



Universidade do Estado do Pará
Pró Reitoria de Pesquisa e Pós graduação
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Ensino Médio.

MARTINHO MOTA DIAS JUNIOR

**ENSINO DE INEQUAÇÕES
LOGARITMICAS USANDO GEOGEBRA**

BELÉM/PA

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Dias Junior, Martinho Mota

Ensino de inequações logarítmicas usando geogebra / Martinho Mota Dias Junior, orientador; Fábio José da Costa Alves, 2021.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) –
Universidade do Estado do Pará, Belém, 2021.

1. Ensino auxiliado por computador (Ensino médio). 2. Logaritmo. 3. Ensino de matemática. 4. Geogebra I. Alves, Fábio José da Costa (orient.). II. Título.

CDD. 23º ed. 513.22

Elaborada por Regina Coeli A. Ribeiro – CRB-2/739

MARTINHO MOTA DIAS JUNIOR

**ENSINO DE INEQUAÇÕES
LOGARITMICAS USANDO GEOGEBRA**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática pelo Programa de mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Ensino Médio.

Orientador: Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves.

BELÉM/PA

2021

MARTINHO MOTA DIAS JUNIOR

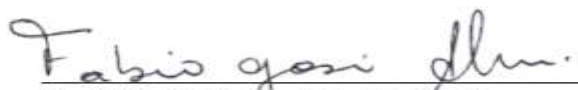
ENSINO DE INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS USANDO GEOGEBRA

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Ensino Médio.

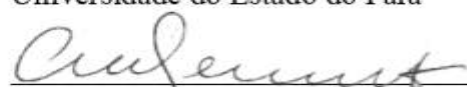
Orientador: Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves

Data de aprovação: 17/09/2021

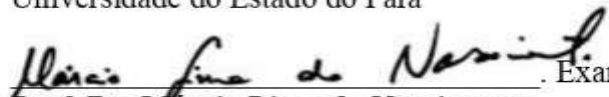
Banca examinadora

 . Orientador
Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves

Doutor em Geofísica – Universidade Federal do Pará – UFPA
Universidade do Estado do Pará

 . Examinador Interno
Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira

Doutora em Bio Informática – Universidade Federal do Pará – UFPA
Universidade do Estado do Pará

 . Examinador Externo
Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento

Doutor em Matemática Aplicada – Universidade Pontifícia Católica / USP
Universidade Federal do Pará

Belém – PA

2021

AGRADECIMENTOS

Agradeço a priori a **Deus** pela oportunidade de poder concluir este aprendizado.

A minha digníssima e querida mãe **Marília Nazaré Vasconcelos Dias** que sempre quer ver o seu filho feliz.

A minha querida esposa **Rosilda Nery da Conceição** que com muita paciência e compreensão suportou as minhas ausências no laço familiar.

Aos meus queridos filhos **Kauã da Conceição Dias e Alicia da Conceição Dias** que são a motivação para o meu sucesso.

Aos meus sobrinhos **Hugo e Jade Valente** pelas ajudas constantes durante o meu curso.

A minha família, irmão, sobrinhos, tios e tias que sempre torcem pelo meu sucesso.

Aos meus amigos: **Maria de Nazaré Ferreira Pereira, Antônio Menezes Pereira** pelo apoio quando foi necessário.

Aos meus amigos do curso de mestrado 2019.

Aos queridos professores do curso de mestrado da UEPA, nos quais eu me espelho, exemplos para toda vida.

Ao meu Orientador de Mestrado o Prof. Dr. **Fábio José da Costa Alves** pelo apoio e orientação deste trabalho.

*“Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que
ensina.*

O saber se aprende com mestres e livros.

*A sabedoria, com o corriqueiro, com a vida e com os
humildes.*

*O que importa na vida não é o ponto de partida, mas a
caminhada.*

Caminhando e semeando, sempre se terá o que colher.”

Cora Coralina

RESUMO

JÚNIOR, Martinho Mota Dias. **ENSINO DE INEQUAÇÕES LOGARITMICAS USANDO GEOGEBRA**. Dissertação do Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2021.

A presente pesquisa buscou investigar a eficiência de uma sequência didática para o ensino de inequações logarítmicas aplicada a um grupo de estudantes do ensino médio (2º e 3º anos) de uma escola estadual situado na cidade de Tucuruí-PA através do uso de um software (Geogebra). O objetivo principal desta dissertação é estudar por meio da Gênese Instrumental o ensino de Inequação Logarítmica utilizando-se como instrumento o Geogebra sob a ótica de Pierre Rabardel e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Durval no intuito de se obter uma eficácia do ensino proposto de uma sequência didática. As perguntas investigativas da dissertação foram: “De que maneira ocorre a Gênese Instrumental no ensino de Inequação Logarítmica usando o Geogebra em estudantes do 1º ano do ensino médio? E uma sequência didática para o ensino de inequações logarítmicas, com auxílio do aplicativo Geogebra potencializa a aprendizagem deste assunto?” Na metodologia utilizamos o ambiente do Meet para a explanação da pesquisa e coleta de dados, usando-se para isso gravações (visual e áudio) que o próprio software possui, por ser um meio de comunicação eficiente e muito usado atualmente. O professor facilitador fez as orientações possíveis e sempre instigando seus estudantes para a realização da pesquisa. As conclusões do trabalho indicaram que a estratégia metodológica aplicada com o intermédio do software proporcionou aos estudantes um processo de desenvolvimento cognitivo sobre o ensino de Inequação Logarítmica.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, Gêneses Instrumental, Registro de Representação Semiótica, Inequação Logarítmica, Geogebra.

ABSTRACT

JÚNIOR, Martinho Mota Dias. **TEACHING LOGARITHMIC INEQUACIES USING GEOGEBRA**. Dissertação do Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2021.

The present research sought to investigate the efficiency of a didactic sequence of a group of high school students (2nd and 3rd years) from a state school located in the city of Tucuruí-PA through the use of software (Geogebra). The main objective of this dissertation is to study, through Instrumental Genesis, the teaching of Logarithmic Inequation using as instrument Geogebra from the perspective of Pierre Rabardel and Raymond Durval's Theory of Semiotic Representation Records in order to obtain an efficiency of proposed teaching of a didactic sequence. The investigative questions of the dissertation were: "How does Instrumental Genesis occur in the teaching of Logarithmic Inequation using Geogebra in students of the 1st year of high school? And does a didactic sequence for teaching logarithmic inequalities, with the help of the Geogebra application, enhance the learning of this subject?". The methodology used was the Meet environment for the explanation of research and data collection, using recordings (visual and audio) that the software itself has, for being an efficient and widely used means of communication today. The facilitating teacher made possible orientations and always instigating his students to carry out the research. The conclusions of the study indicated that the methodological strategy applied with the software provided the students with a process of cognitive development on the teaching of Logarithmic Inequation.

Keywords: Teaching of Mathematics, Instrumental Genesis, Registration of Semiotic Representation, Logarithmic Inequation, Geogebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1- Interseção de Retas	26
Figura 2 - Interseção de Retas	27
Figura 3 - Modelo das Situações de Atividades Instrumentais	30
Figura 4 - Tela Principal Geogebra	43
Figura 5 - Ambiente do Geogebra	47
Figura 6 - Extensão do Geogebra	47
Figura 7- Inserir Planilha do Geogebra	47
Figura 8 - Coluna do Excel Geogebra	48
Figura 9 - Análise Bivariada Geogebra	48
Figura 10 - Pontos de Coordenadas Geogebra.....	49
Figura 11- Modelo de Regressão Geogebra	49
Figura 12 - Funções Geogebra	50
Figura 13 - Linear Geogebra	50
Figura 14 - Polinomial Geogebra.....	51
Figura 15 - Exponencial e Crescimento Geogebra.....	51
Figura 16 - Exponencial Geogebra.....	52
Figura 17- Outras funções Geogebra.....	52
Figura 18 - Lista de Pontos Geogebra	55
Figura 19- Fixação dos Pontos Geogebra.....	55
Figura 20 - Reduzir Tela Geogebra.....	56
Figura 21- Visualização de Todos os Pontos Geogebra	56
Figura 22- Ajuste de Pontos Geogebra	57
Figura 23- Visualização dos Pares Ordenados Geogebra	58
Figura 24 - Imagens da Função Geogebra	60
Figura 25 - Solução das Equações Geogebra.....	60
Figura 26 - Retas Perpendiculares Geogebra	61
Figura 27- Pares Ordenados e Retas Perpendiculares Geogebra	61
Figura 28 - Imagens da Desigualdade Geogebra.....	62
Figura 29 - Determinação do Domínio Geogebra.....	62
Figura 30 - Identificando o Gráfico na Solução Geogebra	63
Figura 31 - Solução da Inequação Geogebra	64
Figura 32 - Solução da Inequação Geogebra	65
Figura 33 - Indicação da Solução Geogebra.....	65
Figura 34 - Função Decrescente Geogebra	66

Figura 35 - Localização de Pontos Geogebra	67
Figura 36 - Indicação da Solução Geogebra.....	67
Figura 37 - Interseção da Reta com o gráfico Geogebra	68
Figura 38 - Solução em Vermelho Geogebra.....	68
Figura 39 - Planilha de Cálculo Geogebra	70
Figura 40 - Tabela Inversa Geogebra	71
Figura 41 - Lista de Pontos Geogebra	71
Figura 42 - Pontos no Gráfico Geogebra	72
Figura 43 - Exibir Tudo Geogebra.....	72
Figura 44 - Função Crescente Geogebra.....	73
Figura 45 - Reta Perpendicular Geogebra	73
Figura 46 - Apresentação do geogebra.....	82
Figura 47- Localização de pontos	83
Figura 48 - Pontos.....	84
Figura 49 - Reta e Segmento de reta.....	85
Figura 50 - Retas perpendiculares	86
Figura 51 - Solução de Equação.....	87
Figura 52 - Função decrescente.....	90
Figura 53 - Função do 2º Grau.....	91
Figura 54 - Função exponencial	93
Figura 55 - Função Inversa	93
Figura 56 - Função Inversas.....	94
Figura 57 - GOOGLE	95
Figura 58 - Geogebra Internet.....	96
Figura 59 - Geogebra Classic.....	96
Figura 60 - Ícones do meet.....	97
Figura 61 - apresente agora.....	97
Figura 62 - Opções de telas	97
Figura 63 - Compartilha tela.....	98
Figura 64 - 1ª atividade - Tabela	98
Figura 65 - Ícone triângulo e Círculo	99
Figura 66 - Opções.....	99
Figura 67 - Planilha	100
Figura 68 - Inserção de valores.....	100
Figura 69 - Representação gráfica.....	101

Figura 70 - Funções para plotagens.....	101
Figura 71 - Função Linear	102
Figura 72 - Função polinomial	102
Figura 73 - Função Exponencial.....	103
Figura 74 - Plotagem da Tabela	103
Figura 75 - Fatoração	104
Figura 76 - Fatoração em números primos	105
Figura 77 - Função exponencial	105
Figura 78 - Primeira questão Item a	106
Figura 79 - Item b da 1ª questão	107
Figura 80 - Resposta do item b para $y = 64$	108
Figura 81 - Resposta do item b para $y = 128$	108
Figura 82 - Resposta do item b para $y = 1024$	109
Figura 83 - Resolução Algébrica	109
Figura 84 - Demonstração gráfica	111
Figura 85 - Solução da Inequação	111
Figura 86 - Item d da primeira questão	112
Figura 87 - Resposta do item d	113
Figura 88 - Item E da primeira questão.	114
Figura 89 - y maior e igual a cinco	114
Figura 90 - Determinação do valor x	115
Figura 91 - Solução da inequação para $f(x)$	116
Figura 92 - Atividade 2 - Função Inversa	116
Figura 93 - Criar tabela no Excel.....	117
Figura 94 - Opções de seleção	117
Figura 95 - Planilha	118
Figura 96 - Preenchimento da tabela	118
Figura 97 - Seleção da tabela	119
Figura 98 - Lista de pontos.....	119
Figura 99 - Segunda Atividade	120
Figura 100 - Função Logaritmo	121
Figura 101- Plotagem do gráfico	121
Figura 102 - Erro na plotagem dos pontos	122
Figura 103 - Correção	122
Figura 104 - Valor de y	123

Figura 105 - Soluções	124
Figura 106 - Solução do logaritmo	124
Figura 107 - Solução do logaritmo para $y = 4$	125
Figura 108 - Solução para o $y = 4$	126
Figura 109 - Segunda questão da 2ª atividade	126
Figura 110 - Solução da segunda questão da 2ª atividade.	127
Figura 111 - Um erro corrigido	128
Figura 112 - Resposta do E1.....	129
Figura 113 - Terceira questão da 2ª atividade.....	129
Figura 114 - Interseção entre dois objetos	130
Figura 115 - Interseção entre os objetos.....	131
Figura 116 - Reta perpendicular	132
Figura 117 - Valor 2,81.....	132
Figura 118 - Valores de x negativo.....	134
Figura 119 - Cálculo de $f(x)$, para $x = 4$	135
Figura 120 – Cálculo algébrico.....	135
Figura 121 - Resolução algébrica - Fatoração	135
Figura 122 - Resolução - propriedade do Logaritmo	136
Figura 123 - Soluções	136
Figura 124 - Solução para $x = 1/16$	137
Figura 125 - Ponto e reta	138
Figura 126 - Substituição	139
Figura 127 - O valor de $\log_5$ na base 2.	139
Figura 128 - Área hachurada.....	141
Figura 129 - $\log x$ na base 2 maior que 3, $x = 8$	141
Figura 130 - Para $x < 8$	142
Figura 131 - Parte pintada.....	143
Figura 132 - Sinal da função	143
Figura 133 - Base $0 < x < 1$	144
Figura 134 - Solução da inequação.....	145
Figura 135 - Solução da inequação $y > 5$	145
Figura 136 - Introdução do Geogebra - E2.....	147
Figura 137 - Localização de pontos	148
Figura 138 - Ponto de interseção	150
Figura 139 - Exemplo de interseção entre dois objetos	150

Figura 140 - Ícones	151
Figura 141 - Segmento de reta.....	151
Figura 142 - Reta	151
Figura 143 - Reta - representação	152
Figura 144 - Reta Perpendicular	153
Figura 145 - Mover janela de visualização	153
Figura 146 - Fatores Primos.....	155
Figura 147 - Fatoração do 8.....	156
Figura 148 - Fatoração de 16.....	156
Figura 149 - Fatoração 32.....	157
Figura 150 - Função constante.....	159
Figura 151 - Imagem de um ponto.	160
Figura 152 - A imagem da função para $x = -3$	161
Figura 153 - Equação do 1º grau.	161
Figura 154 - Função crescente - Exp.1	163
Figura 155 - Função do 1º grau - decrescente	164
Figura 156 - Função do 1º grau - Decrescente	165
Figura 157 - $y > 2$	166
Figura 158 - Valores menores ou iguais a 2.....	167
Figura 159 - Valores $x > 2$	167
Figura 160 - Para x menores ou iguais a 2	168
Figura 161- Função quadrática	169
Figura 162 - Imagens da função.....	169
Figura 163 - Valores para x	170
Figura 164 - Função exponencial.....	171
Figura 165 - Função decrescente.....	171
Figura 166 - Forma algébrica	172
Figura 167 - Forma gráfica.....	172
Figura 168 - Forma algébrica - Exponencial.....	173
Figura 169 - Forma Gráfica - Exponencial	173
Figura 170 - Inequações exponenciais.....	174
Figura 171 - Solução da inequação exponencial.....	175
Figura 172 - $y > 3$	176
Figura 173 - $x > 1,58$	176
Figura 174 - $x < 1,58$	177

Figura 175 - Função logarítmica - crescente	178
Figura 176 - Função logarítmica - decrescente	179
Figura 177 - Cálculo de $f(3)$ na função logarítmica crescente	180
Figura 178 - Modo gráfico - $F(3)$	181
Figura 179 - Soluções em logaritmos.....	181
Figura 180 - Graficamente	182
Figura 181- Função Logarítmica	183
Figura 182 - $y = 3$ no logaritmo	183
Figura 183 - Interseção entre dois objetos	184
Figura 184 - Reta perpendicular.....	184
Figura 185 - $y > 3$ - Inequação Logarítmica.....	185
Figura 186 - Solução $x > 8$	186
Figura 187 - Escolha errada.....	187
Figura 188 - Ícone com uma figura de triângulo e círculo	187
Figura 189 - Aba do ícone Triângulo círculo	188
Figura 190 - Planilha	188
Figura 191 - Excel no Geogebra	188
Figura 192 - Tabela da 1ª atividade	189
Figura 193 - Tabela preenchida	189
Figura 194 - Tabela selecionada.....	190
Figura 195 - Criar	190
Figura 196 - Outras opções.....	191
Figura 197 - Pontos Coordenados	191
Figura 198 - Deletar o Excel.....	192
Figura 199 - Fechar.....	192
Figura 200 - Retorno a dois ambientes	192
Figura 201 - Gráfico da exponencial	193
Figura 202 - Questão "a" da 1ª atividade	194
Figura 203 - $x = 7$	195
Figura 204 - Ponto de interseção de dois objetos	195
Figura 205 - Ponto G.....	196
Figura 206 - $x = 9$	196
Figura 207 - Interseção entre dois objetos	197
Figura 208 - Ponto G.....	197
Figura 209 - Usando a parte algébrica do geogebra.....	198

Figura 210 - Questão b - 1ª Atividade.	198
Figura 211 - Calcular o valor x.	199
Figura 212 - Interseção entre dois pontos, ponto H.	199
Figura 213 - Soluções.	200
Figura 214 - Para $y = 128$	200
Figura 215 - Forma Gráfica.	200
Figura 216 - Questão "c" da primeira Atividade.....	201
Figura 217- $y > 4$	202
Figura 218 - Linha cheia.....	202
Figura 219 - Solução de $y > 4$	203
Figura 220 - $x = 2$	204
Figura 221 - $x > 2$ Solução.....	204
Figura 222 - Resposta errada.....	205
Figura 223 - Questão d da 1ª atividade.....	206
Figura 224 - $y < 8$	206
Figura 225 - Resposta: $x < 3$	207
Figura 226 - Resposta errada.....	208
Figura 227 - Questão e da 1ª atividade.....	208
Figura 228 - Função decrescente.....	209
Figura 229 - y maior ou igual a meio.....	209
Figura 230 - O valor de x para y igual a meio.....	210
Figura 231 - Pintado duas vezes.....	210
Figura 232 - Se fosse x maior ou igual a um.....	211
Figura 233 - Leitura da segunda atividade.....	212
Figura 234 - Inserção de dados invertidos.....	212
Figura 235 - Criar lista de pontos.....	213
Figura 236 - Criar pontos.....	213
Figura 237 - Função logarítmica.....	214
Figura 238 - Primeira questão - segunda atividade.....	214
Figura 239 - $y = 1$	215
Figura 240 - $Y = 2$	215
Figura 241 - Solução para $y = 3$	216
Figura 242 - Segunda questão da segunda atividade.....	217
Figura 243 - Cálculo do $f(1)$	217
Figura 244 - Outra forma de se calcular o y.....	218

Figura 245 - Leitura da 3ª questão da 2ª atividade.....	219
Figura 246 - Calcula o valor de $x = 7$	219
Figura 247 - Valores negativos.....	220
Figura 248 - Valor de $y = -4$	221
Figura 249 - Determinação do valor x	221
Figura 250 - Quarta questão da 2ª atividade.....	222
Figura 251 - Cálculo do log	222
Figura 252 – Quinta e Sexta questões da segunda atividade.	222
Figura 253 - Função Logarítmica	223
Figura 254 - y maior que 3.	223
Figura 255 - Resposta da inequação: $x > 8$	224
Figura 256 - Questão sete da segunda atividade.....	224
Figura 257 - Função logarítmica.....	225
Figura 258 - $y < 5$	225
Figura 259 - Solução da inequação.....	226
Figura 260 - Solução pelo gráfico.....	226
Figura 261 - Apresentações dos Estudantes e pesquisador	228
Figura 262 - Geogebra Classic.....	228
Figura 263 - Visualização do geogebra.....	229
Figura 264 - Localização dos ícones.....	230
Figura 265 - Localização do plano cartesiano	230
Figura 266 - Plano cartesiano	231
Figura 267 - Localização da Entrada.....	231
Figura 268 - Apagar em entrada	232
Figura 269 - Ponto A	232
Figura 270 - Determinação do ponto A no 1º quadrante	233
Figura 271 - Determinação do ponto B	233
Figura 272 - Ponto no 3ºquadrante	234
Figura 273 - Determinação do ponto D	234
Figura 274 - Ponto de interseção entre dois objetos	235
Figura 275 - Ponto de interseção	235
Figura 276 - Ponto E	236
Figura 277 - Reta perpendicular	236
Figura 278 - Reta perpendicular e um ponto	237
Figura 279 - Move janela de visualização	237

Figura 280 - Lupa + ou -	238
Figura 281 - Reta passando por 5.	239
Figura 282 - Função constante.....	239
Figura 283 - Função do 1º Grau.....	240
Figura 284 - Exemplos de função do 1º grau	241
Figura 285 - Função quadrática	241
Figura 286 - Função quadrática decrescente.....	242
Figura 287 - Gráfico da Exponencial.	242
Figura 288 - Exemplo de função exponencial	243
Figura 289 - função exponencial decrescente.....	243
Figura 290 - Função exponencial crescente - fração imprópria.....	244
Figura 291 - Função log.	244
Figura 292 - Função logarítmica crescente.	245
Figura 293 - Função logarítmica crescente e fração imprópria.	245
Figura 294 - Função constante - imagem.....	246
Figura 295 - Imagem e domínio - função constante.	247
Figura 296 - Coordenadas dos pontos na função constante.....	247
Figura 297 - Imagem da função constante.....	247
Figura 298 - Função do 1º grau.....	248
Figura 299 - Coordenada do ponto b na reta do 1º grau.....	248
Figura 300 - Raízes da função quadrática.	249
Figura 301 - Valores de x para $y = 5$	249
Figura 302 - Valores de x.	250
Figura 303 - Determinação dos valores x.....	250
Figura 304 - Retas perpendiculares.	251
Figura 305 - Função exponencial crescente.....	251
Figura 306 - Função exponencial e $y = 3$	252
Figura 307 - Função exponencial e ponto de interseção.....	252
Figura 308 - Função exponencial - reta perpendicular.	253
Figura 309 - Função exponencial e $x = 1,58$	253
Figura 310 - Imagem de $x = 2$	254
Figura 311 - Função exponencial e ponto	254
Figura 312 - Função exponencial e perpendicular	255
Figura 313 - Função exponencial e determinação do ponto.	255
Figura 314 - Função logarítmica decrescente.	256

Figura 315 - Função logarítmica e $y = 2$	256
Figura 316 - Função logarítmica e valor de x	257
Figura 317 - Função logarítmica e base maior que 1.	257
Figura 318 - Função logarítmica e $y = 3$	258
Figura 319 - Função logarítmica e ponto de interseção	258
Figura 320 - Função logarítmica e determinação de y	259
Figura 321- Função logarítmica e $x = 5$	259
Figura 322 - Função exponencial e ponto de interseção.....	260
Figura 323 - Função logarítmica e $x > 2$	260
Figura 324 - Função exponencial e x maior ou igual 2.....	261
Figura 325 - Imagens pintadas duas vezes.....	261
Figura 326 - y menor ou igual a 4.....	262
Figura 327 - Primeira Atividade.	263
Figura 328 - Inserção de dados.....	263
Figura 329 - Planilha.	264
Figura 330 - Inserir dados na planilha.	264
Figura 331 - Excel	265
Figura 332 - Tabela no Excel.	266
Figura 333 - Criar	266
Figura 334 - Lista de pontos.....	267
Figura 335 - Pontos na parte gráfica do geogebra	267
Figura 336 - Apagar tabela.....	268
Figura 337 - Três pontinhos.	268
Figura 338 - Fechar.....	269
Figura 339 - Mover.	269
Figura 340 - Clicar e arrastar.....	270
Figura 341 - Pontos na parte gráfica do geogebra.	271
Figura 342 - Digitar expressão.	271
Figura 343 - Questão a	272
Figura 344 - $x = 7$	272
Figura 345 - Interseção entre dois objetos.	273
Figura 346 - Interseção.	274
Figura 347 - Imagem do 9.	274
Figura 348 - valor de y	275
Figura 349 - Item b da 1ª atividade.	276

Figura 350 - $y = 64$.	277
Figura 351 - Interseção de dois objetos - 1ª atividade.	278
Figura 352 - Ponto A - 1ª Atividade.	279
Figura 353 - Soluções.	279
Figura 354 - Soluções $f(x) = 128$	280
Figura 355 - $y = 10$.	280
Figura 356 - Quarto momento.	281
Figura 357 - Representação de uma função.	281
Figura 358 - $x > 4$	282
Figura 359 - Item d	283
Figura 360 - $y < 8$	283
Figura 361 - Item e da 1ª atividade.	284
Figura 362 - Digitar a função.	284
Figura 363 - y Maior ou igual 0,5.	285
Figura 364 - 2ª atividade.	286
Figura 365 - Triângulo e círculo.	286
Figura 366 - Outras opções.	287
Figura 367 - Planilha - 2ª atividade.	287
Figura 368 - Tabela invertida.	288
Figura 369 - Criar - 2ª atividade	288
Figura 370 - Lista de pontos - 2ª atividade	289
Figura 371 - Pontos na parte gráfica do geogebra - 2ª atividade	290
Figura 372 - Fechar	290
Figura 373 - Representação de função.	291
Figura 374 - Digite log.	291
Figura 375 - Segunda atividade.	292
Figura 376 - $y = 1$.	292
Figura 377 - Ponto de interseção.	293
Figura 378 - $y = 1$	293
Figura 379 - $y = 1$ - logaritmo	294
Figura 380 - $y = 3$.	295
Figura 381 - $y = 4$.	295
Figura 382 - $y = 5$.	296
Figura 383 - 2ª questão	296
Figura 384 - $x = 1$.	297

Figura 385 - $x = 1$	298
Figura 386 - Expressão $f(1)$	298
Figura 387 - $x = 2$	299
Figura 388 - $y = 2$	299
Figura 389 - $y = 3$	300
Figura 390 - $y = 4$	301
Figura 391 - $y = 5$	301
Figura 392 - 3ª questão	302
Figura 393 - 3ª questão ítem a.	302
Figura 394 - $x = -2$	303
Figura 395 - $y = -4$	304
Figura 396 - 4ª questão	305
Figura 397 - $x = 5$	305
Figura 398 - Ponto A.	306
Figura 399 - 5ª questão	306
Figura 400 - Logaritmo crescente	307
Figura 401 - $y > 3$	307
Figura 402 - 6ª questão	308
Figura 403 - $x > 8$	309
Figura 404 - Pintada duas vezes. não tem gráfico.	310
Figura 405 - 7ª Questão	311
Figura 406 - Logaritmo decrescente	312
Figura 407 - $y < 3$	313
Figura 408 - $y = 5$	313
Figura 409 - Parte pintada duas vezes, é solução da inequação.	314
Figura 410 - $x < 0,03$	315
Tabela 1 - Crescimento do número de células	54
Tabela 2 - Tabela do número de células em uma Função Geogebra	69
Tabela 3 - Identificação dos Estudantes	78

Sumário

1	INTRODUÇÃO.....	12
2	OBJETIVOS	13
2.1	GERAL	13
2.2	ESPECÍFICO	14
3	LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO.....	14
4	USO DE TECNOLOGIAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA.....	18
5	INEQUAÇÕES LOGARITMICAS	21
5.1	UM PEQUENO HISTÓRICO DE LOGARITMOS	22
5.2	DEFINIÇÃO DE INEQUAÇÃO.	23
6	DA ETIMOLOGIA A IDEIA DE LOGARITMO PARA NAPIER.....	27
7	BASE TEÓRICA.....	30
7.1	TEORIA DA INSTRUMENTAÇÃO DE PIERRE RABARDEL.....	30
7.2	REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE RAYMOND DURVAL	37
8	METODOLOGIA.....	40
8.1	PRIMEIRO INSTANTE (PROFESSORES)	40
8.2	SEGUNDO INSTANTE (ESTUDANTES).....	41
9	CARACTERIZAÇÃO DOS EXPERIMENTOS	42
9.1	PRIMEIRO ENCONTRO.....	42
9.1.1	Matemática básica.....	42
9.1.2	Geogebra.....	43
9.1.3	Procedimento do Pesquisador no primeiro encontro.....	46
9.2	SEGUNDO ENCONTRO	53
9.2.1	Atividade 1.....	53
9.2.1.1.	Objetivo	53
9.2.1.2.	Atividade de exponencial (Da função a inequação).....	53
9.2.2	Procedimento do Pesquisador no segundo encontro	54
9.3.	TERCEIRO ENCONTRO.....	69

9.3.1. Atividade 2	69
9.3.1.1. Objetivo	69
9.3.1.2. Atividade de logaritmo (Da função a Inequação)	69
9.3.2. Procedimento do Pesquisador do terceiro encontro.	70
10 RELATÓRIO DAS ATIVIDADES.....	74
11.1. COM OS PROFESSORES	74
10.2. COM OS ESTUDANTES	78
10.2.1. Identificação dos sujeitos	78
11 EXPERIMENTOS	78
11.1. PRIMERO EXPERIMENTO -E1.....	79
11.2. SEGUNDO EXPERIMENTO -E2.....	79
11.3. TERCEIRO EXPERIMENTO -E3, E4 E E5	79
12 ANÁLISE DOS RESULTADOS	80
12.1. ANÁLISE DOS PROFESSORES	80
12.2. ANÁLISE DOS ESTUDANTES	81
12.2.1. Experimento 1 (E1).....	81
12.2.1.1 Primeiro encontro do Experimento 1 (E1)	81
12.2.1.2. Segundo encontro do Experimento 1 (E1)	95
12.2.1.3. Terceiro encontro do Experimento 1 (E1),.....	116
12.2.2. Experimento 2 (E2).....	146
12.2.2.1. Primeiro encontro do Experimento 2 (E2).	146
12.2.2.2. Segundo encontro do Experimento 2 (E2).....	187
12.2.2.3. TERCEIRO ENCONTRO DO EXPERIMENTO 2 (E2).....	211
12.2.3. Experimento 3 (E3; E4; E5)	227
12.2.3.1. Primeiro encontro do experimento 3 (E3; E4; E5)	227
12.2.3.2. Segundo Encontro do experimento 3 (E3; E4; E5)	262
12.2.3.3. Terceiro encontro do experimento 3 (E3; E4; E5)	285
12.2.4 - Análise sobre os registros. (Áudio visual)	315
12.2.4.1 – Sujeito e instrumento	316
12.2.4.2 – Instrumento e Objeto	322
12.2.4.3 – Sujeito e Objeto	323

12.2.5 – ANÁLISE GERAL	324
13 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	326
REFERENCIAS.....	328

1 INTRODUÇÃO

Em 2019 surgiu a oportunidade de realizar este mestrado em Matemática, na qual abracei com muito gosto. Até porque o assunto que irei tratar é de grande relevância para mim e com certeza para os meus colegas professores e estudantes, um assunto que de certa forma não é tão fácil de se explicar e tão evidente para a grande maioria dos estudantes a sua assimilação.

Estudei e me formei na UNAMA (Universidade da Amazônia) em 1998, em licenciatura em Ciência, com habilitação plena em matemática. Sempre gostei muito de matemática, e sempre trabalhei com reforço escolar. Após concluir o curso fiz o primeiro concurso que apareceu na época, justamente o concurso para professor na cidade de Tucuruí (1998), passei e fui mora em uma cidade totalmente desconhecida para mim e apesar da distância que era (é) da minha cidade matriz (Belém), me acostumei e me apaixonei pela cidade, onde moro até hoje e aonde formei família com filhos nascidos nessa cidade. Depois, em 2003, fiz e passei no concurso do estado do estado do Pará para professor em Matemática, em seguida fiz o curso de especialização em matemática do ensino básico em 2011, após isso já pensava em realizar um mestrado porém não tinha êxito nos exames, daí fiz mais uma graduação em Licenciatura em informática, concluindo em 2017 e em 2019 realizei o meu sonho de ter a possibilidade de ser mestre em matemática, fiz a prova e passei e estou finalizando esta dissertação de mestrado com um tema que sempre me causou um interesse especial. Trabalho como professor da rede de escolas públicas estadual e municipal no município de Tucuruí-Pa, desde 1999, portanto a mais de 20 anos de serviço e percebi que o tema desta dissertação sempre foi um desafio para mim, desde a época em que estudava no ensino médio e até mesmo no ensino superior, já na pós graduação tive a oportunidade de propor mudanças na metodologia deste conteúdo através desta dissertação, na qual estudei uma forma de ensino através do uso do software Geogebra. Percebi também, que o assunto inequação logarítmica, para mim e para muitos colegas matemáticos tinha um certo percalço a descobrir e os meus amigos professores compartilhávamos do mesmo relato que eu, no qual o assunto na maioria das vezes era visto de uma forma rápida ou superficial devido a vários interrupções no desenvolvimento do planejamento, e também percebíamos que os

estudantes não entendiam muito bem aquela forma de assimilação do assunto, uma forma muitas vezes mecanizada e que também não satisfazia a aprendizagem deles e após a conclusão dessa dissertação acredito que temos uma oportunidade de mudança.

Para os estudantes, em sua grande maioria, sempre tem algum conteúdo em matemática a vencer e um desses conteúdos podemos destacar a Inequação Logarítmica um assunto que necessita de pré-requisitos para a sua total compreensão. Contudo, para assimilação do assunto inequação logarítmica o estudante precisa saber operações como potenciação, suas propriedades, potenciação de números racionais, números inteiros, radiciação, exponencial e logaritmo, operações e suas propriedades, a resolução de inequações propriamente dita e entre outras. Todos esses conteúdos se interligam e proporciona aos estudantes condições de enfrentar a vida fora da escola, preparando-se para um futuro profissional.

Segundo os PCN's, Parâmetros Curriculares Nacionais:

Para que ocorram as inserções dos cidadãos no mercado de trabalho, no mundo das relações sociais e no mundo da cultura e para que se desenvolva a crítica diante das questões sociais, é importante que a Matemática desempenhe, no currículo, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividade do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1998, p.28)

Os PCN's (BRASIL,1998) salientam a importância da resolução de problemas, uma vez que as inequações são utilizadas na maioria das situações cotidianas como mais uma dessas ferramentas matemáticas que auxiliam na sua compreensão e assimilação.

2 OBJETIVOS

2.1 Geral

Analisar a maneira da ocorrência da Gênese Instrumental no ensino de Inequação Logarítmica usando o Geogebra em estudantes do 1º ano do ensino médio e avaliar a potencialidade da aprendizagem de inequação logarítmica em

uma sequência didática para o ensino de inequações logarítmicas, usando para isso o aplicativo Geogebra.

2.2 Específico

- Analisar os dados gerados pelos estudantes através da experimentação do software geogebra na resolução de atividades sobre inequação logarítmica
- Analisar as possíveis interações e manobras dos estudantes ocorridas na experimentação;
- Feito a identificação das dificuldades dos estudantes sobre inequação logarítmica proporcionar um ambiente de geometria dinâmica para que os estudantes possam entender os conceitos e propriedades.
- Analisar dados da experimentação didática dos estudantes com o objetivo de verificar a potencialidade da sequência.
- Analisar os registros de vídeos realizados pelos estudantes.

A seguir faremos um levantamento bibliográfico sobre o tema principal inequação logarítmica e como temas secundários assuntos que envolvessem resolução de inequação e o uso do software geogebra para servir como um norte em nossa dissertação.

3 LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO

Vamos fazer um levantamento dos assuntos tratados referente a literatura abordado nesta pesquisa a partir da seguinte metodologia, faremos recortes das dissertações, destacando os principais pontos que são de nossos interesses e por fim faremos comentários dessas contribuições. Todas as dissertações são de mestrado e as pesquisas foram levantadas nos sites da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e através do buscador Google Acadêmico. Obtivemos por meio de critérios de escolha as seguintes considerações: o tema correlacionado com o nosso, metodologias semelhantes, o uso de software (geogebra) como ferramenta no processo de estudo e entre outros

aspectos. Apresentamos os seguintes trabalhos de dissertações de mestrado - Araújo (2005), Beltrão (2010), Clara (2007), Diniz (2018) e Saldanha (2007).

Araújo (2005) nos apresenta em sua obra, intitulada “A concepção de um software de matemática para auxiliar na aprendizagem dos alunos da primeira série do ensino médio nos estudos das funções exponenciais e logarítmicas.” A metodologia aplicada consiste no desenvolvimento de um software com base em pesquisas realizadas com os professores que ministram aulas no ensino fundamental e médio da rede pública e privada do estado de São Paulo através de uma investigação sobre a dificuldade que os estudantes apresentam na compreensão das funções exponenciais e logarítmicas, o que nos possibilita avaliar a importância da temática da pesquisa. Ao final foi feita uma análise da aplicabilidade do software com os alunos. Percebe-se que até mesmo para utilizar um instrumento tecnológico é necessário compreender sua operacionalização. Neste caso o indivíduo realiza processos mentais que devem ser encadeados de forma lógica e exata para obter o resultado esperado. O que nos remete a contribuição deste desenvolvimento de um software para a evolução da matemática. O que podemos destacar e de relevância para nós foi o desenvolvimento do software e sua aplicabilidade para o processo de construção do conhecimento dos estudantes, sua possibilidade de interação entre usuário (estudante) e a máquina, mediada preferencialmente pelo professor.

Beltrão (2010) em sua dissertação “Dificuldades dos alunos para resolver problemas com inequações”, nos mostra uma pesquisa que Investiga as dificuldades encontradas por estudantes concluintes do Ensino Fundamental de escolas públicas de Pernambuco, ao se depararem com um problema sobre inequações. O aporte teórico está fundamentado em teorias sobre Didática da Matemática e Linguagens, de acordo com Bruno D’Amore. A pesquisa é um recorte de uma dissertação de mestrado onde analisa-se a produção dos estudantes ao resolver problemas algébricos de uma avaliação em larga escala aplicada anualmente pelo governo de Pernambuco. As informações analisadas apontam, entre outras coisas, que a notação formal não pode ser desconectada da aquisição do significado. Segundo o autor da dissertação essa falta de conexão é um dos principais problemas que enfrentamos no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Dessa forma, percebemos algumas dificuldades dos estudantes com

relação à aprendizagem da Matemática que estão relacionadas às ideias de linguagem e simbolismo. A metodologia consiste em selecionar as questões de álgebra do exame do SAEPE (2008) – Sistema de Avaliação da Educação de Pernambuco e aplicá-las em um grupo de estudantes de uma forma diferenciada do exame, pois as questões seriam abertas, ou seja, os estudantes teriam que desenvolver a resposta e não apenas marcar. Além disso, seriam selecionados alguns estudantes para explicar o resultado de suas produções. O autor adotou um modelo metodológico que se aproxima da análise de conteúdo, proposta por Laurence Bardin (2008), que consiste em três fases denominadas de pré análise, exploração do material e por último o tratamento dos resultados obtidos e interpretação. A colaboração dessa dissertação para o nosso trabalho seria a forma da análise de como o autor chegou a sua conclusão na qual disse: os estudantes apresentam dificuldades para aprender matemática desde as séries iniciais e que essa dificuldade vai aumentando a medida que os conteúdos matemáticos vão se tornando mais sofisticados. Afirmo ainda que quando os estudantes iniciam os estudos de álgebra, as dificuldades ficam ainda maiores, por conta, entre outras coisas, da dificuldade que os estudantes têm em transformar a linguagem natural em linguagem algébrica e no aumento da distância da matemática escolar com a matemática do cotidiano.

Clara (2007), em “Resolução de inequações logarítmicas: Um olhar sobre a produção dos alunos.” Essa pesquisa qualitativa foi aplicada em alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual (Osasco-SP), com o objetivo de investigar procedimentos utilizados por estudantes na resolução de problemas que envolvessem desigualdade ou inequações logarítmicas. A fim de se atingir esse objetivo, elaboramos e selecionamos problemas que provocassem nos alunos atitude investigativa. Estes problemas seriam resolvidos em encontros extraclasse. Utilizamos como referencial teórico, as noções da Dialética Ferramenta-Objeto e Interação entre Domínios da pesquisadora francesa Régine Douady (1984). Analisando os protocolos dos estudantes, recorreremos ao livro didático utilizado pelos estudantes, e as informações coletadas em entrevista com uma Pesquisadora que trabalhou com estes estudantes na série anterior. Dessa análise, ficou evidenciado que a ferramenta mais utilizada foi a noção de igualdade. O domínio algébrico foi o mais explorado pelos estudantes. Observamos que a

interação entre domínios ocorreu espontaneamente na resolução dos problemas. Os erros mais frequentes foram: “Noção incorreta da definição de logaritmo” e “Uso incorreto do conceito de potência”. Ao nosso ver os resultados apontados em nossa pesquisa dizem muito do processo ensino e aprendizagem vivenciado por esse grupo de estudantes. Desse modo consideramos necessário mais investimento para a construção do conceito e propriedades relativas às potências e logaritmos. Esta dissertação colabora com a nossa no sentido das análises realizadas através dos resultados obtidos, correlacionando e refletindo praticamente as mesmas praxes que os estudantes realizaram durante a nossa experimentação.

Diniz (2018), em sua dissertação intitulada “Um estudo sobre exponenciais e logaritmos e aplicações”: Neste trabalho, procura condensar assuntos relacionados a exponencial e logaritmos, bem como suas respectivas funções, equações e inequações e suas respectivas aplicações abordando a história do surgimento das exponenciais e logaritmos e apresentando uma construção didática utilizando o GeoGebra para mostrar os gráficos. Desenvolveu um trabalho voltado a professores do ensino médio e cursos iniciais das áreas de exatas, constituindo material básico para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Mostrou a construção passo a passo, demonstrando assim algumas propriedades e exemplos. Ao final, propôs aplicações voltadas a outras áreas do conhecimento, confirmando a importância das funções exponenciais e logarítmicas como ferramentas nas resoluções de problemas. Sua metodologia consiste basicamente em uma parte conceitual e gráfica das funções exponenciais e logarítmicas como ferramenta para a resolução de problemas. A parte que nos interessa, basicamente, foi o uso do Geogebra na construção dos gráficos das funções exponencial e logarítmicas focalizando bastante os vários exemplos em um só plano de funções crescentes e decrescente. Possibilitando para o leitor uma visão mais bem detalhada dos tipos de funções exemplificadas através de diferentes cores em sua construção.

Saldanha (2007), em “Análise de uma intervenção didática sobre desigualdades e inequações logarítmicas no ensino médio.” Esta pesquisa foi realizada na abordagem qualitativa, teve como objetivo analisar o processo ensino-aprendizagem, envolvendo professor, estudante e o saber matemático na

resolução de problemas, enfocando as desigualdades e inequações logarítmicas. Foram elaboradas seis situações didáticas, com base na noção dialética-ferramenta-objeto da pesquisadora francesa Régine Douady. O público alvo foram os estudantes e a professora pesquisadora de uma classe do 2º ano do Ensino Médio de uma escola particular de Vila Nova Conceição da cidade de São Paulo. Os instrumentos utilizados na coleta dos dados foram gravações de fitas cassete dos diálogos entre professora-pesquisadora e o grupo de estudantes, professora-pesquisadora e grupo de sala e produções escritas dos alunos na resolução dos problemas propostos. A conclusão obtida foi que a abordagem desenvolvida pela sequência didática proposta favoreceu a aprendizagem das desigualdades e inequações logarítmicas e, também, oportunizou uma reflexão sobre a prática de ensino da professora-pesquisadora. A proposta dessa dissertação em fazer uma análise sobre o ensino aprendizagem envolvendo o professor, estudantes e o ente matemático me chamou a atenção pelo fato dos procedimentos realizados para a coleta de dados que por alguma forma me fez refletir sobre a minha dissertação, ela utilizou gravações por fitas cassete (já em desuso) e de uma forma presencial, mas a maneira da coleta se assemelha bastante com a minha, apesar de que utilizei um aplicativo (Meet) para as gravações e um ambiente diferenciado, que no nosso caso foi de uma forma síncrona.

Em resumo, essas pesquisas iluminam o presente trabalho por versarem sobre logaritmos, em particular em desigualdades e inequações no ensino médio. “O ensino de matemática, ao longo do seu desenvolvimento histórico, seguiu um percurso metodológico no qual houve maior valorização da compreensão instrumental do que da compreensão relacional, impossibilitando ao estudante, o desenvolvimento de competências e habilidades que levassem a uma formação educativa matemática que contribuísse para sua formação cidadã.” (Sá.2009,p.22).

A seguir falaremos um pouco sobre o uso de tecnologia no ensino de matemática.

4 USO DE TECNOLOGIAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Antigamente e aqui vou delimitar o intervalo dos anos 80 a 90, praticamente nos anos de minha formação fundamental o computador nas escolas

estava ainda num processo de surgimento na educação brasileira. Então, praticamente não tive contato com essa tecnologia em minha formação inicial, vindo a ter somente na minha formação acadêmica. Podemos fazer uma reflexão no que tange o quanto uma ferramenta, como o computador poderia e pode ajudar ao professor (ao ensinar) e ao estudante (ao aprender).

As possibilidades de ensino são enormes e o Pesquisador possui uma ferramenta na qual pode mostrar experimentações, reações químicas, lugares, entre outras infinitas áreas do conhecimento. E em relação aos estudantes o conhecimento a ser adquirido não ficou restrito somente aos livros e aos professores, com o surgimento da internet o leque de acesso ao conhecimento transbordou, ou melhor transpassou os limites das paredes da sala de aula. A sala ficou pequena e o professor, além de uma fonte de conhecimento, passou a ser aquele profissional orientador para os estudantes. Junto com os computadores surgiram os programas, aplicativos, softwares que auxiliam na formação e construção do ensino aprendizagem. Segundo Kenski (2009) essas ferramentas são consideradas não apenas um suporte tecnológico nas atividades de sala de aula, elas interferem em nossa forma de pensar, de nos relacionarmos, de adquirirmos novos conhecimentos.

Dessa forma surgiu o termo TIC, que significa tecnologias de informação e comunicação, vem impondo mudanças no modo como obtemos informação e nos comunicamos, e a chegada desses recursos na escola nos faz refletir sobre seu uso em sala de aula, analisando de que forma essas ferramentas podem contribuir para a formação do estudante compatível com os avanços proporcionando pela sociedade da informação “A inserção da tecnologia na educação deve ser compreendida e orientada no sentido de proporcionar nos indivíduos o desenvolvimento de uma inteligência crítica, mais livre e criadora” (MISKULIN, 2008, p.219).

Pesquisas que analisam as potencialidades das TIC em sala de aula ressaltam a sua relevância no ensino de Matemática. Borba e Penteado (2005) e Scheffer (2002) asseguram que as TIC podem ser grandes aliadas no ensino da Matemática, visto que permitem a experimentação e a ênfase no processo de visualização. Ao incluir os recursos da informática como parte das atividades em

sala de aula, tem-se a possibilidade de o estudante realizar descobertas, incentivando a compreensão e dando significado ao conhecimento matemático.

Assim sendo, quando a informática faz parte do ambiente escolar, num processo dinâmico de interação entre estudantes, professores e TIC, ela passa a despertar no professor a sensibilidade para as diferentes possibilidades de representação da Matemática, o que é importante no momento de realizar construções, análises, observações de regularidades e, também, ao estabelecer relações. "Trabalhar a informática na escola na perspectiva de produzir conhecimentos permite ao estudante fazer análises de modo a poder refletir sobre seus procedimentos de solução, testes e conceitos empregados na resolução de problemas" (SCHEFFER, 2002, p. 23).

Segundo Valente (1999), existem formas diferenciadas de se trabalhar com o computador na educação. Por exemplo, as atividades de uso do computador podem servir para transmitir informação ao estudante, e consiste na informatização dos tradicionais métodos de ensino. Nesse caso, o professor está apenas mudando de mídia, saindo do quadro e giz para o computador. Outra prática diz respeito a quando o estudante usa o computador para construir seus conhecimentos, situação que favorece a interação do estudante com objetos do ambiente computacional. O computador passa a ser uma máquina para ser ensinada, propiciando condições para o estudante descrever a resolução de problemas, refletir sobre os resultados obtidos e depurar suas ideias por intermédio da busca de novos conteúdos e novas estratégias.

Ainda, segundo Valente (1999), o envolvimento com o objeto em construção cria oportunidades para o estudante colocar em prática alguns dos conhecimentos matemáticos que possui. Se esses conhecimentos não são suficientes para resolver os problemas encontrados, o estudante terá que buscar novas informações nas mais variadas fontes às quais tenha acesso.

Desse modo, o estudante usa o computador para resolver problemas, ou seja, realizar tarefas como desenhar, escrever, construir, calcular, analisar, após efetuar alguns comandos, levantar hipóteses, formular e testar conjecturas, entre outras possibilidades. A construção do conhecimento advém do fato de o estudante

ter de buscar novos conteúdos e estratégias para acrescentar ao conhecimento de que já dispõe sobre o assunto, que está sendo estudado via computador.

Diante desse contexto, recorreremos, em nosso estudo, às ferramentas das TIC por meio dos recursos de um software de Geometria Dinâmica, em específico o software GeoGebra. Para tanto, nos baseamos em autores como Gravina (1996) e Zulatto (2002) que nos mostram que, ambientes de Geometria Dinâmica podem ser ferramentas riquíssimas na superação das dificuldades dos alunos inerentes ao processo de ensino e de aprendizagem de conteúdos matemáticos. Conforme Zulatto (2002), com o recurso de um software de Geometria Dinâmica os alunos podem realizar construções que, usualmente, fazem com régua e compasso, instrumentos que não lhes permite interagir com o desenho, por serem estáticos.

Assim sendo, o que difere numa atividade com o recurso do software é a possibilidade de movimentação dos objetos e, a partir desses movimentos, o estudante investigar o que acontece com a sua construção, levantando hipóteses como: a construção permanece com as mesmas características? Um simples movimento muda todas as características originais? Entre várias hipóteses que são possíveis levantar diante das próprias tomadas de decisão, percebendo assim as suas regularidades.

De modo geral, uma das principais características de um software de Geometria Dinâmica é a possibilidade de movimentar os objetos na tela sem alterar as propriedades da construção inicial, com isso, tem-se a possibilidade de, numa atividade desenvolvida com os recursos de um software com essas características, se fazer investigações, descobertas, confirmar resultados e fazer simulações, permitindo, inclusive, levantar questões relacionadas com a sua aplicação prática.

A seguir vamos falar das inequações logarítmicas, tópico desta dissertação.

5 INEQUAÇÕES LOGARITMICAS

Neste tópico iremos tratar do conteúdo referente a dissertação – inequação logarítmica, começaremos falando sobre um pequeno histórico de seu surgimento, depois faremos uma definição do que é inequação, a partir daí mostraremos alguns

exemplos de inequação logarítmica, e posteriormente demonstraremos a resolução de inequações que geralmente se faz em sala de aula. E, finalizaremos esse tópico com uma visão da etimologia à ideia de logaritmo segundo Napier.

5.1 Um pequeno histórico de logaritmos

Sobre a história do logaritmo podemos citar um trecho da dissertação de ZANDONADI (2013) que nos relata:

Durante as grandes navegações realizadas pelos países europeus, entre os séculos XVI e XVII, o maior problema era a orientação dos navios, que era feita de acordo com a observação da posição das estrelas. Dessa forma, ocorreu o desenvolvimento da Astronomia, pois era necessário analisar com precisão o movimento das estrelas e a posição do sol de acordo com a variação sazonal. A localização destes astros é realizada por cálculos trigonométricos, em que é necessária a obtenção dos valores dos arcos trigonométricos. Para isso eram utilizados cálculos com certa precisão. Como nesse período ainda não existiam instrumentos de calcular, a procura por métodos que tornassem mais simples esses cálculos eram de muita importância. Dentre vários métodos, podemos citar as seguintes invenções como alternativas para atender essas demandas: o uso do sistema decimal de numeração, as frações decimais e os logaritmos.

Assim, podemos perceber que os logaritmos surgiram de uma necessidade, de resolver os cálculos longos e trabalhosos daquela época do século XVI e dessa forma as operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação se tornaram mais simples. Nessa época surgiram as primeiras tábuas logarítmicas, publicadas por Napier e Birrgi em 1614 e 1620, respectivamente. Logo depois do aparecimento da primeira tabela de logaritmos de Napier, o matemático inglês Henry Briggs (1561 - 1631), Professor da Universidade de Londres, e depois em Oxford, elaborou, juntamente com Napier, uma nova tabela, de mais fácil utilização, contendo os chamados logaritmos decimais, ou logaritmos ordinários, que tiram proveito do fato de usar o sistema de numeração decimal (DINIZ, 2018).

Segundo Boyer (1974), Arquimedes já tentara de alguma forma reduzir as operações. Ainda, segundo Boyer, provavelmente Burgi foi o primeiro a desenvolver a ideia dos logaritmos e, logo após, com alguns anos de diferença, por Napier. O crédito da invenção é dado a Napier, pois foi ele quem primeiro publicou uma obra dedicada aos logaritmos: *Logarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa lei dos logaritmos).

Em ZANDONADI (2013) diz que “John Napier foi matemático, físico, astrônomo, astrólogo e teólogo escocês que viveu entre 1550 e 1617. Ele passou grande parte de sua vida em busca do conhecimento e de trabalho para elaborar melhores maneiras para a realização de cálculos matemáticos. Nascido perto de Edimburgo, na Escócia, Napier era um ávido matemático que era conhecido por suas contribuições à geometria esférica, e pela concepção de uma calculadora mecânica. Além disso, Napier foi o primeiro a fazer uso (e divulgar) do ponto decimal como um meio para separar a totalidade da parte fracionada de um número. Napier também estava muito interessado em astronomia e fez muitos cálculos com as suas observações e pesquisas. Os cálculos que ele realizava eram longos e muitas vezes envolviam funções trigonométricas. Depois de muitos anos lentamente construindo o conceito, ele finalmente desenvolveu a invenção pela qual ele é mais conhecido: logaritmos”.

Atualmente, neste século XXI, não utilizamos mais as tábuas de logaritmos, porém a importância dos logaritmos não ficou perdida, pois muitos dos problemas que envolvem fenômenos e situações naturais, onde se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade da mesma existente no instante dado se aplica a função logarítmica. Com efeito, embora eles tenham sido inventados como acessório para facilitar operações aritméticas, o desenvolvimento da matemática e das ciências em geral veio mostrar que diversas leis matemáticas e vários fenômenos naturais e mesmo sociais são estreitamente relacionados com os logaritmos. Assim sendo, os logaritmos, que no princípio eram importantes apenas por causa das tábuas, mostraram seu apreciável valor intrínseco (DINIZ, 2018).

A seguir faremos a definição do termo inequação segundo o autor IEZZI, (1977). Os elementos gráficos que representam as inequações e as soluções de três exemplos de inequação logarítmica.

5.2 Definição de inequação.

Antes de definirmos vamos nos situar em relação ao ano em que propriamente esse conteúdo entra no currículo do ensino de um estudante da rede pública e quais as possíveis dificuldades encontradas por esse estudante. Neste contexto, segundo ALVARENGA (2013), temos:

As inequações estão situadas no currículo escolar brasileiro desde o 8ºano do ensino fundamental e são ministradas, até o curso de Cálculo I, ou Pré-Cálculo, no ensino superior, aos que optam por carreiras na área de Ciências Exatas ou da Terra. Contudo, as investigações têm apontado pouco êxito dos estudantes em relação às resoluções e interpretações. Em seu estudo, estão envolvidos conceitos matemáticos que, em geral, são referidos de forma superficial e mecanizada, gerando procedimentos de manipulações algébricas puramente algorítmicas. Isto pode indicar uma perda de oportunidade para tratar de números reais, lógica matemáticas, linguagem algébrica, demonstrações, funções e seus gráficos e alguns modelos de forma mais investigativas, intrigante, compreensiva e significativa.

Agora podemos definir inequação, para essa dissertação, da seguinte forma: Dadas as funções $f(x)$ e $g(x)$ cujos domínios são definidos em $\mathbb{R}$, chamamos de inequação na incógnita x a qualquer das sentenças abertas, abaixo (IEZZI, 1977):

$$f(x) > g(x); f(x) < g(x); f(x) \geq g(x); f(x) \leq g(x)$$

Uma inequação que envolve funções polinomiais, é chamada de inequação polinomial. As inequações que envolvem funções trigonométricas, são as inequações trigonométricas, dessa forma temos as inequações logarítmicas, pois envolve as funções logarítmicas que é um dos objetos de estudo dessa dissertação.

Para resolvê-las são utilizados procedimentos similares aos usados nas equações. O número real x_0 é uma solução da inequação $f(x) > g(x)$ se, e somente se, é verdadeira a sentença $f(x_0) > g(x_0)$. Ao conjunto S de todos os números reais x tais que $f(x) > g(x)$ é uma sentença verdadeira, chamamos de conjunto-solução da inequação (IEZZI,1977). Para determinar tal conjunto é essencial conhecer as propriedades de desigualdades e as funções envolvidas. Portanto, resolver uma inequação significa encontrar o seu conjunto-solução.

Sendo assim, quando uma incógnita se apresenta no logaritmando ou na base ou em ambos e que apresenta uma desigualdade nesse caso utilizamos uma operação matemática chamada de Inequação Logarítmica.

São exemplos de inequações logarítmicas:

$$\log_2(5-x) > 27$$

$$\log_{3x} x < \log_3 8$$

$$-\log_{0,5}(x^2 - 6x) < 4$$

Resolver uma inequação logarítmica é encontrar o seu conjunto-solução e para resolver uma inequação desse tipo, primeiramente reduzimos os dois membros a logaritmos de mesma base. Em seguida, devemos saber que a função logarítmica $f(x) = \log_a b$ é crescente quando a base for maior que um ($a > 1$) e decrescente quando a base for um número positivo menor que um ($0 < a < 1$). Após isso, poderemos aplicar as seguintes propriedades:

Se a base for maior que um aplicamos:

$a > 1$: $x_1 > x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$, e se a base for positiva e menor que um aplicamos $0 < a < 1$: $x_1 > x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$.

Vamos aplicar essas propriedades nas inequações logarítmicas a seguir:

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x-4) \geq 2$

b) $\log_3(3x+6) < \log_3 x$

No item a, temos $\log_{\frac{1}{2}}(x-4) \geq 2$ e devemos, primeiramente, verificar a condição de existência do logaritmo, dessa forma, o logaritmando, deve ser um número positivo: $x-4 > 0 \Rightarrow x > 4$ (i). E para a base, deve ser um número positivo e diferente de zero, assim temos, $a = \frac{1}{2}$, e observamos que a base está no intervalo aberto $0 < a < 1$, com isso, concluimos que deveremos inverter a desigualdade. Posteriormente, verifica-se que a inequação possui logaritmo, somente, em um dos membros, assim deveremos “transformar” o segundo membro de tal modo que apareça um logaritmo de mesma base do primeiro membro. Dessa forma, utilizaremos uma das propriedades de logaritmo. No qual diz: “se um logaritmo possui o logaritmando igual a base, então teremos o valor do expoente do logaritmando como resultado e elimina-se esse logaritmo”. Aplicando na questão, teremos:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x - 4) \geq 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x - 4) \geq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

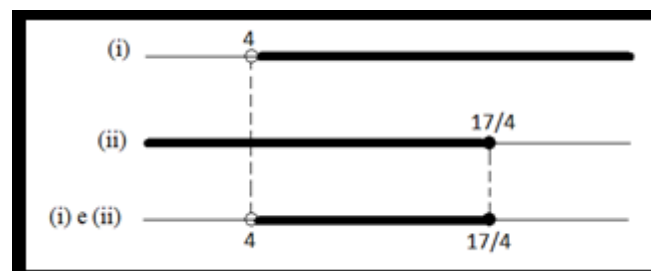
$$\Rightarrow x - 4 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{1}{4} + 4$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{17}{4} \quad (ii)$$

A solução da inequação é dada pela interseção de (i) e (ii).

Figura 1- Interseção de Retas



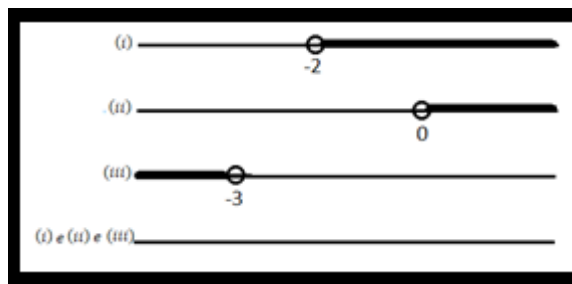
Fonte: próprio do autor

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} / 4 < x \leq \frac{17}{4}\}$.

No item b) temos $\log_3(3x + 6) < \log_3 x$ e a priori verifica-se a condição de Existência: $3x + 6 > 0 \Rightarrow 3x > -6 \Rightarrow x > -2$ (i), em seguida, observa-se a base (3) e concluímos que é positivo, $3 > 0$ (ii), como $a = 3 > 1$ a desigualdade da inequação logarítmica se mantém. Então: como a inequação possui o mesmo logaritmo de mesma base, pode-se nesse caso “cortar” ou eliminar esses logaritmos. Então teremos:

$\log_3(3x + 6) < \log_3 x \Rightarrow 3x + 6 < x \Rightarrow 2x < -6 \Rightarrow x < -3$ (iii). Dessa forma a solução da inequação é dada pela interseção de (i), (ii) e (iii).

Figura 2 - Interseção de Retas



Fonte: próprio do autor

Portanto, $S = \emptyset$

Podemos perceber nas duas resoluções que houve primeiramente as transformações que levaram ao resultado final, desenvolvidas dentro de um mesmo sistema de representação, portanto constituiu um conjunto de tratamentos. E posteriormente, as conversões cujas as mudanças no sistema de registro de representações, como por exemplo, passar da escrita algébrica de uma inequação à sua representação gráfica.

A seguir vamos apresentar a etimologia de logaritmo e a ideia de logaritmo para o matemático Napier.

6 DA ETIMOLOGIA A IDEIA DE LOGARITMO PARA NAPIER

A etimologia de logaritmo é apresentada por diversos autores na qual possuem os seus pontos de vistas variados, porém com alguns detalhes em comuns. A seguir apresento alguns desses autores em diferentes tempos:

De acordo com Knott (1915, p.11), “a palavra logaritmo antecede da criação de John Napeir, que tem origem nessas palavras *λόγων ἀριθμός* as quais significam números de razões”. Dessa forma, as razões propostas sobre a etimologia da palavra levaram John Napier a propor os logaritmos, os quais eram usados em termos trigonométricos.

Segundo Miguel e Miorim (2002, p.58-59) esclarecem o significado da palavra logaritmo numa “combinação entre duas palavras em Latim – Lógos e arithmós – que significam, respectivamente, “razão e número”. A junção entre as duas remete ao significado epistemológico da palavra logaritmo como número de razões, sendo que o termo razão refere - se à razão da PG e o número, ou seja, o logaritmo, a um termo qualquer da PG.

Para Magalhães (2003), a palavra logaritmo segue um conjunto de regras, ou seja, construções que são explicadas num processo de investigação histórica. Ele procura esclarece o que significa a palavra sob a ótica de sua origem logaritmōs logos – razão; arithmos – número da razão (quantas vezes tomam-se a base como fator para se obter um número). A ideia sugerida por Magalhães assemelha-se àquela proposta por Napier no século XVII. A diferença encontrada sobre essa etimologia reside na maneira como os logaritmos eram explorados. Ao invés de envolver aritmética e trigonometria, apropria-se de um modelo algébrico-funcional baseado no estudo de potenciação e funções exponenciais.

Napier utilizou para descrever logaritmos a comparação aritmética sobre as razões entre os números, sendo estruturados por meio das relações de Michael Stifel (1544), que consistia em comparar duas progressões matemáticas; a progressão Geométrica (PG) com a progressão Aritmética (PA) de tal modo que o produto de dois termos da PG está associado com a soma dos termos das respectivas PA. Esta relação de Stifel era muito semelhante com as barras de Napier, ambas transformavam multiplicações em somas.

O logaritmo definido por Napier é bem diferente daquele que é usado hoje, principalmente no estudo de função. A sua ideia envolvia uma aritmética trigonométrica em termos de ângulos sucessivos. Propôs sua primeira análise a respeito do logaritmo através de uma experiência prática. Muitos pesquisadores se interessaram pelo assunto e sua difusão alastrou-se rapidamente pela Europa.

No século XVIII, com o surgimento da álgebra, Leonard Euler demonstrou a constante $e = 2,7182818...$ chamado por *número de Euler*, mas como base do logaritmo é conhecido pela literatura de *logaritmo Neperiano*.

Já século XX, os logaritmos começaram a ser notificados em termos algébricos por meio de exponenciais, devido ao estudo de função.

Para desenvolver os logaritmos, Napier apropriou-se das PA's e PG's, estabelecendo uma relação entre elas, uma lógica da seguinte forma:

Seja duas progressões: uma geométrica e outra aritméticas enfileiradas como mostrar a seguir:

2	4	8	16	32	64	128	256	512	(PG)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	(PA)

Então, observou-se que escolhendo dos números na PG, por exemplo 4 e 16. O produto destes dois números está associado a soma dos respectivos números correspondente da PA, 2 e 4, assim $2+4 = 6$ que corresponde ao resultado do produto que era almejado, 64. E, se consideramos a PG em forma de potência de base 2 teríamos o seguinte:

$$\begin{array}{cccccccccc} 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 & 2^6 & 2^7 & 2^8 & 2^9 & (PG) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & (PA) \end{array}$$

Observando essa ideia, deparamos com o conceito de logaritmos, ou seja, os termos da PA são os respectivos logaritmos da PG.

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$\dots \dots$$

$$2^9 = 512$$

O valor 2 é uma constante elevada aos valores 1,2,3, ...,9. Essa constante 2 denomina-se Base do logaritmo. Os valores dos resultados de cada potenciação (2,4,8, ...512) denomina-se de Logaritmando. E a cada expoente, por sua vez, chama-se de Logaritmo. Dessa forma temos:

$$\log_2 2 = 1, \text{ que corresponde a } 2^1 = 2$$

$$\log_2 4 = 2, \text{ que corresponde a } 2^2 = 4$$

Generalizando, obtemos:

$$\begin{array}{cccccccccc} a^1 & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & \dots & a^m & (PG) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & b & (PA) \end{array}$$

Diz-se: $a^m = b$, reescrevendo em forma de Logaritmo.

$\log_a b = m$, assim; diz-se que m é o logaritmo de b na base a , onde $a > 0$ e $a \neq 1, b > 0$. Para quaisquer que sejam a, b e m reais.

Essa forma utilizada para definir o logaritmo não se encontra nos livros didáticos de matemática atuais. Soares (2011).

A seguir apresentaremos a base teórica de nossa dissertação em que as análises referentes aos experimentos a serem realizados estarão fundamentadas.

7 BASE TEÓRICA

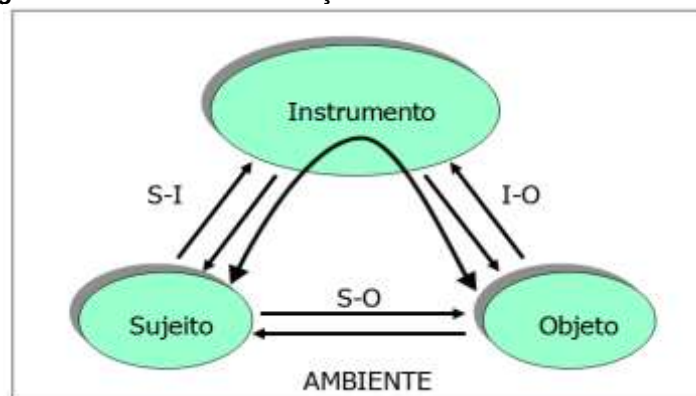
Nesta pesquisa adotaremos principalmente, como referencial teórico, a teoria da instrumentação, na perspectiva desenvolvida por Rabardel (1995). Completamos ainda com os seguintes referenciais teóricos: A gênese Instrumental e o registro de representação semiótica de Raymond Durval.

