento sobre a atividade 8

1. Dadas as matrizes A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ e D = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule:

a) A + B = c) B + C = e) A + B + C + D =

b) C + D = d) A + B + C =

2. Determine **x**, **y**, **z** e **t**, sabendo que:

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ z \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} x & y \\ 3 & 2z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & 3 \\ t & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 4 & 18 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} x-2 & 4 \\ y+1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2z-3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & z \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

3. Uma revendedora de peças vende três modelos diferentes de capacete, A, B e C, o consumidor pode comprar qualquer modelo com proteção para queixo ou sem proteção. As duas tabelas abaixo registram as quantidades vendidas durante as duas primeiras semanas de novembro.

	Semana 1		
	A	B	C
Com proteção	7	10	0
Sem proteção	1	4	1

	Semana 2		
	A	B	C
Com proteção	7	8	1
Sem proteção	2	6	1

Determine a tabela que registra os totais das vendas de cada modelo, indicando se foi com proteção ou sem, nas duas semanas.

4. As tabelas a seguir indicam o número de faltas de três alunos (**A**, **B** e **C**) em cinco disciplinas (Português, Matemática, Biologia, História e Física, representadas por suas iniciais), nos meses de março e abril.

Março

	P	M	B	H	F
Aluno A	2	1	0	4	2
Aluno B	1	0	2	1	1
Aluno C	5	4	2	2	2

Abril

	P	M	B	H	F
Aluno A	1	2	0	1	3
Aluno B	0	1	1	3	1
Aluno C	3	1	3	2	3

a) Qual é a matriz que representa o número de faltas desses alunos no primeiro bimestre em cada disciplina?

b) No primeiro bimestre, qual aluno teve o maior número de faltas em Português? E em Matemática? E em História?

5. Uma pesquisa realizada com alguns alunos do Ensino Médio de duas escolas tinha o objetivo de indicar o tipo de computador que eles preferiam utilizar para estudar fora da sala de aula. Os resultados de cada escola foram organizados em planilhas eletrônicas.

	A	B	C	D
1	Escola X			
2	Tipo de computador	1º ano	2º ano	3º ano
3	mesa	12	8	14
4	portátil	6	11	13
5				

	A	B	C	D
1	Escola Y			
2	Tipo de computador	1º ano	2º ano	3º ano
3	mesa	10	11	15
4	portátil	14	12	12
5				

a) Determine a matriz Z que representa a preferência pelo tipo de computador, de acordo com o nível de escolaridade dos alunos entrevistados dessas duas escolas.

b) Considerando essas duas escolas, em qual ano do Ensino Médio 25 entrevistados preferem computadores portáteis?

Fonte: 1) e 2) Dante (2000), 3) Silva (2016), 4) Iezzi. . . [et. al.] (2017), 5) Balestri (2016)

Análise a priori: As questões de aprofundamento 8, serão as que os estudantes farão com mais agilidade por se tratarem do assunto de adição. Esperamos que eles resolvam as questões semelhantes, como acontecem com resoluções que envolvem números inteiros, caso isso ocorra, as questões serão feitas em pouco tempo, é o que almejamos.

4.2.16. Atividade 9

Título: Matriz Oposta

Objetivo: Conceituar matriz oposta

Material: Roteiro da atividade, borracha, lápis ou caneta e papel.

Procedimento:

- Responda a atividade.
- Com as informações da atividade, preencha o quadro a seguir.
- Responda a questão que segue, fazendo suas observações e conclusões.

Problema: O professor Paulo pediu a seus estudantes que realizassem as seguintes adições com as matrizes dadas abaixo. Depois, pediu que eles preenchessem a tabela seguinte, com os resultados dessas adições.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $F = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ -3 & 7 & -10 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $G = (100)$

$C = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 0 \\ 3 & -7 & 10 \end{bmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -15 \end{pmatrix}$

$D = (-100)$ $I = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ $J = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

i. $A + I$ iii. $C + F$ v. $B + J$ vii. $D + G$ ix. $E + H$

ii. $I + A$ iv. $F + C$ vi. $J + B$ viii. $G + D$ x. $H + E$

Itens	Soma das Matrizes	Resultado
i.	$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$	
ii.	$\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$	
iii.	$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 0 \\ 3 & -7 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ -3 & 7 & -10 \end{bmatrix} =$	
iv.	$\begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ -3 & 7 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 8 & 0 \\ 3 & -7 & 10 \end{bmatrix} =$	
v.	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} =$	
vi.	$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} =$	
vii.	$(-100) + (100) =$	
viii.	$(100) + (-100) =$	
ix.	$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -15 \end{pmatrix} =$	
x.	$\begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} =$	

Questão: O que você identifica nos resultados obtidos das adições feitas?

Observação:

Conclusão:

Análise *a priori* da atividade 9: Os estudantes não terão dificuldades em realizar esta atividade, por isso espera-se que ela seja feita muito mais rápido do que a anterior. A matriz nula que será a matriz solução, já foi apresentada aos estudantes na atividade 5. Aguardamos que eles façam a relação com o conhecimento já adquirido em atividade anteriores, porém o professor estará sempre atento para direcioná-los sempre que for solicitado.

4.2.17. Questões de Aprofundamento sobre a atividade 9

1. Associe cada matriz a sua oposta escrevendo a letra e o número romano correspondentes.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$

I) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$

II) $\begin{bmatrix} -5 & 6 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \\ -6 & 9 & -8 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 5 & -6 & -1 \\ 6 & -9 & 8 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

III) $\begin{bmatrix} -5 & 6 & 1 \\ -6 & 9 & -8 \\ 3 & -4 & -7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & -6 & -1 \\ -3 & 4 & 7 \\ 6 & -9 & 8 \end{bmatrix}$

IV) $\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

2. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -9 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$, calcule:

a) A + B =

c) B + C =

b) A + C =

d) A + B + C =

3. Observe as tabelas.

População da região Sul do Brasil, em 2000			
	Rio grande do Sul	Santa Catarina	Paraná
Homens	4 994 719	2 669 311	4 737 420
Mulheres	5 193 079	2 687 049	4 826 038

População da região Sul do Brasil, em 2010			
	Rio grande do Sul	Santa Catarina	Paraná
Homens	5 202 057	3 100 360	5 130 994
Mulheres	5 488 872	3 148 076	4 826 038

a) Utilizando as linhas para representar o sexo dos habitantes e as colunas para representar a unidade de federação, escreva as matrizes A e B que indicam a população da região Sul do Brasil no ano de 2000 e 2010, respectivamente.

b) Calcule B – A.

c) O que representa a matriz formada pelo resultado da operação B – A?

4. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, determine: $(A + B) - (A + C)$.

5. Uma empresa é formada pelas lojas A e B, concessionárias de automóveis. Realizado um estudo sobre a aceitação de dois novos modelos de veículos nos quatro primeiros dias de fevereiro, foram obtidos os seguintes resultados:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 15 \\ 1 & 2 & 53 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 23 \\ 4 & 2 & 45 \end{pmatrix}$$

Sendo que:

- A matriz A descreve o desempenho da loja A, de modo que cada elemento a_{ij} é o número de unidades vendidas no modelo i no dia j;
- A matriz B descreve o desempenho da loja B, de modo que cada elemento b_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo i no dia j.

a) Quantas unidades do modelo 2 foram vendidas no dia 3 de fevereiro pela loja A?

b) Quantas unidades do modelo 1 foram vendidas no dia 2 de fevereiro pela loja B?

c) Construa uma matriz que descreve, dia a dia, as vendas de cada modelo nas duas lojas juntas e no período considerado.

No período considerado, construa uma matriz que compare o desempenho da loja A em relação à loja B, nas vendas diárias de cada modelo.

(A) $C = 0{,}1.A + B$ (C) $C = 0{,}1.(A + B)$

(B) $C = 0{,}1.A^t + B$ (D) $C = 0{,}1.(A^t + B)$

Fonte: 1) Balestri (2016), 2) Autoria própria (2020), 3) Balestri (2016), 4) Leonardo (2016) e 5) Paiva (2015)

Análise *a priori*: As questões de aprofundamento 9 serão feitas de modo análogo as questões de aprofundamento 8, pois esperamos que os estudantes façam a relação de número oposto da mesma maneira que fazem com números inteiros, e com isso consigam resolver todas as questões propostas na atividade com um menor tempo possível.

4.2.18. Atividade 10

Título: Multiplicação de um número real por uma Matriz

Objetivo: Encontrar uma maneira de multiplicar um número real por uma matriz qualquer

Material: Roteiro da atividade, borracha, lápis ou caneta e papel.

Procedimento:

- Ler o texto abaixo;
- Responder à questão proposta, fazendo em seguida as observações e conclusões necessárias.

Texto: PRODUÇÃO DE TELEVISORES (Adaptado de Paiva, 2015, p. 77) Uma indústria de televisores possui algumas filiais. A filial A produz o modelo 1 e o modelo 2 de televisores. As tabelas abaixo apresenta a produção dessa filial nos três primeiros dias de fevereiro.

	Produção da filial A		
	Dia 1	Dia 2	Dia 3
Modelo 1	175	115	92
Modelo 2	97	120	95

Questão: Considere agora que essa filial decida dobrar sua produção diária no mesmo período do ano seguinte. Construa uma tabela que represente a quantidade total de televisores que deverão ser produzidos por essa filial no próximo ano.

Observação:

Conclusão:

Análise *a priori* da atividade 10: A partir desta atividade, esperamos que os estudantes desenvolvam os cálculos pedidos, multiplicando cada elemento da matriz pelo valor que é dado na questão, ou que somem o número de vezes a matriz dada percebendo que a matriz resultante é uma matriz de mesma ordem; e que cada elemento da matriz é igual a duas vezes os correspondentes da matriz dada. Assim os estudantes se aproximaram da definição de multiplicação de matrizes por um número real que é o nosso objetivo nesta atividade.

4.2.19. Questões de Aprofundamento sobre a atividade 10

1. Se P = $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ e Q = $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, calcule a matriz transposta de P – 2.Q.

2. A matriz **S** associa sua 1ª linha à quantidade de proteínas, em gramas, e a 2ª linha à quantidade de fibra alimentar, em gramas, que um copo de 200 ml de três marcas de suco à base de soja oferece.

$$S = \begin{bmatrix} 5{,}2 & 5 & 4{,}8 \\ 1{,}9 & 2{,}1 & 1{,}8 \end{bmatrix}$$

Determine a matriz que indica a quantidade de proteínas e fibra alimentar que cada uma dessas marcas de suco oferece em cada embalagem de 1 L.

3. Uma empresa de componentes eletrônicos compra baterias e resistências a dois distribuidores A e B. A seguinte tabela mostra o número de transmissores e resistências que adquiriu a cada um dos distribuidores durante o mês de abril do presente ano.

	A	B
Baterias	40	80
Resistências	60	50

a) escreva esses dados sob forma de matriz;

b) Devido à demanda no mês de março, a empresa decide triplicar a compra desses componentes para o mês de abril. Represente por uma matriz essas quantidades?

c) Explique o processo para o cálculo dos elementos da matriz que é o triplo da compra dos componentes.

4. Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, determine o valor da expressão 3A – 2B

5. A loja COMPROU GANHOU apresentou as quantidades vendidas do Produto A e do Produto B, por meio da tabela abaixo:

	QUANTIDADE VENDIDA	
TIPO	Janeiro	Fevereiro
PRODUTO A	10	36
PRODUTO B	20	48

No mês seguinte, as quantidades vendidas dos mesmos produtos foram reduzidas pela metade. Construa a matriz que representa esta situação.

Fonte: 1) UFBA (s.d), 2) Balestri (2016), 3) Corrêa (2019), 4) Balestri (2016), 5) Diniz e Smole (2013)

Análise *a priori*: As questões de aprofundamento 10 serão feitas, possivelmente sem muita dificuldade, pois acreditamos que os estudantes, após terem feitos a atividade inicial 10, tenham compreendido. Pode acontecer de surgir algum problema na interpretação de algumas questões como as de número 2, 4 e 5. Caso isso ocorra o professor deverá direcionar os estudantes para que eles realizem todas as questões propostas.

4.3. Pré – Teste e Pós – Teste

Aqui apresentamos as questões que serão usadas no Pré – teste e Pós – teste, o qual contém 10 questões de problemas envolvendo matrizes. O objetivo deste teste é verificar como os estudantes resolveriam questões sobre matrizes, antes e depois da aplicação de nossa sequência de atividades.

Essas atividades também têm por finalidade levar os estudantes a perceberem as regularidades no ensino de Matrizes para que desenvolvam estratégias de resolução. Para o sucesso da aplicação realizamos uma análise *a priori* ao final de cada atividade.

Objetivo: Avaliar o desempenho dos estudantes em questões envolvendo o assunto de matrizes. **Material:** Folha contendo as questões, papel, lápis ou caneta e borracha. **Procedimentos:** Entregar para cada estudante uma cópia do teste e solicitar que resolvam.

1) Em uma editora, a venda de livros de Matemática, Física e História no primeiro trimestre de um ano pode ser expressa pelos dados a seguir. Janeiro: Matemática (25 000), História (19 200), Física (18 200); Fevereiro: Física (20 000), História (21 800), Matemática (33 500);

Março: História (23 000), Matemática (51 000), Física (27 000).
Se o responsável pela organização desses dados fosse você, como faria para melhorar a visualização dessas informação?

Análise *a priori* do pré-teste: os estudantes, possivelmente não terão dificuldades com esta questão, pois se trata de um problema de organizar os dados em uma tabela ou em uma matriz, que apresenta pouca complexidade.

Análise *a priori* do pós-teste: os estudantes resolverão a questão com grande facilidade.

2) A tabela abaixo mostra as notas em Matemática de três estudantes nas quatro avaliações:

	1ª Avaliação	**2ª Avaliação**	**3ª Avaliação**	**4ª Avaliação**
Rafael	8,4	7	8	8,5
João	10	9	9,5	10
Tiago	0	3,5	8,6	7

a) Qual a pontuação de Rafael na 1º Avaliação?
b) Qual a nota de João na 2º Avaliação?
c) Qual a nota de Tiago na 4º Avaliação?
d) Qual estudante tem nota 8,5 e em qual avaliação?
e) Qual o estudante que tem a maior nota? E qual o estudante que tem a menor nota?

Análise *a priori* do pré-teste: os estudantes possivelmente não terão dificuldade para resolverem a questão, pois terão apenas que indicar as localizações em que as notas pedidas estão ou destacar o estudante que tenha tirado a maior e a menor nota.

Análise *a priori* do pós-teste: a maioria dos estudantes conseguirão resolver o problema.

3) Construa a matriz $B = (b_{ij})_{2\times 3}$, tal que $b_{ij} = (i + j)^2$.

Análise *a priori* do pré-teste: Os estudantes terão dificuldades em resolver esta questão, pois se trata de um problema que envolve a construção de uma matriz genérica, onde eles precisarão saber, de imediato, como representar essa matriz. A dificuldade ocorrerá em saber o significado dos elementos *i* e *j*. Cremos que poucos ou nenhum estudante conseguirá construir essa matriz.

Análise *a priori* do pós-teste: A maioria ou todos os estudantes conseguirá construir a matriz dada.

4) Determine x e y de modo que a igualdade das matrizes sejam verdadeiras:
a) $[2x-7 \quad 6 \quad 5] = [-3 \quad 6 \quad y+9]$ c) $\begin{pmatrix} x+1 & 3 \\ 1 & y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
b) $[-5 \quad 2x] = [-5 \quad x+1]$

Análise *a priori* do pré-teste: Os estudantes provavelmente não encontrarão tanta dificuldade em determinar os valores procurados de x e y. Talvez essa dificuldade surja nos itens c) e d), pois nesses itens eles terão que montar um sistema envolvendo as variáveis, caso os participantes não se recordem de como resolver esse sistema, então essa dificuldade fará com que alguns deixem os itens c) e d) sem solução.

Análise *a priori* do pós-teste: A maioria ou todos os estudantes conseguirão encontrar os valores de x e y procurado em cada item.

5) Determine a transposta de cada matriz dada:
a) $A = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ -9 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$
b) $B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -3-1 \\ -6 & 5 & -3-2 \end{bmatrix}$ d) $D = (-2 \quad 7)$

Análise *a priori* do pré-teste: Os estudantes provavelmente terão dificuldade em encontrar as matrizes transpostas dos itens desta questão, pois se não entenderem o significado da palavra transposta não irão executar a tarefa.

Análise *a priori* do pós-teste: A maioria ou todos os estudantes conseguirão determinar a matriz transposta dos itens desta questão.

6) Determine x, y, z para que a matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & x & 5 \\ 2 & 7 & -4 \\ y & z & -3 \end{bmatrix}$ seja simétrica.

Análise *a priori* do pré-teste: Os estudantes, nesta questão, terão dificuldade em encontrar a matriz simétrica da matriz dada e isso ocorrerá por não compreenderem o significado da palavra matriz simétrica, não conseguindo com isso determinar os valores de x, y e z, na questão.

Análise *a priori* do pós-teste: A maioria ou todos os estudantes conseguirão encontrar os valores de x, y e z na questão.

7) Dado as matrizes A = $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 11 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$ e C = $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ calcule:

a) A + B + C b) A – B – C c) A – B + C

Análise *a priori* do pré-teste: os estudantes não terão dificuldade para resolver esta questão, pois farão a adição das matrizes como se fossem números naturais. Talvez ocorra equívocos nas subtrações a serem efetuadas, por causa do uso do jogo de sinal.

Análise *a priori* do pós-teste: a maioria dos estudantes conseguirão resolver o problema.

8) Uma escola de idiomas oferece aulas de inglês e espanhol no período da manhã e da tarde. Veja a quantidade de estudantes matriculados em cada período de acordo com a faixa etária e o idioma do curso em 2017.

Estudantes matriculados na escola de idiomas no período da manhã em 2017		
Curso / Faixa etária	Inglês	Espanhol
Até 16 anos	16	14
Menor do que 16 anos	13	11

Estudantes matriculados na escola de idiomas no período da tarde em 2017		
Curso / Faixa etária	Inglês	Espanhol
Até 16 anos	21	17
Menor do que 16 anos	22	15

Qual foi a quantidade de estudantes matriculados em cada curso, de acordo com a faixa etária, em 2017?

Análise *a priori* do pré-teste: os estudantes não terão dificuldade para resolver a questão, pois, após a leitura do enunciado eles, intuitivamente, usarão a adição das matrizes como na questão anterior.

Análise *a priori* do pós-teste: a maioria ou todos os estudantes conseguirão resolver o problema.

9) O dono de uma rede de distribuição de açaí mantêm registrado cada tipo de açaí vendido em três de suas lojas, para controlar a compra desse produto sem precisar manter um estoque elevado. As tabelas abaixo mostram as vendas em duas semanas.

Semana 1	Loja 1	Loja 2	Loja 3
Grosso	120	290	230
Médio	49	40	37
Fino	130	89	77

Semana 2	Loja 1	Loja 2	Loja 3
Grosso	90	270	98
Médio	76	44	53
Fino	123	76	90

Encontre a diferença das quantidades de açaí vendidos, por cada tipo, da primeira semana para a segunda.

Análise *a priori* do pré-teste: os estudantes não terão dificuldade para resolver a questão. Após a leitura do enunciado, eles usarão a subtração de matrizes como se utiliza a subtração de números inteiros. Pode surgi alguma dificuldade na questão da subtração como ocorre com números negativos.

Análise *a priori* do pós-teste: a maioria ou todos os estudantes conseguirão resolver o problema.

10) Na tabela abaixo, temos os preços de três produtos em estoque de uma empresa que, na próxima liquidação, serão oferecidos com descontos de 50% aos clientes.

Produto	Modelo simples (R$)	Modelo superior (R$)
A	46,00	58,00
B	62,00	70,00
C	84,00	96,00

Encontre o valor a ser pago, por cada produto, na próxima liquidação.

Análise *a priori* do pré-teste: os estudantes provavelmente não encontrarão dificuldade para resolver a questão, pois eles terão que usar a divisão da mesma forma como se utiliza a divisão de números inteiros. Pode surgi alguma dificuldade na questão por falta de atenção. Eles terão que dividir cada valor da tabela pela sua metade e essa deverá ser a dificuldade a ser superada.

Análise *a priori* do pós-teste: a maioria ou todos os estudantes conseguirão resolver o problema.

4.3.1. Perfil dos Discentes Consultados: Questionário Socioeconômico

Para construir um perfil dos estudantes que participaram de nossa experimentação elaboramos um questionário composto de 15 (quinze) questões, as quais relacionam as condições sociais e educacionais dos estudantes, pois se tratará de uma pesquisa distinta da anterior, contendo perguntas que abordam o ensino e a aprendizagem de matemática com sujeitos que participarão da Experimentação.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Prezado (a) aluno (a),
Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato**.**

1 - **Idade**: _______anos 2 - **Gênero**: □ Masculino □ Feminino 3 - **Série**: ____Ano

4 - **Tipo de escola que estudou**? □Municipal □Estadual □Federal □Conveniada

5 - **Você já ficou em dependência**? □Não □Sim. Em quais disciplinas?__________

6 - **Você gosta de Matemática**? □ Não gosto □Suporto □Gosto um pouco □Adoro

7 - **Qual a escolaridade do seu responsável masculino**?
□Superior □Médio □Fundamental □Fundamental incompleto □Não estudou

8 - **Qual a escolaridade da sua responsável feminina**?
□Superior □Médio □Fundamental □Fundamental incompleto □ Não estudou

9 - **Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática**?
□ Professor particular □Pai □Mãe □Amigo da escola □Namorado(a) □Ninguém □Outros. Quem?_________________

10 - **Com que frequência você estuda matemática fora da escola**?
□Todo dia □Somente nos finais de semana □ No período de prova □Só na véspera da prova □Não estudo fora da escola.

11 - **Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática**?
□Sempre □Quase sempre □Às vezes □Poucas vezes □Nunca

12 - **Quais formas de atividades e/ou trabalho o seu Professor (a) de matemática mais utiliza para a avaliação da aprendizagem?**
□Provas/simulado □Testes semanais □Seminários □Pesquisas □Projetos □Outros. Quais?________

13 - **As aulas de Matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados**?
□Sim □Não □Às vezes
14 - **A maioria das suas aulas de matemática**:
□Iniciaram pela definição seguida de exemplos e exercícios;
□Iniciaram com a história do assunto para depois explorar os conceitos;
□Iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto;
□Iniciaram com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo;
□Iniciaram com jogos para depois sistematizar os conceitos.

15 - **Para praticar o conteúdo de matemática seu professor costumava**:
□Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos;
□Apresentar jogos envolvendo o assunto;
□Solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático;
□Não propunha questões de fixação;
□Solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.

4.4. Avaliação da Sequência Didática no Processo

Após a aplicação da Sequência Didática é esperado que os estudantes, de posse dos conceitos trabalhados em cada atividade, tenham um desempenho acima da média na resolução de questões referentes ao assunto de matrizes.

A avaliação que propomos nesta Sequência Didática tem como finalidade constatar, durante o desenvolvimento das atividades, o progresso dos estudantes com relação aos objetivos estabelecidos. Tudo isso ajudará o professor a detectar se em cada atividade, a estratégia e os recursos utilizados foram os mais adequados, caso contrário, ele poderá realizar os ajustes necessários.

Assim, a avaliação deve ser realizada de três maneiras em momentos diferentes: Diagnóstica, ao início da aplicação da Sequência Didática; Formativa, no decorrer do processo da aplicação da Sequência Didática e Somativa, no final da aplicação da Sequência Didática.

A **avaliação diagnóstica** permitirá investigar sobre os conhecimentos prévios que os estudantes possuem e que são necessários, servindo como base para a construção de novos conhecimentos.

Na **avaliação formativa** pretendemos dar seguimento de forma constante e sistemática a todo o processo de aprendizagem dos estudantes. Nesta etapa de avaliação, sugerimos que o professor atenda as demandas de cada grupo de trabalho ou de cada estudante corrigindo informações e procedimentos equivocados durante a realização de cada atividade.

Para a realização desta etapa podemos destacar os seguintes aspectos: Compreensão e fixação dos novos conceitos; habilidades matemáticas; destreza na utilização de instrumentos geométricos e reconhecimento por parte dos estudantes da importância do estudo das matrizes para sua vida.

A percepção destes aspectos podem ser feita por meio dos diálogos do professor com os grupos durante a realização das atividades e ainda de posse das soluções apresentadas pelos estudantes na conclusão de cada processo.

No final da aplicação das atividades, é conveniente reservar um tempo para comprovar o que os participantes aprenderam em relação aos objetivos previstos. Isso foi feito com as questões de aprofundamentos após a aplicação de cada atividade.

Para a realização da **avaliação somativa**, propomos a resolução de um pós-teste com questões iguais do pré-teste com a finalidade de observarmos os avanços dos estudantes antes e após a aplicação da Sequência Didática.

Essa etapas de avaliação foram realizadas nesta pesquisa durante e após a aplicação da Sequência Didática proposta e serão melhor esclarecidas na seção que trata sobre a experimentação.

5. EXPERIMENTAÇÃO

Nesta seção apresentamos a experimentação, onde descreveremos a aplicação do material produzido na seção anterior, ou seja, a descrição do momento da aplicação em sala, das atividades, para a concretização da pesquisa. O local da aplicação foi a Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio São Francisco Xavier[23], no município de Abaetetuba - Pará, com estudantes do 2º ano do turno da tarde. Esclarecemos que houve concordância entre o pesquisador e a escola para que pudéssemos usar o nome da instituição em nossa pesquisa.

A escolha do 2º ano do Ensino Médio deu-se por serem esses os estudantes que ainda não haviam estudado o conteúdo de Matrizes. Da turma escolhida para realização da pesquisa que representa um total de 30 (trinta) estudantes matriculados, apenas 9 (nove) participaram efetivamente do experimento e estiveram presentes no pré – teste, nas sessões da sequência didática e no pós – teste respectivamente.

De imediato procuramos o professor de matemática, que é um amigo de longa data, o qual nos informou como estava ocorrendo as aulas, no caso, de forma remota devido a pandemia do COVID 19. Solicitamos então que nós repassasse os contatos de alguns estudantes para sabermos se queriam participar da pesquisa.

Como as aulas estavam ocorrendo de forma remota, entrei em contato com os estudantes, identifiquei-me e apresentei a proposta da pesquisa que estava desenvolvendo. Eles mostraram interesse em participar porém ficou sobre minha responsabilidade disponibilizar todo o material que seria usado.

Em relação ao professor titular da turma houve uma total disposição em me ajudar quanto ao espaço, para a aplicação da sequência didática, e tomamos todos os cuidados necessários por causa da Pandemia, e assim foi feito.

Os estudantes selecionados residem nas redondezas da escola e isso facilitou muito a participação deles nas sessões programadas. Organizei os estudantes em três

---

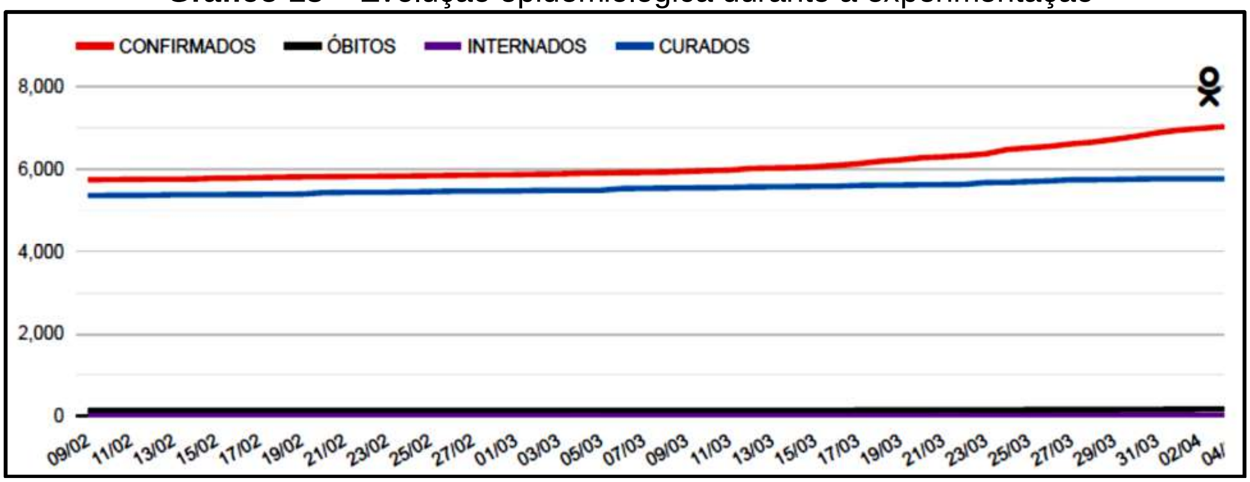
[23] O Colégio São Francisco Xavier foi fundado a 10 de abril de 1966, pelo padre Vicente Mitidieri, sendo mantido pela Prelazia do Baixo Tocantins, hoje Diocese de Abaetetuba. Inicialmente foi denominada como escola paroquial constituída por alunos do sexo masculino, funcionando em uma das dependências da paróquia Nossa Senhora da Conceição caracterizando-se como Escola Paroquial. Anos depois passou a situar-se à Avenida 15 de agosto, 339, Centro, onde funcionava o antigo seminário da Diocese, nesta época trabalhando com alunos de ambos os sexos. Disponível em: http://www.csfx.org.br/historico.html. Acesso em: 14 out. 2021.

grupos (A, B e C), contendo 2, 3 e 4 participantes respectivamente, respeitando todos os protocolos do Ministério da Saúde como distanciamento social de 2 (dois) metros entre os estudantes, uso obrigatório de máscaras e de álcool em gel.

Antes, foi proposto aos estudantes que as sessões ocorressem via aplicativo Google Meet, que não foi aceita, devido ao acesso limitado da internet por alguns, então foi aprovado o local dos encontros (que ocorreram na sala de leitura da escola, pois o espaço não estava sendo usado).

Assim, ressalto que no mês de fevereiro a Epidemia estava controlada no município, fato este comprovado através do gráfico 13 que mostra a evolução da contaminação durante a etapa da experimentação.

Gráfico 13 – Evolução epidemiológica durante a experimentação



Fonte: Prefeitura de Abaetetuba (2021)

Apesar de haver um ligeiro aumento de casos confirmados no mês de Abril, ficamos acompanhando a evolução da Epidemia no Município e os dados apresentados acima reforçam que, naquele momento, era perceptível o controle da circulação do vírus divulgados semanalmente pela prefeitura através dos boletins sobre o Coronavírus.

Dando seguimento, destacamos que nos encontros da pesquisa, nos quais ocorreram a aplicação do pré-teste, pós-teste, das atividades da sequência didática e questões de aprofundamento, os processos foram registrados por gravações e vídeos. Destaco aqui que os respectivos registros foram feitos por minha esposa, que é professora de Língua Portuguesa e pelo professor de Matemática da turma.

Este processo de experimentação foi organizado em sete encontros chamados de sessões de ensino. Sá e Alves (2011, p. 156 – 157) afirmam que cada encontro ocorrido é chamado de "sessão", onde ela pode ser diagnóstica e termine com a realização da última atividade. As sessões de ensino não são aulas normais e isso ficou claro logo nas primeiras atividades feitas pelos estudantes.

No quadro 17 apresentamos como foram organizadas as 10 atividades usadas nos encontros chamados de sessões.

Quadro 17 – Cronograma das atividades que serão realizadas na escola

DATA	SESSÃO	ATIVIDADE DESENVOLVIDA	DISTRIBUIÇÃO EM SALA
03/02/2021	**1ª Diagnóstico Inicial**	Questionário socioeconômico	Individual
		Pré-teste	Individual
		Atividade 1 – Noção de Matriz	Grupos
		Questões de aprofundamento sobre a Atividade 1	Grupos
04/02/2021	**2ª**	**Atividade 2** - Localização de elementos da matriz	Grupos
		Questões de aprofundamento sobre a Atividade 2	Grupos
		Atividade 3 - Número de elementos da matriz	Grupos
		Questões de aprofundamento sobre a Atividade 3	Grupos
10/02/2021	**3ª**	**Atividade 4** - Igualdade de Matrizes	Grupos
		Questões de aprofundamento sobre a Atividade 4	Grupos
		Atividade 5 - Nomes de algumas matrizes	Grupos
11/02/2021	**4ª**	**Atividade 6** - Matriz Transposta	Grupos
		Questões de aprofundamento sobre a Atividade 6	Grupos
		Atividade 7 - Matriz Simétrica	Grupos
		Questões de aprofundamento sobre a Atividade 7	Grupos
17/02/2021	**5ª**	**Atividade 8** - Adição de Matrizes	Grupos
		Questões de aprofundamento sobre a Atividade 8	Grupos
		Atividade 9 - Matriz Oposta	Grupos
		Questões de aprofundamento sobre a Atividade 9	Grupos
18/02/2021	**6ª**	**Atividade 10** - Multiplicação de um número real por uma Matriz	Grupos
		Questões de aprofundamento sobre a Atividade 10	Grupos

19/02/2021	**7ª Diagnóstico final**	Pós-teste	Individual

Fonte: Autoria própria (2021)

Todas as atividades estão descritas no quadro acima. Esperamos que todas as sessões de ensino sejam executados com sucesso e sem entraves, tanto por parte do professor pesquisador quanto pelos os pesquisados.

5.1. Primeira Sessão de Ensino: Diagnóstico Inicial

No dia 01 de fevereiro de 2021 entrei em contato com o professor da turma, que seria aplicado a sequência didática, expliquei-lhe sobre a minha pesquisa e ele aceitou colaborar com o que pudesse. No dia seguinte o professor da turma disponibilizou o contato de alguns estudantes, escolhidos por ele, para participarem da pesquisa e eu me responsabilizei em entrar em contato com os escolhidos. Dessa forma perguntei se os estudantes selecionados poderiam contribuir conosco, e todos concordaram mostrando-se interessados em participar.

Assim, a primeira sessão de ensino ocorreu no dia 03 de fevereiro de 2021, no período da tarde. Nesse dia o professor titular da turma estava presente e nos apresentou aos estudantes, então ele nos deixou à vontade para explicar o objetivo do trabalho, e os informamos que se tratava da realização de uma pesquisa sobre o ensino de Matrizes. Sendo tudo combinado os estudantes foram organizados em grupos contendo 2, 3 e 4 componentes.

O professor informou aos estudantes que essas aulas serviriam para o desenvolvimento das atividades e que ele estaria presente para acompanhá-los, pois os resultados obtidos nas sessões de ensino seriam usados como uma parte da avaliação bimestral na disciplina de matemática.

Depois da apresentação inicial, o professor nos deu a palavra e aí informei que faço parte da turma de mestrado da UEPA (Universidade Estadual do Pará), vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, reforcei a finalidade da pesquisa com o ensino de matrizes, dando ênfase na importância e seriedade do nosso trabalho, deixando sempre claro a importância da participação deles para a efetivação do processo.

Após a confirmação dos presentes explicamos e distribuímos a autorização de participação da pesquisa chamado de Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) – Apêndice F localizado na página 304, para que fossem levados aos responsáveis para assinarem, e retornassem no próximo encontro, para efetivar a participação na pesquisa, já que nem todos os participantes eram maiores de idade.

Em seguida, explicamos aos estudantes que neste primeiro momento eles iriam responder dois questionários: o primeiro referente a questões socioeconômicas, sua relação com a matemática e hábitos de estudos, e o segundo seria um pré-teste com o intuito de avaliar seus conhecimentos sobre o conteúdo abordado em nossa pesquisa.

Assim, solicitamos que respondessem as questões do pré-teste da forma que considerassem correta, porém, sem o auxílio de calculadora, consulta aos colegas, professor ou qualquer outro tipo de recurso didático.

O primeiro questionário foi preenchido no intervalo das 14:00 h às 14h 15 min (aproximadamente 15 minutos) pelos participantes, tendo em vista que nesse intervalo de tempo foi realizada a apresentação aos estudantes da descrição feita anteriormente. O outro formulário, o pré-teste, ocorreu no horário de 14h 20 min às 15 h (aproximadamente 40 minutos) pelos estudantes, sendo que este foi respondido de forma individual.

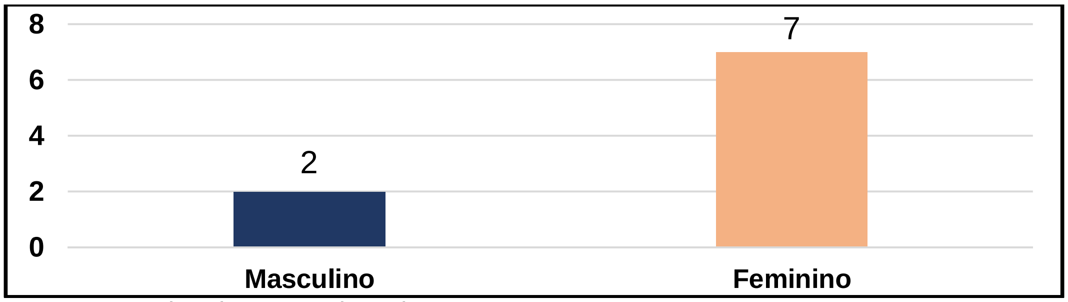
5.1.1. Perfil dos Estudantes

Para construirmos os perfis dos pesquisados e diagnosticar suas impressões acerca da resolução de questões envolvendo Matrizes, aplicamos um questionário aos 9 (nove) estudantes, contendo questões referentes ao perfil socioeconômico e a relação dos participantes com a matemática na escola.

Dando seguimento, apresentamos as informações coletadas no questionário e realizamos comparações com os perfis encontrados nas pesquisas de Corrêa (2019) e Tourão (2020), que investigaram estudantes do ensino médio, buscando semelhanças entre os perfis desses estudantes participantes das respectivas pesquisas com os da nossa.

A seguir, apresentamos as informações coletadas no questionário iniciando pela distribuição dos estudantes por gênero e, a partir das respostas coletadas, construímos o gráfico 14.

Gráfico 14 – Gênero dos Estudantes

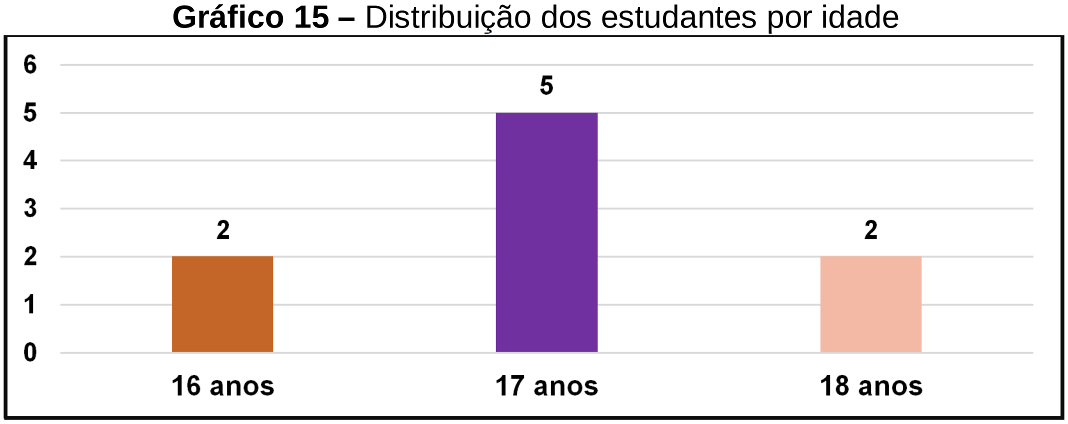


Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Nota-se que a pesquisa a respeito do gênero mostra que a quantidade dos estudantes do sexo feminino foi de 7 e isso é maior do que o número referente ao sexo masculino com 2 estudantes, como ocorreu na pesquisa de Tourão (2020, p. 116), em que a amostra foi de 27 estudantes, sendo que 15 destes eram do sexo feminino e 12 do sexo masculino. Porém diferindo da pesquisa de Corrêa (2019, p. 52), em que a amostra foi de 27 estudantes, sendo que 10 destes eram do sexo feminino e 17 do sexo masculino.

Em relação as respostas sobre as idades dos estudantes que participaram da pesquisa construímos o gráfico 15.

Gráfico 15 – Distribuição dos estudantes por idade



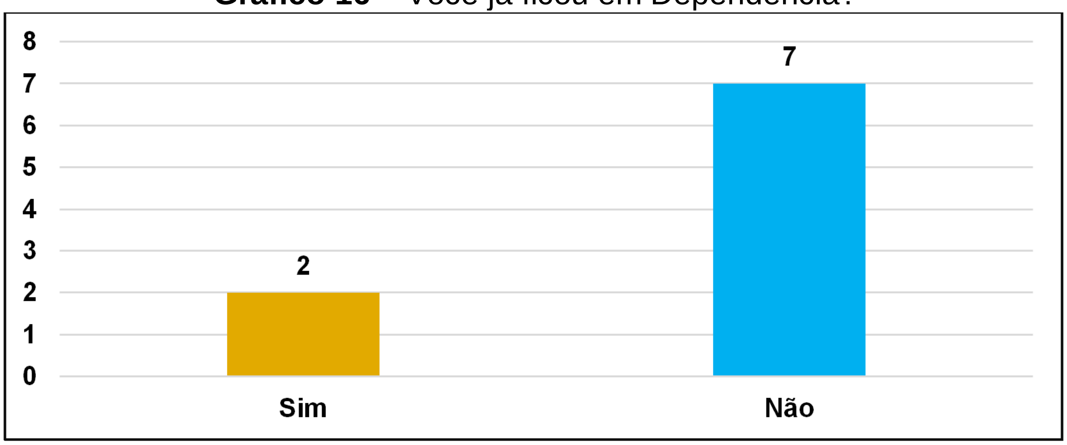
Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Ao analisarmos o gráfico 15 observarmos que a maioria dos pesquisados encontram-se com idade de 17 anos, sendo que houve um empate no que diz respeito a idade de 16 e 18 anos (2 estudantes). Esses dados nos mostram que dentre os pesquisados a grande maioria, ou seja, apenas 7 estão na faixa etária considerada a ideal pela LDB (1996).

Neste aspecto nosso trabalho se assemelha com o de Tourão (2020, p. 117), onde 26 estudantes com idade de 15, 16 e 17 anos estavam dentro dos padrões, contemplando as recomendado do MEC e da LDB. Assim, destacamos que nosso trabalho se difere dos resultados da pesquisa de Corrêa (2019, p. 52) em que a faixa etária dos pesquisados estavam entre 11 e 14 anos, ou seja, fora dos padrões contemplados e considerado pelo MEC e pela LDB.

Com as respostas obtidas no que diz respeito a dependência dos pesquisados em matemática e/ou outras disciplinas construímos o gráfico 16 a seguir.

Gráfico 16 – Você já ficou em Dependência?

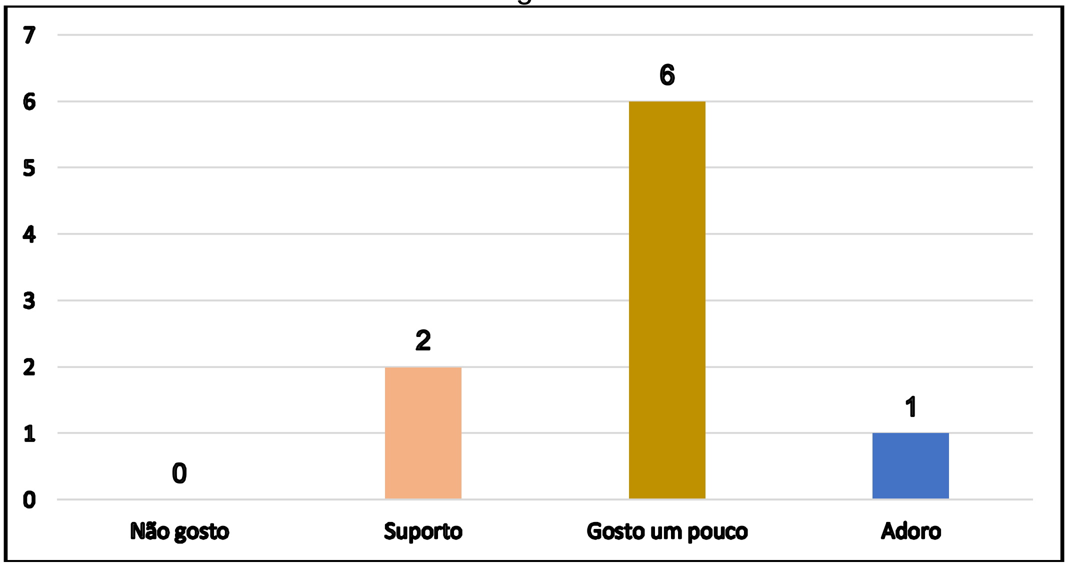


Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Ao analisarmos as respostas obtidas, no que se refere a dependência dos estudantes, podemos verificar que 7 estudantes nunca ficaram em dependência e que apenas 2 estudantes admitiram que sim. Na pesquisa de Tourão (2020, p. 118) consta que 24 dos pesquisados nunca ficaram em dependência porém, 3 estudantes afirmaram ter ficado em outras disciplinas e nunca em matemática. Ressalto que Corrêa (2019) fez essa pergunta aos seus pesquisados mas não apresentou os dados em sua pesquisa.

Com as respostas obtidas sobre o gosto dos estudantes pela matemática, construímos o gráfico 17.

Gráfico 17 – Você gosta de Matemática?



Fonte: Pesquisa de campo (2021)

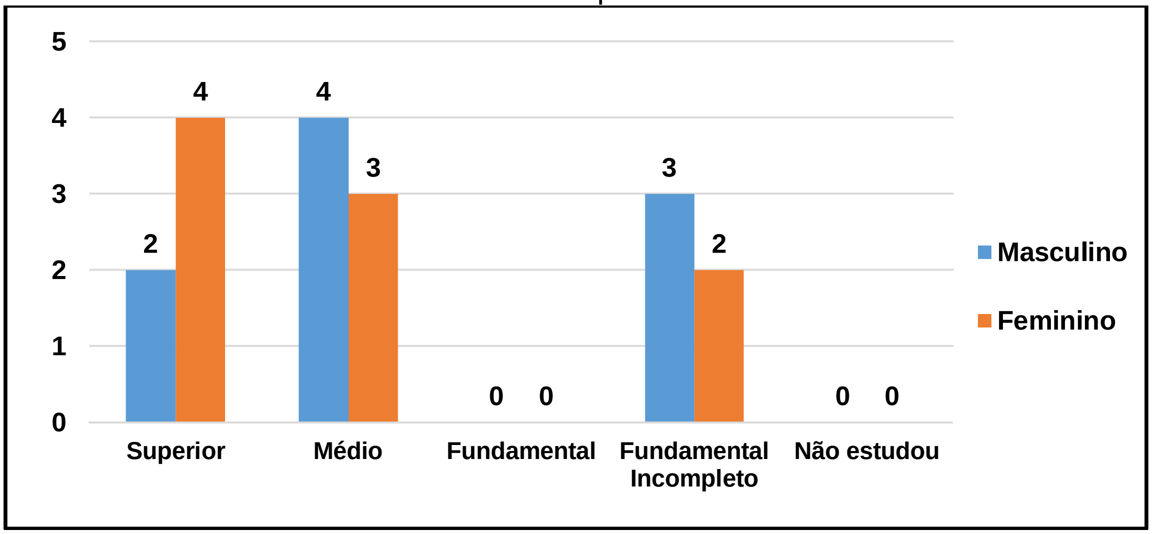
Ao serem perguntados sobre o gosto pela matemática as respostas demonstram que os estudantes gostam da disciplina, sendo que a maioria um total de 6 afirmaram gostar um pouco,1 estudante adoram a matemática, 2 suportam a disciplina e em relação a alternativa não gosto da disciplina ninguém optou.

Esses dados são semelhantes aos obtidos por Tourão (2020, p. 119) em que 20 pesquisados afirmaram gostar um pouco, 4 estudantes adoram a matemática, 1 pesquisado suporta a disciplina e 5 estudantes não gosta da matemática.