7.1 Teoria da instrumentação de Pierre Rabardel

Começaremos este tópico falando um pouco sobre a teoria da instrumentação, o uso do modelo SAI, as possíveis interações entre os entes, definição do sujeito, objeto de estudo e o instrumento, instrumentação e instrumentalização, o que é artefato, falaremos sobre os esquemas, os tipos de esquemas e suas definições, e também sobre a diferença entre a instrumentação e a instrumentalização. Por fim, mostraremos uma outra visão ratificando os conceitos sobre artefato, instrumento e o esquema de integração.

Nossa pesquisa está fundamentada sobre a visão da teoria de Rabardel, ou seja, a teoria da instrumentalização (ou da atividade instrumentada) (RABADEL, 1995, 1999), estudaremos a ação do sujeito mediada por instrumento. A teoria da instrumentação tem sido de grande aporte para investigar o uso de tecnologia em situação escolar. (ARTIGUE, 1998, 2001; ARTIGUE; LAGRANGE, 1999; BITTAR, 2011; NICAUD et al., 2006). Para Rabardel (1995), as mediações que ocorrem em Situações de Atividades Instrumentadas (SAI) podem ser representadas pelo modelo a seguir:

Figura 3 - Modelo das Situações de Atividades Instrumentais



Fonte: Rabardel (1995, p.53)

Nesse contexto, além da interação usual sujeito-objeto [S-O], outras interações são consideradas, tais como as interações entre o sujeito e o instrumento [S-I], o instrumento e o objeto [I-O] e o sujeito e o objeto pela mediação do instrumento [S(I)-O]. Também, Rabardel (1995) distingue duas dimensões no processo de gênese instrumental: A instrumentação e a instrumentalização, nessa ordem temos a primeira orientada para a constituição de esquema de utilização e a segunda se refere à emergência das propriedades funcionais e estruturais do artefato.

Em nosso experimento consideramos o sujeito sendo os estudantes do primeiro e segundo grau do ensino médio estadual, o instrumento é representado pelo software Geogebra, o objeto é o nosso conteúdo de inequação logarítmica e os esquemas é a nossa sequência didática.

Em BITTAR (2011), nos mostra que “Em antropologia, artefato é todo objeto que sofreu algum tipo de ação humana; pode ser um objeto material ou simbólico. Assim, um galho de árvore não é um artefato, mas se dele são retiradas as folhas e sua ponta é afiada ele passa a ser um artefato. É nesse sentido que Rabardel utiliza a palavra artefato para definir um instrumento como sendo o artefato acrescido de esquemas de utilização que constituem “o conjunto estruturado dos caracteres generalizáveis das atividades de utilização dos instrumentos” (RABARDEL, 1999, p. 210)”.

Ainda em BITTAR (2011), “o esquema é o conhecimento e é construído, pelo sujeito, na ação. Portanto, instrumento é conhecimento. Se considerarmos, por exemplo, o artefato como sendo um martelo: para uma criança pequena ele não tem valia e é, inclusive, perigoso. Mais tarde, quando ela aprende a pregar um prego com o martelo este transforma-se em um instrumento para ela. A criança desenvolveu esquema de utilização do martelo. Ela agregou conhecimento ao artefato e uma vez que o artefato foi transformado em instrumento, pelo sujeito, ele não volta mais à condição de artefato”.

A transformação de um artefato em instrumento é através de um processo dinâmico, quando o sujeito interage com o instrumento, novos esquemas são agregados a ele o que transforma o instrumento em um novo instrumento para o

sujeito. Também pode acontecer que, o que é um artefato para um sujeito pode não ser para um outro sujeito. Em nosso experimento utilizamos um software, chamado Geogebra em que aprendemos alguns comandos básicos e realizamos atividades possíveis de serem feitas com estes comandos, conforme continuamos a trabalhar com o software na sequência didática, surgem novos esquemas a ser desenvolvidos, o que gera novas possibilidades e o transforma em um novo instrumento. Assim, um mesmo artefato se transforma em diferentes instrumentos para um mesmo sujeito. Analogamente, cada sujeito ao interagir com um artefato desenvolve esquemas que estão relacionados às suas experiências e conhecimentos, logo, o “seu” instrumento vai diferir do instrumento do outro.

Além disso, como os esquemas desenvolvidos pelo sujeito estão intimamente ligados aos seus conhecimentos e experiências anteriores, mesmo aqueles que tiverem o mesmo tipo de contato com uma determinada TIC não desenvolverão o mesmo instrumento.

O processo de transformação de um artefato em instrumento, pelo sujeito, é denominado de gênese instrumental e é composto de duas dimensões: instrumentalização e instrumentação:

A instrumentalização concerne a emergência e a evolução dos componentes artefato do instrumento: seleção, reagrupamento, produção e instituição de funções, transformações do artefato [...] que prolongam a concepção inicial dos artefatos. A instrumentação é relativa a emergência e a evolução dos esquemas de utilização: sua constituição, seu funcionamento, sua evolução assim como a assimilação de artefatos novos aos esquemas já constituídos (RABARDEL, 1999, p. 210).

Fica assim mais claro que o instrumento não é algo pronto e acabado; ele pode ser elaborado e reelaborado pelo sujeito ao longo das atividades realizadas com o artefato, agora um novo instrumento, uma vez que já sofreu a ação do sujeito.

De acordo com Rabardel (2011, p.204), são chamados de “instrumentalização, quando orientado ao artefato, e de instrumentação quando relativo ao sujeito” e a entidade instrumental: o artefato e os esquemas de utilização são denominados dimensões do fenômeno da Gênese instrumental.

Os sujeitos desenvolvem os esquemas de utilização tanto no processo de instrumentalização quanto no de instrumentação. Os esquemas de utilização quando relacionados ao processo de instrumentalização são denominados esquemas de uso e, quando relacionados ao processo de instrumentação são chamados de esquemas de ação instrumentada. À medida que esquemas de uso de um determinado artefato são desenvolvidos, novos esquemas de ação instrumentada são desenvolvidos; trata-se da instrumentação que, por sua vez leva ao desenvolvimento de novos esquemas de uso e assim por diante. Podemos dizer que são processos contínuos.

Os esquemas de uso são relativos às tarefas ligadas diretamente ao artefato, tais como ligar o computador, localizar os aplicativos, e colocar atalhos na tela. Os esquemas de ação instrumentada são relativos às tarefas diretamente ligadas ao objeto da ação. Os esquemas de ação instrumentada vão, progressivamente, constituindo-se em técnicas que permitem resolver eficientemente certas tarefas (ARTIGUE, 2002). Por exemplo, se o objetivo é usar um editor de textos, então ao aprender a usar as ferramentas do aplicativo para realizar a tarefa (o objetivo da ação do sujeito), este estará desenvolvendo um esquema de ação instrumentada. Vale salientar que o que é esquema de ação instrumentada para um sujeito em um determinado momento pode se transformar em esquema de uso, para esse mesmo sujeito em um momento posterior. Para caracterizar um esquema é preciso analisar seu estatuto na atividade do sujeito. Rabardel (1995) ilustra essa afirmação com o exemplo da ultrapassagem de um veículo para um condutor que está aprendendo a dirigir e, depois, quando ele já é motorista experiente.

No primeiro caso trata-se de um esquema de ação instrumentada e no segundo de um esquema de uso. Ou seja, quando o sujeito já sabe dirigir e usa o carro para se deslocar de um local a outro, os esquemas envolvidos nesta ação (automatizada) podem ser interpretados como esquemas de uso.

Os esquemas de utilização são aqueles esquemas relacionados com a utilização de um artefato e fazem,

referencia a duas dimensões da atividade: - As atividades relacionadas com as tarefas secundárias, ou seja, a gestão das características e

propriedades particulares, ou seja, a gestão das características e propriedades particulares do artefato, e, as atividades primárias (principais), as que estão orientadas ao objeto da atividade em que o artefato é um meio de realização. (RABADEL, 2011, p.171).

Os esquemas de uso são relativos às tarefas secundárias. O que os caracteriza é sua orientação em direção às tarefas secundárias que correspondem à gestão das características e propriedades particulares do artefato.

Os esquemas de ação instrumentada estão relacionados com a meta de operar transformações sobre o objeto em atividade. Estes esquemas incorporam como componentes os esquemas de uso.

O que caracterizam é o fato de que são relativas as tarefas primárias. Constituem o que Vygotsky chama de “atos instrumentais”, para os quais há uma recomposição da atividade dirigida até a tarefa principal do sujeito. Os esquemas primários (esquemas de uso) constituem, segundo a terminologia de Cellerier, módulos especializados que se coordenam uns com os outros e também com outros esquemas, se assimilam e se acomodam reciprocamente para constituir os esquemas de ação instrumentada. (RABADEL, 2011, p.172).

Existe, também, um terceiro nível de esquemas no qual o coletivo compartilha o mesmo instrumento ou trabalha com a mesma classe de instrumentos, visando a alcançar metas comuns, são os chamados esquemas de atividade coletiva instrumentada.

Esses diferentes esquemas têm relação de dependência mútua, hipótese levantada por Rabadel e que

a partir dos esquemas de uso e dos esquemas de ação instrumentada podem surgir, recompoem-se e generalizar esquemas de atividade coletiva instrumentada. Analogamente, os esquemas de atividade coletiva instrumentada são uma fonte a partir do qual se podem desenvolver, evoluir e recompoem-se os esquemas de ação instrumentada e os esquemas de uso. (RABADEL, 2011, p.174)

No centro da teoria da atividade instrumentada está o conceito de gênese instrumental, que consiste no processo de elaboração do instrumento pelo sujeito. É neste processo que reside o interesse central de nossa pesquisa sobre a integração da tecnologia pelo estudante em sua aprendizagem. Por esse motivo é importante compreender esse processo. Participam do processo de gênese instrumental duas dimensões: a instrumentalização e a instrumentação.

Podemos ter uma outra visão sobre o artefato, o instrumento e o esquema para solidificar tais conceitos. Segundo Marilena Bittar,

“Na abordagem instrumental, um artefato pode ser um meio material, como um martelo, uma enxada, ou um meio simbólico, como uma linguagem simbólica (linguagem algébrica, símbolos vetoriais etc.). O instrumento consiste do artefato acrescido de um ou vários esquemas de utilização desse artefato, esquemas esses construídos pelo sujeito. Rabardel (1995; 1999) fornece assim uma definição psicológica de instrumento, pois toma como base para tal o conceito de esquema. Um instrumento não existe “por si só”; o artefato se transforma em um instrumento para um determinado sujeito quando este o incorpora às suas atividades. Ou seja, um artefato (por exemplo, um software) torna-se um instrumento para o Pesquisador, relativamente à sua prática pedagógica, quando ele o utiliza com seus alunos, em sua atividade de ensino.”

Um mesmo artefato dá origem a diferentes instrumentos construídos por diferentes sujeitos. Tomemos, como exemplo, o software Geogebra. E, consideremos um estudante para o qual o software é desconhecido. Ao entrar em contato com este material que não conhece, não sabe manipular nem mesmo as ferramentas básicas, este software é, para este estudante, um artefato. À medida que ele começa a desvendar o material, descobrir como ele funciona e elaborar situações de uso do software, o estudante está desenvolvendo e agregando ao artefato esquemas de utilização e, então, o artefato é transformado, para este estudante, em instrumento. Quanto mais ele usar este instrumento, mais esquemas podem ser construídos, agregados ao software e o estudante terá, então, um novo instrumento.

Vamos falar mais um pouco sobre integração, quando falamos em integração, relativamente ao uso de tecnologia na prática pedagógica da aprendizagem do estudante, estamos querendo dizer que o estudante se torna autônomo nesse uso. Ou seja, estamos nos referindo a uma integração crítica. Nesse sentido, a abordagem instrumental oferece um referencial que permite avançar nessa questão, como é possível ver em Artigue (2002). Investigar a gênese instrumental em situação da aprendizagem dos estudantes é investigar como o estudante cria os esquemas para o uso da tecnologia e como essa tecnologia vai transformar e contribuir em sua aprendizagem.

De acordo com Rabardel (2011) dois conceitos são fundamentais para a compreensão da Gênese Instrumental: o artefato e o Instrumento. Um artefato está

ligado ao que se pensava definir como ferramenta, o qual, porém, possui um caráter neutro e está

Conectado ao uso que o sujeito faz como meio para a sua ação e que pode ser considerado como uma máquina, um objeto técnico, objetos e sistemas simbólicos, ou seja, que (os artefatos) podem ser definidos como materiais ou simbólicos. (RABADEL 2011, p.49-52.)

Segundo Rabardel(2011, p.49-52) “Um instrumento consiste de uma entidade mista formada por um aterfato e um esquema, e também é uma construção produzida pelo sujeito”.

Temos o artefato simbólico, cujo o esquema de ação instrumentada teria por objetivo desenvolver as pontencialidades do artefato e operar transformações sobre o objeto da tarefa proposta.

Os esquemas, como já definidos, são os conjuntos de conhecimentos existentes, que o sujeito precisa mobilizar para dar sentido ao uso de um artefato. Assim, temos a Gênese Instrumental que é um processo em que o sujeito está envolvido em uma determinada ação, utiliza uma ferramenta chamada artefato e acrescenta, a ele, seus conhecimentos, transformando-os em instrumento.

A Abordagem Instrumental de Rabardel (1995) considera a teoria de ergonomia cognitiva, levando-se em consideração os processos mentais (percepção, memória, raciocínio etc.) que afetam as interações entre seres humanos e outros elementos de um sistema, como exemplo temos a interação entre homem e computador.

Rabardel (1995) defini e descreve as relações existentes entre o sujeito, a ferramenta (artefato), objeto e os esquemas de utilização. Assim, temos:

- Sujeito: individuo (usuário, operador, trabalhador, etc.) ou grupo de indivíduos que desenvolve a ação ou é escolhido para o estudo, é ele que dirige a ação psíquica sobre o objeto; que em nosso caso é o estudante.
- Artefato ou Instrumento: dispositivo que pode ser material (lápiz, computador, et.) ou simbólico (uma figura, um gráfico, etc.), é o mediador entre o sujeito e o objeto, que em nosso caso é representado pelo software Geogebra.

- Objeto: material, real, objeto da atividade, objeto de trabalho ou outros sujeitos. É sobre ele que a ação é dirigida. Que em nosso caso é representado pela inequação logarítmica.

- Esquemas de utilização: (sequência didática) “é uma organização invariante de comportamentos para classes de situações”. É necessário procurar nos esquemas os elementos cognitivos que permitem que a ação do sujeito seja operatória.

Então, podemos dizer que a Gênese Instrumental seria a abordagem instrumental na qual estuda os aspectos próprios que existem no artefato (no instrumento), no objeto e processos que envolvem a transformação progressiva do artefato em instrumento. Para Verillon e Rabardel (apud Salazar, 2009), esse processo busca a integração entre as características dos artefatos (potencialidades e limitações) e as atividades do sujeito – seus conhecimentos e métodos de trabalho. A seguir apresentaremos a teoria de Raymond Durval sobre registro de representação semiótica.

7.2 Registro de representação semiótica de Raymond Durval

A teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Durval e publicada em 1995, tem como objetivo estudar o funcionamento do pensamento. Para o autor, a matemática possui uma particularidade com relação a sua aprendizagem em comparação com outras áreas do conhecimento, pois a aprendizagem necessita de

atividades cognitivas que requerem a utilização de sistemas de expressão e da representação além da linguagem natural ou das imagens: sistemas variados de escrituras algébrica e lógica que contenham o estatuto de línguas paralelas à linguagem natural para exprimir as relações e as operações, figuras geométrica, representações em perspectivas, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc. (DURVAL, 2003, p.13)

São essas atividades cognitivas que estão presente no processo de uso ou formação dos esquemas de utilização dos sujeitos envolvidos nas atividades com inequações logarítmicas que se pretende estudar, e que caracterizam a articulação entre as duas teorias.

Antes, porém, é necessário pontuar que a necessidade de não confundir objetos matemáticos com as suas representações. A inequação logaritmica é um objeto matemático, enquanto que um gráfico desta inequação, ou ainda uma expressão algébrica da mesma, constituem-se como representações deste objeto matemático.

As representações semióticas são extremamente necessárias à aprendizagem da matemática, pois são por meio delas que o sujeito exterioriza suas representações mentais que constrói acerca de um determinado conceito. Isso faz com que se tornem visíveis ou, ainda, acessíveis aos outros, ou seja, exercendo também uma função de comunicação e, no caso da matemática, são necessárias para o desenvolvimento da sua própria atividade.

A questão envolvendo as representações de um mesmo objeto matemático enfrenta algumas barreiras. O fato de representar um mesmo objeto matemático por meio de várias representações nem sempre é bem sucedido. Quando isso não ocorre defini-se o fenômeno como não-congruente; quando essa passagem é espontânea diz-se que o fenômeno é congruente. Para que ocorra o fenômeno da congruência três condições são necessárias:

- Correspondência semântica entre as unidades;
- Mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações e;
- Convenção de uma só unidade significativa na representação

Mas, quando um desses três critérios não é verificado, as representações não são mais congruentes entre elas, e a passagem de uma à outra não tem mais nada de imediato. Pode igualmente fazer-se que duas representações sejam congruentes em um sentido de conversão e não-congruentes para a conversão inversa. (DURVAL, 2003, p.18-19)

Duas transformações são importantes para o estudo da representação semiótica: o tratamento e a conversão.

Um tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas; um tratamento mobiliza então apenas um registro de representação. A conversão é, ao contrário, uma transformação que se

faz de um registro ao outro. Ela requer a coordenação dos registros no sujeito que a efetua. (DURVAL, 2003, p.39).

Portanto, de acordo com Durval (2003), “diz-se que há um tratamento quando existe uma transformação que produz uma representação dentro do mesmo registro e, uma conversão quando é produzida uma representação em um outro registro diferente do inicial”

Os meios pelos quais é possível verificar a aprendizagem depende, segundo Duval (2009), das transformações de Conversão e Tratamento de representações semióticas disponibilizadas. O Tratamento caracteriza-se quando as transformações semióticas acontecem apenas em um sistema semiótico, ou seja, durante a descoberta do valor de uma ou mais incógnita no processo de resolução de uma equação, suas etapas de desenvolvimento acontecem somente pelas representações algébricas e pela sua simplificação.

Para Duval (1995), a Conversão é uma operação cognitiva, porém, de outra natureza que compreende a transformação de uma dada representação em outra, pertencente a um outro sistema semiótico, de modo a conservar a totalidade ou parte da representação inicial, sendo necessária ser efetuada pelo sujeito aprendente, sem caracterizar uma tradução ou decodificação. Essa operação não é uma operação trivial e nem cognitivamente neutra, segundo nos alerta Duval (1995). Exemplo: “um número positivo” (língua materna) e “ $x > 0$ ” (linguagem algébrica). De acordo com esse teórico, é na Conversão das representações de um sistema semiótico a outro que haverá uma operação cognitiva que pode ser descrita como uma mudança de forma, que possibilitará a conceitualização dos objetos matemáticos pelos sujeitos aprendentes.

Espera-se que durante o esquema (sequência didática), na relação de ensino, sejam analisados os registros que aconteceram para identificar os indícios de aprendizagem por meios das representações semióticas sejam elas feitas por tratamento ou por convenções.

Na sequência será apresentado os procedimentos metodológicos que permitiram a organização das atividades com os estudantes, os personagens que participaram da realização deste experimento e como será abordado o tema principal inequação logarítmica durante a realização de nossa dissertação.

8 METODOLOGIA

A presente experimentação didática será realizada em um ambiente remoto com estudantes do ensino médio do 1º e 2º ano do estado do Pará e para isso, utilizamos a plataforma do Meet, pois viabiliza um contato áudio visual dos estudantes possibilitando a sua gravação. Usaremos, também, como instrumento um software de geometria dinâmica chamado de geogebra. Em seguida será realizado com os professores da área de matemática, preferencialmente professores que lecionam com estudantes do 1º ano do ensino médio ou que tenha experiência suficiente sobre o tema. Neste instante o pesquisador irá desenvolver as atividades junto com os professores de tal forma que permita uma interação que possibilite ao pesquisador coletar dados para contribuir na construção de uma nova atividade reformulada e assim poder aplicar aos estudantes em segundo instante.

No segundo instante será a aplicação de 3 (três) experimentos, o primeiro experimento foi aplicado para um estudante, o segundo experimento para um estudante e o terceiro experimento para três estudantes. Foi definido desta forma para a priori verificar a eficácia do experimento para um estudante e depois para um grupo de estudantes. Os experimentos serão divididos em três encontros, sendo que no primeiro encontro será uma revisão de matemática básica para a realização do experimento e a introdução do software Geogebra definindo algumas funções importantes para a realização de nossas atividades. O segundo encontro será a realização de uma atividade relacionada ao assunto: da equação à inequação exponencial e o terceiro encontro será uma atividade relacionada com o assunto: da equação à inequação logarítmica. As atividades todas foram reformuladas devido as orientações dos professores e serão aplicadas para os estudantes do 1º e 2º anos do ensino médio.

8.1 Primeiro instante (Professores)

A seleção dos Professores para o desenvolvimento deste trabalho deverá levar em conta, principalmente, a sua experiência com o tema central desta dissertação (inequação logarítmica), não necessariamente precisa conhecer ou dominar o uso do software geogebra.

Forão escolhidos 5 (cinco) professores licenciados em matemática, atuante no 1ºano do ensino médio, de qualquer estabelecimento de ensino (particular ou público), com disponibilidade de tempo e disposição para contribuir no desenvolvimento deste trabalho.

Foi somente um encontro com os professores, todos em seus computadores de forma síncrona e forão identificados não por seus nomes, mas sim pela seguinte forma: ProfA, ProfB, ProfC, ProfD e ProfE. Começam a relatar um pouco do seu trabalho como docente e de sua experiência em relação ao assunto da dissertação, se já conhecem o software geogebra, quais as principais dificuldades encontradas pelos professores quando administram o assunto inequação logarítmica para os seus estudantes.

O desenvolvimento do experimento forá gravado em vídeo e áudio usando o Meet como ferramenta, foi explanado a metodologia da dissertação na qual os professores poderão interagir a qualquer momento opinando na realização deste e suas contribuições forão acatadas para o segundo instante.

8.2 Segundo instante (estudantes)

Durante a realização das atividades, os dados forão coletados por meio de gravação de áudio e vídeo. As atividades que forão objeto de estudo com os estudantes a respeito do artefato possuíram um caráter obrigatório, sendo de suma importância a sua participação.

O número de participantes a se considerar, no mínimo, forão de 5 (cinco) estudantes do 1º e 2º Ano do Ensino Médio, oriundos de escola pública do município de Tucuruí, Abaetetuba e Ananindeua, todos pertencentes da rede pública. E aos estudantes forão designados nomes fictícios (E1; E2, E3, E4, E5) e suas imagens preservadas para esse experimento.

Teremos três (3) experimentos e cada experimento terão três encontros definidos no quadro a seguir, os encontros forão realizados, de maneira síncrona, por via internet com o uso do Meet como suporte para as gravações.

Quadro 1 - Atividades

Encontros	Atividades
1º Encontro	• Cronograma das atividades • Oficina sobre Matemática Básica e o uso do Geogebra.
2º Encontro	• Atividade 1
3º Encontro	• Atividade 2

Fonte: Próprio do autor

9 CARACTERIZAÇÃO DOS EXPERIMENTOS

O pesquisador procederá da seguinte maneira. Cada experimento serão divididos em três encontros, no primeiro encontro fará uma revisão de matemática básica (suficiente para a experimentação) e a introdução do geogebra (ferramentas, ícones que serão necessário para o experimento), no segundo encontro fará a primeira atividade sobre exponencial de função à inequação e no terceiro encontro a segunda atividade sobre logaritmo de função à inequação.

9.1 Primeiro Encontro

No primeiro encontro serão desenvolvido uma revisão da matemática básica, conjuntamente com alguns conceitos e aplicações dos principais ícones e funções do geogebra para o desenvolvimento dos experimentos. Na matemática faremos com que os estudantes relembrem os conceitos, propriedades, as funções, imagem de uma função, domínio de uma função, resolução de uma equação, de uma inequação, sobre a exponencial e o logaritmo, isso para a matemática e para o geogebra aprender algumas das principais funções as quais vamos precisar utilizar na resolução das atividades propostas.

9.1.1 Matemática básica

Para realizamos as atividades 1 e 2 precisaremos que os estudantes tenham em mente a propriedade da potência de expoente de mesma base, pois irá contribuir no desenvolvimento da fatoração de números primos, que implicará no conceito de exponencial e poderemos mostrar para os estudantes o gráfico desta função, que os valores de x e y correspondem, respectivamente, ao domínio (abscissas) e imagem (ordenada) da função exponencial, que acarretará

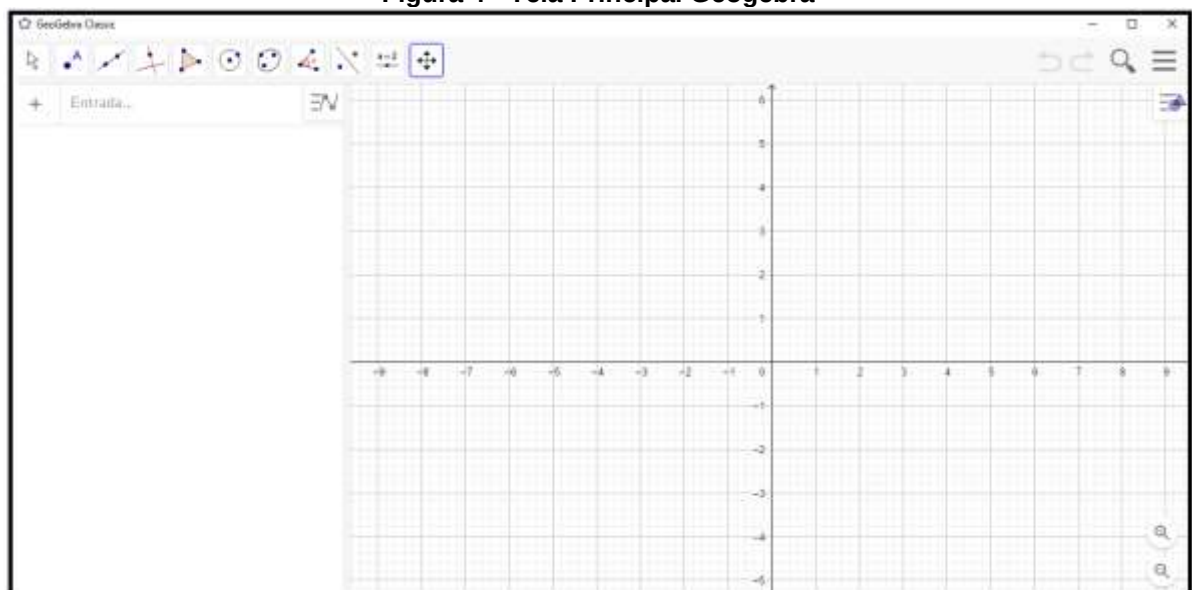
determinarmos os valores de x , para achar os valores de y , que podemos introduzir a ideia de equação, consequentemente de equação exponencial, assim podemos mostrar também valores maiores ou menores para um determinado $f(x)$ que isto demonstra a ideia de inequação exponencial.

A parti daí, quando formos trabalhar com o logaritmo poderemos falar sobre a função, definição de logaritmo, o cálculo de logaritmo, noção de resolução de equação logarítmica e finalmente o assunto de inequação logarítmica.

9.1.2 Geogebra

Vamos considerar que os estudantes nunca tenham visto este software, dessa forma, devemos apresentar o ambiente do geogebra, mostrar que o geogebra possui a parte algébrica e a gráfica (plano cartesiano) como podemos observar na figura a seguir.

Figura 4 - Tela Principal Geogebra



Fonte: próprio do autor

Na parte superior da tela, ao lado do sinal de mais (+) e abaixo dos ícones. Existe um retângulo, inscrito “Entrada” na qual você pode inserir pontos, funções, equações e mostrar esses pontos, gráficos de funções nesse plano cartesiano.

Existem ícones na parte superior e na lateral, tais como:  .

, , , , , , , que iremos apresentar aos estudantes, mas somente alguns ícones que iremos precisar para a resolução das atividades propostas, pois o geogebra possui uma grande variedade. E por fim, mostrar alguns recursos matemático que aplicaremos na resolução e no entendimento das atividades, tais como: fatores primos, soluções.

Os ícones citados acima e outros que iremos utilizar em nossos experimentos tem as seguintes denominações e funções:

 - Mover janela de visualização – Serve para arrastar a janela de visualização ou um eixo.

 - Mover – Arraste ou selecione objeto.

 - Ponto – selecione uma posição ou reta, função ou curva.

 - Ampliar – Clique / Toque para ampliar.

 - Reduzir - Clique / Toque para reduzir.

 - Análise univariada – analise os valores numéricos das células selecionadas.

 - Planilha - Quando selecionado abre uma janela do Excel.



- Reta perpendicular – Selecione primeiro o ponto e, depois, uma reta (ou segmento, ou semireta, ou vetor)



- Segmento – Selecione dois pontos ou posições.



- Reta – Selecione dois pontos ou duas posições.



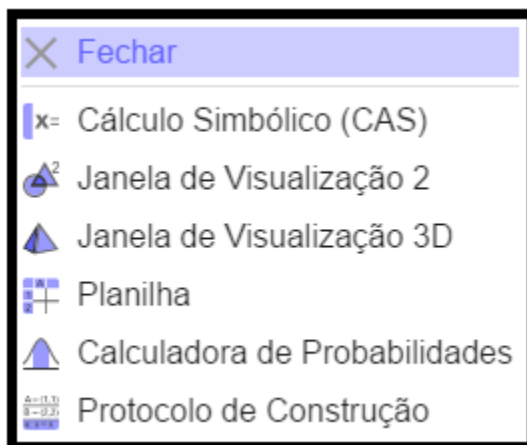
- Exibir / Esconder Objeto - Selecione os objetos e, em seguida, ative uma outra ferramenta.



- Sem nome definido – Quando selecionado abre outras opções de

ícones:  e o que nos interessa é tão somente

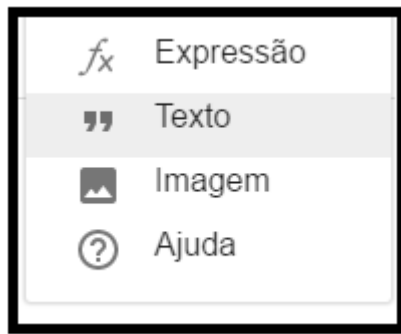
este  que não tem um nome específico, porém quando precisei usá-lo chamei de três pontinhos e este abre outras opções:



desses ícones o que vamos usar é somente a planilha (já comentado).



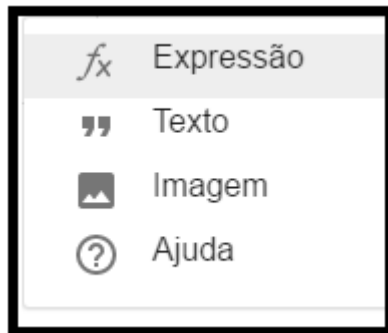
- Sinal de Mais – Localizado a esquerda da tela e acima, quando clicado nos apresenta outras opções tais como:



, dessas opções usaremos apenas a “Expressão”.



- não tem um nome aparente, mas nomeei de função, quando solicitado apresenta as seguintes opções:

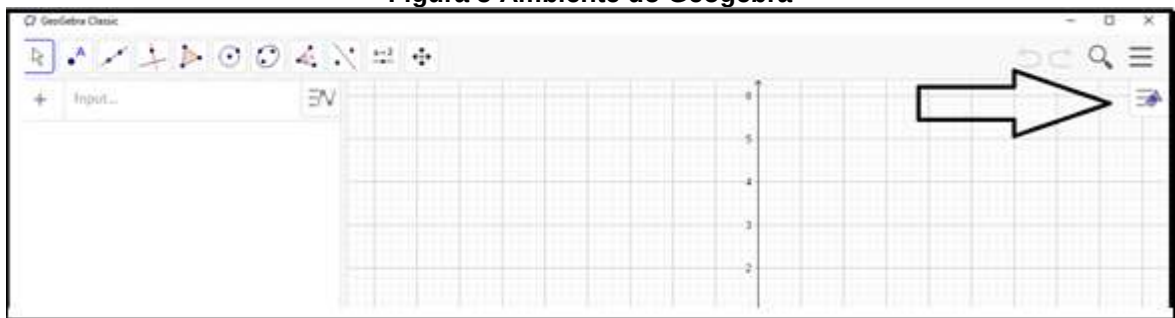


e aqui aparece novamente, mas já tem um nome chamado de Expressão, serve para incluir funções diversas.

9.1.3 Procedimento do Pesquisador no primeiro encontro.

Primeiramente vamos abrir o Geogebra para o estudante que se localiza no site: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT. Com o Geogebra aberto vamos mostrar ao estudante o ambiente de planilha, onde vamos inserir os dados de nossa atividade em uma tabela, para isso pedimos ao estudante que clique no ícone no qual a seta está indicando na figura a seguir.

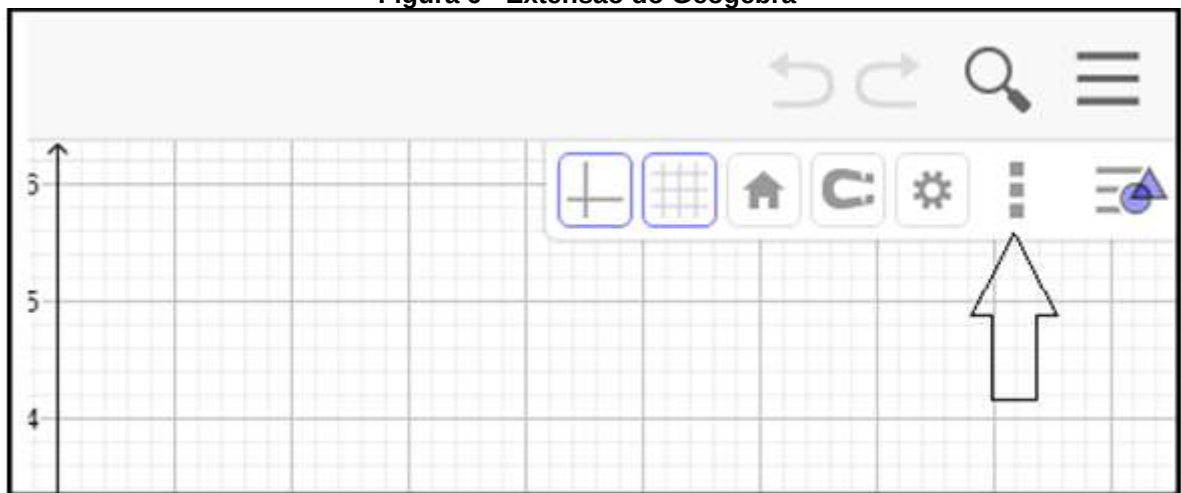
Figura 5 Ambiente do Geogebra



Fonte: Próprio do autor

Abrirá uma extensão,

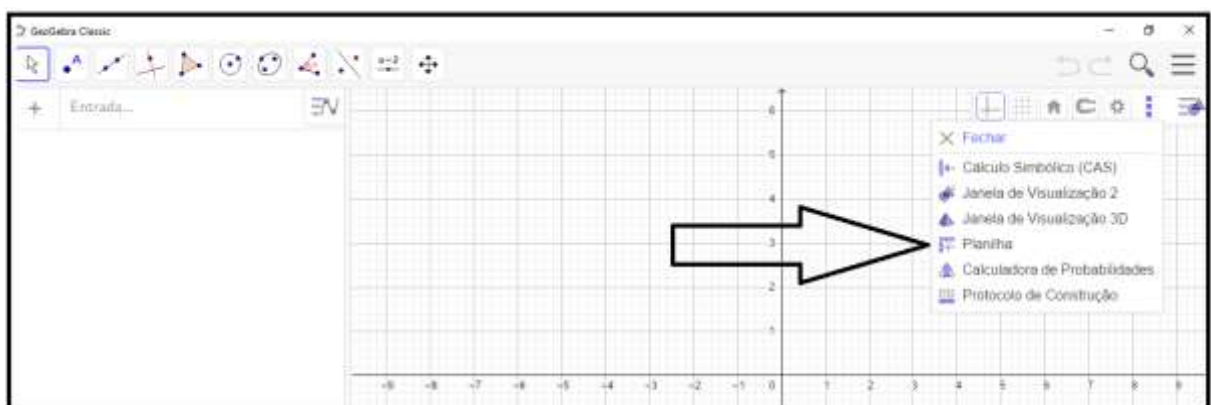
Figura 6 - Extensão do Geogebra



Fonte: Próprio do autor

Selecione os três pontos indicados pela seta e abrirá uma outra janela.

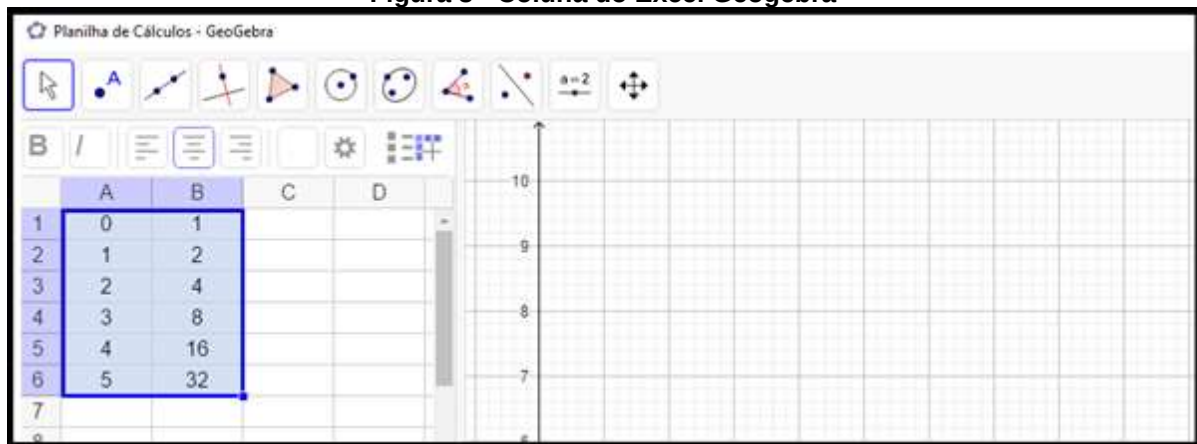
Figura 7- Inserir Planilha do Geogebra



Fonte: Própria do autor

Clique em Planilha aparecerá uma coluna do Excel no qual o estudante preencherá uma tabela com os dados da atividade.

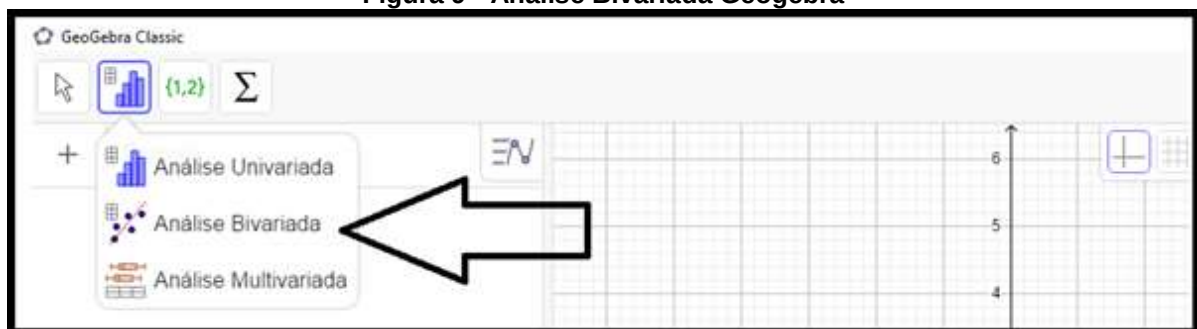
Figura 8 - Coluna do Excel Geogebra



Fonte: Próprio do autor

Em seguida vamos selecionar os valores e acionar o botão  (Análise Univariada), aparecerá uma nova janela e o estudante escolherá a opção “Análise Bivariada”.

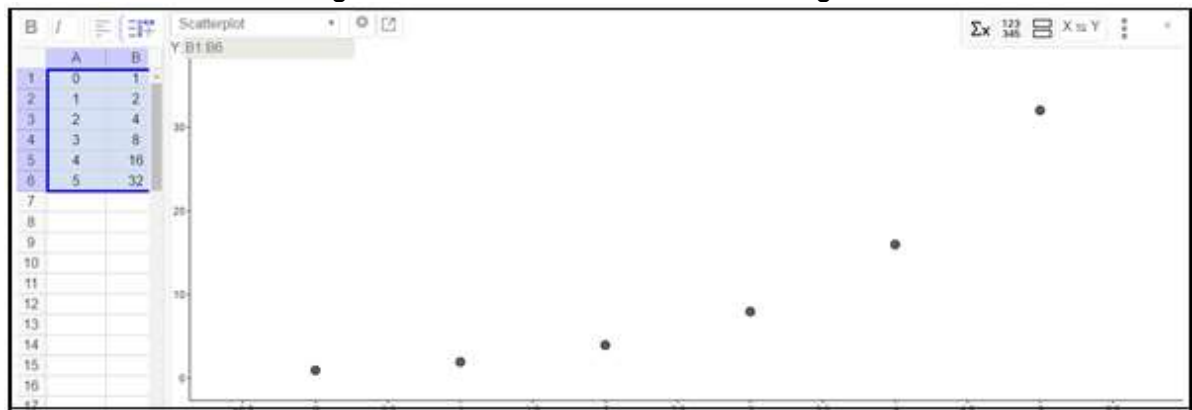
Figura 9 - Análise Bivariada Geogebra



Fonte: Própria do autor

Aparecerá na tela os pontos (coordenadas) dos dados no plano.

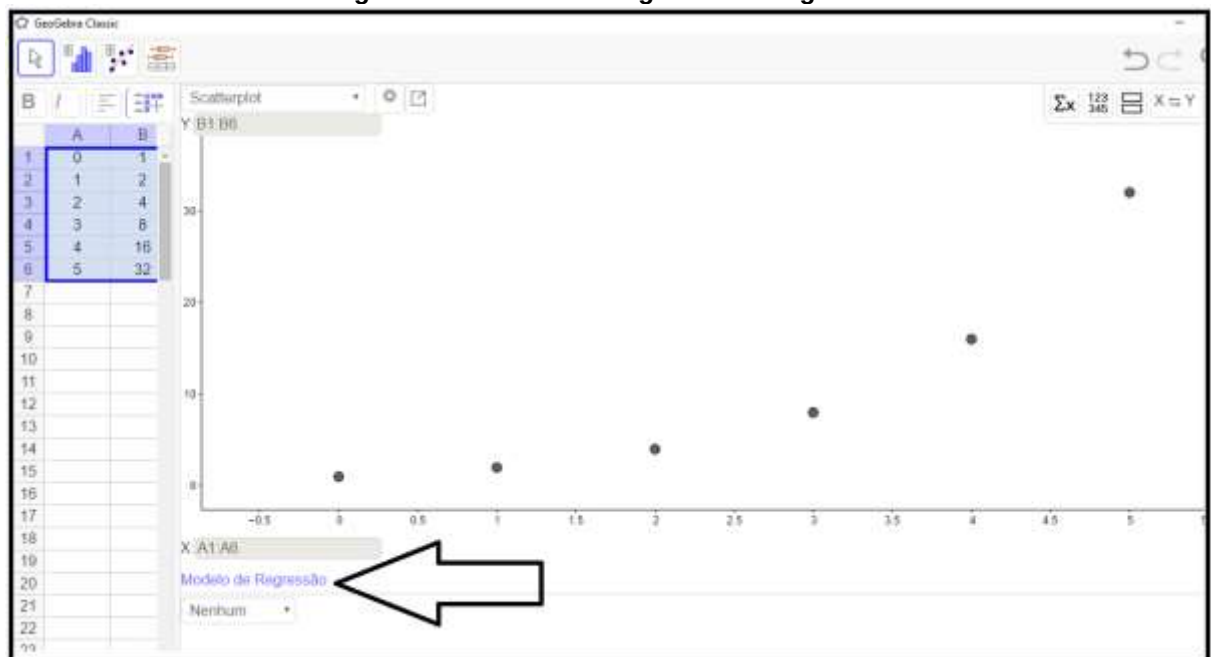
Figura 10 - Pontos de Coordenadas Geogebra



Fonte: Própria do autor

Nesta tela indagaremos ao estudante qual a melhor função para representar esses dados, para isso em Modelo de Regressão, clique em “Nenhum”,

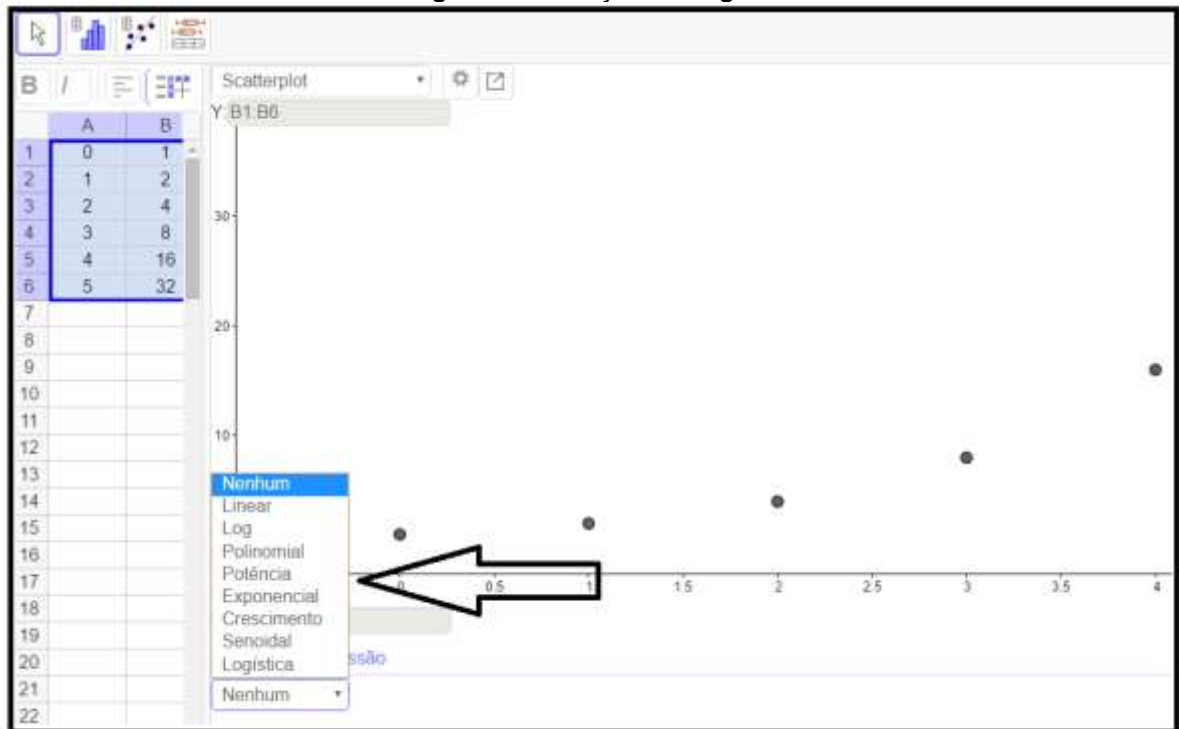
Figura 11- Modelo de Regressão Geogebra



Fonte: Própria do autor

Os nomes das funções aparecerão em uma lista. E os estudantes escolherão entre as funções a melhor que se enquadra nos pontos dados.

Figura 12 - Funções Geogebra

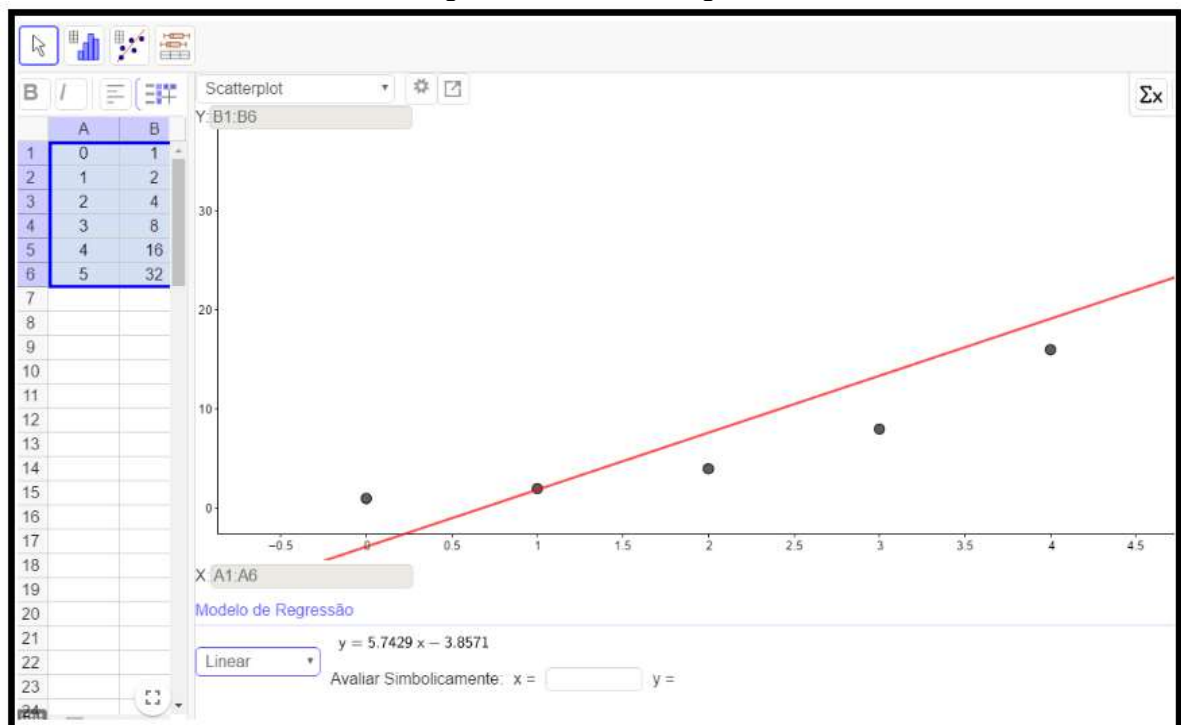


Fonte: Próprio do autor

Assim, teremos as seguintes opções:

- Linear

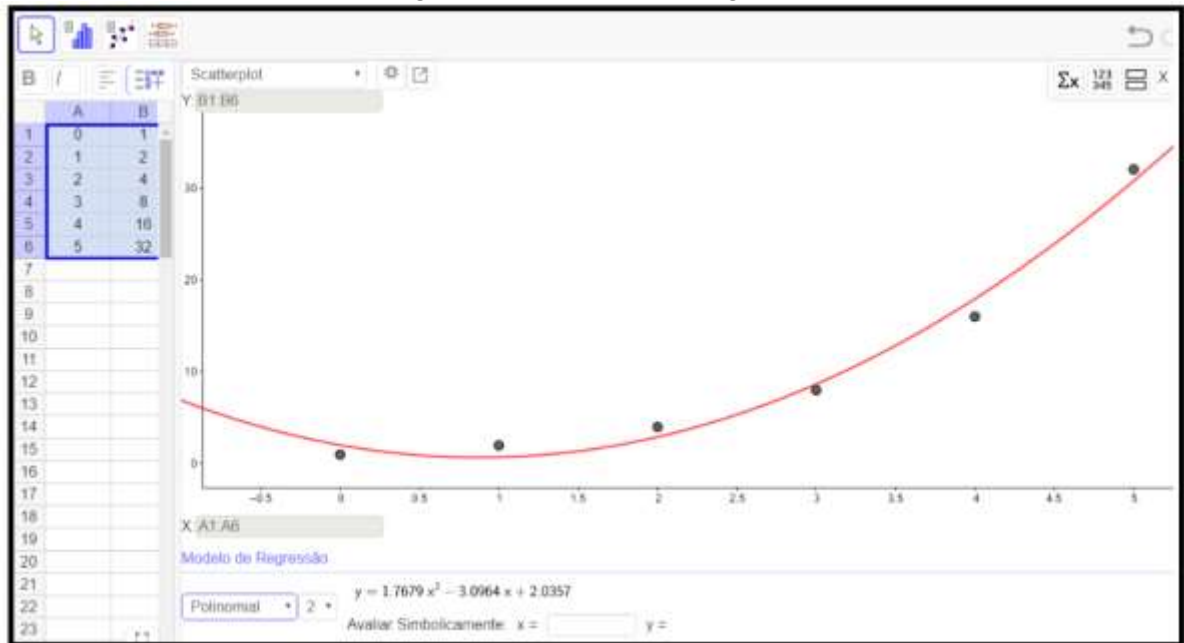
Figura 13 - Linear Geogebra



Fonte: Próprio do autor

- Polinomial

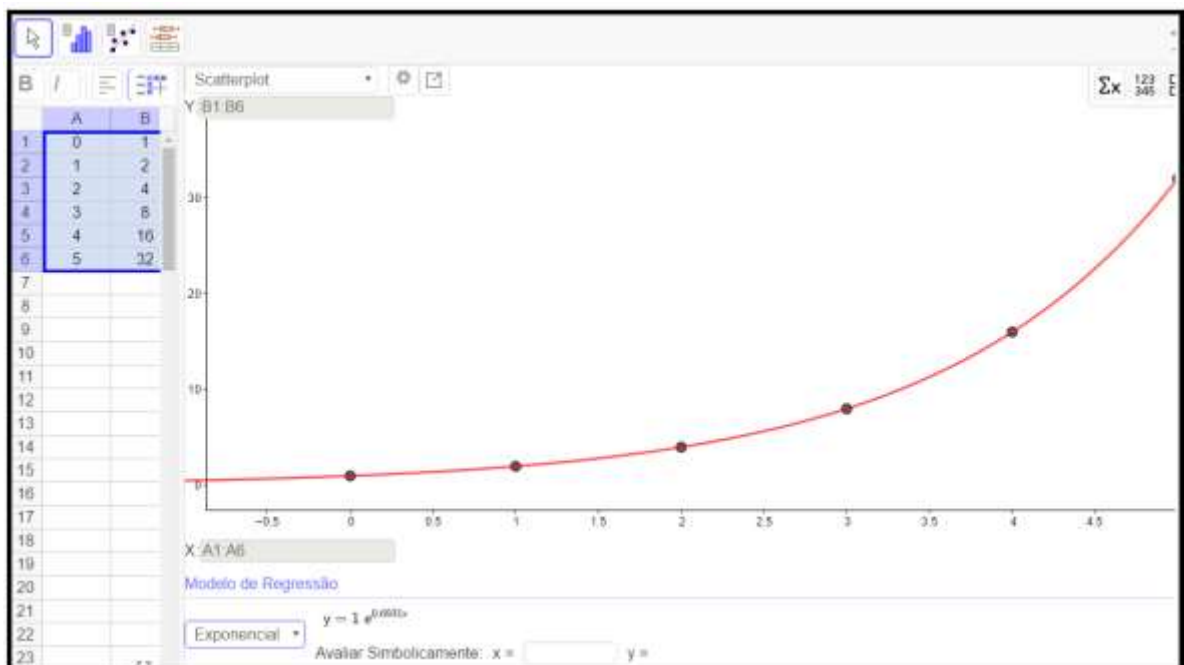
Figura 14 - Polinomial Geogebra



Fonte: Próprio do autor

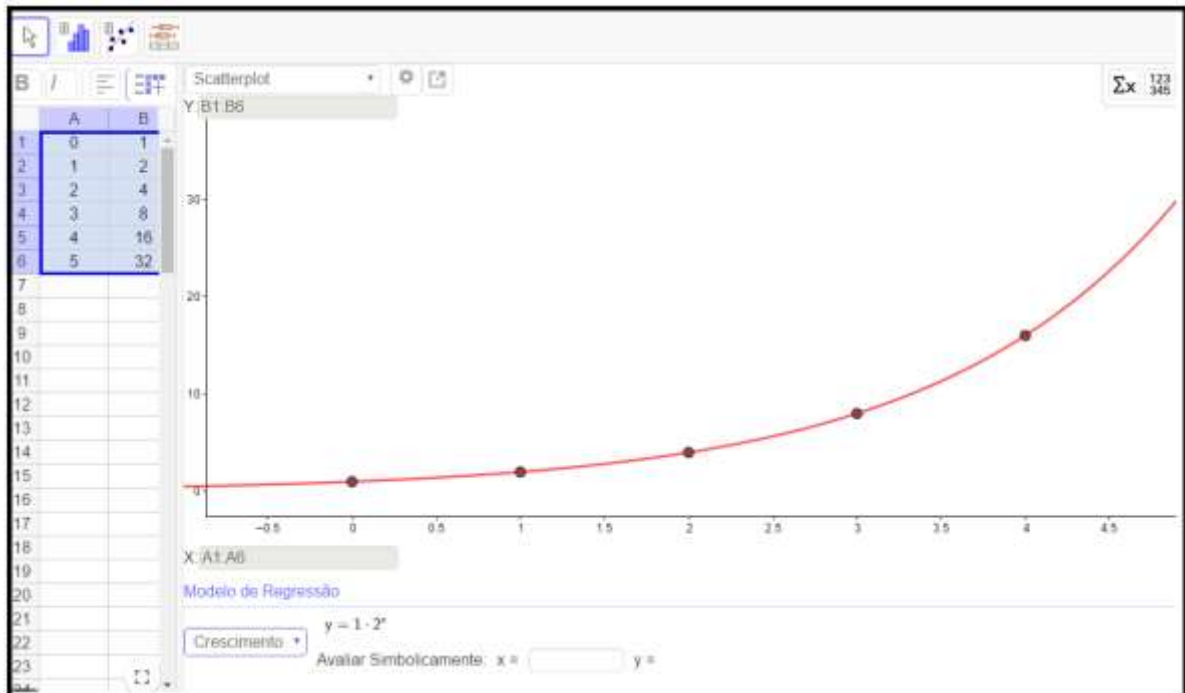
- Exponencial e Crescimento

Figura 15 - Exponencial e Crescimento Geogebra



Fonte: Próprio do autor

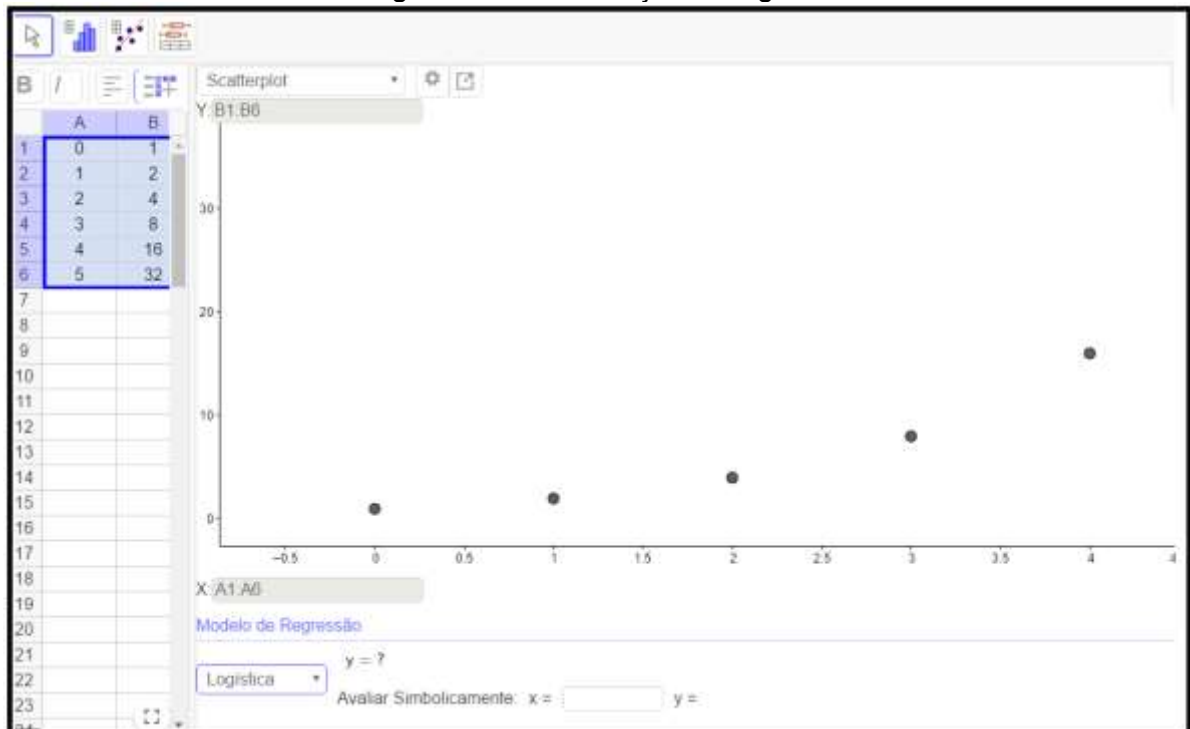
Figura 16 - Exponencial Geogebra



Fonte: Próprio do autor

- Log, Potência, Senoidal, Logística, para essas funções o estudante perceberá que não haverá alteração nenhuma.

Figura 17- Outras funções Geogebra



Fonte: Próprio do autor

Faremos algumas perguntas ao alunos tais como:

1 – A função polinomial do segundo grau se ajusta bem aos dados da tabela?

2 – Que tipo de função você acha que se ajusta melhor?

Esperamos com essas indagações que os estudantes digam que a função polinomial do 2º grau não se ajusta bem aos dados e que a função exponencial é a melhor que se ajusta, porém a base é neperiana e observando-se a tabela dada anteriormente, os dados sugere ao estudante que a base da exponencial seja 2. Por isso, vamos propor a construção de forma direta no ambiente 2D do Geogebra onde visualizamos uma lista de pontos.

9.2 Segundo Encontro

O segundo encontro seria a resolução da primeira atividade começando pela introdução de uma tabela sobre exponencial e plotar essa tabela em um gráfico correspondente. Com a orientação do pesquisador o estudante observar que o gráfico formado é uma exponencial e que apartir desse gráfico foram respondidas outras questões referente a função exponencial, a imagem y de um certo valor x do domínio, solução de equações e por fim a resolução de inequação exponencial, quando uma função é crescente ou decrescente e seu comportamento graficamente.

9.2.1 Atividade 1

9.2.1.1. Objetivo

Compreender através do uso do Geogebra a definição e as principais propriedades da função a inequação exponencial.

9.2.1.2. Atividade de exponencial (Da função a inequação)

Dado uma tabela que apresenta dados que mostram o crescimento do número de células em função da quantidade de dias e usando o aplicativo geogebra faça uma representação gráfica dos dados.

Tabela 1 - Crescimento do número de células

Tempo (t)	0	1	2	3	4	5
Número de Célula (n)	1	2	4	8	16	32

Fonte: Própria do autor

Determine qual o tipo de função que melhor se ajusta aos dados apresentados.

Verifique se:

a) Para tempos iguais a 7, 9 e 12 teremos quais quantidades de células correspondentes?

b) Para números de células iguais a 64, 128 e 1024 teremos quais tempos correspondentes?

c) O que representa dizer graficamente e algebricamente $2^x > 4$.

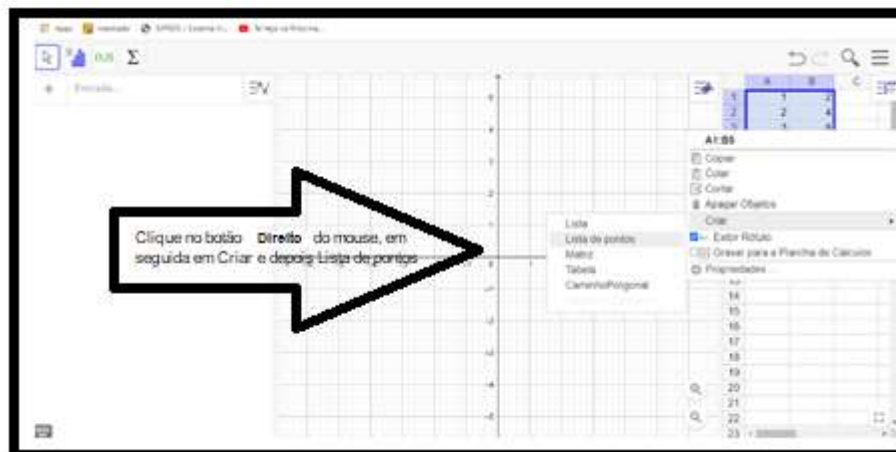
d) O que representa dizer graficamente e algebricamente $2^x < 8$.

e) Para a base maior que zero e menor que um, por exemplo $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 0.5$, o que representa graficamente ou algebricamente.

9.2.2 Procedimento do Pesquisador no segundo encontro

Na figura 18 mostra a introdução de uma tabela no excel e em seguida a criação de uma lista de pontos que serão gerados no ambiente de gráfico do geogebra.

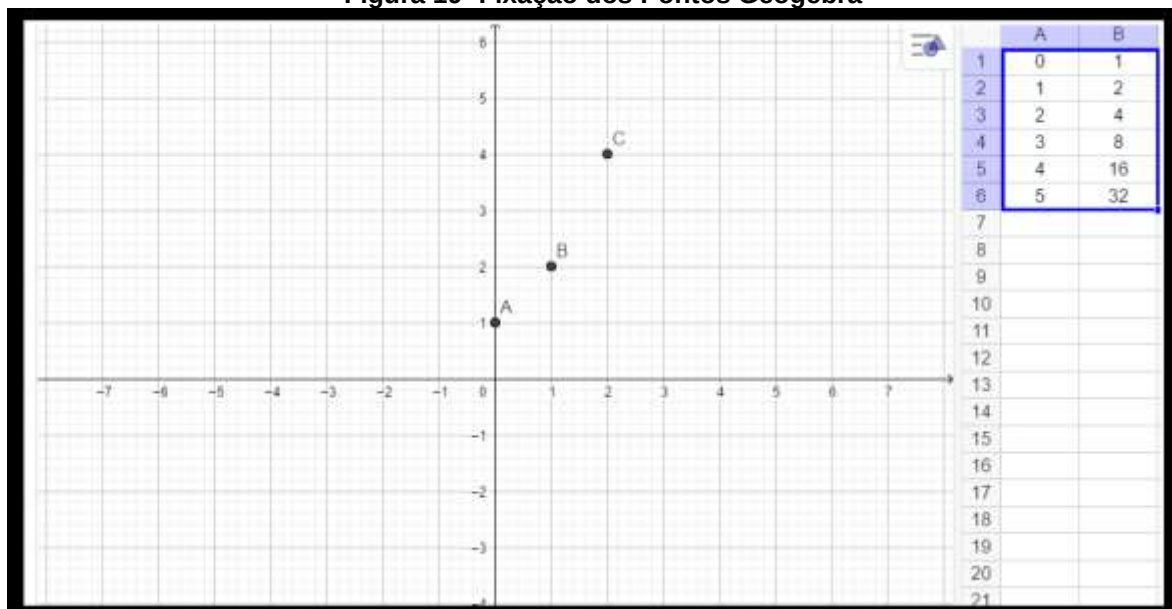
Figura 18 - Lista de Pontos Geogebra



Fonte: Próprio do autor

Assim teremos:

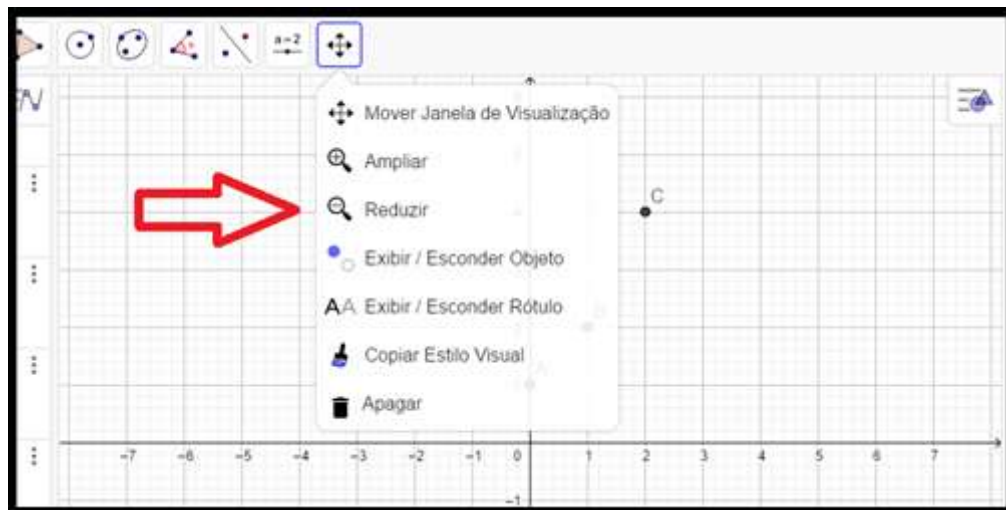
Figura 19- Fixação dos Pontos Geogebra



Fonte: Própria do autor

E, no ambiente 2D deveremos fazer ajustes na tela para mostrar todos os pontos da tabela. Clicando em “Mover janela de visualização”  abre uma nova janela e clique em “Reduzir”  para ajustar os pontos na tela.

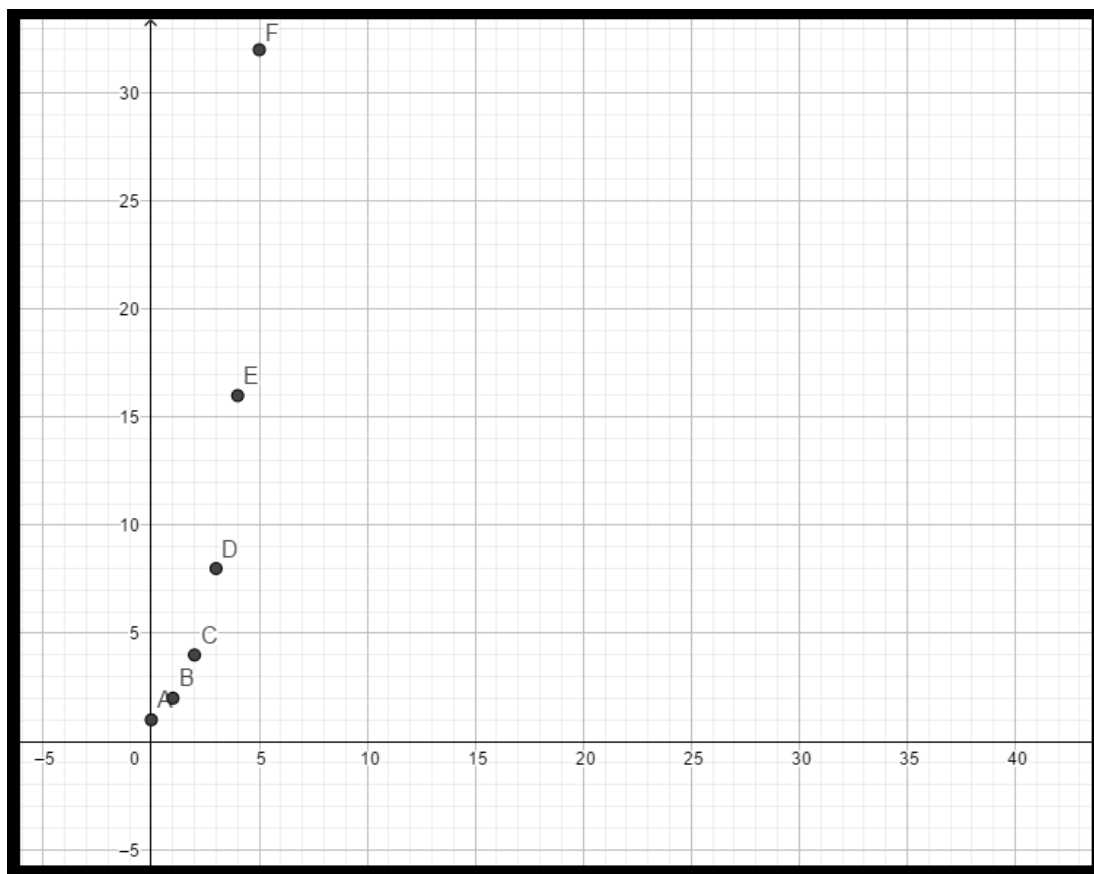
Figura 20 - Reduzir Tela Geogebra



Fonte: Próprio do autor

Dessa forma, teremos:

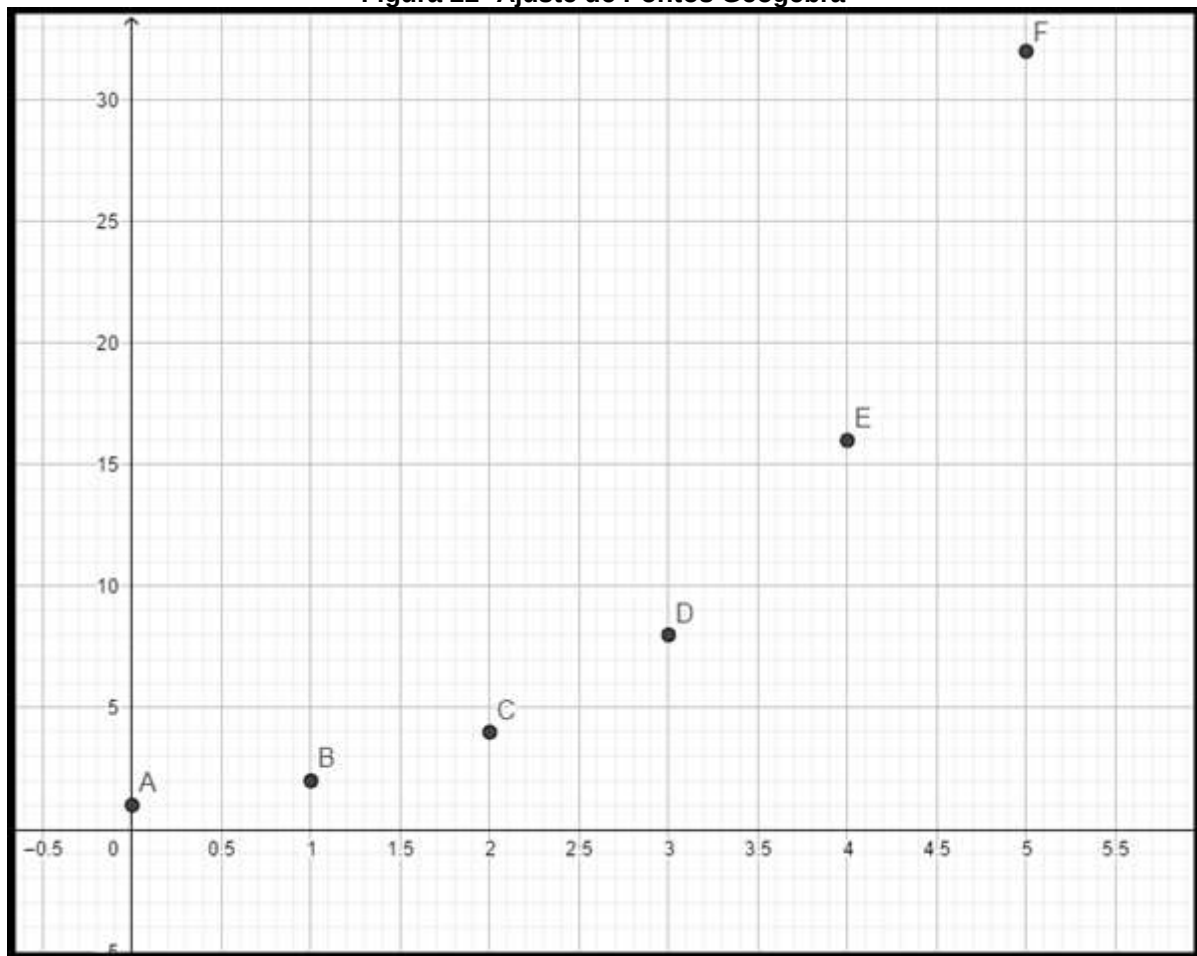
Figura 21- Visualização de Todos os Pontos Geogebra



Fonte: Própria do autor

Colocando-se o cursor do mouse sobre o eixo "x" ele se transformará na seguinte figura ⇄ e com isso poderá alterar a escala numérica.

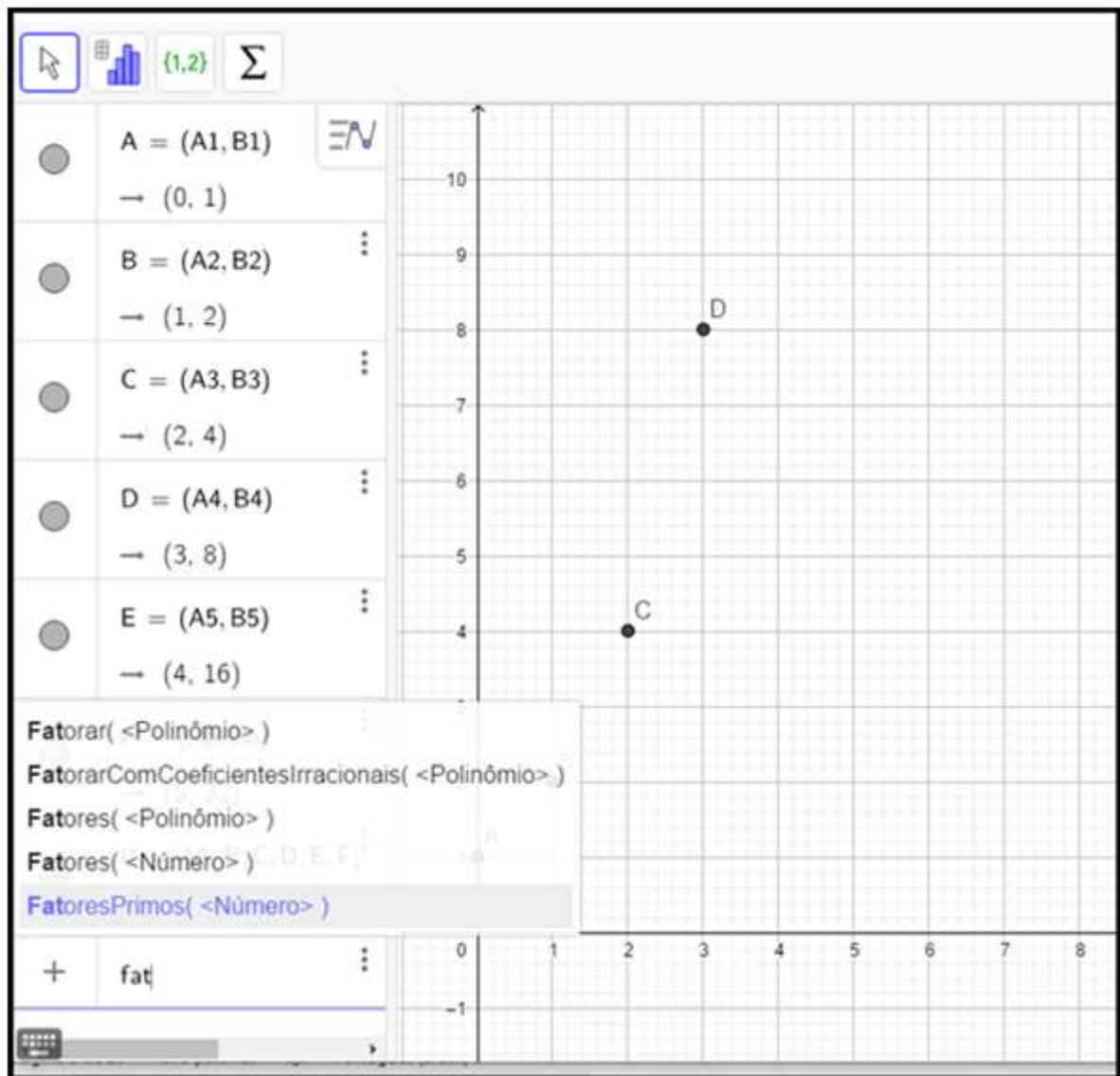
Figura 22- Ajuste de Pontos Geogebra



Fonte: Próprio do autor

Após isso , plotados os dados da tabela possibilitará ao estudante um estudo no ambiente 2D. Assim, primeiramente devemos mostrar aos estudantes o comando “fatorar primos” no geogebra, por exemplo: peça aos estudantes escrever em “Entradas” a palavra fatorar.

Figura 23- Visualização dos Pares Ordenados Geogebra



Fonte: Própria do autor

Aparecerá essa janela e nela você escolherá Fatores Primos e digitará em “<Números>” os valores 4, 8, 16 e 32. Observe o que acontece, explique com suas palavras o que aconteceu?

Esperamos que o estudante diga que a fatoração do número 4 é 2×2 , que a fatoração do número 8 é $2 \times 2 \times 2$, que a fatoração do número 16 é $2 \times 2 \times 2 \times 2$ e assim por diante.

Daí questionaria aos estudantes qual seria a melhor forma de representar a função exponencial, quem seria a base de nossa função e o expoente?

Esperamos que os estudantes respondam que a função é a exponencial, que a base é dois, devido a fatoração dos números e por fim que o expoente seja “x”. Dessa forma esperamos que os estudantes cheguem a seguinte conclusão: $f(x) = 2^x$. Pedimos que digite em “Entrada” a função “ $f(x) = 2^x$ ”. e perguntaremos ao estudante se a função é crescente ou decrescente, o que faz a função crescer?

Esperamos que o estudante responda que a função é crescente, devido ao fato que a imagem de x crescer com valores crescente de “x”. E de acordo com a base da exponencial, base maiores que um sempre é crescente.

Se no lugar da base 2 fosse 1 o que aconteceria com a função?

Esperamos que o estudante responda que a função deixaria de ser uma função exponencial e se tornaria uma função constante.

E se a base fosse um número menor que 1 e maior que zero (uma fração imprópria). O que aconteceria com a função exponencial?

Esperamos que o estudante responda – A função exponencial seria decrescente.

Em seguida, poderão responder ao item “a” da primeira questão.

Digite em “Entrada” a expressão $f(7)$, depois $f(9)$ e depois $f(12)$, explique o que acontece. Esperamos que o estudante digite os números 7, 9 e 12 (valores para x) na função e verificar o resultado na função no geogebra. Obtendo dessa forma os valores: 128, 512 e 4096, respectivamente.

Figura 24 - Imagens da Função Geogebra



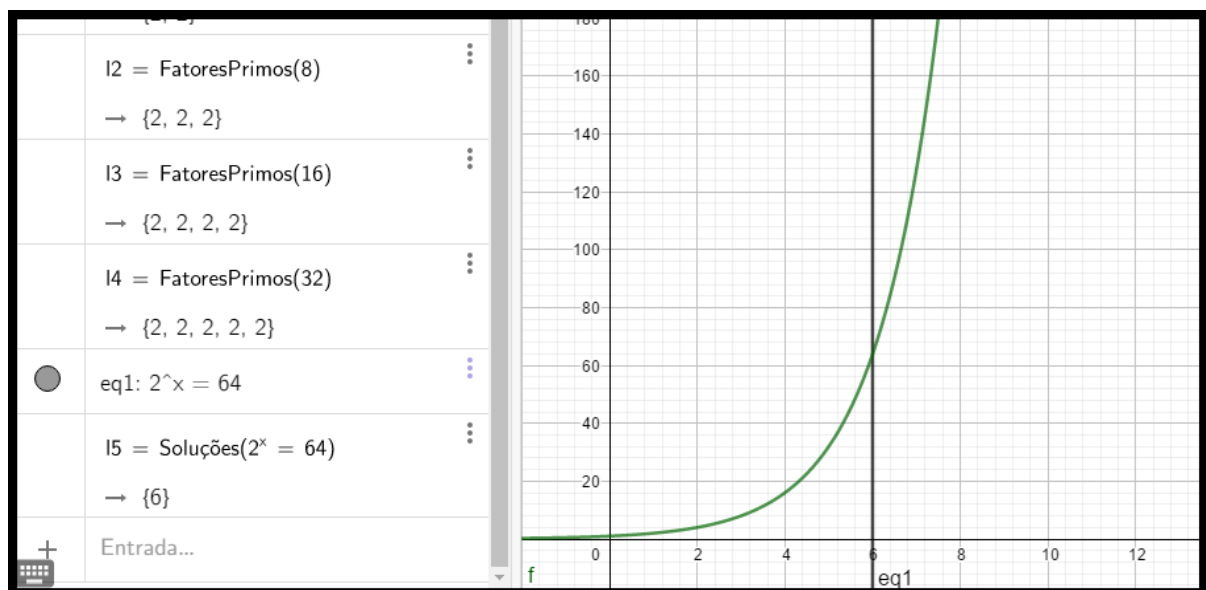
Fonte: Própria do autor

No item b, temos: Para números de células iguais a 64, 128 e 1024 teremos quais tempos correspondentes?

Antes, porém, os estudantes deverão escrever em “Entrada” o seguinte comando $2^x = 2$; $2^x = 4$; $2^x = 8$, o que acontece no gráfico? O que significar essa reta cortando o eixo das abscissas (x).

Esperamos que os estudantes respondam que no gráfico apareça as retas que cujos os valores cortados pelas retas representam as soluções das expressões descritas. Assim eles poderão responder as questões $2^x = 64$, $2^x = 128$ e $2^x = 1024$. E também poderão digitar em “Entrada” o comando *soluções(<Equação>)* e digitar $2^x = 64$ no lugar de <Equação>, obtendo-se assim o resultado para x.

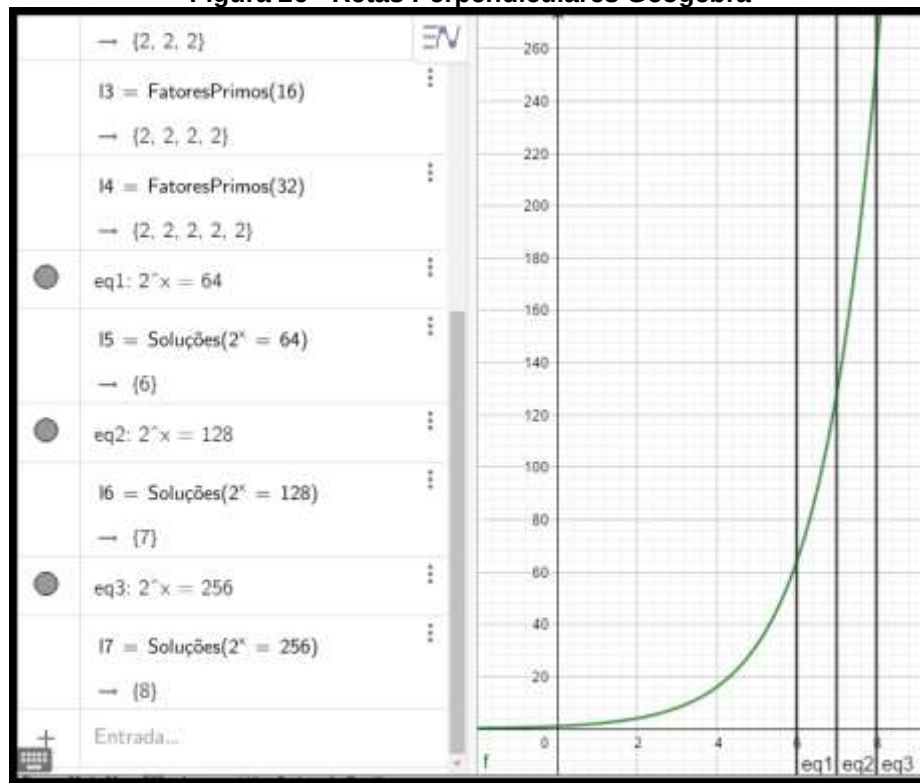
Figura 25 - Solução das Equações Geogebra



Fonte: Própria do autor

E prosseguimos para os demais valores 128 e 256, obtendo respectivamente {7} e {8}, como mostra o gráfico do geogebra.

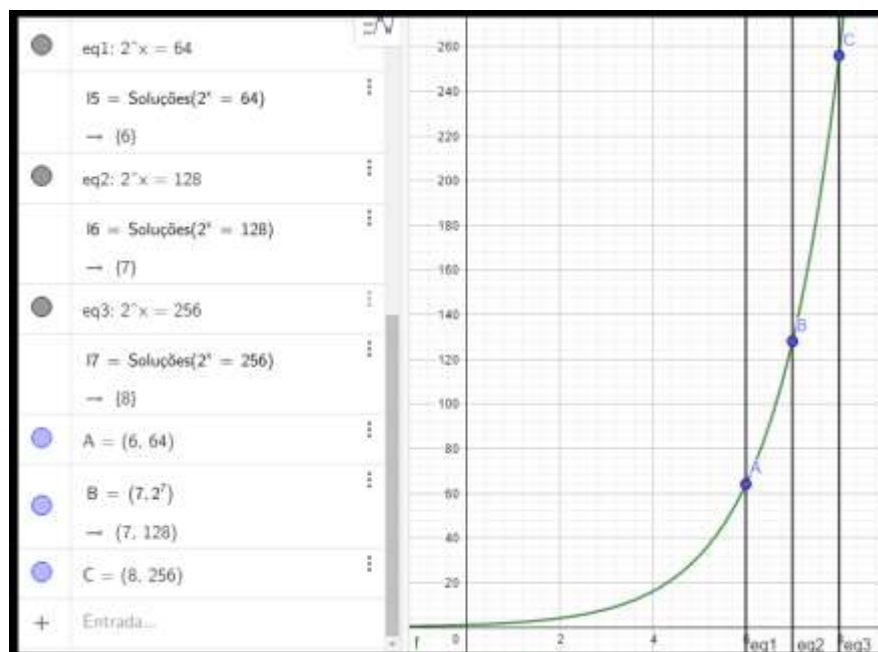
Figura 26 - Retas Perpendiculares Geogebra



Fonte: Própria do autor

E para mostrar os pontos dos pares ordenados obtido faremos o seguinte: no campo Entrada digite $(6, 2^6)$ ou $(6, 64)$. Aparecerá no gráfico o seguinte resultado.

Figura 27- Pares Ordenados e Retas Perpendiculares Geogebra

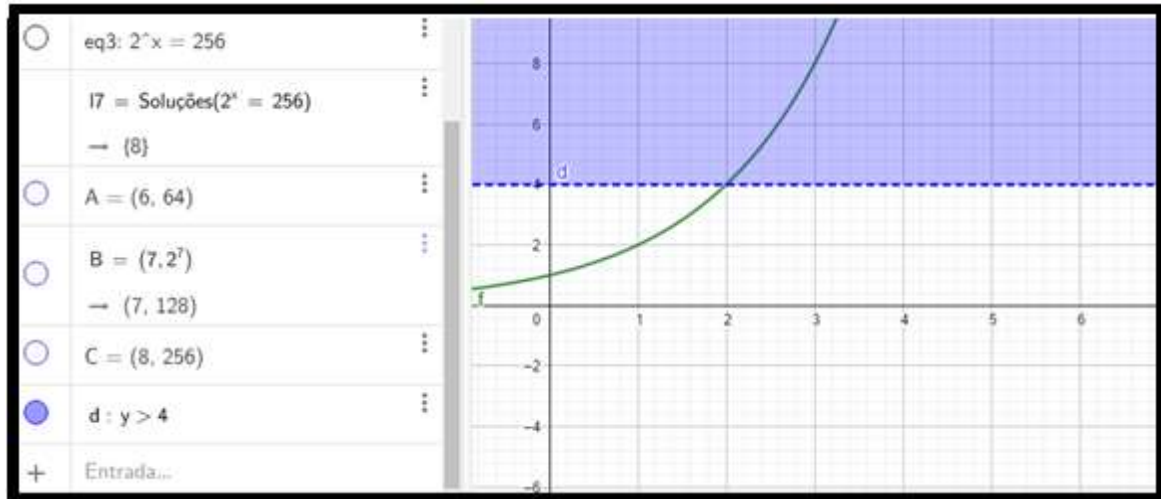


Fonte: Própria do autor

Vamos agora responder o item c. Para $2^x > 4$.

Graficamente, Digitamos em “entrada” $y > 4$, pois $f(x) = y$, obtemos:

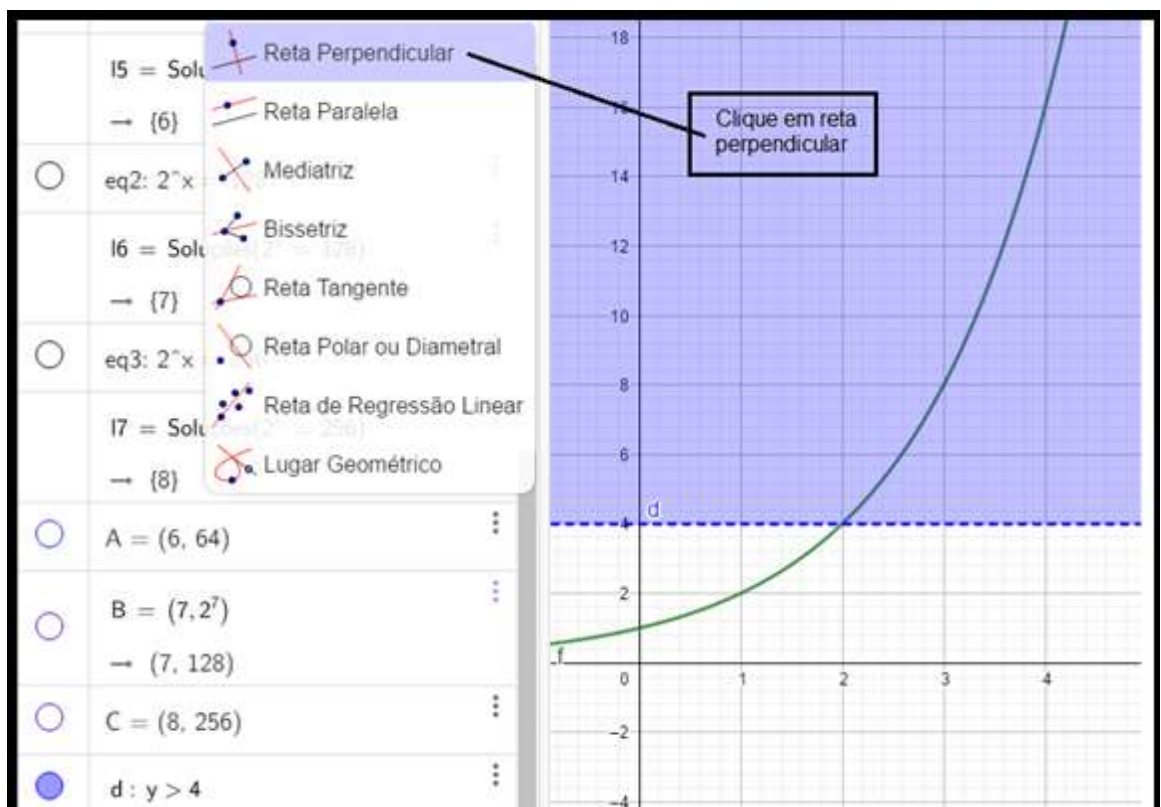
Figura 28 - Imagens da Desigualdade Geogebra



Fonte: Próprio do autor

E perguntaremos aos estudantes “para que valores de “x” (domínio) da função são maiores que 4?” Esperamos que o estudante ao observar o gráfico responda “ $x > 2$ ”, pois corresponde a intersecção entre o ponto e o gráfico da função e para achar o valor de “x” basta clicar em “reta perpendicular” no geogebra.

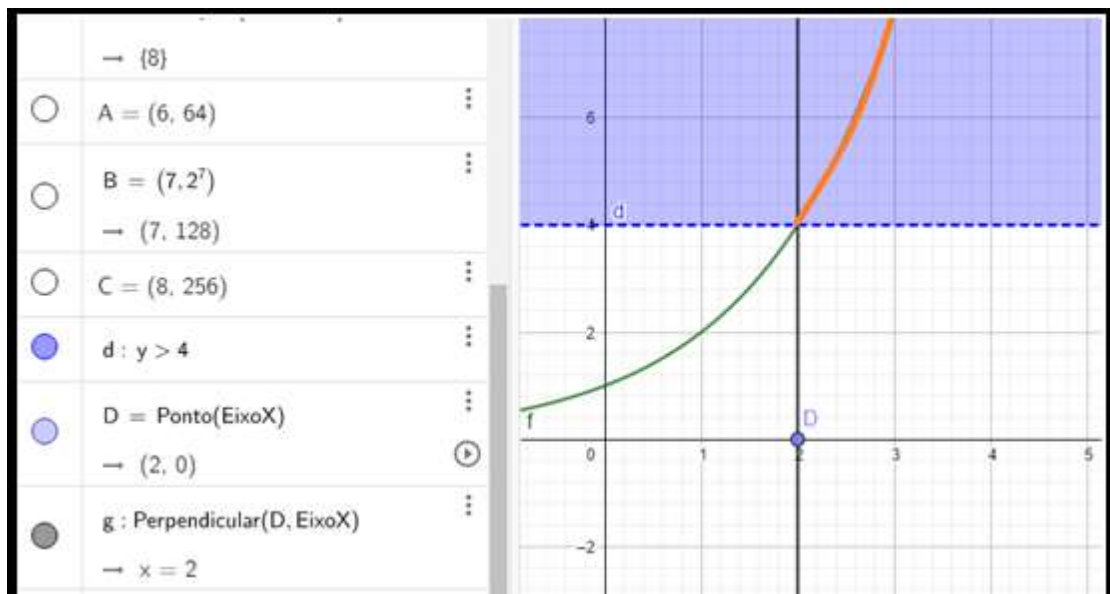
Figura 29 - Determinação do Domínio Geogebra



Fonte: Próprio do autor

Dessa forma teremos:

Figura 30 - Identificando o Gráfico na Solução Geogebra



Fonte: Próprio do autor

A linha em cor vermelha representa graficamente o resultado da inequação $2^x > 4$.

Algebricamente, temos: $2^x > 4 \Rightarrow 2^x > 2^2$ (fatora-se o 4) $2^x > 2^2 \Rightarrow x > 2$ (Elimina-se a base e conserva-se o sinal da desigualdade para o expoente, pois a base $2 > 1$).

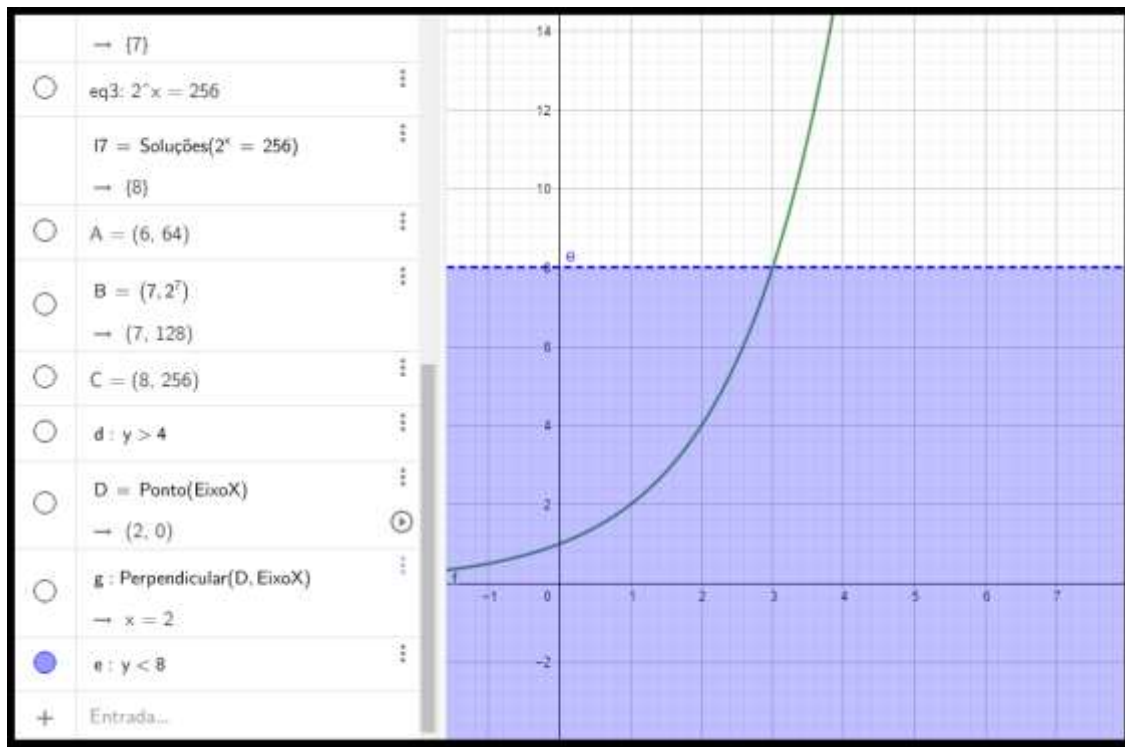
Solução: $S: \{x \in \mathbb{R} / x > 2\}$.

Item d, “O que representa dizer graficamente e algebricamente $2^x < 8$ ”.

Graficamente

Em “Entrada” o estudante deverá digitar $y < 8$.

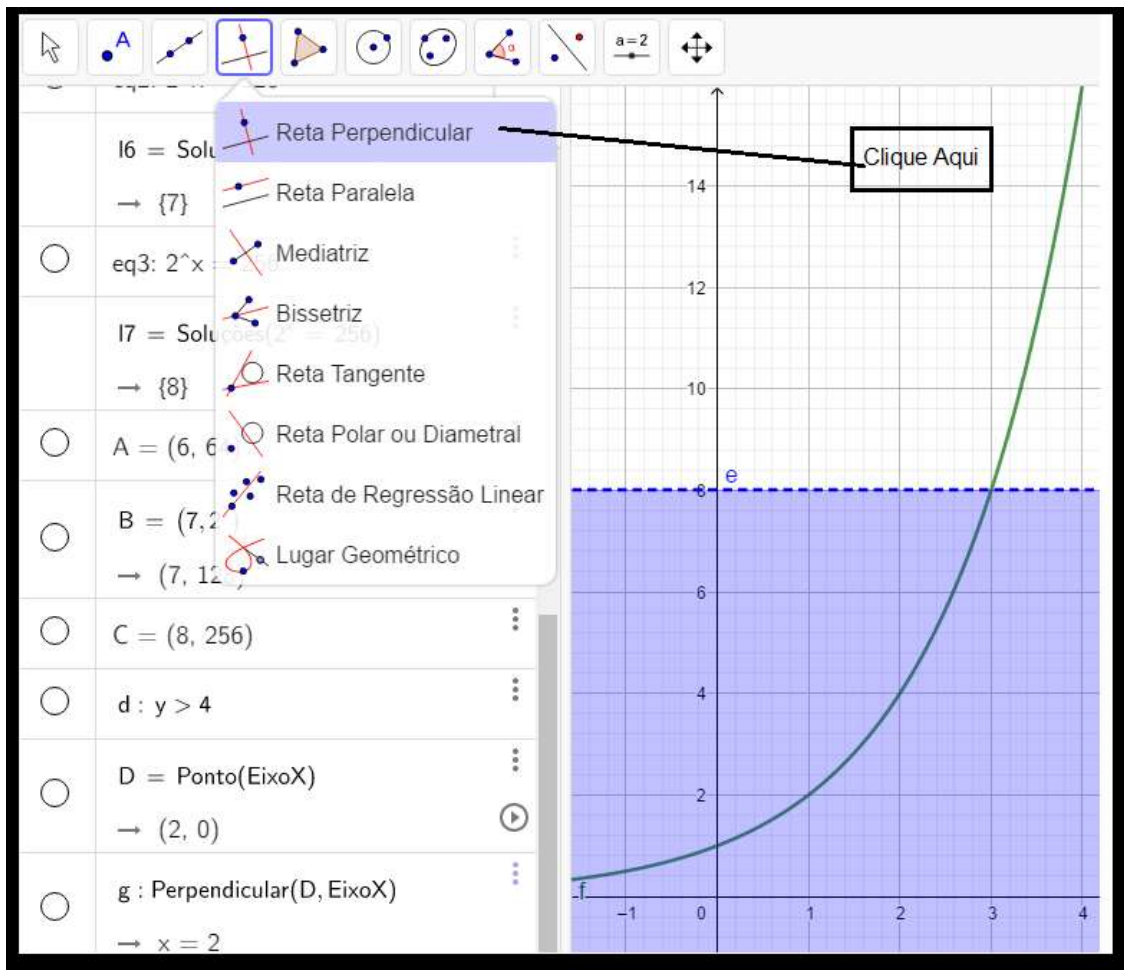
Figura 31 - Solução da Inequação Geogebra



Fonte: Próprio do autor

E perguntaremos aos estudantes “para que valores de “x” (domínio) da função são menores que 8?” Esperamos que o estudante ao observar o gráfico responda “ $x < 3$ ”, pois corresponde a intersecção entre o ponto 3 e o gráfico da função e para achar o valor de “x” basta clicar em “reta perpendicular”, em seguida clicar na intersecção da reta pontilhada com o gráfico da função ($f(x)$) depois no eixo das abcissa (x).

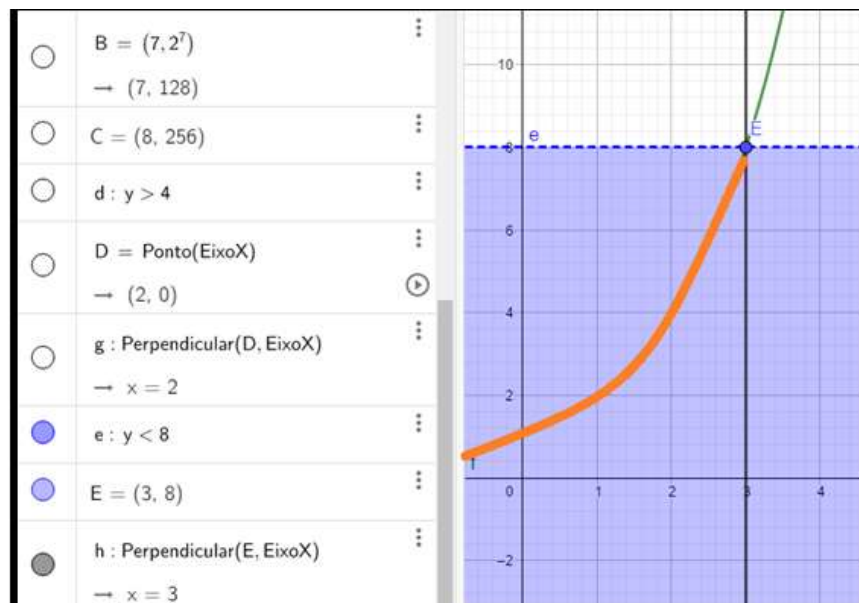
Figura 32 - Solução da Inequação Geogebra



Fonte: Próprio do autor

E depois,

Figura 33 - Indicação da Solução Geogebra



Fonte: Próprio do autor

A linha em cor vermelha representa graficamente o resultado da inequação $2^x < 8$. Algebricamente, temos: $2^x < 8 \Rightarrow 2^x < 2^3$ (*fatora – se o 8*)

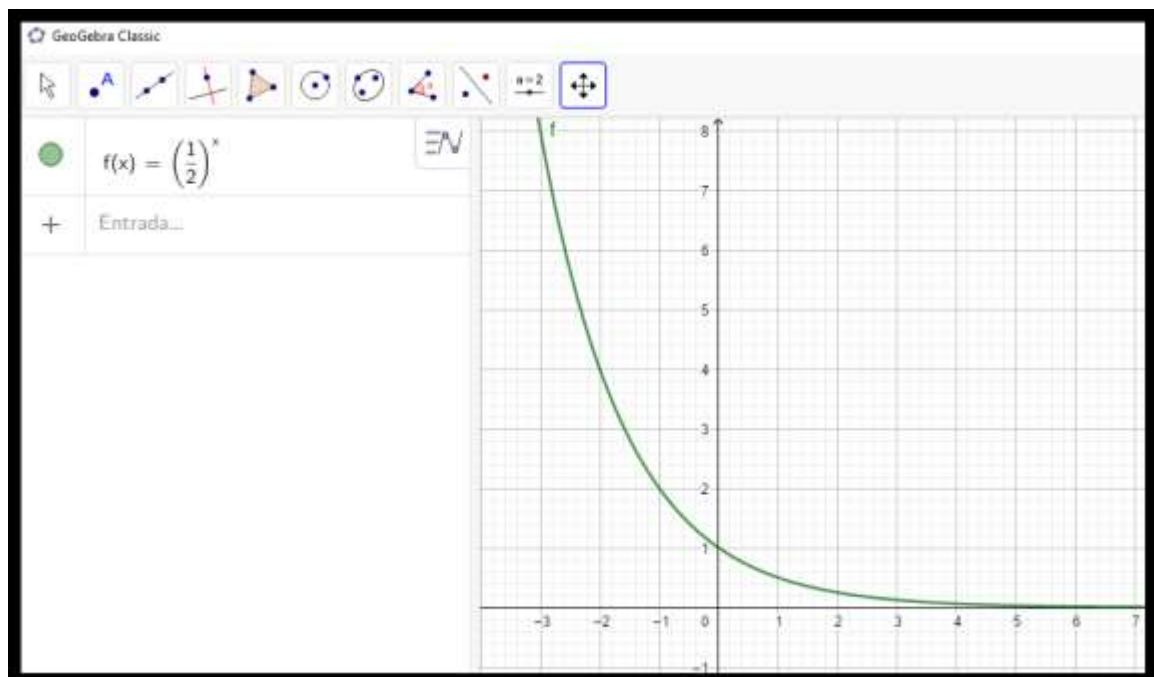
$2^x < 2^3 \Rightarrow x < 3$ (Elimina-se a base e conserva-se o sinal da desigualdade para o expoente, pois a base $2 > 1$).

Solução: $S: \{x \in \mathbb{R} / x < 3\}$.

E por fim, o item e. Para a base maior que zero e menor que um, por exemplo $\frac{1}{2}^x \geq 0.5$, o que representa graficamente ou algebricamente.

Graficamente. Em “Entrada” pedimos ao estudante escrever “ $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ”

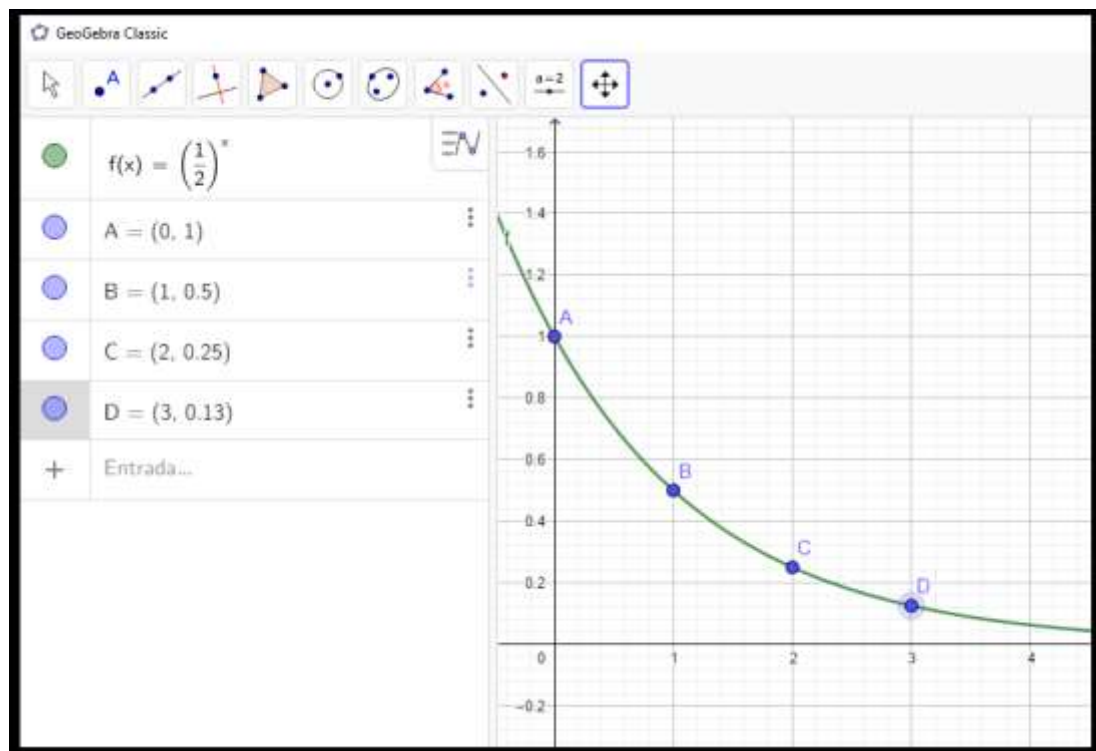
Figura 34 - Função Decrescente Geogebra



Fonte: Próprio do autor

Determinaremos alguns pontos, tais como: $A(0,1)$, $B(1,0.5)$, $C(2,0.25)$, $D(3,0.125)$.

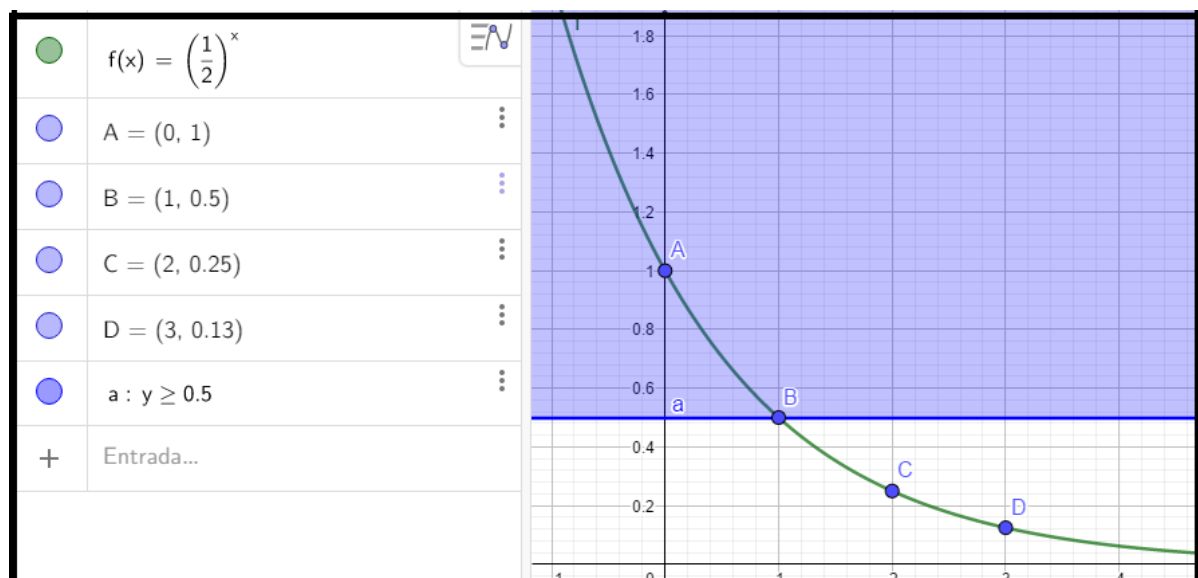
Figura 35 - Localização de Pontos Geogebra



Fonte: Próprio do autor

Em “Entrada” pedimos ao estudante digitar $y \geq 0.5$.

Figura 36 - Indicação da Solução Geogebra

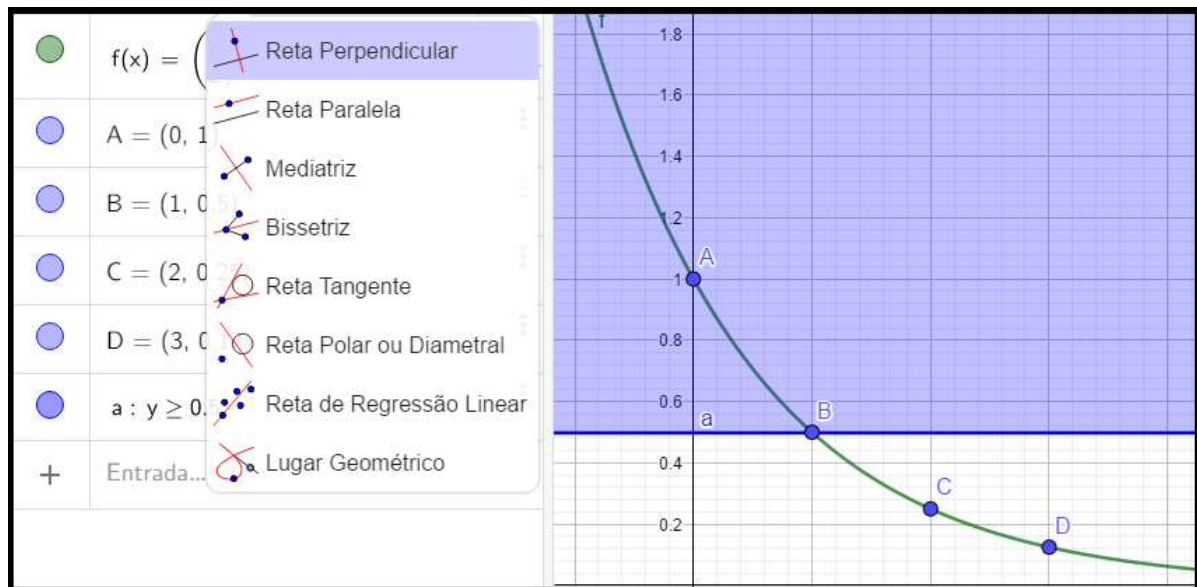


Fonte: Próprio do autor

Esperamos que o estudante perceba que a linha ficou contínua, pelo fato da simbologia $\geq$. E perguntaremos aos estudantes “para que valores de “x” (domínio) da função são maiores ou iguais a 0.5?” Esperamos que o estudante ao observar

o gráfico responde “ $x \leq 1$ ”, pois corresponde a intersecção entre o ponto 1 e o gráfico da função exponencial e para achar o valor de “x” basta clicar em “reta perpendicular” em seguida clicar na intersecção da reta contínua com o gráfico da função (f(x)) depois no eixo das abcissa (x).

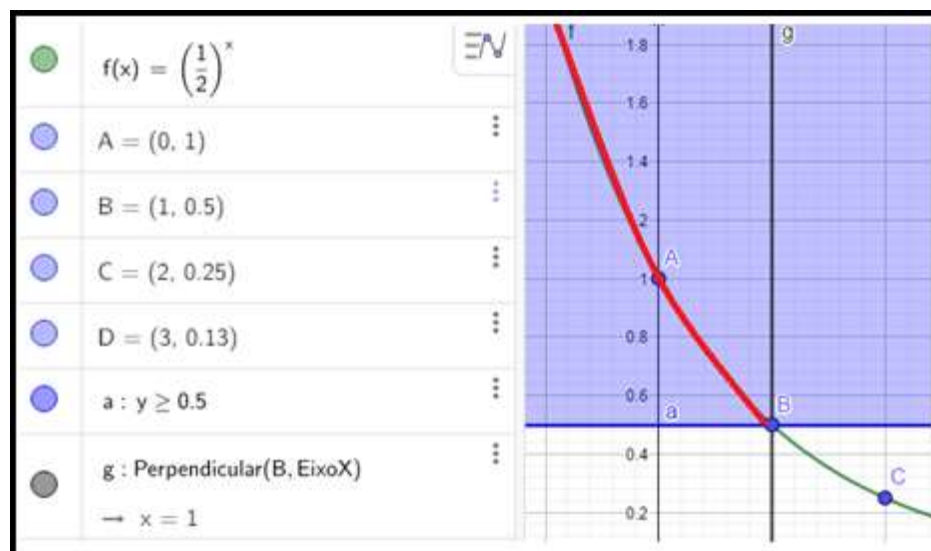
Figura 37 - Intersecção da Reta com o gráfico Geogebra



Fonte: Próprio do autor

E observamos a intersecção com o gráfico da função.

Figura 38 - Solução em Vermelho Geogebra



Fonte: Próprio do autor

Algebricamente teremos: $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 0.5$.

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^1$, como a base é maior que zero e menor que um (uma fração própria) devemos eliminar as bases e inverter o sinal da desigualdade.

$x \leq 1$ que é a solução do problema ou $S: \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$.

9.3. Terceiro encontro

O terceiro momento Pesquisador orientador irá aplicar a segunda atividade que corresponde a sete questões em que o aluno com a orientação do Pesquisador observará como o geogebra facilitará a compreensão e assimilação do assunto logaritmos (da função à inequação).

9.3.1. Atividade 2

9.3.1.1. Objetivo

Compreender através do uso do Geogebra a definição e as principais propriedades da função a inequação logarítmica.

9.3.1.2. Atividade de logaritmo (Da função a Inequação)

Dado uma tabela que apresenta dados que mostram o crescimento do número de células em função da quantidade de dias e usando o aplicativo geogebra faça uma representação gráfica da função INVERSA dos dados.

Tabela 2 - Tabela do número de células em uma Função Geogebra

Tempo (t)	0	1	2	3	4	5
Número de Célula (n)	1	2	4	8	16	32

Fonte: Própria do autor

Determine qual o tipo de função que melhor se ajusta aos dados apresentados.

Determine:

1) Os valores de $\log_2 x = 1$; $\log_2 x = 2$; $\log_2 x = 3$; $\log_2 x = 4$; $\log_2 x = 5$?

2) Os valores de $\log_2 1 = ?$, $\log_2 2 = ?$, $\log_2 4 = ?$, $\log_2 8 = ?$, $\log_2 16 = ?$ e $\log_2 32 = ?$.

3) Quais dos exemplos abaixo não podem ocorrer? Justifique sua resposta (graficamente ou Algebricamente ou Ambos)?

a) $\log_2 7 = ?$

b) $\log_2 -2 = ?$

c) $\log_2 4 = ?$

d) $\log_2 x = -4?$

4) Usando o geogebra como posso determinar $\log_2 5$?

5) Assim como fizemos com a exponencial, se $\log_2 x > 3$ como posso representar graficamente no geogebra?

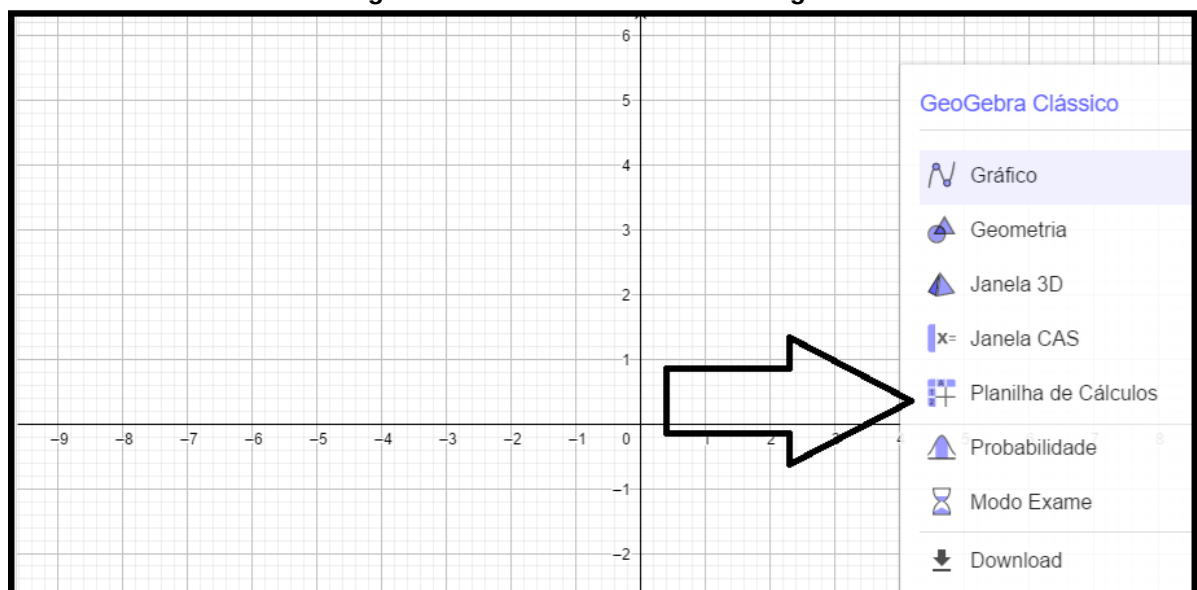
6) Quais valores de x (domínio) satisfaz a inequação dada $(\log_2 x > 3)$, represente graficamente no geogebra.

7) Para $\log_{\frac{1}{2}} x < 5$? Qual a solução da inequação?

9.3.2. Procedimento do Pesquisador do terceiro encontro.

Ao abrir o software Geogebra, iremos seleccionar a “planilha de cálculo”.

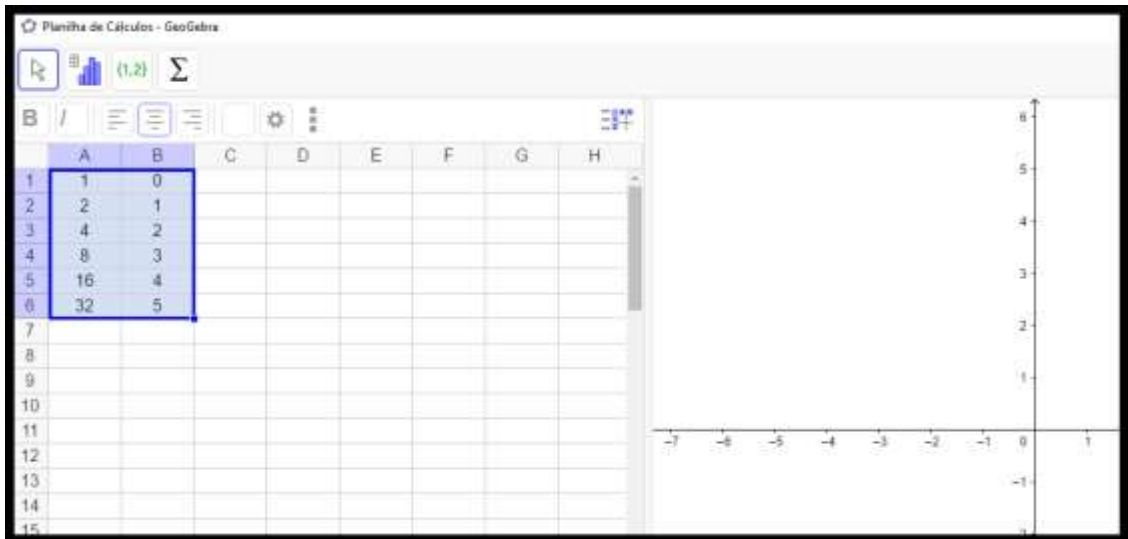
Figura 39 - Planilha de Cálculo Geogebra



Fonte: Próprio do autor

Criaremos uma nova tabela na qual iremos inserir os dados da atividade 2 de uma forma inversa, isto é, os valores de x (tempo) serão inseridos na coluna dos valores de y (número de célula) e vice-versa.

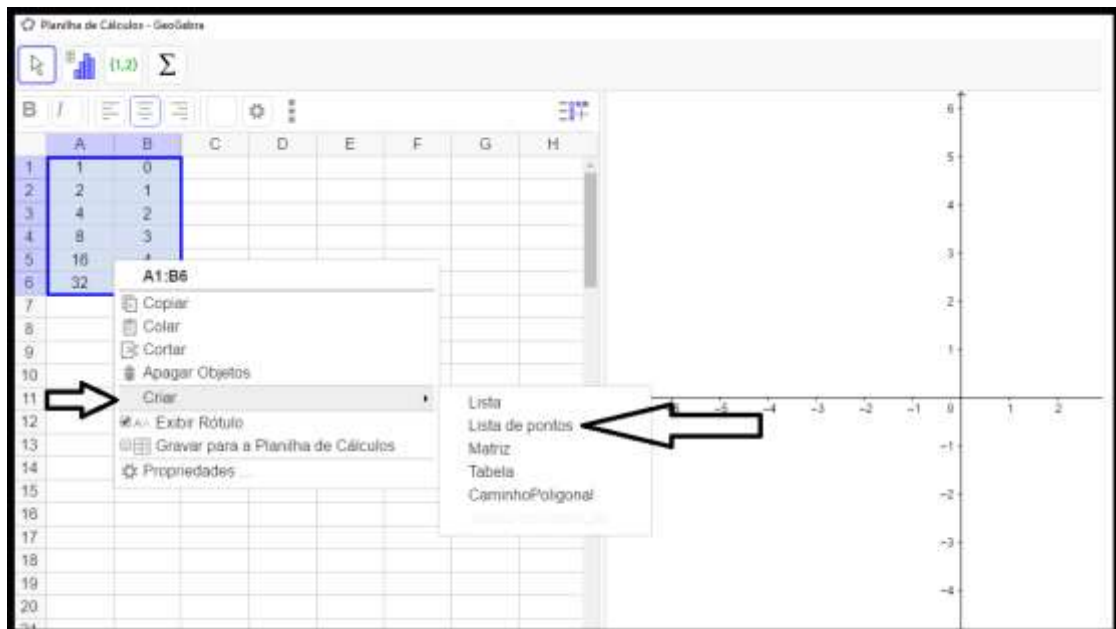
Figura 40 - Tabela Inversa Geogebra



Fonte: Próprio do autor

Em seguida selecionamos a tabela e clicamos o botão direito do mouse selecionando “criar” e depois “lista de pontos”.

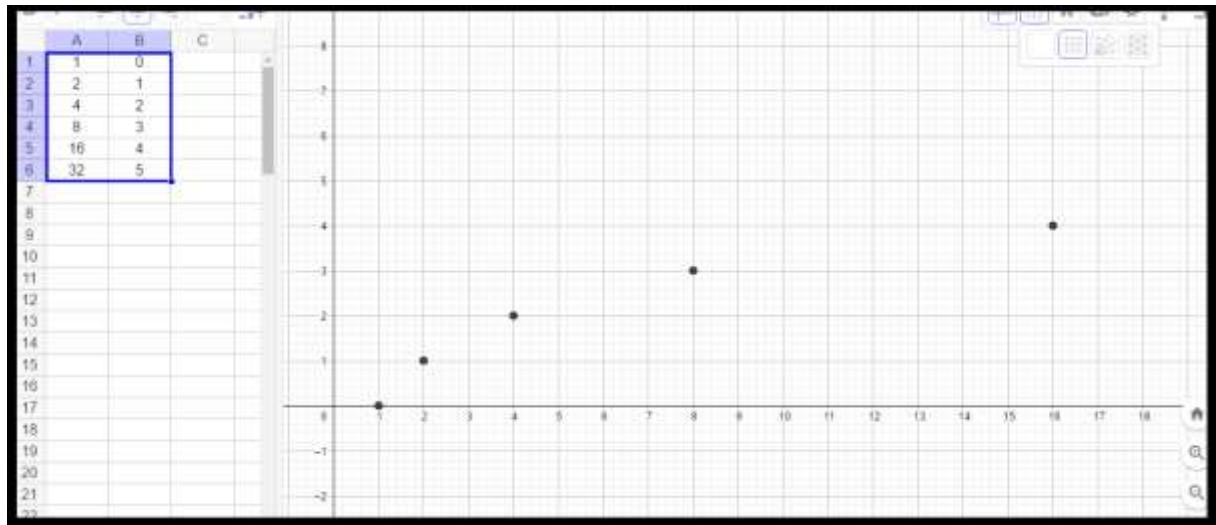
Figura 41 - Lista de Pontos Geogebra



Fonte: Próprio do autor

Dessa forma os pares ordenados aparecerão no plano cartesiano.

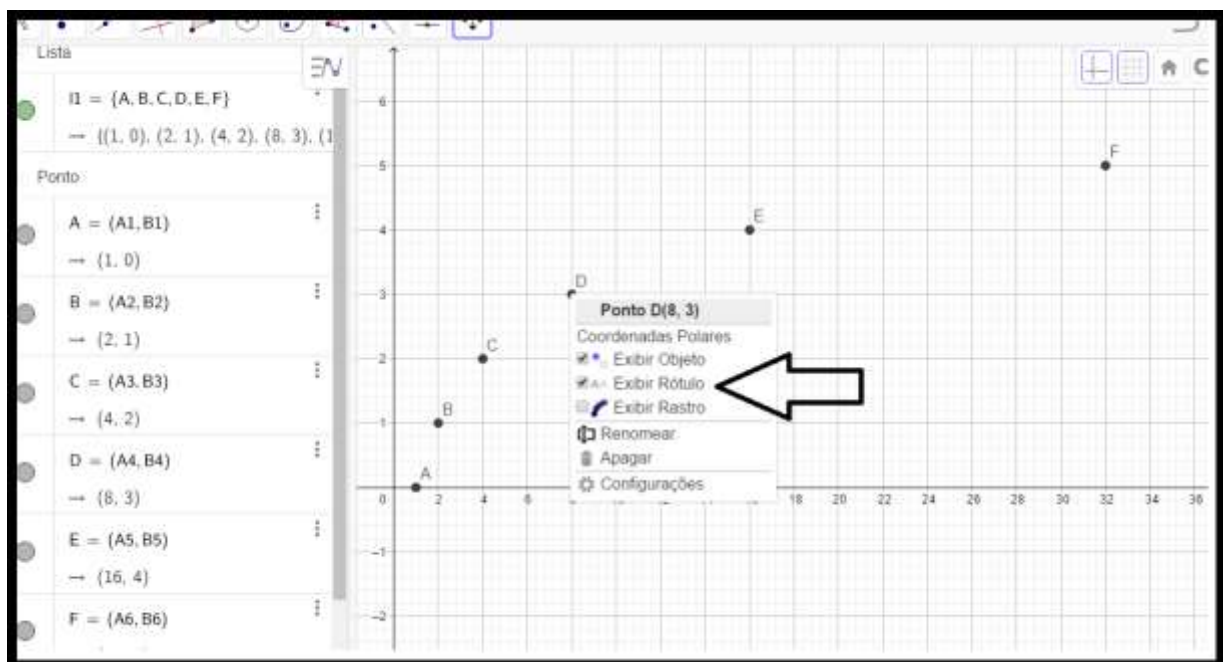
Figura 42 - Pontos no Gráfico Geogebra



Fonte: Próprio do autor

Podemos apresentar os pontos para isso basta clicar o botão direito do mouse e selecionar “exibir rótulo”, assim teremos:

Figura 43 - Exibir Tudo Geogebra

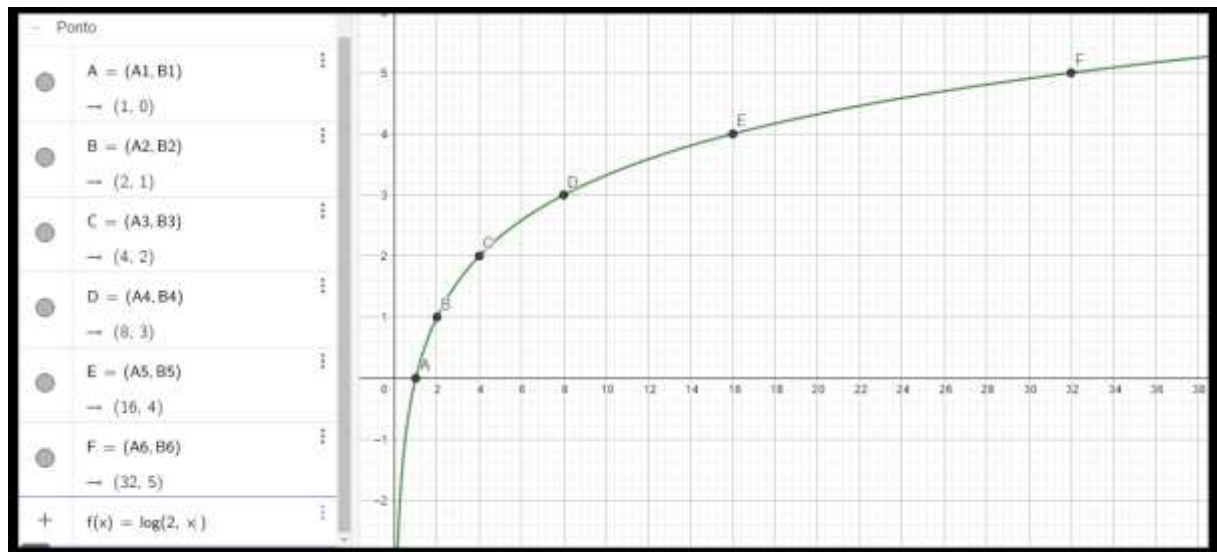


Fonte: Próprio do autor

O Pesquisador pergunta ao estudante qual a melhor função que representa esses pontos?

Espera-se que o estudante diga a função logarítmica.