Já Corrêa (2019, p. 53) destaca que 13 dos pesquisados afirmaram que as aulas de Matemática são legais, outros 5 estudantes afirmaram gostar um pouco da disciplina, enquanto 4 estudantes afirmaram ser complicada a matemática, por outro lado 2 pesquisados afirmaram adorar a matemática, e ainda, 2 outros pesquisados destacaram que as aulas de matemática são chatas e apenas 1 estudante posicionou-se dizendo que não gostar da matemática.

O questionário aplicado abordou também a escolaridade dos responsáveis masculinos e femininos dos estudantes, e a partir das respostas construímos o gráfico 18 que confronta os resultados.

Gráfico 18 – Escolaridade dos responsáveis masculino e feminino



Fonte: Pesquisa de campo (2021)

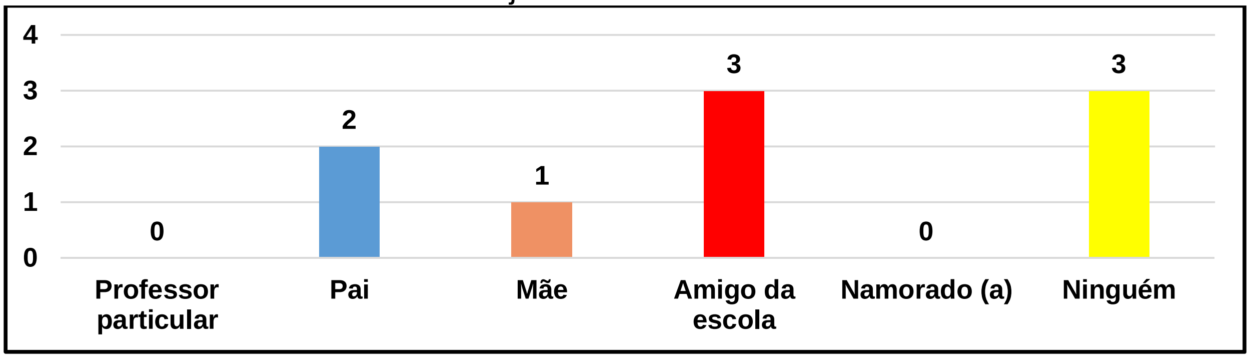
Os dados mostram que houve aqui um destaque das responsáveis femininas em relação à escolaridade com o Ensino Superior, pois elas representam o dobro dos responsáveis masculinos. Já com relação ao Ensino Médio os responsáveis masculinos têm uma ligeira vantagem.

A pesquisa de Tourão (2020, p. 119, 120 – 121) fez a análise separada de cada um dos responsáveis e neste aspecto temos 7 responsáveis masculinos com o Ensino Superior e apenas 3 responsáveis femininas com o mesmo nível de estudo. Com relação aos nível médio ocorre o contrário, pois apenas 9 responsáveis masculinos concluíram o ensino médio enquanto que 17 responsáveis femininas concluíram esse mesmo nível de estudo.

Tourão (idem, p. 121) afirma que “Esses resultados demonstram que as mulheres têm buscado a conclusão de seus estudos até o ensino médio.” E, assim como ocorreu em nossa pesquisa que nenhum dos responsáveis não estudou, também detectamos em Tourão (2020) a mesma ocorrência.

Através do questionário, perguntamos aos estudantes quem lhe ajuda nas tarefas de matemática e a partir das respostas obtidas construímos o gráfico 19.

Gráfico 19 – Ajuda nas tarefas de matemática



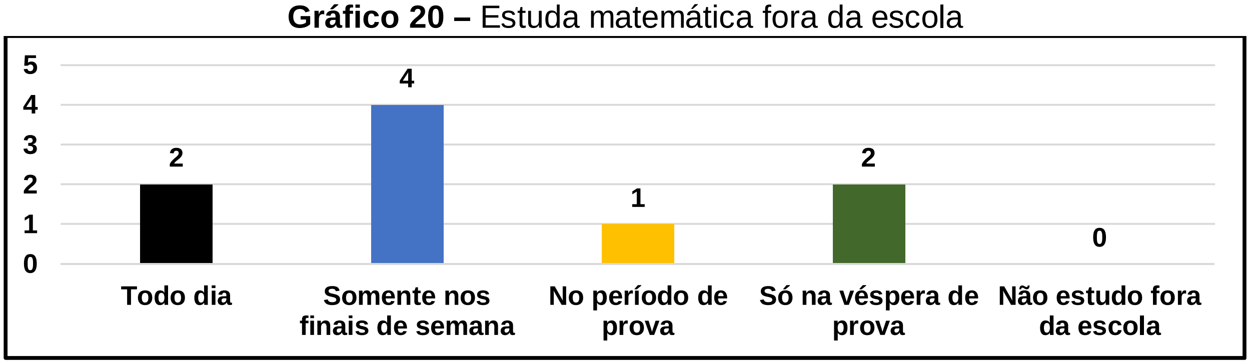
Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Esses dados nos dizem que as famílias precisam participar mais da vida escolar dos estudantes, pois de acordo com o gráfico 19, seis (6) desses estudantes responderam que recebem ajuda de amigos da escola e/ou de ninguém e esses dados são preocupantes.

Na pesquisa de Tourão (2020, p. 122 e 123) temos as respostas dos pesquisados mostrando que 15 dos estudantes não tinham ajuda de ninguém nas atividades escolares, 7 pesquisados afirmaram que outras pessoas os ajudava e apenas 3 estudantes responderam que recebem ajuda de sua família. Já Corrêa (2019, p. 122) fez a pergunta, que consta no Apêndice do trabalho dele, e é a seguinte "Quem mais lhe ajuda na tarefa de Matemática?", porém, ele não utilizou os dados no trabalho, não sendo possível apresentar os dados.

Sobre a frequência do estudo de matemática, pelos estudantes, fora da escola, tivemos os seguintes resultados representados no gráfico 20.

Gráfico 20 – Estuda matemática fora da escola



Fonte: Pesquisa de campo (2021)

As respostas obtidas quando questionados sobre o período que estudam matemática fora da escola mostram que 4 estudantes só estudam nos finais de semana, 2 todo dia, 2 só na véspera da prova e apenas 1 estuda no período de prova. Os dados nos mostram que 6 dos entrevistados estudam todo dia e/ou somente nos finais de semana, enquanto 3 estudam no período de prova e/ou só na véspera de prova.

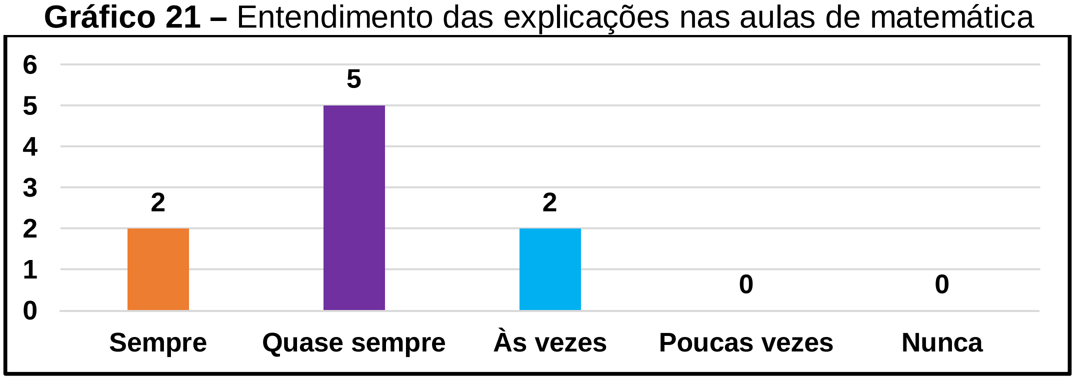
Na pesquisa de Tourão (2020, p. 123) tivemos 12 estudantes respondendo que estudavam só no período da prova e outros 11 pesquisados responderam que só estudavam na véspera da prova, 2 estudantes responderam que estudavam fora da escola, 2 estudantes responderam que estudavam somente nos finais de semana e nenhum estudante respondeu que estudava todo dia.

Temos aqui algumas informações muito importantes sobre as mudanças de hábitos de estudo, por parte dos estudantes causado pela Pandemia. Essas mudanças foram detectadas em nossa pesquisa, por isso que comparando alguns dados como o número de estudantes que estudam todo dia; houve mudança da pesquisa de Tourão (2020) para a nossa, passando de 0 para 2 estudantes afirmando.

Tourão (2020) detectou em sua pesquisa que 2 estudantes estudavam fora da escola contrapondo-se aos dados colhidos em nossa pesquisa, onde foi averiguado que nenhum estudante, agora, estuda fora da casa, pois estamos passando por um período de Pandemia do Coronavírus, motivo que obrigou as pessoas a ficarem em suas casas. Corrêa (2019) fez a mesma pergunta porém não apresentou os dados em seu trabalho.

O questionário também perguntava sobre as aulas de matemática, ou seja, sobre o entendimento por parte dos estudantes nas explicações dadas durante as aulas de matemática, e a partir das respostas obtidas construímos o gráfico 21.

Gráfico 21 – Entendimento das explicações nas aulas de matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2021)

As respostas indicam que dos estudantes consultados, 7 deles conseguem sempre e quase sempre entender as explicações nas aulas de matemática, apenas 2 responderam que às vezes conseguem entender a mesma explicação e ninguém respondeu que poucas vezes ou nunca entende as explicações nas aulas de matemática.

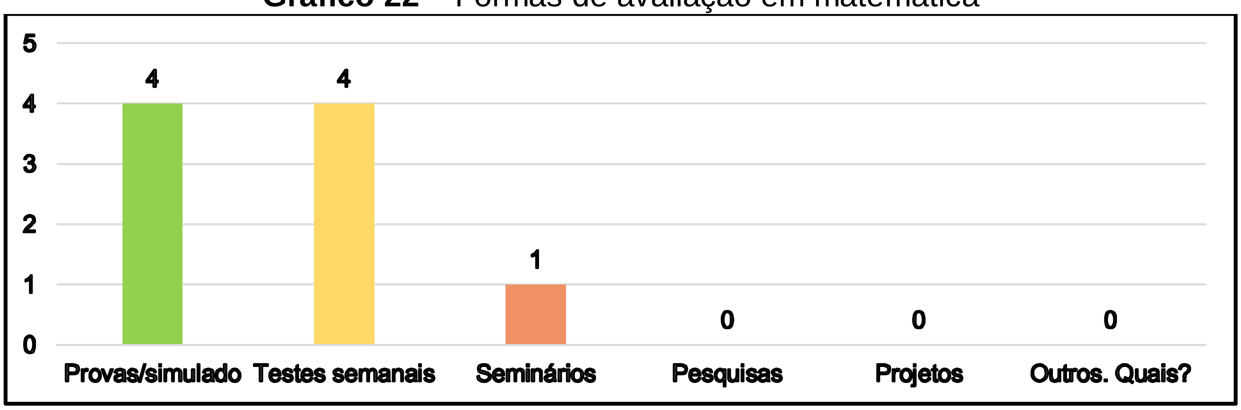
Nesta pergunta percebemos que os estudantes pesquisados conseguem entender as explicações nas aulas de matemática e isso é muito positivo para a nossa pesquisa, pois demostra que esses pesquisados estão mais atentos nas aulas e esses resultados irão se refletir positivamente em nosso trabalho.

Na pesquisa de Tourão (2020) destacamos que 13 estudantes responderam que às vezes tem entendimento nas aulas de matemática, já outros 7 pesquisados responderam que quase sempre tem entendimento dessas aulas, outros 7 afirmaram que poucas vezes conseguem esse entendimento.

Tourão (2020, p. 125) destaca que “Como podemos analisar a partir das respostas dos discentes, durante as aulas de matemática os envolvidos na pesquisa nem sempre conseguem chegar ao entendimento dos conteúdos ministrados.” Essa observação é confrontante com a nossa e com os dados apresentados no gráfico 21.

Ao continuar abordando sobre as aulas de matemática, perguntamos a respeito das formas de avaliação submetidos aos estudantes, obtivemos as seguintes respostas, as quais foram usadas para a construção do gráfico 22.

Gráfico 22 – Formas de avaliação em matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2021)

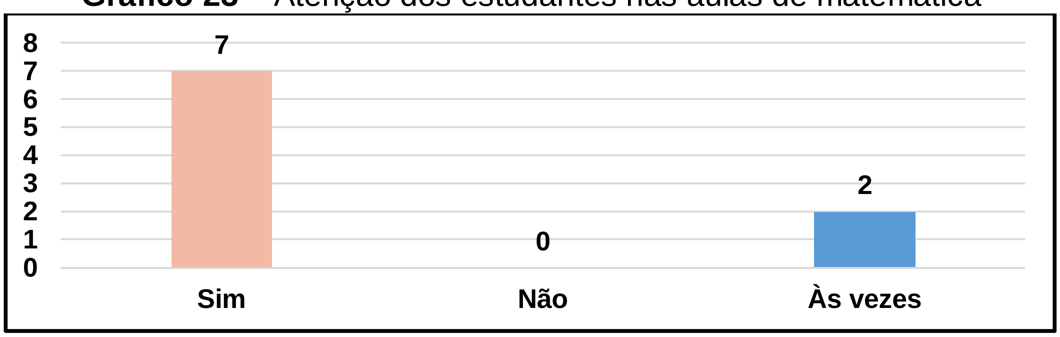
As formas de avaliação de matemática que os estudantes são submetidos apontam para: 4 pesquisados afirmaram que a avaliação foi através de provas/simulados e outros 4 afirmando que ocorreram através de testes semanais. Por fim, a penas 1 estudante respondeu que a avaliação ocorreu por meio de seminários e; notamos que nenhum estudante respondeu que as avaliações ocorreram por meio de pesquisa, projetos ou por outros meio.

Aqui percebemos que os professores precisam buscar outros meios para avaliar os estudantes, pois da forma que está sendo feita deixa muito a desejar e não abrange todo o potencial dos estudantes em fazer pesquisas, organizar projetos ou explorar outros meios de avaliação que venham valorizar os passos e não somente o resultado final.

Tourão (2020) verificou em sua pesquisa que as formas de avaliação usada pelos professores são provas/simulados, com 22 pesquisados afirmando, 3 estudantes apontara que foram avaliados por testes semanais, 1 pesquisado respondeu que foi avaliado através de pesquisa e 1 estudante foi avaliado de outra forma. Tourão (idem, p. 126) afirma que "Neste aspecto, ao analisarmos as respostas obtidas sobre avaliação percebemos que esta vem seguindo o modelo tradicional como forma principal de avaliação.". Ao nosso ver, cabe a cada um de nós educadores fazermos as mudanças necessários na maneira de fazer a avaliação dos nossos estudantes, adequando-a a cada realidade.

No questionário perguntamos aos estudantes se as aulas de matemática despertam a atenção em aprender os conteúdos ensinados e, com as respostas construímos o gráfico 23.

Gráfico 23 – Atenção dos estudantes nas aulas de matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2021)

A partir das respostas obtidas, notamos que as aulas de matemática têm sim despertado o interesse dos estudantes, sendo que 7 pesquisados afirmando que sim e 2 responderam que às vezes isso ocorre. Também notamos que nenhum estudante marcou a opção não, onde as aulas de matemática não despertam sua atenção.

Isso nos mostra que apesar da forma como os conteúdos são ministrados e de como esses estudantes são avaliados, essas metodologias de ensinar e a maneira de avaliar, não têm influenciado nos estudantes na questão que trata sobre a atenção nas aulas de matemática.

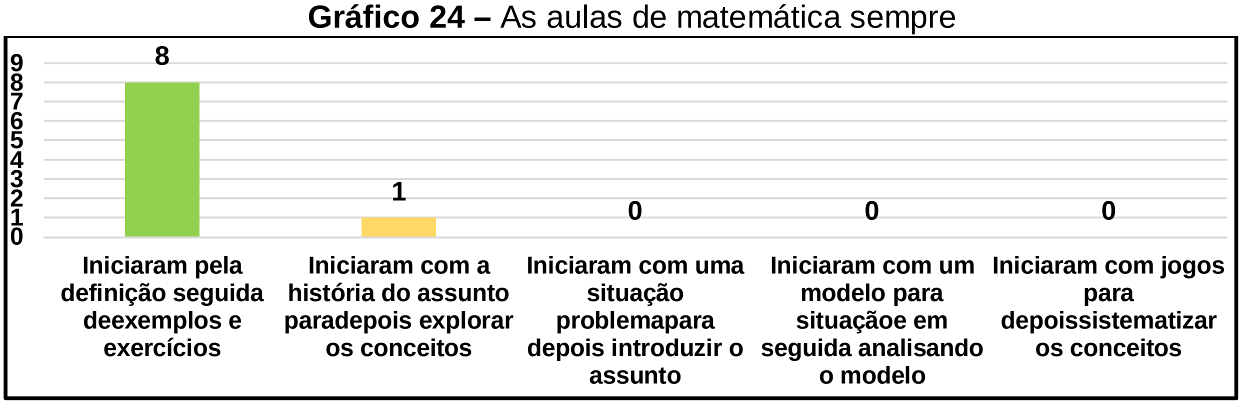
Na pesquisa feita por Tourão (2020) é destacado que 15 dos pesquisados afirmaram que as aulas de matemática as vezes despertam seus interesse, 7 estudantes responderam que essas mesmas aulas sim, despertam seus interesses e apenas 5 responderam que as aulas não despertam interesse nos pesquisados.

Tourão (idem, p. 126) destaca que com os dados dessa pesquisa “a maioria das aulas de matemática nem sempre conseguem despertar o interesse dos discentes pesquisados com um total de 74%, podendo ser um reflexo da metodologia utilizada pelo docente durante a abordagem dos conteúdos.” E foram esses traços detectados na pesquisa de Tourão (2020) que também temos detectados ao fazermos as análises dos dados colhidos do questionário aplicado aos estudantes.

Corrêa (2019) em sua pesquisa fez uma pergunta semelhante à qual fizemos aos nossos estudantes, em que verificou-se a falta de concentração sendo apontada com um dos motivos da dificuldade de aprendizagem nas aulas de matemática, com 20 pesquisados afirmando. Para outros 18 estudantes a dificuldade nas aulas de matemática está no conteúdo e, para apenas 1 estudante a dificuldade é a falta de atenção dele mesmo.

Outra pergunta respondida pelos participantes da pesquisa sobre como se deram a maioria das aulas de matemática, obtivemos o gráfico 24 que representa os dados levantados.

Gráfico 24 – As aulas de matemática sempre



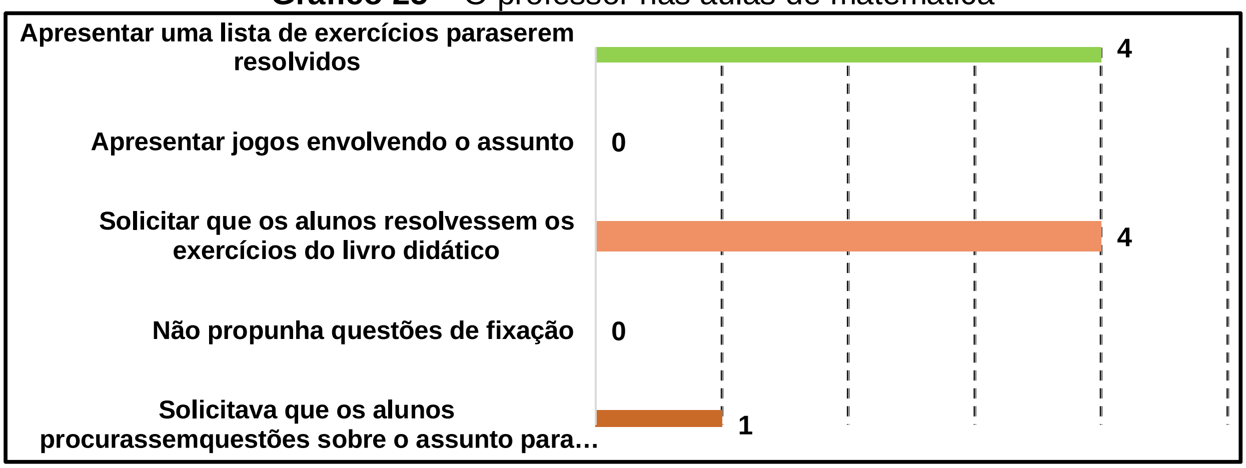
Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Como observarmos nas respostas as aulas de matemática vêm ocorrendo, em sua maioria, de forma tradicional iniciando pela definição seguida de exemplos e exercícios, de acordo com a resposta de 8 estudantes.

Os resultados obtidos em nossa pesquisa são apontados de forma diferente na pesquisa de Tourão (2020), o qual apontou para 19 estudantes afirmando que a maioria das aulas iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto, enquanto em nossa pesquisa o resultado foi de 0 para a mesma pergunta.

Para finalizarmos, temos as respostas dos estudantes sobre a forma que o professor de matemática costumava apresentar os conteúdos, e a partir destas construímos o gráfico 25.

Gráfico 25 – O professor nas aulas de matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Ao analisarmos as respostas temos 4 estudantes afirmando que o professor apresentou uma lista de exercícios para serem resolvidas, 4 responderam que era solicitado dos estudantes a solução dos exercícios do livro didático e apenas 1 estudante afirmou que o professor solicitou pesquisas de questões sobre o assunto.

Já na pesquisa de Tourão (2020, p. 128) destacamos que 22 dos estudantes pesquisados responderam que o professor apresentava uma lista de exercícios para serem resolvidos, 4 pesquisados afirmaram que o professor solicitava que eles procurassem questões sobre o assunto para serem resolvidas e apenas 1 estudante respondeu que o professor não propôs questões de fixação.

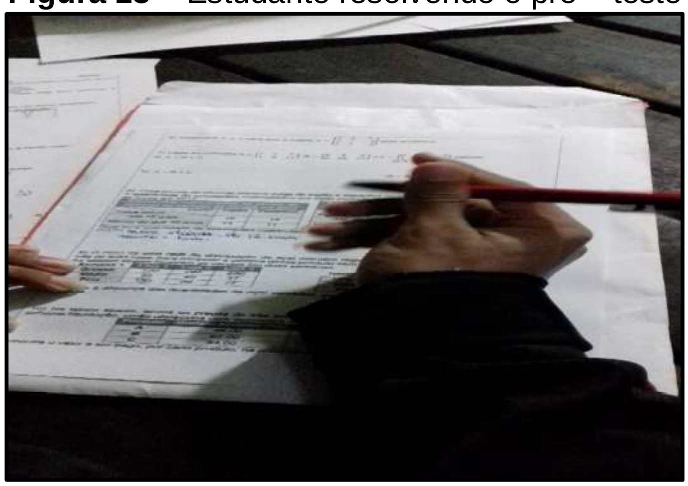
5.1.2. Sobre a Aplicação do Pré – Teste

Como já foi mencionado, no mesmo dia em que aplicamos o questionário socioeconômico para os 9 (nove) estudantes responderem, continuamos com o desenvolvimento de nossas atividades com a aplicação do pré – teste.

Depois da distribuição do pré – teste contendo dez questões sobre matrizes, solicitamos que os estudantes realizassem a leitura tentando resolver as questões do teste. Algum tempo depois alguns estudantes afirmaram desconhecer o conteúdo e por isso não sabiam como fazer para encontrar todas as resoluções das questões.

Neste momento pedimos que todos se tranquilizassem e que apenas resolvessem o número máximo de questões de acordo com seus conhecimentos, deixando em branco aquelas que não eram de seus conhecimentos, por não lembrarem ou por não terem domínio do assunto.

Figura 13 – Estudante resolvendo o pré – teste



Fonte: Autoria própria (2021)

Na figura anterior temos um estudante realizando o pré – teste de modo individual, seguindo as orientações que foram dadas anteriormente.

Como já citado o pré-teste foi efetivado por todos os estudantes em aproximadamente 40 minutos, no horário de 14h 20 min às 15h. É importante ressaltar que os dados obtidos no pré – teste serão posteriormente apresentados e analisados na próxima seção de nossa pesquisa denominada análise a posteriori e validação.

5.1.3. Aplicação da Primeira Atividade de Aprendizagem

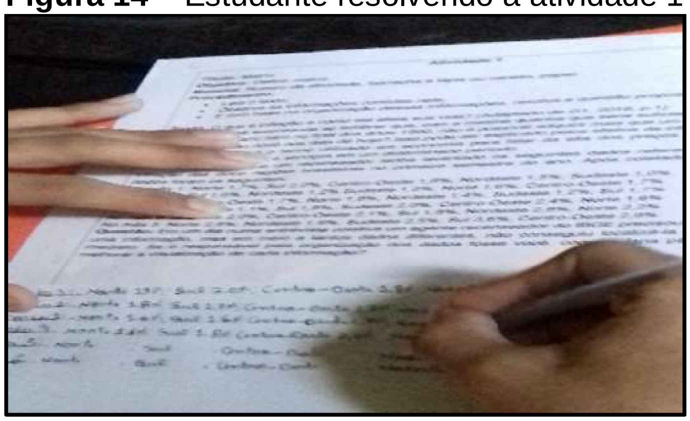
Após a assinatura do TCLE, do preenchimento do questionário e da aplicação do pré – teste, seguimos com o desenvolvimento de nossa primeira atividade.

De início organizamos os estudantes em grupos, os quais foram formadas de forma espontânea, contendo dois, três e quatro integrantes, com o total de 9 (nove) estudantes. Em seguida, informamos a todos que permaneceriam nas mesmas equipes ao longo das atividades da pesquisa. Para a identificação dos estudantes, nos diálogos da pesquisa, usamos a simbologia de E1 até E9.

A Atividade 1 ocorreu em aproximadamente 25 (quinze) minutos, das 15h10min às 15h 35min. De início os estudantes leram os procedimentos que seguem: ler o texto; observar as informações contidas nele e com base na organização dessas informações, resolva a questão proposta. O objetivo dessa atividade era conceituar matriz e nela não houve dificuldade, por parte dos grupos, para organizar os dados em uma tabela.

De modo geral, a maioria dos participantes executaram bem rápido a atividade proposta, pois conseguiram perceber sem grande dificuldade que os dados estavam desorganizados e, precisavam serem enumerados/organizados por meses e em seguida por regiões.

Figura 14 – Estudante resolvendo a atividade 1



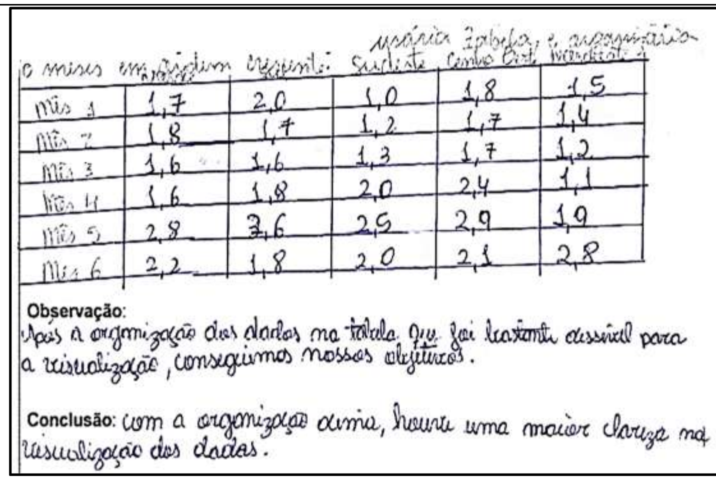
Fonte: Autoria própria (2021)

Na figura 17 temos uma ilustração de um estudante resolvendo a primeira atividade e seguindo todos os procedimentos contidos nela.

Após essa organização os grupos fizeram suas devidas observações e conclusões, as quais apresentamos em quadros que foram organizados contendo três campos que são eles: Estudantes, Características e Análise. Eles serão importantes para destacarmos os participantes de cada grupo; as principais observações e conclusões que cada grupo chegou e por fim, no campo análise, iremos verificar se as observações e conclusões são válidas (Representado pela cor ouro), parcialmente válidas (Representado pela azul) ou inválidas (Representado pela cor amarela).

Quadro 18 – Observações e Conclusões dos grupos na Atividade 1

<table>
<tr><th>ESTUDANTES</th><th>CARACTERÍSTICAS</th><th>ANÁLISE</th></tr>
<tr><td>(GRUPO A)
E1 e E2</td><td>Questão 01: Em um dia numa entrevista coletiva um agente recenseador do IBGE precisou de uma informação, mas em meio a tantos dados diferentes, não conseguiu localizá-la de imediato. Se o responsável pela organização dos dados fosse você, como a faria para melhorar a visualização de cada informação?
<table>
<tr><th></th><th>mês 1</th><th>mês 2</th><th>mês 3</th><th>mês 4</th><th>mês 5</th><th>mês 6</th></tr>
<tr><td>Norte</td><td>1,7%</td><td>1,8%</td><td>1,6%</td><td>1.6%</td><td>2,8%</td><td>2,2%</td></tr>
<tr><td>Sul</td><td>2,0%</td><td>1,7%</td><td>1,6%</td><td>1,8%</td><td>3,6%</td><td>1,8%</td></tr>
<tr><td>Centro-Oeste</td><td>1,8%</td><td>1,7%</td><td>1,7%</td><td>2,4%</td><td>2,9%</td><td>2,1%</td></tr>
<tr><td>Nordeste</td><td>1,5%</td><td>1,4%</td><td>1,2%</td><td>1,1%</td><td>1,9%</td><td>2,8%</td></tr>
<tr><td>Sudeste</td><td>1,0%</td><td>1,2%</td><td>1,3%</td><td>2,0%</td><td>2,5%</td><td>2,0%</td></tr>
</table>
Observação: Se o responsável pela organização fose eu, faria uma tabela bem organizada com os mêses e as regiões.
Conclusão: Concluir com a tabela pronta e organizada com as regiões e cada mês.</td><td>Característica válida sobre a organização dos dados em tabela.</td></tr>
<tr><td>(GRUPO B)
E3, E4 e E5</td><td>
<table>
<tr><th>mês</th><th>nort</th><th>nodest</th><th>sul</th><th>sudest</th><th>centro oest</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1,7%</td><td>1,5%</td><td>2,0%</td><td>1,0%</td><td>1,8%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1,8%</td><td>1,4%</td><td>1,7%</td><td>1,2%</td><td>1,7%</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1,6%</td><td>1,2%</td><td>1,6%</td><td>1,3%</td><td>1,7%</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1,6%</td><td>1,1%</td><td>1,8%</td><td>2,0%</td><td>2,4%</td></tr>
<tr><td>5</td><td>2,8%</td><td>1,9%</td><td>1,8%</td><td>2,5%</td><td>2,9%</td></tr>
<tr><td>6</td><td>2,2%</td><td>1,8%</td><td>1,8%</td><td>2,0%</td><td>2,1%</td></tr>
</table>
Observação: Com os dados organizados fica mais claros para intendelos. Facilitando encontrar os mês e as regiões em ordem.
Conclusão: Matriz é toda organização pode ser representado com ( ) ou por [ ], que contem linhas e colunas.</td><td>Característica válida sobre a organização dos dados em tabela.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>(GRUPO C)
E6, E7, E8 e E9</td>
<td>


[illegible] tabela, e organização
o meses em [illegible] crescente: Sudeste Centro Oeste Nordeste [illegible]

				1,8	1,5
Mês 1	1,7	2,0	1,0	1,7	1,4
Mês 2	1,8	1,7	1,2	1,7	1,2
Mês 3	1,6	1,6	1,3	2,4	1,1
Mês 4	1,6	1,8	2,0	2,9	1,9
Mês 5	2,8	3,6	2,5	2,1	2,8
Mês 6	2,2	1,8	2,0		

Observação:
Após a organização dos dados na tabela que foi bastante acessível para a visualização, conseguimos nossos objetivos.

Conclusão: com a organização acima, houve uma maior clareza na visualização dos dados.
</td>
<td>Característica válida sobre a organização dos dados em tabela.</td>
</tr>
</table>

Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Como podemos observar, a partir das respostas dos grupos na atividade 1, eles conseguiram organizar os dados em tabela e essa organização era o esperado na análise a priori dessa atividade.

Nas respostas percebemos que o grupo 2 fez uma conclusão bem válida, pois mencionaram a maneira de representar uma matriz. Já os grupos A e C fizeram uma conclusão considerada válida, não só pelo registro feito na conclusão, mas também pelos registros realizados nas observações.

O conceito presente nessa atividade foi devidamente formalizado no final, tomando por base as respostas dos grupos, e sendo assim informamos que está representação é conceituada como matriz.

As questões de aprofundamento sobre a atividade 1 foram resolvidas sem dificuldades pelos componentes dos grupos de modo que gastaram apenas 20 minutos, no horário de 15h 35min às 15h 55min, para resolverem as questões. No final de cada atividade realizada solicitávamos que os estudantes devolvessem as folhas contendo as questões, e assim chegamos ao fim dos processos referentes a Atividade 1.

No fim de tudo, agradecemos a participação dos estudantes e reforçamos a importância deles para o desenvolvimento de nossa pesquisa referente ao assunto de matrizes. Reforçamos que continuaríamos com mais atividades no dia seguinte e pedimos a eles que não se esquecem de trazer os TCLE devidamente assinado, por seu responsável, para podermos efetivar suas participações na pesquisa.

5.2. Segunda Sessão de Ensino

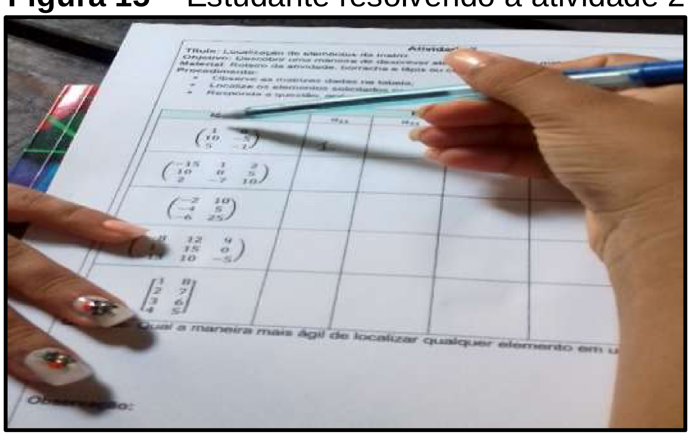
A segunda sessão de ensino ocorreu no dia 04 de fevereiro de 2021. De início pedimos aos estudantes que se organizassem nas mesmas equipes e nesse momento ocorreu a entrega dos TCLE dos participantes menores de idade. Logo em seguida entregamos a atividade 2 aos grupos, todo esse processo ocorreu aproximadamente das 13h15min às 13h 25min.

O objetivo da atividade 2 era descobrir uma maneira de descrever elementos em uma matriz. Os procedimentos descritos no roteiro desta atividade eram: observe as matrizes dadas na tabela; localize os elementos solicitados na tabela abaixo e responda a questão proposta, após os elementos das matrizes serem todos localizados.

Na folha desta atividade existiam, abaixo do quadro, dois espaços para preenchimento, sendo o primeiro referente a observação, descritas pelos os estudantes depois do respectivo preenchimento do quadro e o segundo para a conclusão à qual chegaram após o preenchimento do quadro.

A atividade 2 foi efetivada em aproximadamente 22 (vinte e dois) minutos, das 13h 25min às 13h 47min. Como previmos, os estudantes tiveram certa dificuldade no início da atividade, no que se refere ao preenchimento do quadro e na localização dos elementos das matrizes dada, mas as dificuldades diminuíram com o avanço do preenchimento o qual posteriormente facilitou a compreensão, para responder à questão motivadora, sempre realizando no final a observação e a conclusão da atividade.

Figura 15 – Estudante resolvendo a atividade 2



Fonte: Autoria própria (2021)

A figura 18 mostra um estudante preenchendo o quadro, seguindo os passos contidos no procedimento e as orientações dadas pelo professor/pesquisador.

Após a execução dos procedimentos descritos nessa atividade, os estudantes preencheram o quadro 19 com as informações pedidas, isto é, identificando os elementos de cada matriz dada, depois socializaram e discutiram internamente nos grupos. No final responderam a questão motivadora realizando sempre a observação e a conclusão da atividade 2.

Quadro 19 – Observações e Conclusões dos grupos na Atividade 2

ESTUDANTES	CARACTERÍSTICAS	ANÁLISE
(GRUPO A) **E1 e E2**	**Questão**: Qual a maneira mais ágil de localizar qualquer elemento em uma matriz? A maneira mais ágil de se localizar os elementos e observando as linhas e as colunas da matriz. **Observação:** A principal maneira de achar o elemento da matriz é prestar atenção nas linhas e colunas. **Conclusão:** Para localizar qualquer elemento em uma matriz, precisamos encontrar a linha e a coluna que está localizado o elemento.	Característica válida sobre a localização de elementos na matriz.
(GRUPO B) **E3, E4 e E5**	**Questão**: Qual a maneira mais ágil de localizar qualquer elemento em uma matriz? A maneira mais agil de localizar o elemento de uma matriz são as linhas e as colunas. **Observação:** com as linhas e as colunas ficou mais facil de encontrar os elementos da matriz **Conclusão:** sabendo a localização das linhas e das colunas podemos encontrar qualquer elemento da matriz.	Característica parcialmente válida sobre a localização de elementos na matriz.

(GRUPO C) **E6, E7, E8 e E9**	**Questão**: Qual a maneira mais ágil de localizar qualquer elemento em uma matriz? Saber diferenciar linha de coluna, e interpretar a questão. **Observação:** Sem observação. **Conclusão:** Para o melhor entendimento a pessoa deve saber o que é linha e coluna, depois localizar os elementos da Matriz através da identificação. Ex: a 32 linha coluna.	Característica parcialmente válida sobre a localização de elementos na matriz.

Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Ao analisarmos as observações e conclusões formuladas pelos grupos, mesmo com a existência de dificuldades, percebemos que elas foram superadas, uma vez que mais da metade dos estudantes apresentaram características válidas e os demais parcialmente válidas, não tendo com isso, nenhum estudantes apresentado características inválidas, e por isso que acreditamos que os estudantes conseguiram chegar ao entendimento de como localizar qualquer elementos em uma matriz, através dos procedimentos descritos na atividade junto com a orientação do professor/pesquisador.

É importante ressaltar que, no final da realização dos procedimentos descritos nessa atividade, solicitarmos que um representante de cada equipe fosse até o quadro e expusesse a conclusão de sua equipe, das quais fizemos a análise das conclusões de todas elas, e assim produzimos uma conclusão oficial para a atividade 2.

Após o término da atividade os participantes devolveram as folhas e distribuímos em seguida as questões de aprofundamento da atividade 2.

As questões de aprofundamento sobre a atividade 2 foram resolvidas sem muita dificuldade pelos estudantes, sendo concluídas em aproximadamente 20 minutos, no horário de 14h 05 min às 14h 25 min, um tempo inferior à qual havíamos previsto. Ao terminarem esta atividade devolveram, e em seguida finalizamos os processos referentes a atividade e seguirmos para a próxima.

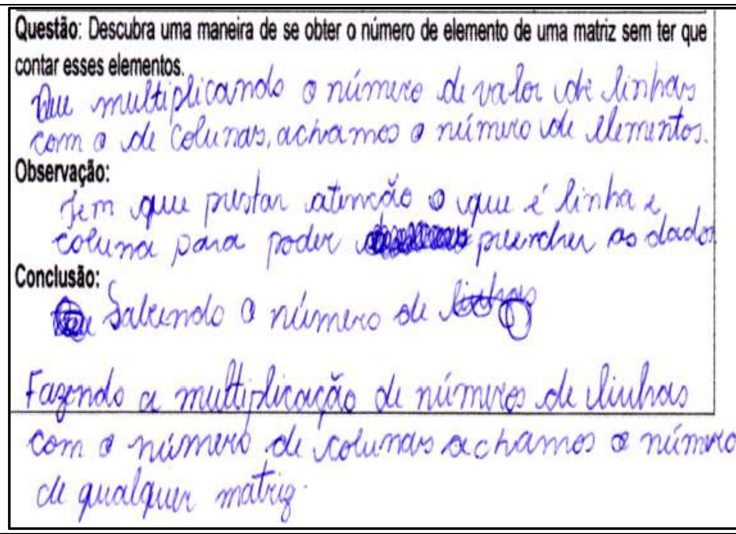
Para iniciar a atividade 3, informamos que ela seria semelhante a atividade anterior. O objetivo dela era descobrir a relação que existe entre o número de elementos da matriz e a quantidade de linhas e colunas, através dos procedimentos descritos na folha os quais eram: preencher o quadro dado; identificar o número de linhas, o número de colunas e o número de elementos de cada matriz dada e após o preenchimento do quadro dado, responder à questão proposta. Depois, eles deveriam também preencher dois espaços com a observação e conclusão.

A atividade 3 foi efetivada em aproximadamente 20 (vinte) minutos, das 14h 40min às 15h. E como havíamos previsto, os componentes não apresentaram dificuldades no que se referiu ao preenchimento do quadro, bem como na observação e na conclusão da atividade.

Logo após o preenchimento do quadro pelos grupos e de responderem a questão motivadora, eles começaram as discussões sobre as observações e conclusões, as quais destacamos no quadro 20.

Quadro 20 – Resposta da questão, observação e conclusão dos grupos na Atividade 3

ESTUDANTES	CARACTERÍSTICAS	ANÁLISE
(GRUPO A) **E1 e E2**	**Questão**: Descubra uma maneira de se obter o número de elemento de uma matriz sem ter que contar esses elementos. Multiplicando o número de linhas com o número de colunas temos o número de elementos da matriz. **Observação:** **Conclusão:** ~~[illegible]~~ Multiplicando por dois o número de linhas concluimos o número dos elementos.	Característica válida sobre uma maneira de obter o número de elemento de uma matriz.
(GRUPO B) **E3, E4 e E5**	**Questão**: Descubra uma maneira de se obter o número de elemento de uma matriz sem ter que contar esses elementos. multiplicando as linhas e as colunas **Observação:** Percebi que com a multiplicação das linhas e ~~[illegible]~~ colunas da matriz. ficou mais facil de descobrir os elementos **Conclusão:** para encontrar o número de elemento de qualquer matriz Basta multiplicar o numeros de linhas pelo numero de coluna.	Característica válida sobre uma maneira de obter o número de elemento de uma matriz.

(GRUPO C) **E6, E7, E8 e E9**	 **Questão**: Descubra uma maneira de se obter o número de elemento de uma matriz sem ter que contar esses elementos. Que multiplicando o número de valor de linhas com o de colunas, achamos o número de elementos. **Observação:** Tem que prestar atenção o que é linha e coluna para poder preencher os dados **Conclusão:** Sabendo o número de linhas Fazendo a multiplicação de números de linhas com o número de colunas achamos o número de qualquer matriz.	Característica válida sobre uma maneira de obter o número de elemento de uma matriz.

Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Ao analisarmos as observações e conclusões dos grupos, percebemos que não houveram dificuldades durante o desenvolvimento desta atividade, uma vez que eles conseguiram responder e identificar a multiplicação como sendo a operação oculta, para se obter o número de elementos de qualquer matriz.

Também destacamos que as características feitas nas análises foram válidas, isso mostra como os grupos compreenderam a atividade, após preencherem o quadro com o número de linhas e de colunas das matrizes dadas. Esse preenchimento colaborou para que os grupos fizessem as observações e conclusões referente a esta atividade sem nenhuma dificuldade.

Ao final da realização dos procedimentos descritos, novamente solicitarmos que um representante de cada equipe fosse até o quadro para exporem aos grupos suas conclusões, em seguida fizemos a análise das conclusões de todas as equipes, e a partir de cada uma produzimos a conclusão oficial dos grupos.

Com o término da atividade 3, os participantes devolveram as folhas as quais recolhemos e distribuímos em seguida aos grupos as questões de aprofundamento.

As questões referentes a atividade 3, foram resolvidas sem dificuldades pelos estudantes, sendo concretizadas em aproximadamente 10 minutos, no horário de 15h 05 min às 15h 15min, com um tempo inferior ao que tínhamos previsto. Os participantes ao terminarem as questões devolveram, e as recolhemos para finalizar a atividade. Então, agradecemos a participação e elogiamos o bom desempenho dos estudantes na execução das atividades, e comunicamos que continuaríamos na próxima semana.

5.3. Terceira Sessão de Ensino

A terceira sessão de ensino ocorreu no dia 10 de fevereiro de 2021. Ao chegamos, notamos que os estudantes começaram a se organizar em seus grupos, assim conversamos rapidamente com a turma, e posteriormente distribuímos a atividade 4. Todo esse processo ocorreu em aproximadamente 6 minutos das 13h 29 min às 13h 35 min.

O objetivo da atividade 4 foi descobrir as condições para termos a igualdade de matrizes através dos procedimentos descritos na folha, o qual consistiu em preencha a tabela com as matrizes dadas na folha de atividade 4; logo após preencherem a tabela, teriam que responder a questão motivadora e em seguida, fazer as devidas observações e conclusões como nas atividades anteriores. Essa atividade foi efetivada em aproximadamente 20 (vinte) minutos, das 13h 35 min às 13h 55 min.

Os estudantes não apresentaram dificuldades na execução desta atividade, nem no preenchimento do quadro, nem na observação e conclusão, levando assim um tempo inferior ao qual havíamos planejado para a realização da atividade pelos grupos.

Logo após o preenchimento do quadro e de haverem respondido a questão motivadora, os grupos começaram as discussões sobre as observações e conclusões, as quais destacamos no quadro 21:

Quadro 21 – Resposta da questão, observação e conclusão dos grupos na Atividade 4

ESTUDANTES	CARACTERÍSTICAS	ANÁLISE
(GRUPO A) **E1 e E2**	**Questão**: Quais as matrizes que têm, ao mesmo tempo, as mesmas ordens e os elementos correspondentes iguais? A e A, A e E, B e B, B e F, C e C, D e D, D e G, E e A, E e E F e B, F e F, G e D, G e G, H e H, I e I **Observações:** Por Exemplo a matriz G e D estão com elementos iguais mas não na ordem correta. **Conclusão:** As matrizes parecidas umas com as outras quando os elementos ficam com a mesma Ordem as mesma linhas e as mesmas colunas são correspondidas iguais.	Característica válida sobre a igualdade de matrizes.

(GRUPO B) **E3, E4 e E5**	**Questão:** Quais as matrizes que têm, ao mesmo tempo, as mesmas ordens e os elementos correspondentes iguais? ~~AeA~~, AA, AE, BB, BF, CC, DD, DG, EE, EA, FF, FB, GD, HH, II **Observações:** Com a matrizes na mesma ordem e os elemento iguais fica mais fácil de indentifica-la as matrizes igual. **Conclusão:** duas matrizes são igual quando tem a mesma ordem e seus elementos correspondente são iguais	Característica válida sobre a igualdade de matrizes.
(GRUPO C) **E6, E7, E8 e E9**	**Questão:** Quais as matrizes que têm, ao mesmo tempo, as mesmas ordens e os elementos correspondentes iguais? AA, AE, BB, BF, CC, DD, DG, EA, EE, FB, FF, GD, GG, HH, II. **Observações:** A matriz A é semelhante a outra Matriz A, por terem os mesmos elementos e as mesmas linhas e colunas, já a matriz A não é igual a Matriz C, por não terem os mesmos elementos iguais, ou seja, para uma Matriz ser igual a outra precisa ser igual na ordem e nos seus elementos. **Conclusão:** Para uma Matriz ser igual a outra precisam ter a mesma ordem e seus elementos correspondentes.	Característica válida sobre a igualdade de matrizes.

Fonte: Pesquisa de campo (2021)

As análises feitas nas observações e conclusões demonstraram que mesmo existindo dificuldades durante o desenvolvimento da atividade, elas foram superadas, pois todas as equipes conseguiram chegar à conclusão de como determinar a igualdade de matrizes.

Destaco aqui o grupo C que mostrou-se bastante interessado em saber como seriam feito o preenchimento do quadro, de modo que aguardamos o final da atividade para explicar brevemente sobre a importância de se fazer a relação do número de linhas e colunas com o número de elementos da matriz dada para a turma. Deixamos claro que o foco da atividade era descobrir uma maneira de se obter o número de elementos da matriz sem ter que fazer a contagem dos elementos.