Figura 44 - Função Crescente Geogebra



Fonte: Próprio do autor

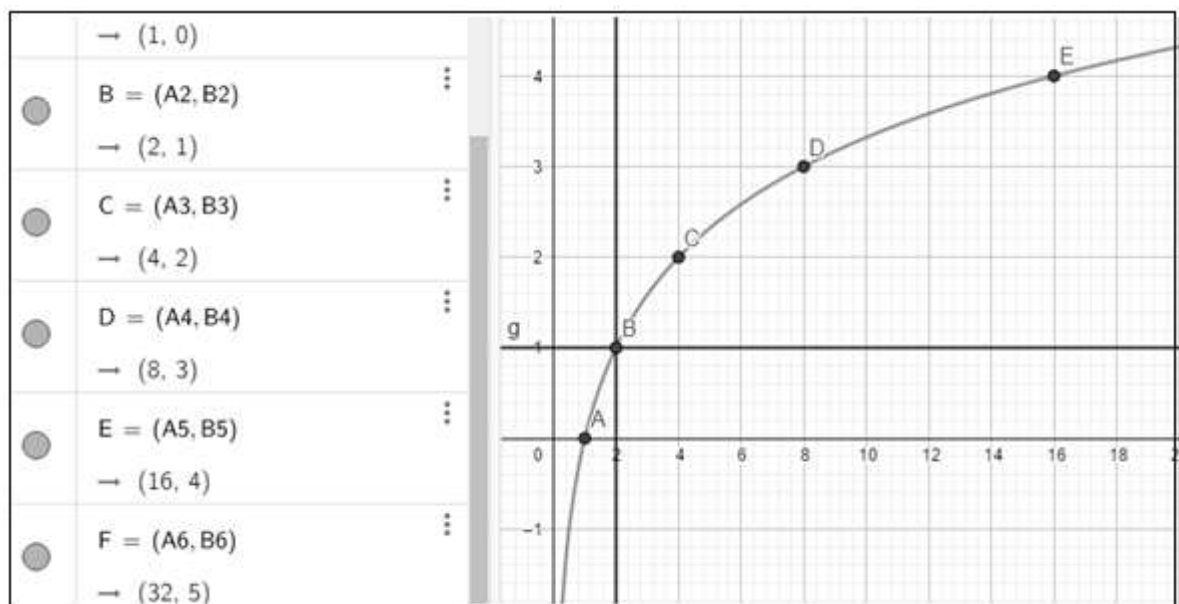
A partir daí podemos responder a primeira questão.

O $\log_2 x = 1$, basta para isso passar uma reta paralela ao eixo x no ponto $y = 1$



Dessa forma a reta passa pelo ponto B e usando o ícone  reta perpendicular no ponto B, o estudante visualizará o ponto 2. Determinando assim o valor de x.

Figura 45 - Reta Perpendicular Geogebra



Fonte: Próprio do autor

Os outros itens deixaremos para os estudantes responderem.

A segunda questão é o inverso, determine o valor de $\log_2 1 = ?$. Partiremos do valor de x para achar o de y . Dessa forma o valor de $y = 0$. Os próximos itens deixaremos para o estudante.

A terceira questão esperamos que o estudante faça as suas análise tomando como base as questões anteriores.

A quarta questão é com base as questão anteriores, porém espera-se que o estudante perceba que a resposta não é um número inteiro.

Na quinta e sexta questões referem-se a uma inequação e o raciocínio é análogo ao exercício de exponencial.

E a última questão (sétima) o estudante terá que fazer uma função decrescente e determinar a solução da inequação.

10 RELATÓRIO DAS ATIVIDADES

10.1. Com os Professores

No dia 16 de janeiro de 2021 com início às 14:00 horas foi realizado a conferência via “Meet” entre cinco Pesquisadores de escolas públicas com o Pesquisador professor do experimento de dissertação de mestrado da Universidade Estadual do Pará (UEPA) com o título “Ensino de Inequações Logarítmicas Usando o Geogebra”.

Iniciou-se com as apresentações, primeiramente do Pesquisador professor, depois dos professores participantes. Nesta apresentação cada um respondeu a cidade em que atua como Professor, a unidade de ensino, o tempo de serviço, a experiência com o tema da dissertação e quais os possíveis problemas ou dificuldades em relação ao assunto para os estudantes. Vale ressaltar que os nomes dos professores participantes foram substituídos por nomes fictícios.

Dessa forma temos: Pesquisador professor: Martinho Mota Dias Júnior, trabalha na rede municipal e estadual a mais de 20 anos como professor do ensino de matemática do município de Tucuruí no estado do Pará. Leciona na escola Raimundo Ribeiro de Sousa (RRS) como professor do estado com estudantes do 1ºano ministrando o assunto ensino de inequação logarítmica, percebeu nos

estudantes uma grande dificuldade na aprendizagem e uma grande lacuna em seus conhecimentos quando se referem ao assunto da dissertação.

Aos professores participantes foram nomeados da seguinte forma: ProfA, ProfB, ProfC, ProfD e ProfE. Os relatos seguem numa forma cronológica. Assim temos:

O ProfA trabalha na escola Anísio Teixeira com estudantes na modalidade profissionalizante (médio) no município de Belém, identifica dificuldades em concluir o assunto de logaritmos, relatando que dificilmente aborda o tema de inequação logarítmica devido ao pouco tempo no ensino e que os estudantes possuem pouco entendimento na parte algébrica deste assunto.

O ProfB trabalha no ensino estadual e municipal de Tucuruí, possui experiência em cursinhos de vestibular do município e em relação ao assunto Logaritmo possui dificuldades semelhantes ao ProfA. Possui dificuldade em chegar no assunto da dissertação devido ao tempo escasso e quando chega aborda com poucas definições e alguns exemplos não enfatizando a inequação logarítmica.

O ProfC trabalha no IFPA nos cursos técnicos e graduações de ensino superior e no estado atuou por muito tempo como Pesquisador do ensino médio. Atualmente é vice diretor da escola RRS e em seu relato falou da diferença entre as cargas horárias referente aos 1º anos das escolas estaduais com as do 1º ano do IFPA. A carga horária do IFPA é diminuta em relação ao do estado e sobre o assunto inequações logarítmicas é abordado de uma forma muito sucinta por causa do pouco tempo e quando abordado sempre levando-se em consideração aos que os cursos técnicos necessitam de uma forma bastante direta.

O ProfD é professor de matemática desde 2006, trabalha no IFPA campus Paraopeba, relatou que a dificuldade deste assunto para os estudantes provém da não aprendizagem de potenciação e da inversão da desigualdade.

A ProfE trabalha como professora a 6 anos (3 anos no privado) e 2 anos com o 1º Ano do ensino médio, relatando que existe muitas dificuldades para os estudantes em entender o assunto.

O experimento levou em consideração que os professores se tornariam estudantes fictícios e que iam participar de forma ativa, tirando as “dúvidas” pertinentes e que ao final do experimento cada professor irá relatar a sua opinião a respeito do assunto e do ensino.

Dessa forma demos início ao experimento, primeiramente apresentei a atividade lendo o que iríamos tratar e em seguida mostrei o ambiente geogebra. Pelo fato de serem professores de matemática a parte matemática não teve problema e na parte envolvendo o geogebra muitos comandos eram desconhecidos por grande parte dos colegas. Mas com a intervenção do Pesquisador professor orientando, no momento certo, as atividades fluíam muito bem.

A inserção dos dados nas tabelas não teve problemas, assim como a análise referente ao tipo de gráfico que se encaixaria melhor, chegando-se a conclusão que a função que melhor representaria os pontos dados seria a função exponencial. O ProfC percebeu que a função exponencial se ajustou perfeitamente aos pontos do gráfico.

O ProfB verificou após a utilização do comando “fatore<primos>” que a base da exponencial seria 2. Para os itens “a” e “b” da atividade fluiu naturalmente sem dificuldades e o ProfD percebeu que se trata de equações da exponencial.

Em Entrada pedi para digitar o comando “Eq1:2^x=4” e determinar a solução e sugeri o comando “Soluções(<2^x=4>)”. O ProfA sugeriu que colocasse em entrada o seguinte comando “Soluções(eq1)” que chegaria na mesma resposta e percebeu também que a solução poderia ser obtida graficamente.

O ProfD sugeriu que não se deve dizer “cortar as bases”, quando você estive em uma inequação de mesma base. E sim dizer “pelo fato de que se as bases são iguais e maior que um então conserva-se o sinal da inequação”.

O ProfC se preocupou com a linguagem matemática, que se deve dá ênfase as cores sobrepostas e o gráfico da função.

O ProfD sugeriu que as equações representadas no gráfico deveriam ser feitas com cores diferentes, para que haja melhor visualização por parte dos estudantes.

O ProfB percebeu que em uma inequação exponencial basta saber se a função é crescente ou decrescente, caso seja crescente, mantêm-se o sinal da desigualdade e caso seja decrescente inverte-se o sinal da desigualdade.

Desta forma terminamos a atividade sobre exponencial e entramos na atividade sobre inequação logarítmica.

O ProfB percebeu que para preencher a nova tabela, basta somente inverter as colunas da tabela anterior, pois são funções inversas.

Daí fizemos os mesmos procedimentos anteriores e respondemos os itens da atividade de logaritmo. Percebemos que depois do experimento com as atividades de exponencial as atividades de logaritmos tornaram-se repetitivos e de mais fácil resolução.

Nos últimos itens da atividade de logaritmo já utilizamos nos gráficos cores diferentes para uma melhor visualização dos resultados. E por fim, finalizamos as atividades e foram feitas as considerações finais e contribuições de cada professor.

O ProfA - Achou que o geogebra é uma grande ferramenta para se utilizada, não somente para o experimento realizado, mas sim para outras funções. A ferramenta consegue “abrir” as mentes dos estudantes com as imagens gráficas, rápidas, ganhando-se tempo e com certas facilidades de construção.

ProfB - Concorde com tudo que o ProfA relatou, que podemos usar o geogebra com outras funções, que em vários momentos podemos usar os conceitos de plano cartesiano, pontos, etc... Fazendo-se o manuseio contínuo do geogebra e usando-se cores diferentes para cada função.

ProfC - Destacou o uso do geogebra como uma ferramenta de grande utilidade, facilitando a compreensão e entendimento das atividades propostas.

ProfD - Infelizmente não relatou as suas considerações finais devido a queda do sinal da internet.

A ProfE - Relatou que o experimento fica muito interessante e de fácil visualização para os estudantes pois eles conseguem entender com clareza as respostas das inequações. Fácil, rápido e altamente didático com grande entendimento.

10.2. Com os estudantes

A pesquisa foi para 5(cinco) estudantes. Os estudantes escolhidos pertencem ao primeiro e segundo ano do ensino público do estado do Pará.

A priori consegui um estudante do segundo ano do ensino médio de uma escola pública situada na cidade de Ananindeua-Pa, depois visitando a escola Ana Pontes Frances do município de Tucuruí, na qual fui muito bem acolhido pela direção e pelos professores consegui convocar mais um estudante do segundo ano pelo turno da manhã. Posteriormente, consegui três estudantes, dois do primeiro ano do IFPA- Tucuruí e outro estudante do primeiro ano da cidade de Abaetetuba, de uma escola pública (Escola São Francisco Xavier).

10.2.1. Identificação dos sujeitos

Os estudantes serão designados pela letra E seguido por um número, no quadro a seguir teremos as suas cidades de origem e ano de estudo.

Tabela 3 - Identificação dos Estudantes

ESTUDANTE	ORIGEM
E1	Ananindeua - 2º ano
E2	TUCURUÍ - 2º ano
E3, E4	TUCURUÍ - 1º ano
E5	Abaetetuba – 1º ano

Fonte: Próprio do autor

11 EXPERIMENTOS

Foram realizados três experimentos, o primeiro experimento foi realizado com o E1, o segundo experimento foi realizado com o E2 e o terceiro experimento

foram realizados com os estudantes E3, E4 e E5. Todos foram utilizados por via Meet, síncronos e houve gravação de vídeo e áudio. Os experimentos foram divididos em três encontros cada. O primeiro encontro teve os seguintes assuntos abordados: a introdução ao software geogebra, as partes que compõem o geogebra (campo gráfico, campo algébrico e barra de ferramentas), falamos do plano cartesiano, pontos coordenados (abscissas, ordenada), quadrantes, os ícones (alguns) que iremos utilizar nos experimentos, tais como: Ponto A, Ponto de interseção entre dois objetos, reta perpendicular, mover, lupa +, lupa -, apagar. Revisão básica de matemática, fatoração, potenciação equação, função (constante, afim, quadrática, exponencial e logarítmica), função crescente e decrescente, domínio e imagem de uma função, gráficos de funções e soluções de equação e inequação.

O segundo encontro teve a realização da primeira atividade, sobre o assunto de exponencial (de função a inequação).

O terceiro encontro teve a realização da segunda atividade, sobre o assunto de logaritmos (de função a inequação).

11.1. Primeiro Experimento -E1

Foram realizados três encontros, o primeiro encontro ocorreu no dia 21 de fevereiro de 2021, por via Meet (kzu sacq mtt) pelo período da tarde. O segundo encontro ocorreu no dia 23 de fevereiro de 2021, por via Meet (Zpq cvvg aib), à tarde e o terceiro encontro ocorreu no dia 27 de fevereiro de 2021, por via Meet (qqc ugav jpb), à tarde.

11.2. Segundo Experimento -E2

Foram realizados três encontros, o primeiro encontro ocorreu no dia 22 de fevereiro de 2021, por via Meet (Juk zgng urv) pelo período da tarde. O segundo encontro ocorreu no dia 25 de fevereiro de 2021, por via Meet (Kgp ojyd ere), à noite e o terceiro encontro ocorreu no dia 20 de fevereiro de 2021, por via Meet (jaq ksdo hiz), à noite.

11.3. Terceiro Experimento -E3, E4 e E5

Foram realizados três encontros, o primeiro encontro ocorreu no dia 26 de julho de 2021, por via Meet (Kgp ojyd ere) pelo período da tarde. O segundo encontro ocorreu no dia 27 de julho de 2021, por via Meet (cnf suud ctm), à tarde e o terceiro encontro ocorreu no dia 28 de julho de 2021, por via Meet (cnf suud ctm), à tarde.

12 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os registros das atividades foram realizados por meio de áudio e vídeo e avaliados pela representação semiótica de Durval. Ainda, por meio da Gênese Instrumental, esperou-se dos estudantes a forma na qual foi construído o desenvolvimento cognitivo em relação ao artefato considerado. Durante esse processo, observou-se também que, por meio da identificação das características que compõem suas duas dimensões, a instrumentação e a instrumentalização, seja possível estudar e identificar os esquemas que os sujeitos já possuem e que os mobilizaram no processo de resolução das atividades propostas, assim como, novos esquemas que eventualmente puderam ser construídos.

Esperou-se que os estudos dos registros de representação semiótica apresentassem evidências, através da identificação dos tratamentos e converções nas quais os sujeitos eventualmente produzissem, de como foram construídos ou arquitetados.

As análises aqui prescritas foram de forma global identificando-se os pontos específicos de análise. Assim temos:

12.1. Análise dos Professores

Utilizamos o ambiente do Google Meet para mostrar aos professores a experimentação da dissertação, todos os professores participaram de uma maneira síncrona e os resultados deste experimento foram bastante satisfatórios, houveram poucas dificuldades no manuseio do software (geogebra) e em relação ao sinal de internet tivemos algumas interrupções do tipo queda de sinal. O experimento realizado com os professores foi uma demonstração do que os estudantes iriam ter que realizar, verificamos as possíveis dificuldades que os estudantes venham a ter em relação ao conteúdo matemático e a operação com o software geogebra e desta forma os professores puderam fazer suas observações e contribuir profissionalmente com sugestões, as quais serão acatadas e aplicadas em um segundo momento realizados com os estudantes.

12.2. Análise dos estudantes

Foram realizados três experimentos, o primeiro com um estudante, denominado de E1, o segundo com um estudante, denominado E2 e o terceiro experimento com três estudantes, denominaremos de E3, E4, E5.

Vamos relacionar as análises dos encontros organizando-os da seguinte forma: experimento 1 (E1); experimento 2 (E2) e experimento 3 (E3, E4, E5). Detalharemos cada experimento com seus respectivos encontros, Cada encontro tiveram os seus momentos. Dessa forma teremos:

12.2.1. Experimento 1 (E1)

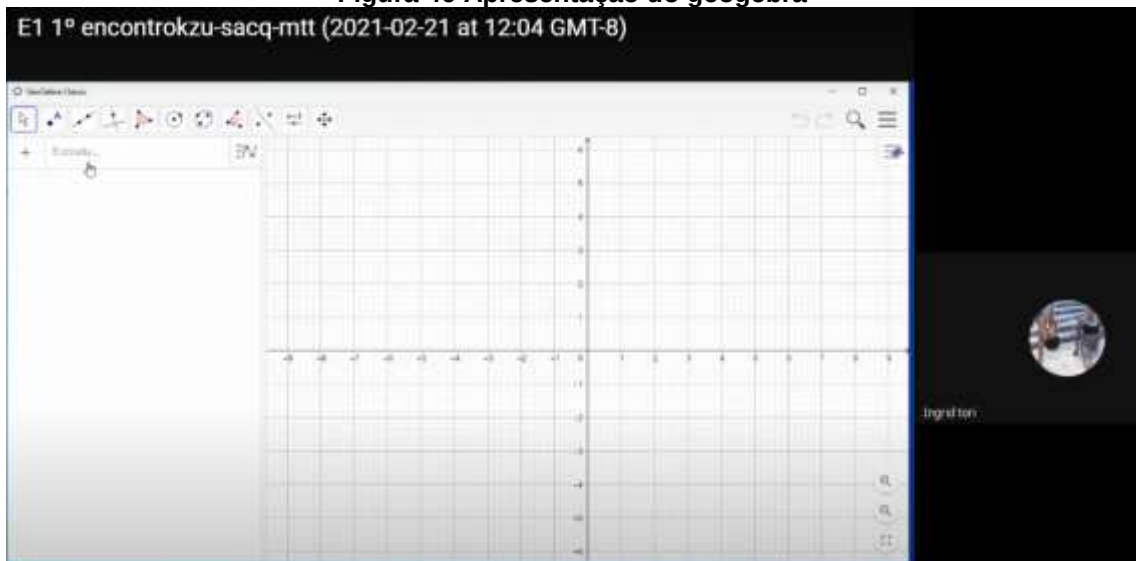
O E1 é estudante de uma escola pública, do segundo ano do ensino médio, não estudou o assunto de exponencial, assim como o assunto de inequação logarítmica, é residente na cidade de Ananindeua/Pa, no qual foi cogitado a sua participação através de uma professora do nosso curso de mestrado, pois devido a pandemia o recrutamento se tornou muito difícil e sua colaboração (professora) ajudou e muito a realização do experimento.

12.2.1.1 Primeiro encontro do Experimento 1 (E1)

O primeiro encontro aconteceu no dia 21 de fevereiro de 2021 e durou aproximadamente uma hora e onze minutos, tivemos sete momentos distintos. O estudante não conhecia o software geogebra e através de conversas com o Pesquisador o E1 falou que gosta muito pouco de matemática e disse que o assunto inequação logarítmica não foi trabalhado (ou visto) no primeiro ano em sua escola.

No primeiro momento, durou aproximadamente 5 minutos, falei sobre o geogebra, os ícones, a interface do geogebra, expliquei as partes que compõe o geogebra, quando você “abre” o geogebra você vê duas partes: o campo algébrico e o campo gráfico, no campo gráfico na maioria das vezes já vem o plano cartesiano, caso contrário você deve inserir -lo. (Figura 46).

Figura 46 Apresentação do geogebra



Fonte: Próprio do autor

Quando o Pesquisador mostrou o campo gráfico do geogebra para o E1, o Pesquisador perguntou.

Pesquisador – você conhece ou lembra do plano cartesiano? Os eixos x(abscissas) e y (ordenada)?

E1 - “Sim, eu me lembro”.

Depois fez um comentário sobre o campo “Entrada” e disse que nesse campo é aonde se digita as funções, as equações e as expressões matemática. Perguntei ao E1.

Pesquisador - Você compreendeu?

E1 - Certo.

Em um segundo momento, durou em torno de 8 minutos, falei sobre o “ponto” no geogebra em que podemos situá-lo em qualquer lugar do plano cartesiano e que cada ponto é formado por um par de números, o primeiro número tem valor x (abscissa) e o segundo número o valor y (ordenada) e nesses pontos podemos localiza-los nos quadrantes do plano cartesiano, continuei mostrando que o ponto localizado no plano cartesiano correspondia a um par ordenado (x,y) e que fica também registrado na parte algébrica do geogebra. Assim, dessa forma

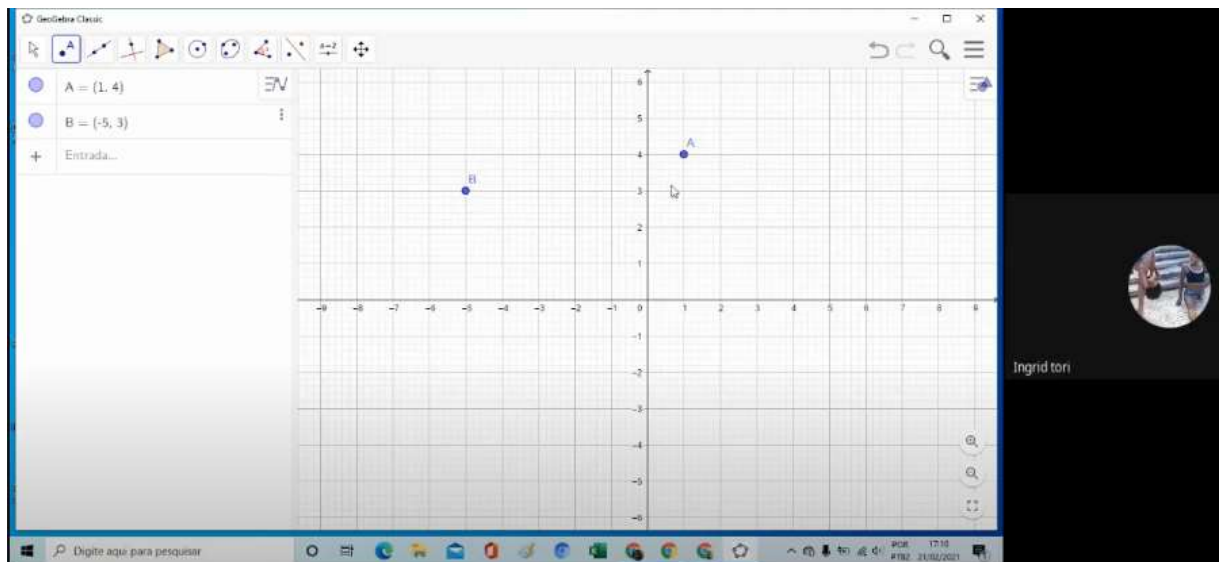
localizei quatro pontos no plano cartesiano, um em cada quadrante e perguntei sobre os valores x e y .

Para o primeiro ponto A falei dos valores x e y e que esses valores apareciam na parte algébrica, a partir do segundo ponto, o ponto B perguntei:

Pesquisador - Os valores de x e de y do par ordenado do ponto B, localizado no segundo quadrante valem quanto?

E1 – respondeu de forma incorreta para x e correta para y (Figura 47). O E1 respondeu “cinco” para x e “três” para y .

Figura 47 Localização de pontos



Fonte: Próprio do autor

Percebe-se que o E1 não considerou o sinal negativo para o valor de x , demonstrando com isso uma falta de concentração. A partir do momento que o Pesquisador destacou o seu erro, o E1 não teve mais esse tipo de erro visto nos próximos três pontos expostos a seguir.

No terceiro ponto localizado no terceiro quadrante respondeu corretamente os valores de x e y , acertou também o quarto ponto que estava localizado no quarto quadrante. Perguntei:

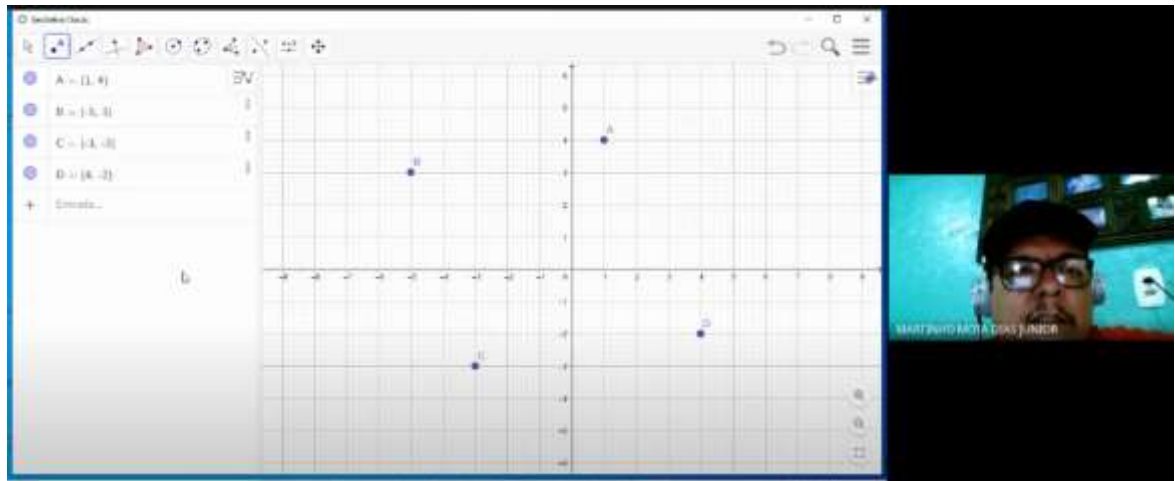
Pesquisador - Para o ponto C, os valores de x e y são?

E1 - Menos três e menos três.

Pesquisador - E para o ponto D, os valores de x e y?

E1 - Quatro e menos dois. (Figura 48).

Figura 48 Pontos

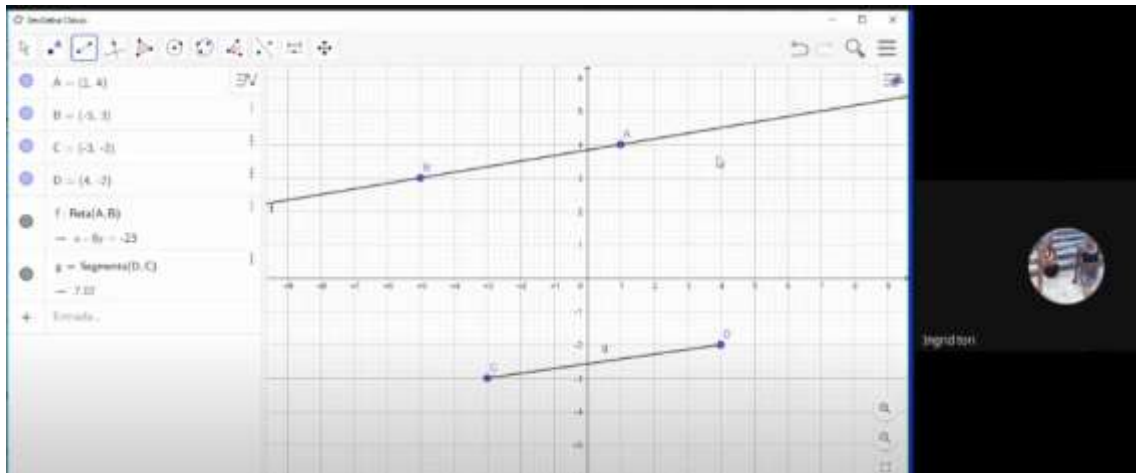


Fonte: Próprio do autor

Podemos observar que o estudante se apropriou do objeto (ponto) e há aqui um indício de aprendizagem que segundo o modelo das situações de atividades instrumentais (SAI), por Rabardel (1995) ocorreu o S-(I)-O, a interação: sujeito (mediado pelo instrumento) e objeto.

Depois que localizamos os pontos, em um terceiro momento, com duração de aproximadamente 5 minutos, fiz um comentário sobre a construção de reta e segmento de reta, através dos ícones correspondentes para essa construção e mostrei na parte algébrica as correspondências em relação a cada objeto (reta, segmento de reta). E que também, na parte algébrica fica demonstrado no caso da reta a sua equação da reta e para o segmento de reta o seu respectivo comprimento (Figura 49).

Figura 49 Reta e Segmento de reta



Fonte: Próprio do autor

O Pesquisador perguntou sobre o entendimento da construção de reta e segmento de reta para o E1.

Pesquisador – Você entendeu sobre a construção de reta e segmento de reta?

E1 - Certo.

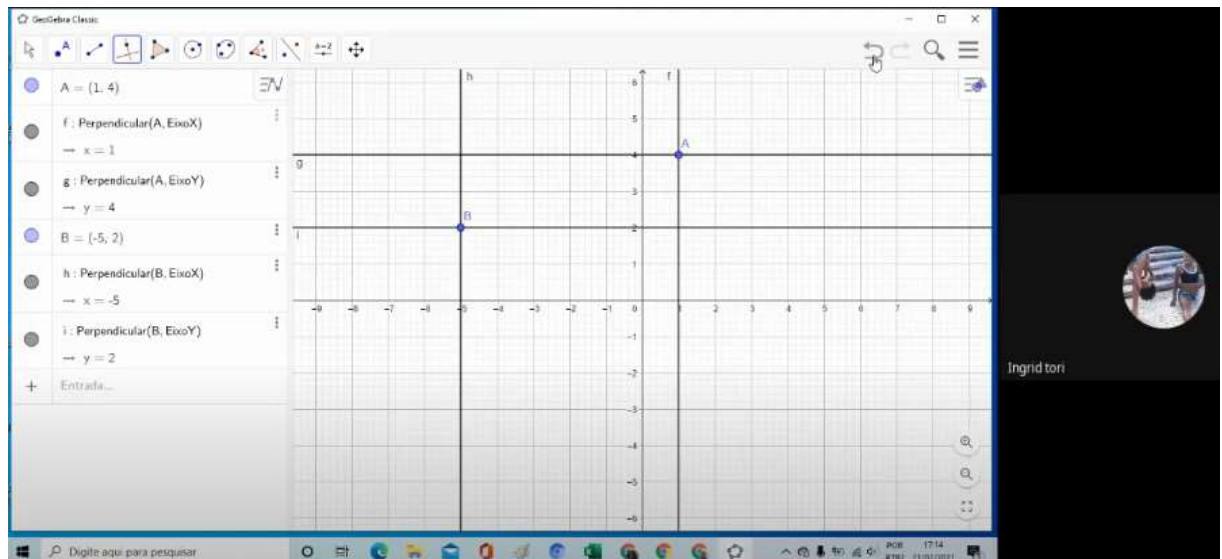
A impressão que tivemos do estudante ao responder “certo” foi que pela entonação da voz e firmeza da afirmativa houve a compreensão do que se estava realizando naquele momento, a construção de reta e de segmento de reta.

No quarto momento, mais 5 minutos de duração. falei sobre o ícone “reta perpendicular”, exemplifiquei e perguntei ao E1:

Pesquisador – você tem alguma dúvida, você entendeu?

E1 – Não tenho dúvida, entendi. (Figura 50).

Figura 50 - Retas perpendiculares



Fonte: Próprio do autor

Fiz com que o E1 localizasse na barra de ferramenta do geogebra o ícone de mover, a lupa mais e a lupa menos e suas funcionalidades e também, fiz com que o E1 muda-se a escalas dos eixos x e y, colocando-se o mouse sobre esses eixos x e y do plano cartesiano. Perguntei:

Pesquisador – Se E1 tinham alguma dúvida em relação ao exposto acima?

E1 - Não.

Depois, no quinto momento, levou-se uns 15 minutos para que o Pesquisador mostrasse para E1 de como se faz a inclusão de uma função no campo “Entrada” e que um ponto A (2,3), que já esteja localizado nesta reta cuja função $(f(x) = x + 1)$ fora digitada no campo entrada, corresponde aos valores $x = 2$ e $y = 3$. Que nessa ordem, correspondem aos valores do domínio e imagem da função.

Depois fiz o E1 digitar no campo entrada “solução: $f(2)$ ” e que automaticamente o geogebra responde o valor $y = 3$. O Pesquisador perguntou ao E1.

Pesquisador – Você compreendeu o mecanismo da solução do geogebra.

E1 - mais ou menos.

Então fiz outra pergunta:

Pesquisador - Quem é a imagem de $f(4)$?

Mostrei que usando o ícone “reta perpendicular” passando pelo ponto $x = 4$ e tocando o gráfico, o E1 percebeu e respondeu:

E1 - cinco.

E depois mostrei algebricamente, no geogebra, o resultado. Agora, peguei um número negativo $x = -4$ e perguntei

Pesquisador - A resposta algebricamente foi de quanto?

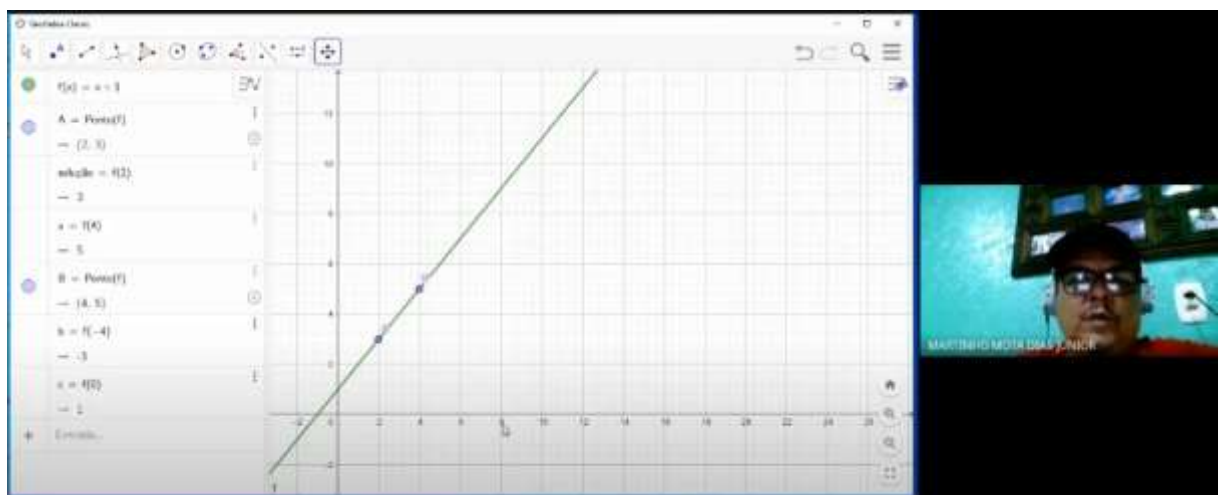
E1 – menos três

Pesquisador - E se $x = 0$?

O estudante demorou um pouco para responder, mas respondeu corretamente.

E1 – É igual a um. (Figura 51).

Figura 51 Solução de Equação



Fonte: Próprio do autor

O E1 apesar de que no início da inclusão de função e sua solução demorou em dá uma resposta posso dizer que houve aprendizagem, pois depois da segunda

pergunta referente a solução da função, as respostas foram mais eficientes e seguras. Pela entonação de sua voz fica nítido a segurança em sua resposta.

Depois, mudei de função para que o E1 pudesse responder os valores de y dado os valores de x, funções do tipo $f(x) = 2x - 4$, $g(x) = 2x - 8$, $h(x) = 2x + 10$ e explique que as funções são do primeiro grau devido as suas representações gráficas no geogebra (retas). Perguntei ao E1:

Pesquisador – Se as funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ representam funções crescentes?

E1 – sim.

Respondeu corretamente, mas não sentir em sua palavra uma segurança, uma firmeza; daí explique mostrando no gráfico do geogebra o crescimento das funções, da seguinte forma. Atribuir valores para x de tal maneira que sejam números crescentes e perguntei ao E1.

Pesquisador - O que acontece com a imagem y quando eu atribuo números crescente de x?

E1 - Respondeu que “y aumenta “.

Dessa forma concluímos o crescimento de uma função. Para a função decrescente comecei de uma forma diferente, dando valores para y crescentes obteremos valores de x decrescentes ou vice-versa.

Depois comecei a fazer perguntas para E1, sobre as imagens ou domínio de alguns pontos. Por exemplo.

Pesquisador – Para a função $f(x) = 2x - 4$, quando $x = 5$. Qual é a sua imagem?

E1 – cinco.

Pesquisador – Não, está errado. Veja aqui como calculamos graficamente. (utilizando-se o mouse o Pesquisador posiciona-o sobre o ponto $x = 5$ e o arrasta

sobre a reta perpendicular em cinco até “bater” no gráfico e “batendo” no gráfico segue na horizontal até chegar ao ponto $y = 6$). Entendeu?

E1 – Entendi.

Pesquisador – para $x = 3$, $f(x)$ vale?

E1 – dois.

Pesquisador – para $x = 4$, o valor de y é?

E1 – quatro.

Pesquisador – o valor de x cuja imagem vale -2 ?

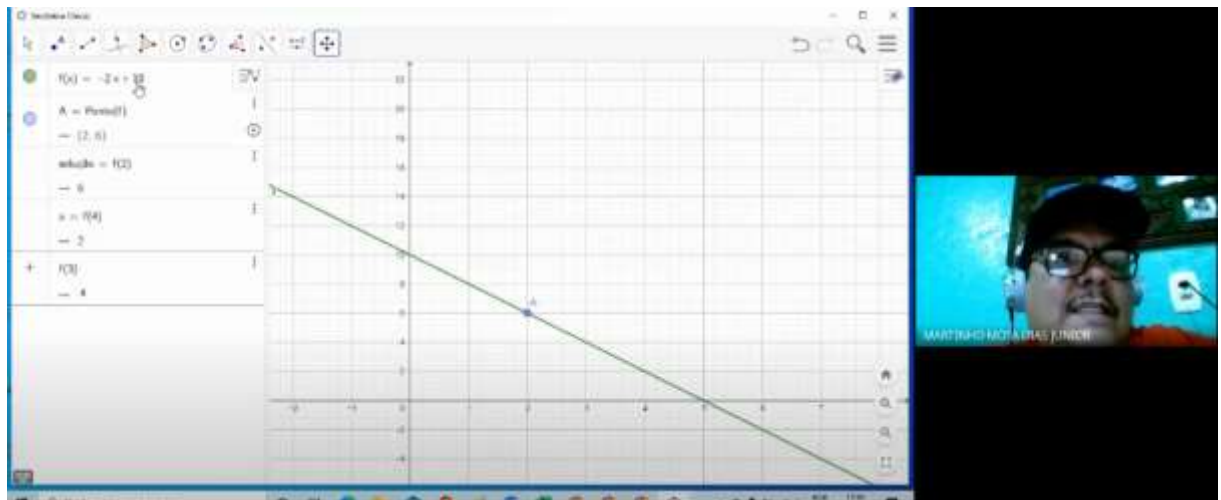
E1 – Um.

Pesquisador – o valor de x cuja imagem vale -4 ?

E1 – Zero.

No começo das perguntas houve um erro, mas depois começou a acertar devido a um comentário do E1 – “parece uma bolinha quando bate volta”. Nesse comentário ele quiz dizer que rebate ou espelha em x . (Figura 52).

Figura 52 Função decrescente



Fonte: Próprio do autor

Aqui está presente as convenções, no momento que o E1 consegue visualizar a transposição da forma algébrica para a forma gráfica. Consegue identificar a solução em função dado o valor de x ou y .

Depois certo tempo passamos para o sexto momento que levou outros 10 minutos para a sua conclusão. Mudei da função do primeiro grau para uma função do segundo grau e o gráfico automaticamente mudou, daí perguntei para o E1.

Pesquisador - Mudou o gráfico?

E1 - Ficou uma curva.

Depois continuei explicando o que é uma função quadrática, sobre sua concavidade e depois voltamos ao ponto crucial que seria a identificação dos valores de x ou y na função. Perguntei.

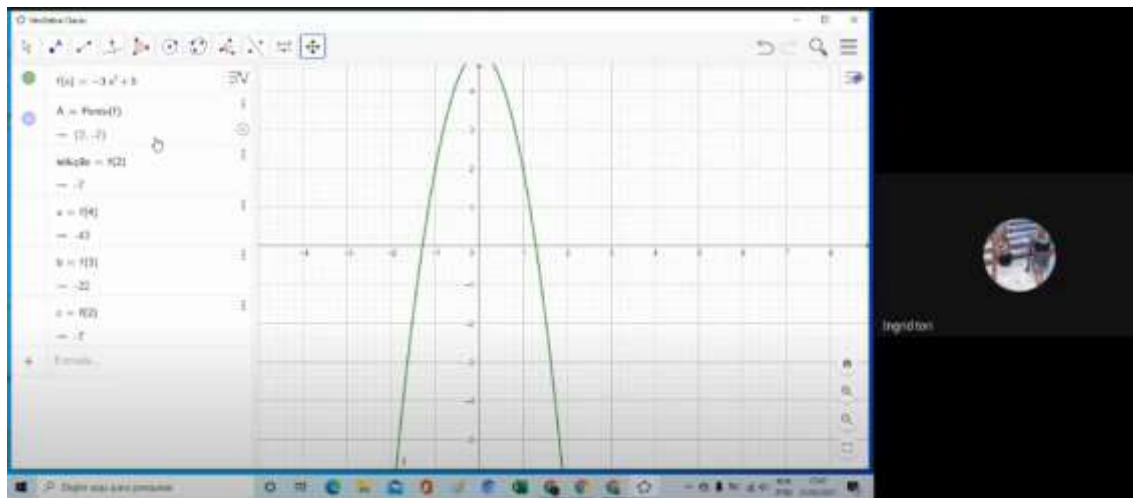
Pesquisador - Dado a função $f(x) = -3x^2 + 5$, para $x = 2$ quanto o valor de y ?

E1 - Respondeu “ -7 ”.

Pesquisador - Para $x = 1$ e $x = -1$ quais os valores de y ?

E1 - Respondeu “2”. (Figura 53).

Figura 53 Função do 2º Grau



Fonte: Próprio do autor

E1 - Percebeu que não importa a função dada que ao calcular o valor de x ou y, basta fazer “a bolinha bater e voltar” daí achar o valor solicitado. Segundo Artigue (2002) os esquemas de ação instrumentada vão, progressivamente, constituindo-se em técnicas que permitem resolver eficientemente certas tarefas.

Depois da função quadrática, em um sétimo momento de aproximadamente 13 minutos, eu fiz a apresentação da função exponencial e expliquei por que é chamada de exponencial, e perguntei ao E1.

Pesquisador – Você sabe o que é uma função exponencial?

E1 - A resposta foi “não”.

Depois fiz, praticamente, as mesmas perguntas que foram feitas para as outras funções anteriores e foram repetidas aqui para a função exponencial.

Pesquisador – Esta função exponencial $f(x) = 2^x$ é crescente ou decrescente?

E1 – Crescente.

Pesquisador – Esta função exponencial $v(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é crescente ou decrescente?

E1 – Decrescente.

Pesquisador - Quais os valores da função $f(x) = 2^x$ para $x = 1$.

E1 – dois.

Pesquisador – Qual o valor de x quando é dado $2^x = 4$.

E1 – dois.

A impressão que tivemos foi que mesmo o E1 não saber o que é uma função exponencial soube responder com êxito, apenas observando no gráfico do geogebra os valores solicitados.

Depois fiz em “entradas” no geogebra seis funções exponenciais, $f(x), g(x), h(x), v(x), m(x)$ e $n(x)$ e perguntei ao E1.

Pesquisador - O que aconteceu no gráfico dessas funções?

E1 - A resposta foi “ficam sempre do mesmo jeito”.

Pesquisador - Elas sempre passam por onde?

E1 - “pelo um”.

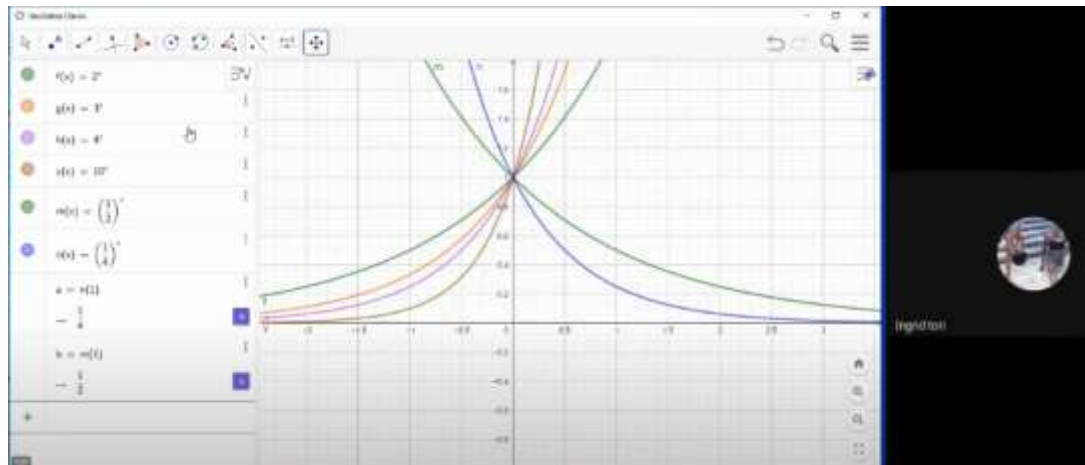
Pesquisador – Quais as funções são crescentes?

E1 – f, g, h e v

Pesquisador – Quais as funções decrescentes?

E1 - m e n . (Figura 54).

Figura 54 função exponencial

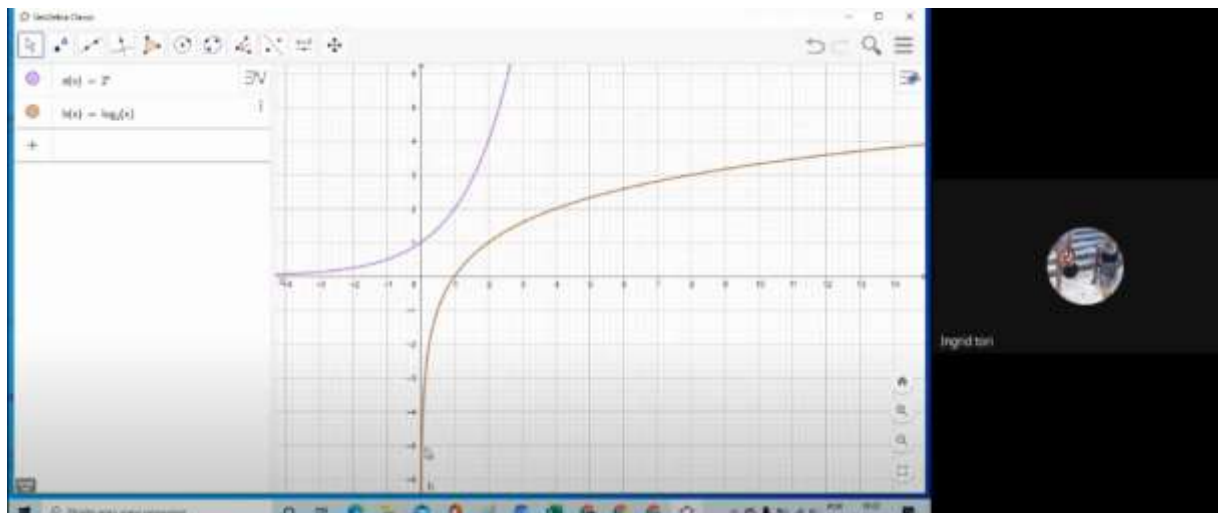


Fonte: Próprio do autor

A instrumentação ficou evidenciada devido aos seus esquemas desenvolvidos durante a realização de suas respostas, são os chamados esquema de ação instrumentada. Pois já não importa mais a função dada, as perguntas que foram realizadas anteriormente já podem ser respondidas baseadas através do uso do geogebra.

Agora vamos falar de logaritmo usando a ideia de função inversa, fazendo uma correlação com a exponencial. (Figura 55).

Figura 55 Função Inversa



Fonte: Próprio do autor

Pesquisador - Perguntei ao E1 sobre o crescimento das funções $(a(x) \text{ e } b(x))$.

E1 - A resposta foi errada para função logarítmica e certa para a função exponencial.

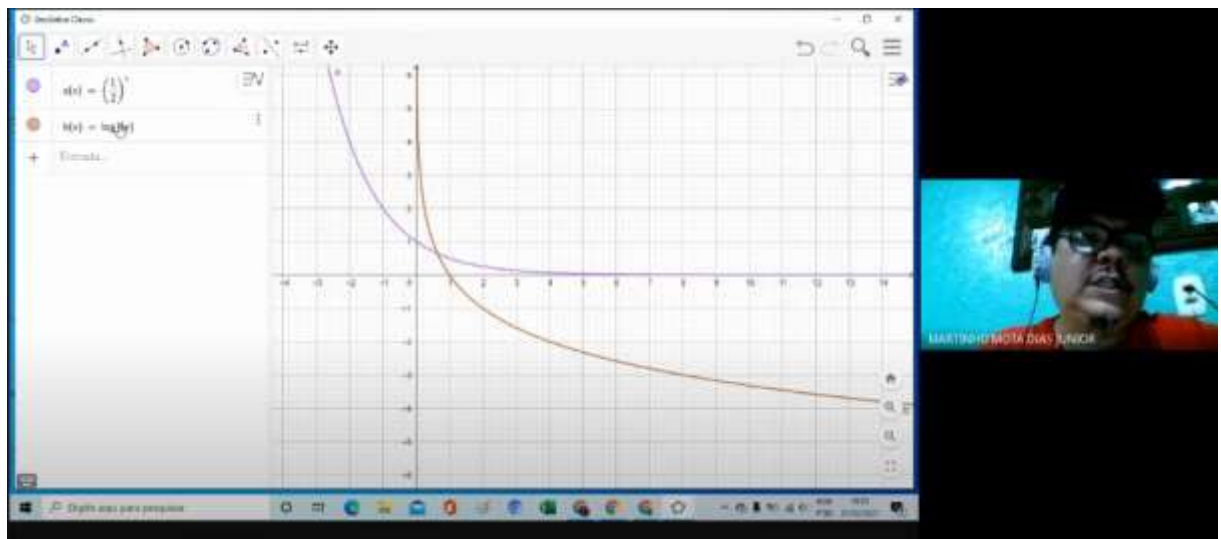
Percebi que o E1 ao analisar o gráfico no geogebra as duas funções (exponencial e logarítmica), acertou a função exponencial e falou errado para a função logarítmica, mas depois voltou atrás em relação a sua resposta à função logarítmica, dizendo que “é crescente, mas é ao contrário”. Depois perguntei:

Pesquisador – mas qual é o motivo de seu crescimento (função logarítmica e exponencial)?

E1 – Não soube responder.

Depois fiz um comentário sobre as bases, comentário esse que se a base for um número maior que um as funções (exponencial ou logarítmica) são crescentes, se a base for um número positivo menor que um as funções (exponencial ou logarítmica) são decrescentes. (Figura 56).

Figura 56 Função Inversas



Fonte: Próprio do autor

Neste contexto a intenção foi demonstrar os gráficos das funções inversas e fazer uma comparação entre os gráficos. Lembrando-se aqui que os assuntos exponencial e logarítmica não foram administradas pela sua escola, então tudo é novidade para esse aluno.

12.2.1.2. Segundo encontro do Experimento 1 (E1)

O segundo encontro foi realizado no dia 23 de fevereiro de 2021, com duração de aproximadamente de uma hora e quarenta e um minuto, divididos em seis momentos.

O primeiro momento teve uma duração de 8 minutos, e fiz com que o E1 entrasse no google, fizemos o compartilhamento da tela do E1, fiz a leitura da primeira atividade da dissertação e fiz o E1 inserir os dados da tabela da primeira atividade no excel do geogebra. Assim disse:

Pesquisador - Digite a palavra “geogebra” na caixa de diálogo do google na internet. E clique em geogebra, o que aparece? (Figura 57).

Figura 57 - Google

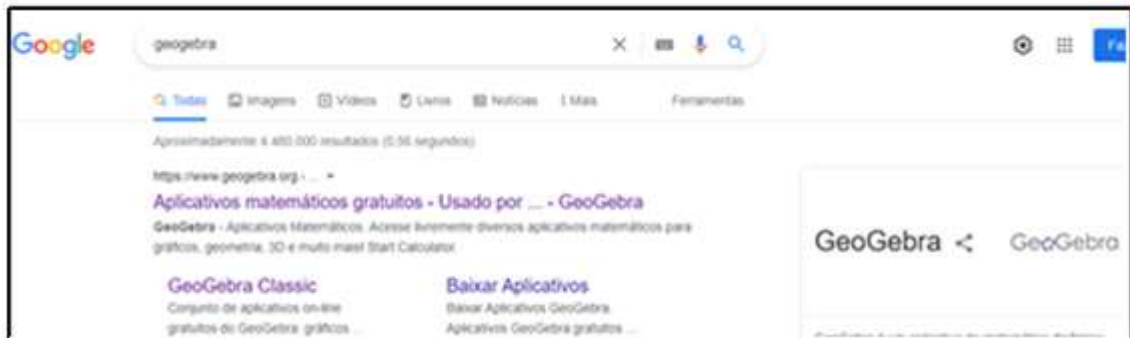


Fonte: Próprio do autor

E1 – Ok, aparece várias opções. Aplicativos matemáticos gratuito, Instituto geogebra São Paulo.

Pesquisador – Geralmente é a primeira opção, clica em geogebra classic na primeira opção (Aplicativo matemáticos gratuitos). (Figura 58).

Figura 58 - Geogebra Internet

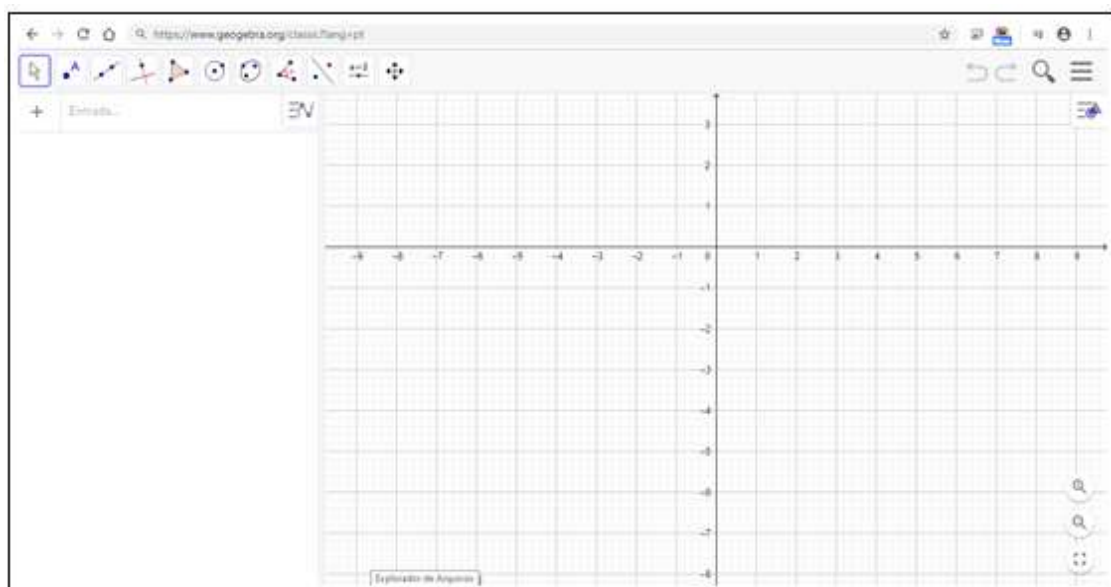


Fonte: Próprio do autor

E1 – Ok.

Pesquisador – Aparece em seu computador a mesma tela que eu estou compartilhando (ambiente do geogebra)? (Figura 59).

Figura 59 - Geogebra Classic



Fonte: Próprio do autor

Depois perguntei ao E1.

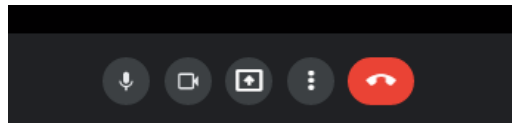
Pesquisador – Você sabe compartilhar a sua tela no Meet?

E1 - Não sei.

Sabendo disso, fiz uma orientação de como compartilhar a sua tela do computador ao E1, da seguinte maneira.

Pesquisador – você está vendo em seu visor cinco ícones centralizados abaixo de sua tela? (Figura 60).

Figura 60 - ícones do meet.

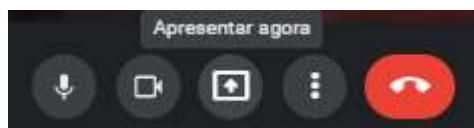


Fonte: Próprio do autor

E1 – sim.

Pesquisador – clique no ícone central, denominado de “apresente agora”. (Figura 61).

Figura 61 - apresente agora

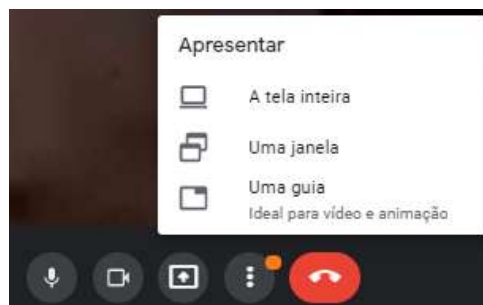


Fonte: Próprio do autor

E1 – Cliquei.

Pesquisador – Vai aparecer uma janela que contem três opções de escolha. A primeira opção é Tela inteira, a segunda opção: Uma janela e a terceira opção: uma guia. (Figura 62). Escolha e clique em tela inteira.

Figura 62 - Opções de telas



Fonte: Próprio do autor

E1 – Ok.

Pesquisador – Apareceu uma tela com a seguinte informação “compartilhar sua tela inteira”. (Figura 63). Clique em compartilhar.

Figura 63 Compartilha tela



Fonte: Próprio do autor

E1 – Cliquei

Pesquisador – Pronto! Já está compartilhando sua tela.

Em seguida fiz uma breve leitura da atividade 1 e depois que o E1 acessou o ambiente do geogebra, fiz com que E1 digitasse os dados da tabela da primeira atividade. (Figura 64).

Figura 64 - 1ª atividade - Tabela

ATIVIDADE 1
TENTE FAZER SEM O MEU AUXÍLIO E SEM O GEOGEBRA... E VAMOS MARCAR O DIA PARA FAZERMOS JUNTOS...

7.1.2. ATIVIDADE DE EXPONENCIAL (Da função e inequação)

Dado uma tabela que apresenta dados que mostram o crescimento do número de células em função da quantidade de dias e usando o aplicativo geogebra faça uma representação gráfica dos dados.

Tempo (t)	0	1	2	3	4	5
Número de Célula (n)	1	2	4	8	16	32

Determine qual o tipo de função que melhor se ajusta aos dados apresentados.

Verifique se:

a) Para tempos iguais a 7, 9 e 12 teremos quais quantidades de células correspondentes?

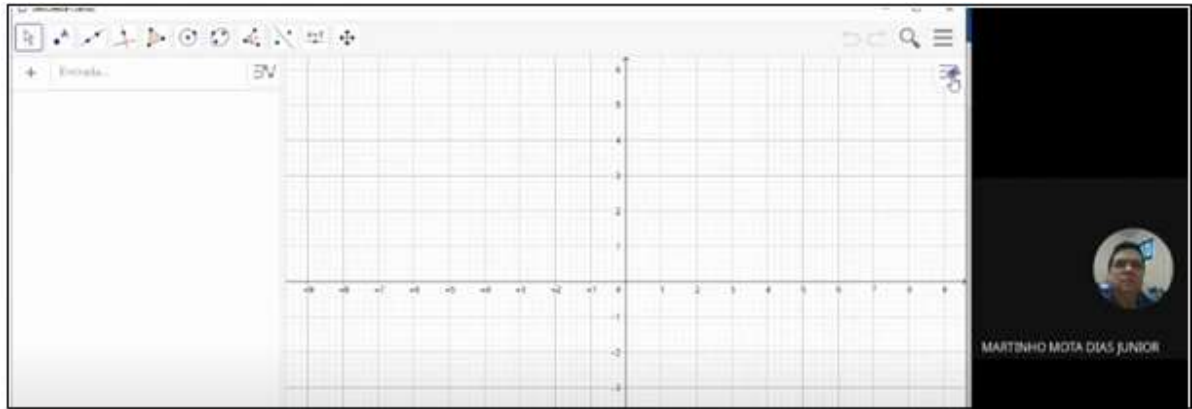
b) Para números de células iguais a 64, 128 e 1024 teremos quais tempos correspondentes?

Fonte: próprio do autor

Pedi para que E1 “abrisse” o Excel no ambiente do geogebra, da seguinte forma.

Pesquisador – Vai no ambiente do geogebra, no canto direito superior temos uma figura (ícone) de um triângulo sobreposto em um círculo. Clique neste ícone. (Figura 65).

Figura 65 - Ícone triângulo e Círculo

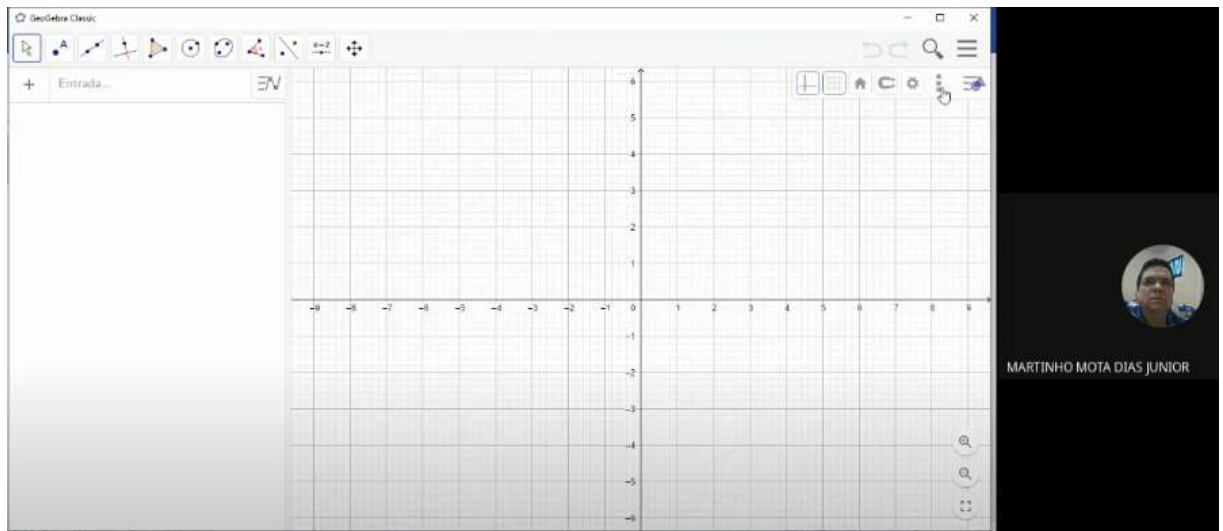


Fonte: próprio do autor

E1 – Ok

Pesquisador – Aparecerá ao lado algumas opções. (Figura 66).

Figura 66 - Opções



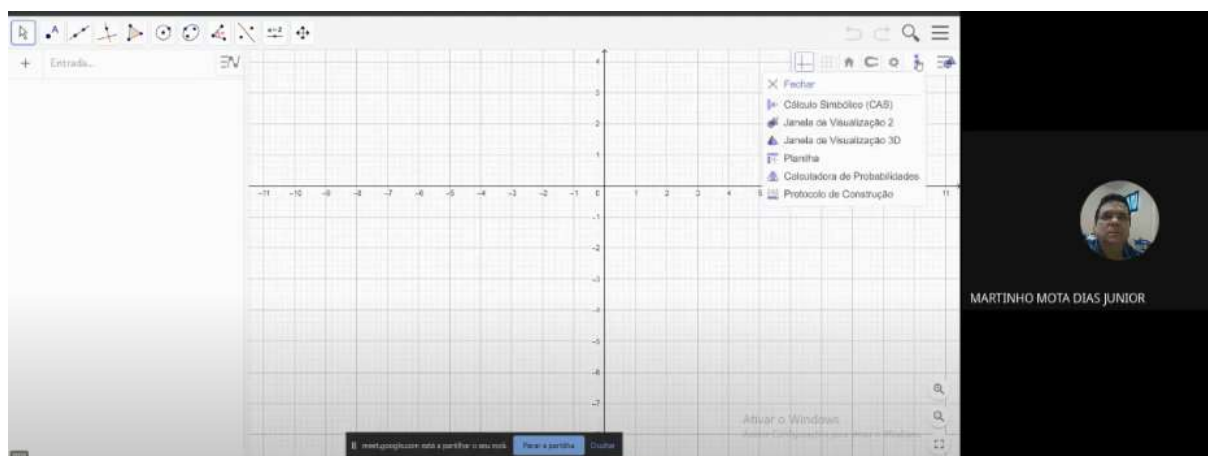
Fonte: próprio do autor

Pesquisador – Clique nos três pontinhos, um em cima do outro.

E1 – ok.

Pesquisador - Aparecerá uma janela e nesta janela você escolhe “planilha”. Clique. (Figura 67).

Figura 67 - Planilha



Fonte: próprio do autor

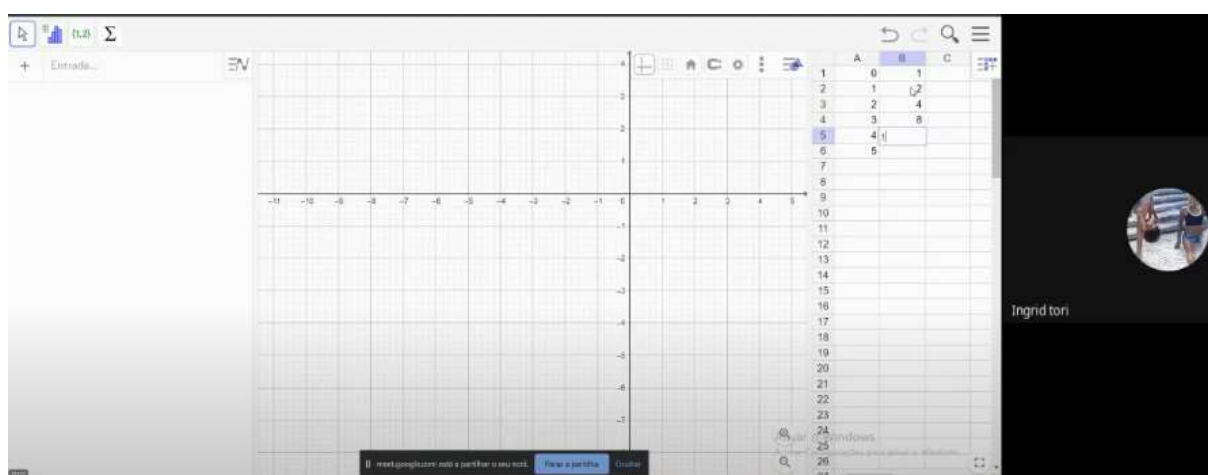
E1 – ok.

Pesquisador – Você conhece a planilha do Excel?

E1 – Não.

Fiz uma breve explicação ao E1, dizendo que o excel é formado por colunas (A,B,C,D,...) e por linhas (1,2,3,4,...) e que juntos formam uma célula, por exemplo: A1 (coluna A, linha 1), A2 (coluna A, linha 2), B3 (coluna B, linha 3) e assim por diante. E que em nosso caso a coluna A seria representado pelos valores de x (tempo) e a coluna B, os valores de y (número de células). (Figura 68).

Figura 68 - Inserção de valores



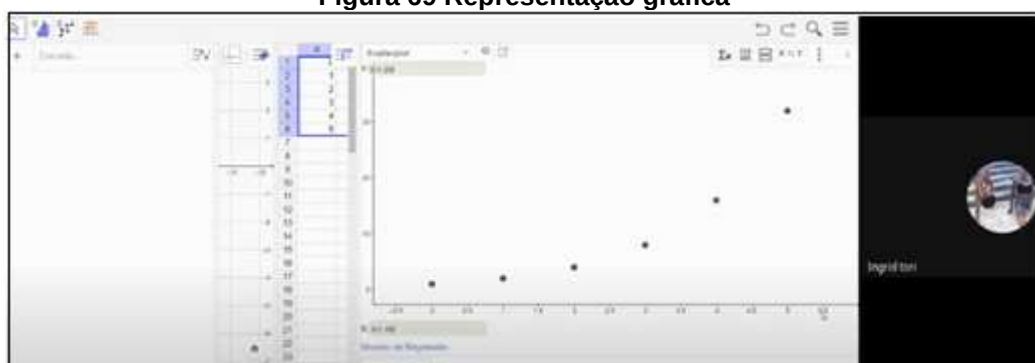
Fonte: próprio do autor

No segundo momento que durou aproximadamente uns 15 minutos. Foi o momento em que deveríamos escolher através de uma pequena análise feita pela observação no plano do gráfico do geogebra, utilizando-se para isso o ícone

análise bivariada, testando as funções que se encontram em modelo de regressão do geogebra para ver qual função que melhor se “encaixar” nos pontos plotado e depois de concluído essa análise seria aplicada na primeira atividade.

Pesquisador - Nas colunas A e B o E1 digitou os valores da tabela da atividade 1. Dessa forma foram preenchidas as colunas do excel no geogebra de acordo com a tabela. Selecionei a tabela construída e em seguida cliquei em análise bivariada, localizada no canto superior esquerdo do geogebra. (Figura 69).

Figura 69 Representação gráfica



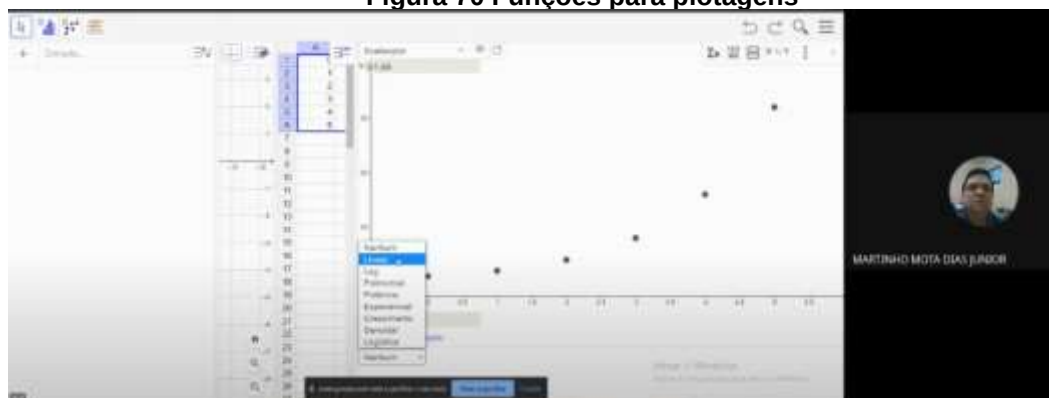
Fonte: próprio do autor

E1 – Cliquei no ícone análise bivariada.

Ao clicar na análise bivariada o E1 observou que no espaço gráfico do geogebra apareceu os pontos da tabela selecionada.

Pesquisador - Pedi para o E1 clicasse em “Modelo de regressão” localizado na parte inferior do plano gráfico e depois de selecionado, abriu-se uma janela com algumas funções e perguntei qual dessas funções representar melhor os pontos plotados? (Figura 70).

Figura 70 Funções para plotagens

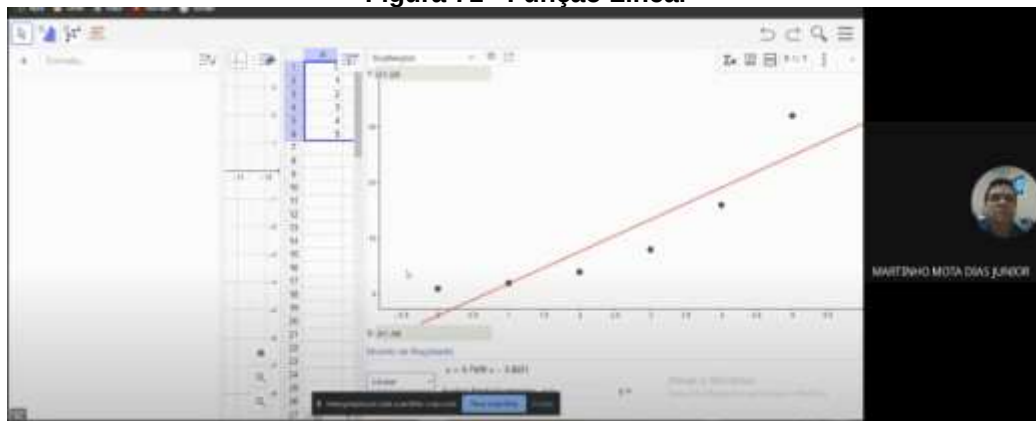


Fonte: próprio do autor

E1 - Não sei.

Pedi para o E1 que clicasse em linear para em seguida observar o resultado, dessa forma obtemos a seguinte representação gráfica (Figura 59).

Figura 71 - Função Linear



Fonte: próprio do autor

Pesquisador - Perguntei se a função linear representa melhor os pontos da tabela?

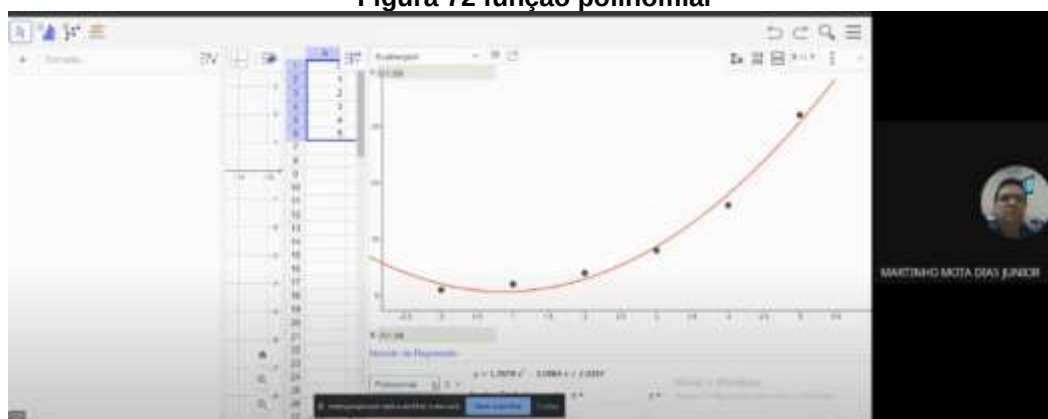
E1 - Não.

Pedi para que o E1 clicasse em polinomial e perguntei:

Pesquisador - A função polinomial representa os pontos da tabela?

E1 - Não. (Figura 60).

Figura 72 função polinomial



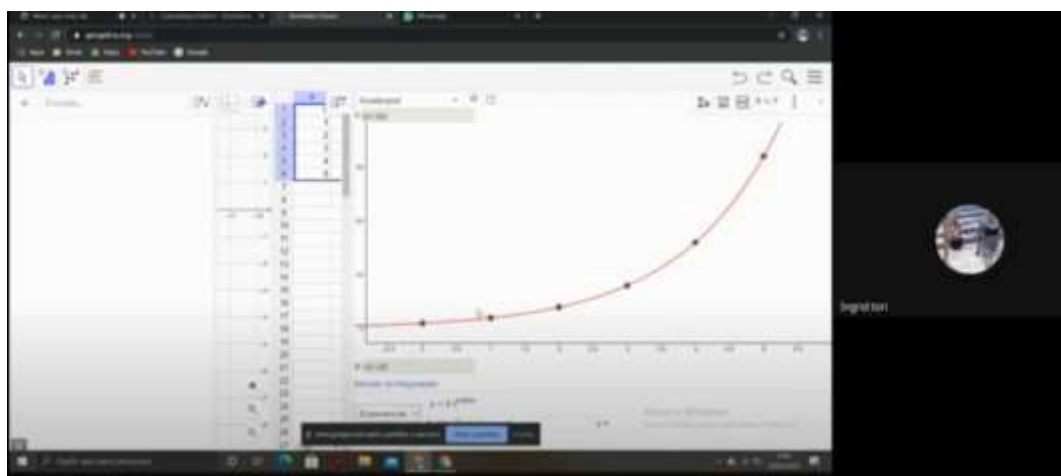
Fonte: próprio do autor

E quando falei para o E1 clicar em exponencial aconteceu uma reação de espanto, uma certa alegria. Perguntei.

Pesquisador – O que acontece quando você clica em exponencial?

E1 - Oh! É exponencial. (Figura 73).

Figura 73 Função Exponencial

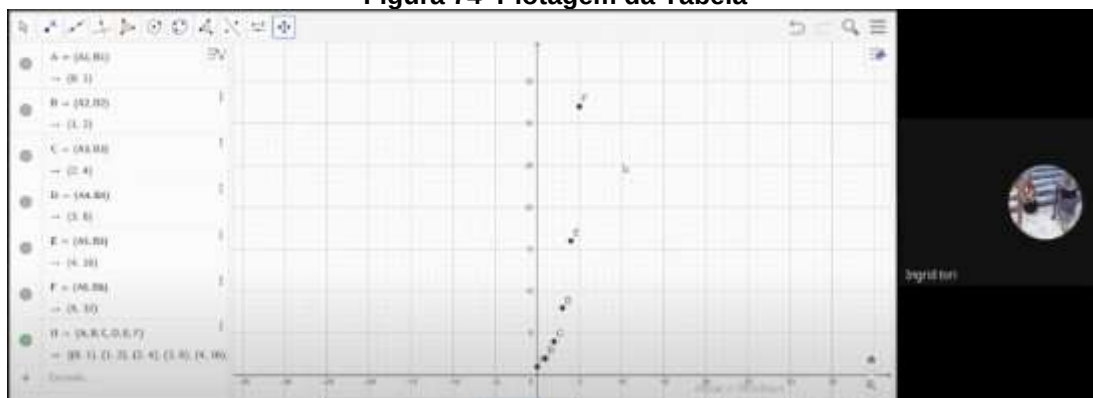


Fonte: próprio do autor

Após concluir essa fase, de descoberta, da construção do gráfico da função dos pontos plotados, iremos analisar agora as questões da primeira atividade. Para isso devemos voltar ao geogebra e incluir novamente a tabela da atividade 1 no excel do geogebra e selecionar essa tabela novamente.

Depois devemos clicar no mouse, do lado direito do mouse e em cima da tabela construída, vai abrir uma nova janela, então você deve selecionar “criar” e em seguida, clicar em lista de pontos. (Figura 74).

Figura 74 Plotagem da Tabela



Fonte: próprio do autor

E, novamente perguntei ao E1.

Pesquisador - Qual a melhor função que representa esses pontos plotados ?

E1 - A resposta foi meio tímida e incompleta: “é a expone...”.

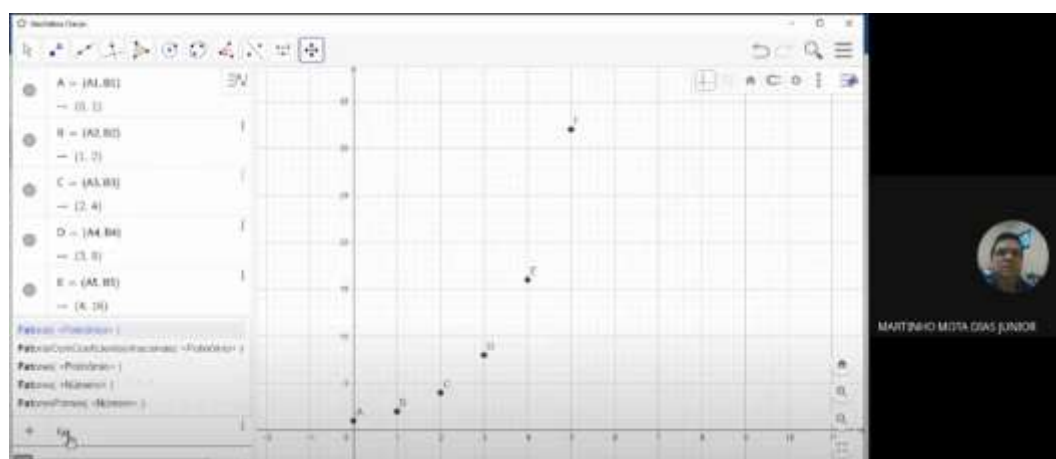
E, então completei a sua resposta.

Pesquisador – Exponencial.

Em um terceiro momento, que durou 20 minutos aproximadamente iremos tratar sobre a fatoração de números inteiros no intuito de fazer com que o E1 perceber que a base da exponencial é exatamente o fator dessa fatoração. Depois, com a base já definida, escrever em entrada a função exponencial no geogebra para que ele possa observar o gráfico construído e resolver assim os item “a” e “b” da primeira atividade.

O Pesquisador pede para E1 digitar “fatoração” em entrada no geogebra e assim que começar a escrever fat aparecerá as opções em uma nova janela (Figura 75). E o Pesquisador pede para que E1 escolha o item “fatores primos” nessa janela.

Figura 75 Fatoração



Fonte: próprio do autor

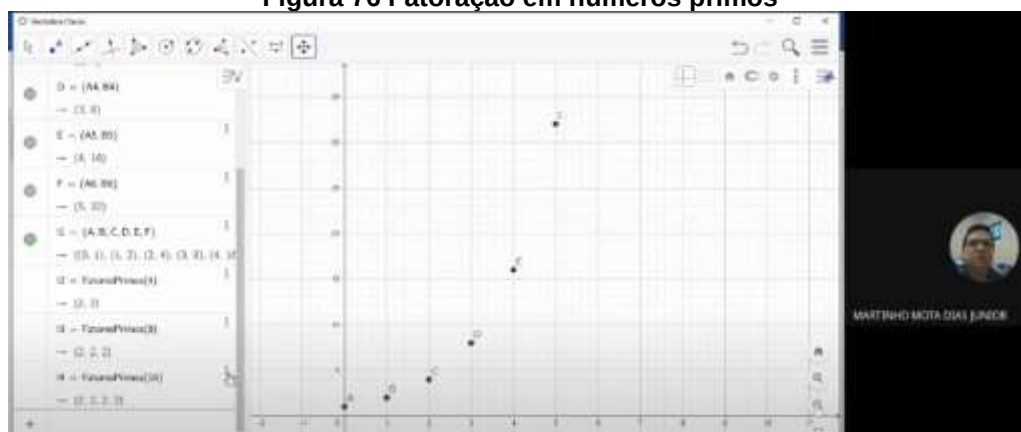
Pesquisador - Digite em “fatores primos” o número 4 e clique em enter. O que aconteceu?

E1 - A resposta foi (2;2).

E em seguida peço que repita essa operação para os demais valores de y dos pares ordenados. E pergunto:

Pesquisador - Quais as respostas das operações de fatoração para $y = 8; 16 \text{ e } 32$. (Figura 76).

Figura 76 Fatoração em números primos



Fonte: próprio do autor

E1 - Respondeu “deu sempre dois”.

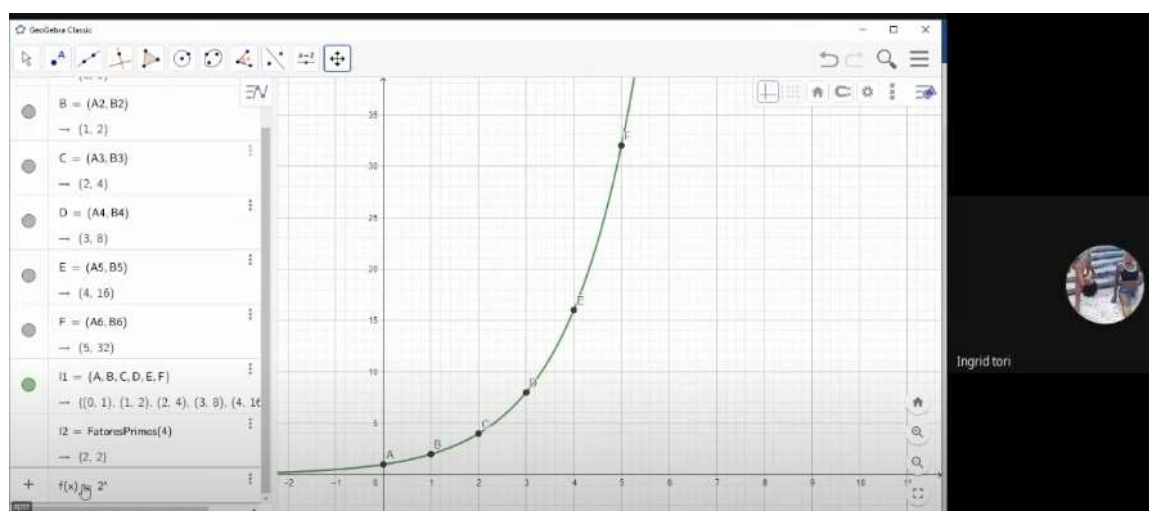
Sabemos que esses pontos correspondem a uma função exponencial, visto e analisado no segundo momento. Então o Pesquisador pergunta:

Pesquisador - Essa exponencial tem como base que número?

E1 - Base 2.

Depois peço ao E1 que escreva a função $f(x) = 2^x$ em “entrada” no geogebra. (Figura 77). E pergunto:

Figura 77 Função exponencial



Fonte: próprio do autor

Pesquisador – Você entendeu por que a base é 2?

E1 – Sim.

Vamos a 1ª questão da primeira atividade que diz: “Para tempos iguais a 7, 9 e 12 teremos quais quantidades de células correspondentes?”. Dessa forma tivemos na figura 78 a representação do item a. O Pesquisador perguntou:

Figura 78 - Primeira questão Item a



Fonte: próprio do autor

Pesquisador – Para $x = 7$, o valor de $f(x) = 2^x$, o valor de $f(x)$ é?

E1 - É 128.

Pesquisador - Para $x = 9$, o valor de $f(x) = 2^x$, o valor de $f(x)$ é?

E1 – É 512.

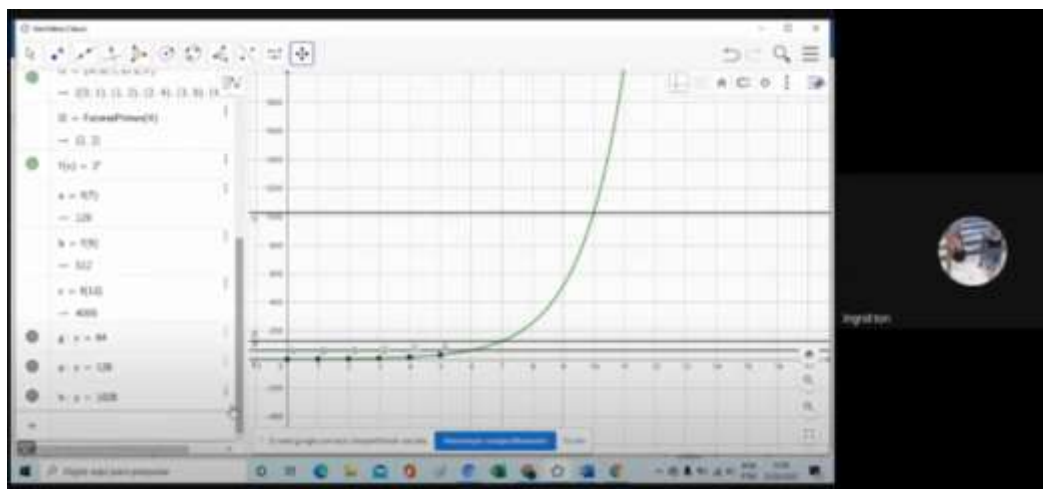
Para $x = 12$, o valor de $f(x) = 2^x$, o valor de $f(x)$ é?

E1 – É 4096.

A minha impressão foi que no final da resolução do item “a” o estudante compreendeu a transposição da parte algébrica para a parte gráfica, que em relação a teoria de Rabadel aconteceu o que dizemos de convecção.

Depois fiz uma leitura do item “b” da primeira atividade para o E1, lemos: Para os números de células iguais a 64, 128 e 1024 teremos quais tempos correspondentes? Essa questão nos dá uma ideia de resolução inversa ao do item “a”, pois você determina o valor de x (domínio) dado o valor de y (imagem). (Figura 79).

Figura 79 - Item b da 1ª questão



Fonte: próprio do autor

Dessa forma, o Pesquisador perguntou ao E1.

Pesquisador – Qual o valor de x do domínio que corresponde ao valor de $y = 64$?

E1 – seis.

Pesquisador - – Qual o valor de x do domínio que corresponde ao valor de $y = 128$?

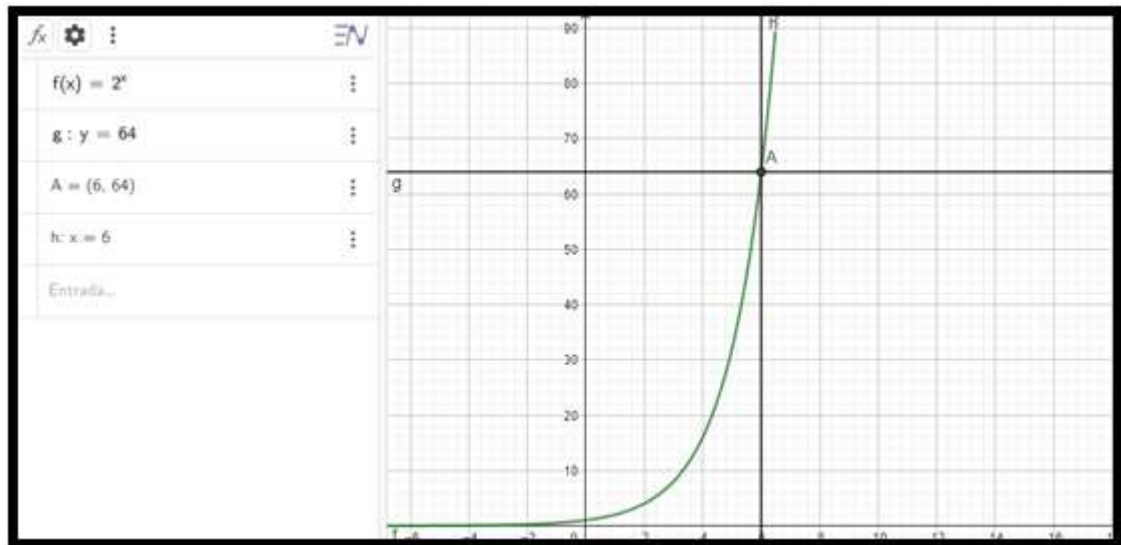
E1 – sete.

Pesquisador - – Qual o valor de x do domínio que corresponde ao valor de $y = 1024$?

E1 – dez.

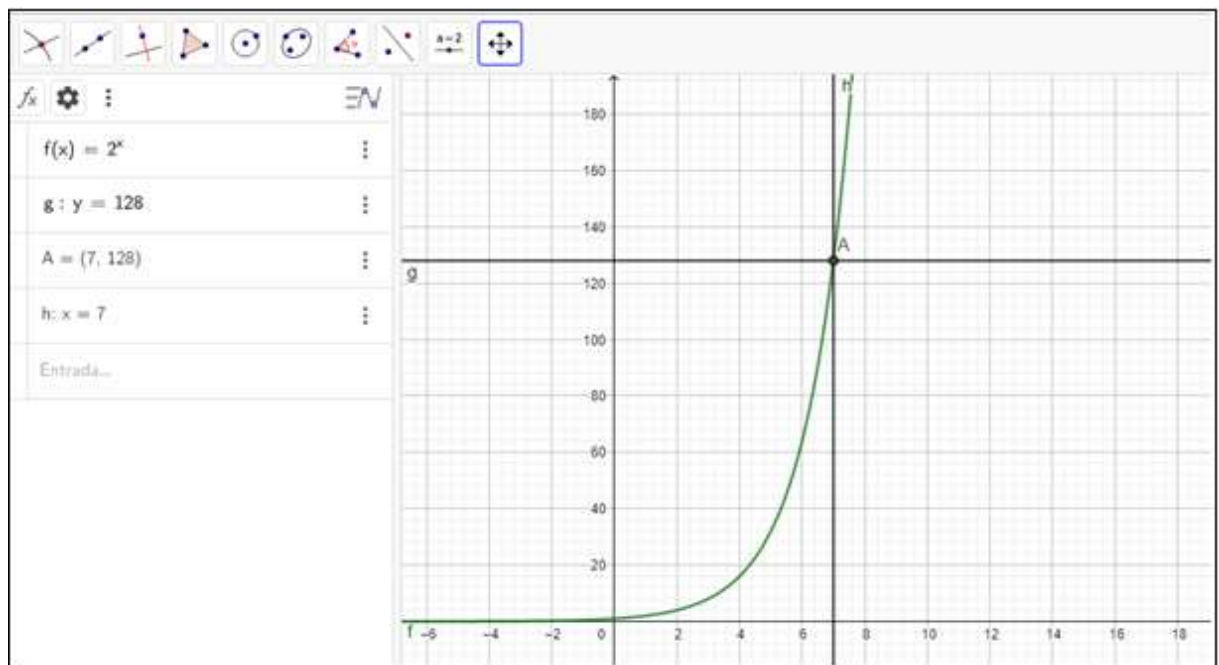
O E1 assimilou o assunto e resolveu a questão “b” da 1ª questão com certa tranquilidade. Pois durante a realização o E1 utilizou-se das ferramentas (ícones) e das funções ($x = e y =$) já estudadas anteriormente, para determinar a solução.

Para o E1 determinar o valor seis, primeiramente usou a função $y = 64$, depois usou ícone (interseção entre dois objetos) e depois usou o ícone (reta perpendicular). (Figura 80).

Figura 80 Resposta do item b para $y = 64$ 

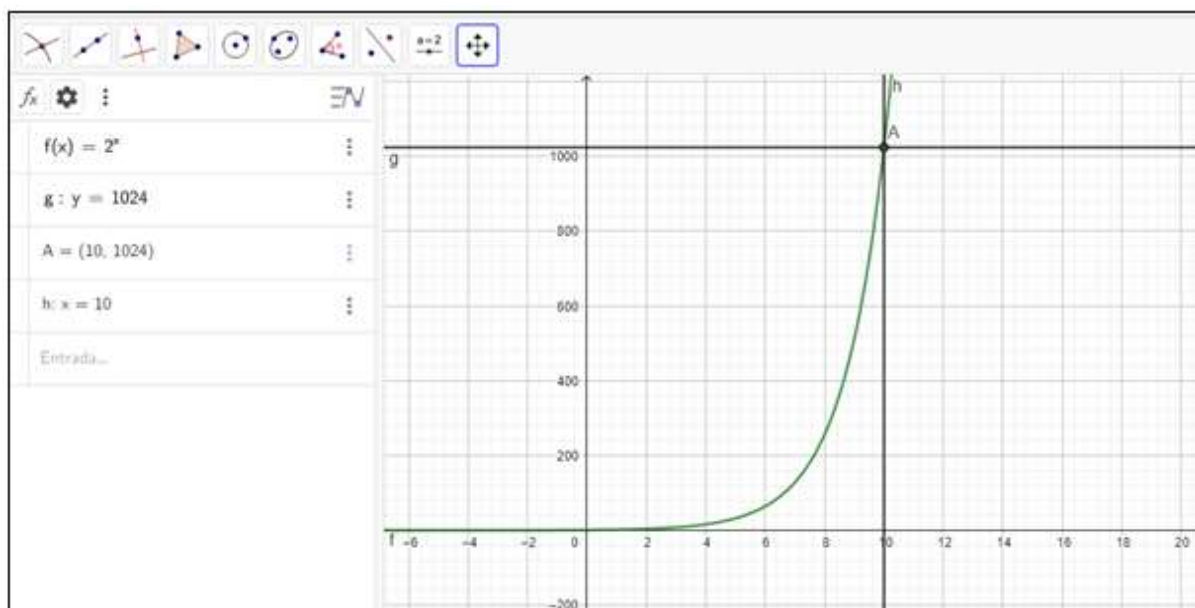
Fonte: próprio do autor

Para o E1 determinar o valor sete, primeiramente usou a função $y = 128$, depois usou ícone (interseção entre dois objetos) e depois usou o ícone (reta perpendicular). (Figura 81).

Figura 81- Resposta do item b para $y = 128$ 

Fonte: próprio do autor

Para o E1 determinar o valor sete, primeiramente usou a função $y = 128$, depois usou ícone (interseção entre dois objetos) e depois usou o ícone (reta perpendicular). (Figura 82).

Figura 82- Resposta do item b para $y = 1024$ 

Fonte: próprio do autor

No quarto momento que teve uma duração de aproximadamente 20 minutos, devido a resolução do item c ser uma questão em que o Pesquisador teve muita cautela em conduzir e ao E1 coube um concentração a mais por sua parte.

Fiz um leitura do item “c” da primeira questão. Em que dizia: O que representa dizer graficamente e algebricamente $2^x > 4$.

Depois, fiz para o E1 uma demonstração no ambiente word sobre a resolução algébrica da inequação $2^x > 4$.(Figura 83).

Figura 83- Resolução Algébrica

A captura de tela mostra um documento do Word com a seguinte resolução algébrica:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= y \\
 f(x) &= 2^x \\
 y &= 2^x \\
 2^x &> 4 \\
 y &> 4 \\
 2^x &> 4 \\
 2^x &> 2^2 \\
 x &> 2
 \end{aligned}$$

Fonte: próprio do autor

Fiz durante a realização algébrica da inequação $2^x > 4$ para o E1 algumas perguntas do tipo:

Pesquisador – você sabe que $f(x)$ pode ser também ser chamado de y ?

E1 – Sim.

Pesquisador – Se $f(x) = 2^x$ então eu posso afirmar que $2^x = y$?

E1 – posso.

Pesquisador – Mas $y > 4$, então $2^x > 4$, certo?

E1 – Certo.

Pesquisador – Posso fatorar o 4, já fizemos isso, correto?

E1 – Sim e é $(2,2)$.

Pesquisador – Muito bem! Dessa forma podemos fazer isso: $2^x > 2^2$?

E1 – Sim.

Pesquisador – Propriedade da potenciação, bases iguais, expoentes iguais, certo?

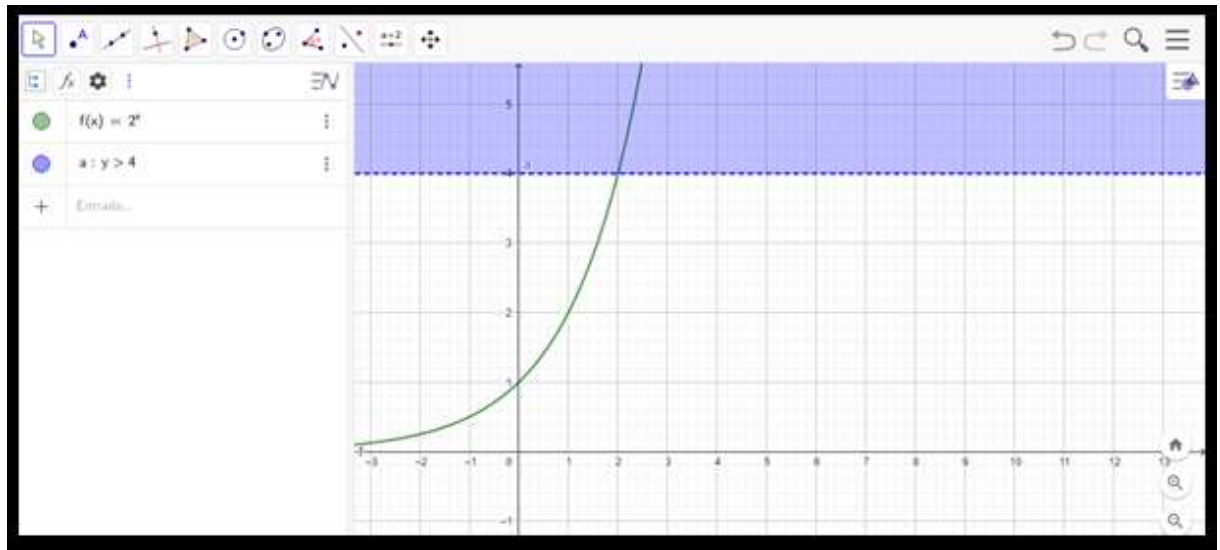
E1 – Correto.

Pesquisador – Mas é uma inequação, para isso devemos observar sua base, como é uma base positiva e maior que um, temos uma função correspondente crescente, logo temos como valor $x > 2$. Para garantir a desigualdade da inequação, entendeu?

E1 – Sim.

Depois da parte algébrica fomos para o geogebra demonstrar graficamente, a solução da inequação $2^x > 4$. Pedi para o E1 digitasse em “entrada” no geogebra a a função $f(x) = 2^x$, depois a expressão $y > 4$ e desse enter. (Figura 84).

Figura 84 - Demonstração gráfica



Fonte: próprio do autor

Depois o Pesquisador perguntou:

Pesquisador – Qual o valor de x do domínio que corresponde a imagem $y = 4$?

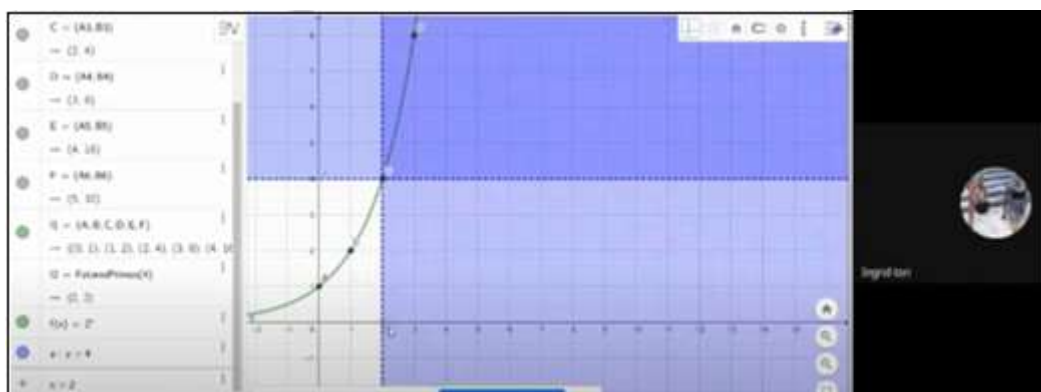
E1 – É dois.

Pesquisador – Você acha que a solução da inequação $2^x > 4$ são os números maiores que dois ou menores que dois?

E1 – maiores.

Depois o Pesquisador pede para o E1 digitar $x > 2$ em entrada do geogebra e observar o que aconteceu. (Figura 85). O Pesquisador disse:

Figura 85 - Solução da Inequação



Fonte: próprio do autor

Pesquisador – O que aconteceu ao digitar $x > 2$?

E1 – Ficou pintado para $x > 2$ e pintado duas vezes na interseção das cores.

Pesquisador – Observe que tem gráfico na interseção das cores, o que significa isso?

E1 – Significa que é a solução da inequação $2^x > 4$.

No quinto momento, com duração de 20 minutos o Pesquisador leu o item d para o E1 e como está questão é muito semelhante a anterior (item c) não houve muita dificuldade por parte do E1 em desenvolver e entender a questão.

Assim, fiz a leitura do item d que consistia em: “O que representa dizer graficamente e algebricamente a inequação $2^x < 8$ ” para o E1. E pedi para o E1 que digitasse $y < 8$ em entrada no geogebra.

Figura 86 - Item d da primeira questão



Fonte: próprio do autor

Pesquisador – O que você observou quando digitou $y < 8$?

E1 – Ficou pintado a parte debaixo de 8.

Pesquisador – Qual o domínio x para $y = 8$?

E1 – x é igual a três.

Pesquisador – A resposta para a inequação $2^x < 8$ vai ser maior que ou menor que três?

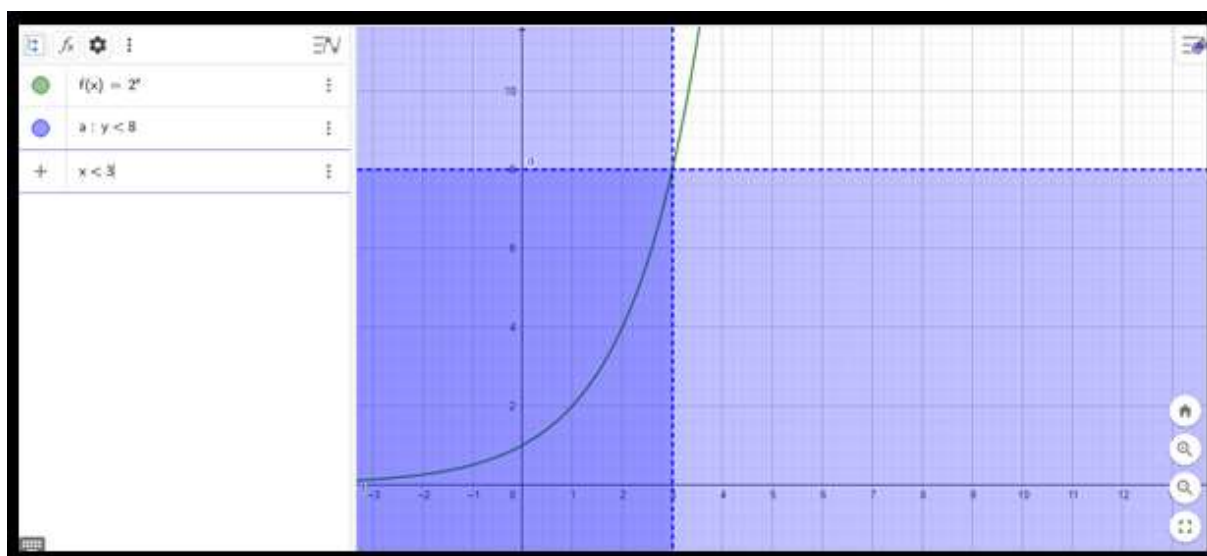
E1 – Menor que três.

Pesquisador – Por que menor que três?

E1 – Por que quando você digita $x < 3$ fica pintado duas vezes no gráfico da função.

De fato, ao digitar $x < 3$ em entrada no geogebra observamos que na interseção entre as partes hachuradas existe o gráfico da função $2^x < 8$. Ratificando a sua resposta. (Figura 87).

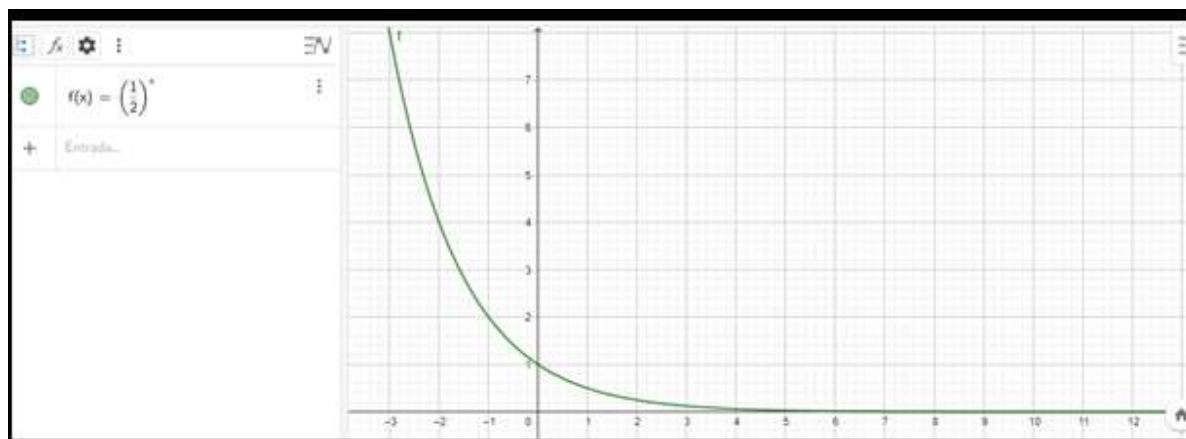
Figura 87 - Resposta do item d



Fonte: próprio do autor

O sexto momento durou 18 minutos, fiz a leitura do item e fiz uma observação ao E1 que agora a base é uma fração própria, isto é o numerador é menor que o denominador, com isso podemos dizer que a fração fica compreendida entre zero e um. Logo, teremos uma função decrescente. (Figura 88).

Figura 88 - Item E da primeira questão.

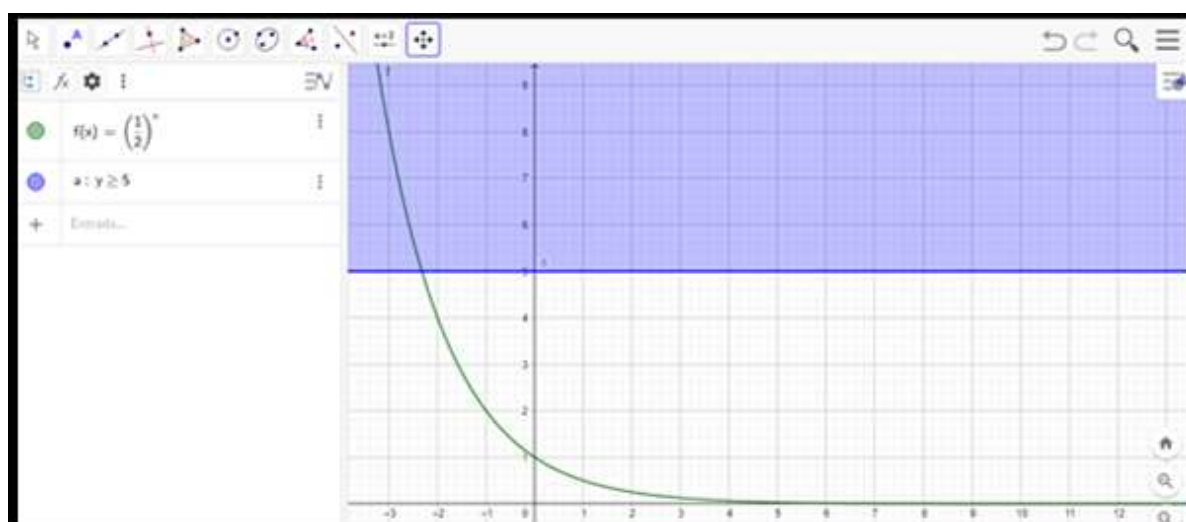


Fonte: próprio do autor

A leitura foi o seguinte: “Para a base maior que zero e menor que um, por exemplo $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 5$, o que representa graficamente ou algebricamente”. Nesta questão o E1 terá opções em resolver, poderá resolvê-lo graficamente ou algebricamente ou os dois se quiser.

A opção que o E1 fez foi demonstrar graficamente a função $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 5$ no geogebra. Então o E1 digitou em entrada a função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e em seguida pediu que digitasse $y \geq 5$. (Figura 89).

Figura 89 - y maior e igual a cinco



Fonte: próprio do autor

A representação gráfica foi atendida, porém pedi para E1 que desse a solução da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 5$. Perguntei:

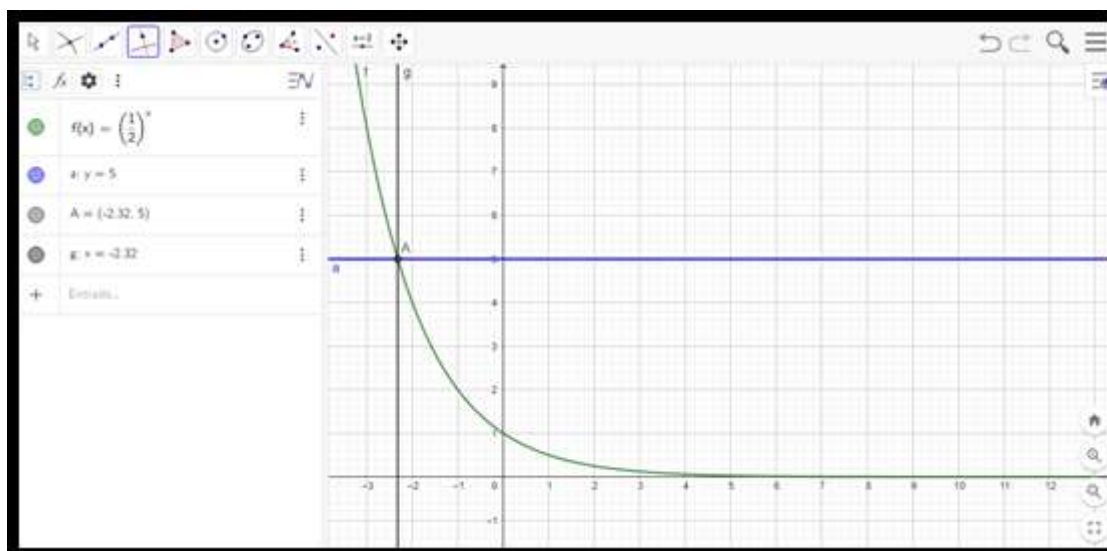
Pesquisador – Como faço para determinar a solução desta inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 5$?

E1 – Devemos primeiramente determinar o valor de x para $y = 5$.

Pesquisador – Isso, dessa forma você segue o que já foi feito anteriormente, você determina o ponto de interseção (ícone: interseção entre dois objetos) entre a função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e a reta $y = 5$, depois você usa o ícone ponto e reta para determinar o valor x do domínio.

E1 – Ok. (Figura 90)

Figura 90 Determinação do valor x



Fonte: próprio do autor

Dessa forma o E1 encontrou o valor de $x = -2,32$ e o Pesquisador perguntou:

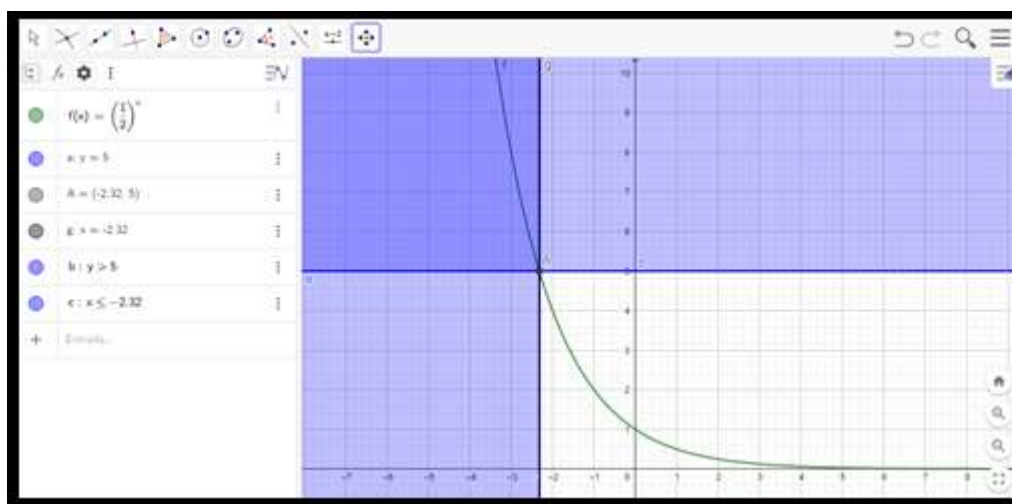
Pesquisador – Então a solução da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 5$ deverá ser números maiores ou iguais que x ou menores ou iguais a x ?

E1 – menores ou iguais a x .

De fato, o Pesquisador pediu para que o E1 digitasse em entrada $x \leq -2,32$. Observando-se o resultado no campo gráfico do geogebra obtemos a sobreposição das pinturas de $y \geq 5$ e $x \leq -2,32$ e que nesta sobreposição de pinturas continha o

gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Demonstrando dessa forma a solução da inequação. (Figura 91).

Figura 91 - Solução da inequação para $f(x)$



Fonte: Próprio do autor

12.2.1.3. Terceiro encontro do Experimento 1 (E1),

O terceiro encontro foi realizado no dia 27 de fevereiro de 2021 e teve uma duração de uma hora e quarenta e cinco minutos. Tivemos 8 momentos distintos.

No primeiro momento com duração de 20 minutos, fiz uma leitura da segunda atividade e começamos dizendo sobre a função inversa da exponencial e observamos que a tabela da segunda atividade corresponde ao inverso da primeira atividade. (Figura 92).

Figura 92 - Atividade 2 - Função Inversa

Atividade de logaritmo (Da função a Inequação)						
Dado uma tabela que apresenta dados que mostram o crescimento do número de células em função da quantidade de dias e usando o aplicativo geogebra faça uma representação gráfica da função INVERSA dos dados.						
Tabela 2 - Tabela do número de células em uma Função Geogebra						
Tempo (t)	0	1	2	3	4	5
Número de Célula (n)	1	2	4	8	16	32

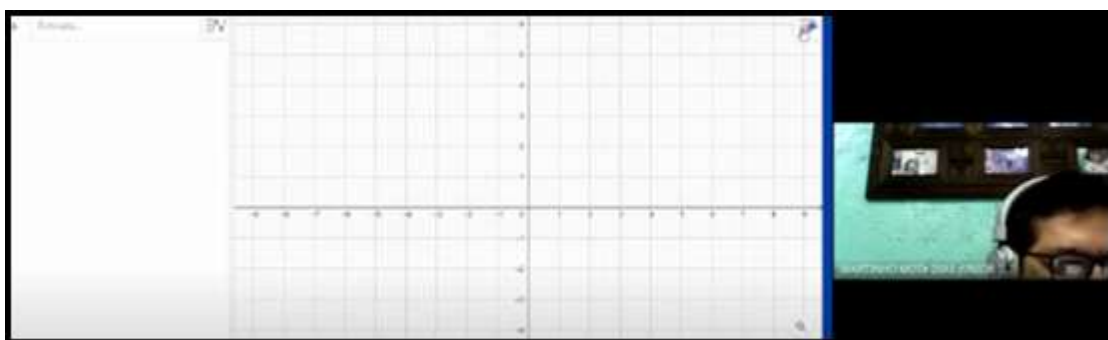
Fonte: Próprio do autor

E preenchemos como na primeira atividade a tabela do excel, mas desta vez a coluna A corresponderá aos valores de y (Tempo) e a coluna de B corresponderá

a coluna x (Número de células) da tabela. Após preenchermos a tabela do excel do geogebra plotaremos esses pontos na parte gráfica do geogebra.

Vamos abrir o geogebra e na parte gráfica devemos clicar no ícone cujo formato tem um triângulo sobre um círculo localizado à direita superior da tela. (Figura 93).

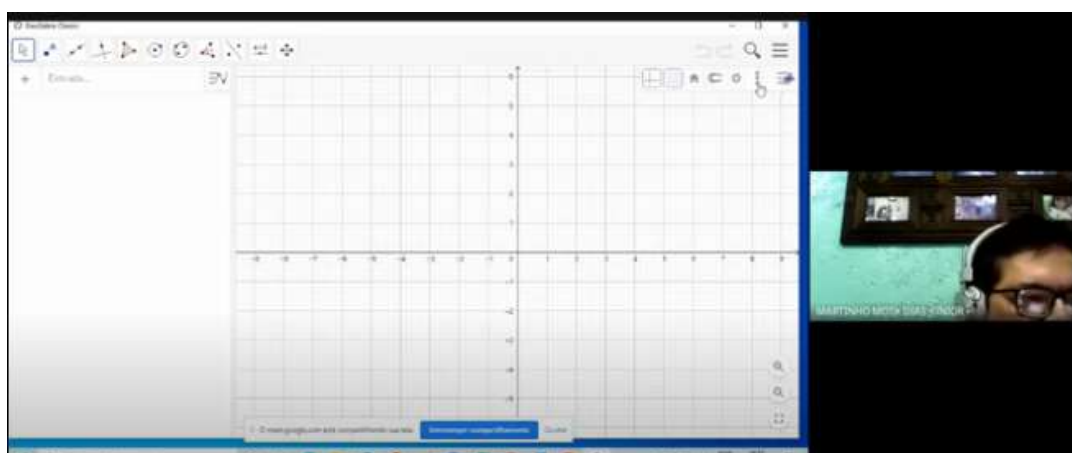
Figura 93 - criar tabela no Excel.



Fonte: Próprio do autor

Ao clicar abrirá uma nova janela, ao lado do ícone selecionado. (Figura 94).

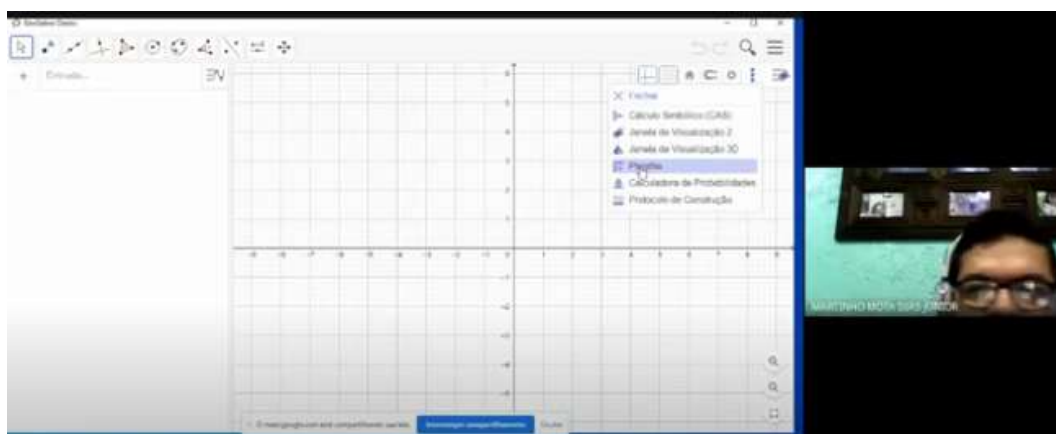
Figura 94 - opções de seleção



Fonte: Próprio do autor

Clique nesses três pontos, um debaixo do outro, selecione planilha. (Figura 95).

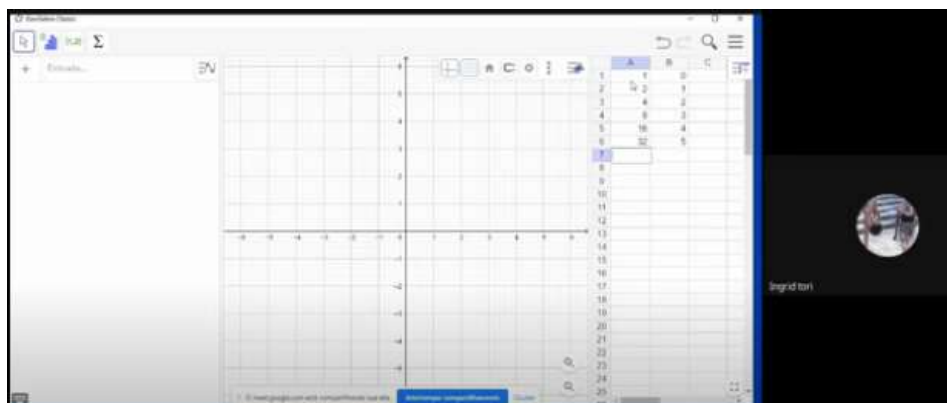
Figura 95 - Planilha



Fonte: Próprio do autor

Abrirá uma coluna em que aparecerá uma planilha do Excel, nela você digitará na coluna A os valores referente aos valores de Tempo e na coluna de B você digitará valores referente a coluna do Número de células da tabela. (Figura 96).

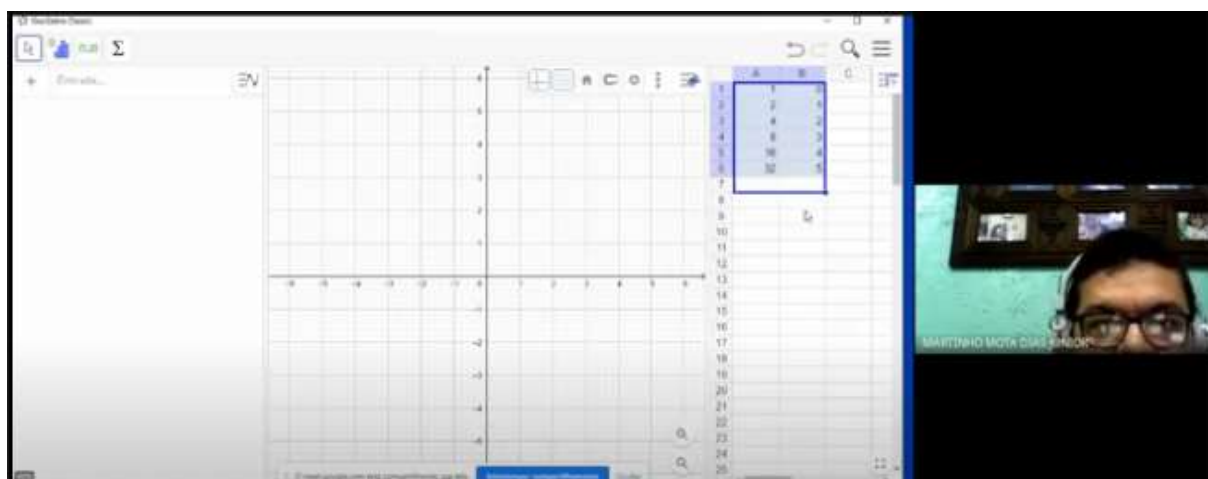
Figura 96 - Preenchimento da tabela



Fonte: Próprio do autor

Depois pedi que E1 selecionasse a tabela que preencheu. (Figura 97).

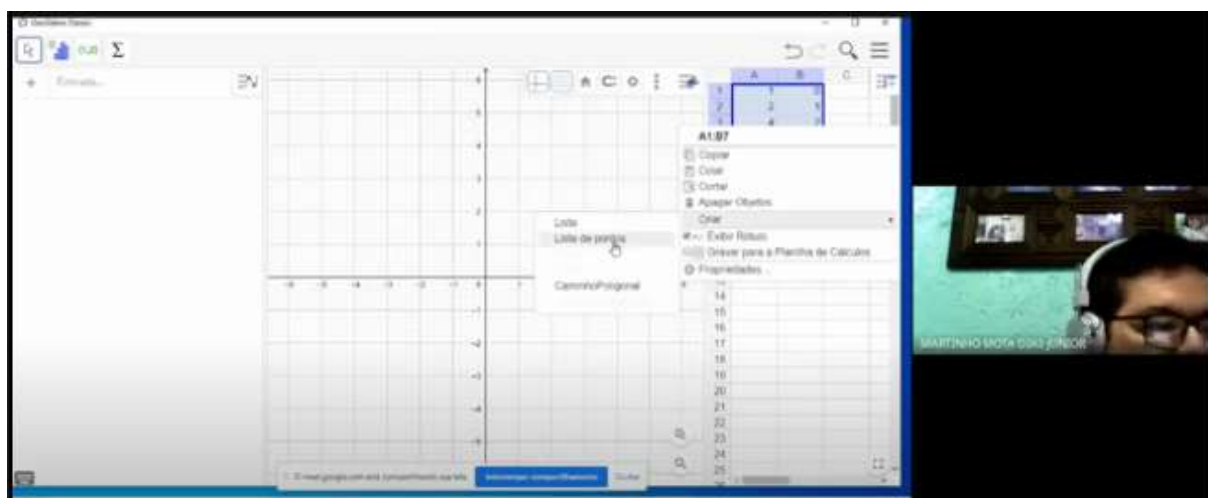
Figura 97 - Seleção da tabela



Fonte: Próprio do autor

Depois clique em cima da seleção com o botão esquerdo do mouse, aparecerá uma janela com algumas opções na qual você escolherá e irá clicar em “criar” aparecerá outra janela e você clica em “lista de pontos”. (Figura 98).

Figura 98 - Lista de pontos



Fonte: Próprio do autor

Depois da leitura da segunda atividade, fiz algumas perguntas ao E1.

Pesquisador – Você (E1) sabe o que é uma função inversa?

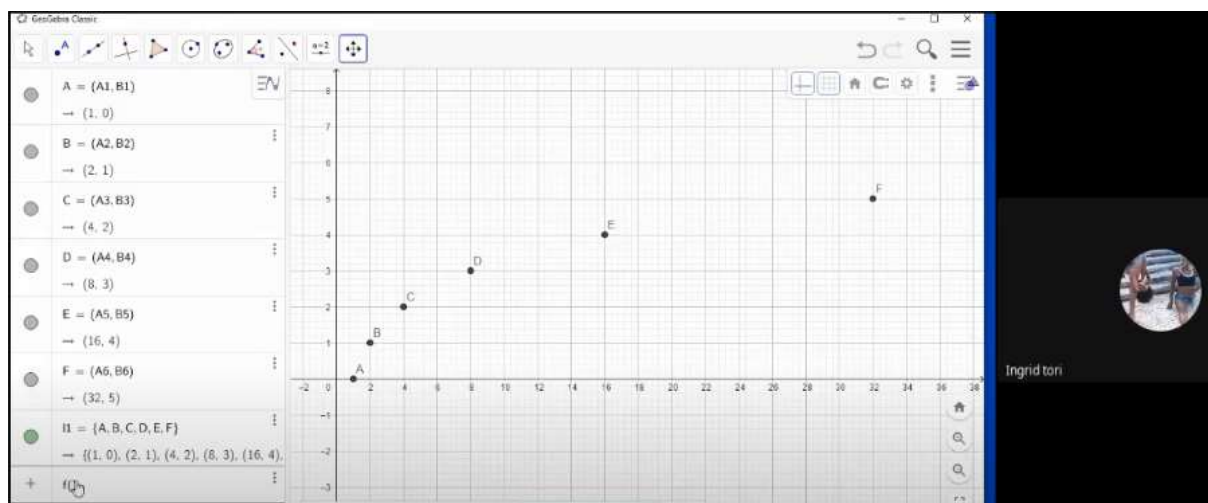
E1 – Não.

Pesquisador - A função exponencial possui uma função inversa? Você sabe qual é?

E1 – Não

Depois de clicar uma lista de pontos, aparecerá na parte gráfica do geogebra os pontos da tabela e na parte algébrica os respectivos pontos, denominados por letras maiúsculas seguido por suas coordenadas respectivas. (Figura 99).

Figura 99 - Segunda Atividade



Fonte: Próprio do autor

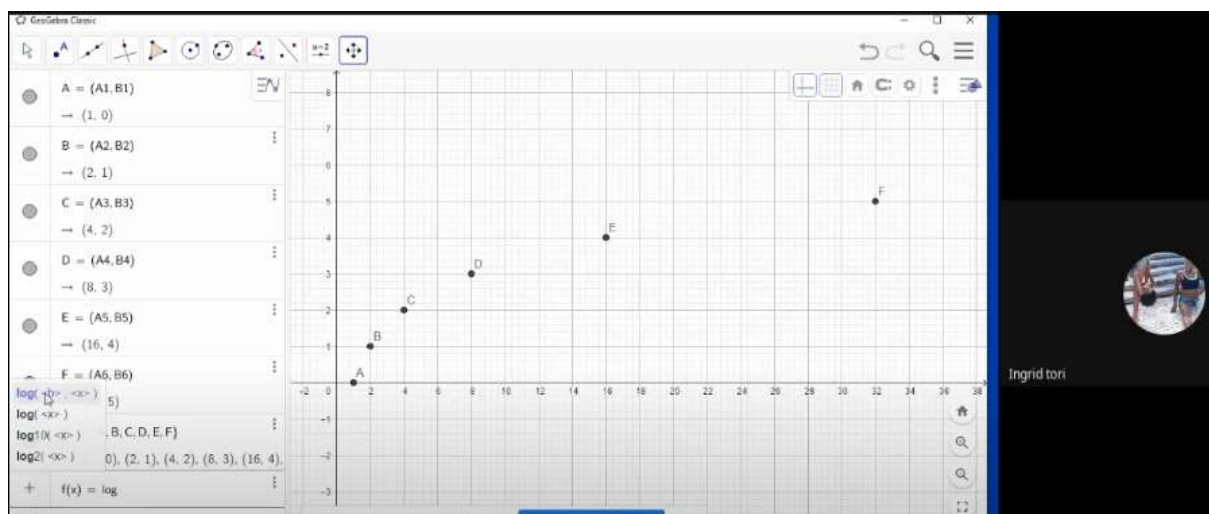
No segundo momento de aproximadamente vinte e cinco minutos fiz a inclusão do gráfico do logaritmo, determinamos valores de x dado y e vice versa, dado valores de x , determinamos y . E a resolução da primeira questão referente a segunda atividade.

Pesquisador - Qual a melhor função que se enquadra nos pontos dados? (Figura 99).

E1 – Exponencial

A resposta foi errada, porém ficou evidenciado através da indagação do estudante quando disse “qual é mesmo o nome daquela pra baixo?” que ele não se lembrava do nome da função. Aqui fica uma observação, pois o estudante não viu o conteúdo e só foi falado na atividade anterior. A partir daí pedi para o E1 escrever em “entrada” a palavra “loga” que imediatamente abre uma janela com opções e pedi para que o estudante escolhesse a primeira alternativa. (Figura 100).

Figura 100 - função Logaritmo



Fonte: Próprio do autor

Pesquisador - Sobre o valor , você sabe qual é a base do logaritmo?

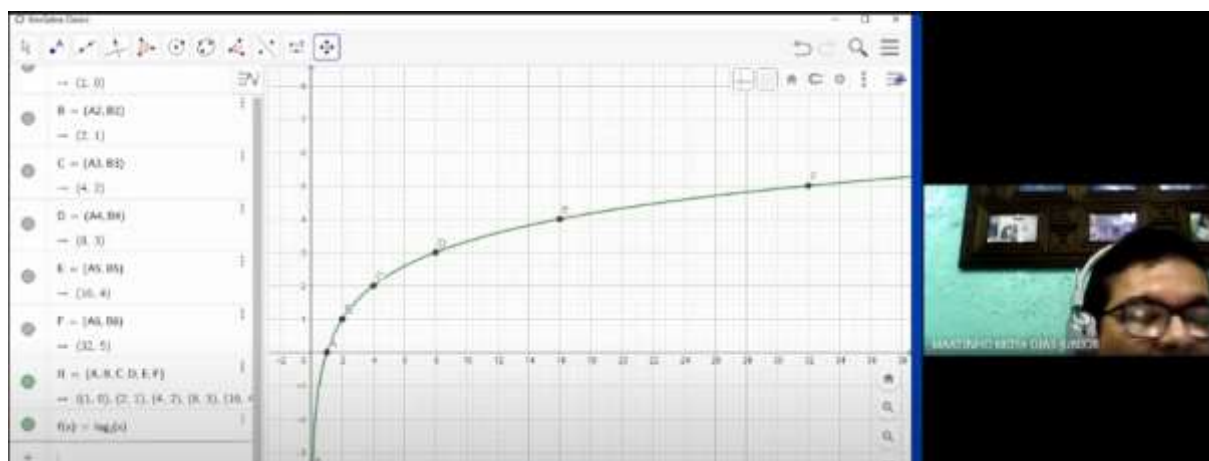
E1 - Sim, é dois.

Pesquisador - Você se lembra da base do logaritmo?”.

E1 - Sim.

O estudante, então, preencheu o $\log(2, x)$ e verificou graficamente que todos os pontos foram contemplados. (Figura 101).

Figura 101 Plotagem do gráfico

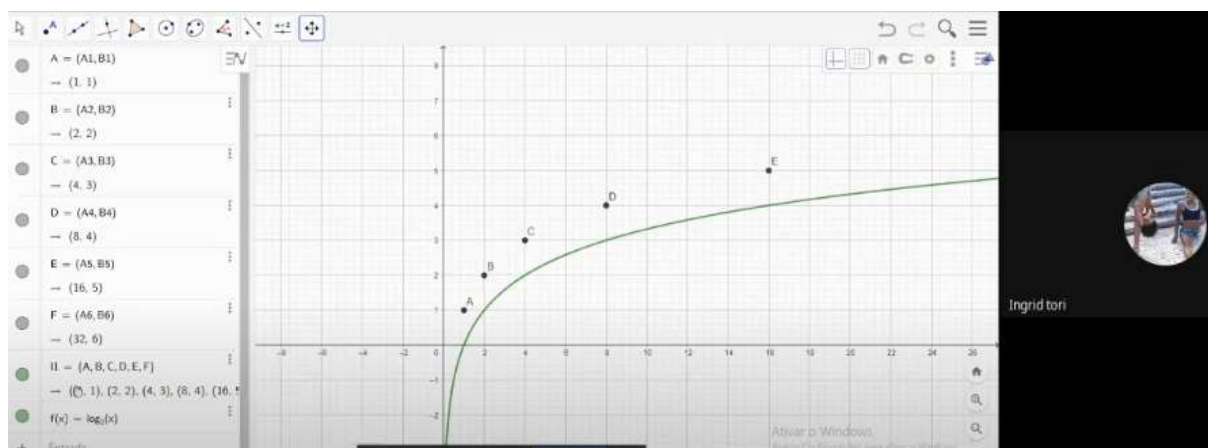


Fonte: Próprio do autor

Depois fiz um comentário sobre o crescimento do logaritmo usando o gráfico do geogebra.