Para dar continuidade aos procedimentos, novamente solicitarmos que um representante de cada equipe fosse até o quadro para apresentarem aos outros grupos a conclusão de sua equipe, em seguida fizemos a análise das conclusões de todos, e a partir de cada uma produzimos a conclusão oficial.

Com o término da atividade 4, os participantes devolveram as folhas as quais recolhemos e distribuímos em seguida aos grupos as questões de aprofundamento, que foram resolvidas sem dificuldades pelos estudantes tendo em vista a empolgação e curiosidade demostrada por eles na atividade, sendo concluídas em aproximadamente 20 minutos, no horário de 14h 10 min às 14h 30 min, com um tempo inferior ao previsto.

Ao terminarem as questões, os participantes devolveram as folhas de aprofundamento, as quais recolhemos, então finalizou-se a atividade 4.

Para iniciar a atividade 5, começamos pedindo aos grupos que realizassem a leitura do objetivo da atividade que era conceituar alguns tipos especiais de matrizes, que iriam aparecer mais adiante nas questões de aprofundamento referente as demais atividades. Essa atividade foi efetivada em aproximadamente 12 (doze) minutos, das 14h 30 min às 14h 42 min. A execução dos procedimentos descritos na folha de atividade 5 se encontra na figura 16.

Figura 16 – Exemplo da atividade 5 feita por um estudante

Atividade 5

Titulo: Matrizes especiais (Adaptado de Silva, 2016, p. 114)

Objetivo: Conceituar alguns tipos especiais de matrizes.

Material: Roteiro da atividade, borracha e lápis ou caneta, papel.

Procedimento:

- Leia as características especiais de cada matriz;
- Observe os exemplos dados e relacione-os com suas características, após, complete os que faltam;
- Escreva nos espaços, referido aos nome, qual o nome que você daria para essas matrizes.

Característica	Exemplo	Nome
Uma matriz que possui apenas uma Coluna.	$\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	Matriz coluna
Uma matriz que possui apenas uma Linha.	(4, 9, 3, 1)	Matriz linha
Uma matriz que possui o mesmo número de linhas e de colunas.	$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 9 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$	Matriz Quadrada
Uma matriz em que todos os elementos tem valor 0 (valor nulo).	(0, 0, 0, 0)	Matriz nula
Uma matriz que possui valores não nulos somente em sua diagonal.	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	Matriz triangular
Uma matriz que só possui valores nulos e em sua diagonal somente o valor 1.	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Matriz identidade
Uma matriz que possui número de linhas diferentes do número de coluna.	$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 4 & 10 & 8 \end{bmatrix}$	Matriz retangular

Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Os participantes terminaram a atividade que as recolhemos para finalizar mais uma sessão de ensino. Então, agradecemos a participação dos estudantes e comunicamos que continuaríamos no dia seguinte.

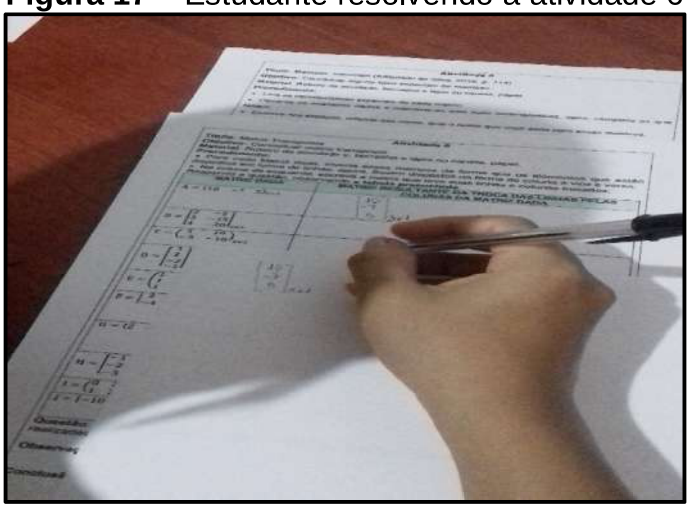
5.4. Quarta Sessão de Ensino

A quarta sessão de ensino ocorreu no dia 11 de fevereiro de 2021. Os estudantes já estavam organizados em seus grupos, e assim distribuímos a atividade 6. Todo esse processo ocorreu em 9 minutos das 13h às 13h 9 min.

O objetivo da atividade 6 foi conceitua matriz transposta seguindo os passos dos procedimentos descritos na folha de atividade, os quais eram: para cada Matriz dada, inverta-as de forma que os elementos que estão dispostos em forma de linhas, agora, fiquem dispostos na forma de coluna e vice e versa; já na coluna da esquerda escreva a nova matriz que tiveram suas linhas e colunas trocadas e responda a questão observando a tabela preenchida. Após o preenchimento da tabela, responda a questão e em seguida faça a devida observação e conclusão, como nas atividades anteriores. A atividade 6 foi concluída em aproximadamente 18 (dezoito) minutos, das 13h 5 min às 13h 23 min.

Temos abaixo uma figura que ilustra um estudante realizando a atividade 6, seguindo os passos detalhados no procedimento e nas orientações dadas pelo professor/pesquisador durante a aplicação da sequência didática.

Figura 17 – Estudante resolvendo a atividade 6



Fonte: Autoria própria (2021)

Com isso, os estudantes não apresentaram dificuldades na execução da atividade, nem no preenchimento do quadro, nem na observação ou na conclusão. Eles demoraram na atividade um tempo inferior ao qual planejamos como havíamos previsto e já ocorrido anteriormente.

Logo após o preenchimento do quadro e de terem respondido a questão, os grupos começaram as discussões sobre as observações e conclusões, as quais destacamos no quadro 22.

Quadro 22 – Resposta da questão proposta, observação e conclusão dos grupos na Atividade 6

ESTUDANTES	CARACTERÍSTICAS	ANÁLISE
(GRUPO A) **E1 e E2**	**Questão**: O que aconteceu com a ordem das matrizes quando as mudanças foram realizadas? A ordem das matrizes inverteram. **Observação:** Quando mudamos as matrizes os elementos tambem mudam. **Conclusão:** A matriz transposta é a matriz que subtem na mudança das linhas pelas colunas, com a invenção da ordem.	Característica válida sobre a matriz transposta
(GRUPO B) **E3, E4 e E5**	**Questão**: O que aconteceu com a ordem das matrizes quando as mudanças foram realizadas? As ordens mudaram **Observação:** Observamos que quando a troca de linhas pelas colunas e realizada ela muda é a posição de seus elementos tambem. **Conclusão:** Matriz transposta é a matriz resultante da troca de linhas pelas colunas.	Característica válida sobre a matriz transposta
(GRUPO C) **E6, E7, E8 e E9**	**Questão**: O que aconteceu com a ordem das matrizes quando as mudanças foram realizadas? As ordens inverterom e seu numero de linhas e colunas, tamlém mudarom. **Observação:** Não São as mesmas Matriz, Pois a ordem delas mudarom, seus linhas e colunas tamlém, na Matriz quadrada o primeiro, elemento e o último não mudam a posição. **Conclusão:** A Matriz transposta é o inverso da matriz dada quando inverte as linhas colunas, e a ordem dos seus elementos mudam tamlém.	Característica válida sobre a matriz transposta

Fonte: Pesquisa de campo (2021)

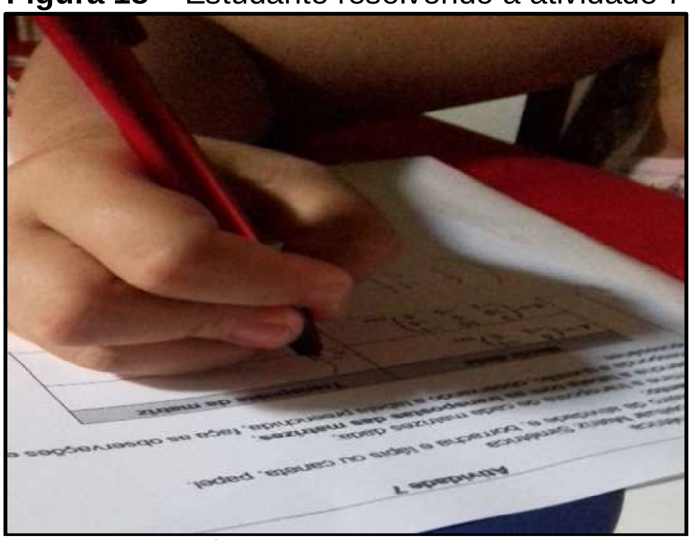
Como podemos verificar pelas respostas da questão, pelas observações e pela as conclusões formuladas, todos apresentaram características válidas, não ocorrendo nenhuma característica parcialmente válidas ou inválidas, e isso facilitou o entendimento de como obter a matriz transposta através de uma matriz dada, seguindo os procedimentos descritos na atividade**.**

Após o término, os participantes devolveram as folhas e distribuímos em seguida aos grupos as questões de aprofundamento da atividade 6.

As questões de aprofundamento foram resolvidas sem muita dificuldade pelos estudantes, sendo concluídas em aproximadamente 22 minutos, no horário de 13h 30min às 13h 52min, um tempo inferior ao que havíamos previsto. Assim, finalizarmos os processos referentes a essa atividade e seguirmos para a próxima.

Para iniciar a atividade 7, informamos que ela seria semelhante a atividade anterior. O objetivo era conceituar matriz simétrica através dos procedimentos descritos na folha de atividade, os quais eram: para cada Matriz dada, inverta essas matrizes de forma que os elementos que estão dispostos em forma de linhas, agora, fiquem dispostos na forma de coluna; determine a transposta de cada matrizes dada; preencha a tabela com as transpostas das matrizes e responda a questão, observando a tabela preenchida, faça as observações e conclusões necessárias. Depois, eles deveriam preencher dois espaços com a devida observação e conclusão.

Figura 18 – Estudante resolvendo a atividade 7



Fonte: Autoria própria (2021)

Na figura acima temos um estudante preenchendo a tabela com as transpostas das matrizes dadas, seguindo os passos descritos no procedimento e as orientações dadas pelo professor/pesquisador no decorrer da atividade. Orientações essas que foram fundamentais para que os grupos pudessem iniciar e finalizar cada atividade, superando assim dificuldades que foram detectadas e logo superadas no avanço dessa e de outras atividades.

A atividade 7 foi efetivada em aproximadamente 17 (dezessete) minutos, das 13h 55 min às 15h 12 min. E como previsto, os grupos não apresentaram dificuldades no que se refere ao preenchimento do quadro, bem como na observação e na conclusão da atividade.

Logo após o preenchimento do quadro pelos grupos e de terem respondido a questão, eles começaram as discussões sobre as observações e conclusões, as quais destacamos no quadro 23.

Quadro 23 – Resposta da questão proposta, observação e conclusão dos grupos na Atividade 7

ESTUDANTES	CARACTERÍSTICAS	ANÁLISE
(GRUPO A) **E1 e E2**	**Questão**: No preenchimento da tabela acima, você observou alguma mudança nas transposta das matrizes? O que aconteceu? Não, ao fazer a transposta o resultado foi o mesmo da matriz. **Observação:** Ao fazer a mudança da transposta não muda os elementos da matriz. **Conclusão:** Matriz simétrica é a própria matriz que resultam fazendo a transposta dessa matriz, não alterando a ordem e posição dos elementos.	Característica válida sobre a matriz simétrica.
(GRUPO B) **E3, E4 e E5**	**Questão**: No preenchimento da tabela acima, você observou alguma mudança nas transposta das matrizes? O que aconteceu? não, Após fazer a transposta da matriz dada não ocorreu nenhuma mudança. **Observação:** observei que mesmo fazendo a transposta continuou ao mesmo elemento e a mesma ordem. **Conclusão:** matriz simetrica é uma matriz quadrada que é igual a sua transposta.	Característica válida sobre a matriz simétrica.
(GRUPO C) **E6, E7, E8 e E9**	**Questão**: No preenchimento da tabela acima, você observou alguma mudança nas transposta das matrizes? O que aconteceu? Não houve mudança, elas continuaram a mesma coisa, tanto na ordem como nos elementos. **Observação:** Que todas essas Matrizes são quadradas, pois suas linhas são iguais as colunas e a ordem permanece constante **Conclusão:** Matriz Simétrica é igual a sua transposta, pois o número de linhas, colunas e elementos são igual.	Característica válida sobre a matriz simétrica.

Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Analisando as observações e conclusões dos grupos, podemos perceber que não houve dificuldades durante o desenvolvimento da atividade, uma vez que esses grupos conseguiram identificar que as matrizes transpostas agora são matrizes simétricas.

Também destacamos que as características feitas nas análises foram válidas, devido a compreensão que os grupos tiveram nessa atividade, após preencherem a tabela com as transpostas da matrizes dada. Esse preenchimento contribuiu para que os grupos fizessem as observações e conclusões referente a atividade 7.

Ao final da realização da atividade, pedimos que um representante de cada equipe fosse até o quadro para expor para os grupos sua conclusão, em seguida fizemos a análise das conclusões de todos, e a partir de cada uma produzimos a conclusão oficial dos grupos.

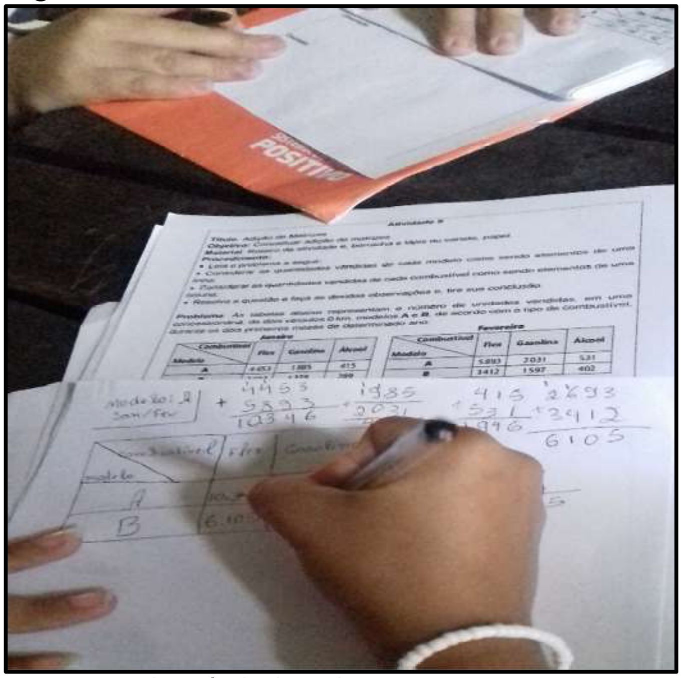
Com o término da atividade 7, recolhemos as folhas e distribuímos as questões de aprofundamento. Essas questões foram resolvidas sem dificuldades pelos estudantes, sendo concretizadas em aproximadamente 20 minutos, no horário de 15h 15 min às 15h 35 min, com um tempo inferior ao que tínhamos previsto. Então foi finalizada a atividade com agradecimentos a todos e com a promessa de que continuaríamos na próxima semana a aplicação da sequência didática.

5.5. Quinta Sessão de Ensino

A quinta sessão ocorreu no dia 17 de fevereiro de 2021. Ao chegarmos, os estudantes já estavam organizados em seus grupos, distribuímos a atividade 8 e continuamos solicitando aos estudantes que mantenham o distanciamento social, todo esse processo ocorreu em aproximadamente 6 minutos das 13h às 13h 6 min.

O objetivo da atividade 8 foi conceituar adição de matrizes seguindo os passos dos procedimentos descritos na atividade, os quais consistiam em: ler o problema a seguir; considerar as quantidades vendidas de cada modelo como sendo elementos de uma linha; considerar as quantidades vendidas de cada combustível como sendo elementos de uma coluna e, resolver a questão motivadora, sempre realizando a observação e a conclusão.

Figura 19 – Estudante resolvendo a atividade 8



Fonte: Autoria própria (2021)

Acima apresentamos uma figura mostrando um estudante realizando a atividade 8, seguindo o procedimento juntamente com as orientações do professor/pesquisador que buscou, através dos diálogos, direcionar os componentes dos grupos a resolverem o problema.

Em seguida os grupos responderam a questão motivadora resolvendo-a, montando uma tabela que representava a quantidade total de veículos vendidos nos dois meses. Da mesma forma como aconteceu nas atividades antecessoras, após responderem a questão, os grupos fizeram as observações e conclusões, vindo concluir a atividade 8 em aproximadamente 10 (dez) minutos, das 13h 10 min às 13h 20 min.

Nesta atividade destacamos que os estudantes não apresentaram dificuldades em nenhuma etapa do procedimento. Logo após responderem a questão motivadora, os grupos começaram as discussões sobre as observações e conclusões, as quais destacamos no quadro 24.

Quadro 24 – Resposta da questão proposta, observação e conclusão dos grupos na Atividade 8

<table>
<tr><th>ESTUDANTES</th><th>CARACTERÍSTICAS</th><th>ANÁLISE</th></tr>
<tr><td>(GRUPO A)
E1 e E2</td><td>Questão: Monte uma tabela que represente a quantidade total de veículos vendidos nos dois meses?
<table>
<tr><th>Combustível
Modelo</th><th>Flex</th><th>Gasolina</th><th>Álcool</th></tr>
<tr><td>A</td><td>10346</td><td>4016</td><td>946</td></tr>
<tr><td>B</td><td>6105</td><td>2975</td><td>691</td></tr>
</table>
Observação: Para chegar aos valores da tabela, obtive a soma dos valores dos dois meses Janeiro e Fevereiro.
Conclusão: Só podemos adicionar duas matrizes, se elas forem da mesma ordem.</td><td>Característica válida sobre adição de matrizes.</td></tr>
<tr><td>(GRUPO B)
E3, E4 e E5</td><td>Questão: Monte uma tabela que represente a quantidade total de veículos vendidos nos dois meses?
<table>
<tr><th>Combustível
Modelo</th><th>flex</th><th>Gasolina</th><th>Álcool</th></tr>
<tr><td>A</td><td>10.346</td><td>4.016</td><td>946</td></tr>
<tr><td>B</td><td>6.105</td><td>2.975</td><td>691</td></tr>
</table>
Observação: Observei que a quantidade de veículos deve ser somada pelo mesmo tipo de combustível.
Conclusão: A adição de matrizes deve ser feita com matrizes do mesmo tipo.</td><td>Característica válida sobre adição de matrizes.</td></tr>
<tr><td>(GRUPO C)
E6, E7, E8 e E9</td><td>Questão: Monte uma tabela que represente a quantidade total de veículos vendidos nos dois meses?
Janeiro e Fevereiro
<table>
<tr><th>Combustível
modelo</th><th>Flex</th><th>Gasolina</th><th>Álcool</th></tr>
<tr><td>A</td><td>1.346</td><td>4.016</td><td>946</td></tr>
<tr><td>B</td><td>6.105</td><td>2.975</td><td>691</td></tr>
</table>
(2×3)
4453+5893=10346
1985+2031=4106
415+531=946
2693+3412=6105
1378+1597=2975
289+402=691
Observação: Tem que somar os valores do combustível de mesmo tipo de janeiro e fevereiro, para poder chegar no resultado final.
Conclusão: Só dá para somar as matrizes quando elas tiverem o mesmo número de linhas e colunas.</td><td>Característica válida sobre adição de matrizes.</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Como apresentado pelo quadro 24, podemos verificar que as respostas dadas na questão, nas observações e nas conclusões, formuladas pelos componentes dos grupos, apresentaram características válidas e isso facilitou o entendimento de como obter a adição de matrizes, seguindo os procedimentos para a atividade.

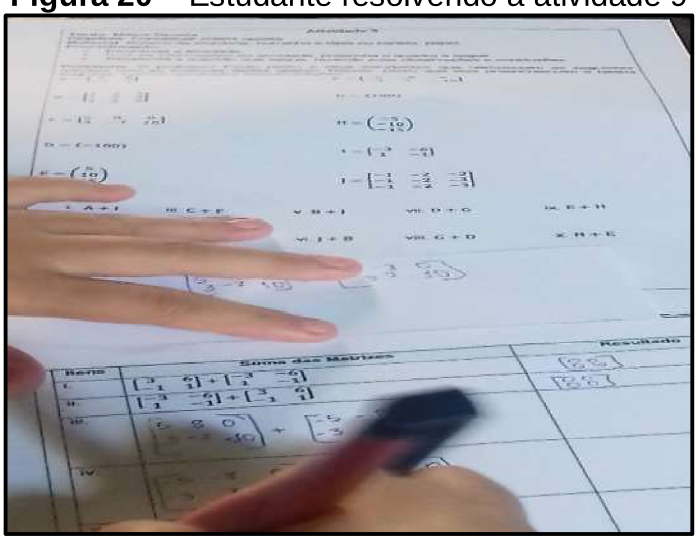
É importante dizer que mais uma vez solicitarmos a um representante de cada equipe que expusesse a conclusão de seu grupo, em seguida fizemos a análise das conclusões de todas os presentes, e assim produzimos a conclusão oficial para a atividade 8. Após o término, os participantes devolveram as folhas e distribuímos em seguida aos grupos as questões de aprofundamento.

As questões de aprofundamento sobre a atividade 8 foram resolvidas sem dificuldade pelos estudantes, sendo concluídas em aproximadamente 20 minutos, no horário de 13h 30 min às 13h 50 min, um tempo muito inferior ao que havíamos previsto. No fim, devolveram-nos as questões de aprofundamentos resolvidas, e finalizamos os processos referentes a essa atividade, passando para a próxima.

A atividade 9 começou sendo informados que ela seria semelhante a atividade anterior. O objetivo era conceituar matriz oposta e seguiu os seguintes procedimentos: responder a atividade motivadora; com as informações da atividade, preencha o quadro dado e responder à questão motivadora que segue, fazendo suas observações e conclusões.

Essa atividade foi resolvida em aproximadamente 9 (nove) minutos, das 13h 55 min às 15h 04 min. E como previsto, os grupos não apresentaram dificuldades, no que se refere ao preenchimento do quadro, nem na observação e na conclusão.

Figura 20 – Estudante resolvendo a atividade 9

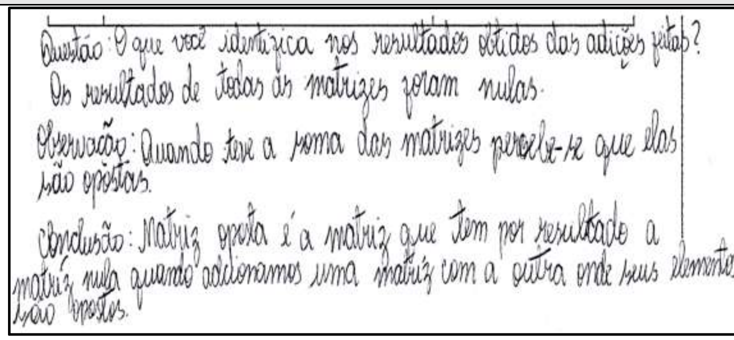
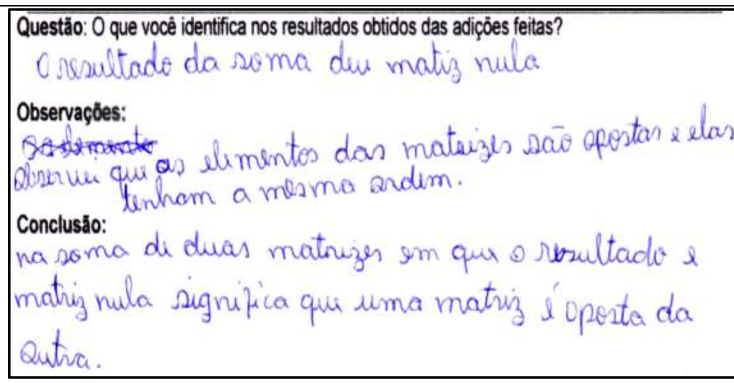
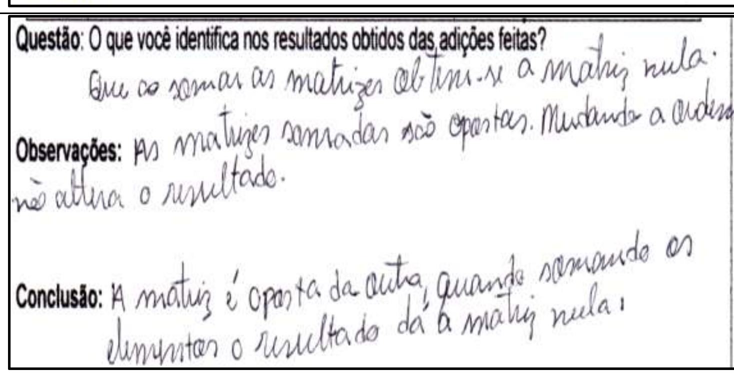


Fonte: Autoria própria (2021)

A figura 20 mostra um estudante preenchendo a tabela com o resultado da soma das matrizes dadas, seguindo os passos descritos no procedimento e as orientações do professor/pesquisador que ocorreram no decorrer da atividade.

Logo após o preenchimento do quadro pelos grupos e de terem respondido a questão, eles começaram as discussões sobre as observações e conclusões, as quais destacamos no quadro 25.

Quadro 25 – Resposta da questão proposta, observação e conclusão dos grupos na Atividade 9

ESTUDANTES	CARACTERÍSTICAS	ANÁLISE
(GRUPO A) **E1 e E2**	 Questão: O que você identifica nos resultados obtidos das adições feitas? Os resultados de todas as matrizes foram nulas. Observação: Quando teve a soma das matrizes percebe-se que elas são opostas. Conclusão: Matriz oposta é a matriz que tem por resultado a matriz nula quando adicionamos uma matriz com a outra onde seus elementos são opostos.	Característica válida sobre matriz oposta.
(GRUPO B) **E3, E4 e E5**	 **Questão:** O que você identifica nos resultados obtidos das adições feitas? O resultado da soma deu matriz nula **Observações:** ~~Se somarmos~~ observou que os elementos das matrizes são opostas e elas tenham a mesma ordem. **Conclusão:** na soma de duas matrizes em que o resultado é matriz nula significa que uma matriz é oposta da outra.	Característica válida sobre matriz oposta.
(GRUPO C) **E6, E7, E8 e E9**	 **Questão:** O que você identifica nos resultados obtidos das adições feitas? Que ao somar as matrizes obtem-se a matriz nula. **Observações:** As matrizes somadas são opostas. Mudando a ordem não altera o resultado. **Conclusão:** A matriz é oposta da outra, quando somando os elementos o resultado dá a matriz nula.	Característica válida sobre matriz oposta.

Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Após serem respondidas a questão motivadora e feita as observações e conclusões percebemos que não houve nenhuma dificuldades durante o desenvolvimento da atividade, uma vez que os grupos conseguiram identificar que a adição de matrizes opostas têm como resultado a matriz nula.

Mas uma vez destacamos que as características feitas nas análises foram válidas e não ocorreu análises parcialmente válidas ou invalidas, mostrando que os grupos compreenderam muito bem a atividade, após preencherem a tabela. Esse preenchimento contribuiu para que os grupos fizessem com muita segurança, as observações e conclusões referente a atividade 9.

Ao final da realização dessa atividade, solicitamos que um representante de cada equipe expusesse para os outros grupos sua conclusão no quadro, em seguida fizemos a análise das conclusões de todos, e a partir de cada uma produzimos a conclusão oficial dos grupos.

Com a finalização da atividade 9, os participantes devolveram as folhas da atividade, e distribuímos em seguida aos grupos as questões de aprofundamento. Essas questões foram resolvidas sem dificuldades pelos estudantes, sendo concretizadas em aproximadamente 23 minutos, no horário de 15h 14 min às 15h 37 min, concretizando, mais uma vez, em um tempo inferior ao que tínhamos previsto inicialmente.

Os estudantes, ao terminarem as questões de aprofundamento, as recolhemos para finalizarmos mais uma sessão. Então, agradecemos a participação e elogiamos o bom desempenho de todos na execução da atividade, e comunicamos que continuaríamos no dia seguinte à aplicação da última sessão de ensino. Os estudantes pediram para iniciarmos às 14:00 horas o próximo encontro e assim ocorreu.

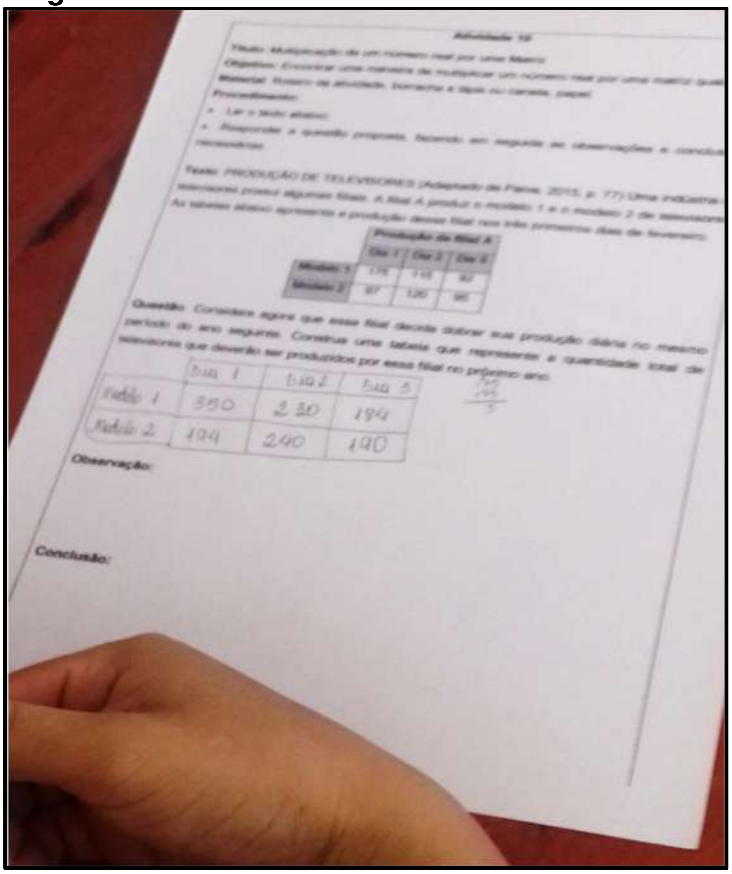
5.6. Sexta Sessão de Ensino

A sexta sessão de ensino ocorreu no dia 18 de fevereiro de 2021 na hora combinada. Nesse dia os estudantes já estavam organizados em seus grupos e então distribuímos a atividade 10. Todo esse processo ocorreu em aproximadamente 7 minutos das 14h às 14h 07 min.

O objetivo da atividade foi encontrar uma maneira de multiplicar um número real por uma matriz qualquer, seguindo os passos dos procedimentos descritos na atividade, os quais consistiam em: ler o texto dado; responder à questão proposta, fazendo em seguida as observações e conclusões necessárias

Os grupos responderam a questão proposta. Eles construíram a tabela e fizeram as devidas observações e conclusões, vindo a atividade 10 ser concluída em aproximadamente 6 (seis) minutos, das 14h 10 min às 14h 16 min.

Figura 21 – Estudante resolvendo a atividade 10



Fonte: Autoria própria (2021)

A figura acima destaca a atividade 10 feita por um estudante. Ele não apresentou dificuldade no entendimento, assim, os procedimentos foram bem compreendidos e o tempo para a realização da atividade, pelos grupos, foi bem inferior à do planejado. Após responderem a questão proposta, os grupos começaram as discussões sobre as observações e conclusões, as quais as destacamos no quadro 26.

Quadro 26 – Resposta da questão, observação e conclusão dos grupos na Atividade 10

ESTUDANTES	CARACTERÍSTICAS	ANÁLISE
(GRUPO A) **E1 e E2**	**Questão**: Considere agora que essa filial decida dobrar sua produção diária no mesmo período do ano seguinte. Construa uma tabela que represente a quantidade total de televisores que deverão ser produzidos por essa filial no próximo ano. 175 175 5 | | Dia 1 | Dia 2 | Dia 3 | | Modelo 1 | 350 | 230 | 184 | | Modelo 2 | 194 | 240 | 190 | **Observação:** Para encontrar os valores foi usado a multiplicação. **Conclusão:** Para fazermos a multiplicação de um número real para uma matriz, cada elemento da matriz é multiplicado pelo ~~mesmo~~ dobro dele.	Característica válida sobre a multiplicação de um número real por uma matriz.
(GRUPO B) **E3, E4 e E5**	**Questão**: Considere agora que essa filial decida dobrar sua produção diária no mesmo período do ano seguinte. Construa uma tabela que represente a quantidade total de televisores que deverão ser produzidos por essa filial no próximo ano. | | DIA 1 | DIA 2 | DIA 3 | | modelo 1 | 350 | 230 | 184 | | modelo 2 | 194 | 240 | 190 | **Observação:** somei o elemento por ele mesmo, porque a questão pediu o dobro. Observei que eu fiz uma multiplicação de um número ~~[illegible]~~ real (2) por cada elemento da tabela. **Conclusão:** que para fazermos uma multiplicação de um número real por uma matriz. devemos multiplicar cada elemento da matriz pelo número real dado.	Característica válida sobre a multiplicação de um número real por uma matriz.
(GRUPO C) **E6, E7, E8 e E9**	**Questão**: Considere agora que essa filial decida dobrar sua produção diária no mesmo período do ano seguinte. Construa uma tabela que represente a quantidade total de televisores que deverão ser produzidos por essa filial no próximo ano. | | Dia 1 | Dia 2 | Dia 3 | | MODELO 1 | 350 | 230 | 184 | | MODELO 2 | 194 | 240 | 190 | $\begin{bmatrix} 350 & 230 & 184 \\ 194 & 240 & 190 \end{bmatrix}$ **Observação:** Para obter o resultado houve uma multiplicação nos elementos da tabela. **Conclusão:** Para fazer a multiplicação da matriz por um número real, cada elemento da matriz deve ser multiplicado por ele.	Característica válida sobre a multiplicação de um número real por uma matriz.

Fonte: Pesquisa de campo (2021)

A análise das observações e conclusões feitas pelas equipes demonstraram que nessa atividade não houve dificuldades no entendimento, pois todos conseguiram alcançar o objetivo e assim, determinaram a multiplicação de um número real por uma matriz.

Como foi feito nas atividades anteriores, solicitarmos que um representante de cada equipe fosse até o quadro para apresentar para os outros grupos a conclusão de sua equipe, em seguida fizemos a análise das observações e conclusões de todos, vindo a produzir a conclusão final para a questão.

Ao chegarmos no término da atividade 10, as recolhemos e distribuímos em seguida aos grupos as questões de aprofundamento, as quais foram resolvidas sem dificuldades, sendo concluídas em aproximadamente 20 minutos, no horário de 14h 20 min às 14h 40 min, com um menor tempo previsto. Assim deu-se o termino das questões de aprofundamento da atividade 10.

Então, informamos a todos que haviam acabado de realizar a última atividade da nossa pesquisa. Nesse momento, houve um alívio por parte dos participantes, pois tinham chegado ao fim das atividades com um grau muito elevado de aproveitamento. Porém, lembramos que ainda faltava o pós – teste para fecharmos com chave de ouro a pesquisa. Ela ficou para ser realizada na sétima sessão, que ocorreu no dia seguinte com a concordância de todos.

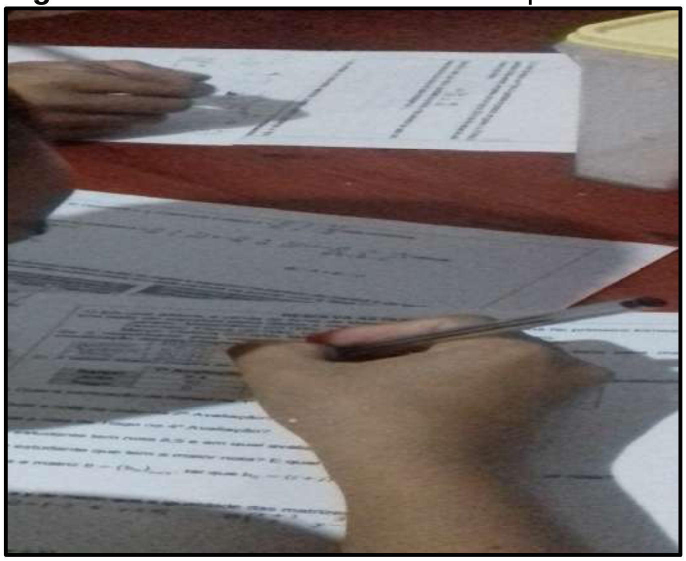
5.7. Sétima Sessão de Ensino

A sétima e última sessão de ensino ocorreu no dia 19 de fevereiro de 2021. Neste dia aplicamos o Pós-teste com o objetivo de avaliar o desempenho dos estudantes após a participação nas atividades propostas e nas de aprofundamento.

Ao chegarmos, notamos que os estudantes estavam ansiosos e organizados para o pós teste, assim conversamos com os pesquisados, sobre suas opiniões a respeito do modo que se desenvolveu o conteúdo de matrizes. E as respostas foram bastantes positivas, pois os participantes afirmaram que todas as aulas deveriam ser realizadas dessa maneira, devido ter sido, na opinião deles, a melhor forma se aprender conteúdos de matemática, em especial de matrizes.

No decorrer do diálogo perguntamos sobre uma possível existência de dúvidas sobre o conteúdo visto nas atividades, porém nenhum dos presentes fizeram perguntas. Assim, iniciamos o Pós – Teste às 14h, e todos os estudantes se mostraram empenhados em realizar a resolução das questões. Na figura abaixo registramos um estudante realizando o pós – teste bem concentrado e colocando em prática tudo o que havia apreendido nas atividades realizadas nas sessões de ensino.

Figura 22 – Estudante resolvendo o pós – teste



Fonte: Autoria própria (2021)

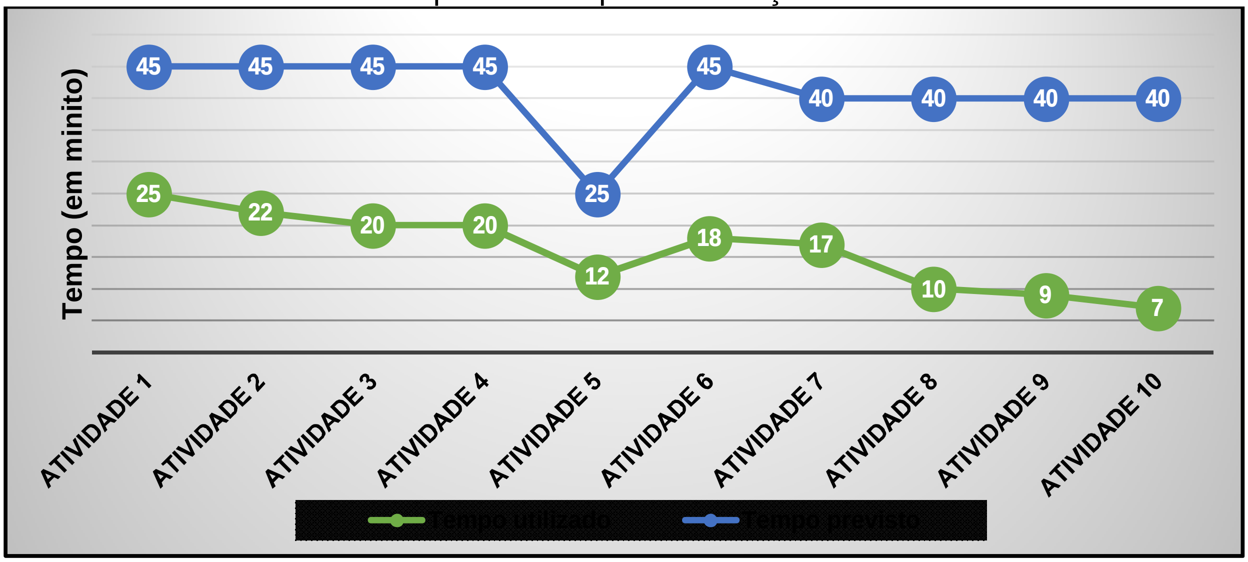
O primeiro participante entregou a atividade às 15h 09min, levando apenas 1 hora e 09 minutos para resolvê-la e o último estudante a entregou às 15h 27 min, levando aproximadamente 1 hora e 27 minutos. Finalizamos assim a última sessão de ensino e o processo de experimentação.

5.8. Considerações Acerca da Experimentação

Na experimentação ficou claro para os estudantes que com o desenvolvimento das atividades, o tempo gasto diminuía. Isso está de acordo com o argumento de Sá (1999, p. 81), ao afirmar que “[...] a experiência tem mostrado que o educando fica mais rápido à medida que as atividades são vencidas e deste modo o maior tempo gasto no início é recompensado posteriormente”. Foi justamente o que aconteceu em nosso trabalho fato comprovado através do gráfico 26.

Nesse gráfico apresentamos o tempo gasto apenas na realização de cada atividade proposta, sem levar em consideração o tempo usado para resolver as questões de aprofundamento.

Gráfico 26 –Tempo máximo para realização de cada atividade



Fonte: Autoria própria (2021)

O tempo que o presente gráfico se refere está relacionado ao término de cada atividade, pelo último grupo participante da pesquisa, contabilizando um tempo médio de 16 (dezesseis) minutos.

Sobre as atividades, destacamos que a primeira, a segunda, a terceira e a quarta exigiam mais dos estudantes, pois tinham que mobilizar um maior nível de raciocínio e questionamento, por isso o tempo de execução delas foram bem próximos.

Os estudantes também apresentaram dificuldades em elaborar as observações e conclusões das quatro primeiras atividades, levando um tempo maior que as demais, o que foi ocasionado pela falta de experiência na elaboração de respostas a partir de seus argumentos. Fato que ficou bastante claro nas transcrições que fizemos na última sessão da pesquisa.

As atividades 6 e 7, que tratavam sobre os assuntos de adição de matrizes e matrizes opostas foram realizadas em tempo aproximado, devido à similaridade das atividades e da compreensão delas pelos estudantes, pois tiveram que realizar muitos questionamentos até compreenderem os procedimentos que deveriam ser feitos.

Por outro lado, a oitava, a nona e a décima atividade foram feitas com um tempo bem inferior ao planejado inicialmente, de modo que podemos observar a semelhança no tempo de execução. Percebemos também que no decorrer das atividades os estudantes demonstraram muita animação nas resoluções, pois afirmavam que estavam aprendendo o assunto e de uma maneira bem simples e fácil.

6. ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste momento da pesquisa faremos a descrição e a análise dos dados das observações, em relação ao comportamento dos estudantes durante a aplicação da sequência didática, na fase anterior da Experimentação, para verificarmos se o objetivo da pesquisa foi alcançado.

Para isso usamos as concepções de Artigue (1996), em que caracteriza esta fase pelo tratamento dos dados colhidos, da confrontação com a análise *a priori* e a *posteriori*, que nos permiti a interpretação desses resultados levando em conta as condições em que essas questões levantadas foram respondidas pelos estudantes e; ainda verificar o desempenho dos participantes na resolução das questões dos testes.

Os indícios de aprendizagem dos estudantes, que foram colhidos durante as sessões de ensino, são apresentados aqui através de recortes de trechos dos diálogos entre os participante no seu devido grupo e, entre estudantes e professor/pesquisador, colhidos por meio de um gravador de voz e de vídeos feitos pelo celular. Porém, informamos ao leitor que por causa da quantidade extensa de laudas utilizadas nas transcrições (60 páginas), apresentamos nos apêndices I, J e K localizados nas páginas 312, 313 e 315 apenas três transcrições completas, mas que tratam muitos sobre os momentos da aplicação da Sequência Didática.

Aqui, seguimos os passos proposto pelos autores utilizados na análise microgenética como Vygotsky, na questão da mediação. Marx também conhecia e fazia uso do instrumento mediatizado, Cabral (2004) destaca que a análise microgenética é um poderoso instrumento metodológico de investigação e Góes (2000) afirma que a análise microgenética é uma forma de construção de dados que requer detalhes de recortes em episódios interativos, o que pode resultar num relato dos acontecimentos.

Também utilizamos quadros, tabelas e gráficos para mostrar e comprovar a validade dos resultados. Essa análise foi realizada através da comparação dos resultados de acertos, erros e possíveis itens deixados em branco, pelos estudantes, durante a aplicação do pré-teste e pós-teste, buscando atingir o objetivo de nossa pesquisa que é analisar as potencialidades que uma sequência didática por atividades de Matrizes tem sobre o desempenho dos estudantes, em uma turma do 2º ano do Ensino Médio.

6.1. Indícios de Aprendizagem

Esta etapa teve como propósito identificar os indícios de aprendizagem demonstrados pelos estudantes no decorrer da aplicação da sequência didática, considerando os objetivos que esperávamos que fossem alcançados em cada atividade proposta. Para esta análise utilizamos como aporte teórico a Análise Microgenética proposta por Góes (2000).

As análises Microgenética das gravações mostram a tentativa de fazer com que houvesse a sintonia sobre os registros captados e com isso, identificar os indícios de aprendizagem em cada uma das atividades na sequência didática. Para isso iremos apresentar em quadros trechos dos diálogos realizados entre professor – estudante e estudante – estudante, no momento em que eles apresentaram suas devidas observações e conclusões sobre as atividades de Matrizes.

Na atividade 1 localizado na página 143, os componentes dos Grupos A, B e C demonstraram um pouco de dificuldade no entendimento. O que pode ser evidenciado pelos recortes mostrados no quadro 18 (pág. 196 a 197) e pelos trechos transcritos a seguir de cada grupo.

Quadro 27 – Diálogo entre professor e estudantes do Grupo A na atividade 1

Professor: O que vocês identificaram na observação? **Estudante A**: Que os dados estavam desorganizados! **Professor**: Quando vocês organizaram os dados ficou melhor? **Estudante A**: Sim, ficou melhor. Até as regiões! **Professor**: Qualquer pessoa agora poderia olhar para a tabela que vocês fizeram e buscar os resultados que ela queria? **Estudante A**: Sim! **Professor**: E antes, tava mais difícil antes? **Estudante B**: Não! **Estudante A**: Sim, tava difícil porque os dados estavam desorganizados! [...] **Professor**: O que vocês acham, quando está organizado melhora ou não? **Estudante A**: Sim, melhora! **Professor**: Qual seria então a conclusão? **Estudante A**: Com a tabela pronta e organizada com as regiões e cada mês fica melhor. Organizada os meses e as regiões!

Fonte: Autoria própria (2021)

No diálogo, apresentado nos recortes acima, observa-se o início do processo de aprendizagem em andamento, e é possível perceber então que o Grupo A é composto por dois estudantes, os quais chamamos no diálogo como A e B, para melhor compreensão. Pode-se observar também que os estudantes mantém-se em um nível confortável de respostas, o que demonstra um certo grau de entendimento do assunto em questão, pois o diálogo transcorreu de acordo com a aplicação da sequência.

Agora, veremos a transcrição do dialogo dos estudantes do Grupo B na atividade 1. O que pode ser evidenciado pelo recorte mostrado no quadro 18 (pág. 196).

Quadro 28 – Diálogo entre professor e estudante do Grupo B na atividade 1

Estudante D: Tá bom só isso? **Professor**: Tá! **Estudante D**: Com os dados organizados fica mais claro para entendê-lo! **Estudante E**: Agora tu falaste isso tu tiraste o que eu tava pensando na minha mente! **Professor**: Ela tá falando dos dados, dos meses, tava organizados? **Estudante D**: Não também! **Estudante E**: Tenho que escrever alguma coisa aqui? Dá pra ver melhor! pode ser? **Professor**: Pode! [...] **Professor**: O que vocês identificaram na observação? **Estudante E**: Tipo assim, é que antes não dava para entender, entender, a inflação, ai agora como eu já organizei dá pra ver melhor! **Estudante C**: Organizei os dados! **Professor**: Quer dizer que antes tava difícil para achar? **Estudante E**: Tipo assim, antes tava difícil para achar mas agora que eu organizei, ficou melhor!

Fonte: Autoria própria (2021)

Nesse outro diálogo, apresentado no trecho a cima, observa-se que também ocorreu o início do processo de aprendizagem como ocorreu no primeiro grupo. Podemos observar também que o diálogo transcorreu de acordo com a aplicação da sequência e que os estudantes C, D e E, mantiveram-se em um nível confortável de respostas, como ocorreu no Grupo A.