Depois o E1 interrompeu o andamento da atividade, dizendo que o seu resultado não “batia” com a do Pesquisador. Dessa forma fomos verificar o que tinha acontecido. (Figura 102).

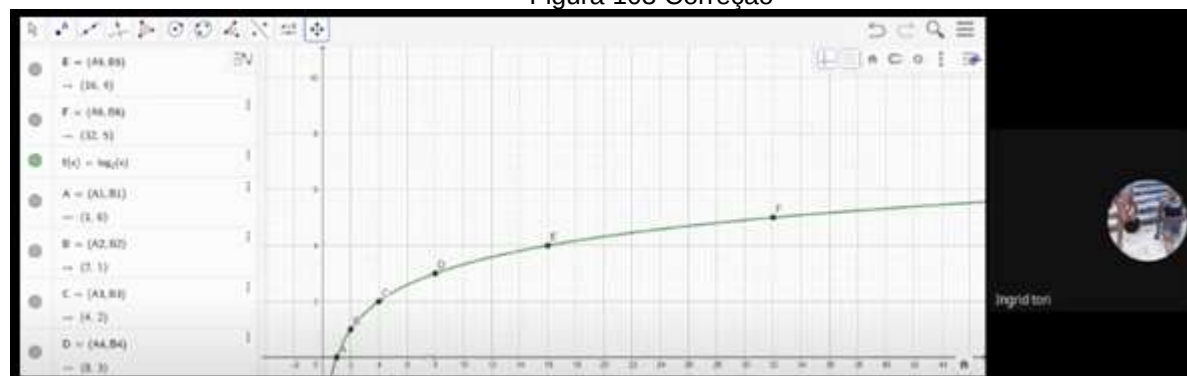
Figura 102 Erro na plotagem dos pontos



Fonte: Próprio do autor

Verificou-se que o estudante digitou os pontos incorretamente na tabela do excel e com a ajuda do Pesquisador, corrigimos os pontos finalizando a plotagem dos pontos da tabela. (Figura 103).

Figura 103 Correção



Fonte: Próprio do autor

Depois fomos resolver a primeira questão da segunda atividade, fiz a leitura da questão para E1 que correspondia voce calcular o valores de $\log_2 x = 1$; $\log_2 x = 2$; $\log_2 x = 3$; $\log_2 x = 4$ e $\log_2 x = 5$. ou seja os valores de x dos logaritmos, o chamado logaritmando “x” para y iguais a 1, 2, 3, 4 e 5.

Pesquisador - Qual o valor de “x” (logaritmando) na equação $\log_2 x = 1$?

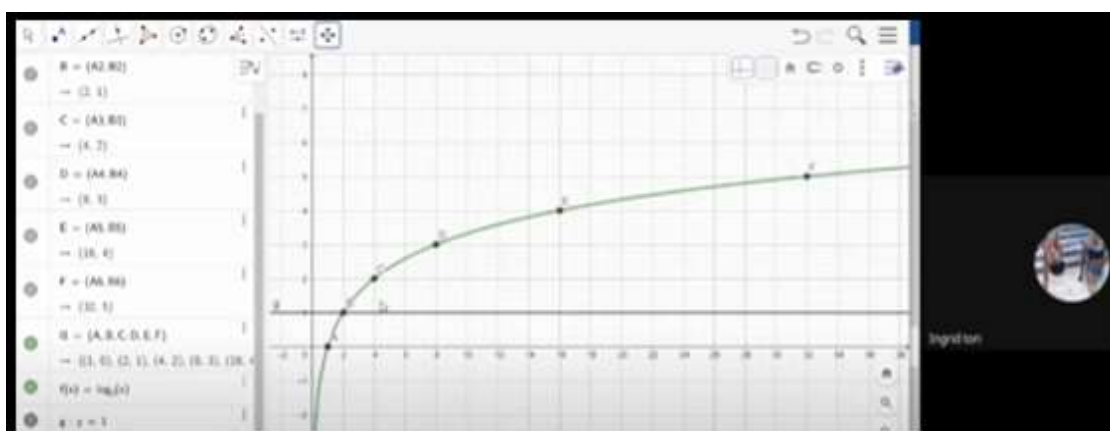
E1 - Dois.

Fiz para o E1, como determinar o valor de x usando o geogebra, visualizando no gráfico a resposta. Falei que $\log_2 x$ é o $f(x)$ que é igual a “ y ”, então escrevi em “entrada” $y = 1$, e no gráfico do geogebra apareceu uma reta paralela ao eixo “ x ” e perguntei:

Pesquisador - O que aconteceu no gráfico?

E1 - Foi “nada, só apareceu uma linha”. (Figura 104).

Figura 104- Valor de y



Fonte: Próprio do autor

Assim retronquei.

Pesquisador - Então não é nada, é uma linha e essa linha passa pelo ponto $y = 1$, tudo bem?

E1 - Sim.

Pesquisador - Então ele que saber na verdade o valor de x , assim qual o valor de “ x ” cujo log de 2 é igual a um? vai ser quanto?

E1 – “dois”, facinho.

Depois mostrei no geogebra outra maneira mais fácil ainda (minha opinião) de se calcular a mesma questão ($\log_2 x$), usando na parte algébrica que é possível determinar a resposta escrevendo em “Entrada” o seguinte: Solução ($f(x) = 1$) e dá “Enter”. (Figura 105).

Figura 105 - Soluções



Fonte: Próprio do autor

Pesquisador - Olha a resposta, dá quanto?

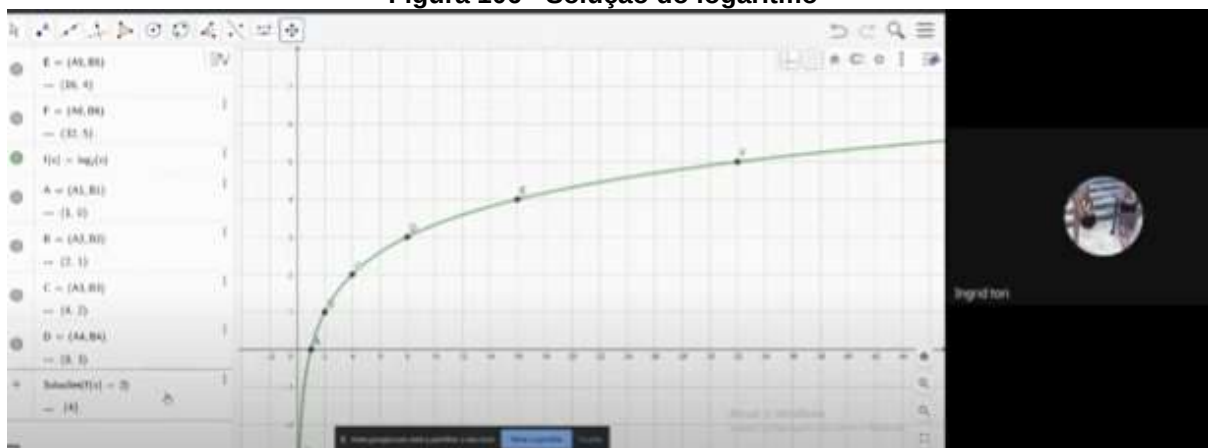
E1 – Dois, hum rum

Em seguida pedi para que E1 fizesse o segundo item da primeira questão, $\log_2 x = 2$ e compartilhasse.

Percebi uma demora na resolução, tentou resolver algebricamente, digitando erroneamente, dessa forma eu intervir falando a maneira correta. “não você tem que digitar – solução.

O E1 digitou solução, mas não concluir a operação, ajudei-o novamente, falando o seu preenchimento correto. Fez o preenchimento e perguntei sobre a resposta. (Figura 106).

Figura 106 - Solução do logaritmo



Fonte: Próprio do autor

Pesquisador – Qual é a resposta?

E1 – “quatro”

Depois mostrei novamente o mesmo resultado do item ($\log_2 x = 2$) na parte gráfica do geogebra e perguntei

Pesquisador - Manjou ai?

E1 – “Hã ram”

Pesquisador - Falei “vamos pra próxima”

E1 – Bora. É pra fazer a mesma coisa?

Pesquisador – Exatamente, mas não precisa copiar novamente. É só mudar aqui oh! Veja lá no exercício. $\log_2 x = 4$. (Figura 107).

Figura 107 - Solução do logaritmo para $y = 4$.



Fonte: Próprio do autor

O estudante reescreveu solução ($f(x) = 4$) e respondeu erroneamente quando o Pesquisador perguntou.

Pesquisador – Qual o resultado?

E1 – Respondeu “é um”.

Automaticamente retrunqueei a sua resposta refazendo a mesma pergunta, porém com uma entonação de voz com espanto.

Pesquisador – quatro igual a um? Não tem alguma coisa errada ai?.

Assim o estudante percebeu o erro de sua resposta, e ao digitar o enter a resposta alterou e respondeu com certo espanto. (Figura108).

E1 – hã não, dezesseis!

Figura 108 - Solução para o $y=4$



Fonte: Próprio do autor

Pulamos um item, mas ao perceber isso voltamos e disse:

Pesquisador – É só “botar” o três no lugar do quatro.

E1 – oito.

Foi automático a resposta do estudante ao digitar 3 no lugar do 4 e dá enter. Depois o estudante colocou 5 e respondeu “que dá 32”. Dessa forma confirmei as respostas do estudante repetindo em voz alto os valores de 3, 4 e 5 e sinalizando as respostas na tela do computador no campo gráfico do geogebra, e conjuntamente o estudante confirmando o resultado respondendo “16, 32, sim!”.

No terceiro momento durou aproximadamente 25 minutos, fiz a leitura da segunda questão (Figura 109) para o estudante e lhe fez uma pergunta.

Figura 109- Segunda questão da 2ª atividade

2) Os valores de $\log_2 1 = ?$, $\log_2 2 = ?$, $\log_2 4 = ?$, $\log_2 8 = ?$, $\log_2 16 = ?$ e $\log_2 32 = ?$.

Fonte: Próprio do autor

Pesquisador – Você percebe a diferença entre a primeira e a segunda questão?

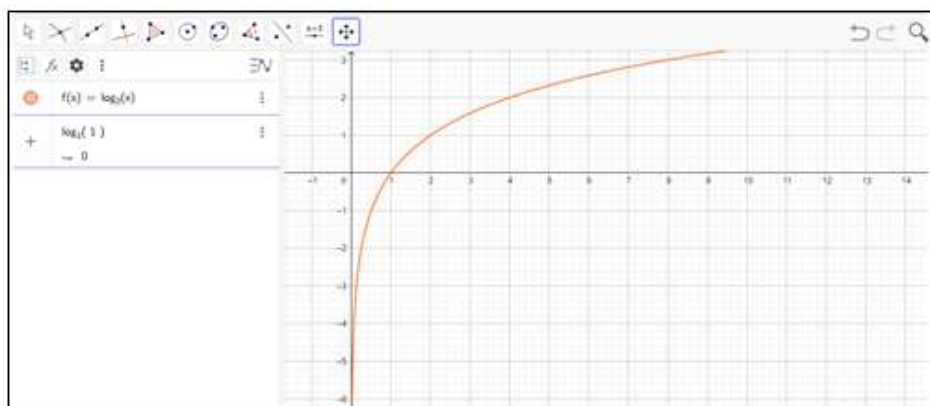
E1 – é o x.

Pesquisador – Exatamente, na primeira questão aparece o “x” e na segunda não. Certo?

E1 – certo.

Pesquisador – O que voce vai fazer agora é calcular $\log_2 1 = ?$ É igual a quanto? Vamos lá na função no gráfico do geogebra, escreve em entrada $\log_2 1$ e dá o enter.(Figura 110).

Figura 110 -Solução da segunda questão da 2ª atividade.



Fonte: Próprio do autor

Dá quanto?

E1 – Zero

Pesquisador – Porque o x é um, veja no gráfico do geogebra, agora vamos para o x igual a 2 que é o segundo item. $\log_2 2$.

Ao pedi para o E1 calcular o $\log_2 2$ ele fez da seguinte forma, digitou em entrada o Log . (Figura 111).

Figura 111 - Um erro corrigido



Fonte: Próprio do autor

O Pesquisador interrompeu rapidamente o E1, pois o Pesquisador esperava que o estudante fosse resolver, simplesmente, atribuindo valores para $f(x)$ e o Pesquisador perguntou:

Pesquisador – Não , voce está fazendo confusão está fazendo trabalho dobrado basta voce trocar tirar o um e colocar 2 na função. Dá quanto?

E1 – Hã tá. dá um. Respondeu com um sentimento de alívio.

Pesquisador – E o $\log_2 4$?

E1 – Dois.

O Pesquisador sempre confrontando a resposta do E1 no gráfico do geogebra.

Pesquisador - Qual o próximo número?

E1 – É 8 e a resposta é 3 .

Pesquisador – Por que é 3 voce olhou no gráfico?

E1 – Sim, olhei no gráfico...

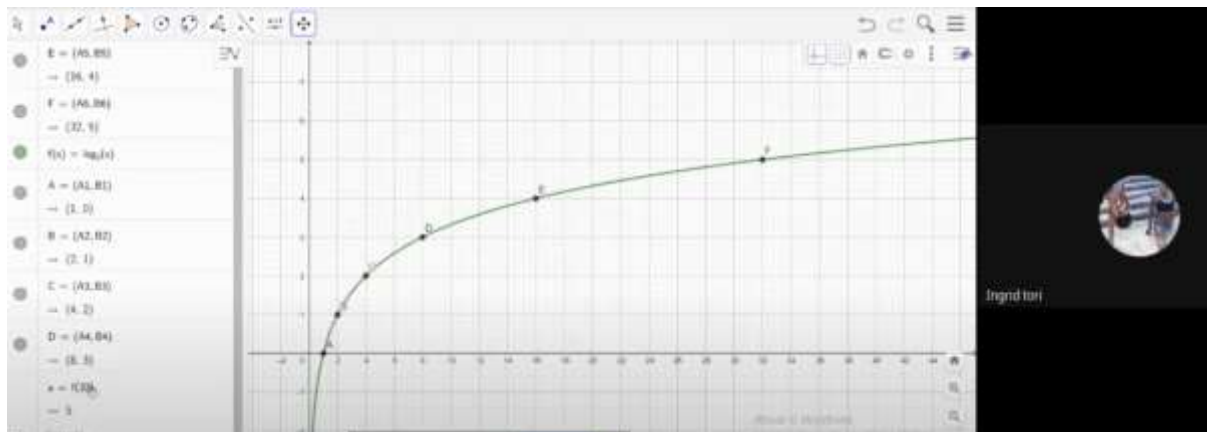
Pesquisador – Próximo é 16.

E1 – Sim e a resposta é 4.

Pesquisador – O último é 32. Dá quanto?

E1 – Cinco. (Figura 112).

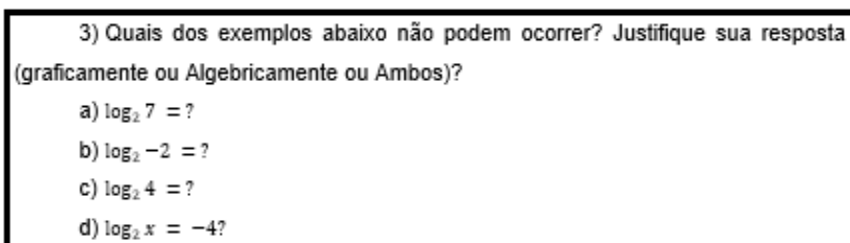
Figura 112 - Resposta do E1



onte: Próprio do autor

No quarto momento teve uma duração de quinze minutos, fiz uma breve leitura da terceira questão para o E1 e nesta questão é pedido que o estudante justifique a sua resposta graficamente ou algebricamente ou os dois se quiser, dessa forma o Pesquisador questionou. (Figura 113).

Figura 113 - terceira questão da 2ª atividade



Fonte: Próprio do autor

Pesquisador – Não pode ocorrer o logaritmo $\log_2 7 = ?$, eu posso calcular?

E1 – Sim, bota $f(7)$.

Pesquisador – Muito bem!, coloca $f(7)$ no lugar de 32?

E1 – Sim e dá 2,81.

O Pesquisador depois explica no gráfico do geogebra a solução do E1, usando o seguinte procedimento, pede para que o E1 vá em entrada, na parte algebrica do geogebra e digite $x = 7$. O Pesquisador diz.

Pesquisador – Olha o que aparece, apareceu uma reta ?

E1 – Sim.

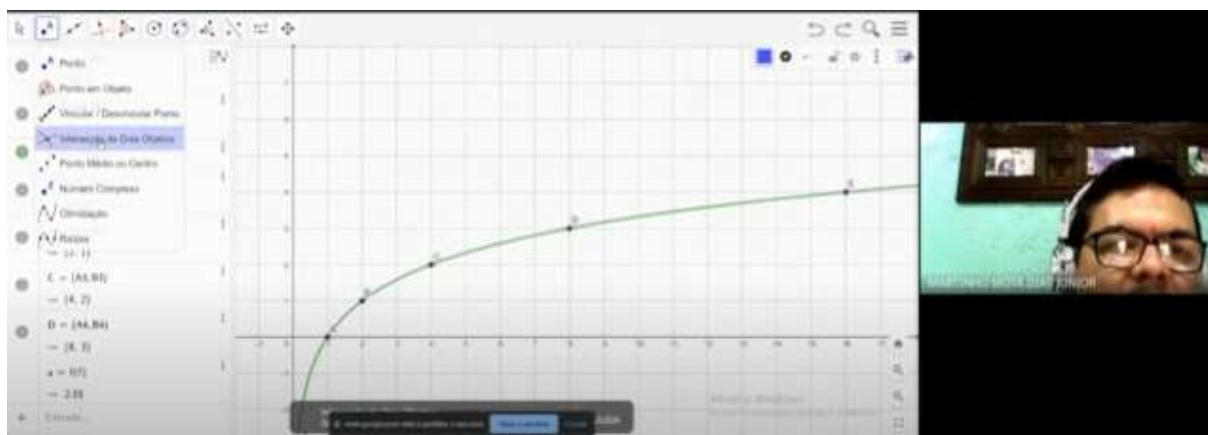
Então aparece uma reta passando pelo número 7 da abscissa e cortando o gráfico da função logarítmica $f(x) = \log_2 x$ da atividade 2, em seguida o Pesquisador pede para o aluno que selecione um ponto.

Pesquisador – Vá no ícone ponto A. Lá em cima, lá em cima.

E1 – Ponto A? Aqui?

Pesquisador - Sim, observe que abriu uma janela, clica em interseção de dois pontos. (Figura 114).

Figura 114 interseção entre dois objetos



Fonte: Próprio do autor

O Pesquisador então pede para que o E1 vá ao gráfico selecionando-o e em seguida clicando-se na reta, dessa forma aparecerá o ponto G de interseção. (Figura 115).

Figura 115 - Interseção entre os objetos



Fonte: Próprio do autor

O Pesquisador diz para o E1:

Pesquisador - Esse ponto G é o ponto de encontro entre a reta e o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$, é o ponto de encontro.

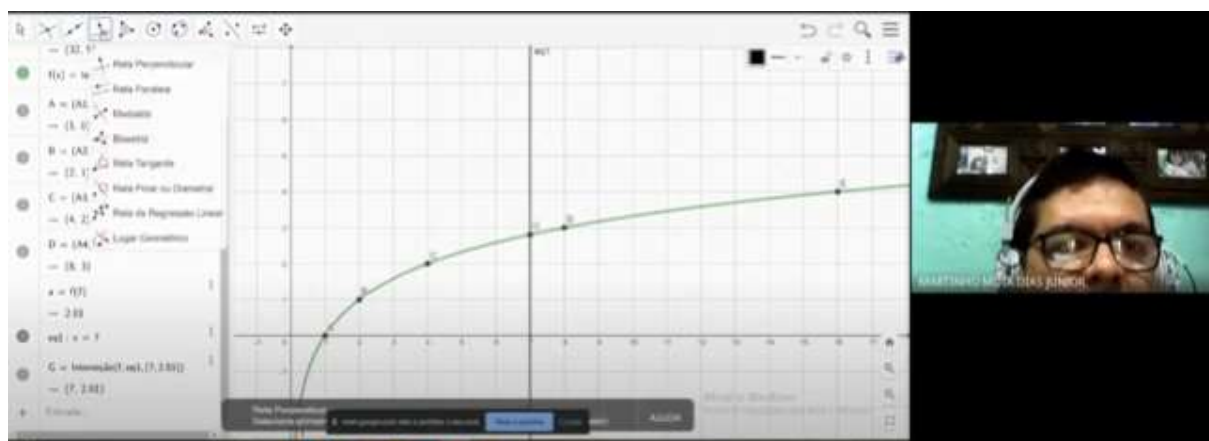
E1 - “Bem! fica mais ou menos onde fica esse 2,81”.

Pesquisador – Vou explicar agora, como você achou esse ponto?

E1 – Sim.

Pesquisador – Agora você vem aqui no ícone “reta perpendicular” localizado em cima da tela é o quarto ícone da esquerda para a direita, clique, vai aparecer uma janela com outras opções, clique no ícone “reta perpendicular”. (Figura 116).

Figura 116 - Reta perpendicular



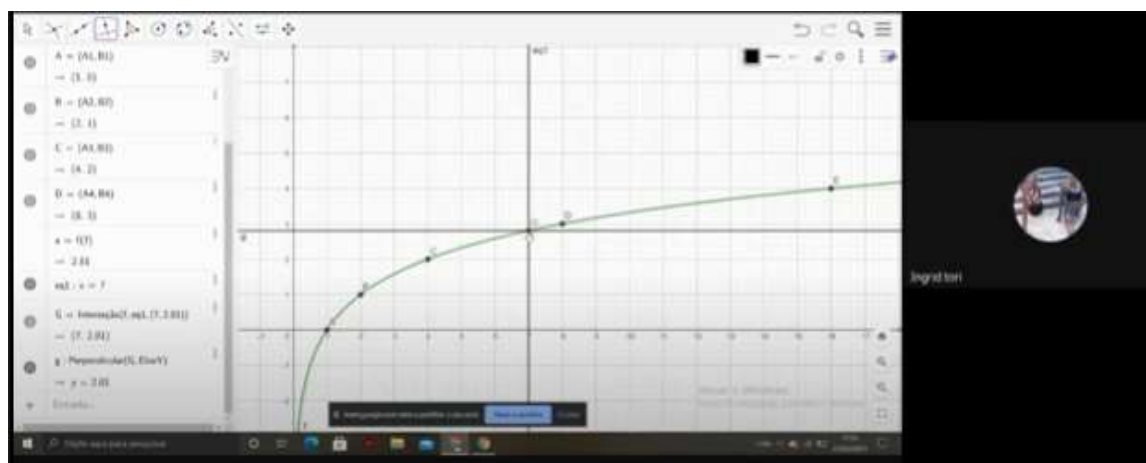
Fonte: Próprio do autor

Depois voce deverá selecionar o ponto G e o eixo y aparecerá uma reta perpendicular passando pelo ponto G e o eixo. E o Pesquisador diz:

Pesquisador – Olha ai. Essa reta ai passa próximo de três exatamente no ponto 2,81. Ai voce pode dizer que ai é o ponto procurado. Entendeu?

E1 – Sim. (Figura 117).

Figura 117 - valor 2,81



Fonte: Próprio do autor

Voltamos a 3ª questão da 2ª atividade no item b, e o Pesquisador pergunta.

Pesquisador – Letra b: é possível calcular o $\log_2 - 2 = ?$

E1 – Não sei.

Vamos ao gráfico, o Pesquisador pergunta para o E1:

Pesquisador - Aonde está o valor de $x = -2$ no gráfico do geogebra ?

Não obtemos resposta e depois o Pesquisador digita em entrada $x = -2$, aparece um perpendicular passando pelo ponto $x = -2$ e indaga ao E1.

Pesquisador – Tocou no gráfico da função a reta?

E1 – Não.

Pesquisador – Significa dizer o que?

E1 – Ele não é?

Pesquisador – O que posso concluir? Volte no gráfico. Quando o x é negativo eu posso calcular?

E1 – Não (respondeu com pouca segurança).

Daí o Pesquisador começou a mostrar outros exemplos de valores para x negativos e pergunta:

Pesquisador - As perpendiculares nesses pontos tocavam o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$?

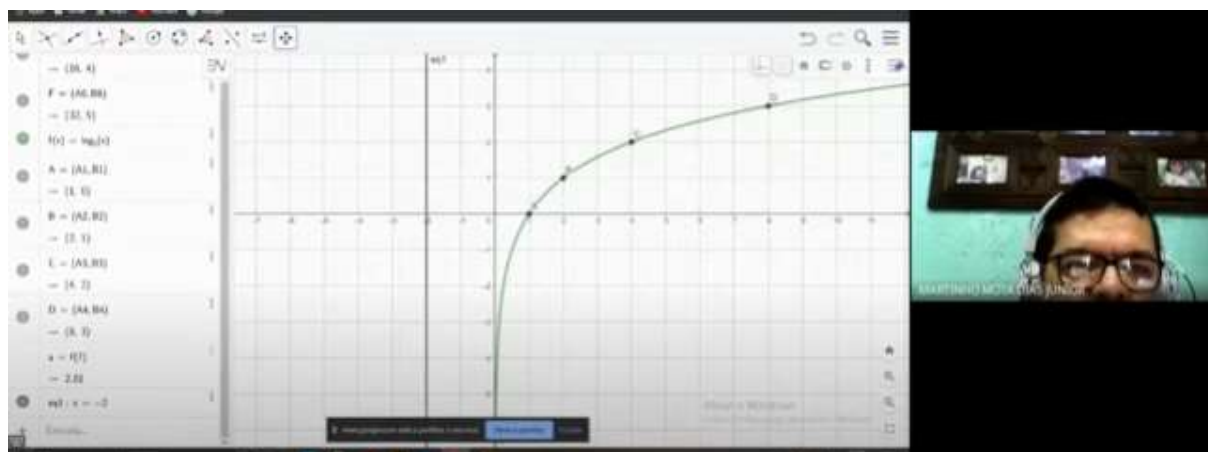
E1 - Não.

Pesquisador – Então o que posso concluir?

O estudante não conseguiu formular sua resposta e o Pesquisador concluiu para o E1.

Pesquisador - Não existe logaritmo para x negativo, pois as perpendiculares nesse ponto não tocam a função $f(x) = \log_2 x$.(Figura 118).

Figura 118 Valores de x negativo



Fonte: Próprio do autor

Depois para o item c da terceira questão da 2ª atividade temos que calcular o $\log_2 4$ e o Pesquisador pergunta.

Pesquisador – Posso fazer esse cálculo ($\log_2 4$)?

E1 – Pode.

Pesquisador – Me mostra no gráfico!

Assim o E1 mostra ao Pesquisador movendo o mouse, primeiramente na direção de $x = 4$ e seguindo uma reta perpendicular ao ponto 4 e tocando no gráfico da função, mudando de direção, indo ao encontro do valor $y = 2$. Respondendo ao Pesquisador com segurança.

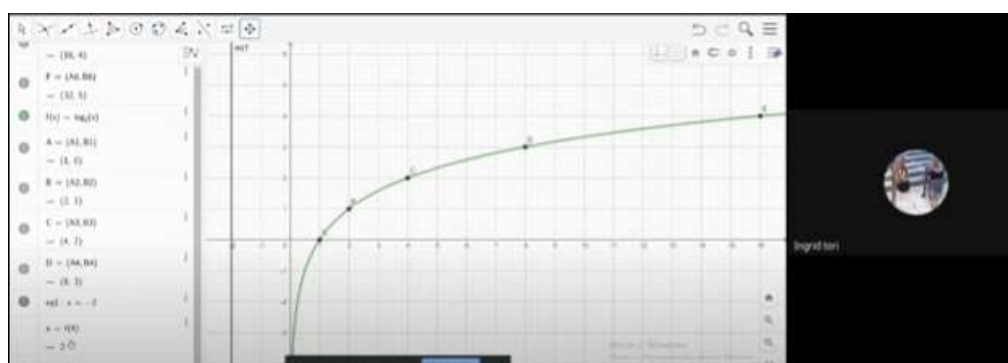
E1 – Dois.

O Pesquisador satisfeito com o resultado bate palmas no intuito de incentivar o acerto do E1, que responde com um sorriso tímido(audio).

Pesquisador – Isso... isso na parte gráfica e na parte algébrica? O que voce coloca?

O E1 substitui em $f(x)$ o valor de x por 4 e clica em enter obtendo assim o valor de 2. Contente o Pesquisador bate palmas novamente. (Figura 119).

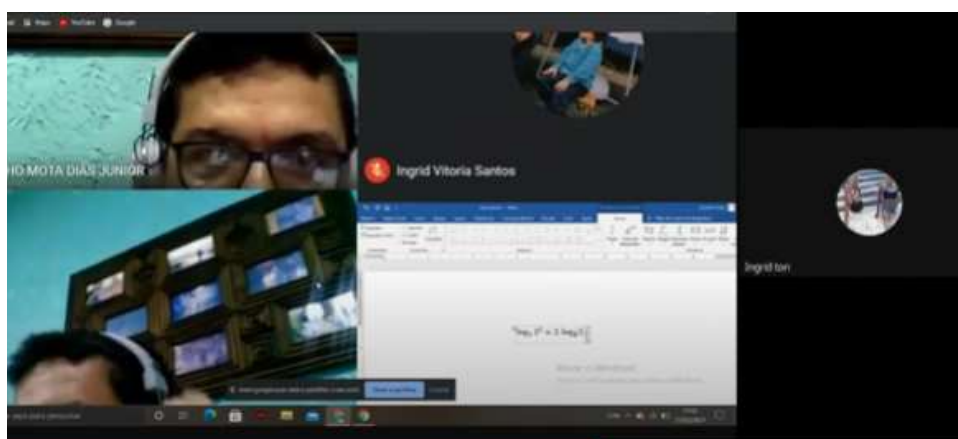
Figura 119 - Cálculo de $f(x)$, para $x = 4$



Fonte: Próprio do autor

O Pesquisador, depois que o E1 resolveu graficamente e algebricamente no geogebra o item c da terceira questão, resolve também mostrar para o E1 como seria feito a questão manualmente sem o auxílio do geogebra. (Figura 120).

Figura 120 – Cálculo algébrico



Fonte: Próprio do autor

O Pesquisador utilizou o word para mostrar a resolução para o E1 e passo a passo fez o desenvolvimento da questão $\log_2 4$.

Primeiramente fatora o valor de 4 e substitui o número 4 por sua fatoraço. (Figura 121).

Figura 121 - Resolução algébrica - Fatoração

$$\begin{aligned} \log_2 4 &= y \\ \text{Fatora-se o } 4 &= 2 \cdot 2 = 2^2 \\ \log_2 2^2 &= y \end{aligned}$$

Fonte: Próprio do autor

E, em seguida o Pesquisador fala da propriedade de potência do logaritmo. (Figura 122).

Figura 122 - Resolução - propriedade do Logaritmo

$$\begin{aligned} 2 \cdot \log_2 2 &= y \\ 2 \cdot 1 &= y \\ 2 &= y \end{aligned}$$

Fonte: Próprio do autor

Chegando ao mesmo resultado obtido pelo E1 em que utilizou-se o geogebra.

Depois partimos para o item d da terceira questão.

Pesquisador – O $\log_2 x = -4$ eu posso fazer isso? Vai lá no gráfico. Verifica lá?

E1 – Acho que não dá.

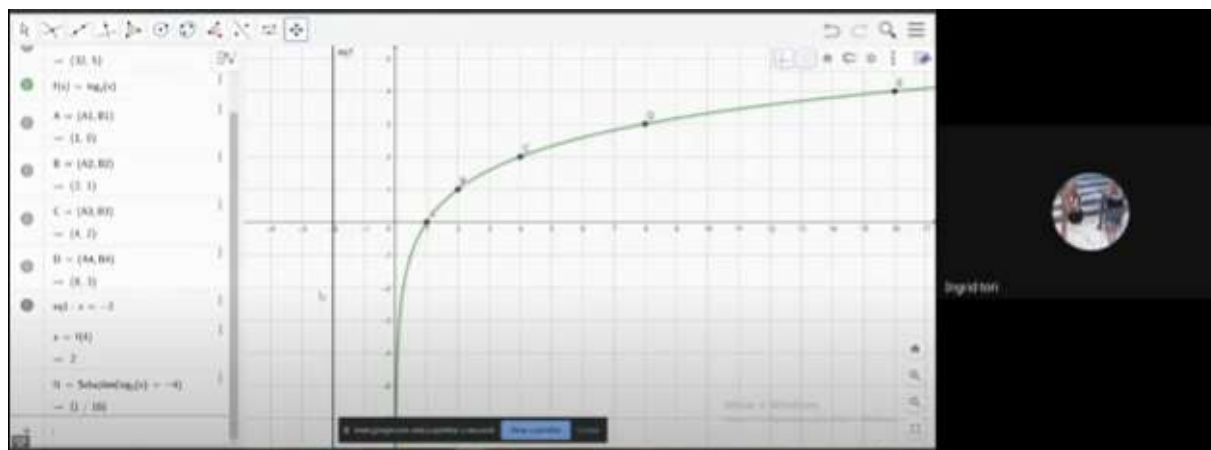
O E1 a priori diz que não dá para calcular e o Pesquisador insiste no seu questionamento pedindo para que o E1 observe no gráfico a solução da questão. Então o E1 vai em entrada e digita $\log<2,x>$ e é interrompido pelo Pesquisador que diz:

Pesquisador - Não é bem por aí

E pede para o E1 digitar em entrada Soluções($\log <2,x> = -4$) depois dá enter. E diz.

Pesquisador – Olha só a resposta? Qual é a resposta?(Figura 123).

Figura 123 - Soluções



Fonte: Próprio do autor

E1 – Um barra 16 ($\frac{1}{16}$).

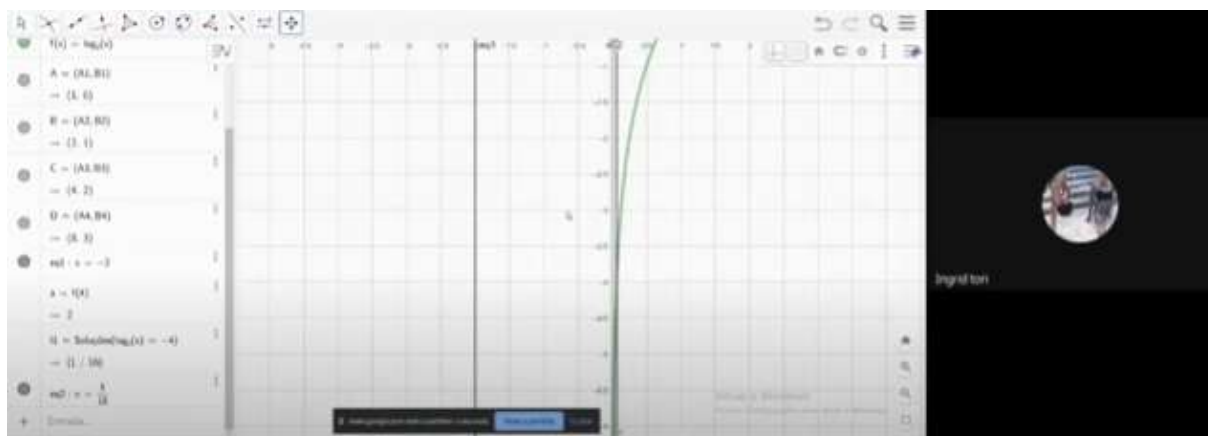
Pesquisador – Isso. Na verdade é um sobre dezesseis. Uma fração certo? E aonde está esse ponto no gráfico.

E1 – Certo.

O Pesquisador pede para o E1 digitar em entrada o seguinte: $x = \frac{1}{16}$ e clicar no enter e diz.

Pesquisador – Veja o resultado no gráfico. (Figura 124).

Figura 124 - solução para $x = 1/16$



Fonte: Próprio do autor

Pesquisador – Você está vendo essas duas linhas?

E1 – Sim.

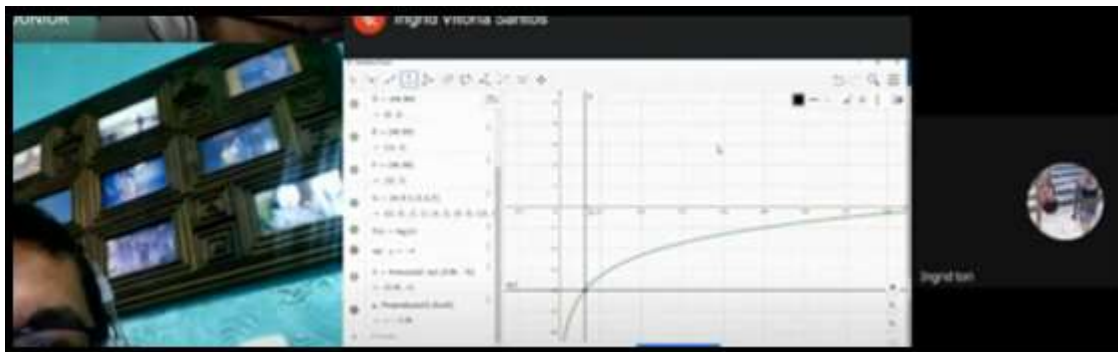
Pesquisador – Veja onde a linha toca no eixo x, está entre 0 e 0,5, entendeu? É exatamente $\frac{1}{16}$.

E1 – Hum rum...

O Pesquisador mostrar ao E1 outra forma de obter a mesma resposta no geogebra, utilizando-se para isso $y = -4$ e utilizando-se o ícone “intersecção entre dois objetos”, dessa forma ele determina o ponto de intersecção e em seguida no ícone “ponto e reta”, seleciona o ponto achado e o eixo x, dessa forma o E1 verifica

por onde passou a reta no eixo x e no ícone “ponto” o Pesquisador determina o mesmo ponto calculado anteriormente. (Figura 125).

Figura 125 - ponto e reta



Fonte: Próprio do autor

Dessa forma o Pesquisador mostra para o E1 na parte algébrica do geogebra o resultado obtido, que deu $x = 0,06$ que é exatamente $x = 1/16$.

Pesquisador – Entendeu?

E1 – Sim.

No quinto momento tivemos 5 minutos de apresentação e fiz uma leitura da quarta questão da 2ª atividade que diz “ usando o geogebra como posso determinar o $\log_2 5$?”. O Pesquisador pede para que o E1 faça a questão. E diz:

Pesquisador – Faça esse exercício, pois já seria uma repetição de outros exercícios que resolvemos anteriormente.

E1 – Pesquisador eu poderia fazer aqui em cima dessa aqui.

O E1 se referia a solução que estava digitado em entrada, quis dizer que queria substituir os valores por essa nova questão. (Figura 126).

Figura 126 Substituição



Fonte: Próprio do autor

O Pesquisador concordou com a solução do E1 lhe dizendo:

Pesquisador - Isso, muito bem.

Mas, ao preencher em soluções com a nova questão o E1 não soube fazer, pois colocou 5 como se fosse a base do logaritmo e também o Pesquisador demorou um pouco pra descobrir o erro. A este erro o Pesquisador considerou o fato do cansaço dos dois (Pesquisador e E1) e o Pesquisador sugeriu fazer a mesma questão de uma outra forma.

Usando-se em entrada $x = 5$, apareceu uma reta paralela a y e passando pelo ponto $x = 5$, depois usando o ícone “interseção de dois objetos”, determinou-se um ponto G e em seguida usou o ícone “ponto e reta”, dessa forma determinou-se no eixo y o valor do $\log_2 5$. (Figura 127).

Figura 127 - o valor de log5 na base 2.



Fonte: Próprio do autor

Dando um valor aproximado de 2,32. E o Pesquisador perguntou

Pesquisador - Manjou aí?

E1 – Sim.

No sexto momento resolvemos a quinta questão da 2ª atividade em aproximadamente 5 minutos, fiz uma leitura da questão que diz: “como posso representar graficamente no geogebra a expressão $\log_2 x > 3$ e o Pesquisador perguntou ao E1.

Pesquisador – Voce se lembra como a gente faz?

E1 – Hum rum...

Pesquisador - Quem é esse aqui: $\log_2 x$?

E1 – 2,33

Pesquisador – Não não . não tem nada haver com esse número.

E1 – Não sei o que falei..

Daí o Pesquisador existiu na pergunta.

Pesquisador - Quem é o $\log_2 x$?

O Pesquisador fez essa pergunta para o estudante, na esperança em que o E1 respondesse que seria o y .

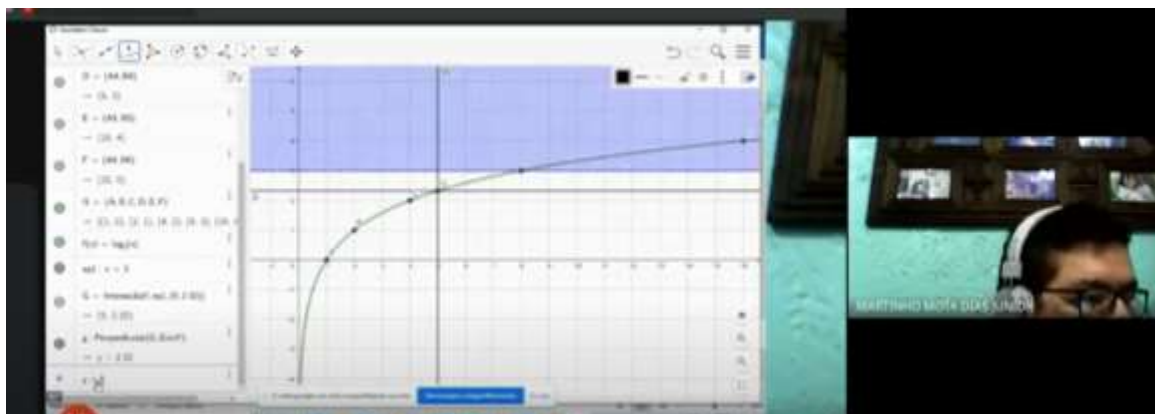
E1 – Não sei.

Infelizmente o E1 não conseguiu responder a essa pergunta e a expectativa do Pesquisador não foi satisfeita.

Dessa forma o Pesquisador revelou a resposta dizendo que o $\log_2 x$ é o y , é a função $f(x)$ e que está função tem que ser maior que três. E que a sua

representação gráfica no geogebra seria voce digitar em entrada $y > 3$ em que aparecia uma área hachurada na parte gráfica do geogebra. (Figura 128).

Figura 128 - Área hachurada



Fonte: Próprio do autor

Pesquisador – Se lembra que a gente já fez isso?

E1 – Na aula passada.

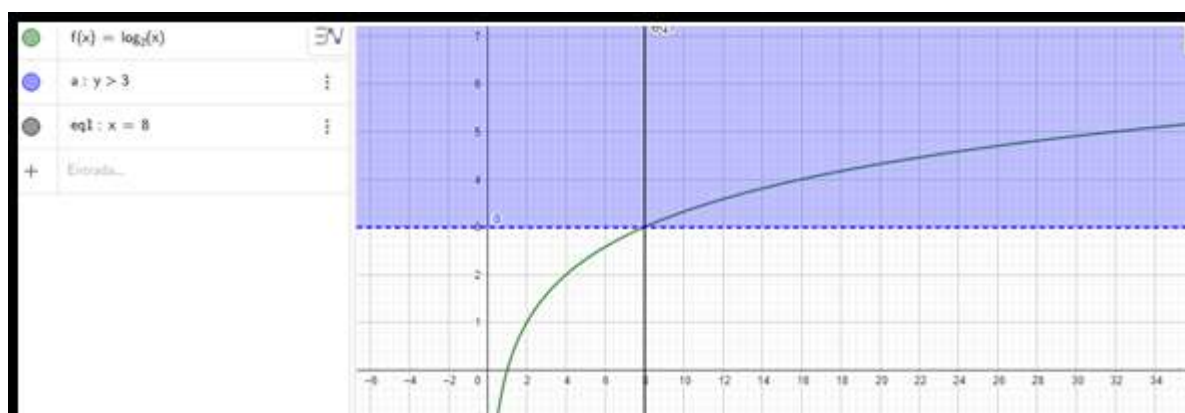
No sétimo momento, de aproximadamente cinco minutos o Pesquisador fez leitura para o E1 da sexta questão da 2ª atividade, que diz “quais valores de x (domínio) satisfaz a inequação $\log_2 x > 3$. represente graficamente no geogebra.

Pesquisador – Quando $y = 3$, quanto vale x?

E1 – Oito.

Pesquisador – Muito bem! (Figura 129)

Figura 129 - $\log x$ na base 2 maior que 3, $x = 8$



Fonte: Próprio do autor

Então, o Pesquisador diz ao E1 que a resposta da inequação $\log_2 x > 3$, os valores de x , não é $x = 8$, que só pode ser ou maior ou menor que oito.

Pesquisador – Qual seria a resposta pra voce? Maior ou menor?

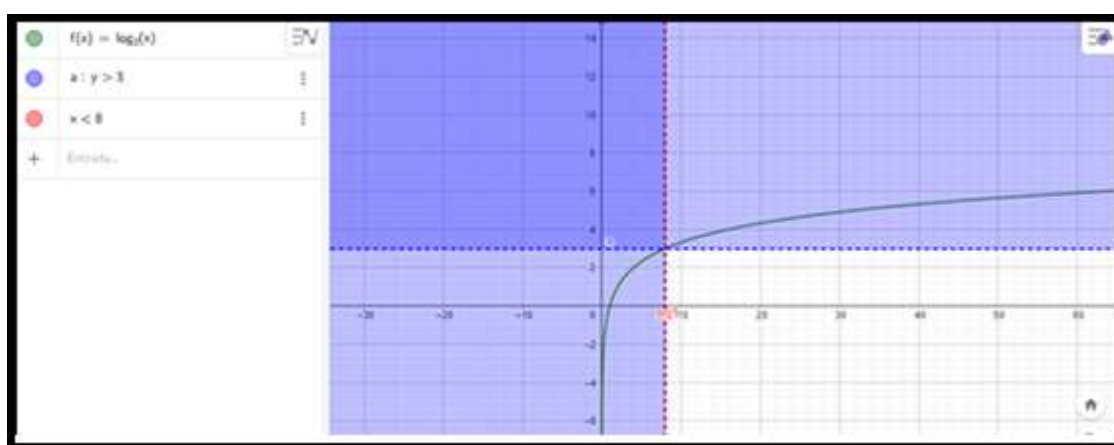
E1 – Menor

Pesquisador – Menor?

E1 – Sim

Pesquisador – Então, vamos colocar x menor que oito. (Figura 130). O que aconteceu? Estais vendo ai?

Figura 130 Para $x < 8$



Fonte: Próprio do autor

E1 – Sim.

Pesquisador – Observe que a parte pintada duas vezes não possui gráfico (azul mais forte), ok? Eu te pergunto tem gráfico aqui?

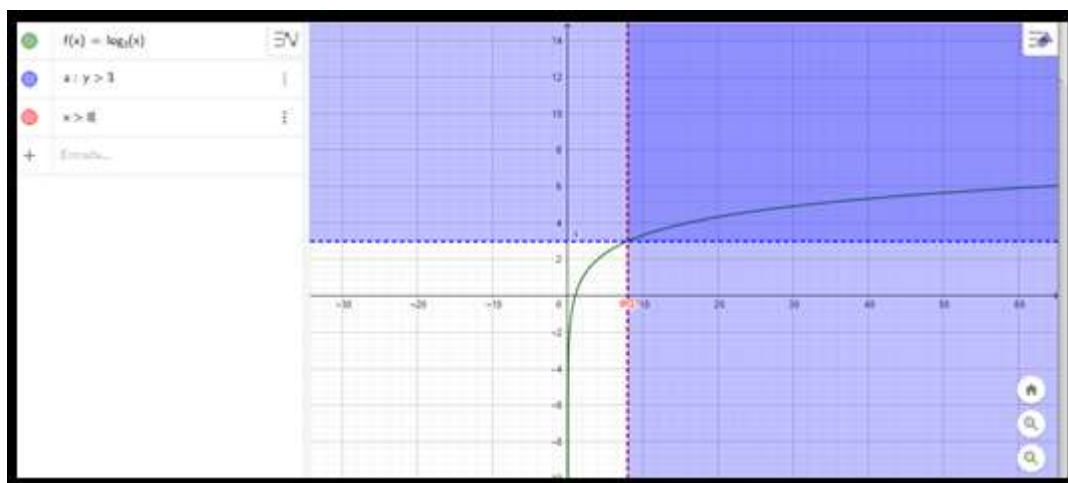
E1 – Não

Pesquisador – Então não é resposta.

E1 – Então é maior...

Pesquisador – Então é $x > 8$, olha a resposta agora? Tá vendo a parte mais pintada? (Figura 131).

Figura 131 - Parte pintada



Fonte: Próprio do autor

E1 – Hum..

Pesquisador – Apareceu gráfico na parte pintada?

E1 – Sim.

Pesquisador – Então é a resposta.

Outra maneira de se descobrir se vamos usar o sinal gráfico de maior ou menor para os valores de x (domínio) de uma inequação logaritmica é saber se a função estudada é crescente ou decrescente, caso a função logaritmica seja crescente a resposta para o valores de x seguirá o mesmo sinal da inequação, caso contrário se a função for decrescente o sinal para os valores de x deverá ser o contrário da função. Isso fica bem claro quando voce observa o resultado no gráfico do geogebra. (Figura 132).

Figura 132 Sinal da função



Fonte: Próprio do autor

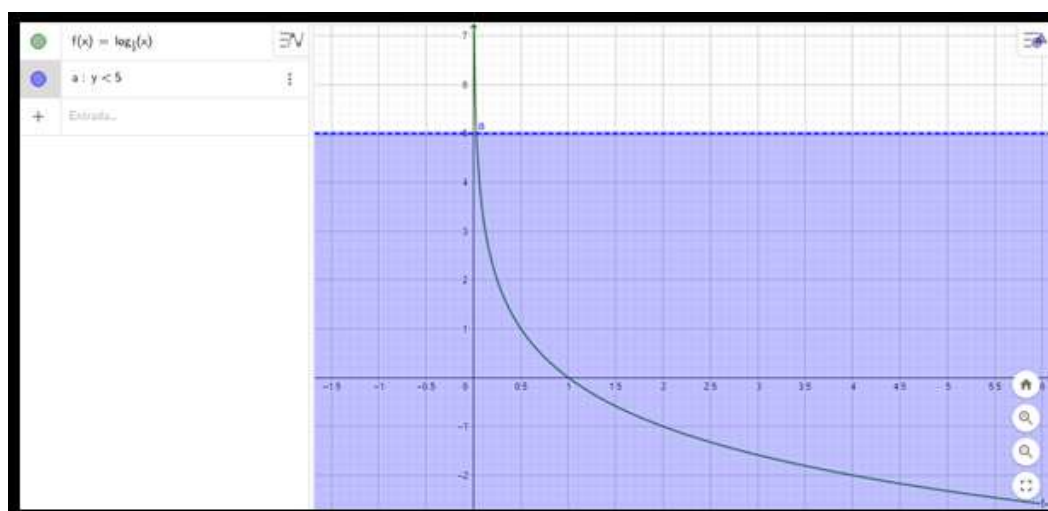
Observe que a função tem como base do logaritmo o valor 2, logo maior que 1, portanto a função é crescente, dessa forma a resposta da inequação logaritmica para x terá o mesmo sinal da inequação, que neste caso é menor.

Se a função logaritmica fosse decrescente deveríamos trocar o sinal para a resposte de x .

Para o oitavo momento tivemos aproximadamente cinco minutos de apresentação e o Pesquisador fez a leitura da sétima questão da 2ª atividade para o E1. Que dizia: Para o $\log_{1/2} x < 5$ qual a solução da inequação logaritmica?

Depois o Pesquisador pede para o E1 digitar em entrada $f(x) = \log_{1/2} x$, enter e $y < 5$, enter. (Figura 133).

Figura 133 base $0 < x < 1$

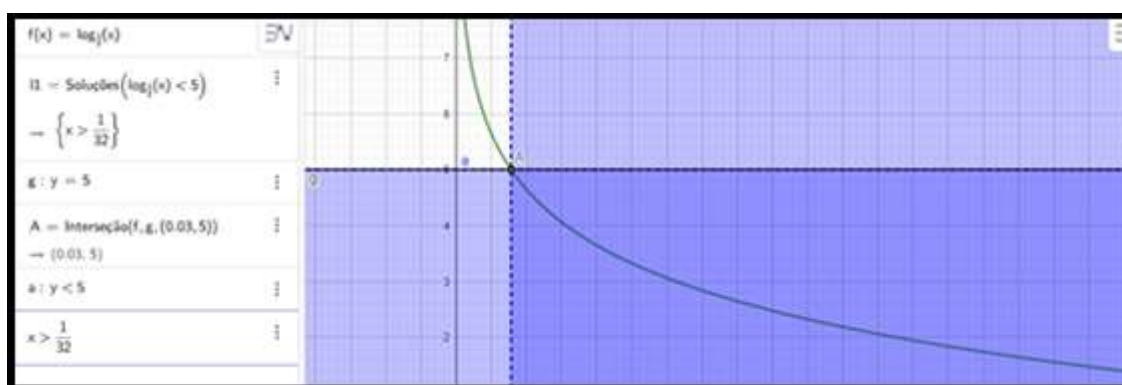


Fonte: Próprio do autor

E1 – Certo.

Pesquisador – Podemos ir em entrada e digitar solução $< \log_{1/2} x < 5 >$ e automaticamente voce terá a sua resposta. (Figura 134).

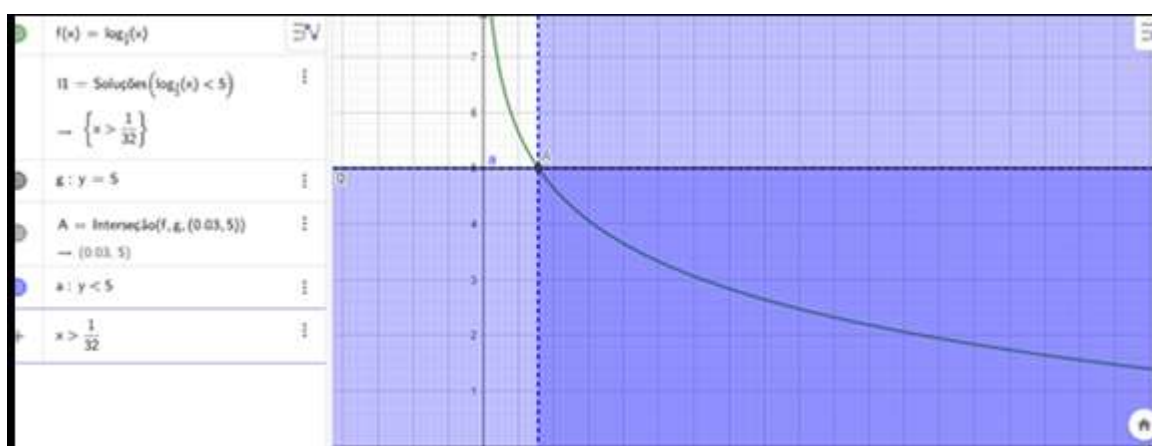
Figura 134 solução da inequação



Fonte: Próprio do autor

Mas, também você pode fazer $y = 5$, daí aparece uma reta passando por 5 paralela ao eixo x, clica no ícone “ponto A” na barra de ferramentas, abrirá uma janela e nessa janela selecione o ícone “interseção de dois objetos”, clique e vá no gráfico do geogebra selecione a função logarítmica e a reta ($y = 5$).

Depois aparecerá um ponto A e nesse ponto aparecerá na parte algébrica do geogebra o valor x (domínio) correspondente ao valor $y = 5$. E como sabemos que a função é decrescente teremos como resposta $x > 0,03$ ou $1/32$. Para provarmos o resultado faça $x > \frac{1}{32}$, daí você observará que fica pintada duas vezes a resposta da inequação. (Figura 135).

Figura 135 Solução da inequação $y > 5$ 

Fonte: Próprio do autor

Mesmo depois de realizar a solução da inequação $\log_{1/2} x < 5$ o Pesquisador perguntou sobre a resposta.

Pesquisador – Para a solução da inequação $y < 5$ nos valores de x temos que usar o simbolo maior ou menor, temos que repetir o sinal da inequação ou devemos trocar a posição do sinal para o x (solução)? A função é crescente ou decrescente?

E1 – Não sei, é menor?

Percebe-se nesse momento um cansaço tanto físico, como mental do E1 devido a entonação de sua voz (ofegante) ao dar uma resposta rápida para o Pesquisador. O Pesquisador esperava do estudante que fizesse um corelação com os sinais gráficos maior ou menor, com a base do logaritmos e sua resposta para o domínios da função.

12.2.2. Experimento 2 (E2)

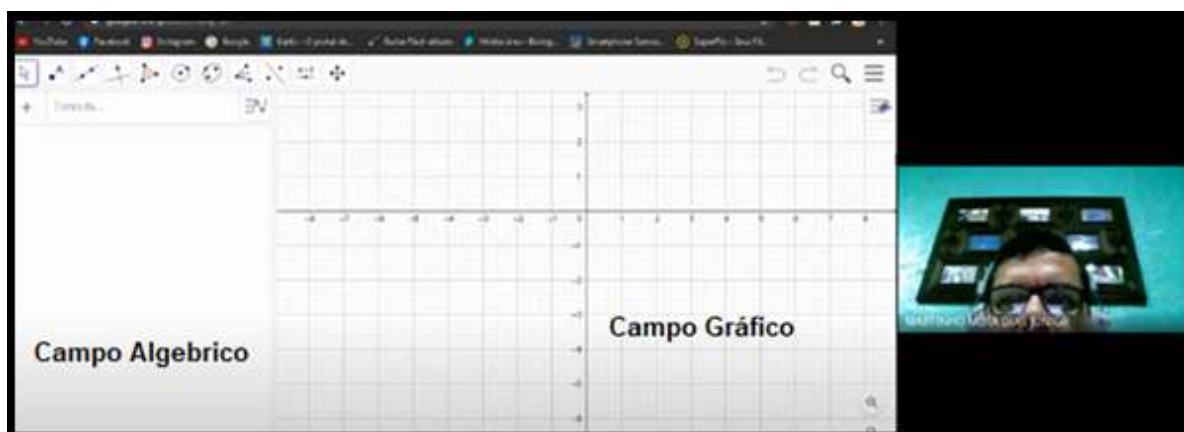
O E2 é um estudante de escola pública, do segundo ano do ensino médio, localizada na cidade de Tucuruí-Pa. Não conhecia o software geogebra e através de conversas com o Pesquisador o E2 falou que gosta muito pouco de matemática e disse que o assunto inequação logarítmica não foi trabalhado (ou visto) no primeiro ano em sua escola. Foi recrutado pessoalmente pelo pesquisador quando o pesquisador estava fazendo uma visita em sua escola e o pesquisador lhe abordou e convidou-o para participar da experimentação.

12.2.2.1. Primeiro encontro do Experimento 2 (E2).

O primeiro encontro aconteceu no 23 de fevereiro de 2021 e durou aproximadamente 1 hora e 17 minutos, tivemos seis momentos distintos.

No primeiro momento, durou aproximadamente 10 minutos, falei sobre o geogebra, os ícones, Entrada, a interface do geogebra, expliquei as partes que compõe o geogebra, o campo visual do geogebra quando você “abre” o geogebra você vê duas partes: o campo algébrico e o campo gráfico, no campo gráfico na maioria das vezes já vem o plano cartesiano, caso contrário você deve inserir -lo. (Figura 136).

Figura 136 - Introdução do Geogebra - E2



Fonte: Próprio do autor

Pesquisador – Você viu que o geogebra é dividido em duas áreas basicamente (início), ok?

E2 – Ok

Pesquisador - Você sabe aonde posso digitar as funções, pontos, equações, soluções, expressões no geogebra?

E2 – Não.

Pesquisador – No campo “entrada”, localizado logo abaixo das barras de ferramentas. Figura 136, localizou ?

E2 – Sim, vi.

Pesquisador – Você sabe o que é plano cartesiano?

E2 – São essas duas retas aí.

Pesquisador – Você já estudou o plano cartesiano?

E2 – Sim.

Pesquisador – Você sabe quantos quadrantes possui o plano cartesiano?

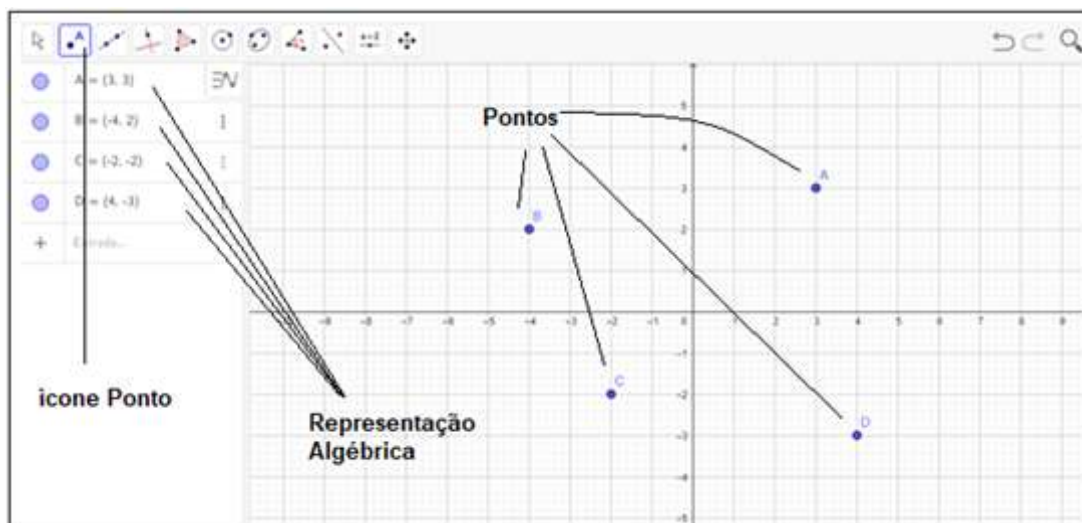
E2 – Quatro.

Pesquisador – Você sabe localizar um ponto no plano cartesiano?

E2 – Acho que sim.

Depois fiz a localização de quatro pontos, um em cada quadrante, usando para isso o ícone “ponto” do geogebra. (Figura 137).

Figura 137 - Localização de pontos



Fonte: Próprio do autor

Depois o pesquisador fez as seguintes perguntas em relação a localização dos pontos no plano gráfico do geogebra para o E2.

Pesquisador – O ponto A localiza-se em que quadrante?

E2 – Primeiro quadrante.

Pesquisador – O ponto B localiza-se em que quadrante?

E2 – Segundo quadrante.

Pesquisador – O ponto C localiza-se em que quadrante?

E2 – Terceiro quadrante.

Pesquisador – O ponto D localiza-se em que quadrante?

E2 – Quarto quadrante.

Pesquisador – Os pontos também estão localizados na parte algébrica do geogebra, são formados por pares de números (abscissa, ordenada) denominados de pares ordenados. Quais os pares ordenados do ponto A.

E2 – 3 para a abscissa e 3 para a ordenada.

Pesquisador – Para o ponto B, quais os pares ordenados?

E2 – -4 para a abscissa e 2 para a ordenada.

Pesquisador – Para o ponto C, quais os pares ordenados?

E2 – -2 para a abscissa e -2 para a ordenada.

Pesquisador – Para o ponto D, quais os pares ordenados?

E2 – 4 para a abscissa e -3 para a ordenada.

Depois o pesquisador disse que o geogebra possui uma barra de ferramenta em que estão os principais ícones que iremos usar, por exemplo o pesquisador perguntou:

Pesquisador – Você conhece este ícone  e sua função?

E2 – Sim, é o de mover alguma coisa.

Pesquisador – Correto, é chamado de mover e sua função é de arrastar ou selecionar objetos.

Pesquisador - O ícone “ponto” já conhecemos e se você clica em cima dele aparece outras opções de ícone. (Figura 138).

Figura 138 - ponto de interseção



Fonte: Própria do Autor

Umas delas é chamado de Interseção entre dois objetos, você sabe qual é a sua função?

E2 – Não.

Serve para achar um ponto de interseção entre dois objetos como por exemplo a inyerseção entre duas funções. (Figura 139).

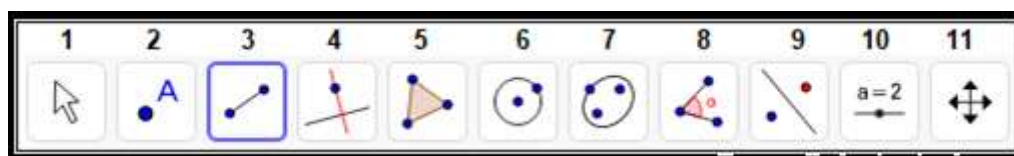
Figura 139 - exemplo de interseção entre dois objetos



Fonte: Própria do Autor

Depois fiz a demonstração do terceiro ícone (da esquerda para a direita), na barra de ferramenta , o chamado “segmento de reta”, clicando nele apareceu outras opções. (Figura 140). Peguntei:

Figura 140 - Ícones



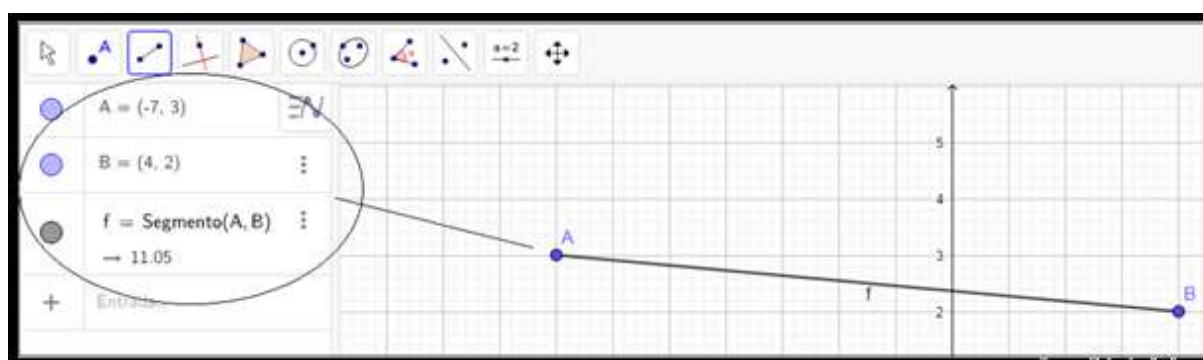
Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – você sabe o que significa ou a função do ícone “segmento de reta”?

E2 – Não.

Pesquisador – Segmento de reta é um “pedaço da reta” e quando você clica nesse ícone no geogebra, o próprio geogebra mostra os dois pontos que você indicou e traça um segmento de reta. (Figura 141).

Figura 141 - Segmento de reta

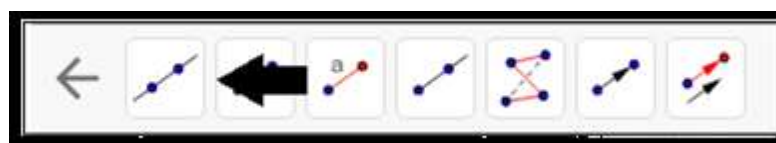


Fonte: Própria do Autor

Na parte algébrica fica editado os pontos, a representação algébrica do segmento de reta, o tamanho do segmento.

Depois clicando – se no terceiro ícone 3 (segmento de reta), figura 140, abriu-se uma outra janela. (Figura 142).