Por fim, apresentaremos a transcrição do diálogo do professor com os estudantes do Grupo C, na atividade 1. O que pode ser comprovado pelo recorte apresentado no quadro 18 (pág. 197).

Quadro 29 – Diálogo entre professor/estudante/estudante do Grupo C na atividade 1

Professor: Leiam o procedimentos e respondam a questão! **Estudante H**: Material: borracha, lápis ou caneta e papel. [...] **Estudante G**: Vou organizar os dados em ordem crescente para o decrescente, de cada mês! **Estudante H**: Entendeu já o que quero dizer? (Perguntado para o estudante **I**) **Estudante I**: Hum rum, já entendi. [...] É, boa ideia! **Estudante F**: Mas no caso não é só os valores que tem que ser organizados aqui, mas os meses, olha aqui é o mês 1 e aqui, pula para o mês 3! **Estudante G**: (Inaudível) organizando o mês. **Estudante F**: O mês e os valores? **Estudante G**: Isso! **Estudante H**: Ou poderia ser do jeito, daquele jeito que a gente tava ainda agora, tabela ...! **Estudante I**: É!

Estudante H: Qual tu acha melhor?
Estudante I: A tabela!
Estudante H: Porque assim fica bem organizada colocava aqui a legenda e a coisa ...
Estudante G: A gente podia fazer de ordem decrescente pra crescente!
Estudante F: Quantos meses?
Estudante G: Seis!
Estudante F: E agora?
Estudante G: Seria a ordem crescente e decrescente porque do maior número até o menor número. Começaríamos pelo Sul que é o maior... E depois disso, a gente poderia fazer essa tabela e montar um gráfico de tamanho, sabe. Por exemplo esse tipo de gráfico aqui (desenha) no mês um subiu essa quantidade, no mês dois subiu essa quantidade, botando essas quantidades aqui no gráfico. Ai aqui região Norte, Sul, ...
Estudante F: Tá, mas aqui ia complicar todinho por aqui assim. Porque ela sempre tem uma organização. Se eu vou começar aqui pela região Norte, todos vão ter que continuar pela região Norte. Senão vai ficar há pega o Norte, ai aqui, pega o Sul!
Estudante G: Então um bora fazer: Norte, em Norte. Quer dizer vamos começar pelo Norte e colocar todas as coisas referente ao Norte, do mês 1. Ai no mês 2, todas as coisas referentes ...
[...]
Estudante F: 1,0; 1,2; 1,3; 2,0; 1,5; 2,0; 1,8; 1,7; 1,7; 2,4; 2,9; 2,1; 1,5; 1,4; 1,2; 1,6; pera aí. 2,1; 2,9 e 2,8. Pronto. Eu tive a ideia de fazer a tabela assim, porque não sei onde foi que eu vi!
Estudante G: Tá bom, vou fazer aqui a tabela e tu passa os valores tá bom?
Estudante H: Professor pode fazer aqui atrás?
Professor: Pode sim!
[...]
Estudante F: A observação seria é fácil ver a tabela?
Estudante G: Depois a gente pergunta para o sujeito da pesquisa!
Estudante F: A sorte que eu já entenderia se eu fosse o cara do IBGE, entenderia tudo, porque tá os dados e os menos!
Estudante G: Colega entender é uma coisa, cada ... cada coisa que eles fazem tem um tempo!
Estudante F: Só não esquecer de botar o Norte, Sul, ...
Estudante G: Tá, seu professor é, já foi respondido aqui olha, se o responsável pela organização dos dados fosse você como faria para ... (Inaudível). Aí, já foi respondido, usaria a tabela e organizaria os meses em ordem crescente. Essa observação é pra quê?
Professor: A observação é para fazer o seguinte, qual foi a dificuldade que tiveram para organizar os dados assim? Teve uma dificuldade ou teve uma facilidade?
Estudante F: Facilidade!
Professor: E, após organizar os dados assim melhorou mesmo a visualização?
Estudante F: Sim, muito!
Professor: Pois é, isso que tem que colocar ai na observação!
Estudante F: Há, entendi. [...]
Estudante G: Conseguimos nosso objetivo. [...] Com a organização acima, houve uma maior clareza na visualização dos dados!
Estudante H: Hum bora apagar e colar delas. [Risadas].
Estudante G: Aqui está professor!
Estudante I: Acho melhor agente fazer tabela mesmo!
Estudante H: Tabela? [...] Eu pensei da gente fazer uma forma mais fácil. Colocar só os nomes aqui, olha... pra ficar bem mais fácil. Só vou terminar aqui e tu faz, coloca os nomes!
[...]
Estudante H: Alguma observação? Vai lá, qual é a observação? (Pergunta feita para o estudante I)
Professor: A observação é na construção disso que vocês fizeram ai facilitou a visualização dos dados?
Estudante I: Sim, facilitou. Melhorou o jeito de ver, sei lá... Poderia colocar o resultado mais rápido!

Fonte: Autoria própria (2021)

No diálogo, apresentado no quadro 29, observa-se claramente o indício de aprendizagem ocorrendo de forma intuitiva e empírica. O diálogo transcorre de acordo com a aplicação da sequência. Pode-se observar também que os estudantes F, G, H e I mantém-se em um nível muito confortável de respostas, o que diferencia este grupo dos outros.

Após a transcrição dos diálogos dos três grupos percebemos que os seus componentes conseguiram responder à questão da atividade 1, escrevendo as observações e fazendo a conclusão sem apresentarem muitas dificuldades.

Pereira (2017, p. 112) afirma que:

> [...] as ideias de Brousseau (2008), acreditamos que a atividade 1 mobiliza o conhecimento dos alunos, fazendo com que os mesmos tomem decisões pondo em prática os seus saberes com o intuito de solucionarem um problema, caracterizando assim, uma situação de ação.

Nesse sentido comparamos o que foi feito pelos componentes dos grupos com a estratégia que Guy Brousseau (2008, p. 24) utilizou no exemplo do jogo “Quem dirá 20?”, localizado na página 47 e 48, no qual os estudantes transformam o conhecimento implícito em conhecimento explícito, demostrando que está agindo conscientemente. É nas situações de ação que os jogadores devem utilizar seus conhecimentos tomando decisões que irá solucionar o problema. Alguns jogadores afirmam que a melhor estratégia é escolher os números 14 ou 17. Esse mesmo “agir” percebemos ocorrer nas transcrições feitas a cima.

Na atividade 2 (localizada na página 146), o diálogo do professor/pesquisador com os estudantes dos Grupos A, B e C apresentaram, de início, certa dificuldade no entendimento como tínhamos previsto. A maior barreira ocorreu no preenchimento do quadro e na localização dos elementos das matrizes, pois os estudantes não sabiam destacar os elementos dados na tabela. Mas, bastou que eles identificassem os elementos da primeira matriz para preencherem a tabela toda.

O que pode ser evidenciado pelos recortes mostrados no quadro 19 (pág. 199) e pelos trechos transcritos a seguir de cada grupo.

Quadro 30 – Diálogo entre professor e estudantes do Grupo A na atividade 2

Professor: Então um bora, o que tu não entendeu? [...] **Estudante A**: Qual é esses elementos? **Professor**: O que significa esse a_{11} aqui? Linha? Coluna? Quem é o elemento que está na primeira linha e na primeira coluna? Aí olha, primeira linha e primeira coluna. Quem é esse elemento? **Estudante A**: Primeira linha 1e o 0! **Professor**: Sim, o 1 e o 0 tá na primeira linha e esse elemento tá na primeira linha e na primeira coluna. Quem é então? **Estudante A**: (Inaudível) **Professor**: Porque olha, tu vai ter depois a segunda linha e a primeira coluna. Quem é que tá segunda linha e na primeira coluna? **Estudante B**: 10 e o 11! **Professor**: 10 não, só o 10. Ele tá na primeira linha, na segunda linha e na primeira ... **Estudante B**: Coluna! **Professor**: Só que ele tem que tá ao mesmo tempo num e no outro, então quem é? é o ... **Estudante B**: 10! **Professor**: É o 10. Quem é que tá na primeira linha e na primeira coluna? Tá, então é só fazer! **Estudante A**: Há, no caso quem tá na primeira linha aqui é o 1 e, na primeira coluna também? **Professor**: Isso! [...] **Professor**: Então vocês escreveram a observação, né, cada um fez. Qual foi a tua observação? (Para o estudante B) **Estudante B**: Eu achei um pouco razoável pois tem que prestar bastante atenção nas colunas e linhas para que não ocorra nenhum erro! **Estudante A**: (O estudante fez a leitura da sua observação e essa foi usada no quadro 18 na página 205) **Professor**: A conclusão deve ser feita pegando as ideias dos dois e fazendo uma única resposta. O que a gente pode conclui dessa atividade? **Estudante A e B**: Fizeram a conclusão que está no quadro 18, localizado na página 205!

Fonte: Autoria própria (2021)

Nos diálogos dos recortes dos trechos acima, observam-se os indícios de aprendizagens, e é possível perceber então que, os estudantes conseguiram fazer a construção de conhecimento através dos questionamentos feitos pelo professor/pesquisador.

Agora, veremos a transcrição do diálogo do professor com os estudantes do Grupo B, na atividade 1. O que pode ser evidenciado pelos recortes mostrado no quadro 19 (pág. 199).

Quadro 31 – Diálogo entre professor e estudantes do Grupo B na atividade 2

Professor: Leiam os procedimentos para depois fazer o que está pedindo na atividade! **Estudante E**: Leu os procedimentos da atividade? **Professor**: Vocês conseguem identificar? Quem é o a_{11}? **Estudante D**: É esse? **Professor**: É. Então, se achou o primeiro o resto ... É quem tá na primeira linha e na primeira coluna ao mesmo tempo! **Estudante D**: Ai vou colocar o um aqui! **Professor**: É. Entendeu? (Pergunta feita para o estudante E). Olha, esse elemento tá na primeira linha e na primeira coluna ao mesmo tempo!

Estudante E: Hum rum! [...] **Professor**: Aí a pergunta é qual a maneira mais rápido de localizar qualquer elemento em uma matriz? O que é que vocês tem que saber? **Estudante D**: A localização! **Professor**: Sim, e que é que vai te dar essa localização? **Estudante E**: Linha e a coluna. A linha e a coluna é? Aí como é que tem que colocar essas palavras. **Professor**: Ai você escreve como foi que tu entendeu né. Por exemplo porque aqui foi menos seis? Quem foi que te falou que esse elemento que tava aqui é menos seis? (Professor apontando para a tabela preenchida). **Estudante E**: Foi a terceira linha da primeira coluna!

Fonte: Autoria própria (2021)

Após o Grupo B terem respondido a questão proposta, com o auxílio do quadro já preenchido, os estudantes passaram a discutir quais foram as observações verificadas por cada um deles e, logo em seguida fizeram a conclusão com o auxílio do professor.

E, para finalizar está etapa da pesquisa, apresentaremos os recortes da transcrição dos diálogos da atividade 2 que ocorreu entre o professor e os estudantes do Grupo C. O que é comprovado pelo recorte apresentado no quadro 19 (pág. 200).

Quadro 32 – Diálogo entre professor e estudantes do grupo C na atividade 2

[...] **Professor**: Isso aqui ele tá te falando, tu olha pra cá ai tu vê, quem é o elemento que tá na segunda linha, mas na primeira coluna? **Estudante H**: Há tá, agora entendi. Mas deixa eu te perguntar, aqui tu vai no caso, primeira linha e primeira coluna, tu vai ter que colocar os dois números? **Professor**: Não, não, não esses dois números tão te dando só a localização! **Estudante H**: Há, eles são só uma localização, tipo primeira linha e primeira coluna. Ai aqui eu vou pra segunda linha e segunda coluna! **Professor**: Pra ver quem é que tá lá! **Estudante H**: Hum, entendeu? Entendi! [...] **Professor**: Vamos ver. Faz logo esse outro aqui olha, tá na terceira linha só que agora na segunda coluna! **Estudante H**: Vai ser menos cinco, né? **Professor**: Não, é menos quanto? **Estudante H**: Menos um! **Professor**: Hum rum. Agora só confere se tá tudo certo!

Fonte: Autoria própria (2021)

No transcorrer da aplicação da segunda atividade, nosso foco como professor era estimular os estudantes a perceberem a maneira correta de localizar os elementos de uma matriz, levando em consideração o conceito, designando a interação de maneira intuitiva e de forma empírica.

O preenchimento dos dados na tabela foi fundamental para que os estudantes pudessem identificar como localizar os elementos das matrizes, pois essa localização era fundamental para que eles compreendessem a importância de se fazer o preenchimento da tabela com os dados. Isso os ajudou a fazerem a observação e conclusão da atividade em questão.

Na atividade 3 (localizada na página 149), o diálogo do professor/pesquisador com os estudantes dos Grupos A, B e C demonstraram certa dificuldade no entendimento, como tínhamos previsto. A maior barreira ocorreu no preenchimento do quadro e na localização dos elementos das matrizes, pois os estudantes não sabiam destaca-los na tabela. Mas, bastou eles destacarem os elementos da primeira matriz para preencherem a tabela toda.

O que pode ser evidenciado pelos recortes mostrados no quadro 20 (pág. 201) e pelos recortes dos trechos transcritos de cada grupo.

Quadro 33 – Diálogo entre professor e estudantes do Grupo A, na atividade 3

[...] **Professor**: Ele quer que vocês, observando o que vocês fizeram ai, aqui na tabela, descubra uma maneira de se obter o número de elementos de uma matriz, olha aqui (Nesse momento, o professor aponta para a matriz A) de se obter esses resultando, sem ter que contar os elementos, como foi contado aqui. (O professor aponta para a matriz A). Como é que vocês acham que dá pra fazer pra descobri o número de elementos de uma matriz sem ter que contar os elementos de uma matriz? O que é que o número de linhas e colunas tem a ver com isso? **Estudante A**: Será que colocando aqui em baixo assim dá? **Professor**: Não, olha o procedimento preencha o quadro abaixo, já foi preenchido. Identifique o número de linha, o número de coluna e o número de elementos de cada matriz dada, já foi feito. Após o preenchimento do quadro dado, responda a questão proposta, já preencheram o quadro e aqui tá a questão. É pra responder aqui agora. Observe assim, esses dois, número de linha e número de coluna, o que é que isso aqui tem a ver com o número de elementos da matriz? O que é que esses dois tem a ver com o número de elementos da matriz? **Estudante A**: É só multiplicando né? **Professor**: Pois é! **Estudante A**: Multiplicando o número de linhas! [...] **Professor**: Entendeu? Ai é, observando os dados, ai vocês ..., porque até agora a gente não falou em multiplicação, adição, de nada disso1 **Estudante B**: Hum rum. **Estudante A**: Acabei, tem mais? **Professor**: Isso aqui que tu fizeste foi a observação ou foi a conclusão? **Estudante A**: Não, isso aqui é a observação, isso aqui é a conclusão! [...]

Fonte: Autoria própria (2021)

Nos diálogos a cima, observamos que os recortes feitos nos trechos, representam fielmente o surgimento dos indícios de aprendizagens dos componentes do Grupo A, e é possível perceber então que, os estudantes conseguiram identificar o número de linhas, de colunas e o número de elementos das matrizes dadas.

Agora, veremos a transcrição dos diálogos do professor com os estudantes do Grupo B, na atividade 3. O que pode ser evidenciado pelo recorte mostrado no quadro 20 (pág. 201).

Quadro 34 – Diálogo entre professor e estudantes do Grupo B, na atividade 3

[...]
Professor: Quantos elementos tem na matriz?
Estudante E: Conferir tudo?
Estudante D: Seis?
Professor: É. De cada uma, isso!
Estudante E: Há, tá na mão. Cinco linhas, dois e dez. (O estudante estava se referindo ao número de linhas, número de colunas e ao número de elementos da matriz, respectivamente)
Estudante D: Olha, ei tio aqui é menos mil, eu tenho que colocar um né?
Estudante E: Tem que colocar menos?
Professor: Sim, é, um só elemento!
Estudante E: Um, um, três. [Risadas] Tá certo professor? (O estudante estava mostrando o preenchimento da tabela com relação aos elementos da matriz L)
[...]
Professor: Olha vocês tem que observar quantas linhas, quantas colunas e o que é que isso aqui influencia no número de elementos!
Estudante E: Há, é tipo assim olha 3x3, tipo assim 2x2 ..., né professor? Olha 3x3, 9, 3x2, 6!
Estudante D: Há é tipo ...
Estudante E: É!
Estudante D: Verdade né olha!
[...]
Professor: Porque pra você saber o número de elementos tu tinha que contar, mas tem alguma maneira de você ...
Estudante D: A gente pode multiplicar é, a linha e a coluna. (Aqui o estudante aponta para a tabela mostrando o que deve ser feito)
Estudante E: Multiplicando as linhas e as colunas. É, tipo isso. (O estudante percebeu que para encontrar o número de elementos da matriz bastava fazer a multiplicação do número de linhas pelo número de colunas e assim, ele respondeu a questão) [...] Eu logo percebi quando vi ali cinco vezes dois dá dez, três vezes três, nove!
[...]
Professor: Observem, para matriz pequena é fácil de achar o número de elementos. E se for uma matriz grande?
Estudante D: Acho que assim, como uma matriz grande é multiplicando a coluna e a linha, a linha e a coluna, fica mais fácil de encontrar ...
Professor: O número de elementos ...
Estudante D: O número de elementos da matriz!
Professor: Pode ser!

Fonte: Autoria própria (2021)

Nos diálogos a cima, observamos que os recortes feitos nos trechos, representam integramente os indícios de aprendizagens dos componentes do Grupo B, na atividade 3. Nele é possível perceber que, os estudantes conseguiram identificar o número de linhas e colunas e o número de elementos, das matrizes dadas, utilizando a operação de multiplicação.

Assim, finalizarmos está etapa da pesquisa, apresentando a transcrição dos diálogos entre o professor e os estudantes do Grupo C, na atividade 3. O que é comprovado pelo recorte apresentado no quadro 20 (pág. 202).

Quadro 35 – Diálogo entre professor e estudantes do Grupo C na atividade 3

Professor: Terceira atividade agora. Leiam primeiramente o título, o objetivo e os procedimentos! **Estudante F**: (Fez a leitura pedida pelo professor) **Estudante I**: O que é elemento? **Estudante F**: Elementos são os números que compõem a matriz, os números são os elementos. Se tem um número, é um elemento, se tem dois números são dois elementos. Isso que são os elementos, é a quantidades! **Professor**: Olha esse exemplo aqui, quantos elementos tem aqui na matriz? (O professor estava apontando para um exercício de atividade de aprofundamento da atividade 2) [...] **Estudante G**: Tio, então, aqui, pra ter uma matriz tem que ter linha e coluna, né? **Professor**: Sim! **Estudante G**: Há, tá bom! [...] **Estudante F**: Eu sei que tô com dúvida nessa k e nessa l, porque eu coloquei numa linha e uma coluna. **Professor**: Ai tem quantos elementos? **Estudante F**: Apenas um elemento! **Professor**: Pois é! **Estudante F**: Não, mais eu quero saber se é realmente, se é uma linha e uma coluna ou se é apenas uma linha, porque vai tá na horizontal e zero de coluna? **Professor**: É isso mesmo! **Estudante F**: Uma linha e uma coluna! **Professor**: Esse elemento aqui é uma linha e uma coluna. Por isso que é um, um! **Estudante G**: Por que colega (Dirigindo a palavra para a estudante F), para ser uma matriz tem que ter pelo menos uma linha e uma coluna. Tem que ter para ser uma matriz! **Estudante F**: Tá, mais isso eu não sabia que tinha que ter pelo menos um elemento para ser uma matriz. Mais, estamos aprendendo né! [...] **Professor**: Ai então, olha, descubra uma maneira de se obter o número de elementos da matriz sem ter que contar esses elementos. Deu dez, tu não teve que contar quantos elementos tinha? **Estudante G**: Sim! **Professor**: Pois é, tu vai ter que buscar uma relação, olha, descobrir a relação que existe entre o número de elementos da matriz e a quantidade de linhas e coluna. Qual a relação que tem entre o número de elementos da matriz e a quantidade de linha e coluna? **Estudante G**: há, já entendi, entendi! **Estudante F**: Olha, eu prestei atenção assim, porque pra, pra identificar o elemento tem que escrever a onze, por exemplo aqui né, ai se multiplicar uma vezes o um vai dar, um, apenas um elemento, quantidade. Então o que eu fiz, se multiplicar o número de linhas pelo número de colunas vai dar certinho o número de elementos! **Estudante G**: Isso que percebi! **Professor**: Então, coloquem a resposta lá! **Estudante G**: Eu só vi, cinco vezes dois, três vezes três e eu falei é isso. [...] **Professor**: A observação é, algo que não tinha aqui mas, quando você foi fazendo aqui, relacionou o número de linhas com o número de colunas você obteve o número de elementos da matriz. O que é que não tava aqui mas você percebeu? O que foi que você escreveu na resposta ai? **Estudante I**: Que resposta? **Professor**: Da questão. O que você escreveu aqui? **Estudante I**: Multiplicar linha com a coluna e o resultado pode ser o número de elementos da matriz. **Professor**: Pois é, então a primeira ..., o que é isso aqui?

Estudante I: Multiplicaaaaar! **Professor**: Tava aparecendo aqui que tinha que fazer isso? **Estudante I**: Não1 [...] **Professor**: Mas justamente a multiplicação ela é a soma de elementos iguais! **Estudante G**: Só que ela tá falando que somou cinco por cinco, quinze por dez, é isso que tu fez? **Estudante I**: Hum rum! **Estudante G**: E como é que dá nove? **Estudante I**: Há, um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove! **Estudante G**: Mas é sem contar, não pode contar! **Estudante I**: Eu não sabia, não estava escrito aqui na (inaudível) **Estudante G**: Tá escrito! **Estudante I**: Eu ia ler o final? Eu leio o começo! **Estudante G**: Não, isso foi o que tu primeiro fez, mas o que é que tá respondido ai que tu fez depois. Que tu observou? Foi a multiplicação desses dois números que tu fez!

Fonte: Autoria própria (2021)

Nos recortes dos diálogos feitos nos trechos acima, observamos que os componentes desse grupo estavam mais à vontade, respondendo às perguntas feitas pelo professor e dialogando entre si. Esses diálogos deixam claros os indícios de aprendizagens que estavam ocorrendo com os estudantes desse terceiro grupo, e é possível perceber então que, os pesquisados conseguiram identificar o número de linhas, e colunas e o número de elementos das matrizes, sendo que este último ocorreu por meio da operação de multiplicação, que estava implícita e que bastava relacionar o número de linhas com o número de colunas, para se obter o número de elementos de uma matriz.

Também fica claro a dificuldade apresentada pelo estudante I e a ajuda que ele recebeu do professor e dos seus colegas para que viesse compreender a atividade. Após esse estudante fazer vários questionamentos, tanto para o professor quanto para os seus colegas, ele completou a atividade e respondeu a questão, realizando a observação e a conclusão que são partes fundamentais para o termino da atividade.

Na atividade 4 (localizada na página 152), o diálogo do professor/pesquisador com os estudantes dos Grupos A, B e C não demonstram muitas dificuldades, como tínhamos previsto. Bastou que fossem identificadas as matrizes que tinham iguais, os mesmos elementos e as mesmas ordens, para que os estudantes preenchessem a tabela toda.

O que pode ser evidenciado pelos recortes mostrados no quadro 21 (pág. 203) e pelos trechos transcritos a seguir de cada grupo.

Quadro 36 – Diálogo entre professor e estudantes do Grupo A, na atividade 4

[...]
Professor: Lembram a ordem que nós fizemos na aula passada? (O professor pegou a 3ª atividade para mostrar, aos estudantes, as ordens das matrizes dessa atividade) Olha, só para lembrar aqui, qual é a ordem dessa matriz? Dois por dois, tá. Então olha, qual é a ordem dessa matriz A?
Estudante A: Três por dois!
Professor: Pois é, então aqui vocês vão marcar, com xis, as matrizes que tem a mesma ordem. Olha, matrizes com a mesma ordem e os elementos correspondentes iguais. Então aqui é a matriz A matriz A. Esses elementos são os mesmos daqui?
Estudante A: Não!
Professor: Não são os mesmos daqui? Dois, três, quatro; dois, três, quatro; cinco, um, zero; cinco, um, zero. Não são iguais?
Estudante A: São!
[...]
Professor: Primeiro, um bora aqui porque marcou a C com a C?
Estudante A e B: Porque são iguais!
Professor: Iguais em quê?
Estudante B: Colunas e linhas!
Estudante A: Os elementos e os ...
Professor: Tá, Agora porque não marcou a C e a D? Os elementos não são iguais?
Estudante A: Não. Os elementos são iguais, mas não aqui. (O estudante estava se referindo a ordem das matrizes C e D que eram diferentes)
[...]
Professor: Aqui é uma três por dois e lá é!
Estudante A: De dois por três!
Professor: Então, depois disso que eu falei, qual é a observação que vocês fazem, olha aqui a pergunta é quais as matrizes que tem ao mesmo tempo as mesmas ordens e os elementos correspondentes iguais. Acharam, ai vocês tem alguma observação a fazer, se tiver coloquem se não tiver ...
Estudante A: Não!
Professor: Ai como eu perguntei, porque não marcaram né a matriz, deixa eu ver uma aqui!
Estudante A: Sim, eu vou colocar observação, algumas matrizes estão com as ordens corretas só não as ..., o, estão com os elementos corretos só não as ordens. Pode ser?
Professor: Pode. Ai fala quais são as matrizes, por exemplo a matriz tal. Deixa pra gente fazer a conclusão juntos. [...] Agora aqui na conclusão vocês vão responder o seguinte, pra vocês quando é que duas matrizes, olha aqui, quando é que duas matrizes são iguais? É isso que vocês vão escrever aqui olha, olhando para A coma A, C com a C, ..., quando é que duas matrizes são iguais?
Estudante A: Quando tem os mesmos elementos!

Fonte: Autoria própria (2021)

Nos diálogos a cima o professor, a todo instante, questiona os estudantes com o objetivo de fazer com que eles sejam ativos na construção do conhecimento. Nesses trechos dos diálogos percebemos o aparecimento dos indícios de aprendizagens dos componentes do grupo 1, na atividade 4.

Há um destaque aqui, em relação ao estudante B, que se manteve todo tempo indeciso, apresentando dúvidas e não sabendo como fazer os questionamentos, isso fez com que poucos registros fossem realizado dele.

Agora, veremos a transcrição dos diálogos do professor com os estudantes do Grupo B, na atividade 4. O que pode ser evidenciado pelo recorte mostrado no quadro 21 (pág. 204).

Quadro 37 – Diálogo entre professor e estudantes do Grupo B, na atividade 4

Professor: Não, tem que ser igual! **Estudante E**: Tem que ser igualzinho! **Professor**: É! [...] **Estudante E**: Acho que já terminei! **Professor**: Então, lê a pergunta aqui, olhando pra tabela. Lê a pergunta! **Estudante E**: (Fez a leitura da questão) **Professor**: No caso aqui olha A e ... **Estudante E**: A! **Professor**: A e A, depois A e ... **Estudante E**: B! [...] **Professor**: Tem a mesma ordem, não é isso e os elementos correspondentes são todos i ... **Estudante C, D e E**: Iguais! **Professor**: Iguais, né. Ai o que vocês vão colocar na observação? O que foi que vocês observaram quando seguiram esses procedimentos? **Estudante D**: Observei que isso é difícil! **Estudante E**:[Risadas] **Professor**: É! **Estudante D**: É! **Professor**: Pode observar o seguinte também que a pesar, olha, a pesar da matriz C ..., olha, a pesar da matriz C e da matriz D terem os mesmos elementos, não tem os mesmos elementos? Só que não estão na mesma ordem, olha três por dois e dois por três. E ai, o que foi que vocês observaram? Olha, descobrir as condições para que ocorra a igualdade de matrizes. Quando foi feito esse preenchimento aqui, né, podia marcar qualquer uma? **Estudante C, D e E**: Não! **Professor**: Somente as que fossem o que? **Estudante E**: As iguais! **Professor**: Somente as que tivessem mesma ordem e os elementos, aqui, correspondentes fossem ... **Estudante C, D e E**: Iguais! **Professor**: É essa a observação. Vocês marcaram as matrizes que tem as mesmas ordens e os elementos correspondentes são iguais. [...] Acabaram? **Estudante E**: Já! **Professor**: Então, a conclusão depois de tudo que já falamos aqui, do que vocês escreveram, olha, descobrir as condições para a igualdade. Quando é que duas matrizes são iguais? **Estudante D**: Quando a ordem e os elementos são iguais! **Professor**: Quando a ordem das matrizes são iguais e os elementos correspondentes, são o quê? **Estudante C, D e E**: Iguais! **Professor**: É essa que é a conclusão, deu pra entender agora. Quando é que duas matrizes são iguais? **Estudante D**: É pra gente colocar isso? **Professor**: É. Duas matrizes são iguais ..., isso ai é a conclusão. Duas matrizes são iguais quando ... **Estudante E**: Quando? **Professor**: Quando o quê? Quando tem a mesma ..., quando tem a mesma, o quê, o que é que elas tem aqui igual? Mesma ... **Estudante C, D e E**: Mesma ordem ..., e os mesmos elementos ... **Professor**: E os seus elementos, e os seus elementos correspondentes são ... **Estudante D**: São iguais! **Professor**: Que assunto é esse da matriz? É igualdade de matrizes!

Fonte: Autoria própria (2021)

Da mesma maneira que ocorreu com o primeiro grupo o professora a todo instante, questiona os estudantes, com o objetivo de fazer com que eles participassem ativamente da atividade, fato que ocorreu. Isso nos levou a observar alguns indícios de aprendizagens nos diálogos com os componentes do Grupo B, na atividade 4.

Nessa transcrição chamo atenção para a sinceridade do estudante E ao responder a uma pergunta feita pelo professor, aos participante que era: qual observação que tinham feito? e o estudante respondeu que tinha observado que o assunto era difícil.

Finalizarmos está etapa, apresentando o recorte da transcrição dos diálogos entre professor e estudantes do Grupo C, na atividade 4 presente no quadro 21 (pág. 204).

Quadro 38 – Diálogo entre professor e estudantes do Grupo C, na atividade 4

[...] **Professor**: Olha, essa matriz é a matriz, é a matriz C, os elementos são igual aqui da C? **Estudante F**: Não, os elementos não, só a ordem! **Professor**: Pois é, tem que ter as duas coisas! **Estudante F e H**: Há tá! **Professor**: A ordem e os elementos iguais! **Estudante F**: Hum. Ok agora que peguei a jogada. [...] Tem que ter a mesma ordem e os mesmos elementos. Interessante! **Estudante G**: Acabei! **Estudante F**: Acabou de marcar mas olha a folha ai pra responder. [Risadas] **Professor**: Já que tu já terminou olha, olhando para a folha aqui, quais as matrizes que tem ao mesmo tempo as mesmas ordens e os elementos correspondentes iguais, o que é que tu vai colocar? Tu vai colocar os pares AA vírgula, entendeu? **Estudante G**: Há, entendi! [...] **Professor**: Já tinha estudado matemática assim? (O professor fez a pergunta para o estudante G) **Estudante G**: Não! **Professor**: O que tu tá achando? **Estudante G**: Hum um, interessante! **Professor**: [...] Eu não gostava, como é? (O professor é surpreendido pela declaração do estudante H sobre a matemática) **Estudante H**: Eu não gostava de matemática, mas do jeito que o senhor tá ensinando, assim é bem interessante, tá legal, tipo uma ... **Professor**: Fica mais fácil? **Estudante H**: Fica mais fácil! **Professor**: Tu consegue apreender sozinha ou eu tô comentando alguma coisa? **Estudante H**: Não, o senhor explicou assim, olha ainda agora o senhor sentou aqui olha, me mostrou como era ai ficou mais fácil. Viu que desse aqui o senhor não precisou ficar ..., e eu já fui, é, ficou mais fácil! **Professor**: Conseguiste fazer sozinha né? **Estudante H**: Foi. [...] Ai é, depende de como o professor tá explicando, como é que ele tá explicando, tem toda uma dinâmica ai, principalmente matemática né que o aluno geralmente, a maioria das pessoas não gosta da matemática! **Professor**: E esse assunto, como você falou, ainda não tinha visto né! **Estudante H**: Eu ainda não tinha visto, eu não tinha nem noção do que era ... **Professor**: E se os outros professores ensinassem dessa maneira, o que você acha, seria mais fácil ensinar matemática? **Estudante H**: Seria mais fácil, mais fácil sim!

Professor: Tá bom!
Estudante H: Não ia ser tão complicado!
[...]
Professor: Na observação você vai dizer que nem todas as matrizes são iguais ...
Estudante G: Acabei!
Professor: Falta a conclusão. [...] Que nem todas as matrizes são iguais porque a pesar delas terem as mesmas ordens, mas só isso não garante que elas sejam iguais. Pra serem iguais os elementos correspondentes também são iguais. Ai quando acabar dali, já acabou. (O professor fez a pergunta para o estudante F)
Estudante F: Não professor, só toou ainda ciscando aqui!
Professor: Não, a observação já colocou?
Estudante F, G, H e I: Já!
Professor: Então vamos juntos fazer a conclusão. Qual é o título aqui do trabalho?
Estudante G: **I**gualdade de matrizes!
Professor: Ai o objetivo era descobrir as condições para a igualdade de matrizes, para que ocorra a igualdade de matrizes. Então, quando é que duas matrizes são iguais?
Estudante G: Quando elas, elas tem que ter as mesmas ordens e os mesmos elementos!
Professor: Elas tem que ter a mesma ordens e os elementos correspondentes tem que ser iguais. Concordam com isso?
Estudante F, G, H e I: Sim, concordo!
[...]
Professor: Porque apesar delas terem a mesma ordem só isso não garante que elas são iguais, elas tem que satisfazer as condições que o procedimento deu!
Estudante G: Acabei!
Professor: Ok!
Estudante F: Eu ainda não, falta fazer a conclusão!
Estudante G: Acabou?
Professor: Ainda não, só acaba quando todos fizerem a conclusão!

Fonte: Autoria própria (2021)

No transcorrer da aplicação das atividades estávamos focados em estimular os estudantes a participarem ativamente. Nessa transcrição fomos surpreendidos pelo comentário do estudante H ao afirmar que nunca havia estudado matemática do jeito que estávamos ensinando.

Aqui o processo de aprendizagens ocorreu de forma automática, pois os participantes desse terceiro grupo estavam mais participativos, questionaram mais e; isso lhes ajudaram na compreensão dos procedimentos da atividade, através de questionamentos direcionados ao professor.

Na atividade 5 (pág. 155), temos o diálogo do professor/pesquisador com os estudantes dos Grupos 1, 2 e 3, eles demonstraram o mínimo de dificuldade, como tínhamos previsto. A atividade tinha o propósito de fazer com que os estudantes conhecessem alguns tipos de matrizes, que seriam utilizadas nas atividades de aprofundamento adiante, nas quais elas apareceriam com mais frequência.

Pode-se evidenciado isso, pelas questões de aprofundamento que se encontram nas atividades 6, 7, 8, 9, 10 e pelos trechos transcritos do grupo 3, já que elas foram construídas com o propósito de complementar as atividades posteriores.

Quadro 39 – Diálogo entre professor e estudantes do Grupo C, na atividade 5

[...] **Professor**: Completar os exemplos que estão em branco! **Estudante G**: Pois é. É isso que tô tentando dizer! **Professor**: Certo! **Estudante F**: Há esse negócio de exemplo de coisinha que tá em branco vou ver o nome aqui, tá. Já tem aqui! **Professor**: Leia o segundo, o segundo aqui. A característica! **Estudante F**: Olha, uma matriz que possui apenas uma linha é a matriz linha, tá dizendo aqui. Então eu vou ter que fazer, é ... **Professor**: Ainda não, primeiro lê aqui! **Estudante F**: Mas não mandou ler a segunda? **Professor**: Sim, pra poder entender! **Estudante F**: Uma matriz que possui apenas uma coluna, tá, aqui está. Matriz que possui apenas uma coluna! **Professor**: Ai qual é o nome dela? **Estudante F**: É a matriz coluna, só pode ser! **Estudante I**: Foi isso que eu fiz. [Risadas] [...] **Estudante G**: Professor aqui diz uma matriz em que todos os elementos tem o valor zero. Então não importa quantas colunas e linhas eu coloque, o importante é que os elementos tem que ser zero. **Professor**: Isso. Olha, depois da matriz linha, tem uma matriz ai que eu acho, esse nome vou ajudar por que vocês não sabem, leiam ai! **Estudante F**: Olha, uma matriz que possui o mesmo número de linhas e o número de colunas. Eu só me lembro do quadrado, ele possui o mesmo número de lados, né ai eu só lembrei do quadrado. **Estudante G**: Uma dúvida, a gente não tinha que inventar os nomes? **Professor**: Não. De acordo com as características você escreve os nomes! **Estudante G**: Pois é, é isso que eu tô perguntando, a gente não tinha que inventar um nome de acordo com a característica? **Professor**: Não! **Estudante G**: Eu inventei um nome! **Professor**: Mas tudo bem olha, então, como a tua colega falou, como é o nome daquela figura geométrica que tem os mesmos, os lados iguais! **Estudante I**: Cubo. (O estudante tinha acertado, pois de acordo com a pergunta “figura geométrica” seria o cubo mesmo. Mas o professor queria se referir a figura plana, que seria o quadrado). **Estudante F**: Quadrado! **Professor**: É o quadrado! **Estudante I**: É o cubo. (O estudante estava tão certo da sua resposta que afirmou de novo que seria o cubo). **Estudante G**: Não, o cubo é uma coisa e o quadrado é outra! **Professor**: Tá, então é o quadrado. Olha, nessa questão fala que o número de linha é igual ao número de colunas, então o nome dessa matriz é matriz ... **Estudante G**: Quadrada! **Professor**: Quadrada! **Estudante G**: Eu coloquei matriz coluna! **Estudante I**: Eu nunca ia acertar, eu não sabia! **Estudante F e H**: Eu ia colocar quadrática! **Estudante I**: Eu não pensei, eu nunca vi isso na minha vida! **Estudante G**: Eu nunca pensei em quadrada, eu coloquei, mas ... **Estudante F**: Mas isso é o legal, é a pessoa não saber o assunto e, isso que vai estimular a pessoa!

[...]
Professor: Agora tu tem que ler a cara ..., olha essa outra ai não tem exemplo e nem tem nome, mas tem a característica!
Estudante F: Matriz em que todos os elementos tem o valor zero!
Estudante I: Matriz nulo!
Professor: Isso, tu já sabe o nome dela!
Estudante G: Matriz nula!
Professor: Matriz nula!
Estudante G: Há, acertei!
[...]
Estudante I: (O estudante estava lendo as características referente à matriz triangular) [...] Sem zero? Não, todos aqui tem.
Estudante G: Não, mas ela diz aglonal!
Professor: Qual é a outra?
Estudante F: (O estudante fez a leitura da característica da próxima matriz, no caso, matriz triangular)
Professor: Me empresta um lápis aqui, quero mostrar uma coisa!
Estudante F: Há, é a matriz diagonal, né?
Professor: Não!
Estudante G: É!
Estudante F: Não, não é o nome dela?
Professor: Observe que somente a diagonal não é zero, não é isso? (O professor estava mostrando para os estudantes o que aquela característica representa, que á a matriz triangular).
Estudante F: Hum!
Professor: Mas vocês observam, olha aqui, observem que essa parte aqui lembra que figura, essa parte aqui?
Estudante I: Triangulo?
Professor: Isso e a de baixo não é a mesma coisa?
Estudante F, G, H e I: Hum rum!
Professor: Então essa aqui é a matriz triângu ...
Estudante G: Lar!
Estudante F: É triangular?
[...]
Estudante G: A de baixo também é triangular?
Professor: Opa!
Estudante F: Eu acho que não por causa que já os valores se repetem!
Professor: Mas leiam ai a característica!
Estudante F: Uma matriz que só possuem os valores nulos e em sua diagonal somente o valor um. Não tenho nem ideia do nome dessa matriz!
Estudante G, H e I: É, matriz triangular um!
Professor: Não, não, não, essa ai o nome dessa matriz ela tem um nome especial, matriz identidade!
[...]
Professor: Tá, e agora a última característica!
Estudante F: Uma matriz que possui o número de linhas diferente do número de coluna!
Estudante G, H e I: Matriz desigual!
Professor: Não, calma, olha, essa aqui que foi a matriz quadrada o número de linhas não era igual o número de colunas?
Estudante F, G, H e I: Hum rum!
Professor: Qual figura que o lado é diferente do comprimento?
Estudante I: Quadrado!
Estudante G: Retângulo!
Estudante I: Égua, retângulo!
Professor: Então essa aqui é a matriz ...
Estudante G: Retangular. Eu já sabia que era retângulo porque eu vi o formato!
Professor: Hum um. Ninguém perguntou pra que é que serve isso ai!
Estudante G: Pra que é que serve?

Estudante F: Pra perturbar a cabeça da gente! **Professor**: Vai servi pra quando lá na atividade ... **Estudante I**: Pronto, já terminei fui. Vai ter atividade de aprofundamento? **Professor**: Não, mais não vai ter. Servi lá nas atividades quando tiver alguma questão, olha, foi dada a matriz identidade, há já sei na diagonal tudo é um. Então foi dada a matriz quadrada, então ... **Estudante F**: Há, então deixa eu olhar direito aqui que, se eu vou lembrar é a questão! [...]

Fonte: Autoria própria (2021)

Na transcrição da atividade 5 poucos recortes puderam ser feitos, pois essa atividade teve o objetivo de fazer com que os estudantes apenas conhecessem os tipos de matrizes, por isso fizemos a transcrição de apenas um grupo. O nome de algumas matrizes surgiram de imediato, outras foi preciso a intervenção do professor, pois os estudantes afirmaram que nunca iriam descobrir esses nome, sem uma orientação.

Na atividade 6 (pág. 156), o diálogo do professor/pesquisador com os estudantes dos Grupos A, B e C demonstraram um pouco de dificuldade, como tínhamos previsto. Porém, foi preciso apenas que os estudantes fizessem a leitura dos procedimentos seguindo as orientações do professor, para que eles conseguissem preencher a tabela com as transpostas das matrizes dadas.

Os diálogos dos estudantes do Grupo B com o professor, na atividade 6, perdeu-se por acidente, por isso não foram transcritos. A validação dessa atividade pode ser evidenciado pelos recortes mostrados no quadro 22 (pág. 208) e por recortes de alguns trechos transcritos de cada grupo.

Quadro 40 – Diálogo entre professor e estudantes do Grupo A, na atividade 6

[...] **Estudante B**: Essas daqui é pra transformar em coluna também? **Professor**: O que é que fala o procedimento, para cada matriz dada inverta essa matriz de forma que os elementos que estão dispostos em forma de linha, o que tá em forma de linha, agora fique posto em forma de ... **Estudante A**: Coluna! **Professor**: E vice e versa, ou seja, o que tá de coluna fique de linha e o que tá de linha em coluna! **Estudante A**: Hum rum! [...] **Professor**: O que aconteceu com as ordens das matrizes quando as mudanças foram realizadas? O que foi que aconteceu, o que aconteceu com a ordem da matriz, a ordem, era dois por três e ficou três por dois. Ficou a mesma ordem? **Estudante A**: Não! **Professor**: A ordem ficaram mudadas, tá, de posição, tá, ficaram mudadas de posição. Os elementos continuam na mesma posição? **Estudante A**: Não! **Professor**: O que era linha ... **Estudante A**: Virou coluna! [...]

Estudante B: Observa-se que teve uma mudança, pois os elementos que eram linhas viraram coluna e os colunas viraram linhas! **Professor**: Tá, então ai na conclusão nós vamos colocar o seguinte, né, vamos definir o que é uma matriz transposta, vamos conceituar na verdade. Então olha, uma matriz transposta é toda matriz que quando é trocada a ordem da matriz, o que acontece, o que era linha passa ser ... **Estudante B**: Coluna! **Professor**: Coluna né e a posição dos elementos são o quê, mantem ou ficam diferentes? **Estudante A**: Ficam diferentes! **Professor**: Pois é então olha, aqui era a onze, a doze. Agora já é a onze e a vinte e um! **Estudante B**: Hum rum! [...] **Professor**: Era linha! **Estudante A**: Isso, passa a virar coluna! **Professor**: Vírgula muda-se também, o que é que muda, o que é que muda também aqui? **Estudante B**: Muda a ordem! **Professor**: Muda também a ordem. Então matriz transposta é toda a matriz que quando muda a linha e passa a ser coluna, né, ai o ponto principal aqui é a ordem dessa matriz muda. Tá! **Estudante A e B**: Tá!

Fonte: Autoria própria (2021)

Na transcrição dos diálogos entre o professor e os componentes do Grupo A percebeu-se que os estudantes, no início, sentiram dificuldades em identificar que era preciso apenas fazer a troca, nas matrizes, das linhas pelas as colunas modificando então o tipo da matriz.

Porém, essas dificuldades iniciais desapareceram quando eles conseguiram realizar as mudanças na primeira matriz, isso facilitou a compreensão deles e; então foi repetido o procedimento nas demais, de modo análogo a que tinham feito antes. Lembrando que as orientações do professor foram fundamentais para a conclusão dessa atividade.

Aqui, finalizamos apresentando a transcrição dos diálogos entre o professor e os estudantes do Grupo C, na atividade 6 evidenciado pelos recortes mostrados no quadro 22 (pág. 208) e por trechos da transcrição feita.

Quadro 41 – Diálogo entre professor e estudantes do Grupo C, na atividade 6

Professor: Pois bem estamos na atividade seis, tem que ler o procedimento pra poder ver o que é pra fazer, tá! **Estudante F**: (Leu os procedimentos). **Estudante I**: Mas como é que eu vou fazer três linhas se eu só tenho três números? **Estudante F**: Não é a, é ..., inverter os elementos, se é matriz linha forma matriz coluna. Me dá aqui o teu lápis um instante para mostrar aqui para o professor! **Estudante G**: Olha eu fiz assim! **Estudante F**: Pois é, ai se transformou em coluna! **Professor**: É isso mesmo. Ai tem que colocar a ordem também. Olha essa matriz, qual é a ordem dessa matriz A? (O professor estava perguntando para o estudante G). **Estudante G**: Linha! **Professor**: Não, era um por três. E agora como é a ordem? **Estudante F, G, H e I**: Três por um!

Professor: Isso!
Estudante F: Inverteu, três por um1
[...]
Professor: O que é que investe?
Estudante I: As colunas e as linhas? Ou os números? É, os números!
Professor: Na matriz transposta é, as ordens vai ser investida da matriz dada, não é isso?
Estudante F: Hum rum!
Professor: Ai o que foi colocado aqui na observação? Fala lá. (O professor pediu para o estudante G fazer a leitura da sua observação).
Estudante G: Não são as mesmas matrizes!
Professor: Tá, dá para perceber isso. O que mais?
Estudante G: Pois a ordem delas mudaram!
Professor: Hum rum!
Estudante G: Suas linhas e colunas também. Na matriz quadrada o primeiro elemento e o último não mudam a posição!
Professor: Então a matriz transposta vai ser o quê? Vai ser a matriz que se obtém quando é feita a troca de quê?
Estudante F: De linhas e colunas!
Professor: Da matriz que foi ...
Estudante F: Da matriz que foi dada!
Professor: Mas é só as linhas e colunas que mudam?
Estudante F: Não, a ordem dos elementos também!
Professor: Tá!

Fonte: Autoria própria (2021)

É possível percebermos na transcrição dos diálogos que os estudantes desse grupo estavam confusos quanto ao entendimento dos procedimentos, mas bastou que eles fizessem a transposta da primeira matriz, para que as outras fossem realizadas de uma forma bem ágil.

Também é possível perceber que, assim como ocorreu em outras atividades, os indícios de aprendizagem foram surgindo conforme os estudantes questionavam o professor e, através dos diálogos que ocorreram entre os componentes de cada grupo. Esses diálogos foram fundamentais, pois os estudantes que já haviam compreendido a atividade, agora, ajudavam os demais colegas do seu grupo.