Figura 142 - Reta



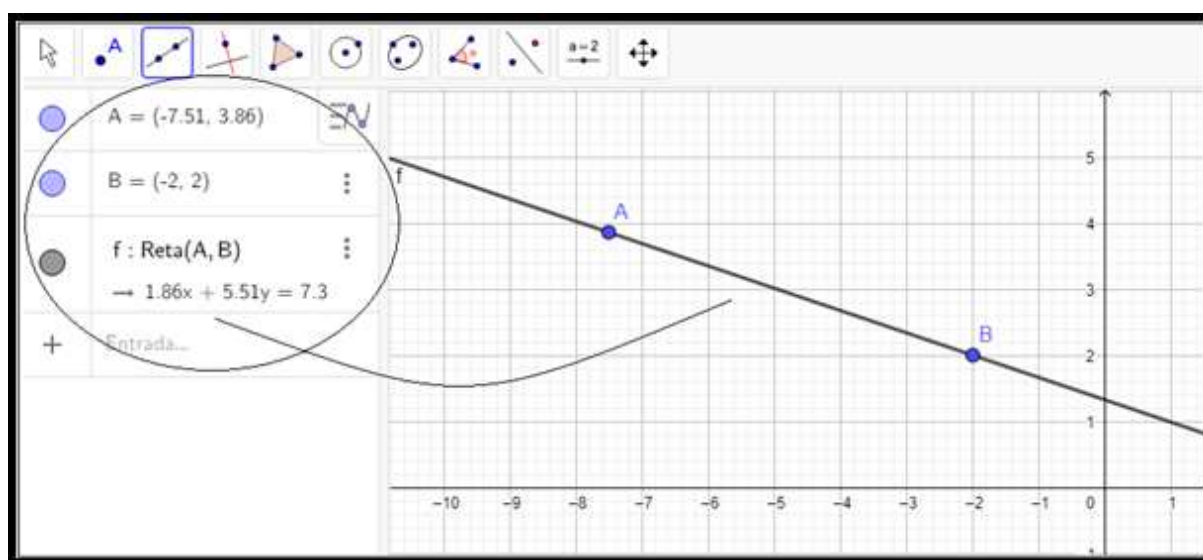
Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Você sabe o que é uma reta, sabe definir uma reta?

E2 – Sabe o que é uma reta eu sei, não sei definir.

Pois bem, uma reta não possui começo e nem fim, definimos como sendo uma linha poligonal formada por infinitos pontos, é uma definição primitiva. No geogebra uma reta passa por dois pontos e não tem começo e nem fim. (Figura 143).

Figura 143 - Reta - representação

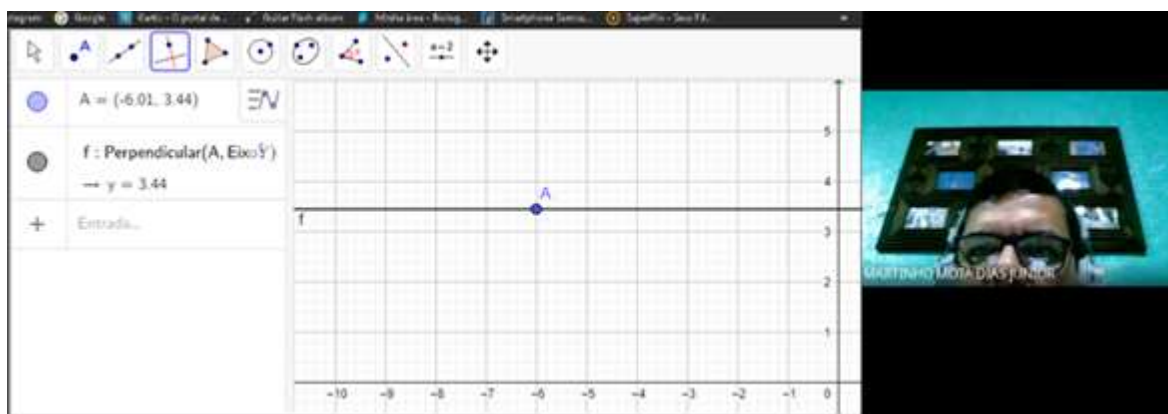


Fonte: Própria do Autor

Ao inserir a reta no plano gráfico geogebra observamos que o geogebra representa os pontos por onde passa a reta e também a equação da reta no espaço algébrico do geogebra.

Depois clicamos no quarto ícone (reta perpendicular), figura 140, abriu-se uma outra janela, porém não interessa para nós nenhum dos outros ícones, a não ser o ícone “reta perpendicular”. (Figura 144). O pesquisador pergunta:

Figura 144 - Reta Perpendicular



Fonte: Própria do Autor

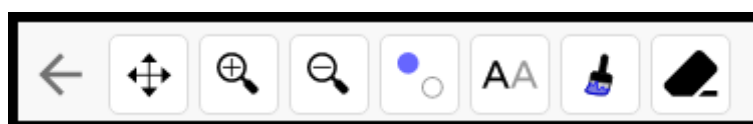
Pesquisador – Você sabe o que é uma reta perpendicular?

E2 – Não.

Pesquisador – É aquela reta que possui um ângulo reto com o outro objeto. (reta, curva, etc.). Observe que na parte algébrica do geogebra apareceu o ponto com sua coordenada (x,y), mostra também a relação desse ponto com a reta (eixo y) e a equação da reta. (Figura 144).

Depois no experimento mostramos o ícone (11) da figura 140 com formato de cruz com setas o chamado “mover janela de visualização”, ao clicar abriu uma nova janela com vários ícones. (Figura 145).

Figura 145 - mover janela de visualização



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – O ícone mover janela de visualização é claro, é evidente, o próprio nome já está dizendo o que faz, tem alguma dúvida?

E2 – Não.

Pesquisador – O segundo e terceiro ícones com formatos de lupa, uma positiva e outra negativa, você sabe o que significa?

E2 – Sim, o de sinal mais, significa que aumenta o Zoom e o de sinal negativo diminui o Zoom.

Pesquisador – Isso! Muito bem! Parabéns.

E2 – Obrigado.

O segundo momento levou aproximadamente 20 minutos para sua execução, neste momento fiz uma breve revisão sobre Fatoração em números primos de um número, números primos, função constante, pontos (coordenadas) da função constante, função do primeiro grau, imagem e domínio da função do primeiro grau, e inequação do primeiro grau.

Pesquisador – Você sabe o que significa fatorar?

E2 – Não me lembro.

Vamos fatorar esses números (4, 8, 16, 32), começaremos com o número 4. Fatorar significa transformar um número em um produto de números inteiros, fatoração em números primos de um número é fatorar só que esses números inteiros devem ser primos. O pesquisador pergunta;

Pesquisador – Você sabe o que é um número primo?

E2 – Não me lembro.

Número primo é aquele número que só é dividido por um e por ele mesmo. Por exemplo: o 2 é primo e o único primo par, pois só pode ser dividido por um e por ele mesmo. Outro exemplo: 3, só pode ser dividido por um e por ele mesmo.

Pesquisador – Entendeu?

E2 – Me lembrei.

Dessa forma vamos fatorar o número 4, o número 4 se formos transformar em um produto de números inteiros teremos: 4×1 e 2×2 , mas 4×1 , o 4 não é primo e sim composto e também o número 1 não é considerado primo. Dessa forma só temos uma opção: 2×2 .

Pesquisador – Você entendeu como podemos fatorar?

E2 – Acho que sim.

Vamos fazer a fatora  o em números primos do número.

Pesquisador – Como posso fatorar o 8, quais as possibilidades?

E2 - 2×4 .

Pesquisador – S   teremos essa possibilidade e 1×8 ?

E2 –    verdade. Acho que sim.

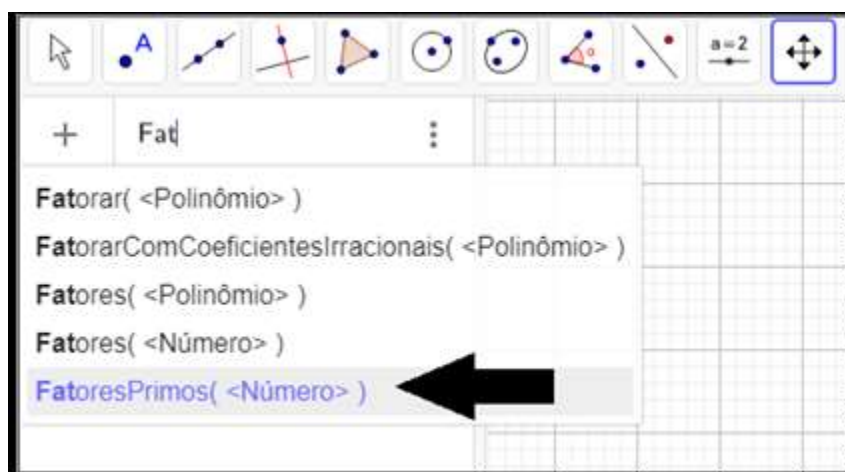
Pesquisador – Não, temos outras. Podíamos fazer a decomposi  o de um número em fatores primos de forma algébrica, porém vamos utilizar o geogebra. T   ok?

E2 – Ok.

Pedi para que o E2 digitasse em “entrada” a palavra Fatorar e E2 indagou.

E2 – Ao começar a escrever “Fat..” em entrada o geogebra interrompe e abre outra janela, em qual das opções eu clico?(Figura 146).

Figura 146 - Fatores Primos

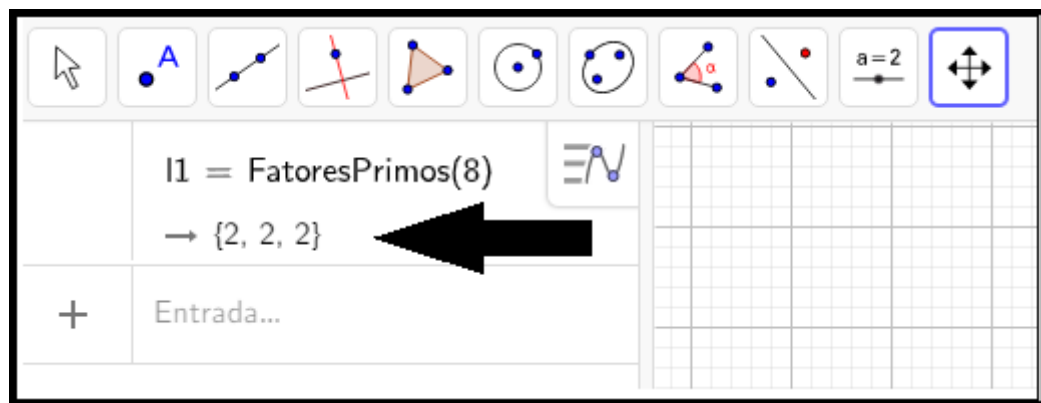


Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Clique em Fatores Primos(<números>) e em seguida no lugar de números digite 8. T   ok?

E2 – Dessa forma. (Figura 147).

Figura 147 - Fatoração do 8



Fonte: Própria do Autor

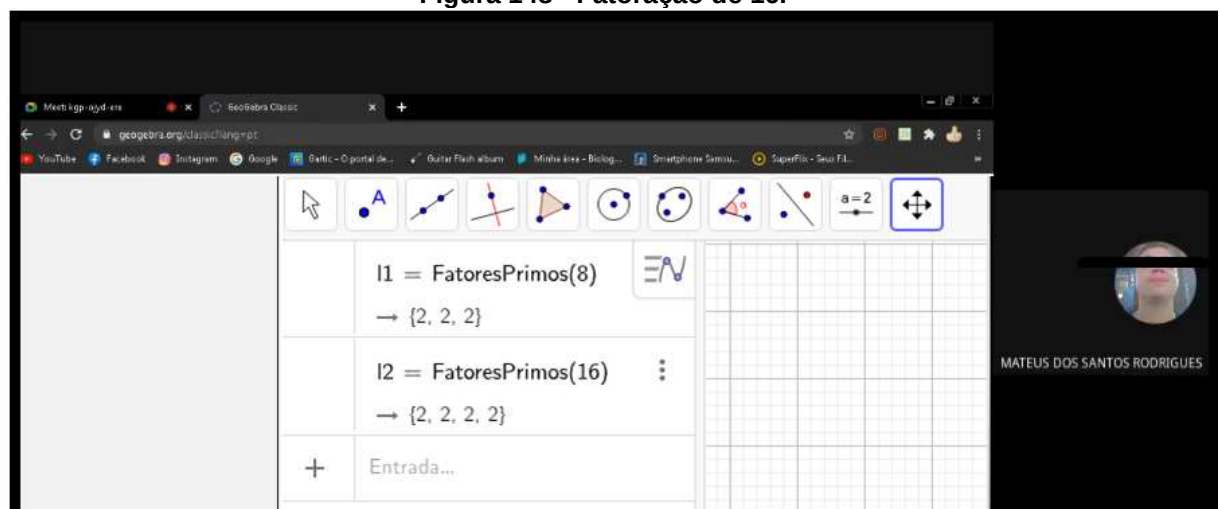
Pesquisador – Muito bem! Parabéns. É isso mesmo.

E2 – Ok.

Pesquisador – Faça para o número 16.

E2 – Assim? (Figura 148).

Figura 148 - Fatoração de 16.



Fonte: Própria do Autor

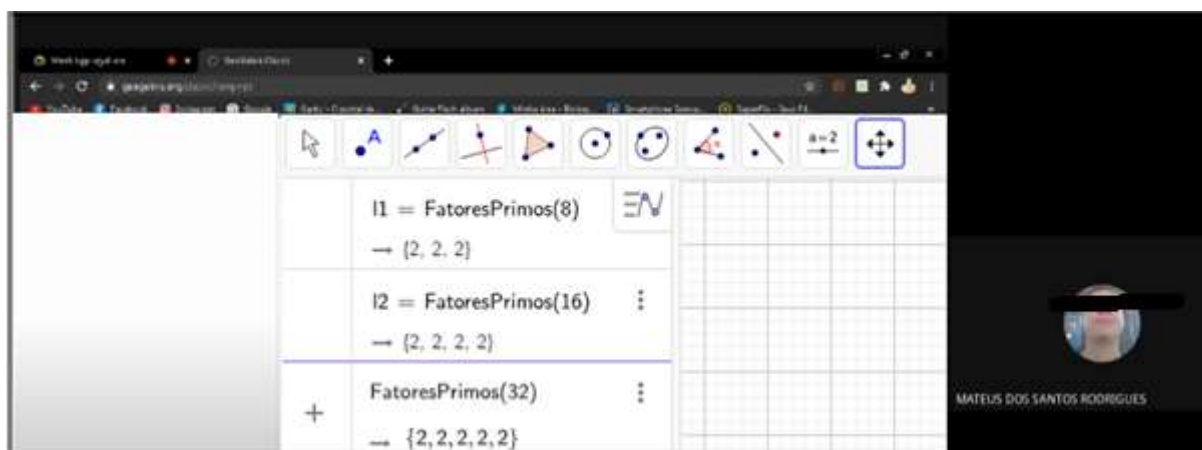
Pesquisador – Isso. Ficou fácil?

E2 – Sim, dessa forma é muito fácil.

Pesquisador – Faça, agora a fatoração do número 32.

E2 – Ok. Deu isso. (Figura 149).

Figura 149 - Fatoração 32



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Parabéns, acredito que você já sabe. Ok.

E2 – Ok.

Depois fiz com que o E2 percebesse que a fatoração pode recair em uma potenciação. Perguntei:

Pesquisador – Você observando os resultados obtidos pela fatoração o que você pode dizer para mim, o que você se lembra? (Figura 149).

E2 – Aparecem vários 2.

Pesquisador – Você se lembra de alguma expressão matemática que faz esse tipo de multiplicação $2 \times 2 \times 2 \times 2$?

E2 – É a potência?

Pesquisador – Sim... isso mesmo. A potenciação, você se lembra...

E2 – Mais ou menos.

Pesquisador – Você sabe que a potenciação de um número, temos a base e o resultado é chamado de potência.?

E2 – Sim.

Pesquisador – Neste caso, por exemplo: o número 8, fatorado temos $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$. Lembrou?

E2 – Sim, a base é 2.

Pesquisador – E para o número 16, como ficaria na forma de potenciação?

E2 - $2^4 = 16$.

Pesquisador – Muito bem, para 32 como fica na forma de potenciação?

E2 - $2^5 = 32$.

Pesquisador – Isso mesmo.

Depois fiz a introdução de uma função constante. Pedi para o E2 digitasse em entrada no geogebra no campo algébrico a função $f(x) = 4$ e disse que $f(x) = y$ e que as duas simbologias representam a mesma função ou como podemos dizer a mesma imagem.

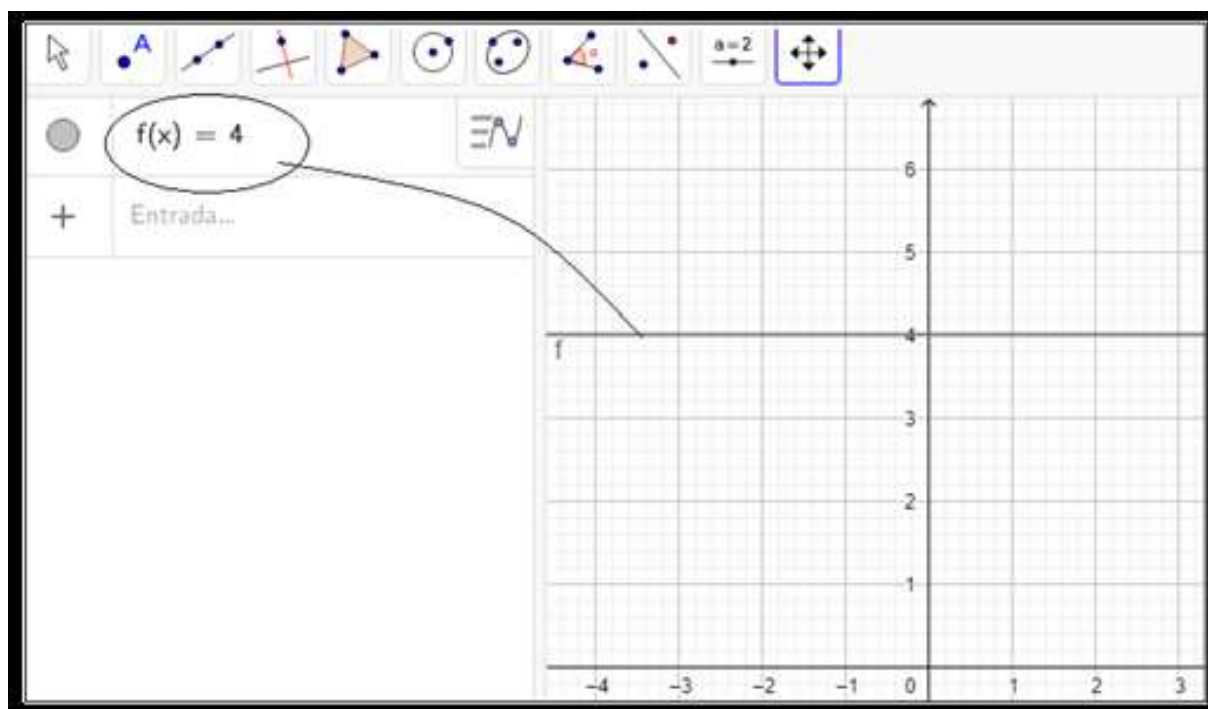
Pesquisador – Digite em entrada $f(x) = 4$ no geogebra.

E2 – Ok.

Pesquisa – O que apareceu?

E2 – Uma reta.

Figura 150 - Função constante



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Qual a posição desta reta? Está na horizontal, na vertical ou inclinada.

E2 – Na horizontal.

Pesquisador – Em que ponto essa reta toca?

E2 – 4.

Pesquisador - Eixo x ou eixo y?

E2 – Eixo y.

Pesquisador – Eixo positivo ou negativo de y?

E2 – Positivo.

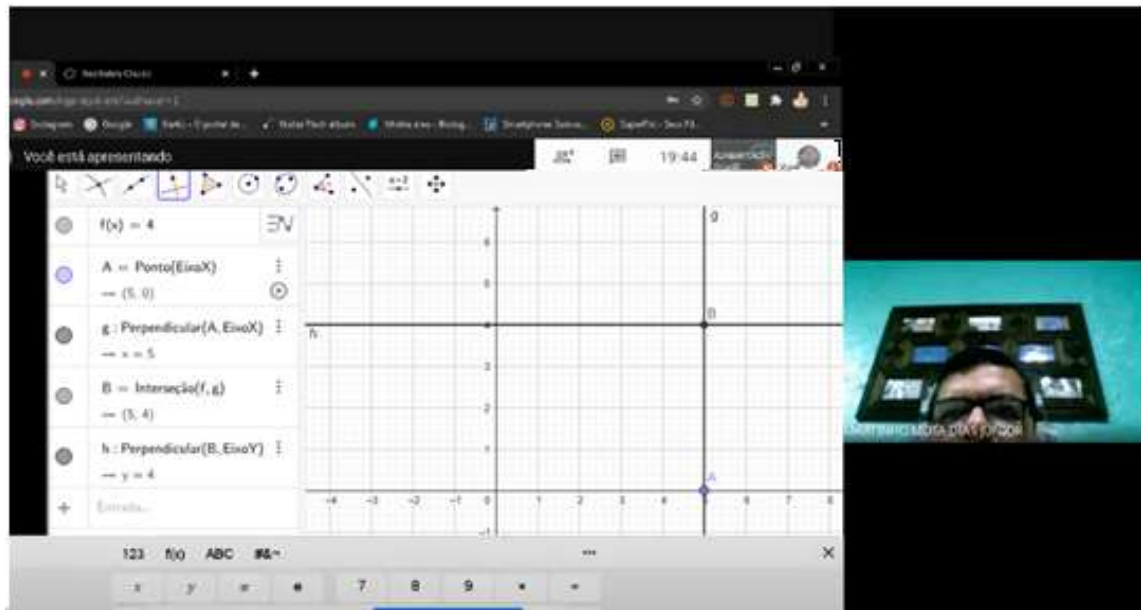
Pesquisador – Qual a imagem de $x = 5$ nesta função constante ($f(x) = 4$)?

E2 – Não sei.

Observamos no experimento que bastava selecionar o ponto A ($x = 5$) e depois selecionar o ícone “reta perpendicular” clica no ponto A e no eixo x, depois

clique no ícone Interseção entre dois objetos, clique na perpendicular criada e no gráfico da função ($f(x) = 4$), daí você vai determinar o ponto B e depois novamente o ícone “reta perpendicular” clica no ponto B e no eixo y. Dessa forma você chega a conclusão que a imagem de $x = 5$ é 4. (Figura 151).

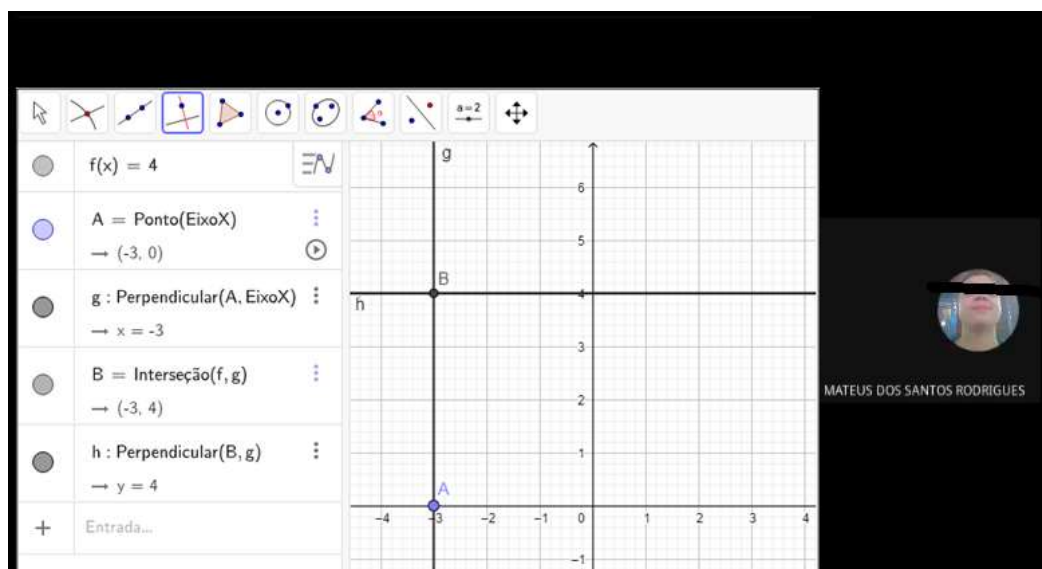
Figura 151 - Imagem de um ponto.



Fonte: Próprio do Autor

Pesquisador – Determine a imagem para $x = -3$ na função $f(x) = 4$.

E2 - Quatro. (Figura 152).

Figura 152 - A imagem da função para $x = -3$ 

Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Isso.

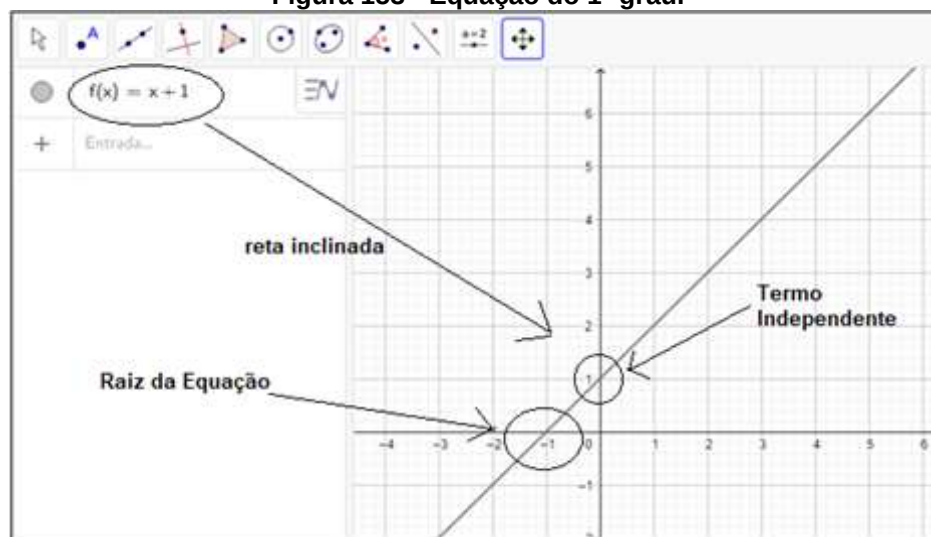
A imagem é representada pelo eixo y e o domínio é representado no eixo x, no caso de uma função constante temos sempre imagem iguais para qualquer valor do domínio (x).

Depois pedi para que E2 digitasse em entrada no geogebra a função $f(x) = x + 1$.

Pesquisador – Digite em entrada a função: $f(x) = x + 1$. E de Enter.

E2 – ok, já fiz. (Figura 153).

Figura 153 - Equação do 1º grau.



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Você reconhece essa função?

E2 – Não me lembro.

Pesquisador – É uma função do primeiro grau. Sabes por que é chamada do primeiro grau?

E2 – Não me lembro.

Pesquisador – É do primeiro grau por que em x (variável ou incógnita) o grau é um. Se lembrou?

E2 – Acho que sim.

Depois mostrei para E2 que em seu gráfico, figura 153, foi uma reta inclinada, a raiz da equação $f(x) = x + 1$ e o termo independente. Perguntei:

Pesquisador – Agora você sabe por que esta função é chamada de função do primeiro grau?

E2 – Sim.

Pesquisador – Devido ao fato de que o expoente da variável é um. ($f(x) = x^1 + 1$). Esse “um” não precisa aparecer, por isso fica assim: $f(x) = x + 1$, mas sabemos que tem o número 1. E toda função de grau um o seu gráfico é uma reta. Entendeu?

E2 – Ok.

Pesquisador – A reta do primeiro grau pode ser crescente ou decrescente. Neste caso, é crescente ou decrescente?

E2 – Crescente.

Pesquisador – Sabes por que?

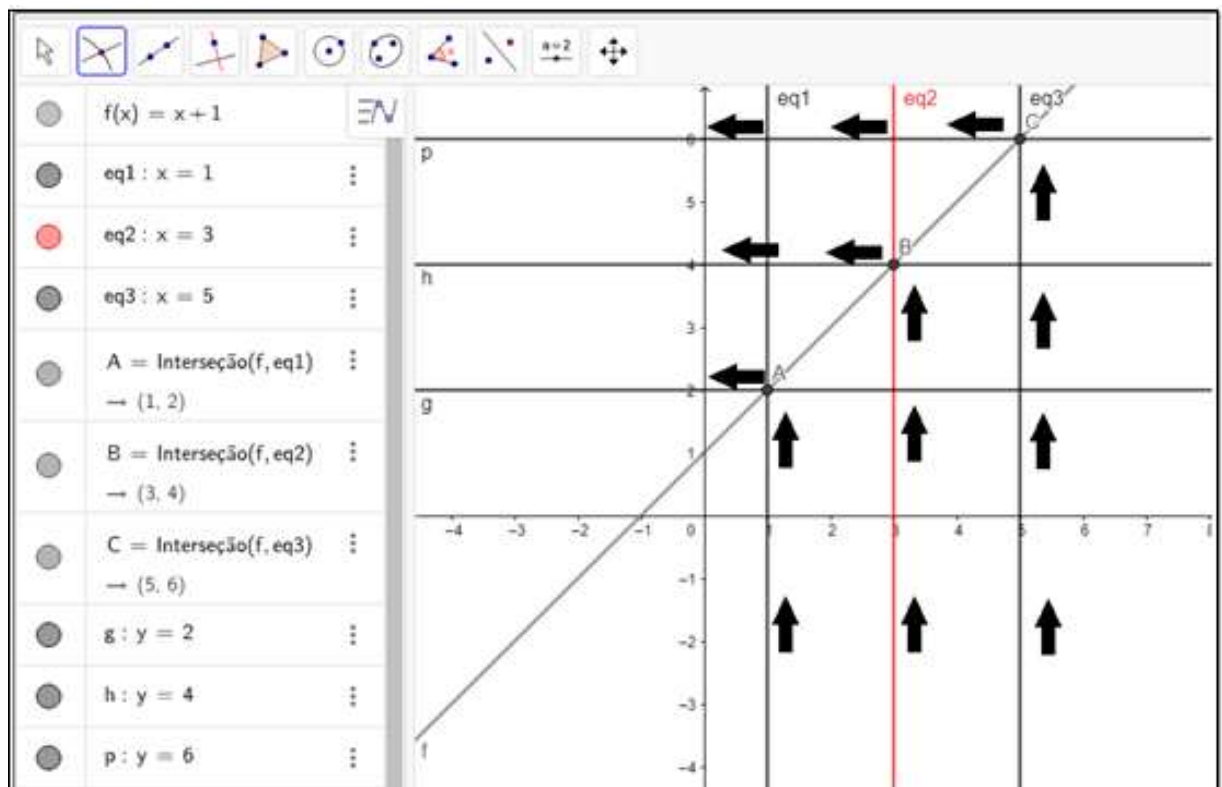
E2 – Não, chutei a pergunta.

Pesquisador – Temos uma função crescente quando você atribui valores para x sempre maiores ou menores e você obtém imagens (y) sempre maiores ou menores. Entendeu?

E2 – Mais ou menos.

Depois fiz a representação de uma função do primeiro grau crescente. (Figura 154).

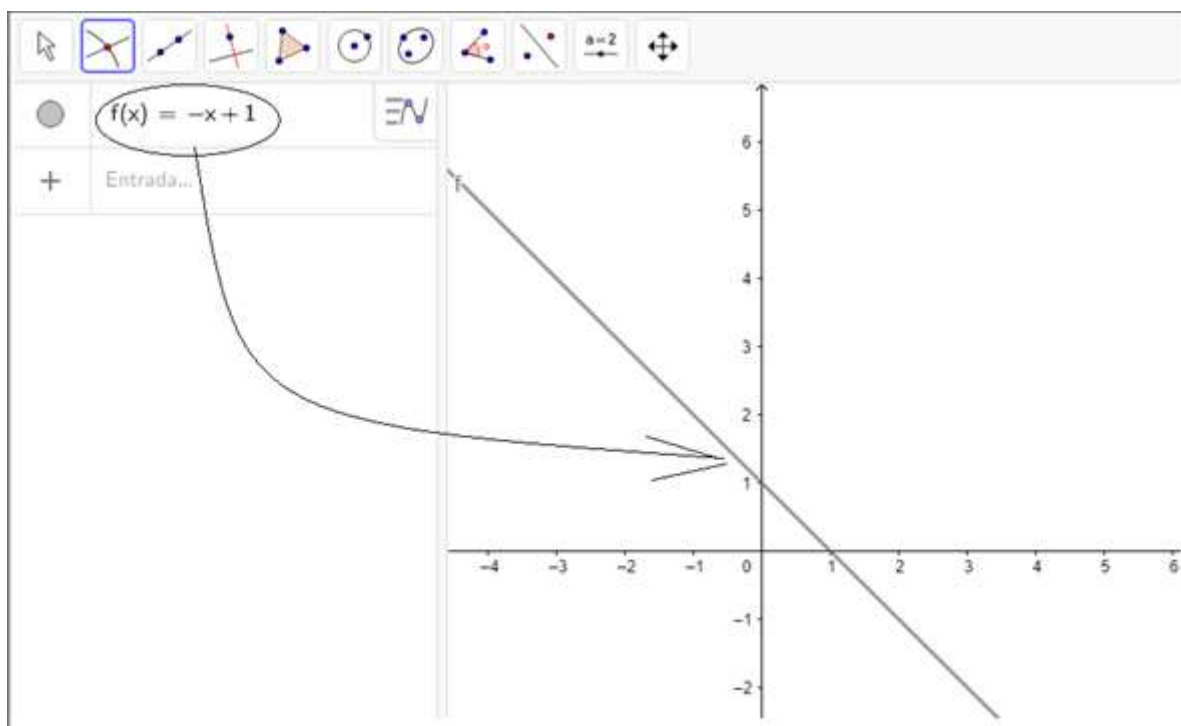
Figura 154 - função crescente - Exp.1



Fonte: Próprio do Autor

Depois observamos a representação de uma função do primeiro grau decrescente. (figura 155). O pesquisador perguntou:

Figura 155- Função do 1º grau - decrescente



Fonte: Próprio do Autor

Pesquisador – A função $f(x) = -x + 1$ é crescente ou decrescente?

E2 – Decrescente.

Pesquisador – Por que você acha isso?

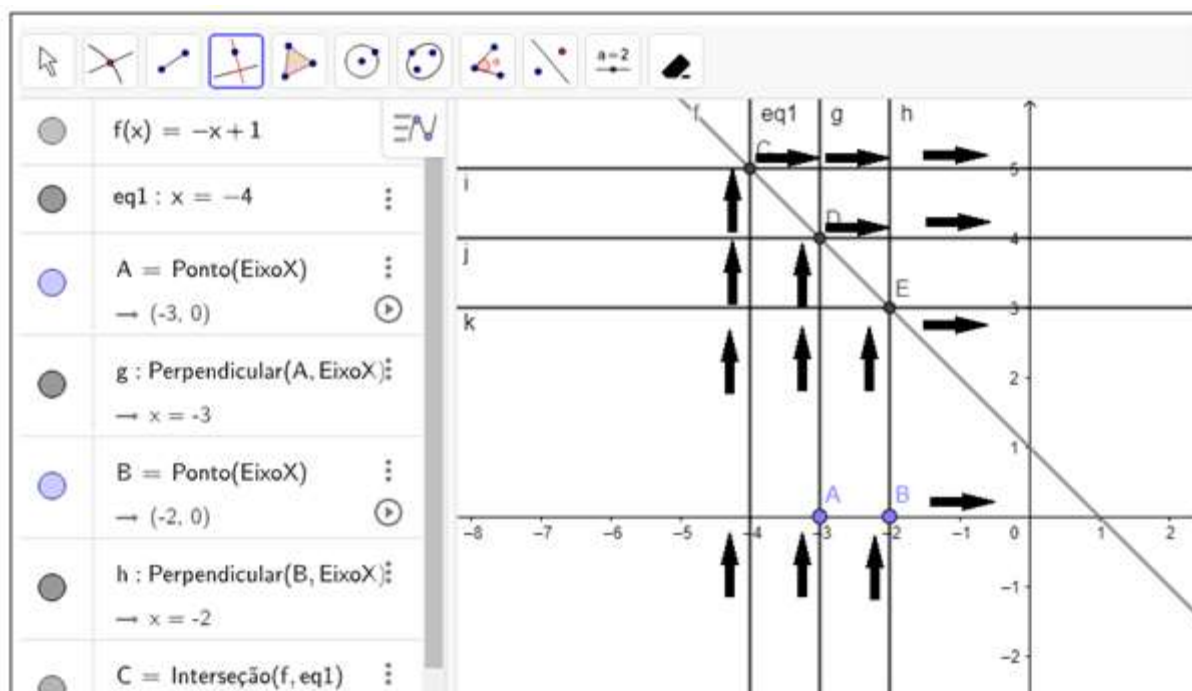
E2 – Acho por causa do sinal negativo.

Pesquisador – Certo, mas não é só por isso. Se você atribui valores maiores ou menores para x e você obter valores para y menores ou maiores (inversos de x), você está diante de uma função decrescente. Ok

E2 – Ok.

Depois fiz a representação de uma função do primeiro grau decrescente. (Figura 156)

Figura 156 - Função do 1º grau - Decrescente



Fonte: Próprio do Autor

Depois fiz E2 verificar o gráfico da função do primeiro grau, tanto quando a função é crescente ou decrescente, a sua raiz da função do geogebra. Perguntei:

Pesquisador – Você sabe o que é raiz ou zero de uma função, qualquer função?

E2 – Não me lembro.

Pesquisador – Raiz ou zero de qualquer função é quando o gráfico da função tocar o eixo x, ou quando a imagem de x for zero. Entendeu?

E2 – Mais ou menos.

Pesquisador – Vamos observar os gráficos das funções crescente e decrescente já realizados. (Figuras 153 e 155). Quais valores de x quando os gráficos das funções crescente e decrescentes tocam no eixo x.

E2 – Para o gráfico crescente o valor de $x = -1$ e para o gráfico decrescente o valor de $x = 1$.

Pesquisador – Muito bem. É isso mesmo.

Observamos no experimento também que o valor do termo independente de ambas funções do primeiro grau (crescente ou decrescente) das figuras 153 e 155 apresentam o mesmo valor (+1). Perguntei:

Pesquisador – Você observando os gráficos da função do primeiro grau das figuras 153 e 155, o gráfico “corta” o eixo y em que valor?

E2 – Acho que cortou em um.

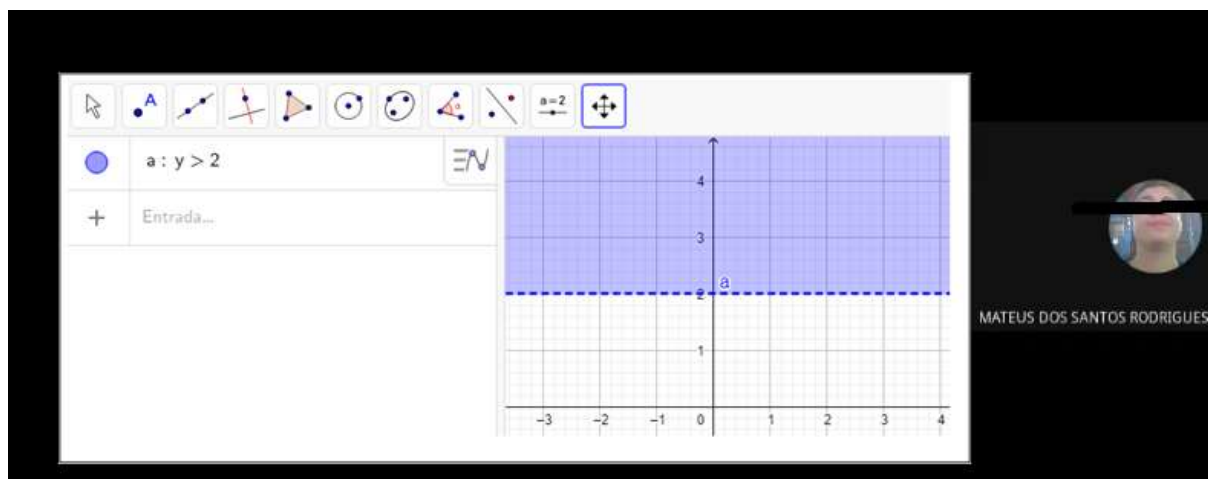
Pesquisador – Parabéns. É isso mesmo.

Depois fiz a representação gráfica de uma inequação do primeiro grau. Pedi para que E2 fizesse:

Pesquisador – Digite em entrada a expressão $y > 2$ e tecele enter. O que apareceu de diferente no gráfico do geogebra para você?

E2 – Fiz, ficou pintado. (Figura 157).

Figura 157- $y > 2$



Fonte: Próprio do Autor

Pesquisador – Que parte do plano ficou pintado?

E2 – Acima de 2 e apareceu uma linha pontilhada passando por dois.

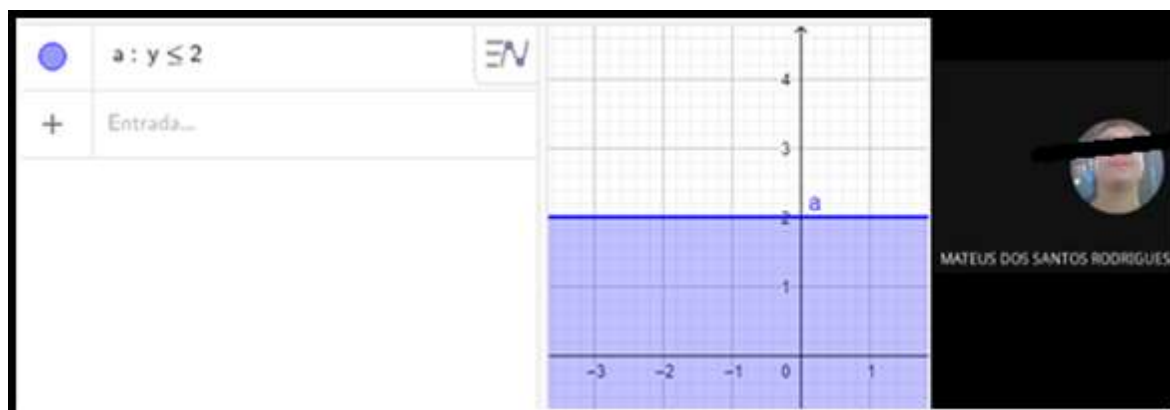
Pesquisador – Você sabe o que significa essa linha pontilhada?

E2 – Não.

Pesquisador – É porque o número 2 não faz parte da resposta. Faça para $y \leq 2$ e diga o que acontece.

E2 – Apareceu uma linha cheia e ficou pintado, agora, a parte de baixo de 2. (Figura 158).

Figura 158 - Valores menores ou iguais a 2



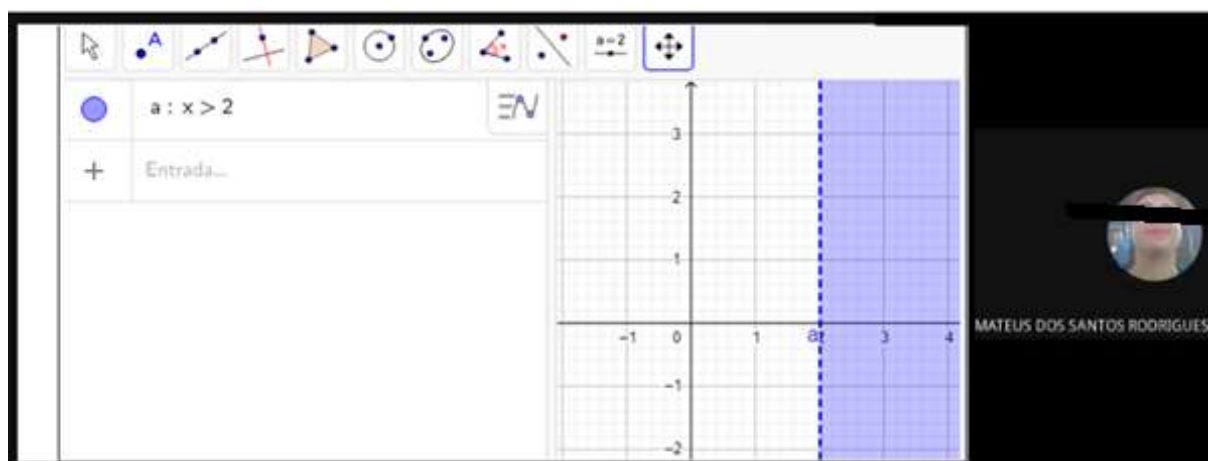
Fonte: Próprio do Autor

Depois observamos no experimento que com valores de x acontece a mesma coisa. Perguntei ao E2:

Pesquisador – Será que acontece a mesma performance para o eixo x , o que acontece quando digitamos, por exemplo: $x > 2$?

E2 – Fica pintado na parte direita de x e aparece a linha pontilhada. (Figura 159).

Figura 159 - Valores $x > 2$.

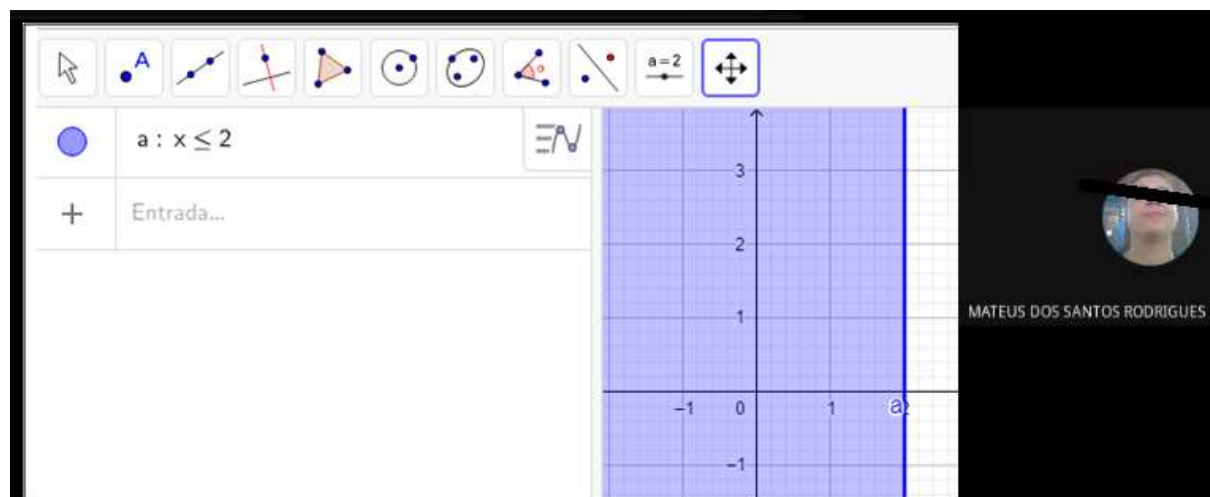


Fonte: Próprio do Autor

Pesquisador – Muito bem. Vamos fazer para $x \leq 2$.

E2 – Fica pintado a esquerda de 2 no eixo x e aparece uma linha cheia passando por 2. (Figura 160).

Figura 160 - Para x menores ou iguais a 2



Fonte: Próprio do Autor

Pesquisador – Muito bem, é isso mesmo.

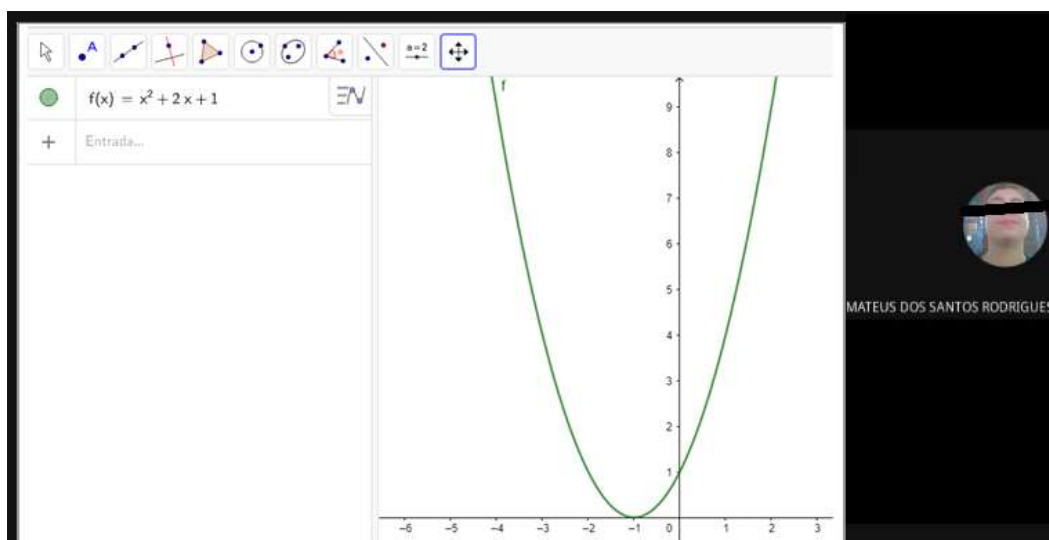
O terceiro momento durou aproximadamente 10 minutos observamos o comportamento da função quadrática, o seu gráfico no geogebra, a determinação de imagens e do domínio. Não nos aprofundamos muito devido o assunto não ser de muita importância para o experimento.

Pedi para o E2 digitar em entrada a função $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e perguntei:

Pesquisador – O que você observou de diferente nesta função $f(x) = x^2 + 2x + 1$?

E2 – Apareceu uma curva. (Figura 161).

Figura 161 - Função quadrática



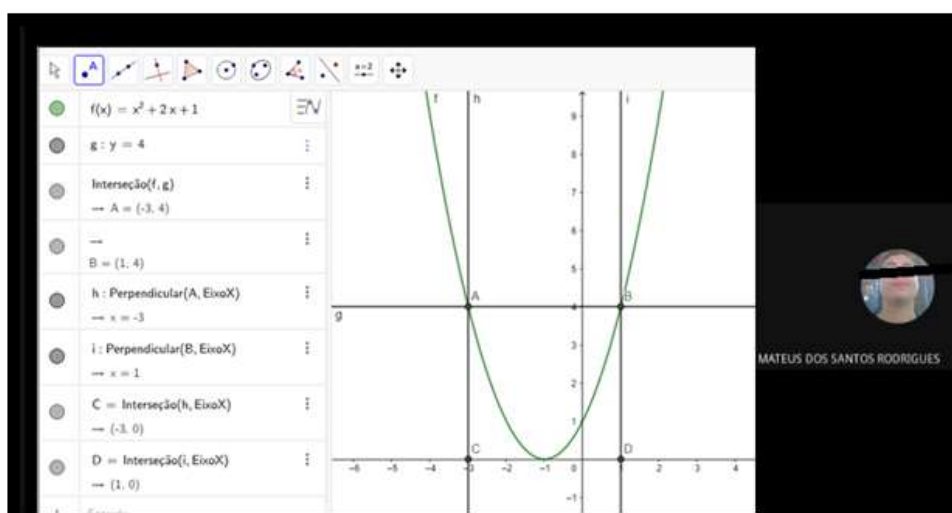
Fonte: Próprio do Autor

Pesquisador – Isso mesmo. Essa curva é chamada de parábola e neste caso, parábola para cima devido o coeficiente do termo de x^2 é um número positivo. Determine o valor de x cuja imagem seja 4?

E2 – Não sei professor.

Pesquisador – É simples basta você digitar em entrada $y = 4$, pois corresponde a imagem da função $f(x) = x^2 + 2x + 1$; Você vai notar que essa reta toca em dois pontos distintos do gráfico e depois é só usar o ícone “interseção entre dois objetos”, vai aparecer dois pontos (A e B) e depois é só usar o ícone “ponto e reta” que você verá no plano algébrico os valores de x correspondentes. E se quiser determinar o par cartesiano basta clicar no ícone ponto. (Figura 162).

Figura 162 - imagens da função



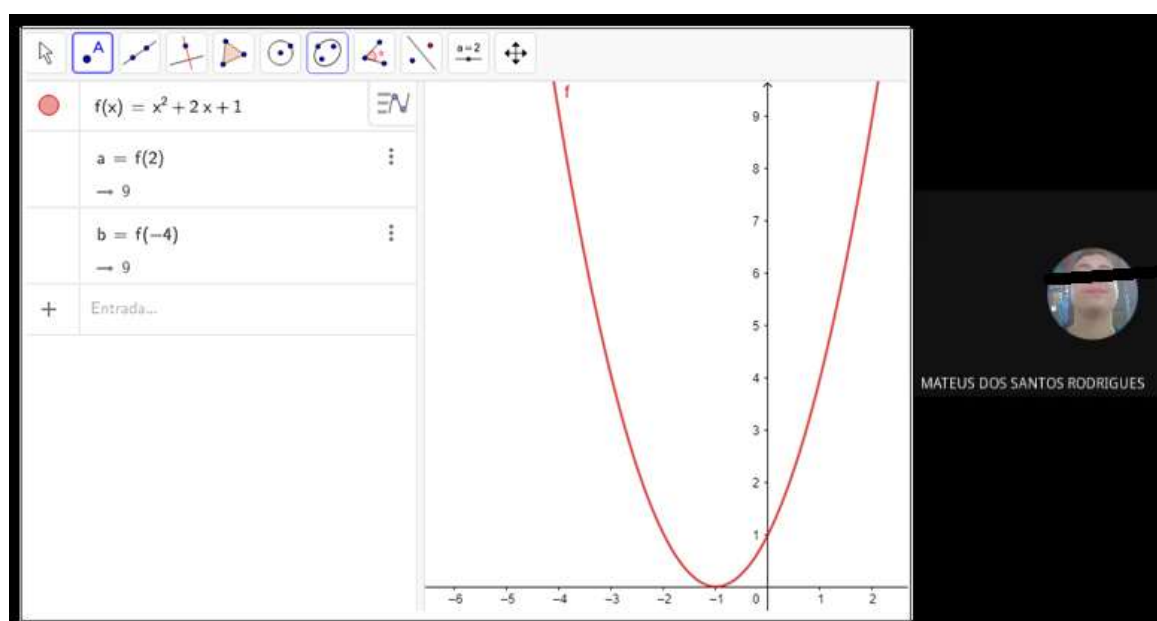
Fonte: Próprio do Autor

Observamos no experimento que para calcular as imagens de $f(2)$ e $f(-4)$ no geogebra basta você ir em entrada e digitar o que se pede. O pesquisador disse:

Pesquisador – Vá em entrada e digite $f(2)$ e $f(-4)$ o que acontece?

E4 – Aparece o resultado. (Figura 163).

Figura 163 - Valores para x



Fonte: Próprio do Autor

Pesquisador – Exatamente, dessa forma é o que dizemos forma algébrica da solução.

No quarto momento, tivemos aproximadamente 12 minutos, falamos sobre a função exponencial, a sua base, quando é crescente ou decrescente, as imagens e domínio da função exponencial e inequação exponencial.

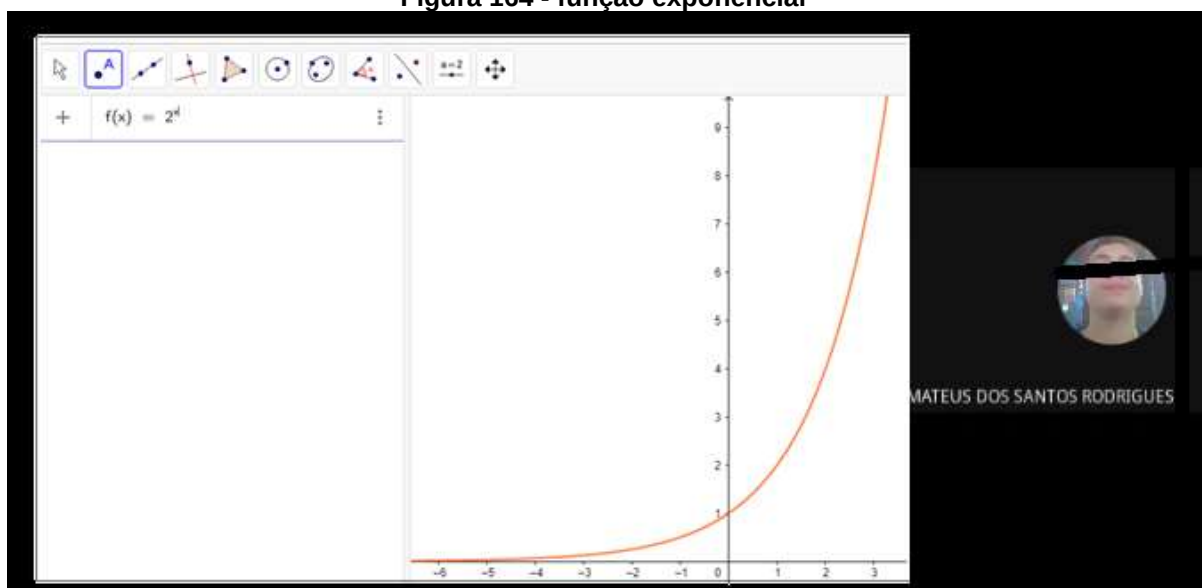
Pesquisador – Você se lembra da potenciação?

E2 – Sim.

Pesquisador – A função Exponencial é aquela função em que o x aparece no expoente da base, digite em entrada a função $f(x) = 2^x$. E me diga qual a forma do gráfico da função?

E2 – Parece uma curva. (Figura 164).

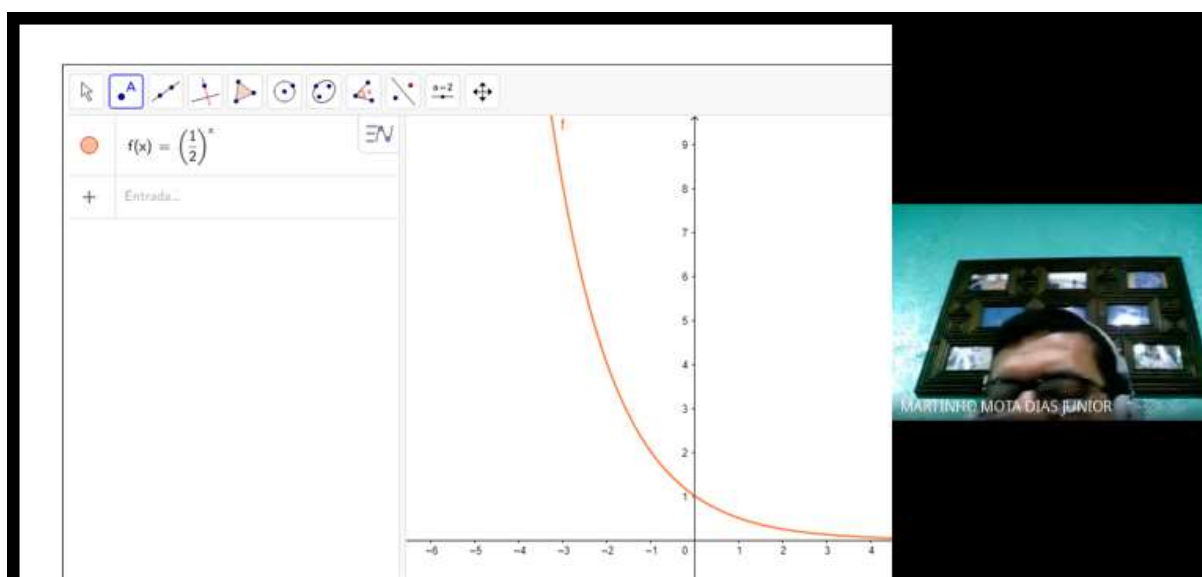
Figura 164 - função exponencial



Fonte: Próprio do Autor

Pesquisador – Quando você tem uma base da potência um número positivo maior que um, figura 164, você está diante de uma função crescente. Quando você coloca uma fração própria (numerado menor que o denominador), uma fração que está compreendida entre **zero e um** teremos uma função exponencial decrescente. (Figura 165).

Figura 165 - Função decrescente



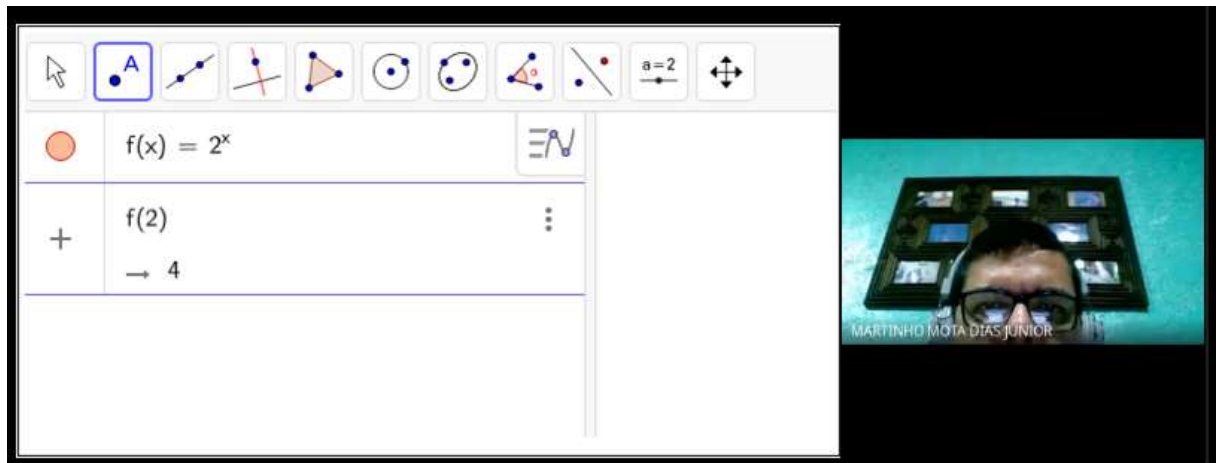
Fonte: Próprio do Autor

Observamos no experimento que para calcular as imagens de qualquer ponto basta você calcular algebricamente ou usando o gráfico do geogebra. O pesquisador fala para o E2.

Pesquisador – Calcule a imagem de $f(2)$ das duas formas: algebricamente e graficamente, para a função $f(x) = 2^x$.

E4 – Ok, algebricamente temos $f(2) = 4$. (Figura 166).

Figura 166 - Forma algébrica

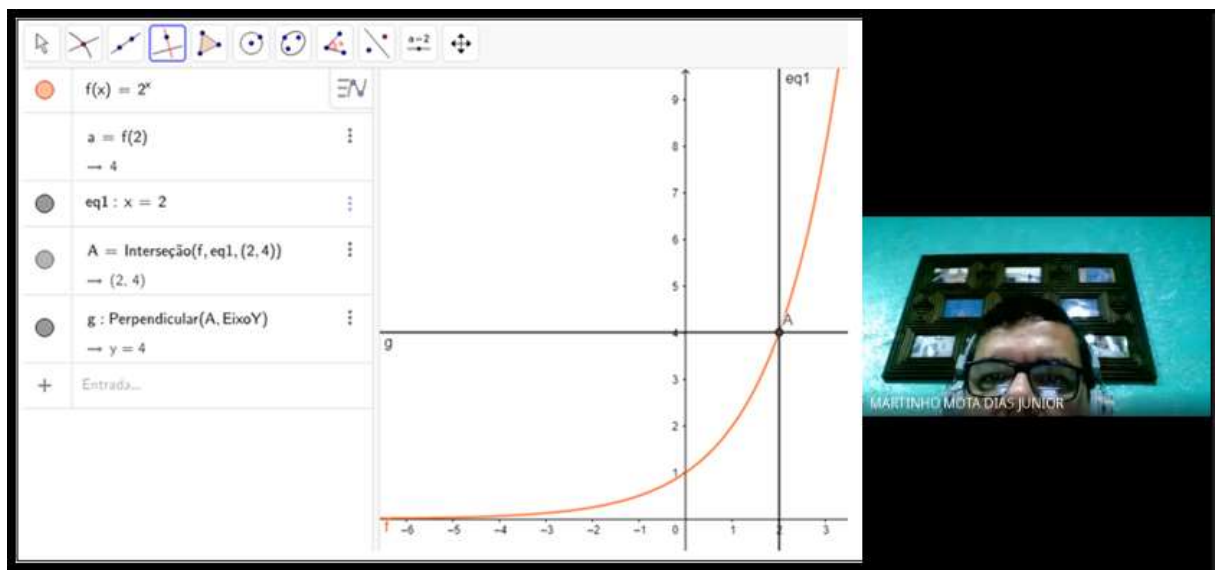


Fonte: Próprio do Autor

Pesquisador – Muito bem, e a forma gráfica?

E2 – Primeiro digitei em entrada $x = 2$, depois usei o ícone “interseção entre dois objetos”, achei o ponto A, depois usei ao ícone “interseção de um ponto e uma reta”. Assim determinamos $y = 4$.

Figura 167 - forma gráfica



Fonte: Próprio do Autor

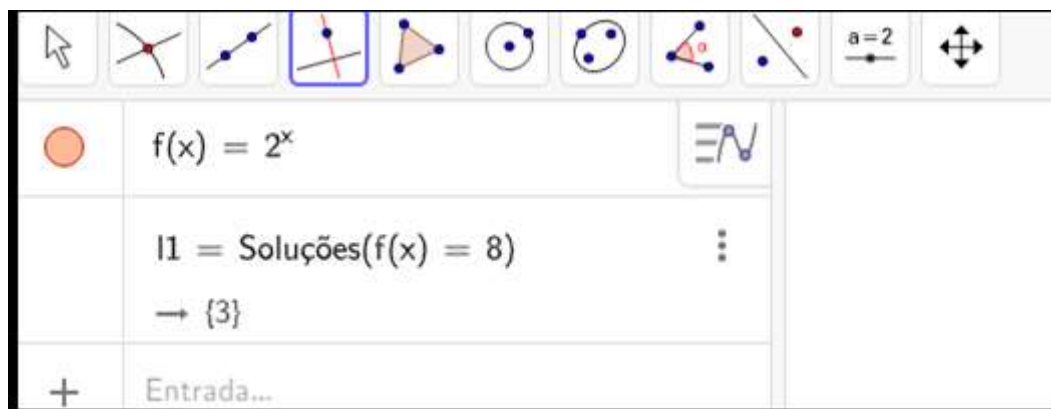
Pesquisador – Muito bem. Parabéns. Agora determine o valor de x para $f(x) = 8$ (cuja imagem seja 8).

E2 – Algebricamente, não consegui.

Pesquisador – Você deve digitar em entrada: Soluções ($f(x) = 8$) e dá enter. Faça, por favor.

E2 – Ok. Dá 3. (Figura: 168).

Figura 168 - Forma algébrica - Exponencial

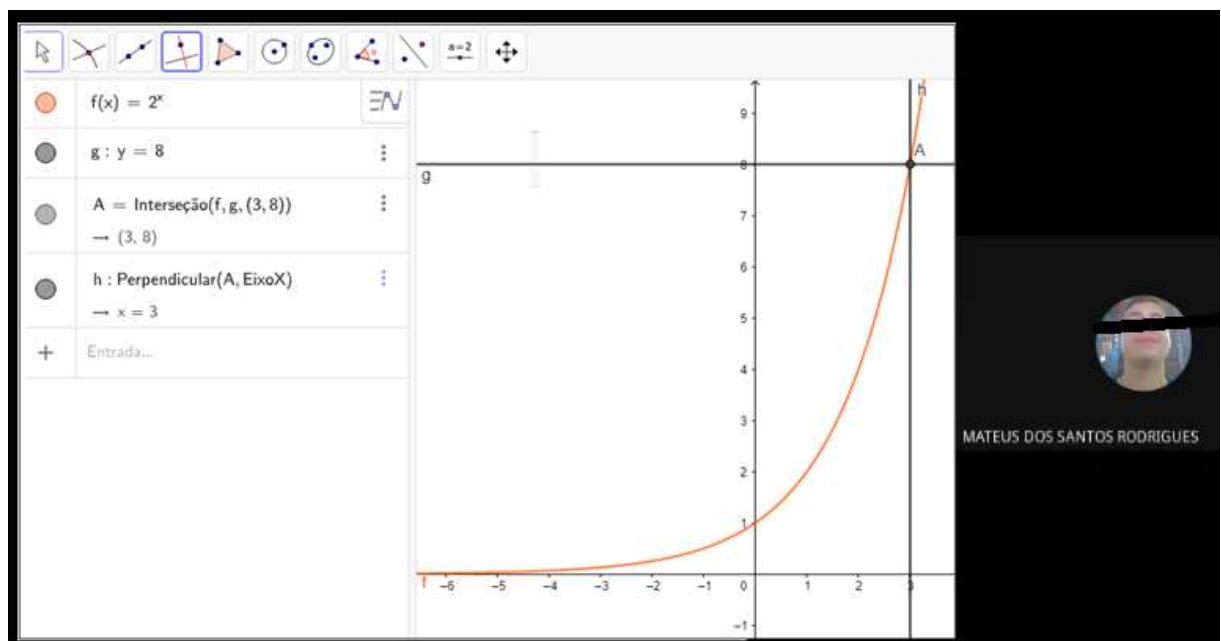


Fonte: Próprio do autor

Pesquisador – Perfeito. E graficamente?