Na atividade 7 (pág. 159), por meio dos diálogos do professor/pesquisador com os estudantes dos Grupos A, B e C percebe-se que eles não demostraram dificuldades, pois essa atividade era semelhante a anterior e isso facilitou o entendimento dos participantes, como tínhamos previsto. Esse entendimento pode ser evidenciado pelos recortes mostrados no quadro 23 (pág. 210) e por recortes feitos nos trechos transcritos de cada grupo.

Quadro 42 – Diálogo entre professor e estudantes do Grupo A, na atividade 7

[...] **Professor**: Tá, lê aqui a pergunta! **Estudante B**: No preenchimento da tabela acima você observou algumas mudanças nas transpostas das matrizes? **Professor**: São duas perguntas! **Estudante B**: Hum rum. (O estudante afirmou com a cabeça que tinha entendido também). [...] **Professor**: Responda a questão observando a tabela preenchida. Faça as observações e conclusões. Tá então olha, tu já respondeu olhando aqui a transposta, não é isso? **Estudante B**: Hum rum. (O estudante fez sinal positivo com a cabeça afirmando que já tinha feito a resposta). **Professor**: A conclusão agora é a conclusão geral que vai valer pra todas. O que é uma matriz simétrica? A matriz simétrica é obtida quando se faz o quê? Quando se faz a transposta de uma matriz. Altera o resultado? **Estudante B**: Não! **Professor**: E o resultado não se altera. [...] Tu lembra de ontem que nós vimos essa daqui olha dois por dois, três por três! **Estudante B**: Hum rum! **Professor**: Que tipo de matriz são essas? Em que o número de linhas é igual ao número de colunas? **Estudante A**: Matriz quadrada! **Professor**: Então o que é matriz simétrica? É uma matriz quadrada, né! **Estudante B**: Hum rum! **Professor**: Que quando se faz a transposta dessa matriz a nova matriz não altera o tipo e nem a posição dos seus elementos! **Estudante B**: Hum rum! **Professor**: Tá, tá entendido. Isso que é uma matriz simétrica! **Estudante B**: Sim! **Professor**: Então tá!

Fonte: Autoria própria (2021)

Destacamos ainda, nos diálogos que em vários momentos o professor fez perguntas retóricas, com objetivo de estimular os estudantes a refletirem sobre seus próprios questionamentos ou sobre as respostas dadas, ofertando a eles um tempo necessário para a assimilação de conhecimentos já adquiridos na atividade anterior, para a formulação de novas respostas que contribuam no seu entendimento.

Agora, veremos a transcrição dos diálogos do professor com os estudantes do Grupo B, na atividade 7. O que pode ser evidenciado pelos recortes mostrado no quadro 23 (pág. 210) e por trechos transcritos a seguir desse grupo.

Quadro 43 – Diálogo entre professor e estudantes do Grupo B, na atividade 7

Professor: Bom, leiam os procedimentos! **Estudante E**: (Leu os procedimentos em voz alta). **Professor**: Então o que é que vocês vão fazer? Primeiro, tá aqui as matrizes e tu vai fazer aqui as ... **Estudante E**: Transpostas! **Professor**: Que nós fizemos na aula passada! **Estudante E**: Hum rum. Tipo, se tá assim eu vou mudar ... **Professor**: É, lembra que aqui é linha passa a ser coluna! **Estudante E**: Hum rum. [...] Essa daqui ficou igualzinho! [...]

Professor: Há tá, então olha, o que é matriz simétrica? Matriz simétrica é a matriz que é igual a matriz dada. Não é isso? **Estudante E**: Hum rum! **Professor**: E tem a mesma ordem. Essa matriz é retangular ou ela é quadrada? **Estudante C, D e E**: Quadrada! **Professor**: Todas elas são quadradas? **Estudante D**: Não! **Professor**: Não? Nenhuma, mostra! **Estudante E**: Não é é, todas. Que eu vi esse bichinho daqui. (O estudante estava apontando para a matriz C que foi construída com colchetes). **Professor**: Então vocês vão escrever matriz simétrica é uma matriz quadrada ... **Estudante E**: Matriz simétrica ... **Professor**: Matriz simétrica é uma matriz quadrada ... **Estudante D e E**: É uma matriz? **Professor**: Quadrada ... **Estudante E**: Quadrada! **Professor**: Matriz simétrica é uma matriz quadrada, né, que é igual a sua transposta! **Estudante D**: Transposta? Só? **Professor**: Então olha o que é uma matriz simétrica? É uma matriz quadrada que é igual a sua transposta! **Estudante E**: Hum rum! **Professor**: Tá!

Fonte: Autoria própria (2021)

Assim como ocorreu com o grupo anterior, os estudantes que compõem o Grupo B também fizeram questionamentos ao professor buscando, com isso, esclarecimentos para suas dúvidas, quanto a maneira certa de realizar a atividade proposta.

Porém, o professor mostrou, desde o início, que a atividade atual seria semelhante a anterior. Então se uniu as orientações realizadas pelo professor aos questionamentos dos pesquisados que conseguiram relacionar as duas atividades, por meio da compreensão/entendimento do que estava sendo proposto no procedimento, mobilizando assim os conhecimentos adquiridos anteriormente.

Agora, veremos a transcrição dos diálogos do professor com os estudantes do Grupo C, nessa atividade 7. E isso pode ser evidenciado pelo recorte mostrado no quadro 23 (pág. 210) e pelos trechos transcritos que segue do grupo.

Quadro 44 – Diálogo entre professor e estudantes do Grupo C na atividade 7

[...] **Estudante F**: A transposta a gente já fez. A gente já fez umas parecida da transposta, que muda linha pra coluna, coluna pra linha, não estão lembrados? **Estudante I**: Rum. [Risadas] (O estudante estava rindo, pois estava demostrando que não se lembrava da última aula sobre matriz transposta e estava olhando a atividade que seu colega estava fazendo). **Estudante F**: Linha vira coluna, linha vira coluna, coluna vira linha! **Estudante G**: Hum, dá a mesma coisa! (O estudante percebeu que bastava repetir as matrizes nos espaços onde deveria colocar a transposta da matriz dada). **Estudante I**: Tu faz só repetir. [Risadas] (O estudante percebeu, pela fala do estudante G, basta só repetir as matrizes nos espaços onde deveria ser colocado a transposta da matriz dada).

Estudante F e H: Não tem diferença aqui! **Estudante G**: Eu não tô vendo nenhuma! [...] **Estudante F**: É porque ela é uma matriz simétrica, a simetria não muda! **Estudante I**: É, então é só repetir. [...] **Professor**: Matriz. Então o que é matriz simétrica? **Estudante F**: É a matriz que é igual a sua transposta! **Professor**: Isso! **Estudante F**: Tanto em número de linhas, como de colunas, como de elementos. É isso? **Professor**: Hum rum! **Estudante F**: É uma matriz, vão colocando lá! **Estudante I**: É uma matriz? **Estudante F**: Que é igual a sua transposta. Tanto no número de linhas, colunas e mesma ordem dos elementos! **Professor**: Tá entendido? **Estudante F, G, H e I**: Hum rum!

Fonte: Autoria própria (2021)

É possível perceber, na transcrição dos diálogos, que os estudantes desse grupo não estavam confusos quanto ao entendimento dos procedimentos, como ocorreu na atividade 6. Bastou que eles fizessem a leitura do procedimento para compreenderem que essa atividade era idêntica à anterior.

Os indícios de aprendizagem surgiram naturalmente nessa atividade. Conforme os estudantes faziam questionamentos ao professor mais ficavam confiantes em realizar as atividades com êxito.

Destacamos aqui um intenso diálogos que ocorreu entre os componentes do Grupo C. Ficou claro a maturidade deles em ajudar os colegas e em realizar os questionamentos com bastante fundamentos e estratégia, fizeram perguntas que tinham a intenção de confirmar seus questionamentos, caso contrário, o professor teria que corrigir suas próprias perguntas feitas anteriormente.

De modo geral essa atividade foi bem proveitosa. Os diálogos mostraram que os estudantes lembraram do assunto de matriz transposta e usaram corretamente os conceitos adquiridos na atividade anterior. Também tivemos o estudante I afirmando que não recordava do assunto, porém conseguiu realizar a atividade como os demais estudantes.

Na atividade 8 (pág. 162), o diálogo do professor/pesquisador com os estudantes dos Grupos A, B e C comprovam que eles não demonstraram dificuldade. E, ao realizarem as adições dos mesmos tipos de combustíveis com os modelos de automóveis, conseguiram montar uma tabela que representava a quantidade total de veículos que foram vendidos nos dois meses.

Para evidenciar esses fatos, apresentamos a seguir os recortes no quadro 24 (pág. 213) e recortes dos trechos transcritos de cada grupo.

Quadro 45 – Diálogo entre professor e estudantes do Grupo A, na atividade 8

Estudante A: Tá.(O estudante fez a leitura da questão). **Professor**: Ele tá te dando janeiro e fevereiro. Quer que tu monte uma tabela que inclua as quantidades [...] **Estudante A**: Caramba vai ficar grandona. Fica grande assim? **Professor**: O quê? **Estudante B**: A tabela? A matriz? **Professor**: Mostra ai como tu diz que fica grande? **Estudante B**: Pegar tudo isso aqui e fazer só uma linha? **Professor**: Não, não, não. Tu entendeste ele quer, olha, as tabelas abaixo apresentam os números de unidades vendidas, em uma concessionária, de dois veículos nos modelos A e B, de acordo com o tipo de combustível, durante ... É, monte uma tabela que represente a quantidade total de veículos vendidos nos dois meses, ou seja, tu vai ter que montar uma tabela parecida com essa aqui. Só que aqui tu não vai colocar esse valor, tu vai colocar as somas dos ... **Estudante B**: Hum! **Professor**: Entendeu? **Estudante A e B**: (Os estudantes balançaram a cabeça afirmando que tinham entendido as orientações do professor). [...] **Estudante A e B**: Já, só faltou a conclusão! **Professor**: O que tu colocou na observação? (O professor perguntou para o estudante A). **Estudante A**: Para chegar os valores da tabela, obtive a soma dos valores dos valores dos dois meses, Janeiro e Fevereiro! **Professor**: Tá. Então aqui na conclusão vamos colocar o seguinte, né, que, olha o título, a adição de matrizes, conceituar a adição de matrizes. Quando é que a gente pode somar duas matrizes? Quantas linhas e colunas tem essa matriz? **Estudante A**: Três linhas e três colunas. Não, duas linhas e três colunas! **Professor**: E quantas linhas e colunas tem aqui? **Estudante A**: Duas linhas e três colunas! [...] **Professor**: Entenderam? Não é que elas sejam iguais, tá aqui, tem que ter a mesma ordem! **Estudante A e B**: Ordem! **Professor**: Porque olha, eu ia somar, seis mais três, nove, menos um mais dez, ia dar nove. E agora aqui, não tem, então não posso. Então só podemos adicionar ou somar duas matrizes se elas forem da mesma ordem! **Estudante A e B**: Entendemos!

Fonte: Autoria própria (2021)

É possível perceber pela transcrição que os estudantes conseguiram compreender, sem muitas dificuldades, o que era pra ser feito. Para isso foi solicitado a eles a leitura do procedimento da questão, assim ocorreu. Os diálogos revelam os indícios de aprendizagem emergindo naturalmente entre os participantes, pois a atividade envolveu a operação de adição com matrizes, a qual os levou a relacionarem o assunto com a operação da adição dos números inteiros.

Agora, veremos a transcrição dos diálogos do professor com estudantes do Grupo B e diálogos entre os próprios colegas na atividade 8. Isso pode ser evidenciado pelo recorte mostrado no quadro 24 (pág. 213) e por trechos transcritos desse grupo.

Quadro 46 – Diálogo entre professor e estudantes do Grupo B, na atividade 8

Professor: Vocês já sabem o que é pra fazer, aqui?
Estudante E: Montar uma tabela!
Professor: Uma tabela desse mesmo tipo aqui!
Estudante E: Hum rum. Só com a quantidade total?
Professor: Tu já leu os procedimentos aqui?
Estudante E: Já!
[...]
Professor: Ela que fez um enorme. (O professor estava se referindo ao estudante E que tinha feito uma tabela grande).
Estudante E: Égua ficou bacana o meu. [...] Já terminei tio!
Professor: E a observação? E a conclusão?
[...]
Professor: Tinham que ser do mesmo ... Essa observação tem que colocar ai. Quando foi realizado a adição tinha que somar elementos do mesmo tipo. Entendeu?
Estudante E: Hum rum!
Professor: Tu já preencheu? Ou tu já terminou a tabela?
Estudante D: (O estudante D mostrou a tabela preenchida para o professor).
Professor: Tá, ai vai para a observação né. A conclusão a gente faz junto!
Estudante E: Como foi que o senhor falou que tinha que somar é, elementos com elementos!
Professor: É, no caso aqui tem ..., na adição de matrizes tem que somar elementos que pertençam a mesma ...
Estudante C e D: Mesmo combustível?
Professor: Mesmo tipo, elementos do mesmo tipo. Eu não posso somar elementos de tipos diferentes.
[...]
Professor: Um bora colocar a conclusão!
Estudante E: Conclusão, concluímos que ponto. [Risadas].
Professor: Olha aqui na conclusão, é, conceituar a adição de matrizes. Quando é que eu posso somar matriz, quando eu tenho uma ou quando eu tenho pelo menos duas?
Estudante D: Hum!
Professor: Quando é que eu posso somar as matrizes, quando eu tenho uma ou pelo menos duas?
Estudante E: Pelo menos duas!
Professor: Pois é então a adição de matrizes deve ser feita com matrizes do mesmo tipo ou de tipos diferentes?
Estudante C, D e E: Do mesmo tipo!
Professor: Com matrizes do mesmo tipo!
Estudante D: Só isso tio?
Professor: Sim, finalizamos essa atividade!

Fonte: Autoria própria (2021)

A transcrição nos mostra que os estudantes conseguiram compreender o objetivo dessa atividade através da leitura do procedimento. Esses diálogos apontam indícios de aprendizagem que apareceram nas conversas, principalmente, entre os estudantes e entre estudantes e professor. É importante notar que os pesquisados, desse grupo, já se sentem à vontade participando ativamente das discursões da atividade, e isso, é notório na transcrição feita a cima, pois ela mostra a maturidade em que os estudantes se encontravam, muito diferente de quando iniciamos as sessões de ensino.

Agora, veremos a transcrição dos diálogos do professor com os estudantes do Grupo C, na atividade 8. O que pode ser evidenciado pelo recorte mostrado no quadro 24 (pág. 213) e pelos trechos transcritos.

Quadro 47 – Diálogo entre professor e estudantes do Grupo C, na atividade 8

[...] **Professor**: Sim, observe que na leitura da questão é pedido que faça a montagem de uma tabela! **Estudante I**: Há tá entendi! **Professor**: Ok! **Estudante G**: Pronto, acabei! **Professor**: Tá. Qual foi a observação que tu fez? O que foi que tu usou para chegar nesses resultados aqui? (O professor estava apontando para a tabela construída pelo estudante preenchida com valores). **Estudante G**: Eu somei os combustíveis, de Janeiro e Fevereiro! [...] **Professor**: Tá somado os resultados. Se essa aqui fosse dois por três e essa aqui cinco por três dava pra somar? **Estudante G e I**: Não! **Professor**: Porquê os tipos iam ser iguais ou diferentes? **Estudante F e H**: Seriam diferentes! **Professor**: Então a conclusão aqui é o seguinte, quando é que dá pra fazer a adição de matrizes? **Estudante G**: Quando as matrizes tem o mesmo número de colunas e linhas! **Professor**: Coloca lá então. Pera ai, o que tu vai colocar ai, então? **Estudante G**: Quando as matrizes ..., dá pra somar elas ..., só dá pra somar quando as matrizes tiverem o mesmo número de colunas e linhas. [...] Pronto! **Professor**: Tá entendido então? **Estudante F, G e H**: Sim! **Estudante I**: Eu entendi tudo, foi fácil!

Fonte: Autoria própria (2021)

Nessa transcrição, os diálogos revelam que os estudantes desse grupo estavam bem conscientes do que deveriam fazer na atividade, pois o professor solicitou que todos lessem o procedimento, o problema e respondessem as questões.

Diferentemente de outros grupo, os componentes do Grupo C mostraram-se muito mais avançados em relação a compreensão dessa atividade e, isso é mostrado pelos diálogos transcritos. Neles, os indícios de aprendizagem são mais frequentes e a cada interação de professor e estudantes, as ideias fluem e são mais rápidas compreendidas.

Dentre todas as transcrições das atividades analisadas até o momento, esta última foi muita proveitosa, pois houve uma rápida compreensão, o tempo usado foi bem reduzido, mostrando que a comprovação dos indícios de aprendizagem; o planejamento e a aplicação da sequência didática estavam gerando resultados positivos até o momento.

Na atividade 9 (pág. 165), os diálogos do professor/pesquisador com os estudantes dos grupos 2 e 3 não mostram a ocorrência de grandes dificuldades, pois essa atividade era bem parecida com a atividade anterior e os estudantes, na sua maioria, compreenderam o que tinha de ser feito.

Mas uma vez, por problemas técnica no celular, não foi possível fazer a gravação do vídeo e dos áudios da equipe 1, por isso, não apresentaremos aqui a transcrição dos diálogos deles, porém o desempenho deste grupo está de acordo com os outros dois, o que pode ser evidenciado pelo recorte mostrado no quadro 25.

Assim, passaremos para a transcrição dos diálogos do professor com os estudantes do Grupo B, na atividade 9. Isso pode ser evidenciado pelo recorte mostrado no quadro 25 (pág. 215) e por trechos transcritos a seguir de cada grupo.

Quadro 48 – Diálogo entre professor e estudantes do Grupo B, na atividade 9

[...]
Professor: É, aqui é as matrizes e tu vai somar, soma e coloca o resultado aqui!
Estudante C, D e E: Só isso?
Professor: Só. Ai vai responder e depois fazer a observação e conclusão!
Estudante C: Ai eu vou ter que fazer esse mesmo negócio aqui nas matrizes ...
Professor: E, nas outras!
Estudante C: Mas por o resultado?
Professor: É, tá aqui na folha. Tu soma e põe aqui a matriz resultado, uma única!
[...]
Estudante D: Acertei! Deu zero o meu resultado!
[...]
Professor: Essa matriz tem um nome?
Estudante C, D e E: É a matriz nula?
Professor: Hum rum!
[...]
Professor: Essas duas matrizes são o quê? (O professor estava apontando para duas matrizes que tinham elementos opostos. Ele queria que os estudantes percebessem que as duas matrizes eram opostas).
Estudante C e D: Matriz igual?
Professor: Uma, com os elementos da matriz o que é que elas são, os elementos aqui da matriz olha três menos três, seis menos seis, o que é que eles são?
Estudante E: São ...
Estudante D: Diferentes!
Professor: Opostos, não são?
Estudante E: Opostos? São!
Professor: Pois é!
Estudante E: Matriz oposta!
[...]
Estudante E: Os elementos das matrizes são opostos e elas têm a mesma ordem. (O estudante fez uma leitura bem baixa da sua conclusão).
Estudante C e D: Fizemos assim. (Os estudantes estavam dizendo que tinham feito como o estudante E fez).

Professor: Hum rum. [...] Ai, qual é a que é a conclusão? Hum, a conclusão vocês vão colocar o seguinte aqui que quando se soma duas matrizes e o resultado é a matriz nula, isso significa que as duas matrizes são o ... **Estudante C, D e E**: Opostas! **Professor**: Entenderam? **Estudante C, D e E**: Sim! [...]

Fonte: Autoria própria (2021)

Na leitura dos procedimentos e nos questionamentos feitos pelo os alunos ao professor, ele fez questão de orientá-los fazendo referência a atividade anterior que envolveu a adição de matrizes. A transcrição dos áudios feitos mostra que os estudantes conseguiram compreender a atividade devido ao bom sucesso alcançado na atividade anterior.

Nesses diálogos os indícios de aprendizagem foram detectados desde o início até o fim da aplicação da atividade. Isso mostra que esses estudantes já demonstravam uma certa familiaridade com a metodologia usada no trabalho.

Agora, veremos a transcrição dos diálogos do professor com os estudantes do Grupo C, na atividade 9. O que pode ser evidenciado pelo recorte mostrado no quadro 25 (pág. 215) e por trechos transcritos.

Quadro 49 – Diálogo entre professor e estudantes do Grupo C, na atividade 9

Professor: Olha tem essa folha aqui leiam logo os procedimentos para preencher essa folha! **Estudante G**: (O estudante fez a leitura dos procedimentos e depois, fez a leitura do problema) Como é que eu vou ter que fazer isso? **Professor**: Olha, observe aqui que esse primeiro ponto aqui é a adição de A mais **I**, da matriz A com a matriz **I**, já tá feito aqui olha! O segundo ponto é **I** mais A, ao contrário, **I** mais A, tá aqui, olha! **Estudante F e G**: Hum! **Professor**: Tu vai ter só que colocar o resultado aqui! [...] **Estudante F e I**: Tá dando tudo zero! **Professor**: Hum rum! **Estudante G**: Tem que pegar C mais F ..., há não, aqui é sete! **Professor**: Tá achando difícil a atividade? (O professor fez a pergunta para o estudante G). **Estudante G**: Não! [...] **Estudante G**: Adições feitas foram nulas? **Professor**: Deu a matriz ... **Estudante G**: Nula! **Estudante F e I**: É mesmo, nós estudamos esse tipo de matriz e o senhor falou que iriamos usar! [...] **Professor**: Tem alguma observação a fazer? **Estudante G e H**: Que todas as matrizes, que houve, que todas as matrizes eram opostas uma a outras e por isso o resultado sempre deu ... **Estudante F**: A matriz nula! **Estudante H**: Isso! **Professor**: Que todas as matrizes tem elementos um opostos ao outro, olha, né!

Estudante G: (O estudante fez sinal positivo com a cabeça afirmando que os elementos eram opostos mesmos) [...] Pronto! **Professor**: A conclusão, depois do que tu colocou aqui, né, que todas deu a matriz nula e essa observação, qual foi a observação, que as matrizes ... **Estudante I**: Tem elementos que são opostos um ao outro, i i i. E por isso o resultado foi a matriz nula! **Professor**: Então a conclusão aqui é o seguinte, o que é uma matriz oposta? **Estudante F e G**: É uma matriz original e o seu oposto! **Professor**: É uma matriz que quando somada, matriz oposta, é uma matriz que quando somada, o que foi que tu falou original? Não é isso? **Estudante G**: (O estudante fez sinal positivo com a cabeça). **Professor**: O resultado é a matriz ... **Estudante G**: Nula! **Professor**: Então coloca lá a matriz oposta, aí tu já sabe colocar né! (Enquanto o professor fazia os argumentos os estudantes estavam fazendo a conclusão) [...] Já? **Estudante F, G, H e I**: Pronto, acabamos!

Fonte: Autoria própria (2021)

Os recortes das transcrição revelam que os estudantes conseguiram resolver a atividade, mesmo nunca visto antes o assunto, e logo de início perceberam do que se tratava.

O professor questionou os estudantes sobre a maneira usada para resolverem a atividade, se poderia ser por meio de parcerias entre participantes ou de modo individual, que era o modo como estavam fazendo as atividades. Eres responderam do modo como estavam fazendo tornava-se mais rápida a resolução das questões.

Os indícios de aprendizagem apareceram com mais frequência e a cada interação entre professor e estudantes, as ideias iam fluindo mais rápidas. Incrível foi que os estudantes conseguiram relacionar a nona atividade com a quinta, que tratava sobre os nomes especiais de matrizes, isso deixou os participantes bem animados pois eles identificaram a matriz nula.

Na atividade 10 (página 169), o diálogo do professor/pesquisador com os estudantes dos Grupos B e C demostraram que não houve dificuldades, pois ao realizarem a leitura do procedimento juntamente com as orientações, eles conseguiram identificar que os valores da tabela deveriam ser dobrados, ou seja, deveria ser usado a operação da multiplicação de um número real pelos elementos da matriz.

Mas uma vez, por problemas técnico no celular, não foi possível fazer a gravação do vídeo do Grupo A e por isso não apresentaremos aqui a transcrição dos diálogos deles. Porém o desempenho desse grupo está de acordo com os outros dois, e isso pode ser evidenciado pelo recorte mostrado no quadro 26 da página 218 e por trechos transcritos de cada grupo**.**

Quadro 50 – Diálogo entre professor e estudantes do Grupo B na atividade 10

[...] **Professor**: Tá i, se vai dobrar o que tu tem que fazer? **Estudante E**: É é, multiplicar! [...] **Professor**: Porque foi só duas vezes? **Estudante D e E**: Porque ele pediu o dobro. [Risadas] Falamos juntas! **Professor**: Isso, tem que colocar essas coisas ai na observação! [...] **Estudante E**: Eu ia colocar eu observei que a multiplicação de um número real por uma matriz. Eu ia colocar isso daí! [...] **Professor**: Pode, puxa uma setinha e indica que esse número real é o número dois ... Já tu Alex o que foi que tu fez para encontrar esses valores ai? **Estudante C**: Eu multipliquei por dois e deu o valor exato aqui ... **Professor**: Cada elemento da tabela né? **Estudante C**: Hum rum, eu multipliquei cada elemento da tabela que era os números que a questão pedia! **Estudante E**: Ai daqui professor, real ai dois! **Professor**: Tá. Por quem? Pela tabela que ele deu, né? Por cada elemento que foi dado na tabela. Não esquece que isso daí não é uma matriz que ele deu, é uma tabela não foi? **Estudante E**: Por cada elemento de uma tabela? **Professor**: É isso mesmo, muito bom!

Fonte: Autoria própria (2021)

A transcrição dos áudios feitos nos mostram que os estudantes desse grupo conseguiram compreender a atividade e, isso está bem claro nos diálogos transcritos em que o professor é questionado com frequência. Também os próprios estudantes questionam-se querendo compreender como o colega fez para solucionar a atividade.

Nesses diálogos os indícios de aprendizagem são bem mais frequentes e estão presentes do início ao fim da atividade, isso mostra a familiaridade que os estudantes adquiriram com a metodologia aplicada na pesquisa.

Agora, veremos a transcrição dos diálogos do professor com os estudantes do Grupo C, na atividade 10. O que pode ser evidenciado pelo recorte mostrado no quadro 26 (pág. 218) e por trechos transcritos a seguir desse grupo.

Quadro 51 – Diálogo entre professor e estudantes do Grupo C, na atividade 10

Professor: Boa tarde, então vamos terminar aqui a décima atividade com a turma, qualquer dúvida pode perguntar tá! **Estudante F**: Tá, o objetivo é encontrar uma maneira de multiplicar um número real por uma matriz qualquer, um número real por uma matriz qualquer. Procedimento, pra ler o texto e responder à questão proposta, fazendo em seguida as observações e conclusões necessárias! (O estudante fez a leitura do texto sobre a produção de televisores e a questão) Tá, é pra montar uma matriz e cada elemento é pra multiplicar por dois? Seria um procedimento né?

Professor: Isso!
Estudante F: Porque vai dobrar o valor, então cada, cada ...
Professor: Mas é pra montar uma matriz?
Estudante E: Uma tabela!
Estudante I: Foi isso que eu estava pensando!
[...]
Estudante G: Eu vou ter que explicar na observação o que eu fiz na questão?
Professor: Pode fazer isso. O que foi que tu fez na questão, fala pra mim?
Estudante G: Eu construir uma tabela, só que eu mudei a quantidade de produções, eu multipliquei, eu multipliquei por dois os dias um, dois e três!
Professor: Foi só do modelo um ou foi dos dois modelos?
Estudante G: Do modelo um e dois!
[...]
Professor: Então coloquem na conclusão né, o que vocês acham é ..., como é que deve ser feita a multiplicação de um número real por uma matriz?
Estudante F: Multiplicando todos os números pelo mesmo ...
Professor: Quem foi o número que foi multiplicado por cada elemento da matriz, não foi o número real que foi dado na questão ai?
[...]
Estudante F: Quando se multiplica um número real né, ele tem que ser multiplicado por todos os números que compõem a matriz, não pode apenas ser por uma linha ou uma coluna. Eu também tava pensando numa maneira, de uma outra maneira de fazer sem ter que multiplicar cada ...
Professor: Hum rum!
Estudante F: Cada um. Aqui a maneira que eu ia fazer mas depois eu observei, somava todos os números e multiplicava no final por dois. Mas como tem que ser modelo um e modelo dois ...
Professor: E os dias são diferentes?
Estudante F: E os dias são diferentes não ia caber essa soma pra depois multiplicar!
Professor: Porque na verdade uma multiplicação nada mais é do que uma soma!
[...]
Professor: Como é que a gente deve fazer a multiplicação de um número real por uma matriz?
Estudante G: Eu coloquei, multiplicaremos o número real por todos os números da linha/matriz sem exceção!
[...]

Fonte: Autoria própria (2021)

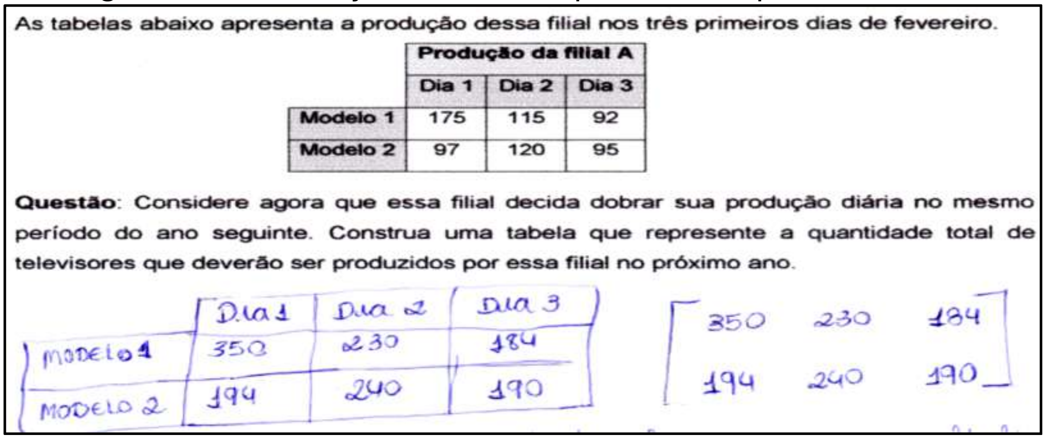
Nessa última transcrição percebemos como os estudantes estavam bem mais à vontade para fazerem perguntas ao professor, e estes questionamentos lhes proporcionaram melhor compreensão, concluindo com isso a observação e a conclusão da atividade.

Destacamos também aqui a dificuldade que o estudante I apresentou nesta atividade, mas com as orientações do professor e ajuda dos colegas, ele finalmente compreendeu o que deveria ser feito.

Finalizamos observando que esses diálogos revelaram os indícios de aprendizagem que ocorreram de forma mais espontânea e intuitiva, mostrando que a sequência didática estava dando certo.

A figura 26 ilustra a assimilação do aprendizado do estudante G e isso mostra o resultado do diálogo do professor com esse estudante.

Figura 23 – Resolução da décima questão feita pelo estudante G



As tabelas abaixo apresenta a produção dessa filial nos três primeiros dias de fevereiro.

	Produção da filial A		
	Dia 1	Dia 2	Dia 3
Modelo 1	175	115	92
Modelo 2	97	120	95

Questão: Considere agora que essa filial decida dobrar sua produção diária no mesmo período do ano seguinte. Construa uma tabela que represente a quantidade total de televisores que deverão ser produzidos por essa filial no próximo ano.

	Dia 1	Dia 2	Dia 3
MODELO 1	350	230	184
MODELO 2	194	240	190

$$\begin{bmatrix} 350 & 230 & 184 \\ 194 & 240 & 190 \end{bmatrix}$$

Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Na resolução do estudante G percebe-se que o resultado dessa questão está correta, não havendo ocorrência de erros. Além dele construir a tabela para representar o resultado, ainda fez uma matriz representativa da quantidade de televisores que deverão ser produzidos no próximo ano; demostrando conhecimento para a representação de uma matriz.

Assim, Verifiquemos três passos básicos que definem a abordagem Microgenética, tais como:

1. As observações que abrangem todo o período do processo, desde o início da mudança até o momento em que atinge um estado relativamente estável;

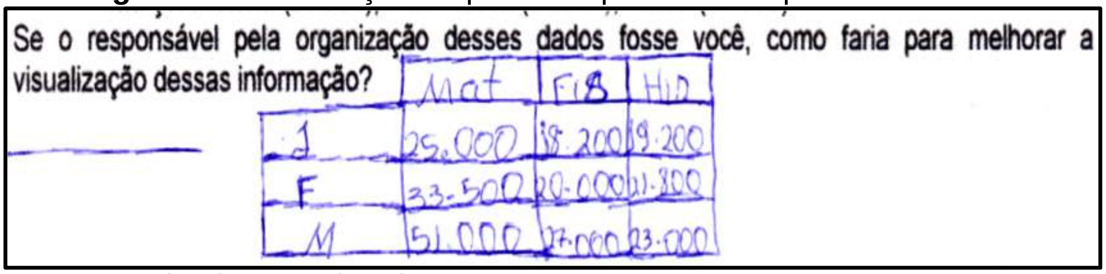
2. A densidade das observações se acentua em relação à alteração do fenômeno;

3. O comportamento observado é submetido à análise e experimentação intensiva, buscando inferir os processos que deram origem a ambos os aspectos quantitativos e qualitativos da mudança.

6.2. Desempenho dos estudantes na resolução de questões do teste

Ao analisarmos as resoluções do teste, podemos perceber que os estudantes tiveram a ideia de representar os dados fornecidos pela questão de forma desorganizados, em tabela. Só que agora esses dados foram todos organizados, o que se aproximou do assunto de matrizes apreendido nas atividades propostas e nas questões de aprofundamentos. Abaixo apresentaremos algumas resoluções feitas por estudantes de grupos diferentes, mas que chegaram em resultados semelhantes.

Figura 24 – Resolução da primeira questão feita pelo estudante E

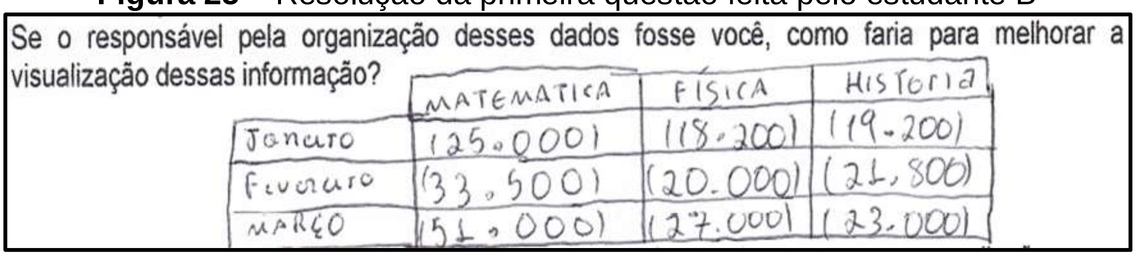

Se o responsável pela organização desses dados fosse você, como faria para melhorar a visualização dessas informação?

	Mat	FIS	HIS
J	25.000	18.200	19.200
F	33.500	20.000	21.800
M	51.000	27.000	23.000

Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Observando a resolução da primeira questão, nos mostra que o estudante E compreendeu o comando da questão e utilizou uma tabela, para representar a organização dos dados, de modo que esses valores, agora, ficaram bem mais simples de serem identificados. Esse mesmo raciocínio foi seguido pelo estudante B.

Figura 25 – Resolução da primeira questão feita pelo estudante B

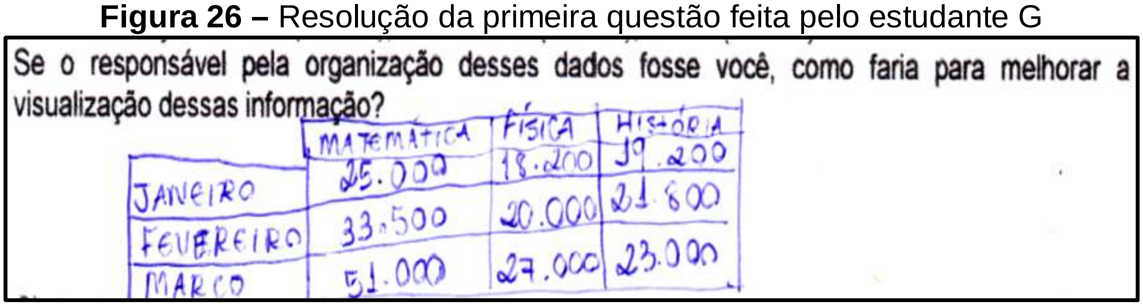

Se o responsável pela organização desses dados fosse você, como faria para melhorar a visualização dessas informação?

	MATEMATICA	FISICA	HISTORIA
Janeiro	(25.000)	(18.200)	(19.200)
Feveraro	(33.500)	(20.000)	(21.800)
MARÇO	(51.000)	(27.000)	(23.000)

Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Outros estudantes utilizaram o mesmo raciocínio acima, pois resolveram a primeira questão organizando os dados em tabelas. Podemos citar, por exemplo o estudante G, na figura 26.

Figura 26 – Resolução da primeira questão feita pelo estudante G


Se o responsável pela organização desses dados fosse você, como faria para melhorar a visualização dessas informação?

	MATEMATICA	FÍSICA	HISTÓRIA
JANEIRO	25.000	18.200	19.200
FEVEREIRO	33.500	20.000	21.800
MARCO	51.000	27.000	23.000

Fonte: Pesquisa de campo (2021)

A primeira questão foi resolvida com êxito pelos os 9 participantes da pesquisa e nenhum deles apresentaram dificuldades nessa questão.

Figura 27 – Resolução da segunda questão feita pelo estudante B

2) A tabela abaixo mostra as notas em Matemática de três estudantes nas quatro avaliações:

	1ª Avaliação	2ª Avaliação	3ª Avaliação	4ª Avaliação
Rafael	8,4	7	8	8,5
João	10	9	9,5	10
Tiago	0	3,5	8,6	7

a) Qual a pontuação de Rafael na 1º Avaliação?

8,4

b) Qual a nota de João na 2º Avaliação?

9

c) Qual a nota de Tiago na 4º Avaliação?

7

d) Qual estudante tem nota 8,5 e em qual avaliação?

Rafael que tirou 8,5 na 4° avaliação

e) Qual o estudante que tem a maior nota? E qual o estudante que tem a menor nota?

João Tem a maior nota e Tiago a menor.

Fonte: Pesquisa de campo (2021)

A resolução da segunda questão mostra que o estudante B conseguiu identificar, na tabela dada, a nota referente a cada um dos estudantes cobrados nos itens a), b) e c). E nos itens d) e e), ele realizou corretamente a identificação das pessoas e de suas notas. Esse mesmo raciocínio foi seguido pelo estudante E.

Figura 28 – Resolução da segunda questão feita pelo estudante E

	1ª Avaliação	2ª Avaliação	3ª Avaliação	4ª Avaliação
Rafael	8,4	7	8	8,5
João	10	9	9,5	10
Tiago	0	3,5	8,6	7

a) Qual a pontuação de Rafael na 1º Avaliação?

8,4

b) Qual a nota de João na 2º Avaliação?

9

c) Qual a nota de Tiago na 4º Avaliação?

7

d) Qual estudante tem nota 8,5 e em qual avaliação?

Rafal na 4 avalicação

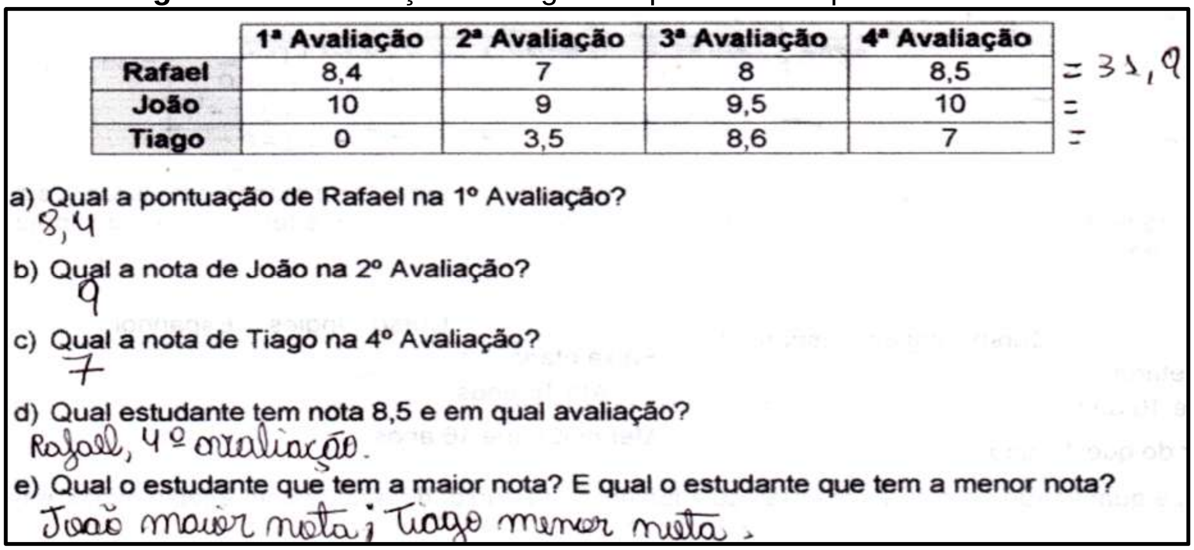
e) Qual o estudante que tem a maior nota? E qual o estudante que tem a menor nota?

joão tem a maior nota e tiago tem a menor nota

Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Assim como ocorreu na primeira questão, na segunda, os estudantes fizeram como os dois anteriores, localizaram os elementos e organizaram na tabela os dados. Só para reforçar citamos mais um exemplo do estudante H, figura 29.

Figura 29 – Resolução da segunda questão feita pelo estudante H



	1ª Avaliação	2ª Avaliação	3ª Avaliação	4ª Avaliação	
Rafael	8,4	7	8	8,5	= 31,9
João	10	9	9,5	10	=
Tiago	0	3,5	8,6	7	=

a) Qual a pontuação de Rafael na 1º Avaliação?
8,4

b) Qual a nota de João na 2º Avaliação?
9

c) Qual a nota de Tiago na 4º Avaliação?
7

d) Qual estudante tem nota 8,5 e em qual avaliação?
Rafael, 4º avaliação.

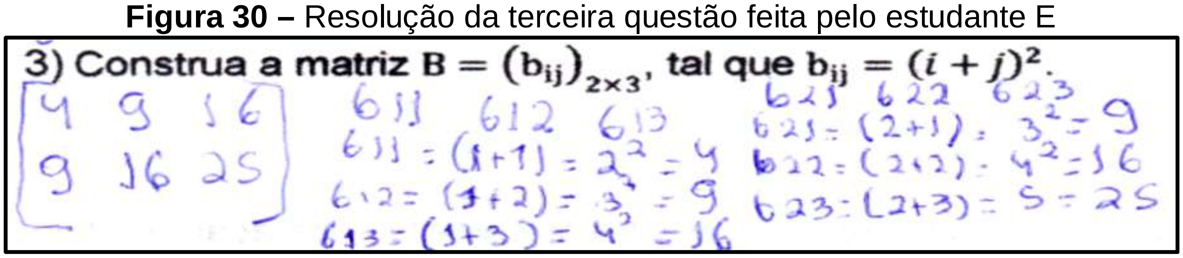
e) Qual o estudante que tem a maior nota? E qual o estudante que tem a menor nota?
João maior nota; Tiago menor nota.

Fonte: Pesquisa de campo (2021)

A segunda questão foi resolvida com êxito pelos os 9 (nove) estudantes participantes da pesquisa e, como ocorreu na primeira atividade, nenhum deles apresentaram dificuldade alguma.

Agora, vamos observar a resolução da terceira questão do teste feita pelos estudantes. Percebemos que os participantes conseguiram escrever uma matriz genérica, seguindo a lei de formação dada. Abaixo apresentamos algumas resoluções realizadas por estudantes de grupos diferentes, mas que chegaram em resultados semelhantes. Segue a resolução feita pelo estudante E.

Figura 30 – Resolução da terceira questão feita pelo estudante E



3) Construa a matriz $B = (b_{ij})_{2\times3}$, tal que $b_{ij} = (i+j)^2$.

$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{bmatrix}$

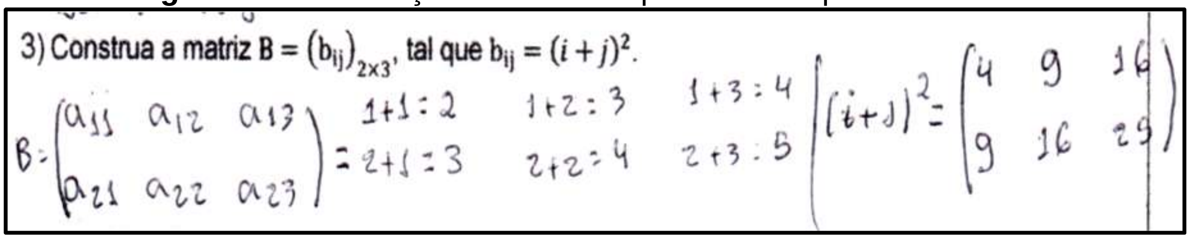
b11 b12 b13 b21 b22 b23

b11 = (1+1) = 2² = 4
b12 = (1+2) = 3² = 9
b13 = (1+3) = 4² = 16
b21 = (2+1) = 3² = 9
b22 = (2+2) = 4² = 16
b23 = (2+3) = 5 = 25

Fonte: Pesquisa de campo (2021)

A resolução feita pelo estudante F foi melhor organizada, em relação ao do estudante anterior, que não construiu a matriz genérica, mas realizou os cálculos corretamente. Já o estudante F construiu a matriz genérica e ainda usou a propriedade para encontrar o quadrado de cada elemento da matriz.

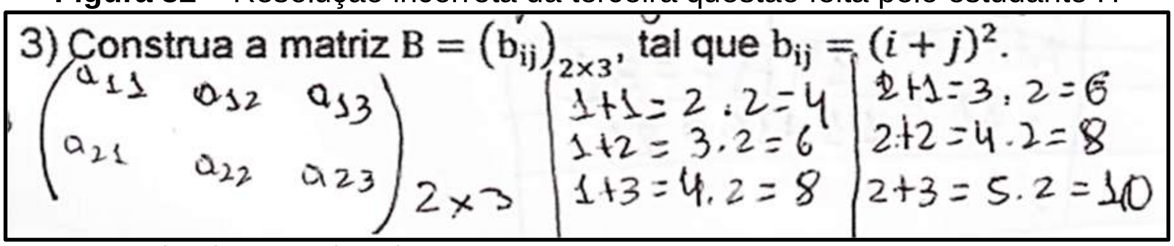
Figura 31 – Resolução da terceira questão feita pelo estudante F



Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Já o participante H resolveu a questão utilizando a multiplicação em vez da potenciação, isso fez com que ele errasse a questão.

Figura 32 – Resolução incorreta da terceira questão feita pelo estudante H

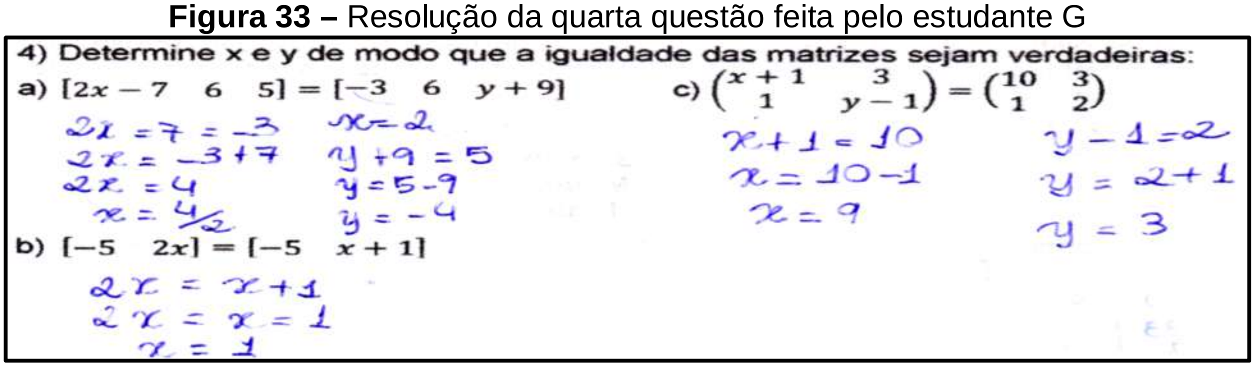


Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Do total, 7 estudantes acertaram a terceira questão sem nenhum erro, 1 resolveu a questão de maneira incorreta e somente 1 participante não conseguiu fazer a questão.

Na resolução da quarta questão percebemos que a ideia de igualdade de matrizes foi bem compreendida pelos participantes. Abaixo apresentamos algumas resoluções feitas por participantes de grupos diferentes que chegaram em resultados semelhantes. Observem a resolução feita pelo estudante G.

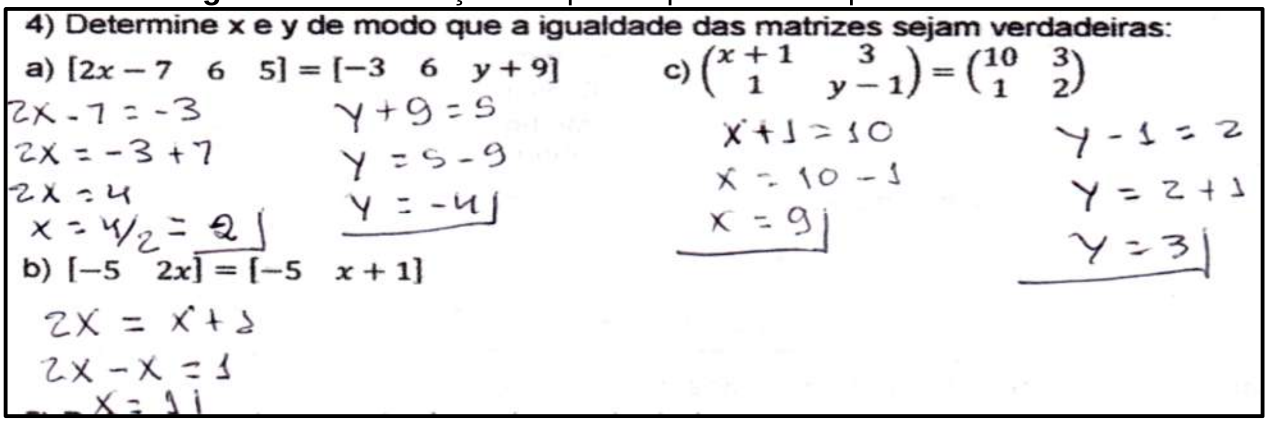
Figura 33 – Resolução da quarta questão feita pelo estudante G



Fonte: Pesquisa de campo (2021)

A resolução feita pelo estudante F é semelhante a resolução do estudante G, isso está presente na figura 34 que nos mostra que essa parte do assunto foi bem compreendida pela maioria dos participantes da pesquisa.

Figura 34 – Resolução da quarta questão feita pelo estudante F



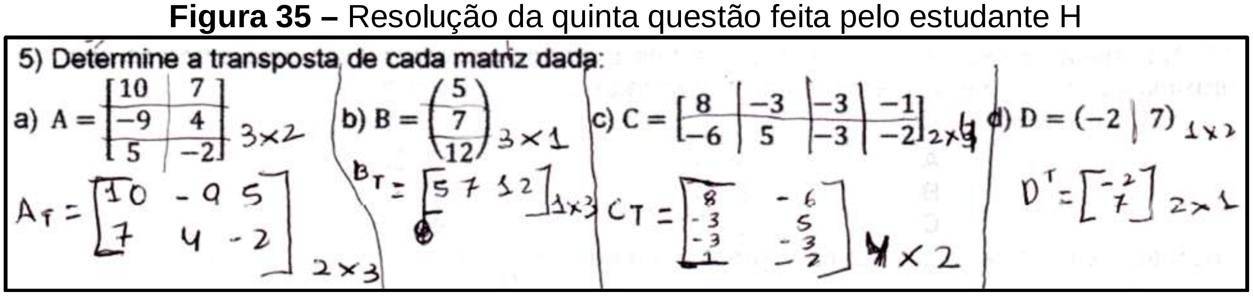
Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Os dois estudantes utilizaram muito bem a resolução com equação, encontram os valores das incógnitas x e y, que ao serem substituídos, mostravam que as matrizes dadas eram iguais.

De um total de 9 participantes, 8 acertaram a quarta questão, sem nenhum erro e somente o estudante B não conseguiu realizar a questão. Esse estudante foi quem menos participou ativamente nas atividades. Isso mostrou que quem não interage, na sala de aula, são justamente os que mais precisam de nossa atenção e ajuda.

Em relação a quinta questão ela foi considerada a mais difícil, tanto que os estudantes no pré – teste a deixaram em branco, pois nunca haviam visto o assunto. Mas no pós – teste todos conseguiram resolvê-la. Abaixo apresentamos a resolução e a maneira usada pelo estudante H para chegar nas transpostas das matrizes dadas.

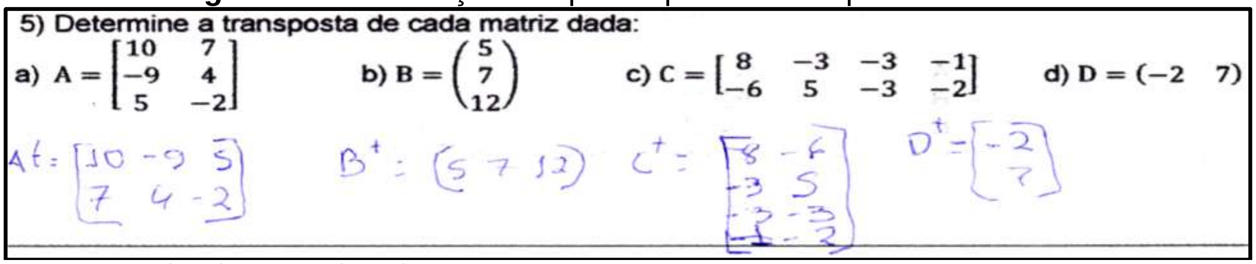
Figura 35 – Resolução da quinta questão feita pelo estudante H



Fonte: Pesquisa de campo (2021)

O estudante H ao fazer riscos verticais, indicando colunas, e riscos horizontais, indicando linhas, deixou claro o raciocínio utilizado por ele. O que nos chamou atenção foi o fato de ter anotado nas matrizes, as ordens e nas matrizes transpostas ele identificou corretamente a mudança que ocorreu ao trocar linhas por colunas.

Figura 36 – Resolução da quinta questão feita pelo estudante E

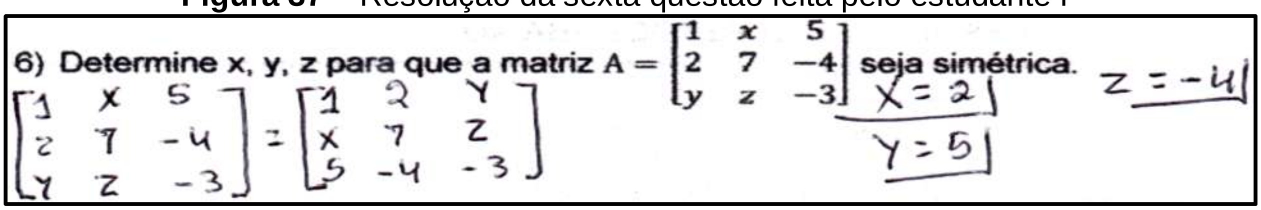


Fonte: Pesquisa de campo (2021)

A resolução feita pelo estudante E foi bem semelhante ao do estudante H. isso está presente na figura 36, onde mostra os resultado que estão sendo comparados.

No caso da sexta questão, ela foi considerada difícil, por isso foi deixada em branco no pré – teste. Mas no pós – teste todos os 9 estudantes conseguiram resolver a questão abaixo. Na sequência apresentamos a resolução e a maneira usada pelo estudante F, para determinar os valores de x, y e z pedido na questão que trata sobre matriz simétrica.

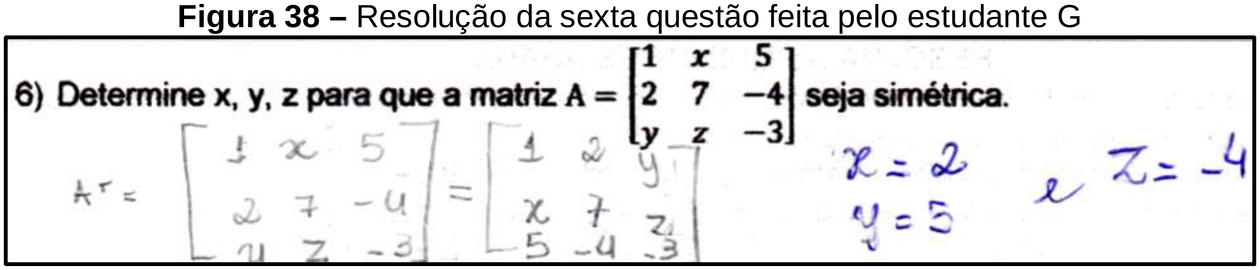
Figura 37 – Resolução da sexta questão feita pelo estudante F



Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Nessa questão os estudantes teriam que determinar a transposta da matriz A, depois igualá-las e por fim, determinar os valores de x, y e z através da igualdade.

Figura 38 – Resolução da sexta questão feita pelo estudante G

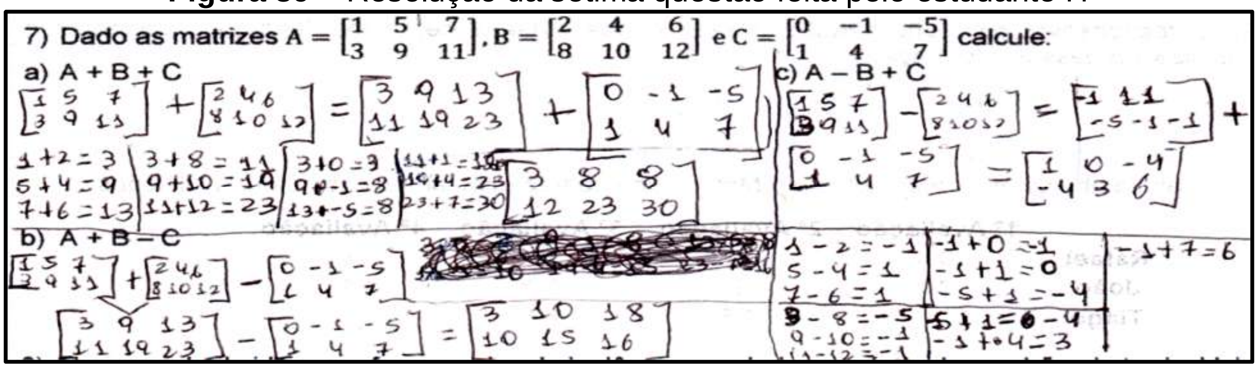


Fonte: Pesquisa de campo (2021)

O procedimento usado pelo estudante F foi o mesmo utilizado pelo o estudante G. Isso confirma que ambos tiveram o mesmo raciocínio para solucionar a questão.

Já a sétima questão foi deixada em branco no pré – teste, pois os estudantes afirmaram desconhecer o assunto. Porém no pós – teste, dos 9 estudantes, 8 conseguiram resolver a questão. Apresentamos abaixo a resolução e a maneira usada pelo estudante H para determinar as adições nos itens da atividade.

Figura 39 – Resolução da sétima questão feita pelo estudante H

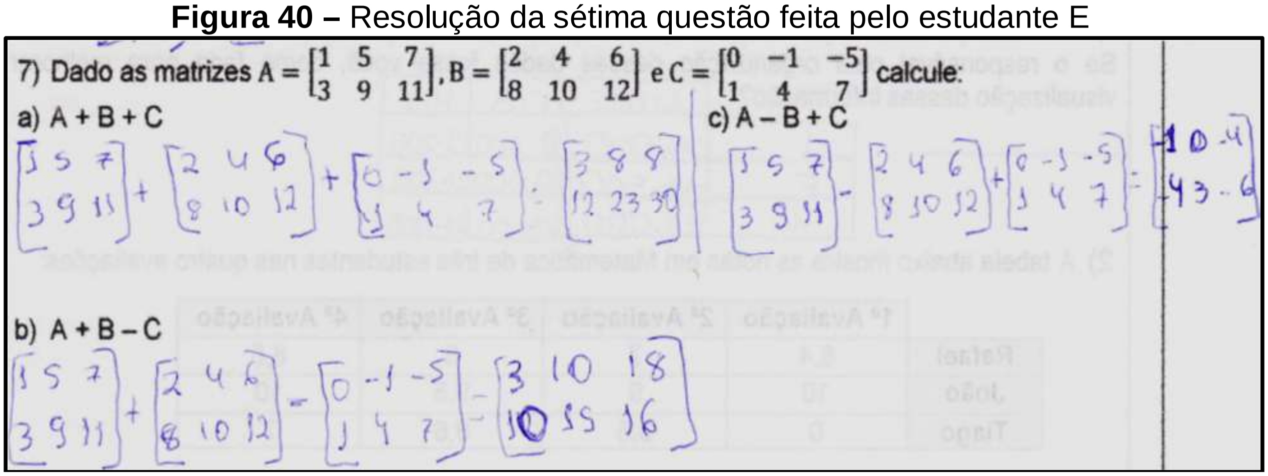


Fonte: Pesquisa de campo (2021)

O estudante H demostrou ter entendido essa parte do assunto de matrizes, além de mostrar habilidade, em fazer as adições com números inteiros, usando corretamente os sinais após as adições.

Desse modo, o estudante E utilizou o mesmo método que o estudante anterior, só que agora, a questão foi realizada encurtando alguns passo, mas o resultado obtido nos mostra que ambos seguiram raciocínios semelhantes. Assim na figura 40 encontra-se o procedimento utilizado pelo estudante para calcular os itens da sétima questão.

Figura 40 – Resolução da sétima questão feita pelo estudante E



Fonte: Pesquisa de campo (2021)

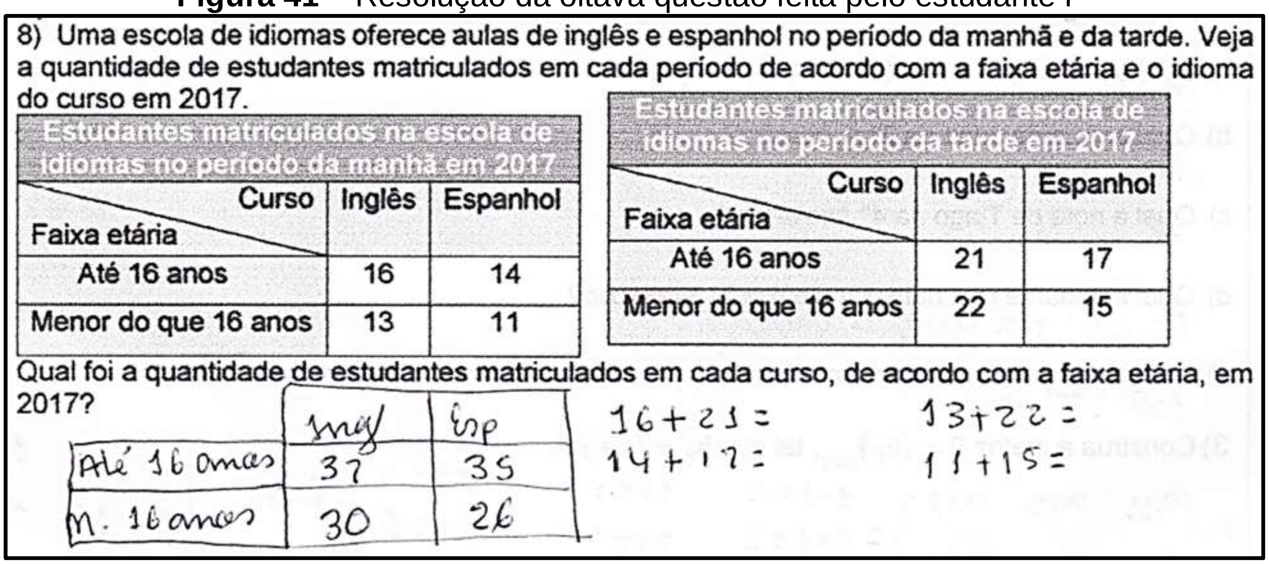
Ressaltamos aqui que somente o estudante B errou essa questão e também a quarta, as quais ele não conseguiu realizar a atividade, pois foi o que menos participou, guardando para si as dúvidas que surgiram no avanço das atividades. Mais uma vez ficou claro para o professor/pesquisador a dificuldade apresentada por este estudante, principalmente nas operações com números inteiros.

Quanto a possíveis dificuldades nas resoluções das atividades utilizando as quatros operações, destacamos também o estudante I que no pré – teste acertou somente uma questão. A diferença foi que o participante I fez bastantes questionamentos e foi muito participativo em todo o processo da aplicação da sequência didática.

Mesmo assim, buscamos insistentemente em ajuda – lós antes e durante a aplicação da sequência didática, no pré – teste e no pós – teste. Algumas lacunas conseguimos preencher, pois o estudante B, no final da aplicação da sequência didática, estava mais à vontade realizando questionamentos sobre os cálculos, se estavam certos ou errados.

Em relação a oitava questão ela foi resolvida por todos os 9 estudantes. Abaixo apresentamos a resolução e a maneira usada pelo estudante F que determinou a quantidade de estudantes matriculados em cada curso.

Figura 41 – Resolução da oitava questão feita pelo estudante F



8) Uma escola de idiomas oferece aulas de inglês e espanhol no período da manhã e da tarde. Veja a quantidade de estudantes matriculados em cada período de acordo com a faixa etária e o idioma do curso em 2017.

Estudantes matriculados na escola de idiomas no período da manhã em 2017		
Faixa etária \ Curso	Inglês	Espanhol
Até 16 anos	16	14
Menor do que 16 anos	13	11

Estudantes matriculados na escola de idiomas no período da tarde em 2017		
Faixa etária \ Curso	Inglês	Espanhol
Até 16 anos	21	17
Menor do que 16 anos	22	15

Qual foi a quantidade de estudantes matriculados em cada curso, de acordo com a faixa etária, em 2017?

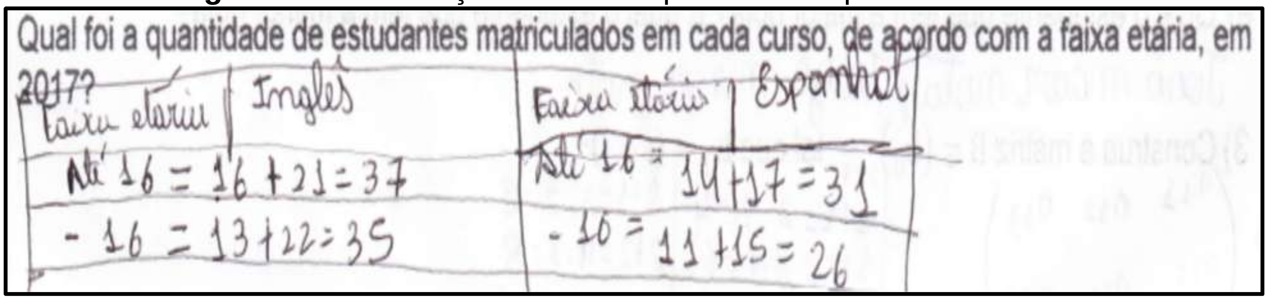
	Ing	Esp
Até 16 anos	37	35
M. 16 anos	30	26

16 + 21 =
14 + 17 =
13 + 22 =
11 + 15 =

Fonte: Pesquisa de campo (2021)

A resolução da oitava questão mostra que o estudante F compreendeu o comando da questão, pois até utilizou uma tabela para representar a organização dos dados por faixa etária, de modo que esses valores, agora, representam a quantidade de estudantes matriculados em cada curso. Esse mesmo raciocínio foi usado pelo estudante H.

Figura 42 – Resolução da oitava questão feita pelo estudante H


Qual foi a quantidade de estudantes matriculados em cada curso, de acordo com a faixa etária, em 2017?

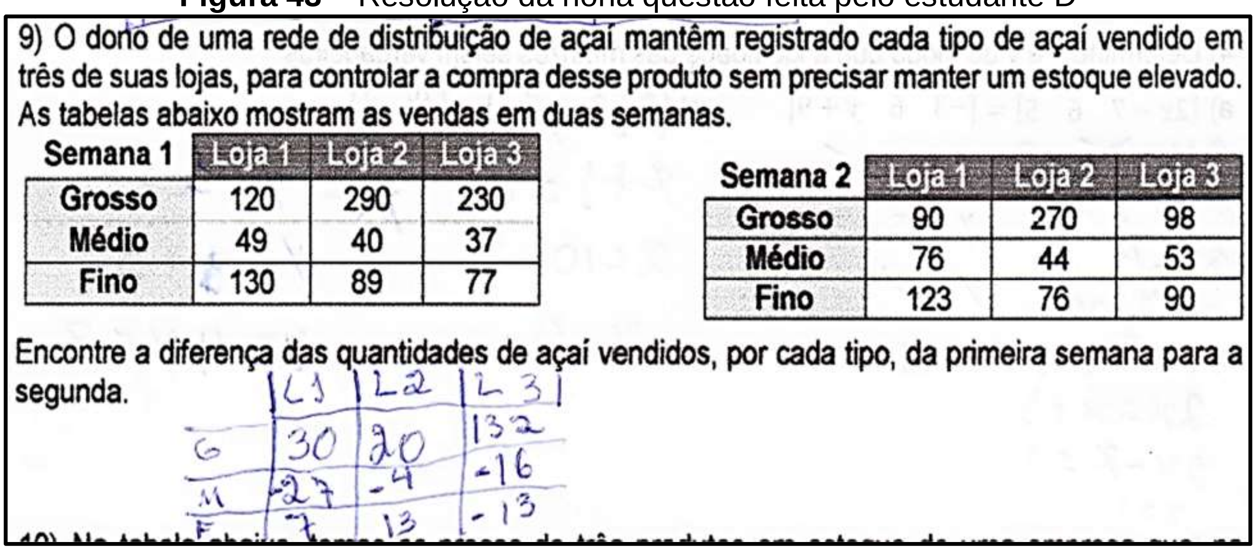
Faixa etária	Inglês	Faixa etária	Espanhol
Até 16 =	16 + 21 = 37	Até 16 =	14 + 17 = 31
- 16 =	13 + 22 = 35	- 16 =	11 + 15 = 26

Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Percebe-se que o estudante H fez os cálculos dentro da tabela que olhando de imediato parece que tem algo errado, mas não, ele apenas organizou a tabela por matéria e não seguiu o modelo dado na questão. Fora essa observação afirmamos que ele compreendeu o comando da questão e que os cálculos estão corretos.

A nona questão, que tratou sobre o assunto de subtração de matrizes, foi a qual ocorreu um maior número de erros, por causa das operações de subtrações que deveriam ser realizadas. Apesar desse entrave, consideramos os resultados dos estudantes bastante validos pelo empenho, dedicação e participação em nosso trabalho. Abaixo encontra-se algumas resoluções realizadas por eles.

Figura 43 – Resolução da nona questão feita pelo estudante D


9) O dono de uma rede de distribuição de açaí mantêm registrado cada tipo de açaí vendido em três de suas lojas, para controlar a compra desse produto sem precisar manter um estoque elevado. As tabelas abaixo mostram as vendas em duas semanas.

Semana 1	Loja 1	Loja 2	Loja 3
Grosso	120	290	230
Médio	49	40	37
Fino	130	89	77

Semana 2	Loja 1	Loja 2	Loja 3
Grosso	90	270	98
Médio	76	44	53
Fino	123	76	90

Encontre a diferença das quantidades de açaí vendidos, por cada tipo, da primeira semana para a segunda.

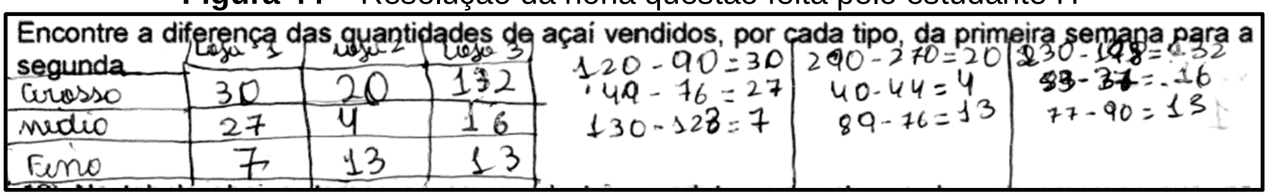
	L1	L2	L3
G	30	20	132
M	-27	-4	-16
F	7	13	-13

Fonte: Pesquisa de campo (2021)

O estudante D não fez os registros dos cálculos dessa questão, apenas os resultados, realizando os procedimentos em uma folha a parte. Na figura a cima percebe-se que o estudante chegou ao resultado esperado, da diferença das quantidades de açaí vendidos e; isso foi muito positivo, pois deixa claro que ele soube operar com número inteiro usando corretamente os sinais.

Porém, somente 2 estudantes resolveram corretamente essa questão, observando no final, o sinal negativo que deveriam acompanhar o resultado do procedimento em questão, porém a ausência desse sinal já tínhamos detectado no decorrer da aplicação do pré teste, pois esse erro voltou a aparecer na questão da sequência didática. A seguir encontra-se mais dois exemplos de resolução, que foram feitas e que contém erros no sinal do resultado da subtração.

Figura 44 – Resolução da nona questão feita pelo estudante H

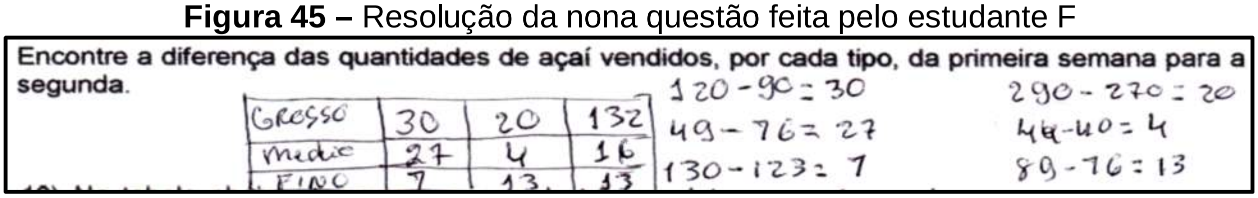


Fonte: Pesquisa de campo (2021)

Na resolução feita pelo estudante H percebe-se que o resultado das subtrações estão corretas, porém faltou apenas o sinal negativo que deveria acompanhar a resolução do problema. O estudante F cometeu os mesmos erros, isso fez com que no final da atividade nós chamássemos a atenção de todos os participantes, para o fato de terem feito os cálculos certos e não atentaram para o uso do sinal.

Esses erros nos mostram o quanto é importante ensinarmos as operações com cuidado e atenção, principalmente quando ocorre a mudança dos conjunto dos números naturais para os dos inteiros, pois é nesse conjunto que alguns resultados das subtrações passam a ser negativas e; isso tem que ser muito bem trabalhado com os estudantes nessa etapa da vida escolar.

Figura 45 – Resolução da nona questão feita pelo estudante F



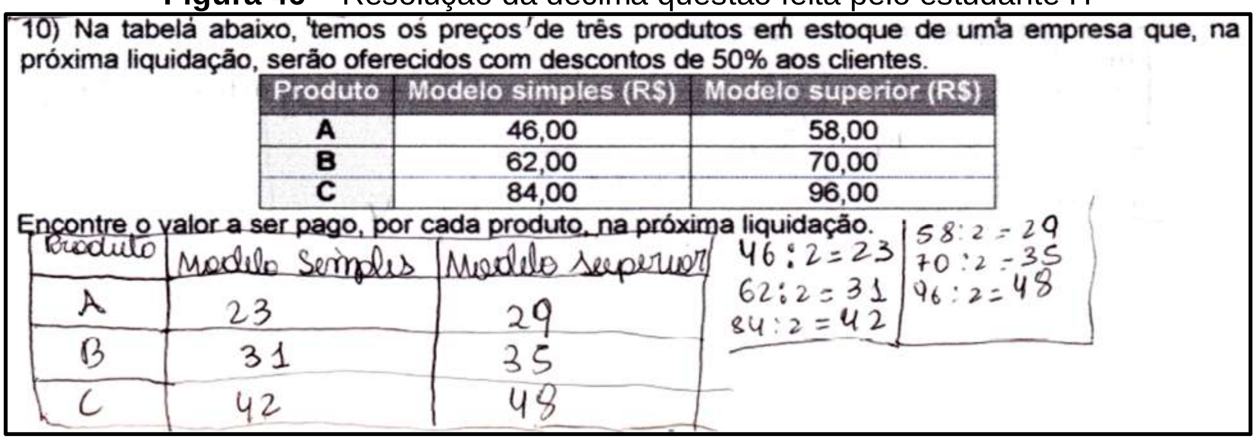
Fonte: Pesquisa de campo (2021)

A resolução realizada pelo estudante F está incorreta, pois os resultados das subtrações 49 – 76 não era 27, mas sim – 27. O resultado de outra subtração, também estava incompleta, pois 40 – 44 não é 4, mas sim – 4.

Enfatizamos que o estudante não passou todos os cálculos no espaço reservado para a questão. Pelos resultados já registrados na tabela, até o momento, percebeu-se que esse estudante realizou os cálculos corretamente, mas usou o sinal trocado, ou seja, em vez de utilizar o sinal de subtração, acabou usando o sinal de adição nos cálculos.

Finalmente chegamos a décima questão que tratou do assunto de multiplicação de um número real por uma matriz. Nós consideramos essa questão difícil e esperávamos que o nível de acertos fossem poucos, porém os estudantes nos surpreenderam e, assim como aconteceu com a maioria das questões, todos resolveram sem cometerem erros. Prova disso apresentamos na figura 46 e 47 algumas resoluções feitas, onde comprova o que estamos afirmando aqui.

Figura 46 – Resolução da décima questão feita pelo estudante H



10) Na tabela abaixo, temos os preços de três produtos em estoque de uma empresa que, na próxima liquidação, serão oferecidos com descontos de 50% aos clientes.

Produto	Modelo simples (R$)	Modelo superior (R$)
A	46,00	58,00
B	62,00	70,00
C	84,00	96,00

Encontre o valor a ser pago, por cada produto, na próxima liquidação.

Produto	Modelo Simples	Modelo superior
A	23	29
B	31	35
C	42	48

46 : 2 = 23
62 : 2 = 31
84 : 2 = 42

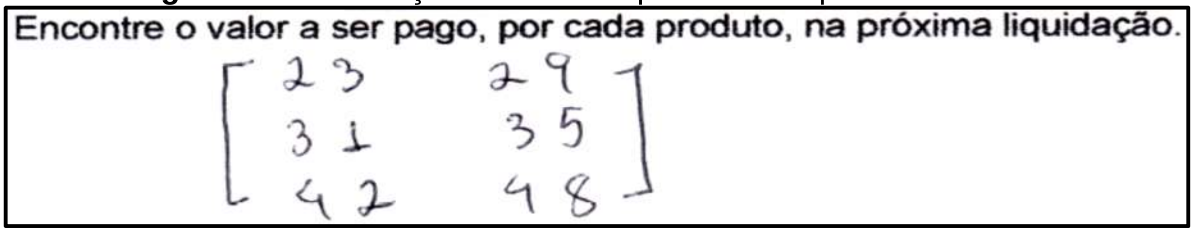
58 : 2 = 29
70 : 2 = 35
96 : 2 = 48

Fonte: Pesquisa de campo (2021)

O estudante H além de resolver corretamente a questão ainda deixou registrado os cálculos feitos, para chegar ao valor que deveria ser pago na próxima liquidação. Ressaltamos que os demais estudantes não tiveram a mesma iniciativa, pois lhes foram oferecidos uma folha que serviu de rascunho, e nela eles fizeram a maioria dos cálculos.

Sendo assim, segue o registro feito pelo estudante B, onde ele colocou apenas o resultado final.

Figura 47 – Resolução da décima questão feita pelo estudante B



Fonte: Pesquisa de campo (2021)

A pesar do estudante B não ter feito o registro dos cálculos, ele se preocupou em representar o resultado final, em forma de matriz e de maneira correta. Como já mencionamos anteriormente, os demais estudantes acertaram essa questão.

6.3. Resultados e análises do pré – teste e pós – teste

Dando continuidade as análises falaremos das questões no pré – teste e pós – teste, onde identificamos o percentual de acertos, erros e questões deixadas em branco. Para isso consideramos as seguintes características, para cada uma dessas categorias, conforme os quadros 52, 53 e 54.

Quadro 52 – Classificação das respostas dos estudantes no Pré-teste e no Pós-teste

CATEGORIAS	CARACTERÍSTICAS
Acerto	Quando o estudante apresentou uma resolução com o resultado correto.
Erro	Quando o estudante apresentou uma resolução com o resultado incorreto.
Branco	Quando o estudante não apresentou resultado.

Fonte: Autoria própria (2021)

O quadro 53 apresenta o resultado do pré – teste que foi realizado pelos estudantes antes da aplicação da sequência didática. É possível identificar nele, que o conhecimento dos assuntos de matrizes ainda não estavam formalizados. Isso ocorreu antes das sessões de ensino conforme cronograma apresentado no quadro 17 localizado na página 181.

Quadro 53 – Resultado do pré - teste

Questão / Estudante	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Acertos/ Estudante (%)
A	**A**	**A**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**A**	**A**	**A**	50
B	**A**	**E**	**E**	**B**	**B**	**B**	**B**	**A**	**E**	**E**	20
C	**B**	**A**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**A**	**A**	**A**	40
D	**A**	**A**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**A**	**A**	**A**	50
E	**A**	**A**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**A**	**A**	**A**	50
F	**B**	**A**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**E**	**A**	**A**	30
G	**B**	**A**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**A**	**E**	**A**	30
H	**E**	**A**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**A**	**E**	**A**	30
I	**E**	**A**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**E**	**B**	**B**	10
Legenda: **A** = acertou; **E** = errou; **B** = branco											

Fonte: Autoria própria (2021)

Como pode ser observado os estudantes ainda não haviam tido contato com o assunto de matrizes, e as questões que eles acertaram deu-se ao fato de que no Ensino Fundamental e no primeiro ano do Ensino Médio são vistos conteúdos que tem afinidades com o assunto de matrizes, como nas construções de gráficos de funções, no ensino de noções de estatística dentre outros.

O próximo quadro trata sobre o resultado do pós – teste, que diferentemente do que aconteceu no pré – teste, os estudantes agora já haviam tido contato com o assunto de matrizes, através das atividades de ensino e das questões de aprofundamento.

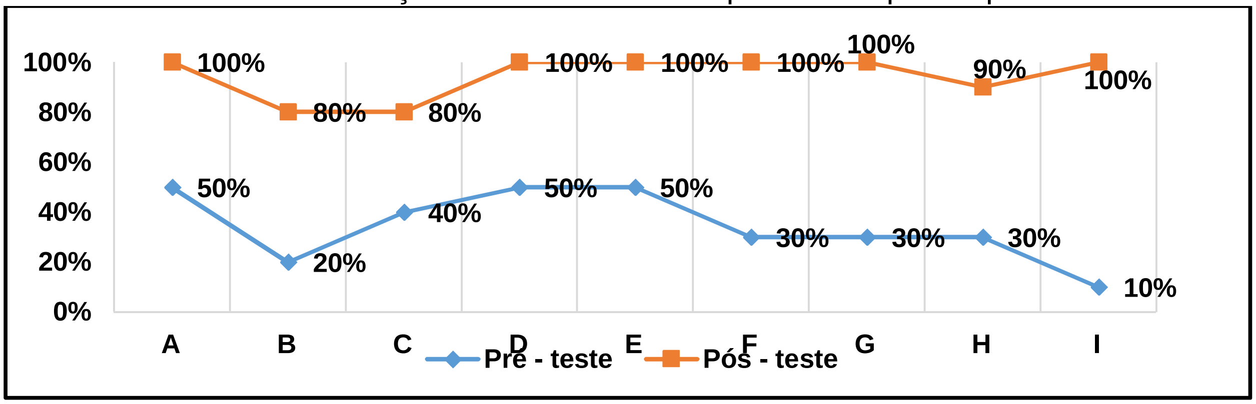
Quadro 54 – Resultado do pós – teste

Questão / Estudante	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Acertos %
A	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	100
B	**A**	**A**	**A**	**B**	**A**	**A**	**E**	**A**	**A**	**A**	80
C	**A**	**A**	**B**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**E**	**A**	80
D	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	100
E	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	100
F	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	100
G	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	100
H	**A**	**A**	**E**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	90
I	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	100
Legenda: **A** = acertou; **E** = errou; **B** = branco											

Fonte: Autoria própria (2021)

Com os dados colhidos no pré – teste e pós – teste construímos um gráfico para uma melhor visualização dos resultados. Ele tem o objetivo de mostrar a evolução dos estudantes, na aplicação da sequência didática.

Gráfico 27 – Evolução dos estudantes do pré – teste para o pós – teste



Fonte: Autoria própria (2021)

O gráfico 27 mostra que os estudantes tiveram sim uma ótima evolução, após terem participado das sessões de ensino sobre o assunto de matrizes. Nos resultados dos testes também ficou perceptível a evolução que os estudantes tiveram e, destacamos o estudante I que saiu de uma margem de acerto de apenas 10%, no pré – teste, para uma porcentagem de 100% de acertos no pós – teste.

A evolução acima é comprovada quando foi realizada a comparação apenas referente a acertos. Fica claro no pré – teste que os estudantes desconheciam o assunto de matrizes, porém, após a aplicação das sessões de ensino, obtivemos um resultado promissor.

O quadro 55 apresenta detalhadamente o desempenho dos estudantes nos testes. Aqui foi levado em consideração a quantidade de questões consideradas erradas e as deixadas em branco.

Quadro 55 – Questões com erros ou deixadas em branco nos testes

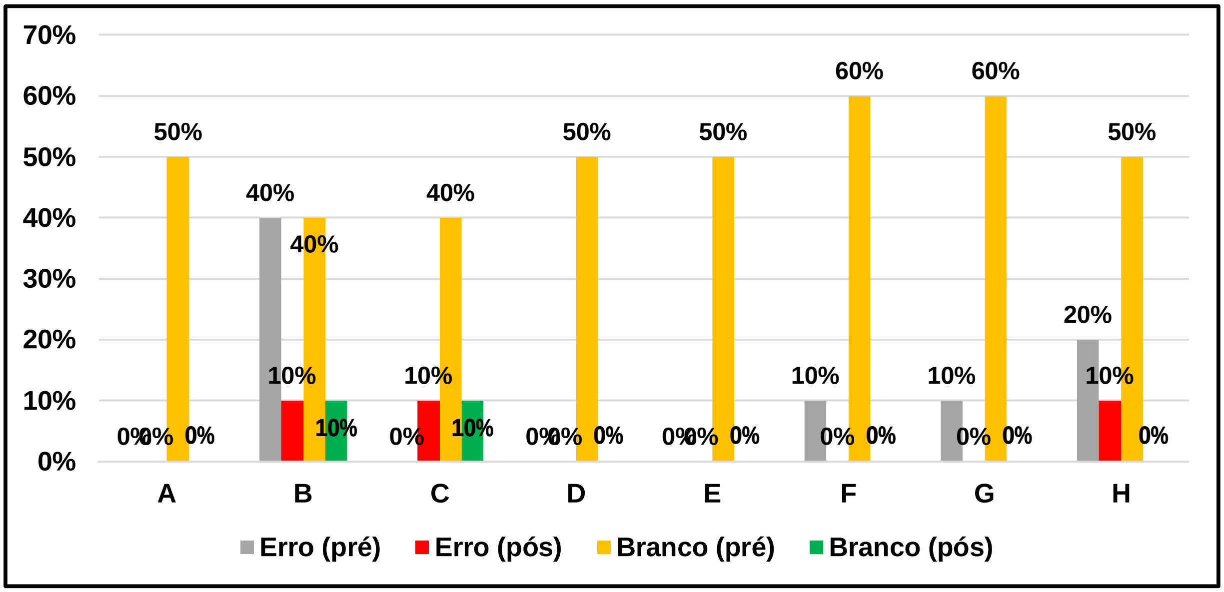
ESTUDANTE	ERRO (%)		BRANCO (%)	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
A	0%	0%	50%	0%
B	40%	10%	40%	10%
C	0%	10%	40%	10%
D	0%	0%	50%	0%

E	**0%**	**0%**	**50%**	**0%**
F	**10%**	**0%**	**60%**	**0%**
G	**10%**	**0%**	**60%**	**0%**
H	**20%**	**10%**	**50%**	**0%**
I	**20%**	**0%**	**70%**	**0%**

Fonte: Autoria própria (2021)

Para termos uma visualização ampla do que aconteceu desde o pré – teste até o pós – teste construímos um gráfico, com o objetivo de mostrar ao leitor o sucesso que houve com a aplicação de nossa sequência didática, pois no gráfico 28 está claro a redução do número de questões que foram deixadas em branco, no pré – teste, para o número de questões deixadas em branco no pós – teste. Também destacamos a diminuição que ocorreu de questões que apresentavam erros, do pré – teste, para o pós – teste.

Gráfico 28 – Questões com erros ou deixadas em branco no pré e pós teste



Fonte: Autoria própria (2021)

No gráfico 28 apresentamos o desempenho que os estudantes tiveram antes e depois da aplicação da sequência didática. Esses resultados nos revelam que apesar de ainda termos estudantes errando ou deixando em branco questões, do pré – teste e do pós – teste, houve uma evolução significadamente positiva, fato este percebido na maioria dos participantes.

6.4. Confronto entre as Análises a *Priori* e *Posteriori* das Atividades

Com a finalidade de validar nossa sequência de ensino, apresentamos a seguir um quadro comparando o que esperávamos que ocorresse com as nossas atividades, ou seja, análise a *priori*, e o que de fato aconteceu nas atividades durante a experimentação, isto é, análise a *posteriori*. Classificamos a validação como "Positiva", se ocorreu o que esperávamos, caso contrário classificamos como "Negativa".

Quadro 56 – Confronto entre as análises a *priori* e a *posteriori* das atividades

	Nº	ANÁLISE A PRIORI	ANÁLISE POSTERIORI	VALIDAÇÃO
ATIVIDADES DA SÊQUÊNCIA DIDÁTICA	1	A situação do texto indica que se fez necessário à organização dos dados em tabelas. Esperamos que através da observação desses dados e com algumas intermediações do professor, os estudantes sejam induzidos a construir uma tabela que facilitará a organização, a busca e a visualização dos dados, agora organizados. Essa situação tende a levar intuitivamente o estudante a trabalhar com matrizes, percebendo que é mais viável trabalhar com dados organizados em tabelas do que como estavam anteriormente.	Inicialmente, por conta da inexperiência neste tipo de atividade, os estudantes demonstraram dificuldade em identificar que os dados necessitavam ser organizados em uma tabela e além disso, precisavam ser enumerados/organizados por meses e por regiões. Porém a maioria dos participantes proporam a criação de uma tabela que melhorou a organização e localização dos dados.	Positiva
	2	Os estudantes possivelmente terão um pouco de dificuldades nesta atividade, pois não estavam acostumados a localizar elementos em tabelas e esperávamos que eles conseguissem localizar, nas matrizes, os elementos solicitados, pelos conhecimentos adquiridos na atividade 1. Identificando assim linhas e colunas, com possibilidade,	Com o objetivo de descobrir uma maneira de descrever elementos em uma matriz, os estudantes tiveram dificuldades na localização dos elementos da primeira matriz. A maior barreira ocorreu no preenchimento do quadro e na localização dos elementos das matrizes, pois os estudantes não sabiam destaca-	Positiva

		agora, de localizar qualquer elemento em uma matriz. Ao nosso ver, esta atividade possibilitará a reflexão sobre um padrão e com o reforço do professor, esperamos que o estudante consiga perceber algo próximo do padrão de localização (a_{ij})que usualmente, utilizamos ao ensinar matrizes.	los. Mas, bastou que eles destacassem os elementos da primeira matriz para preenchessem a tabela toda. Porém, mesmo com a existência de dificuldades que foram superadas, uma vez que somente nesta atividade um único grupo apresentou características parcialmente válidas em suas observações e conclusões.	
	3	Os estudantes possivelmente não terão dificuldade nesta atividade, pois ao fazerem a contagem do número de linhas e de colunas, esperamos que eles relacionassem essa contagem com o número de elementos da matriz e assim determinar, intuitivamente, o padrão m × n, que será chamado de ordem da matriz. O professor deverá intervir caso alguma dúvida surja, sempre apontando caminhos que leve o estudante a fazer suas observações e conclusões.	Esta atividade objetivava descobrir a relação que existe entre o número de elementos da matriz e a quantidade de linhas e colunas. Mesmo os estudantes tendo pouca experiência com esse tipo de atividade, eles nos surpreenderam, pois percebemos não houve dificuldades durante o desenvolvimento, uma vez que os grupos conseguiram responder e identificar a multiplicação como sendo a operação oculta, para se obter o número de elementos de qualquer matriz. As características para essa atividade foram consideradas todas válidas, o que a tornou válida.	Positiva

	4	Nesta atividade os estudantes deverão perceber que para duas matrizes serem iguais elas devem ter a mesma ordem e seus elementos correspondentes têm que ser iguais. A atividade 3 será importantíssima, pois o participante identificará as matrizes pelas ordens. Pode ocorrer algum equívoco ao compararem a matriz C com as matrizes D e G, visto que estas últimas possuem a mesma ordem e a matriz C, ordem inversa. Por isso o professor deverá estar atento caso isso ocorra.	Os estudantes apresentaram algumas dificuldades no princípio, no que se refere ao preenchimento do quadro e em responder à questão proposta. Mas, as análises feitas nas observações e conclusões demonstraram que mesmo existindo dificuldades durante o desenvolvimento da atividade, elas foram superadas, pois todas as equipes conseguiram chegar à conclusão de como determinar a igualdade de matrizes.	Positiva
	5	Com as indicações das características das matrizes descritas na primeira coluna da tabela e com os exemplos mostrados na segunda coluna, os estudantes serão levados a dar um nome específico a cada uma das matrizes com características especiais. Na terceira coluna os estudantes terão possibilidade de nomeá-las, podendo contar com o auxílio do professor para direcioná-los. Dessa forma os pesquisados irão criar familiaridade com os nomes usados na representação de Matrizes.	Os estudantes não apresentaram dificuldades e conseguiram rapidamente definir o nome das matrizes observando as características descritas para cada tipo, os exemplos e alguns nomes dados. O objetivo aqui foi alcançado e os participantes conseguiram identificar os tipos das matrizes de acordo com suas particularidades, que foram muito importantes para o entendimento das demais atividades.	Positiva
	6	Os estudantes, com base em atividades de aprofundamento anteriores, conseguirão realizar sem muita dificuldade está tarefa.	A atividade teve por objetivo conceitua matriz transposta. Porém, os estudantes não apresentaram dificuldades na	Positiva

		Acreditamos que a atividades antes vista darão o direcionamento, para que os estudantes façam a transformação de uma matriz linha (matriz A) para uma matriz coluna (matriz D). Havendo alguma dúvida o professor deverá intervir apontando caminhos, pois esta atividade é pré-requisito para as seguintes, portanto tem que ser bem compreendida.	execução, nem no preenchimento do quadro, nem na observação e nem na conclusão, levando assim um tempo inferior ao planejado para a realização da atividade, como havíamos previsto. Os participantes ao realizarem a transposta da primeira matriz, fizeram as demais de modo intuitivo e todas as características observadas foram consideradas válidas.	
	7	Com o conhecimento adquirido na atividade 6, os estudantes não terão dificuldades na atividade 7, eles terão que perceber a as regularidades que ocorrerão, pois ao realizarem a transposta, das matrizes dadas, observarão que as matrizes resultantes não mudaram em nada. Neste momento o professor irá fazer a formalização de matriz simétrica que é o objetivo dessa atividade.	Nessa atividade percebemos que o conhecimento adquirido na atividade 6 foi fundamental para que os estudantes não apresentassem nenhuma dificuldade na atividade 7. Isso se deu devido esses grupos conseguiram identificar que as matriz transpostas agora são matriz simétrica. Também destacamos que as características feitas nas análises foram válidas e isso mostra a compreensão que os grupos tiveram, após preencherem a tabela com as transpostas de cada matriz dada.	Positiva
	8	Esperamos que os estudantes resolvam o problema sem	Os estudantes conseguiram resolver o problema sem	Positiva

		dificuldade, utilizando a técnica da adição, ou seja, somando os respectivos valores das tabelas referentes aos meses de janeiro e fevereiro das vendas de dois veículos 0 km. Assim, cremos que naturalmente, a ideia da soma de matrizes, vá ficando claro e seja de imediato percebido pelos estudantes e com isso, eles descobrirão o padrão que devem seguir.	apresentar dificuldades, como havíamos previsto, eles conseguiram montar uma tabela que representou a quantidade total de veículos vendidos nos dois meses. Verificamos que as respostas dadas na questão, nas observações e conclusões, apresentaram características válidas e isso facilitou o entendimento de como obter a adição de matrizes, seguindo os procedimentos proposto para essa atividade.	
	9	Os estudantes não terão dificuldades em realizar esta atividade, por isso espera-se que ela seja feita muito mais rápido do que a anterior. A matriz nula que será a matriz solução, já foi apresentada aos estudantes na atividade 5. Aguardamos que eles façam a relação com esse conhecimento adquirido, porém o professor estará sempre atento para direcioná-los sempre que for solicitado.	Com o objetivo de conceituar matriz oposta afirmamos que os estudantes, em nenhum momento apresentaram qualquer dificuldade e ao serem respondidas a questão motivadora, feita as observações e conclusões percebemos que o desenvolvimento deles ocorreu de forma intuitiva e segura, uma vez que esses grupos conseguiram identificar que a adição de matrizes opostas têm como resultado a matriz nula. Mas uma vez destacamos que as características feitas nas análises foram válidas e não ocorreu análises parcialmente válidas ou invalidas.	Positiva

	10	A partir desta atividade, esperamos que os estudantes desenvolvam os cálculos pedidos, multiplicando cada elemento da matriz pelo valor que é dado na questão, ou que somem o número de vezes a matriz dada, percebendo que a matriz resultante é uma matriz de mesma ordem; e que cada elemento da matriz é igual a duas vezes os correspondentes da matriz dada. Assim os estudantes se aproximaram da definição de multiplicação de matrizes por um número real que é o nosso objetivo da atividade.	Os estudantes conseguiram desenvolver um bom nível de linguagem matemática em suas conclusões registradas. A análise das observações e conclusões feitas pelas equipes mostraram que nessa atividade não houve dificuldades no entendimento, pois todas as equipes conseguiram alcançar o objetivo e assim, determinaram como fazer para obterem a multiplicação de um número real por uma matriz qualquer.	Positiva

Fonte: Autoria própria (2021)

Desse modo, como podemos observar, por meio das respectivas análises a *priori* e a *posteriori* expressas no quadro 56, esperávamos validações positivas e o que havíamos previsto ocorreu.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de analisar e refletir sobre as potencialidades de uma sequência didática desenvolvida para o ensino de Matrizes, de modo a favorecer a construção do conhecimento de estudantes do 2ª ano do Ensino Médio, contribuindo para a melhoria do desempenho e rendimento deles em relação ao assunto.

E, para alcançarmos esse objetivo optamos pela Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Iniciamos fazendo um levantamento de bases teóricas que deram sustentabilidade a nossa pesquisa e; dentre elas destacamos a Teoria das Situações Didáticas, em que nela consta uma teoria de aprendizagem, onde o conhecimento matemático não inclui somente conceitos, mas representações que validam novas ideias.

Na Engenharia Didática usamos os trabalhos realizados por Artigue (1996). Desse modo, desenvolvemos a primeira fase da pesquisa, denominada de análises prévias sobre o ensino de matrizes, onde buscamos nos documentos oficiais, como PCN e BNCC, aspectos curriculares sobre o tratamento que esses documentos dão ao nosso conteúdo matemático, em estudo e orientações sobre o ensino do assunto.

Sobre a opinião dos estudantes que estudam no lócus pesquisado, no que diz respeito ao processo de ensino e aprendizagem de Matrizes, percebemos que a maioria dos docentes ministram suas aulas de forma expositiva, apresentando definições, exemplos e propondo questões do livro didático, para serem resolvidas pelos estudantes. Esse levantamento também nos revelou que os conhecimentos prévios dos estudantes poucas vezes ou nunca são levados em consideração durante as aulas.

Na revisão de estudos averiguamos que o ensino apresenta a necessidade dos professores de matemática inovarem suas práticas através de metodologias ativas, mesmo que demandem tempo para o preparo e efetivação, mas que o resultado no final, seja positivos, frutos dessas metodologias, as quais colocam os estudantes no centro do seu aprendizado e que esse aprendizado faça com que ele se sintam inseridos no processo de aprendizagem ao qual estão submetidos.

Também apresentamos os aspectos históricos sobre o tema, onde destacamos o diagrama metodológico que representa fielmente a evolução do assunto de matrizes, com destaque para Arthur Cayley que utilizou e desenvolveu o assunto. Afirmamos que atualmente são utilizadas, nos livros didáticos, as mesmas definições que Arthur Cayley usou em seu artigo publicado em 1958.

A inserção desse conteúdo nos livros didáticos aqui no Brasil ocorreu de 1930 a 1980, devido à influência do Movimento da Matemática Moderna (MMM), o qual foi fundamental para que esse assunto deixasse de ser tratado como pré requisito, no ensino de outros conteúdos como Sistema Lineares e Determinantes e que passou a ter um tópico específico para ele. Na época esse fato impulsionou o assunto de matrizes, e isso contribuiu para o avanço no estudo de diversas áreas como a Engenharia, a Física, a Química, na Computação Gráfica, dentre outras.

Outro ponto que destacamos foi sobre o levantamento do uso das matrizes nos editais das escolas militares, esse levantamento nos mostraram o destaque que são dadas ao conteúdo nesses editais, os quais, para nós, representam uma forma de excluir os estudantes da escola pública desses certames, pois na maioria das vezes a eles não são ensinado o assunto e, isso é uma das causas que faz com que eles não consigam o acesso às escolas militares.

Percebemos também que a BNCC não destaca o assunto de matrizes da mesma forma que ocorreu de 1930 a 1980 e, isso é um outro fator que contribui para a ocorrência de exclusão dos participantes desses processos seletivos. O correto seria que as escolas militares adotassem a BNCC ou que fosse inseridas as Matrizes como conteúdo obrigatório nesse documento.

Na segunda fase, da concepções e análise a priori, realizamos estudos sobre o ensino por atividade e destacamos os trabalhos de Sá (2009, 2019) que contribuíram para a construção de nossa sequência didática baseada na metodologia de ensino, com as devidas análises a priori das atividades que a compõe.

Para avaliar os efeitos da sequência didática, a partir do levantamento feito nas análises prévias, elaboramos uma sequência didática contendo 10 atividades para desenvolver o conteúdo de Matrizes, nas quais buscamos trabalhar a definição de matriz, localização de seus elementos, números de elementos das matrizes, igualdades de matrizes, matriz transposta, matriz simétrica, adição de matrizes, matriz oposta e a multiplicação de um número real por uma matriz.

A maioria dessas atividades foram conceituais e por esse motivo trabalhamos mais com as observações dos estudantes, as quais foram fundamentais, para que eles percebessem os conceitos que a atividade queria ensinar e por meio de observações chegassem a suas próprias conclusões.

A terceira etapa da pesquisa ocorreu com a experimentação, composta pela a aplicação da sequência didática, do questionário socioeconômico, do preenchimento de fichas de observação referentes as atividades e da aplicação do pré-teste e pós-teste. Ressaltamos ainda do grande desafio que tivemos de enfrentar, pois devido a Pandemia da COVID 19, uma série de restrições nos foram imputada, porém, conseguimos nos adequar a todas e, assim realizamos com grande êxito esta etapa da pesquisa, tomando todos os cuidados com a saúde dos participantes, pois no momento da pesquisa o contagio no município de Abaetetuba estava baixo, mostrado no gráfico 13. Isso nos deu segurança para realizarmos nosso trabalho.

Assim, aplicamos a sequência didática a nove estudantes de uma escola pública da rede estadual de ensino da cidade de Abaetetuba, interior do estado do Pará. A interação entre o professor/pesquisador e os estudantes ocorridas durante as seções de ensino, foram fundamentais para que alcançássemos os nossos objetivos, pois na execução de cada atividade, estávamos sempre atentos e acompanhando, orientando e dialogando com os participantes, no processo de construção dos conceitos trabalhados em cada atividade.

Na quarta e última etapa da pesquisa que envolveu a análise a *posteriori* e a validação, apresentamos os resultados do experimento, confrontando com dados previamente obtidos, e fazendo assim um confronto das análises a *priori* e a *posteriori*.

Para tanto, as técnicas de análises compreenderam algumas etapas, as quais envolvem a comparação do percentual de questões deixadas em branco, de erros e acertos obtidas no pré-teste e pós-teste, e posterior análise estatística de todos os dados obtidos, objetivando verificar se as conclusões foram favoráveis, ou seja, se o experimento obteve êxito.

Na realização da primeira a terceira atividade percebemos que os estudantes tiveram dificuldades, por não estarem acostumados com o método de ensino, porém no decorrer das demais esses obstáculos foram vencidos, pois os estudantes comentaram sobre o desejo das aulas de matemática ocorrem da maneira trabalhada por nós, pois dessa forma eles estavam conseguindo entender e resolver as atividades.

Afirmamos que a eficiência da proposta dependeu diretamente da participação ativa entre professor e estudantes na realização das atividades que compõem a sequência didática. Neste sentido destacamos o alto grau de envolvimento que os participantes do experimento tiveram, tanto nos momentos de discussão e socialização em grupo, quanto nos de interação com o professor desde a primeira até a última atividade.

Com isso, podemos socializar os momentos das conclusões de cada grupo que nos permitiram identificar os indícios de aprendizagem dos conceitos construídos pelos estudantes em cada atividade. Assim, percebemos que todos os grupos conseguiram chegar a conclusões muito próximas umas das outras e que o ensino por atividade contribuiu para o sucesso do experimento.

As notas dos estudantes no pós – teste foram bastantes melhores que as do pré – teste, as análises das observações e conclusões dos estudantes sobre as atividades, nos fizeram constatar estatisticamente esses dados em quadros e em gráficos que demonstraram o sucesso do experimento. Isso nos fez perceber como o uso de uma “nova” metodologia pode mudar a compreensão do assunto de matrizes pelos estudantes, criando novas possibilidades de compreendera-los por diversos olhares.

Sobre esta pesquisa referente ao ensino de matrizes, acreditamos que abrirá espaço para novas descobertas sobre a temática, cremos na continuidade deste estudo sobre a mesma metodologia de ensino, acrescentada de novos instrumentos como aplicativos e softwares que facilitem a compreensão e que tenha como objetivo melhorar o ensino.

Afirmamos que normalmente, os estudantes constroem as argumentações baseando-se ou no senso comum, ou nos fatos históricos dos quais tem notícias, ou nos dados apresentados nos meios de comunicação. Assim, fazem uso, considerável de expressões temporais, dados estatísticos, apropriação de falas de terceiros, de modo a construir uma argumentação considerada por eles eficiente e com valor de verdade. Enfim, os efeitos da sequência didática foram positivos e mostraram avanços expressivos nos estudantes, estes evidenciados visivelmente nas observações e conclusões das atividades e notas do pós – teste.

E por meio deste trabalho, esperamos contribuir para facilitar a prática docente no que diz respeito ao planejamento e execução de aulas sobre o assunto de Matrizes tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior. Para isso, produzimos um produto educacional, oriundo deste, com a intenção de contribuir com a educação do nosso Estado, com o objetivo de termos mais uma alternativa de ensinar o conteúdo.

Para nós, o verdadeiro ensino não consiste apenas na transferência de conhecimentos de uma cabeça para outra. Ensinar é fazer pensar, é estimular para a identificação e resolução de problemas; é ajudar a criar novos hábitos de pensamento e de ação. O professor deve ser um facilitador interativo e não um transmissor unilateral de informações que para os estudantes, muitas vezes, não tem sentido algum.

8. REFERÊNCIAS

ABAETETUBA, Secretaria Municipal de Saúde. **BOLETIM CORONAVÍRUS (COVID-19) ABAETETUBA**. SESMAB, 2021. Disponível em: <https://www.abaetetuba.pa.gov.br/campanha.php?id=1>. Acesso em: 23 abr. 2021

ANDRADE, Maria Margarida de. **Introdução à metodologia do trabalho científico.** 6ª ed. São Paulo: Atlas, 2003.

ANGELO, C. L. **Uma leitura das falas de alunos do ensino fundamental sobre a aula de Matemática**. 2012. 160 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro- SP, 2012. Belo Horizonte. UNIBH, 2007. p. 1 – 11. Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/**anais**/ix_enem/Html/posteres.html> Acesso em: 12 jun. 2019.

ARTIGUE, Michelle. Engenharia didáctica. In: BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193 – 217.

AVILA, Tiago Pereira de. **O conhecimento das operações aritméticas e a aprendizagem de matrizes no ensino médio**: análise de interferências. São Paulo: UNICSUL, 2013. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=790492> Acesso em: 05 jun. 2019.

BALESTRI, Rodrigo. **Matemática:** interação e tecnologia, volume 2. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016.

BERNARDES, Aline. ROQUE, Tatiana. **História da Noção de Matriz**: Uma releitura sob a luz de novas abordagens historiográficas. Rio de Janeiro: RBHM,2016. Disponível em: <http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-%20vol.16,no31/1%20-%20Aline%20Bernardes.pdf> Acesso em: 20 ago. 2020.

BOYER, Carl. B. MERZBACK, Uta. C. **História da Matemática**. Trad. Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

BORBA, Elizandro Max. **Uma proposta para o ensino de matrizes com o apoio de tecnologia**. Porto Alegre: UFRS, 2011. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/31617/000784022.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 26 fev. 2019.

BORGES, Thiago da Silva. **A metodologia de resolução de problemas no ensino de matrizes no ensino médio**. Rio de Janeiro: UERJ, 2018. Disponível em:<https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6883628>. Acesso em: 05 jun. 2019.

BRANDÃO, Pâmela Catarina de Sousa. **Estudo de matrizes de maneira significativa**. Três Lagoas: UFMS, 2018. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160360344>. Acesso em: 30 abr. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular.** Brasília, DF, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site.pdf>. Acesso em: 19 maio 2019.

BRASIL. Constituição (1988). **Constituição da República Federativa do Brasil** [recurso eletrônico]. Brasília, DF: Supremo Tribunal Federal, Secretaria de Documentação, 2018. p. 160. Disponível em: <https://www.stf.jus.br/arquivo/cms/legislacaoConstituicao/anexo/CF.pdf>. Acesso em: 10 mai. 2019.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP nº 02/2015, de 1º de julho de 2015. **Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada**. Brasília, Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, seção 1, n. 124, p. 8-12, 02 de julho de 2015a. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/agosto-2017-pdf/70431-res-cne-cp-002-03072015-pdf/file>. Acesso em: 10 jul. 2019.

BRASIL. Ministério da Defesa. **Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx).** Belém: CAF, 2020. Disponível em: <http://www.espcex.eb.mil.br/downloads/Edital%20EsPCEx%202020%20-%20internet.pdf> Acesso em: 30 jun. 2020.

BRASIL. IBGE. **Estatística de Gênero**: Indicadores Sociais das Mulheres no Brasil, 2018. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101551_informativo.pdf>. Acesso em: 07 maio 2019.

BRASIL. **Estatuto da Criança e do Adolescente**. Lei 8.069/90, de 13 de julho de 1990. Brasília, DF: Presidência da República, Casa Civil, 1990. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l8069.htm>. Acesso em: 12 maio 2019.

BRASIL. Ministério da Defesa. **Exame de Admissão.** Belém: EEAR, 2020. Disponível em: <https://ingresso.eear.aer.mil.br/SOO/editais/CFS%201%202021/ie.pdf?concurso=CFS%201%202021> Acesso em: 30 jun. 2020.

BRASIL. **Lei de diretrizes e bases da educação nacional (LDB)**. Brasília: Senado Federal, Coordenação de Edições Técnicas, 2017. p. 10 e 16. Disponível em: <http://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/529732/lei_de_diretrizes_e_bases_1ed.pdf>. Acesso em: 11 maio 2019.

BRASIL. Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). **Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: INEP/MEC. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf> Acesso em: 12 jun. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações curriculares para o ensino médio**: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2006. v.2.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto nacional pela alfabetização na idade certa**: alfabetização em foco: projetos didáticos e sequências didáticas em diálogo com os diferentes componentes curriculares: ano 03, unidade 06 / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. - Brasília: MEC, SEB, 2012. 47 p. Disponível em: <http://www.piraquara.pr.gov.br/aprefeitura/secretariaseorgaos/educacao/uploadAddress/Unidade_06_Ano_03%5B3658%5D.pdf>. Acesso em: 24 fev. 2020.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1997. p.148.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais** (Ensino Médio), 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 15 jul. 2020.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCNs+ Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, 2002. p.144.

BRASIL, Ministério da Educação. **Plano de Desenvolvimento da Educação/ Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB):** PDE/SAEB: Prova Brasil: ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC/INEP, 2008. 127 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/saeb_matriz2.pdf> Acesso em: 12 fev. 2020.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. **Press kit SAEB 2017**. Brasília, DF, 2018a. Disponível em:<http://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2018/documentos/presskit_saeb2017.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2019.

BRASIL. Ministério da Defesa. **Processo Seletivo de Admissão às Escolas de Formação de Oficiais da Marinha Mercante (PS EFOMM/2021).** Belém: CIABA, 2020.

Disponível em: <https://www.marinha.mil.br/ciaga/efommadmissao> Acesso em: 30 jun. 2020.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução aos estudos das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BRUM, W. P. **Crise no ensino de matemática:** amplificadores que potencializam o fracasso da aprendizagem. São Paulo: Clube dos Autores, 2013.

CABRAL, Natanael Freitas. **O papel das interações professor-aluno na construção da solução lógico-aritmética otimizada de um jogo com regras**. 2004. 151 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - UFPA. Disponível em: <http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/1760/1/Dissertacao_PapelInteracoesProfessoraluno.pdf> Acesso em: 12 mar. 2020.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas**: estrutura e elaboração. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

CABRAL, Natanael Freitas. COSTA, Acylena Coelho. **Sequências didáticas**: olhares teóricos e construção. Org.: Costa, Acylena Coelho. MATOS, Fernando Cardoso de. SILVA, Reginaldo da. Belém: XII EPAEM, 2019, 129 p. (Coleção VI). ISBN 978-65-5076-009-0

CARDOSO, Jorge Prazeres. **Decomposição de Matrizes**: Uma proposta para calcular o produto matricial no ensino médio. Macapá: UNIFAP, 2014. p. 14. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2311803>. Acesso em: 05 jun. 2019.

CAYLEY, A. 1858. **A memoir on the theory of matrices**[24]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*[25]*.* 148, 17 – 37.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaios Temáticos**: História e matemática em sala de aula. Belém: SBEM – PA, 2017. p. 241.

CHAVANTE, Eduardo. PRESTES, Diego. **Quadrante matemática, 2º ano**: ensino médio. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2016. (Coleção quadrante matemática)

CORRÊA, João Nazareno Pantoja. **O ensino de poliedros por atividades**. Belém: UEPA, 2019.

CORRÊA, Tonival de Sarges. **O ensino de matrizes por meio de Sequências Didáticas integrado ao ensino tradicional**. Belém: UEPA, 2019.

[24] Um livro de memórias sobre a teoria das matrizes.
[25] Transações filosóficas da Royal Society of London

COSTA, Ademir Brandão; LOPES, Thiago Beirigo. **Uma Proposta de Modelagem Matemática no Ensino – Aprendizagem de Matrizes.** In: I Jornada de Estudos em Matemática. Marabá, Brasil, 2015.

CURY, H. N. **As concepções de Matemática dos professores e sua forma de considerar o erro dos alunos**. Porto Alegre, Tese de Doutorado na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1994.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: Contexto & Aplicações. 1. Ed. São Paulo: Ática, 2000, v.3.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: Contexto & aplicações. 3. ed. São Paulo: Ática, 2017.

D'AMBRÓSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates**. SBEM. Vol. 2. N 2. Brasília. 1989. p. 15 – 19.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan**. Educação Matemática**: da teoria à prática. 22ª ed. Campinas: Papirus, 2011, 119p.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação pra uma sociedade em transição**. 2 ed. Campinas: Papirus, 2001, 197p.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Joaquim Gomes de Sousa, o "Souzinha" (1829 – 1895)**. In: MARTINS, R. A.; MARTINS, L. A. C. P.; SILVA, C.; FERREIRA, J. M. H. (eds.). Filosofia e história da ciência do Cone Sul: 3º Encontro. Campinas: AFHIC, 2004. Pp 453 – 460.

DEMO, Pedro. **Metodologia do conhecimento científico**. São Paulo: Atlas, 2000.

DINIZ, Maria Ignez. SMOLE, Kátia Stocco. **Matemática ensino médio 2**. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Trad.: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução por Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FERRAZ, Maria Cláudia de Oliveira Reis; MACEDO, Stella Maris de. As afluências de um rio chamado avaliação Escolar. In: Maria Teresa Esteban. (Org.). **Escola, Currículo e Avaliação**. 1. ed. São Paulo: Cortez Editora, 2003, v. 5, p. 137 – 151.

FEVORINI, Luciana Bittencourt. **O envolvimento dos pais na educação escolar dos filhos: um estudo exploratório.** São Paulo: USP, 2009. p. 11 – 12. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/47/47131/tde-22022010104135/publico/Fevorini_DO.pdf>. Acesso em: 12 maio 2019.

FILHO, Benigno Barreto. SILVA, Claudio Xavier. **Matemática Aula por Aula**: Volume Único: Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2000.

FONSECA, Marco Aurélio Meira. **O uso da planilha e correio eletrônico como recursos didáticos no ensino de matrizes, determinantes e sistemas lineares:** uma experiência com alunos do ensino médio. Vitória da Conquista: UESB, 2013. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2198433> Acesso em: 05 jun. 2019.

FOSSA, John Andrew; SÁ, Pedro Franco de. Uma distinção entre problemas aritméticos e algébricos. **Revista Educação em Questão**, Natal, v. 33, n. 19, setembro/dezembro, p.253 – 278, 2008.

G1. **Enem**: levantamento mostra o que mais cai na prova desde 2009. Portal G1. Atualizado em 04/05/2017. Disponível em: <https://g1.globo.com/educacao/enem/2017/noticia/enem-levantamento-mostra-o-que-mais-cai-na-prova-desde-2009.ghtml> Acesso em: 24 abr. 2019.

G1. **O que é inflação e como ela afeta sua vida?** Atualizado em 01/06/2018. Disponível em: <https://g1.globo.com/economia/educacao-financeira/noticia/o-que-e-inflacao-e-como-ela-afeta-sua-vida.ghtmll> Acesso em: 18 dez. 2019.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 5ª ed. São Paulo: Atlas, 1999.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar Projetos de Pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GIL, Carlos, A. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**, *6ª edição*. São Paulo, Atlas, 2017.

GITIRANA, Veronica. Planejamento e avaliação em matemática. In: Janssen Felipe da Silva; Jussara Hoffman; Maria Teresa Esteban. (Org.). **Práticas avaliativas e aprendizagens significativas**: em diferentes áreas do currículo. 5ª Ed. Porto Alegre: Mediação, 2006, p. 57 – 66.

GODOY, Elenilton Vieira; SANTOS, Vinício de Macedo. **O cenário do ensino de matemática e o debate sobre o currículo de matemática**. Práxis Educacional (Online), 2012, v. 8, n. 13 p. 253 – 280.

GÓES, Maria Cecília Rafael de. A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. *Cadernos Cedes,* Relações de ensino: análises na perspectiva histórico-cultural, Campinas, n. 50, p. 9 – 25, 2000.

GONÇALVES, Hortência de Abreu. **Manual de Metodologia da Pesquisa Científica**. São Paulo: Avercamp, 2005.

IEZZI. Gelson. . . [et.al.]. **Matemática**: ciência e aplicações. Ensino médio, vol. 2. 2ª. ed. São Paulo: Saraiva, 2004.

IEZZI. Gelson. . . [et.al.]. **Matemática**: ciência e aplicações. Ensino médio, vol. 2. 6ª. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

IEZZI, Gelson. HAZZAN, Samuel **Fundamentos de Matemática Elementar:** Sequências Matrizes Determinantes Sistemas. Vol. 4. 8. ed. Editora Atual. 2013.

IEZZI. Gelson. . . [et.al.]. **Matemática:** ciência e aplicações. Ensino médio, vol. 2. 9ª. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

IVIC, Ivan. **Lev Semionovich Vygotsky**. Recife – PE: Fundação Joaquim Nabuco, Editora Massangana, 2010.

KLEIN, Marjúnia Édita Zimmer. **O ensino e a aprendizagem de matrizes tendo como fundamentação teórica a teoria da aprendizagem significativa**. Porto Alegre: UFRS, 2018. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6430414>. Acesso em: 05 jun. 2019.

KRAIESKI, Protasio. **Abordagem de matrizes no ensino médio:** uma avaliação crítica através dos Livros didáticos, com sugestões de aplicações. Florianópolis: UFSC, 1999. p. 83. Disponível em: < https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/94914> Acesso em: 09 dez. 2019.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Metodologia cientifica.** 6.ed. São Paulo: Atlas, 2011.

LEONARDO, Fabio Martins de. **Conexões com a matemática**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. 3. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

LIMA, Lucas Antonio Mendes de. PEREIRA, Mayara Gabriella Grangeiro. **História da Matemática**: Contribuições para o ensino de funções, equação quadrática e matrizes. Belém: UEPA, 2017. p. 94.

LOPES, Marcelo dos Reis. **Matrizes**: história de um conteúdo escolar. Rio de Janeiro: UFRJ, 2012. Disponível em: <http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/42%20Marcelo%20Lopes.pdf>. Acesso em: 10 dez. 2019.

MACEDO, Mauricio dos Santos. **Uma sequência didática para o ensino de função afim. Belém**: UEPA. 2019.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Educação Matemática**: Uma introdução. 2 ed. São Paulo: Educ, 2002. p. 197 – 208.

MANDARINO, M. C. F. **A escola “desfaz” o gosto pela matemática?** In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8. 2004, Recife. Anais VIII ENEM. Recife: SBM, 2004, p. 1 – 14.

MANTOVANI, Sergio Roberto. **Sequência didática como instrumento para a aprendizagem significativa do efeito fotoelétrico**. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual Paulista. São Paulo. 2015. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/136233/mantovani_sr_me_prud.pdf?sequence=3&isAllowed=y>. Acesso em: 24 fev. 2020.

MATOS, Fernando Cardoso de. NUNES. José Messildo Viana. **Práticas com matrizes a partir do estudo histórico epistemológico**. Belém: REMATEC, 2014. Número 32, p. 09 – 28. Disponível em: <http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/201>. Acesso em: 09 ago. 2021.

MELLO, Guiomar Namo de. **Currículo da educação básica no Brasil**: concepções e políticas. São Paulo: CEESP, 2014, p.15.

MENDES, Fábio Ribeiro. **A nova sala de aula**. – Porto Alegre: Autonomia, 2012.

MESSIAS, Maria Alice de Vasconcelos Feio; SÁ, Pedro Franco de; VILHENA, Rubens Fonseca. **Um Estudo Diagnóstico Sobre as Dificuldades em Matrizes**. In: Diálogos entre a Pesquisa e a Prática Educativa, 9, 2006. Belo Horizonte. Pôsteres.

MIGUEL, J. C. **O ensino de Matemática na perspectiva da formação de conceitos:** implicações teóricas metodológicas. Núcleos de Ensino: Artigos dos Projetos realizados em 2003. p. 375 – 394, 2005. Disponível em: <http://www.gradadm.ifsc.usp.br/dados/20121/ SLC0630-1/Ensino-Matematica-Enfoque-Conceitos.pdf>. Acesso em: 15 set. 2015.

MORAES, F. R. **Um estudo sobre erro na resolução de equações do 1º grau com o software APLUSIX**. Campo Grande, Dissertação de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2013.

MOYSÉS, Lucia. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática**. Campinas, SP: Papirus, 1997.

NUNES, Daniel Martins. **A abordagem histórica dos tópicos matriz, determinante e sistemas lineares presentes nos livros didáticos.** Pôster. São Paulo – SP: ENEM,

2016. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/7065_3067_ID.pdf> Acesso em: 13 jul. 2020.

OLIVEIRA JÚNIOR, Levindo Felício de, **A contextualização de matrizes no ensino médio**: uma proposta de trabalho. Palmas: UFT, 2014. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2268026>. Acesso em: 05 jun. 2019.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores.** Petrópolis - RJ: Vozes, 2013.

OLIVEIRA, Silvio Luiz de. **Tratado de metodologia científica**: projetos de pesquisa, TGI, TCC, monografia, dissertação e teses. 2. ed., quarta reimpressão. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

PACHECO, Marina Buzin; ANDREIS, Greice da Silva Lorenzzetti. **Análise na rede pública estadual de ensino de Caxias do Sul das causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática:** percepção de professores e estudantes do 3º ano do ensino médio. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, v. 1, n. 1, 2015.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática:** uma análise da influência francesa. Coleção tendências em educação matemática. 2 ed., Belo Horizonte: Autêntica, 2008, 128p.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa, 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática:** uma análise da influência francesa. Belo Horizonte. Autêntica, 2002.

PAIS, Luiz Carlos. Introdução. In: Silvia D. A. (org.). **Educação Matemática:** Uma introdução. 2 ed. São Paulo: Educ, 2002. p. 9 – 12.

PAIVA, Manoel. **Matemática**: volume único. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2005.

PAIVA, Manoel. **Matemática**: conceitos, linguagem e aplicações. Vol. 2. São Paulo: Moderna, 2015.

PAIXÃO, Carlos Jorge; SANTOS, Maria de Lourdes Silva; SILVA, Ana Kely da. Ensino e aprendizagem no Brasil: um estudo das práticas curriculares em universidades da região norte. In: Domingos Fernandes... [et al]. (Org.). **Avaliação, ensino e aprendizagem no ensino superior em Portugal e no Brasil**: realidades e perspectivas. Vol. I. Lisboa: Educa. 2014, p. 227 – 266.

PARÁ. Secretaria Estadual de Educação. Sistema Paraense de Avaliação Educacional (SisPAE). **Revista do Sistema Paraense de Avaliação Educacional**: Referências e

Resultados**.** Ensino Fundamental matemática: VUNESP, 2016. Disponível em: <https://sispae.vunesp.com.br/Arquivos/Revistas2016/SumarioExecutivo_2016.pdf> Acesso em: 28 mar. 2020.

PEREIRA, Marcos Fabrício Ferreira. **Uma sequência didática para o ensino de semelhança de figuras planas**. Dissertação (Mestrado). Belém – PA: UEPA, 2017.

PEREIRA, Nilce Maria de Oliveira. **Uma proposta para o ensino do conceito de matrizes em ambiente computacional**. Sorocaba: UFSCAR, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/7673/DissNMOP.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 30 mar. 2019.

PIRES, Sabrina nunes. **Matrizes no Ensino Médio**. Florianópolis: UFSC, 2000. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/97144/Sabrina_Nunes_Pires.PDF?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 26 fev. 2019.

POMMER, Wagner Marcelo. **A Engenharia Didática em sala de aula:** Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares, 2013. 72 p. ils.: Tabs.

REAL, Luana Pereira Villa. **Transformações Geométricas**: aplicação de matrizes na computação gráfica. Santa Maria: PRPGPE, 2017. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5416841>. Acesso em: 05 jun. 2019.

REIS, Michel Silva dos. **O Whatsapp no apoio à resolução de problema de matrizes: um produto educacional na EJA**. Belém: UFPA, 2016. Disponível em: <http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/10496/1/Dissertacao_EnsinoAprendizagemMatrizes.pdf>. Acesso em: 30 mar. 2019.

RINALDI, Bárbara Leister. RIZZATO, Fernanda Buhrer. **Arthur Cayley**. IME: USP, 2005. Disponível em: <http://milanesa.ime.usp.br/historia/cayley.html>. Acesso em: 05 jun. 2020.

ROCHA, Jesiel Souza da. **Ensino – aprendizagem de matrizes, determinantes e sistemas lineares através da planilha Excel**. Porto Velho: UNIR, 2015. Disponível em: <http://www.ri.unir.br/jspui/bitstream/123456789/1890/1/ENSINO%20DE%20MATRIZES%2C%20SISTEMAS%20LINEARES%20E%20DETERMINANTES%20ATRAV%C3%89S%20DO%20EXCEL%20%20JESIEL%20%20SOUZA%20DA%20ROCHA%20-%20DISSERTA%C3%87AO.pdf> Acesso em: 01 abr. 2019.

SÁ, Pedro Franco de; ALVES, Fábio José da Costa. A engenharia didática: alternativa metodológica para pesquisa em fenômenos didáticos. In: MARCONDES, Maria Inês; OLIVEIRA, Ivanilde A.; TEIXEIRA, Elizabeth. (Org.). **Abordagens teóricas e construções metodológicas na pesquisa em educação**. Belém: EDUEPA, 2011

SÁ, Pedro Franco de. **Ensinando matemática através da redescoberta**. Belém: Revista Traços, 1999. Disponível em: http://revistas.unama.br/index.php/revistatracos/article/view/822/392>. Acesso em: 24 ago. 2021.

SÁ, Pedro Franco de. **Atividades para o ensino de matemática no ensino fundamental.** Belém: EDUEPA, 2009.

SÁ, Pedro Franco de. **Possibilidades do ensino de matemática por atividade.** Belém: IFPA, 2019.

SANCHEZ, Jesús Nicasio García. **Dificuldades de Aprendizagem e Intervenção Psicopedagógico**. Porto Alegre: Artmed, 2004.

SANCHES, Maria Helena Figueiredo. **Efeitos de uma estratégia diferenciada do ensino dos conceitos de matrizes**. Dissertação (Mestrado em Educação), UNICAMP, Campinas, 2002.

SANTOS, Edméa Oliveira dos; WEBER, Aline. Articulação de saberes no currículo escolar. In: Edméa Santos. (Org.). **Currículos: teorias e práticas**. Rio de Janeiro: LTC, 2004, v. 1, p. 61 – 84.

SILVA, Fábio Anderson de Assumpção. **Utilizando o Arduíno como atividade aberta de investigação e experimentação matemática para o ensino de conceitos de matrizes**. São Paulo: IFSP, 2017. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5738218>. Acesso em: 05 jun. 2019.

SILVA, Hugo Carlos Machado da. **O ensino de matrizes a partir da resolução de problemas**. Belém: UEPA, 2016. Disponível em: <http://ccse.uepa.br/ppged/wpcontent/uploads/dissertacoes/09/hugo_carlos_machado_da_silva.pdf>. Acesso em: 02 maio 2019.

SILVA, José Augusto Ribeiro da. **Sistema de equações lineares**: possibilidades de ensino por meio de uma sequência didática. Belém: UEPA, 2018.

STEINHORST, Aroldo César. **O processo de construção dos conceitos de matrizes, determinantes e sistemas lineares no ensino médio, utilizando a planilha como recurso**: um estudo comparativo. Porto Alegre: PUCRS, 2011. Disponível em: <http://repositorio.pucrs.br/dspace/handle/10923/3109> Acesso em: 17 jun. 2019.

TOURÃO, Benedito Junior Corrêa. **O Ensino de Prismas por Atividades**. 215 f. Belém: UEPA, 2020. Disponível em: <https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/570444> Acesso em: 20 jun. 2020.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Tradução: Ernani F. da F. Rosa; revisão técnica: Nalú Farenzena. Porto Alegre: Penso, 1998.

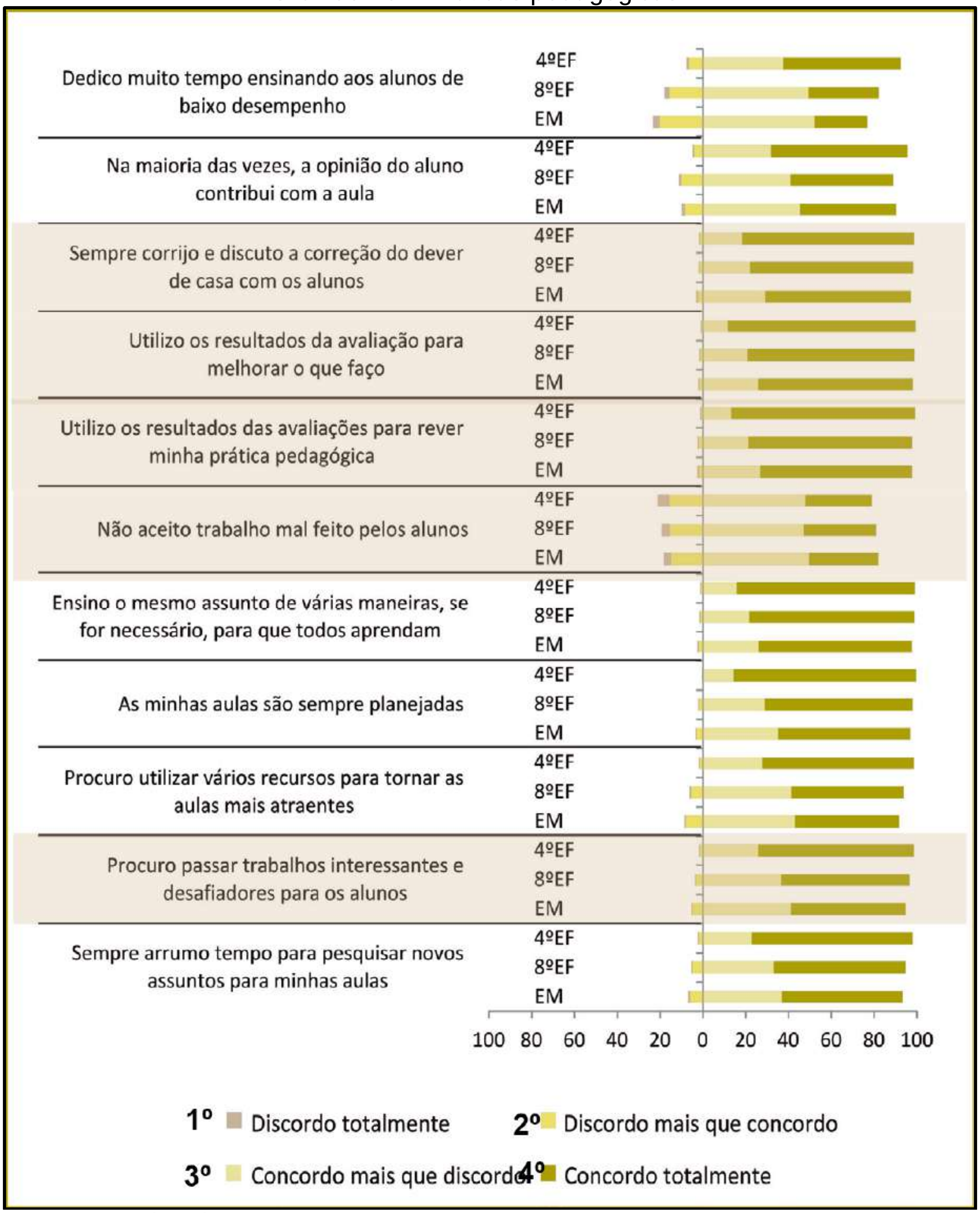
WERNECK, Hamilton. **Ensinamos demais, aprendemos de menos**. Petrópolis, RJ: Vozes, 21ª edição, 2008.

WERNECK, Hamilton. **Se você finge que ensina, eu finjo que aprendo**. Petrópolis, RJ: Vozes, 16ª edição, 1992.

ANEXOS

ANEXO A: Práticas pedagógicas segundo o SISPAE

Gráfico 29 – Práticas pedagógicas



Fonte: SISPAE (2016)

ANEXO B: Notas da Educação Básica do Estado do Pará

Quadro 57 – Rede Estadual: Anos finais do Ensino Fundamental

Tabela 15. Ideb - anos finais do ensino fundamental - rede estadual

Unidade da Federação	Ideb - rede estadual									
	Ideb 2005	Ideb 2007	Ideb 2009	Ideb 2011	Ideb 2013	Ideb 2015	Indicador de Rendimento (P) 2017	Nota Média Padronizada (N) 2017	**Ideb 2017**	**Meta Ideb 2017**
Brasil	**3,3**	**3,6**	**3,8**	**3,9**	**4,0**	**4,2**	**0,87**	**5,13**	**4,5**	**4,8**
Norte	**3,1**	**3,3**	**3,5**	3,6	3,6	3,9	**0,86**	**4,85**	**4,2**	**4,6**
Rondônia	3,2	3,3	3,4	3,5	3,7	4,0	0,91	5,32	4,9	4,7
Acre	3,5	3,8	4,1	4,2	4,4	4,4	0,92	5,10	4,7	5,0
Amazonas	2,7	3,3	3,6	3,9	3,9	4,4	0,91	5,07	4,6	4,1
Roraima	3,2	3,5	3,7	3,6	3,5	3,7	0,86	4,60	4,0	4,7
Pará	3,1	2,9	3,1	3,1	3,0	3,2	0,77	4,29	**3,3**	**4,6**
Amapá	3,5	3,4	3,6	3,5	3,4	3,5	0,81	4,36	3,5	5,0
Tocantins	3,4	3,6	3,9	3,9	3,7	3,8	0,86	5,06	4,4	4,8

3,3 4,6

Fonte: IDEB (2017)

ANEXO C: Notas da Educação Básica do Estado do Pará

Quadro 58 – Rede Estadual: Anos finais do Ensino Médio

Tabela 21. Ideb - Ensino médio - rede estadual

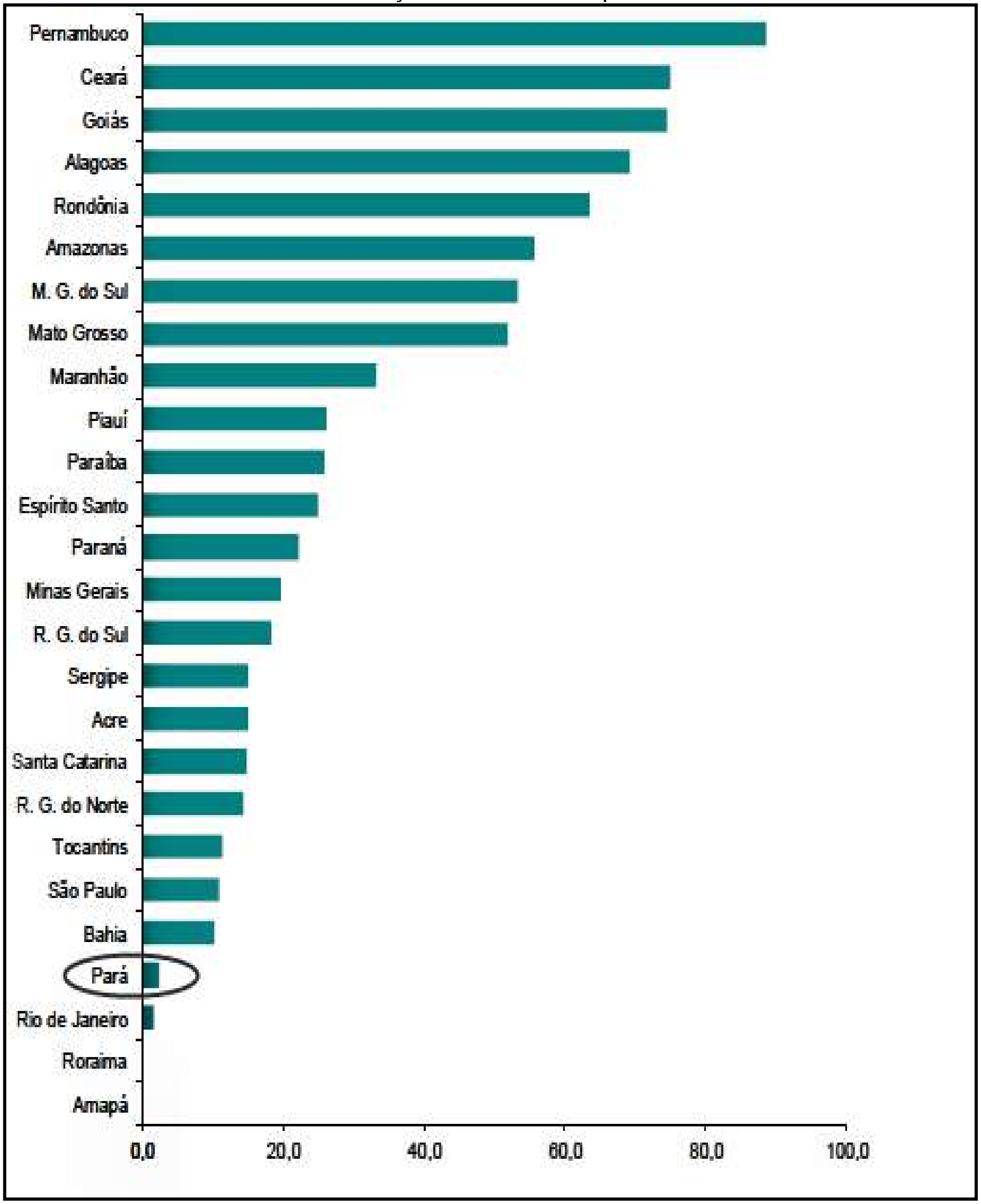
Unidade da Federação	Ideb - rede estadual									
	Ideb 2005	Ideb 2007	Ideb 2009	Ideb 2011	Ideb 2013	Ideb 2015	Indicador de Rendimento (P) 2017	Nota Média Padronizada (N) 2017	Ideb 2017	Meta Ideb 2017
Brasil	**3,0**	**3,2**	**3,4**	**3,4**	**3,4**	**3,5**	**0,82**	**4,23**	**3,5**	**4,4**
Norte	**2,7**	**2,7**	**3,1**	**3,1**	**2,9**	**3,2**	**0,82**	**3,82**	**3,2**	**4,0**
Rondônia	3,0	3,1	3,7	3,3	3,4	3,3	0,85	4,42	3,8	4,3
Acre	3,0	3,3	3,5	3,3	3,3	3,5	0,85	4,26	3,6	4,3
Amazonas	2,3	2,8	3,2	3,4	3,0	3,5	0,83	3,92	3,3	3,5
Roraima	3,2	3,1	3,5	3,5	3,2	3,4	0,84	3,92	3,3	4,6
Pará	2,6	2,3	3,0	2,8	2,7	3,0	0,79	3,58	2,8	4,0
Amapá	2,7	2,7	2,8	3,0	2,9	3,1	0,79	3,81	3,0	4,0
Tocantins	2,9	3,1	3,3	3,5	3,2	3,3	0,87	4,19	3,7	4,2

2,8 4,0

Fonte: IDEB (2017)

ANEXO D: Classificação do Estado do Pará

Gráfico 30 – Classificação dos estados quanto à nota do IDEB



Fonte: IDEB (2017)

APÊNDICES
A: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA ESTUDANTES MAIORES DE 18 ANOS (Estudos Diagnósticos)

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) para participar da pesquisa intitulada O uso de atividades para o Ensino Quadriláteros, sob a responsabilidade dos(as) pesquisadores **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kelly Martins da Silva e orientando Antonino de Araújo Farias**, vinculados a Universidade do Estado do Pará.
Nesta pesquisa nós estamos buscando realizar um diagnóstico do **ensino de matriz** a partir da opinião dos estudantes**.** A sua colaboração na pesquisa será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da pesquisa.
Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada.
Você não terá gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa.
Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o **ensino de matriz.**
Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação.
Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.
Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kelly Martins da Silva, orientadoras e orientando Antonino de Araújo Farias** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará(UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542

Belém, ___de ______________ de 2019.

____
Assinatura do pesquisador

Eu, ____
aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

____
Participante da pesquisa

B: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA ESTUDANTES MENOSRES DE 18 ANOS (Estudos Diagnósticos)

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Senhor (a) responsável você está sendo consultado sobre a possibilidade de seu filho (a), para participar da pesquisa intitulada: um diagnóstico do ensino quadriláteros, sob a responsabilidade dos pesquisadores **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kelly Martins da Silva e orientando Antonino de Araújo Farias**, vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Com esse trabalho estamos buscando diagnosticar o ensino de quadrilátero a partir da opinião dos estudantes**.** A colaboração do aluno (a) será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da pesquisa e essa atividade ocorrerá nas dependências da escola sob a supervisão de um professor.

Em nenhum momento o aluno (a) identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a identidade do discente será preservada.

Você e o aluno não terão gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa.

Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica gerando um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o ensino de quadriláteros.

Você é livre para decidir se seu filho (a) colaborará com a pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kelly Martins da Silva e orientando Antonino de Araújo Farias** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação(CCSE) da Universidade do Estado do Pará(UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542

___________________, ______ de __________ de 2019.

____

Assinatura do pesquisador

Eu,____

autorizo que meu/minha filho(a)____ a participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

____

Assinatura do responsável

C:QUESTIONÁRIO E QUADRO DE DIFICULDADE - ESTUDANTES EGRESSOS

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIASSOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Prezado (a) aluno (a),
Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1- **Idade**: _______anos 2- **Gênero**: □ Masculino □ Feminino 3- **Série/**Ano _______
4- **Tipo de escola que estuda**? □ Municipal □ Estadual □ Conveniada □ outra
5- **Você já ficou em dependência**? □ Não □ Sim. Em quais disciplinas?__________
6- **Você gosta de Matemática**? □ Não gosto □ Suporto □ Gosto um pouco □ Adoro
7- **Qual a escolaridade do seu responsável masculino**?
□ Superior □ Médio □ Fundamental □ Fundamental incompleto □ Não estudou
8- **Qual a escolaridade da sua responsável feminina**?
□ Superior □ Médio □ Fundamental □ Fundamental incompleto □ Não estudou
9- **Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática**?
□ Professor particular □ Família □ Ninguém □ Outros. Quem?__________________
10- **Com que frequência você estuda matemática fora da escola**? □ Todo dia □ Somente nos finais de semana □ No período de prova □ Só na véspera da prova □ Não estudo fora da escola.
11- **Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática**?
□ Sempre □ Quase sempre □ Às vezes □ Poucas vezes □ Nunca
12- **As aulas de Matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados**?
□ sim □ não □ às vezes
13- **Você consegue relacionar os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula com seu dia a dia**?
□ Sim □ Não □ Às vezes
14-Como você se sente quando está diante de uma avaliação em matemática?
□ Contente □ Tranquilo □ com Medo □ Preocupado □ com Raiva □ com Calafrios.
15- **Quais formas de atividades e/ou trabalho que seu Professor (a) de matemática mais utiliza para a avaliação da aprendizagem?**
□ Provas/simulado □ Testes semanais □ Seminários □ Pesquisas □ Projetos □ Outros. Quais? ____________
16- **Você já estudou Matrizes (Produto de Matrizes, Matriz Transposta e Matriz Inversa)**? □ Sim □ Não
17- **Se você na questão acima respondeu sim, diga em qual ano/série**? ___________
18- **Seu professor de matemática demonstra domínio do conteúdo Matrizes (Produto de Matrizes, Matriz Transposta e Matriz Inversa)**? □ Sim □ Não
19. Como v**ocê avalia as explicações do seu professor de matemática**?
□ Ruim □ Regular □ Boa □ Excelente

20- **Quando você estudou Matrizes (Produto de Matrizes, Matriz Transposta e Matriz Inversa), a maioria das aulas**:
□ Iniciaram pela definição seguida de exemplos e exercícios;
□ Iniciaram com a história do assunto para depois explorar os conceitos;
□ Iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto;
□ Iniciaram com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo;
□ Iniciaram com jogos para depois sistematizar os conceitos.

21- **Para praticar o conteúdo de Matrizes (Produto de Matrizes, Matriz Transposta e Matriz Inversa) seu professor costumava**:
□ Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos;
□ Apresentar jogos envolvendo o assunto;
□ Solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático;
□ Não propunha questões de fixação;
□ Solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.

22- Com base na sua experiência q**uando você estudou Matrizes (Produto de Matrizes, Transposta e Inversa) preencha o quadro a seguir.**

(**MF**: Muito Fácil; **F**: Fácil; **R**: Regular; **D**: Difícil; **MD**: Muito difícil)

Conteúdo	Você lembra de ter estudado?		Qual grau de dificuldade que você teve para aprender?				
	Sim	**Não**	**MF**	**F**	**R**	**D**	**MD**
Ideia de Matriz							
Definição de Matriz.							
Representação genérica de Matriz.							
Matriz quadrada							
Matriz identidade							
Matriz nula							
Matriz transposta.							
Igualdade de Matrizes.							
Problemas sobre igualdades de Matriz.							
Adição de Matrizes.							
Problemas sobre Adição de Matriz							
Propriedades da Adição de Matriz (Comutativa, Associativa, Oposto e o Elemento Neutro).							
Problemas sobre Propriedades da Adição de Matriz							
Matrizes Opostas.							
Problemas sobre Matriz Opostas.							
Subtração de Matrizes.							
Problemas sobre Subtração de Matrizes.							
Multiplicação de um número real por uma Matriz.							
Problemas de Multiplicação de número real por Matriz.							
Produto de Matrizes.							
Problemas sobre Produto de Matrizes.							

D: TESTE DE VERIFICAÇÃO DA APRENDIZAGEM – ESUDANTES EGRESSOS

1. Dadas as matrizes abaixo:

I. $\begin{bmatrix} -5 & 10 & 9 \end{bmatrix}$ II. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & -8 \\ 5 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

III. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Quais matrizes representam, respectivamente, matriz linha, matriz coluna e matriz quadrada?

(A) I, III e II (C) Somente a I e III
(B) Apenas a II e III (D) I, II e III

2. Os valores de x, y e z que tornam a igualdade de matriz, abaixo, verdadeira são:

$$\begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 4 & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & z \\ z^2 & 1 \end{pmatrix}$$

(A) $x = 4, y = 3$ e $z = 2$
(B) $x = 2, y = 3$ e $z = -2$
(C) $x = 5, y = 2$ e $z = 2$
(D) $x = -2, y = 4$ e $z = 5$

3. Sejam as matrizes A = $\begin{pmatrix} 15 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$ eB = $\begin{pmatrix} -3 & 11 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, determine a matriz resultante da soma A + B.

(A) $\begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 20 & 12 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 12 & 20 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$

4. (Mundo Educação) Seja **A = $(a_{ij})_{3x3}$**, com **a_{ij} = i + j,** e **B = $(b_{ij})_{3x3}$**, com **b_{ij} = j – i**, determine a matriz **C**, tal que **C = A.B**.

(A) $C = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 14 \\ 14 & 10 & 13 \\ 17 & 13 & 12 \end{pmatrix}$

(B) $C = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 14 \\ 17 & 10 & 13 \\ 14 & 13 & 10 \end{pmatrix}$

(C) $C = \begin{pmatrix} -11 & -2 & 7 \\ -14 & -2 & 10 \\ -17 & -2 & 13 \end{pmatrix}$

(D) $C = \begin{pmatrix} 11 & -7 & 14 \\ 14 & -10 & 13 \\ 17 & -13 & 12 \end{pmatrix}$

5. Julgue os itens abaixo em Verdadeiro (**V**) ou Falso (**F**), considerando A e B duas matrizes:

( ) Pode existir o produto AB, por exemplo, e não existir o produto BA.
( ) As matrizes produto AB e BA podem ser de tipos diferentes.
( ) Podemos ter AB = BA e AB ≠ BA.

De acordo com sua resposta, a alternativa que preenche a sequência das lacunas acima é:

(A) V, V, V (C) F, F, F
(B) V, F, F (D) F, V, V

6. (IBMEC-SP 2005/2) Uma agência de propaganda utiliza nas campanha publicitária que elabora para seus clientes três tipos de material para divulgação em papel:

• Impresso tipo PB, em preto e branco no papel simples;
• Impresso tipo CK, colorido no papel simples;
• Impresso tipo CXK, colorido no papel mais grosso.

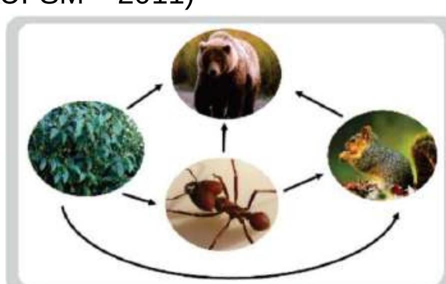
Para fazer este tipo de trabalho, a agência contrata normalmente três gráficas, que cobram preços unitários diferentes para cada tipo de impressão conforme tabela abaixo.

Tipo	**PB**	**CK**	**CKX**
Gráfica A	R$ 2,00	R$ 3,00	R$ 4,00
Gráfica B	R$ 3,00	R$ 3,00	R$ 4,00
Gráfica C	R$ 1,00	R$ 2,00	R$ 6,00

A gráfica que, para fazer 300 impressões do tipo PB, 150 do tipo CK e 200 do tipo CKX apresentará o menor custo é:

(A) Gráfica A (C) Gráfica B
(B) Gráfica C (D) Gráficas A e B

7. (UFSM – 2011)



O diagrama dado representa a cadeia alimentar simplificada de um determinado ecossistema. As setas indicam a espécie de que a outra espécie se alimenta. Atribuindo valor 1 quando uma espécie se alimenta de outra e zero, quando ocorre o contrário, tem-se a seguinte tabela:

	Urso	Esquilo	Inseto	Planta
Urso	0	1	1	1
Esquilo	0	0	1	1
Inseto	0	0	0	1
Planta	0	0	0	0

A matriz A = $(a_{ij})_{4x4}$, associada à tabela, possui a seguinte lei de formação:

(A) $a_{ij} = \begin{cases} o, & \text{se } i \leq j \\ 1, & \text{se } i > j \end{cases}$ (C) $a_{ij} = \begin{cases} o, & \text{se } i = j \\ 1, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

(B) $a_{ij} = \begin{cases} o, & \text{se } i \geq j \\ 1, & \text{se } i < j \end{cases}$ (D) $a_{ij} = \begin{cases} o, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$

8. (Unicamp) Considere a matriz A = $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$, onde **a** e **b** são números reais. Se A^2 = A e A é invertível, então:

(A) a = 1 e b = 1 (C) a = 0 e b = 0
(B) a = 1 e b = 0 (D) a = 0 e b = 1

9. (UEL-2003) Uma nutricionista recomendou aos atletas de um time de futebol a ingestão de uma quantidade mínima de certos alimentos (fruta, leite e cereais) necessária para uma alimentação sadia. A matriz D fornece a quantidade diária mínima (em gramas) daqueles alimentos. A matriz M fornece a quantidade (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida por cada grama ingerida dos alimentos citados.

D	g
Fruta	200
Leite	300
Cereais	600

M	Fruta	Leite	Cereais
Proteínas	0,006	0,033	0,108
Gorduras	0,001	0,035	0,018
Carboidratos	0,084	0,052	0,631

A matriz que mostra a quantidade diária mínima (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida pela ingestão daqueles alimentos é:

(A) $\begin{bmatrix} 18,20 \\ 36,30 \\ 454,20 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 29,70 \\ 16,20 \\ 460,20 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 48,30 \\ 36,00 \\ 432,20 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 75,90 \\ 21,50 \\ 411,00 \end{bmatrix}$

10. (ENEM – 2018) A transferência Eletrônica Disponível (TED) é uma transação financeira de valores entre diferentes bancos. Um economista decide analisar os valores enviados por meio de TEDs entre cinco bancos (1, 2, 3, 4, 5) durante um mês. Para isso, ele dispõe esses valores em uma matriz A = $[a_{ij}]$, em que $1 \leq i \leq 5$ e $1 \leq j \leq 5$, e o elemento a_{ij} corresponde ao total proveniente das operações feitas via TED, em milhão de real, transferidos do banco i para o banco j durante o mês. Observe que os elementos a_{ij} = 0, uma vez que TED é uma transferência entre bancosdistintos. Esta é a matriz obtida para essa análise:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o banco que transferiu a maior quantia via TED é o banco:

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

E: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada O Ensino de Matrizes por Meio de Atividades, sob a responsabilidade do **orientador Roberto Paulo Bibas Fialho e orientando Antonino de Araújo Farias**, vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Nesta pesquisa nos pretendemos aplicar uma sequência didática para verificar os efeitos desta no **Ensino de Matriz.** A sua colaboração na pesquisa será na participação nos diagnósticos, preencher o questionário socioeconômico, participar dos testes e das atividades propostas.

Ressaltamos que em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada. Você não terá gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa. Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre **O Ensino de Matrizes por Meio de Atividades.**

Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **O orientador Roberto Paulo Bibas Fialho e orientando Antonino de Araújo Farias** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542

Belém, _____ de ___________ de 2021.

____
Assinatura do pesquisador

Eu, ____
aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

____
Participante da pesquisa

F: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Senhor (a) responsável você está sendo consultado sobre a possibilidade de seu filho (a), participar da pesquisa intitulada O Ensino de Quadriláteros por Meio de Atividade, sob a responsabilidade do **orientador Roberto Paulo Bibas Fialho e orientando Antonino de Araújo Farias**, vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Com esse trabalho estamos buscando diagnosticar o ensino de quadrilátero a partir da opinião dos estudantes**.** A colaboração do aluno (a) será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da pesquisa e essa atividade ocorrerá nas dependências da escola sob a supervisão de um professor.

Em nenhum momento o aluno (a) identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a identidade do discente será preservada.

Você e o aluno não terão gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa.

Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica gerando um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o ensino de quadriláteros.

Você é livre para decidir se seu filho (a) colaborará com a pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **O orientador Roberto Paulo Bibas Fialho e orientando Antonino de Araújo Farias** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542

____________________, ______ de ___________ de 2021.

____
Assinatura do pesquisador

Eu, ____

autorizo que meu/minha filho(a)_______________________________________

a participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

____
Assinatura do responsável

G: LEVANTAMENTO DAS QUESTÕES DE MATRIZES NAS PROVAS MILITARES

Quadro – Questões de Matrizes que caíram nas provas militares de 2020 a 2010

MINISTÉRIO DA DEFESA		
INSTITUIÇÃO	**ANO**	**QUESTÃO**
Escolas de Formação de Oficiais da Marinha Mercante (EFOMM)	2020	**20ª Questão** Seja a matriz A $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 \end{vmatrix}$ Qual é o valor do determinante da matriz A? (A) 96 (B) 98 (C) 100 (D) 144 (E) 288
	2018	**10ª Questão** Para descrever um código que permite transformar uma palavra P de três letras em um vetor $w \in \Re^3$, inicialmente, escolhe-se uma matriz 3x3. Por exemplo, a nossa "matriz código" será: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ A partir da correspondência: A → 1 / B → 2 / C → 3 / D → 4 / E → 5 / F → 6 / G → 7 / H → 8 / I → 9 / J → 10 / L → 11 / M → 12 / N → 13 / O → 14 / P → 15 / Q → 16 / R → 17 / S → 18 / T → 19 / U → 20 / V → 21 / X → 22 / Z → 23 a palavra P é transformada em vetor v do $\Re^3$. Em seguida, o código da palavra P é obtido pela operação $w = Av$. Por exemplo, a palavra MAR corresponde ao vetor $(12,1,17) = v$, a qual é codificada com $w = Av = (26,56,19)$. Usando o processo acima para decodificar $w = (64,107,29)$, teremos (a) x = 18, y = 14, z = 11 / SOL (b) x = 12, y = 5, z = 11 / MEL (c) x = 12, y = 1, z = 20 / MAU (d) x = 11, y = 20, z = 1 / LUA (e) x = 20, y = 21, z = 1 / UVA
	2017	**14ª Questão** Dado o sistema linear abaixo, analise as seguintes afirmativas: $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & b \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ a \\ 3 \end{bmatrix}$ I- Se $b \neq -12$, o sistema linear terá uma única solução. II- Se $a = b = -12$, o sistema linear terá infinitas soluções. III- Se $b = -12$, o sistema será impossível. (a) Todas as afirmativas são corretas. (b) Todas as afirmativas são incorretas. (c) Somente as afirmativas I e III são corretas. (d) Somente as afirmativas I e II são corretas. (e) Somente as afirmativas II e III são corretas.

		15ª Questão Determine uma matriz invertível P que satisfaça a equação $P^{-1}.\ A=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$, sendo $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 3\end{bmatrix}$. (a) $P=\begin{bmatrix}\frac{5}{3} & \frac{10}{9}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9}\end{bmatrix}$ (b) $P=\begin{bmatrix}2 & 10\\ 6 & -15\end{bmatrix}$ (c) $P=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}2 & 10\\ 3 & -3\end{bmatrix}$ (d) $P=\begin{bmatrix}-\frac{2}{9} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{10}{9} & \frac{5}{3}\end{bmatrix}$ (e) $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 1\\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$
	2015	**2ª Questão** Sabendo-se que $\det\begin{pmatrix}e & \pi & \sqrt{2} & 3^{\frac{1}{3}} & 1\\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & 3 & 5 & 12\\ 3 & 1 & 2 & 0 & 4\end{pmatrix}=a$. calcule, em função de a, $\det\begin{pmatrix}2e & 2\pi & \sqrt{8} & 24^{\frac{1}{3}} & 2\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6\\ 0 & -1 & 3 & 5 & 12\\ 3 & 0 & 5 & 5 & 16\end{pmatrix}$. (a) 2a. (b) —2a. (c) a. (d) — a. (e) 3a.
	2013	**17ª Questão** A matriz $A=(a_{ij})_{3x3}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & \sqrt{2} & 1\end{bmatrix}$ define em IR³ os vetores $\vec{v}_i=a_{i1}\vec{i}+a_{i2}\vec{j}+a_{i3}\vec{k}$, $1\le i\le 3$. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores em IR³ satisfazendo: • $\vec{u}$ é paralelo, tem mesmo sentido de $\vec{v}_2$ e $\lvert\vec{u}\rvert=3$; • $\vec{v}$ é paralelo, tem mesmo sentido de $\vec{v}_3$ e $\lvert\vec{u}\rvert=2$. Então, o produto vetorial $\vec{u}\times\vec{v}$ é dado por: (a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j}-(\sqrt{2}+1)\vec{k})$ (b) $3\sqrt{2}(\vec{i}-\vec{j}+(\sqrt{2}-1)\vec{k})$ (c) $3(\sqrt{2}\vec{i}+\vec{j}-(\sqrt{2}-1)\vec{k})$ (d) $2\sqrt{2}(\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}+(1-\sqrt{2})\vec{k})$ (e) $-3\sqrt{2}(\vec{i}+\vec{j}-(\sqrt{2}-1)\vec{k})$

	2012	**13**. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} x & 2-x & 1 \\ 2 & 3x+1 & -1 \\ -4x+1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, então p valor de f no ponto de abscissa 1, onde f(x) = det(A), é: a) 18 b) 21 c) 36 d) 81 e) 270
		18. Os números inteiros de 1 a 500 são escritos na disposição abaixo $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$ A escrita se repete, na mesma disposição, a cada vez que se atinge o valor 500. O número escrito na quarta coluna 134ª linha é a) 158 b) 159 c) 160 d) 169 e) 170
	2010	7) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $X = A.B$. O determinante da matriz $2.X^{-1}$ é igual a (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) 1 (D) $\frac{8}{3}$ (E) 6
Escola de Especialistas de Aeronáutica (EEAR)	2020	**64** – Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \end{pmatrix}$. Se X é uma matriz tal que $A \cdot X = B$, então a soma dos elementos da matriz X é a) −4 b) −2 c) 2 d) 4
	2018	**69** – Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & x-1 \\ 2x & 4x-1 \end{bmatrix}$. Os termos x – 1, 2x, 4x – 1, são, nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão aritmética. Dessa forma, det(A) é igual a a) 1 b) 2 c) 3 d) 4
	2017	**72** – Considere as matrizes reais $A = \begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 2 & y+z \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 9 & z \\ y & -x \end{pmatrix}$. Se $A = B^t$, então y + z é igual a a) 3 b) 2 c) 1 d) -1

	2016	**57** – Se $\begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b & -1 \\ x & 2k \end{pmatrix}$ são matrizes opostas, os valores de a, b, x e k são respectivamente a) 1, -1, 1, 1 b) 1, 1, -1, -1 c) 1, -1, 1, -1 d) -1, -1, -2, -2
		70 – Para que o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ seja 3, o valor de **b** deve ser igual a a) 2 b) 0 c) -1 d) -2
	2015	**68** – Se $\begin{vmatrix} 2x & y & 0 \\ z & 0 & 2y \\ 0 & 2z & 0 \end{vmatrix} = 16\sqrt{3}$, então $(xyz)^2$ é igual a a) 8. b) 12. c) 24. d) 36.
	2014	**54** – O valor do determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ é a) -2. b) 0. c) 1. d) 2.
	2013	**71** – Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$. A matriz $X = \frac{1}{2}A$ tem como soma de seus elementos o valor a) 7. b) 5. c) 4. d) 1.
	2012	**60** - O número real x, tal que $\begin{vmatrix} x-1 & x+2 \\ -3 & x \end{vmatrix} = 5$, é a) -2 b) -1 c) 0 d) 1
	2011	**56** – Na matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \ldots & 2 & 1 \\ 5 & \ldots & 3 \end{bmatrix}$ faltam 2 elementos. Se nessa matriz $a_{ij} = 2i - j$, a soma dos elementos que faltam é a) 4. b) 5. c) 6. d) 7.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>2010</td>
<td>

66 – Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$. O valor de (det A) : (det B) é

a) 4.
b) 3.
c) −1.
d) −2.

</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="5">Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx)</td>
<td>2019</td>
<td>

14 **Duas cidades A e B têm suas áreas urbanas divididas em regiões Comercial, Residencial e Industrial. A tabela 1 fornece as áreas dessas regiões em hectares para as duas cidades.**

A tabela 2, por sua vez, fornece os valores anuais médios de arrecadação, em milhões de reais por hectare, referentes ao Imposto Predial e Territorial Urbano (IPTU), ao fornecimento de energia elétrica e ao fornecimento de água.

Tabela 1

<table>
<tr><th></th><th>Área Comercial</th><th>Área Residencial</th><th>Distrito Industrial</th></tr>
<tr><td>Cidade A</td><td>10</td><td>25</td><td>42</td></tr>
<tr><td>Cidade B</td><td>8</td><td>12</td><td>18</td></tr>
</table>

Tabela 2

<table>
<tr><th></th><th>Área Comercial</th><th>Área Residencial</th><th>Distrito Industrial</th></tr>
<tr><td>IPTU</td><td>12</td><td>6</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Energia Elétrica</td><td>25</td><td>12</td><td>60</td></tr>
<tr><td>Água</td><td>15</td><td>10</td><td>50</td></tr>
</table>

Considere as matrizes T_1 e T_2, associadas respectivamente às tabelas 1 e 2.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 10 & 25 & 42 \\ 8 & 12 & 18 \end{bmatrix} \qquad T_2 = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 5 \\ 25 & 12 & 60 \\ 15 & 10 & 50 \end{bmatrix}$$

Seja a_{ij} os elementos da matriz resultante do produto $T_1 \cdot T_2^t$. Nessas condições, a informação contida no termo de ordem a_{22} desse produto de matrizes é o valor total arrecadado com

[A] fornecimento de energia elétrica nas áreas residenciais.

[B] fornecimento da água da cidade A.

[C] fornecimento da água nas áreas residenciais.

[D] IPTU nos distritos industriais.

[E] fornecimento de energia elétrica na cidade B.

</td>
</tr>
<tr>
<td>2018</td>
<td>Não houve questões de matrizes</td>
</tr>
<tr>
<td>2017</td>
<td>

15 **Uma matriz quadrada *A*, de ordem 3, é definida por** $a_{ij} = \begin{cases} i-j, \text{ se } i>j \\ (-1)^{i+j}, \text{ se } i \le j \end{cases}$.

Então det (A^{-1}) é igual a

[A] 4. [B] 1. [C] 0. [D] $\frac{1}{4}$. [E] $\frac{1}{2}$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>2016</td>
<td>

8 **Considere a matriz** $M = \begin{bmatrix} a & a^3 - b^3 & b \\ a & a^3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$**. Se *a* e *b* são números reais não nulos e det(M)=0, então o valor de $14a^2 - 21b^2$ é igual a**

[A] 15 [B] 28 [C] 35 [D] 49 [E] 70

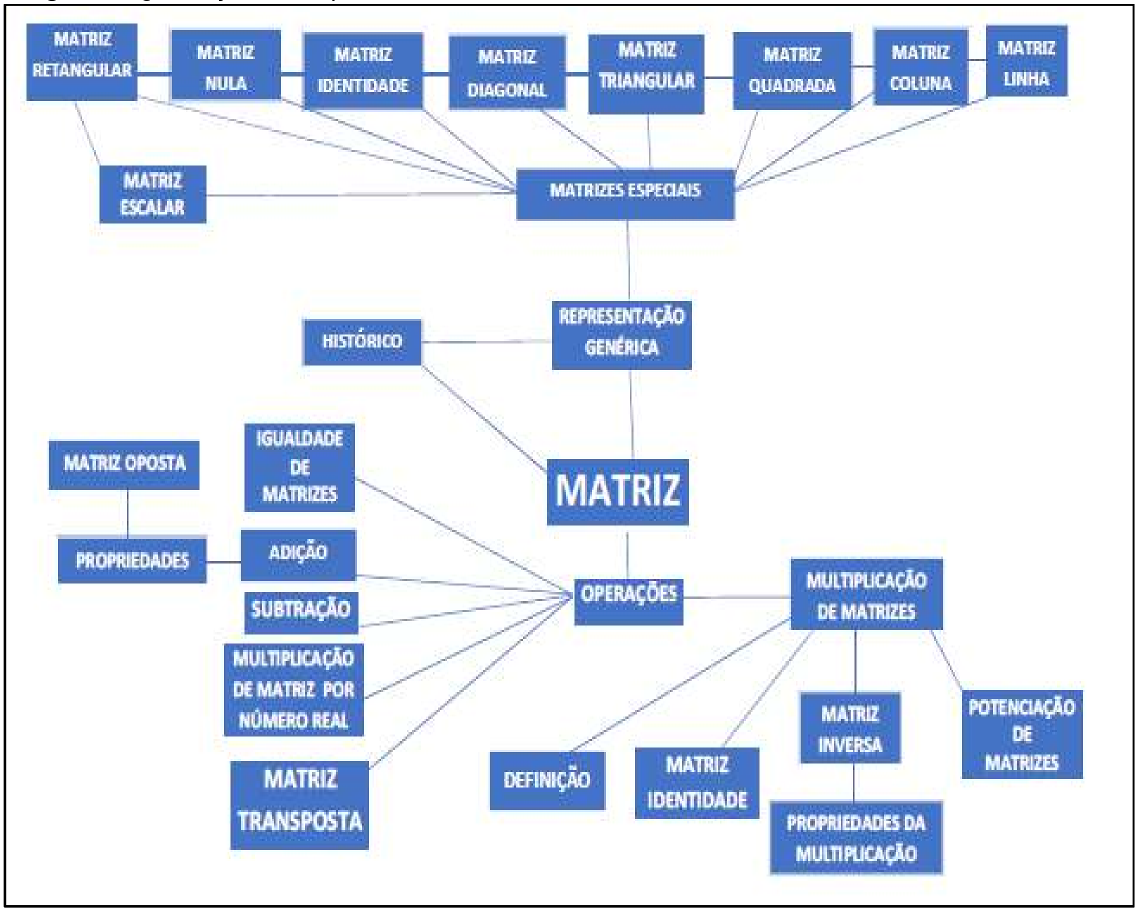
</td>
</tr>
<tr>
<td>2015</td>
<td>Não houve questões de matrizes</td>
</tr>
</table>

	2014	**14** Seja x um número real, I a matriz identidade de ordem 2 e A a matriz quadrada de ordem 2, cujos elementos são definidos por $a_{ij} = i - j$. Sobre a equação em x definida por $det(A - xI) = x + det A$ é correto afirmar que [A]as raízes são 0 e $\frac{1}{2}$. [B] todo x real satisfaz a equação. [C]apresenta apenas raízes inteiras. [D]uma raiz é nula e a outra negativa. [E]apresenta apenas raízes negativas.
	2013	**13** O elemento da segunda linha e terceira coluna da matriz inversa da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ é: [A] $\frac{2}{3}$ [B] $\frac{3}{2}$ [C] 0 [D] -2 [E] $-\frac{1}{3}$
	2012	**13** Considere as matrizes $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & x \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} x & y+4 \\ y & 3 \end{bmatrix}$ Se x e y são valores para os quais B é a transposta da Inversa da matriz A, então o valor de x+y é [A] -1 [B] -2 [C] -3 [D] -4 [E] -5
	2011	Não houve questões de matrizes
	2010	**14** Os números das contas bancárias ou dos registros de identidade costumam ser seguidos por um ou dois dígitos, denominados dígitos verificadores, que servem para conferir sua validade e prevenir erros de digitação. Em um grande banco, os números de todas as contas são formados por algarismos de 0 a 9, na forma abcdef-xy, em que a sequência (abcdef) representa, nessa ordem, os algarismos do número da conta e x e y, nessa ordem, representam os dígitos verificadores. Para obter os dígitos x e y, o sistema de processamento de dados do banco constrói as seguintes matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} (a-b) \\ (c-d) \\ (e-f) \end{bmatrix}$ Os valores de x e y são obtidos pelo resultado da operação matricial A.B=C, desprezando-se o valor de z. Assim, os dígitos verificadores correspondentes à conta corrente de número 356281 são [A] 34 [B] 41 [C] 49 [D] 51 [E] 54

Fonte: Autoria própria(2020)

H: MAPA CONCEITUAL DO ASSUNTO DE MATRIZES

Imagem: Organização do mapa conceitual



Fonte: Autoria própria (2019)

I: Diálogo entre professor e estudantes do grupo 1 na atividade 1

Professor: O que vocês identificaram na observação?
Estudante A: Que os dados estavam desorganizados.
Professor: Quando vocês organizaram os dados ficou melhor?
Estudante A: Sim ficou melhor. Até as regiões.
Professor: Qualquer pessoa agora poderia olhar para a tabela que vocês fizeram e buscar os resultados que ela queria?
Estudante A: Sim.
Professor: E antes, tava mais difícil antes?
Estudante B: Não.
Estudante A: Sim, tava difícil porque os dados estavam desorganizados.
Professor: Por exemplo quanto foi a inflação no nordeste no mês quatro, de acordo com a tabela desorganizada?
Estudante A: 1,1%
Professor: E quanto foi agora a inflação no Norte no mês dois?
Estudante A: 1,8%
Professor: Percebem que demora um pouco para achar os resultados?
Estudantes A: Sim.
Professor: De acordo com a tabela que vocês fizeram qual foi a inflação no Sudeste no mês cinco?
Estudante A: 2,5%, mais rápido.
Professor: O que vocês acham, quando está organizado melhora ou não?
Estudante A: Sim, melhora.
Professor: Qual seria então a conclusão?
Estudante A: Com a tabela pronta e organizada com as regiões e cada mês fica melhor. Organizada os meses e as regiões.

Fonte: Autoria própria, 2021

J: Diálogo entre professor e estudantes do grupo 2 na atividade 2

Professor: Leiam os procedimentos para depois fazer o que está pedindo na atividade.
Estudante E: Leu os procedimentos da atividade.
Professor: Vocês conseguem identificar? Quem é o a_{11}?
Estudante D: É esse?
Professor: É. Então, se achou o primeiro o resto ... É quem tá na primeira linha e na primeira coluna ao mesmo tempo.
Estudante D: Ai vou colocar o um aqui.
Professor: É. Entendeu? (Pergunta feita para o estudante E). Olha, esse elemento tá na primeira linha e na primeira coluna ao mesmo tempo.
Estudante E: Hum rum.
Professor: Quem é que tá na primeira linha e na primeira coluna?
Estudante E: O um.
Professor: Pronto, agora o restante é com vocês.
Estudante E: Ai tipo na segunda linha e segunda coluna ...
Professor: Não, é só dessa aqui (falando dos elementos da primeira matriz da tabela)
Estudante D: Esse aqui já é o dez, né?
Professor: Não, isso tudo aqui é só dessa aqui (falando dos elementos da primeira matriz da tabela)
Estudante D: Há tá. É dez?
Estudante C: Tipo, eu acho que não é o dez não, eu acho que é o zero.
Estudante D: Não, é a segunda linha e a primeira coluna.
Estudante C: Mas eles são juntos os números?
Estudante D: Não, aqui ô essa aqui não é a segunda linha, primeira linha.
Estudante C: Pois é, olha ...
Estudante D: É dez.
Estudante C: Há, tá certo. Porque eu pensava que tu tava falando esse dez aqui. (O estudante aponta para os dados da primeira matriz)
Estudante D: Não, esse aqui é o um e esse é o zero.
Professor: Como foi que você explicou?
Estudante C: Não, não por quê ... tá certo o que ela falou lá. (Se referindo a fala do estudante D)
Professor: Mas eu não vi.
Estudante C: Explica lá pra ele.
Estudante D: Não, esse aqui é a_{21} segunda linha e primeira coluna, que é 10.
Professor: Há tá.
Estudante E: Como é isso já?
Estudante C: É isso ai né? Menos cinco, cinco, ... É bom que não é tão difícil, eu pensava que ia ser mais difícil hoje.
Estudante D: Não sei mas essa aqui na atividade. Aqui é mais de cinco questões
Estudante C: É só isso aqui será?
Estudante D: Não, tem mais um papel com cinco questões.
Estudante C: Há tá.
Estudante E: Ainda vai ter aquelas atividades. (Se referindo as atividades de aprofundamento)
Estudante E: Tá?
Professor: Qual é esse aqui?
Estudante E: É o seis, terceira linha e segunda coluna.
Professor: Já terminou dá uma olhada se tá tudo certo, se não falta nenhum sinal. No caso aqui olha, menos seis daqui né, menos seis. (Orientando o estudante D)
Estudante D: Hum rum.
Professor: Quinze da aqui, né. E esse aqui da onde é?
Estudante E: Eu acho que é treze. (Respondendo para o estudante D)
Estudante D: Esqueci do um. [Risadas]
Professor: Isso acontece mesmo, a pessoa faz a conta certinho, ai na hora esquece de um, ai na resposta tem menos treze e marca.
Professor: Agora que vocês preencheram a tabela, leiam a pergunta abaixo.
Estudante E: Fez a leitura da questão.
Professor: De acordo com o que vocês fizeram aqui, preencheram a tabela. Qual a maneira mais fácil de encontrar qualquer elemento em uma matriz?
Estudante C: [Risadas] Agora um ficou olhando pro outro.
Professor: Sim olha, não foi dado essa localização aqui? Então, através dessa localização vocês acharam na matriz os elementos. Depois de vocês terem feito tudo isso aqui (Me referindo ao

preenchimento da tabela) qual a maneira mais rápido de encontrar qualquer elemento em uma matriz?
Estudante D: Olhando os números aqui? (Apontando para a tabela preenchida)
Professor: Não, esses números não estavam ai, foi vocês que colocaram, não foi? Vocês colocaram esses números aqui através de quem?
Estudante D: Da localização aqui.
Estudante C: Desses a_{11} é é a_{22} ...
Professor: Isso e o que significa esse 21 aqui?
Estudante C: 21 é a segunda linha...
Estudante E: Não, tem um nome né tio?
Professor: Não, falar é o quê?
Estudante C: Tipo aqui no caso né, é a segunda linha da primeira coluna. Aí ficou mais fácil de encontrar.
Professor: Pois é, é lá que tá os elementos que vocês colocaram aqui não foi?
Estudante C: Foi.
Professor: Aí a pergunta é qual a maneira mais rápido de localizar qualquer elemento em uma matriz? O que é que vocês tem que saber?
Estudante D: A localização.
Professor: Sim, e que é que vai te dar essa localização?
Estudante E: Linha e a coluna. A linha e a coluna é? Aí como é que tem que colocar essas palavras.
Professor: Ai você escreve como foi que tu entendeu né. Por exemplo porque aqui foi menos seis? Quem foi que te falou que esse elemento que tava aqui é menos seis? (Professor apontando para a tabela preenchida)
Estudante E: Foi a terceira linha da primeira coluna.

Fonte: Autoria própria, 2021

K: Diálogo entre professor e estudantes do grupo 3 na atividade 4

Professor: Bom, então nós estamos na quarta atividade, nessa atividade vocês vão ter que ler o procedimento e preencher esta folha aqui, olha, com tudo o que o procedimento fala, ai depois responde a questão, faz a observação e a conclusão. Leia os procedimentos, vê o que ele fala. (O professor solicita que o estudante I faça a leitura dos procedimentos)
Estudante I: (Fez a leitura dos procedimentos)
Professor: Alguma dúvida?
Estudante I: Sim.
Professor: Qual é a primeira?
Estudante I: Hum.
Estudante G: Eu tenho que marcar só a semelhante a essa? (O estudante estava apontando para a matriz que estava na tabela)
Professor: Mostra aqui olha, olha aqui, olha, não tem a matriz A aqui, não tem a matriz A, vão olhar nessas aqui de cima quais são as matrizes que tem os mesmos elementos da mesma posição e também a mesma ordem. Qual é a ordem dessa matriz aqui da A? É três por dois, três linhas e duas colunas, não é isso? Tá, ai olha aqui nessa de cima, quais são as matrizes que tem a mesma características ...
Estudante G: Linhas e colunas
Professor: Isso, de elementos e marca com xis.
Estudante G: Ai então eu poderia marcar essa? (O estudante estava apontando para uma das matrizes dada na tabela)
Professor: Mas olha, é igual a A?
Estudante G: Sim, porque tem linhas e colunas igual ao da A.
Professor: Não, não é só ..., olha, olha o procedimento, logo após, marque com xis as matrizes que possuem as mesmas ordens, tá, e tem elementos correspondentes iguais. Olha, por exemplo aqui a matriz A é igual a matriz A?
Estudante G: Hum rum.
Professor: Então aqui marca um xis, porque tem os mesmos elementos. O dois tá no primeiro elemento. Ai vem olhando aqui, pega a matriz A e olha todas aqui, vê qual é, se tem mais alguma igual. (O professor estava mostrando para os estudantes qual a maneira correta de fazer as marcações com o xis nas matrizes que possuíssem as características descritas no procedimento)
Estudante G: Tem.
Professor: Pois é, então é isso que tem que fazer.
Estudante G: Só pode ser semelhante a essa, idêntica em tudo.
Professor: Isso.
Estudante G: professor venha cá.
Professor: Oi.
Estudante G: Eu posso marcar essa?
Professor: Hum, três por dois aqui a ordem não é isso? É a mesma ordem?
Estudante G: Mesma ordem.
Professor: Hum. Muito bem.
Estudante F: Ai, sai da A e vai para a B né? Ai faz a mesma comparação?
Professor: Mesma comparação.
Estudante I: Há, eu vou ler a B.
Estudante F: Eu só quero que, que dê uma observada aqui se tá ..., se deixei de marcar alguma ou se tô marcando ..., essa é a A. (O estudante estava mostrando a tabela para o professor verificar se as marcações estavam corretas)
Professor: Olha, essa matriz é a matriz, é a matriz C, os elementos são igual aqui da C?
Estudante F: Não, os elementos não, só a ordem.
Professor: Pois é, tem que ter as duas coisas.
Estudante F e H: Há tá.
Professor: A ordem e os elementos iguais.
Estudante F: Hum. Oquei agora que peguei a jogada. [...] Tem que ter a mesma ordem e os mesmos elementos. Interessante.
Estudante G: Acabei.
Estudante F: Acabou de marcar mas olha a folha ai pra responder. [Risadas]
Professor: Já que tu já terminou olha, olhando para a folha aqui, quais as matrizes que tem ao mesmo tempo as mesmas ordens e os elementos correspondentes iguais, o que é que tu vai colocar? Tu vai colocar os pares AA vírgula, entendeu?
Estudante G: Há, entendi.

Professor: Vai colocar os pares, aí colocar primeiro todo os pares de A, depois coloca todo mundo de B e assim por diante.
Estudante G: Mas, aqui pula o B né?
Professor: Não, o B não tem aqui?
Estudante G: Há tá bem aqui. [Risadas]
Professor: Já tinha estudado matemática assim? (O professor fez a pergunta para o estudante G)
Estudante G: Não.
Professor: O que tu tá achando?
Estudante G:Hum um, interessante.
Professor: [...] Eu não gostava, como é? (O professor é surpreendido pela declaração do estudante H sobre a matemática)
Estudante H: Eu não gostava de matemática mas do jeito que o senhor tá ensinando, assim é bem interessante, tá legal, tipo uma ...
Professor: Fica mais fácil?
Estudante H: Fica mais fácil.
Professor: Tu consegue apreender sozinha ou eu tô comentando alguma coisa?
Estudante H: Não, o senhor explicou assim, olha ainda agora o senhor sentou aqui olha, me mostrou como era ai ficou mais fácil. Viu que desse aqui o senhor não precisou ficar ..., e eu já fui, é, ficou mais fácil.
Professor: Conseguiste fazer sozinha né?
Estudante H: Foi. [...] Ai é, depende de como o professor tá explicando, como é que ele tá explicando, tem toda uma dinâmica ai, principalmente matemática né que o aluno geralmente, a maioria das pessoas não gosta da matemática.
Professor: E esse assunto, como você falou, ainda não tinha visto né.
Estudante H: Eu ainda não tinha visto, eu não tinha nem noção do que era ...
Professor: E se os outros professores ensinassem dessa maneira, o que você acha, seria mais fácil ensinar matemática?
Estudante H: Seria mais fácil, mais fácil sim.
Professor: Tá bom.
Estudante H: Não ia ser tão complicado.
Estudante I: Deixa eu olhar a da minha colega, porque se eu errar eu levo ela comigo. É, tá todo mundo igual. Se errar, todo mundo erra junto. (Após essa fala o estudante leu a pergunta da questão)
Professor: Tem que colocar os pares.
Estudante I: Hum
Estudante G: O que eu faço nas observações?
Professor: Todas as matrizes que tem as mesmas ordens, que tem as mesmas ordens elas são iguais?
Estudante G: Sim.
Professor: São?
Estudante G: Sim.
Professor: Mesma ordem, olha, mesma ordem. Elas são iguais?
Estudante G: Não.
Estudante I: Mesma ordem?
Estudante F: Mas como eu organizo isso aqui? Eu tenho que colocar ...
Estudante G: Aqui começa assim primeiro acha a de A, depois vai pra B, depois vai pra C ....
Professor: Vai colocar pares AA vírgula A ..., e termina o A e vai para o B.
Estudante G: Ai depois passa pro B, B vai contar, depois C, C vai contar. E ai continuando. (O estudante estava questionando o professor como ele deveria fazer a observação)
Professor: É você que tem que observar, né. Olha veja a matriz A ela é igual a matriz A?
Estudante G: Sim.
Professor: Porquê?
Estudante G: porque ela tem ...
Professor: Os elementos correspondentes, o que, iguais e o que mais? Mesma ...
Estudante G: Linhas e colunas.
Professor: Mesma ordem, isso. E a matriz A e C porque elas não é iguais?
Estudante G: Porque ela não tem os mesmos elementos.
Professor: Mas a ordem é a mesma?
Estudante G: Sim
Professor: Entendeu?
Estudante G: (O estudante sacudiu a cabeça, mas ainda com muita dúvida)

Professor: O que foi que tu observou, foi isso que tu observou, o que tu acabou de falar ai.
Estudante I: Pronto, observação, porque tem que ter toda vez isso? Como fazer essa observação?
Professor: Olha a tabela que você acabou de preencher.
Estudante I: Hum rum.
Professor: Ai vou dá um exemplo e você vai criar a sua resposta tá. A matriz A e A são iguais?
Estudante I: Hum rum.
Professor: Porquê?
Estudante I: Tem o mesmo números.
Professor: Porque ela satisfez o que o procedimento falou aqui olha, né, marque as matrizes que possuem as mesmas ordens, olha, não é três por dois, três por dois e tem os mesmos elementos. Não tem os mesmos elementos aqui? Porque tu não marcou A e C, não tem a mesma ordem?
Estudante I: Tem.
Professor: Os elementos são iguais?
Estudante I: Não.
Professor: Entendeu, essa é a observação que tem que fazer. Não quer dizer que só porque as matrizes são da mesma ordem que elas vão ser iguais. Tem que satisfazer as duas condições.
Estudante I: Vou esperar a colega. (Olhando para a estudante F) Eu não tenho uma ideia.
Professor: Tua resposta tá aqui. Pega a matriz B, a matriz B, ela é igual a matriz F?
Estudante I: hum rum.
Professor: Porquê? Mesma ordem e os elementos correspondentes iguais. Mas a matriz B poder ser igual a qualquer outra matriz dessa aqui, que não seja a B e a F?
Estudante I: Não.
Professor: Porquê?
Estudante I: Porque não tem elementos iguais.
Estudante F: Nem a mesma ordem.
Professor: E a ordem são diferentes. Tá, então é essa a observação que você coloca lá.
Estudante F: As matrizes só serão iguais se tiverem as mesmas ordens e os mesmos elementos, porque são os procedimentos.
Professor: Na observação você vai dizer que nem todas as matrizes são iguais ...
Estudante G: Acabei.
Professor: Falta a conclusão. [...] Que nem todas as matrizes são iguais porque a pesar delas terem as mesmas ordens, mas só isso não garante que elas sejam iguais. Pra serem iguais os elementos correspondentes também são iguais. Ai quando acabar dali, já acabou. (O professor fez a pergunta para o estudante F)
Estudante F: Não professor, só toou ainda ciscando aqui.
Professor: Não, a observação já colocou?
Estudante F, G, H e I: Já.
Professor: Então vamos juntos fazer a conclusão. Qual é o título aqui do trabalho?
Estudante G: Igualdade de matrizes.
Professor: Ai o objetivo era descobrir as condições para a igualdade de matrizes, para que ocorra a igualdade de matrizes. Então, quando é que duas matrizes são iguais?
Estudante G: Quando elas, elas tem que ter as mesmas ordens e os mesmos elementos
Professor: Elas tem que ter a mesma ordens e os elementos correspondentes tem que ser iguais. Concordam com isso?
Estudante F, G, H e I: Sim, concordo.
Professor: Então é só escrever isso.
Estudante I: O quê?
Estudante F: As conclusões.
Professor: É.
Estudante F: Mas não é a mesma coisa da observação?
Professor: Não. Na observação, não sei como, como você fez na observação?
Estudante F: Eu coloquei que elas só serão iguais se tiverem os mesmos elementos na mesma ordem.
Estudante G: Eu dei um exemplo pra ficar diferente da conclusão.
Professor: A observação é, quando você preencheu o quadro aqui, porque não foi preenchido a matriz A e C, elas não tem a mesma ordem? A e C tem a mesma ordem?
Estudante F: Tem a mesma ordem.
Professor: E os elementos correspondentes são iguais?
Estudante F: Não, não são.
Professor: Entendeu, é essa a observação que tem de ser feita.

Estudante F: Por isso que eu dei um exemplo. **Professor**: Porque apesar delas terem a mesma ordem só isso não garante que elas são iguais, elas tem que satisfazer as condições que o procedimento deu. **Estudante G**: Acabei. **Professor**: Ok. **Estudante F**: Eu ainda não, falta fazer a conclusão. **Estudante G**: Acabou? **Professor**: Ainda não, só acaba quando todos fizerem a conclusão.

Fonte: Autoria própria, 2021

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Trav. Djalma Dutra, s/nº – Telégrafo
66113-010 Belém-PA
www.uepa.br