E2 – Eu sei, deu três. (Figura 169).

Figura 169 - Forma Gráfica - Exponencial



Fonte: Próprio do Autor

Depois observamos no experimento a inequação exponencial, como podemos determinar a sua solução de forma rápida e prática, usando para isso o geogebra. Perguntei:

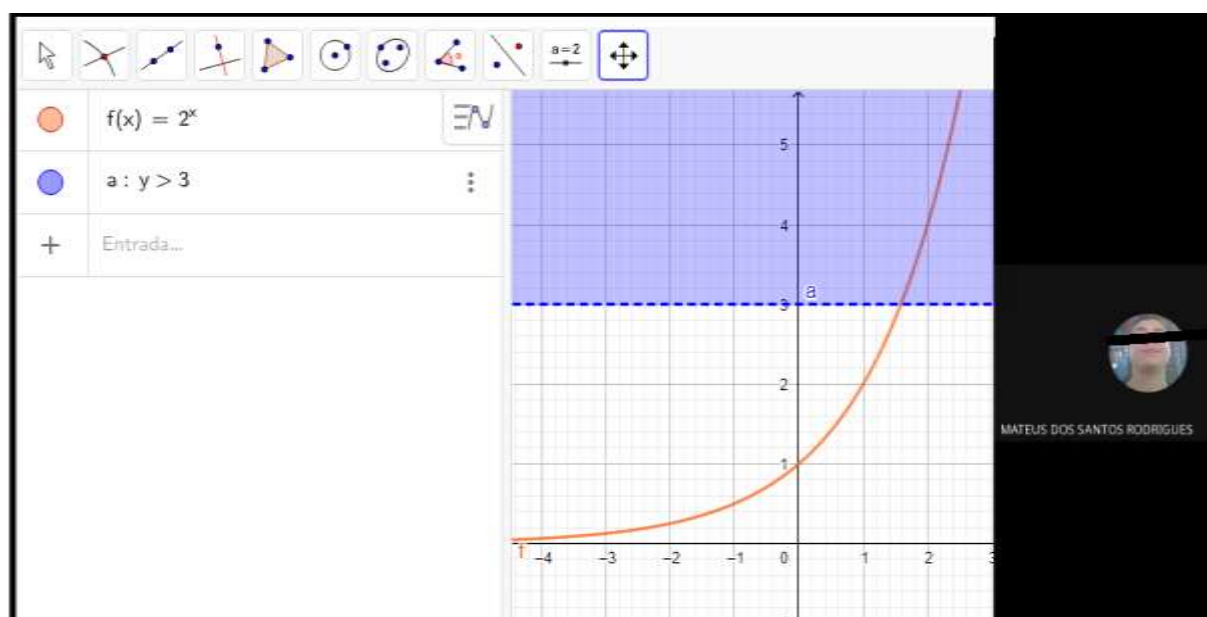
Pesquisador – Você se lembra da inequação de uma função?

E4 – Mais ou menos, é quando aparece o sinal de maior?

Pesquisador – Isso! Esses sinais são os chamados sinais gráficos, temos os sinais de maior ($>$), menor ($<$), maior ou igual ($\geq$) e menor ou igual ($\leq$). Digite em entrada no geogebra a expressão: $f(x) = 2^x$. E depois digite novamente em entrada a expressão $y > 3$

E2 – Ok. (Figura 170)

Figura 170 inequações exponenciais



Fonte: Próprio do Autor

Pesquisador – Essas duas expressões ($f(x) = 2^x$ e $y > 3$) que você digitou em entrada corresponde a seguinte inequação $2^x > 3$, chamada inequação exponencial. Entendeu?

E2 – Sim.

Pesquisador – E como faço para determinar os valores de x que torna essa inequação verdadeira, quais valores de x é solução da inequação? Você sabe resolver?

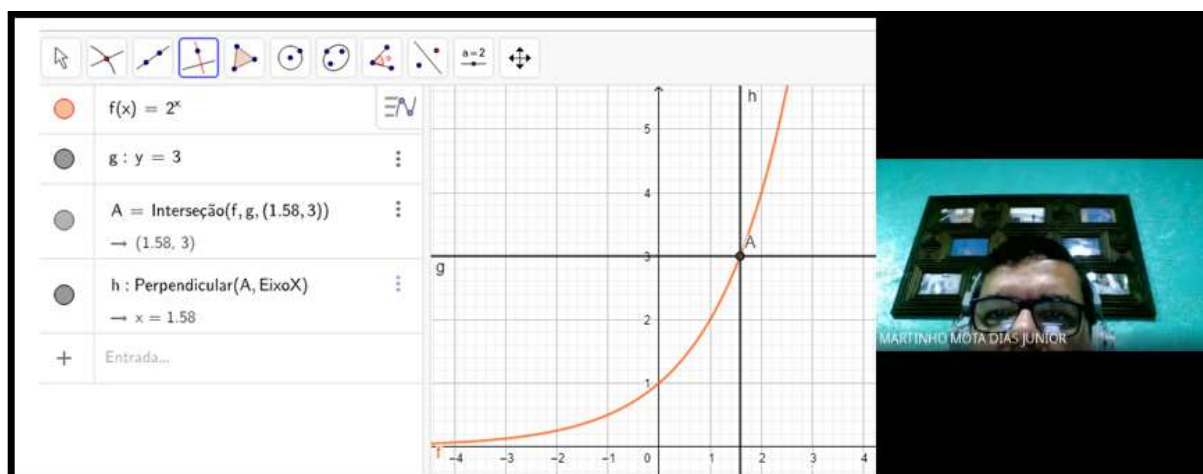
E2 – Não.

Pesquisador – Vamos resolver a inequação $2^x > 3$ usando o geogebra, para isso devemos saber qual o domínio de x cuja imagem é 3?

E2 – Não sei?

Pesquisador – Você, primeiro apagar $y > 3$, depois digita em entrada $y = 3$, em seguida use o ícone “interseção entre dois objetos”, clique na reta ($y = 3$) e na função $f(x) = 2^x$, vai aparecer um ponto A. Neste ponto já obtemos o valor de x , mas vamos determinar no eixo x a sua posição. Clique no ícone “reta perpendicular” depois clique no ponto A e no eixo x . Pronto determinamos a sua posição. Entendeu?

Figura 171 - Solução da inequação exponencial

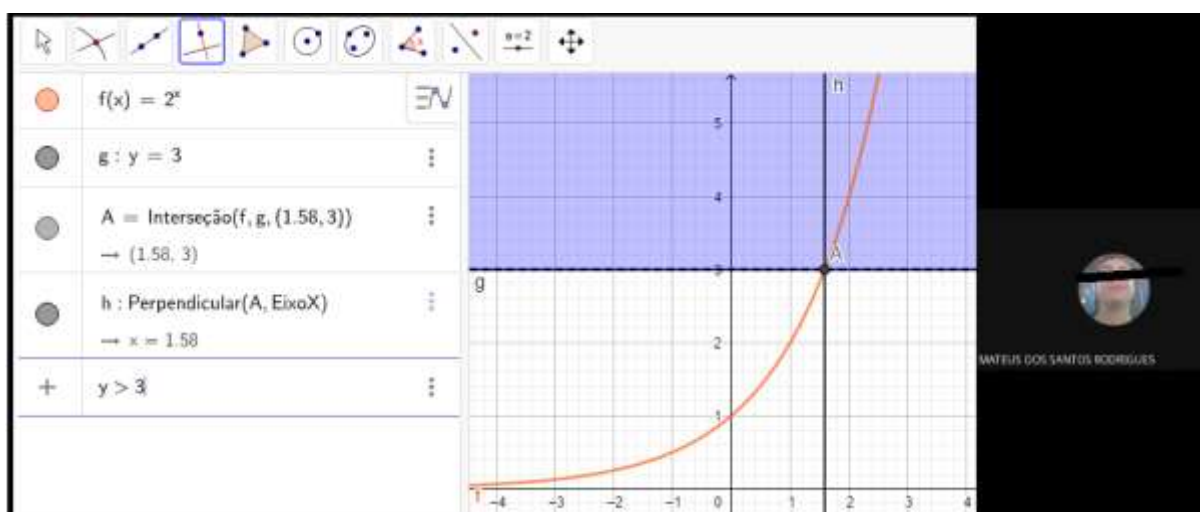


Fonte: Próprio do Autor

E2 – Sim.

Pesquisador – Agora vamos digitar em entrada $y > 3$, veja que acontece.

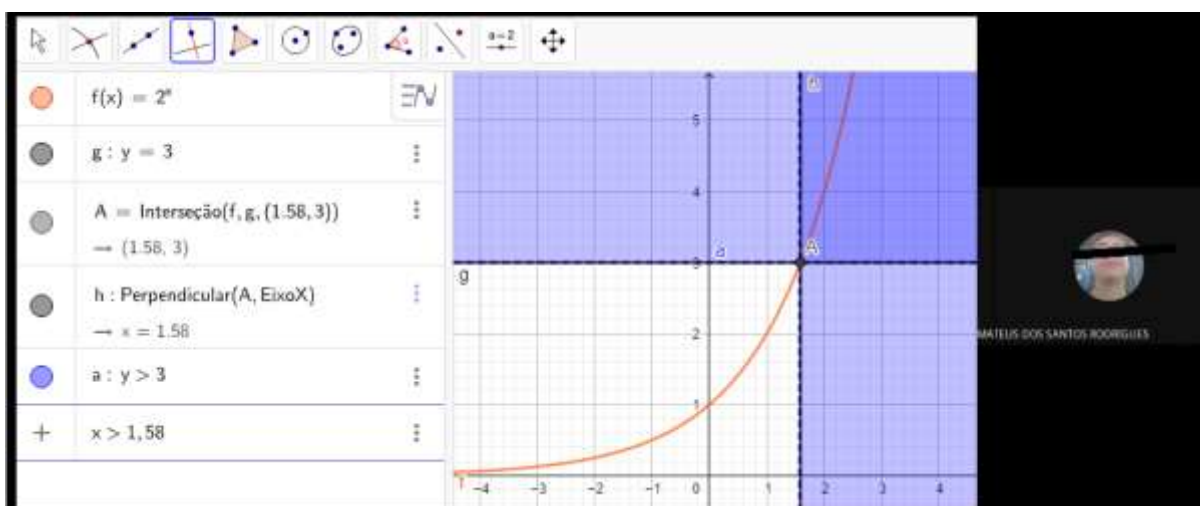
E2 – Ficou pintado como antes. (Figura 172).

Figura 172 - $y > 3$ 

Fonte: Próprio do Autor

Pesquisador – Isso, mas agora temos o gráfico. Digite em entrada no geogebra $x > 1,58$ ou $x < 1,58$. Qual você escolhe?

E2 - $x > 1,58$. (Figura 173).

Figura 173 - $x > 1,58$ 

Fonte: Próprio do Autor

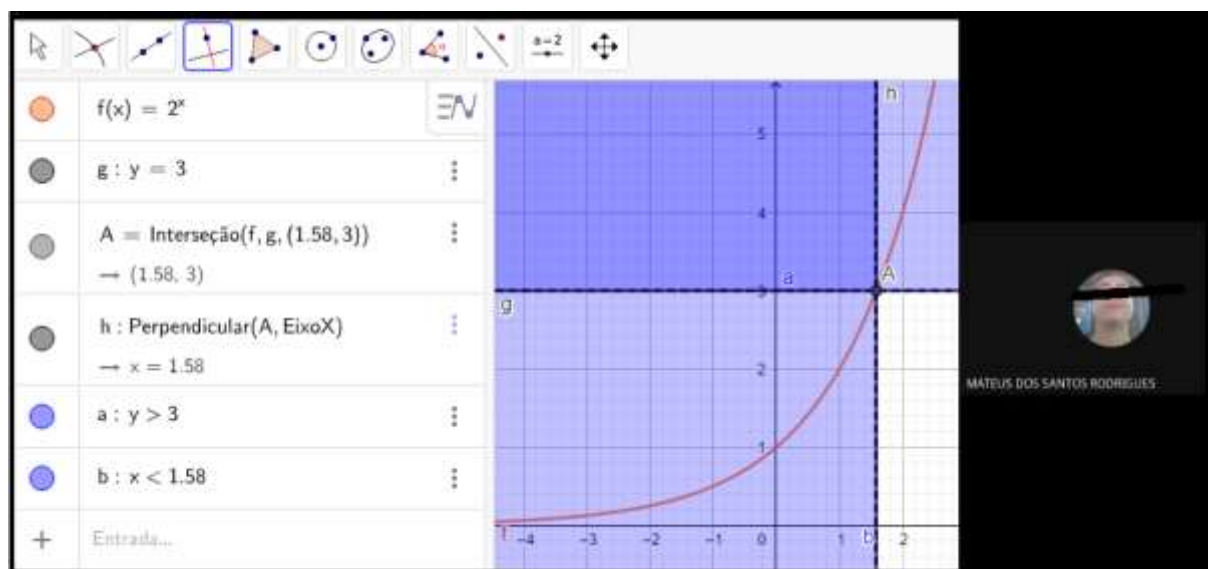
Pesquisador – Parabéns, você escolheu muito bem, repare que na figura 173, aparece uma área pintada duas vezes e nesta área você pode vê que tem gráfico da função $f(x) = 2^x$. Dessa forma para $x > 1,58$ é solução da inequação. Entendeu?

E2 – Acho que sim.

Pesquisador – Vamos fazer para $x < 1,58$ e verifique a parte pintada duas vezes.

E2 – Ok. (Figura 174).

Figura 174 - $x < 1,58$



Fonte: Próprio do Autor

Pesquisador – O que aconteceu?

E2 – Ficou pintado para o outro lado.

Pesquisador – tem gráfico neste lado que está pintado duas vezes?

E2 – Não.

Pesquisador – Exatamente, por isso que está errado. Entendeu?

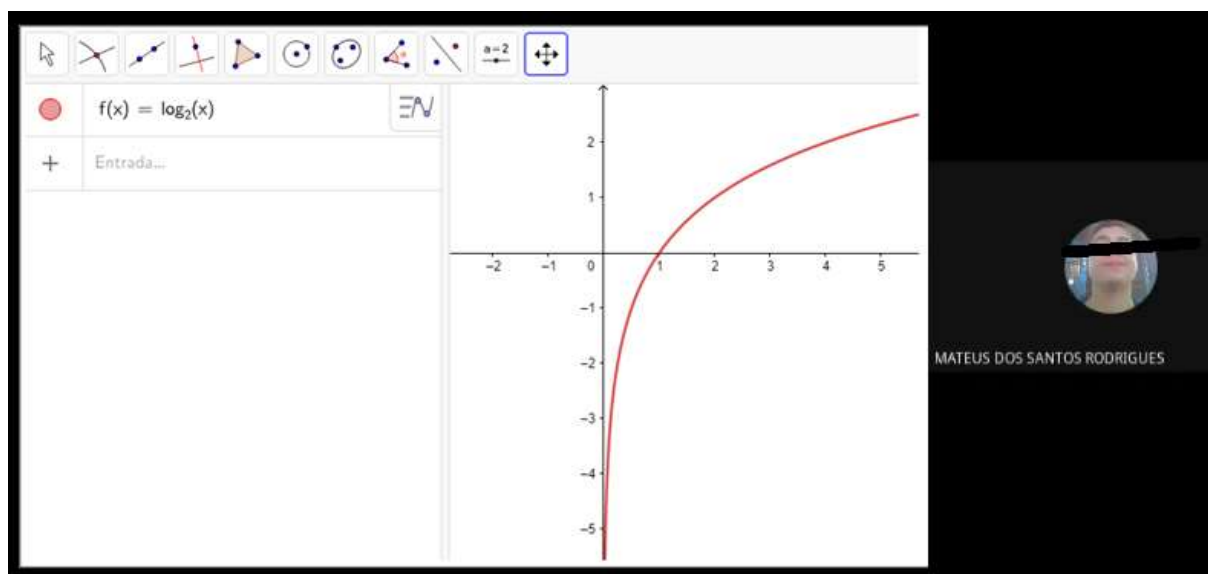
E2 – Sim.

O quinto momento com duração de 15 minutos vai ser uma repetição do que já vimos, primeiramente foi visto a função logarítmica, quando é crescente ou decrescente, calcular as imagens da função logarítmica dados valores de x e calcular o domínio x , quando são dados valores para a imagens da função logarítmica e equação Logarítmica.

Pesquisador - A função exponencial é inversa da função logarítmica e vice versa, Ok. Digite em entrada no geogebra a função logarítmica $f(x) = \log_2 x$.

E2 – Digitei. (Figura 175).

Figura 175 - Função logarítmica - crescente



Fonte: Próprio do Autor

Pesquisador – O que você observou no gráfico da função $f(x) = \log_2 x$?

E2 – Fez uma curva para a direita.

Pesquisador – Sim, você acha que é uma função crescente ou decrescente?

E2 – Crescente.

Pesquisador – Por que você acha isso?

E2 – Porque vem de lá de baixo e vai pra cima.

Pesquisador – É pode ser, em relação ao gráfico podemos também destacar que o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$ está localizado somente em uma parte do plano cartesiano, lado direito do eixo y, se inserir dados, valores de x maiores, obtemos valores de y maiores. Entendeu?

E2 – Sim.

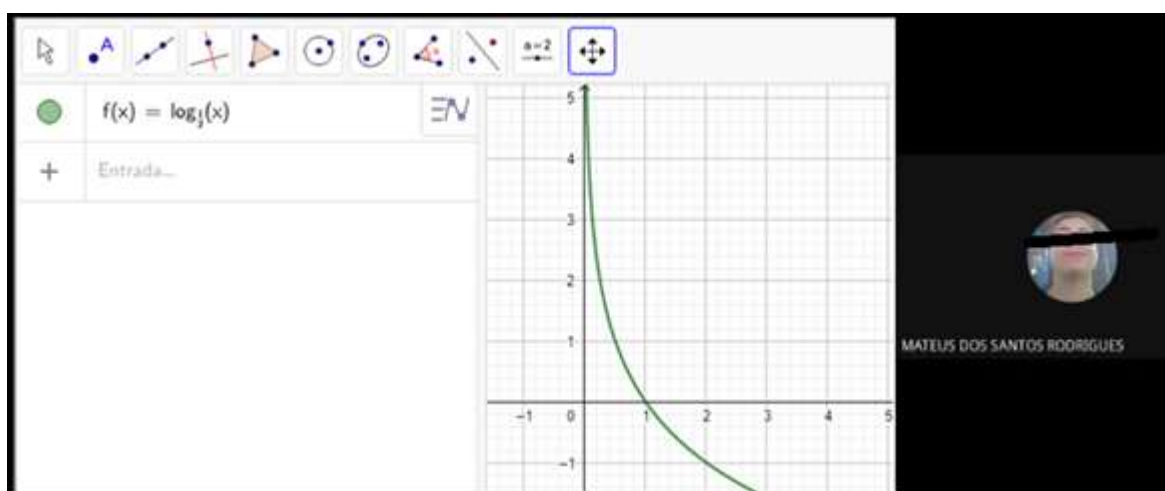
Pesquisador – O crescimento da função $f(x) = \log_2 x$ está relacionado também com a base, da mesma forma que na exponencial, olhando a função você poderia me dizer qual a base desta função?

E2 – Dois?

Pesquisador – Muito bem, se eu mudar a base da função $f(x) = \log_2 x$ para número meio $\left(\frac{1}{2}\right)$ o que aconteceu com a função?

E2 – O gráfico mudou de posição, ficou de cima pra baixo, mas continuo do mesmo lado. (Figura 176).

Figura 176 - Função logarítmica - decrescente



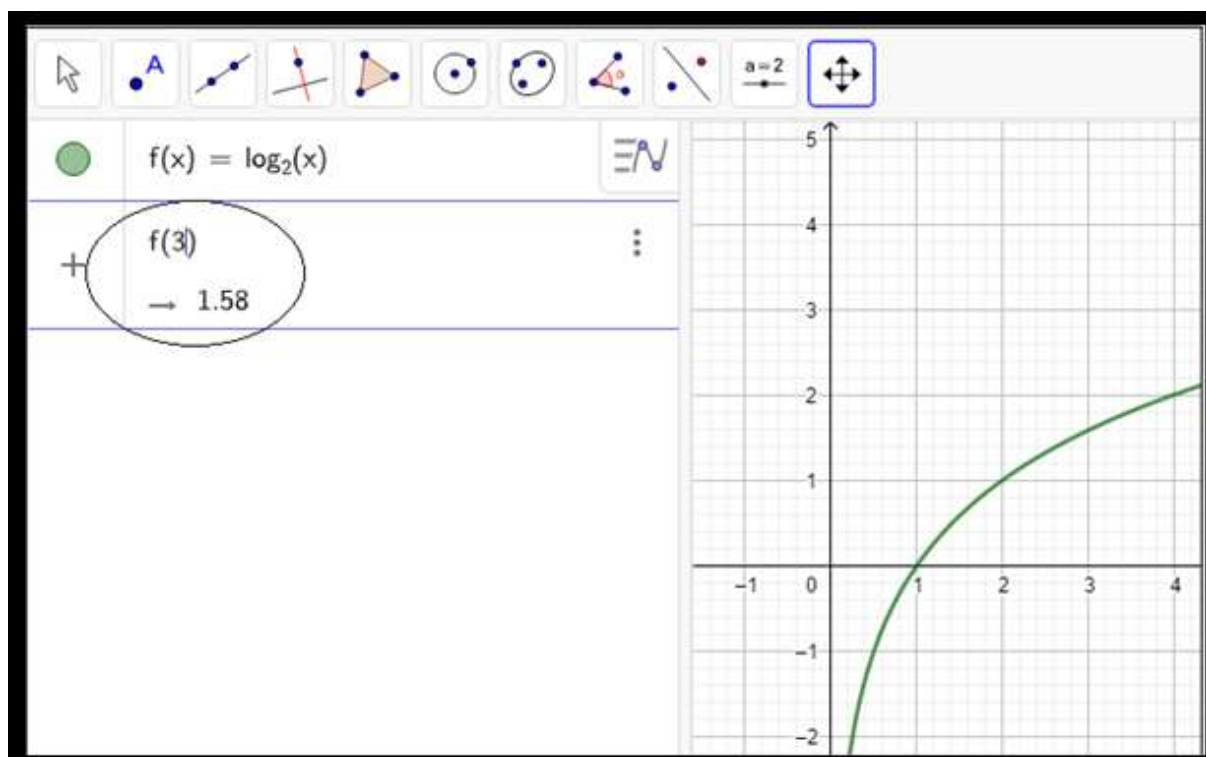
Fonte: Próprio do Autor

Pesquisador – Muito bem. Dessa forma podemos dizer que esta função é crescente ou decrescente?

E2 – Decrescente.

Pesquisador – Vamos determinar para $f(3)$ na função $f(x) = \log_2 x$, algebricamente e pelo gráfico.

E2 – Algebricamente, é só digitar em entrada $f(3)$. (Figura 177).

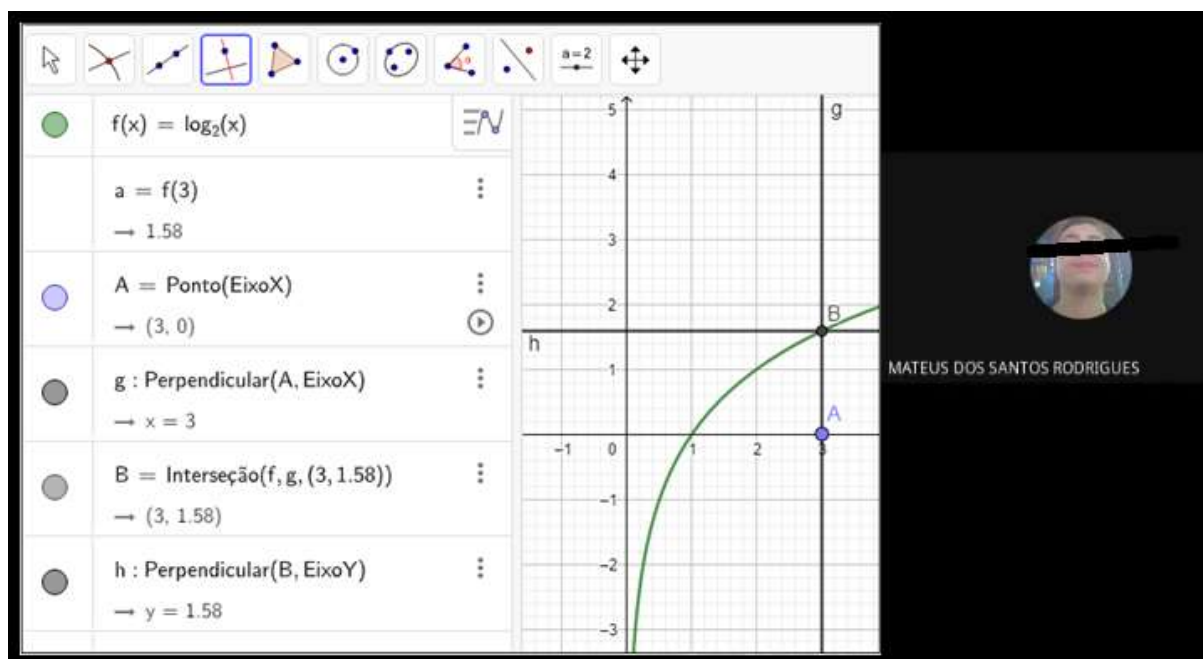
Figura 177 - Cálculo de $f(3)$ na função logarítmica crescente

Fonte: Própria do autor

Pesquisador – Muito bem... e graficamente?

E2 – Temos que seguir os passos que utilizamos nas questões anterior, devemos clicar no ícone “reta perpendicular” e depois no ponto que queremos determinar a sua imagem, em seguida devemos clicar no ícone “interseção entre dois objetos”, selecionamos a reta perpendicular que passa pelo ponto 3 e o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$, dessa forma determinaremos um outro ponto e por fim, novamente, no ícone “reta perpendicular” seleciona-se esse novo ponto e o eixo y. (Figura 178).

Figura 178 - Modo gráfico - F(3)

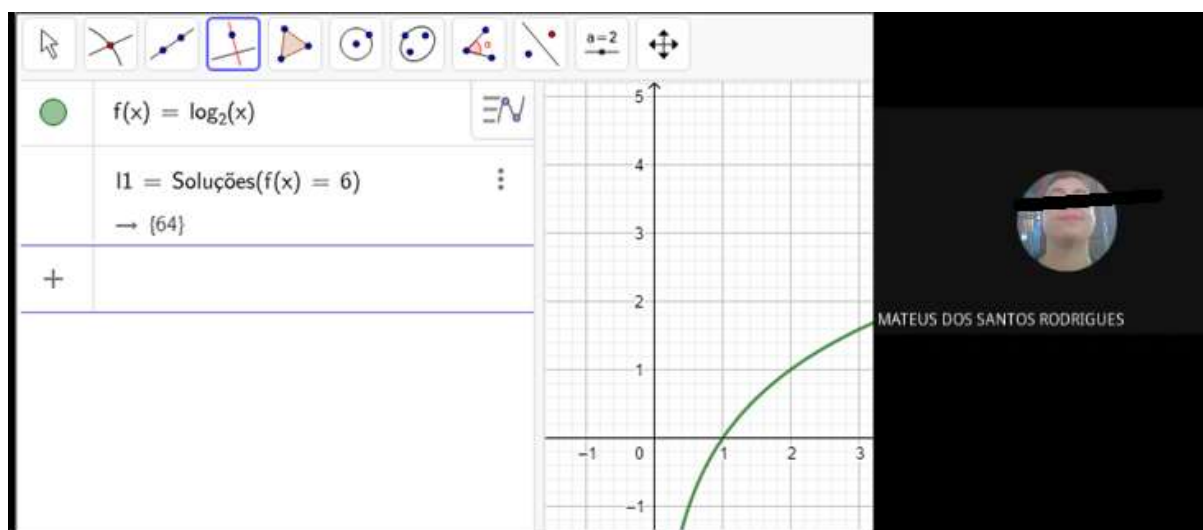


Fonte: Próprio do Autor

Pesquisador – Parabéns, é isso mesmo. Vamos determinar o domínio (x) da função $f(x) = \log_2 x$ cuja imagem é $f(x) = 6$.

E2 – Algebricamente, temos que digitar em entrada soluções e depois a expressão $f(x) = 6$, dessa forma calculamos o valor de x , $x = 64$. (Figura 179).

Figura 179 - Soluções em logaritmos

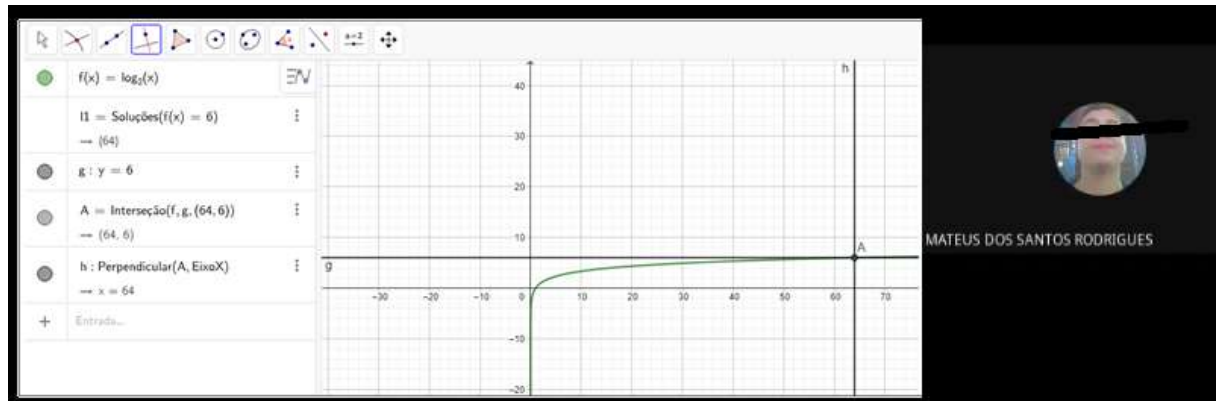


Fonte: Próprio do Autor

Pesquisador - Determine graficamente a solução para $f(x) = 6$, sendo $f(x) = \log_2 x$, usando o campo do geogebra.

E2 – Devemos primeiramente digitar em entrada a expressão $y = 6$ e posteriormente clicar no ícone “interseção entre dois objetos”, dessa forma determinamos o valor de x (domínio) para $f(x) = 6$. (Figura 180).

Figura 180 - Graficamente



Fonte: Próprio do Autor

Depois observamos que para calcular a equação logarítmica devemos proceder da mesma forma que fizemos na equação exponencial. Disse ao E2:

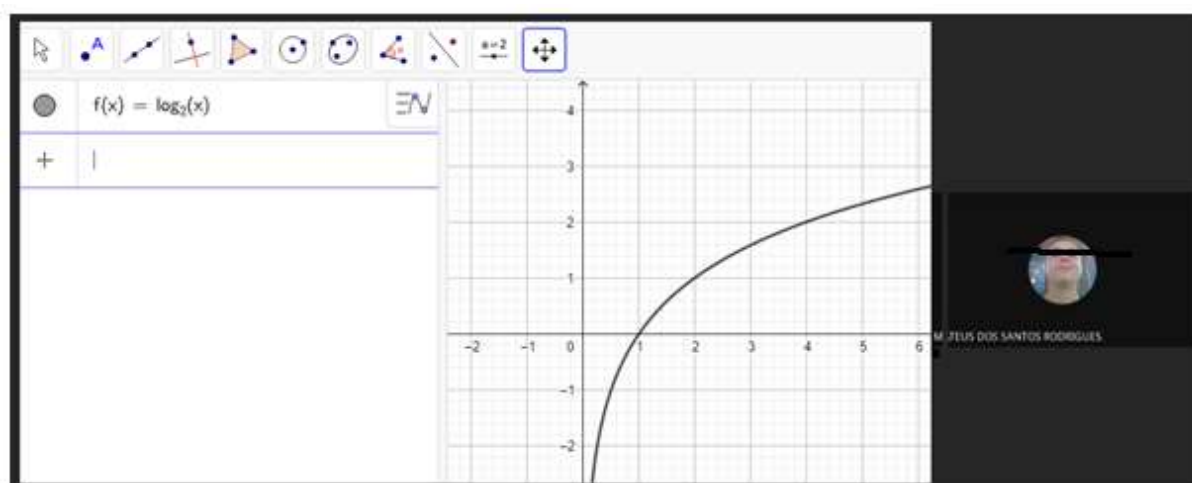
Pesquisador – Vamos determinar a solução para a seguinte equação logarítmica $\log_2 x = 3$.

E2 – Ok.

Pesquisador – Digite em entrada $f(x) = \log_2 x$.

E2 – Ok. (Figura 181).

Figura 181- Função Logarítmica

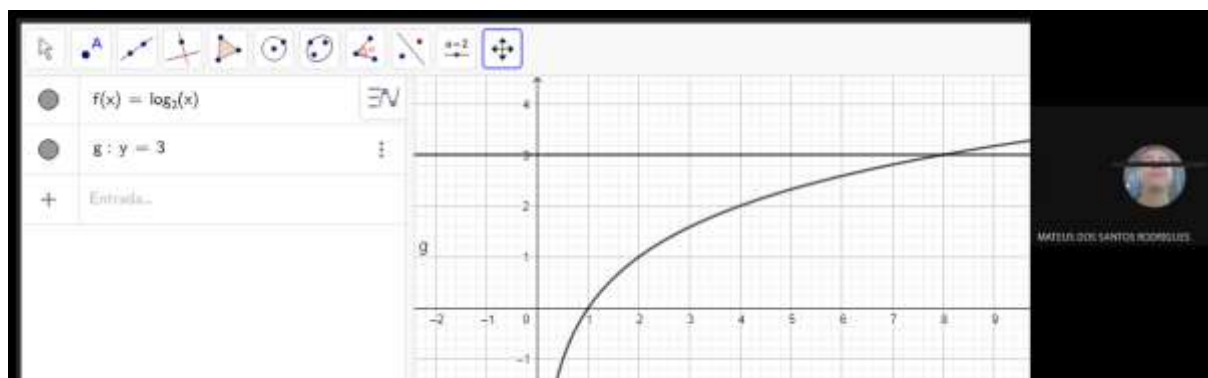


Fonte: Próprio do Autor

Pesquisador – Agora, devemos digitar em entrada a seguinte expressão:

$y = 3$. Tecle Enter.

E2 – Ok. (Figura 182).

Figura 182 - $y = 3$ no logaritmo

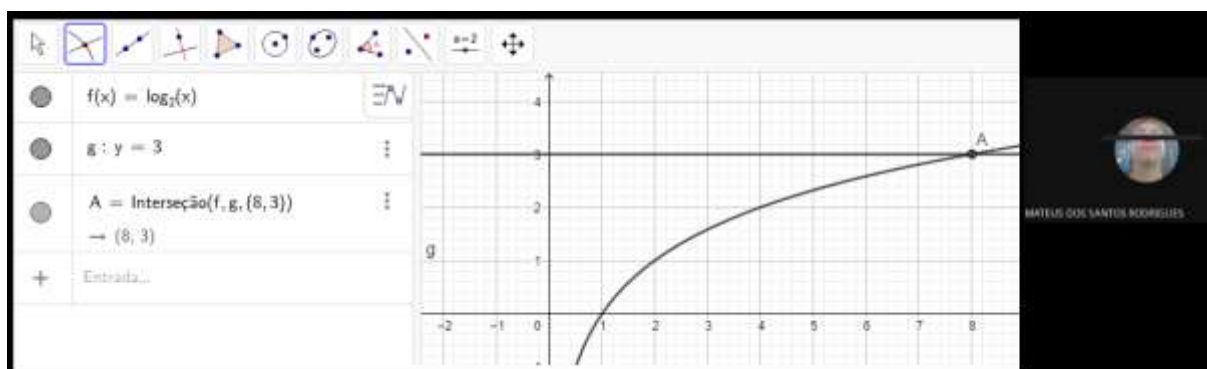
Fonte: Próprio do Autor

Pesquisador – Clique no ícone “interseção entre dois objetos”, selecione

$y = 3$ e a função $f(x) = \log_2 x$.

E2 – Ok. (Figura 183).

Figura 183 - interseção entre dois objetos

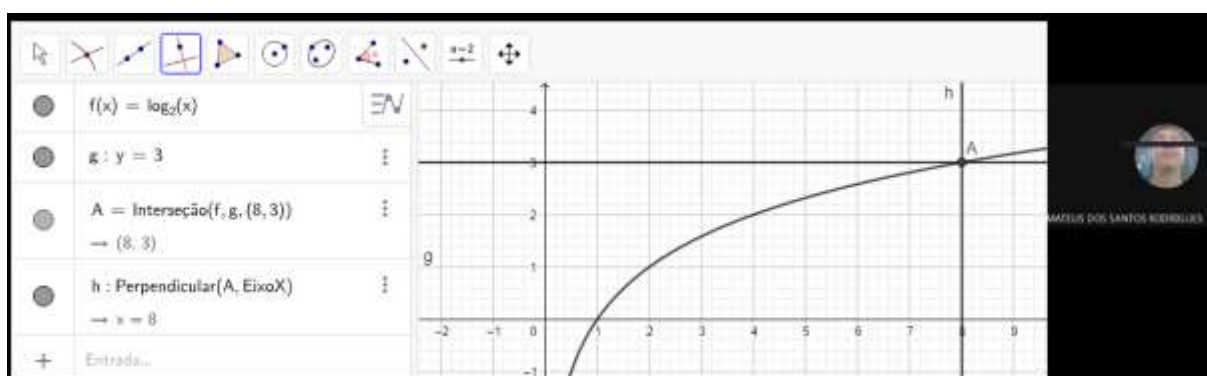


Fonte: Próprio do Autor

Pesquisador – Observe que já obtemos a nossa resposta no campo algébrico do geogebra (Figura 183) em interseção (resposta: 8), mas você pode situa esse ponto no eixo x. Basta para isso usar o ícone “reta perpendicular”, clique no ponto A, depois clique no eixo x e dá enter. O que aconteceu?

E2 – Desce uma reta no ponto A. (Figura 184).

Figura 184 - Reta perpendicular



Fonte: Próprio do Autor

Pesquisador – Muito Bem, é a localização de nossa resposta, $x = 8$.

No sexto momento, durou aproximadamente 10 minutos. Falamos sobre a inequação logarítmica usamos para isso a parte gráfica do geogebra para calcular a solução da inequação logarítmica.

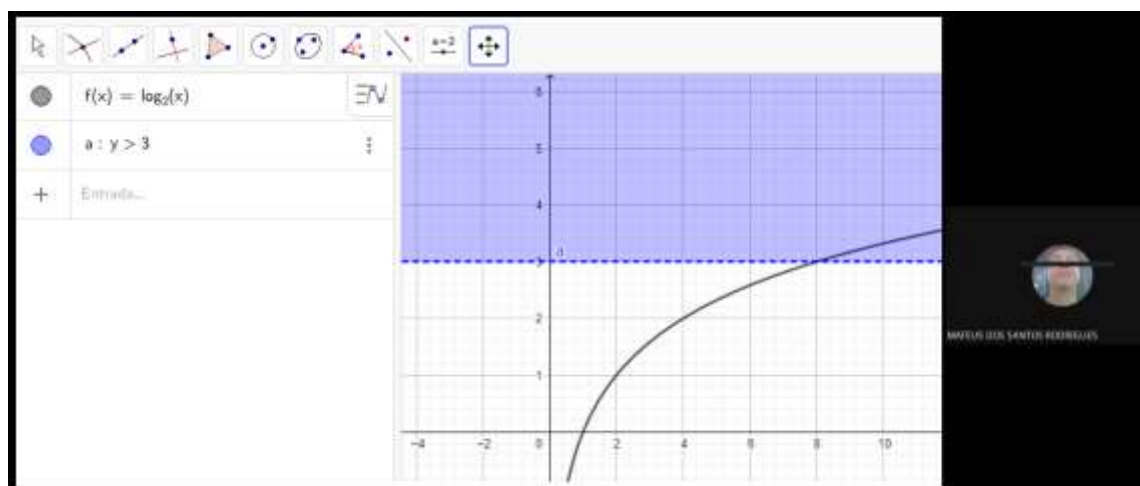
Pesquisador – Determine a solução da Inequação Logarítmica $\log_2 x > 3$. Usando a parte gráfica do geogebra você poderá vê a solução compreendendo mais o resultado obtido. Em entrada digite a função $f(x) = \log_2 x$ de enter. Você verá o gráfico da função. Ok.

E2 – Ok. (Figura 181).

Pesquisador – Em seguida você deverá escrever em entrada $y > 3$, pois é o que queremos calcular. Ok.

E2 – Ok.(Figura 185).

Figura 185 - $y > 3$ - Inequação Logarítmica



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Observe a parte pintada, possui gráfico da função $f(x) = \log_2 x$?

E2 – Sim.

Pesquisador – Agora, vamos determinar a imagem de 3 na função. Ok

E2 – Sim, mas já foi feito a imagem é 8. (Figura 184).

Pesquisador – Exatamente, perfeito. Dessa forma então responda a resposta vai ser $x > 8$ ou $x < 8$, quais das duas soluções você escolhe?

E2 - $x > 8$.

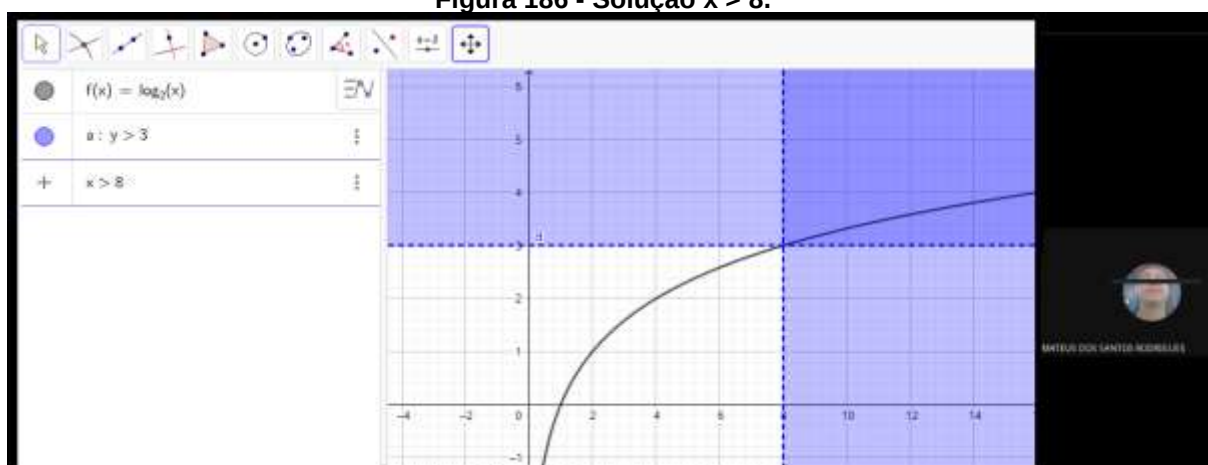
Pesquisador – Tens algum motivo para que a escolha seja essa?

E2 – Por ser crescente a função?

Pesquisador – Isso. A função $f(x) = \log_2 x$ é crescente, pelo fato da base ser um número maior que 1, então devemos manter o sinal gráfico, que no caso é maior. Digite em entrada no geogebra $x > 8$, e me diga o que aconteceu?

E2 – Ok. Ficou uma pintura mais forte, depois do 8 e acima do 3. (Figura 186).

Figura 186 - Solução $x > 8$.



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Exatamente, Te pergunto? Tem gráfico $(f(x))$ nessa parte que está pintada duas vezes?

E2 – Sim.

Pesquisador – Então você acertou, essa é a resposta. Agora vamos fazer para $y < 8$. E me diga se tem gráfico $f(x)$ na pintura mais forte.

E2 – Não tem gráfico. (Figura 187).

Figura 187 - Escolha errada



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Exatamente, por isso que não é a resposta, a solução da inequação.

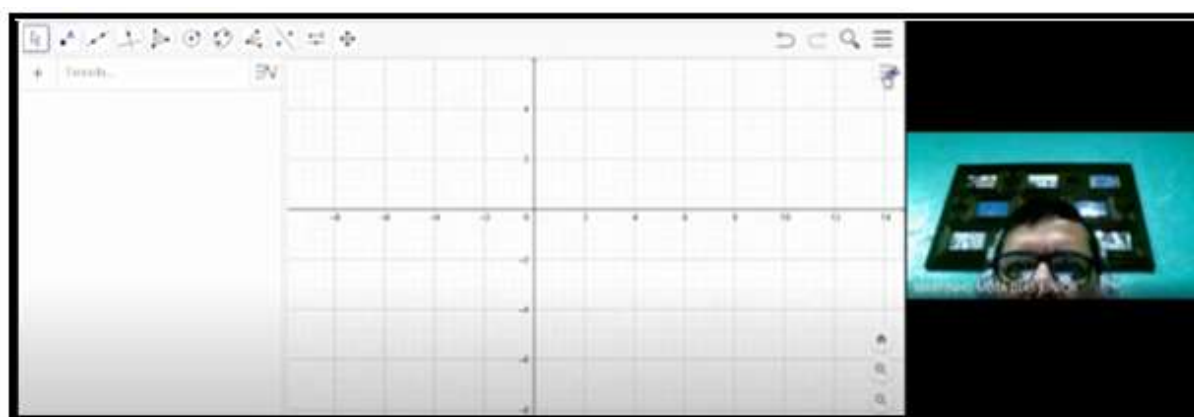
12.2.2.2. Segundo encontro do Experimento 2 (E2).

O segundo encontro foi realizado no dia 25 de fevereiro de 2021, com duração de aproximadamente de uma hora e vinte e quatro minutos, divididos em 6 momentos.

O primeiro momento teve uma duração de 15 minutos, e pedi para que o E2 entrasse no google, fizemos o compartilhamento da tela do E2, fiz a leitura da primeira atividade da dissertação e fiz o E2 inserir os dados da tabela da primeira atividade no excel do geogebra. Assim disse:

Pesquisador – No Geogebra na parte gráfica, do lado direito acima temos um ícone com uma figura de triângulo e com o círculo, clique nele. (Figura 188).

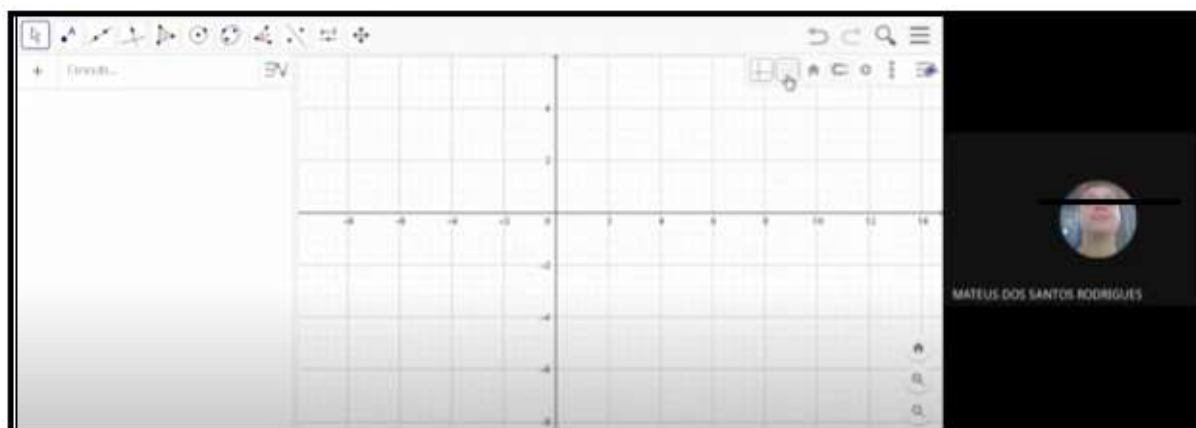
Figura 188 - Ícone com uma figura de triângulo e círculo



Fonte: Própria do Autor

E2 – Ok, apareceu uma aba ao lado. (Figura 189).

Figura 189 - Aba do ícone Triângulo círculo



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador - Clique nos três pontinhos um em cima do outro.

E2 - Abre outra aba, com seis ícones.(Figura 190).

Figura 190 - Planilha

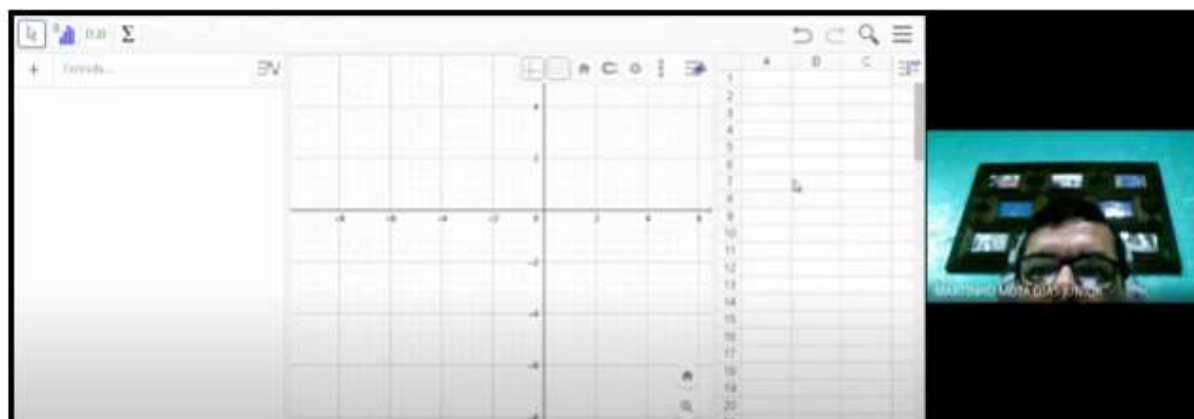


Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Escolha planilha.

E2 – Ok. (Figura 191).

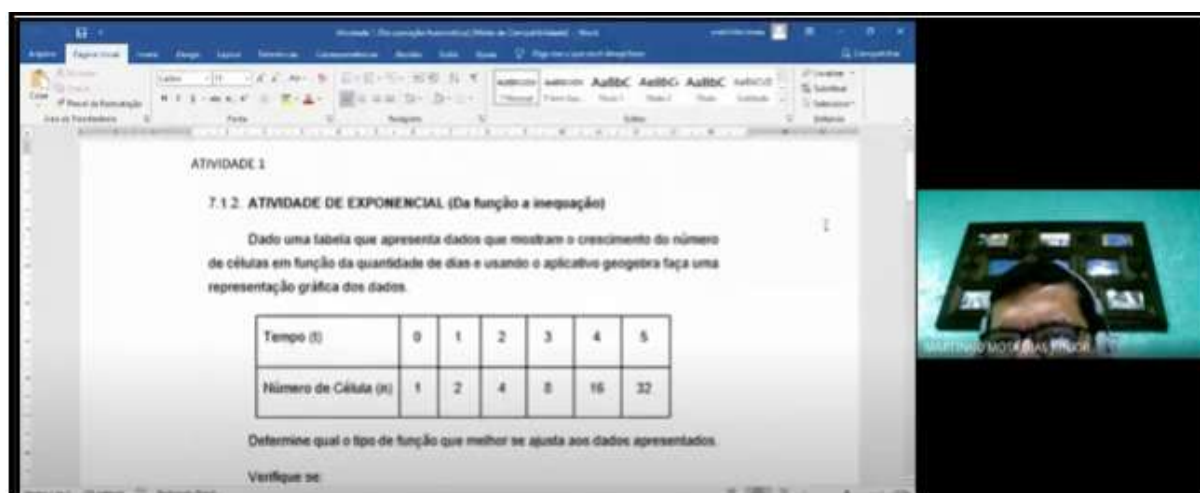
Figura 191 - Excel no Geogebra



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Nesta planilha digite a tabela da primeira atividade, não esqueça que o tempo corresponderá ao Domínio (x), deverá ser inserido na coluna A do Excel do geogebra e o número de células corresponderá a Imagem (y), deverá ser inserido na coluna B do Excel do geogebra. (Figura 192).

Figura 192 - Tabela da 1ª atividade



ATIVIDADE 1

7.1.2. ATIVIDADE DE EXPONENCIAL (Da função a inequação)

Dado uma tabela que apresenta dados que mostram o crescimento do número de células em função da quantidade de dias e usando o aplicativo geogebra faça uma representação gráfica dos dados.

Tempo (t)	0	1	2	3	4	5
Número de Célula (n)	1	2	4	8	16	32

Determine qual o tipo de função que melhor se ajusta aos dados apresentados.

Verifique se:

Fonte: Própria do Autor

E2 – Tá certo, digitei.(Figura 193).

Figura 193 - Tabela preenchida



Exercício...

2V

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24

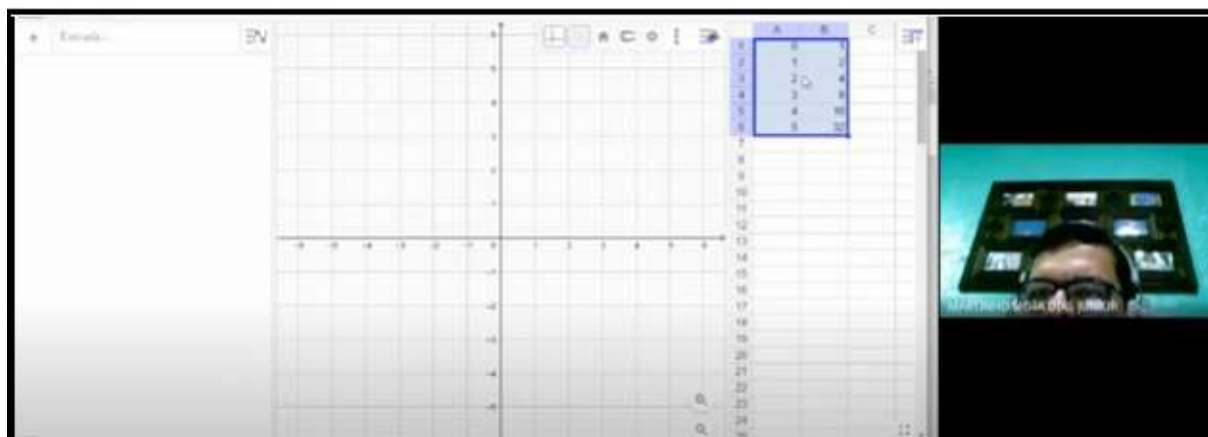
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24

MATEUS DOS SANTOS RODRIGUES

Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Muito bem, agora selecione a tabela que você preencheu.

E2 – Ok. (Figura 194).

Figura 194 - Tabela selecionada

Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Clique com o lado direito do mouse em cima da seleção que você fez.

E2 – Ok , abriu outra janela. (Figura 195).

Figura 195 - Criar

Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Clique em criar e depois lista de pontos.

E2 – Pronto. Apareceu outra aba com seis opções. (Lista, Lista de pontos, Matriz, Tabela, Caminho Poligonal ,Tabela de Operação). (Figura196).

Figura 196 Outras opções

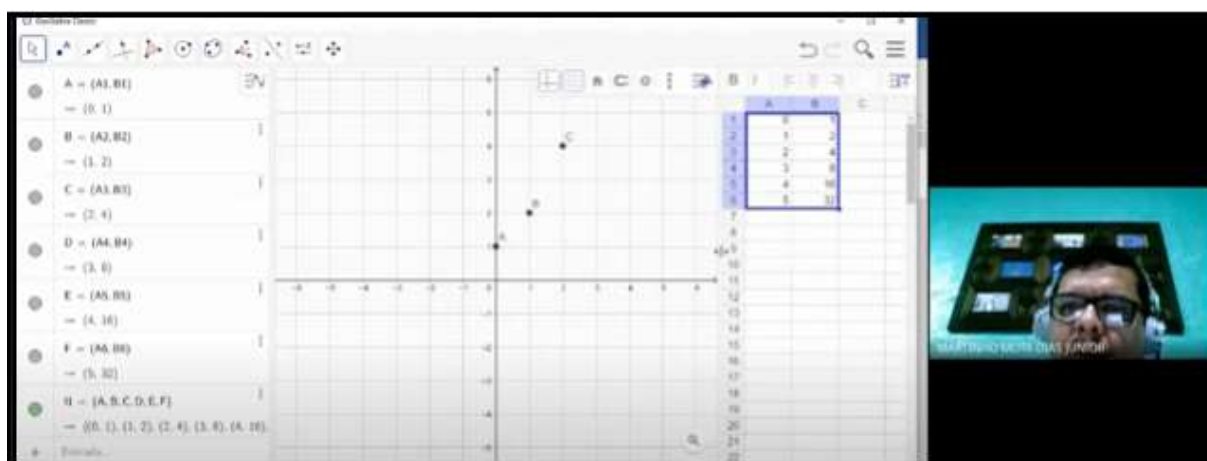


Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Escolha “lista de pontos” o que acontece?

E2 – Apareceu uns pontos. (Figura 197).

Figura 197 - Pontos Coordenados



Fonte: Própria do Autor

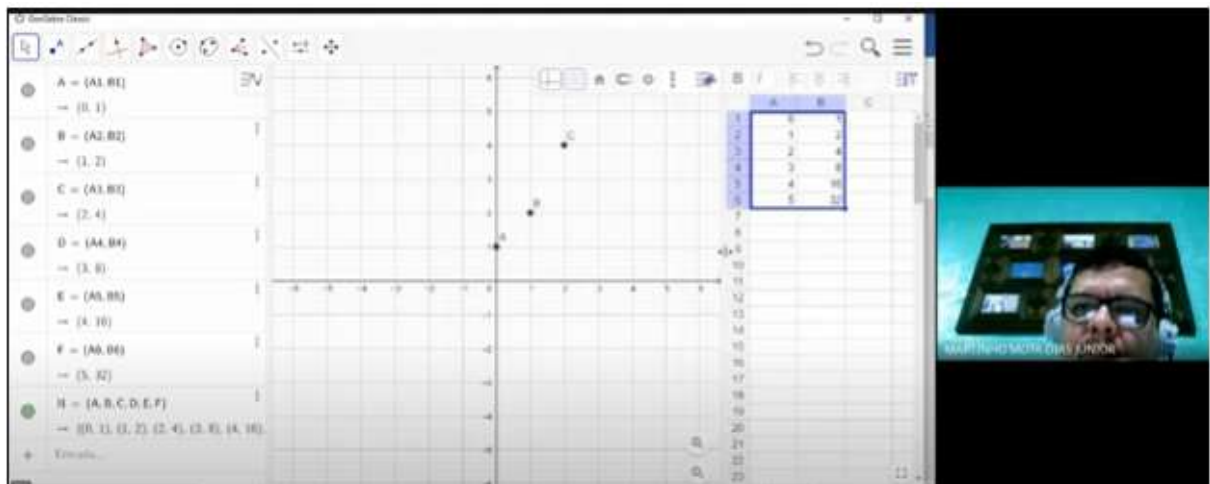
Pesquisador – Não foi só pontos que apareceu na parte gráfica do geogebra, apareceu também na parte algébrica os pares de números da tabela que você digitou e cada um representado por uma letra maiúscula, o primeiro número é o valor x, abscissa e o segundo número é o valor y, ordenada, juntos formam os pares ordenado, todos representados graficamente na parte algébrica. Entendeu?

E2 – Sim.

Pesquisador – Vamos eliminar a tabela que criamos, clique no ícone que está a direita, superior do campo Excel do geogebra, ok.

E2 – Ok. (Figura 198).

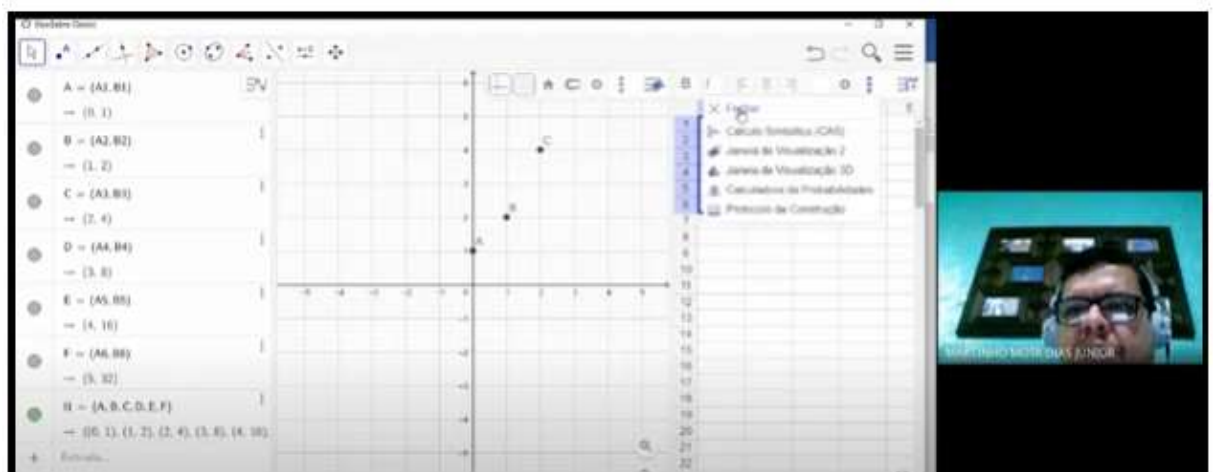
Figura 198 - Deletar o Excel



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador - Aparecerá uma aba, com os três pontinhos, clique nos três pontinhos e escolha fechar. (Figura 199).

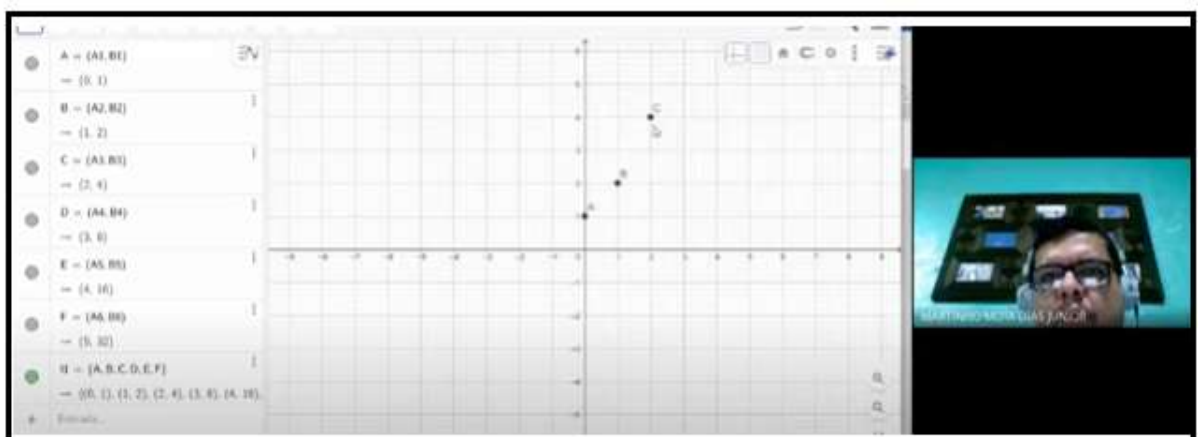
Figura 199 - Fechar



Fonte: Própria do Autor

E2 – Ok, fechei. (Figura 200).

Figura 200 - Retorno a dois ambientes



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador - Voltamos para dois ambientes, a parte algébrica e a parte gráfica. Qual a função que melhor representa esses pontos?

E2 – A crescente.

Pesquisador – Não, não...

E2 – Não lembro.

Pesquisador – É a exponencial.

E2 – Há... eu pensava que exponencial fosse a fórmula.

Pesquisador – Qual é a expressão matemática que representa a função exponencial?

E2 – Não sei...

Pesquisador – É um número elevado a?

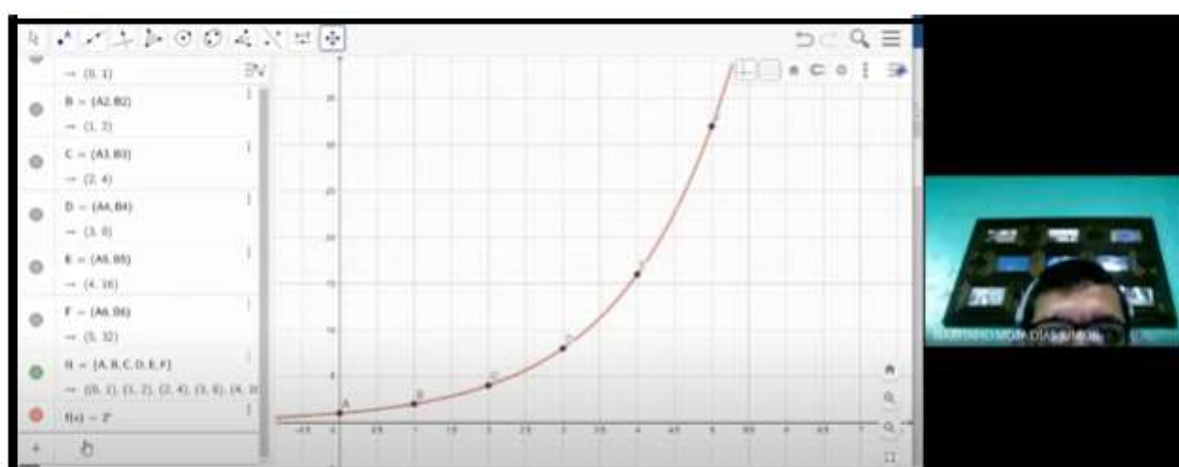
E2 – x ?

Pesquisador – Isso. Seria $f(x) = 2^x$. Correto, faça ai no seu computador.

E2 – Já fiz.

Pesquisador – O seu gráfico ficou desse jeito? (Figura 201).

Figura 201 - Gráfico da exponencial



Fonte: Própria do Autor

E2 – Sim.

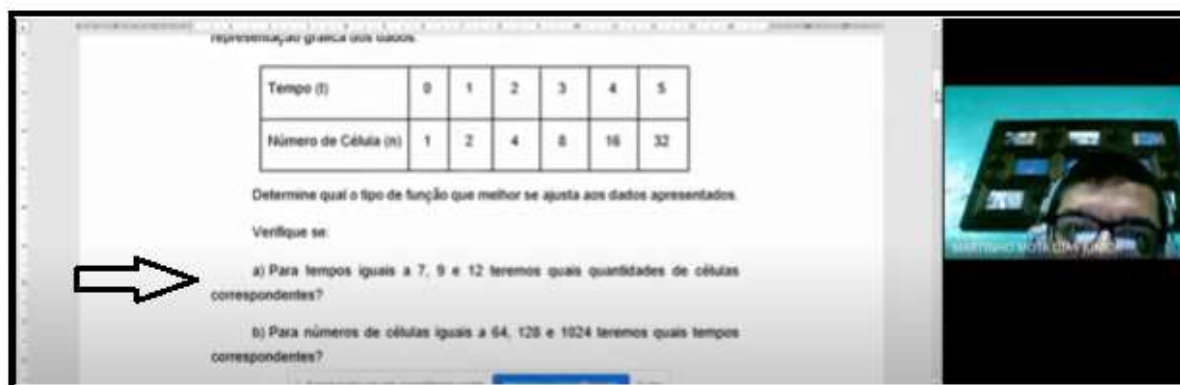
Pesquisador – Repare que o gráfico da exponencial “pegou” todos os pontos. Entendeu?

E2 – Sim.

No segundo momento teve uma duração de aproximadamente 10 minutos, fiz a leitura para o E2 da questão “a” da primeira atividade e resolvemos utilizando para isso o campo algébrico e o campo gráfico.

Pesquisador – Fiz a leitura da primeira atividade questão “a” e perguntei o tempo (7, 9 e 12) corresponde ao valor x ou y ? (Figura 202).

Figura 202 - Questão "a" da 1ª atividade



Fonte: Própria do Autor

E2 – é o “y”.

Pesquisador - Não veja a tabela, os números 7, 9 e 12, corresponde ao tempo ou ao número de célula, leia o texto, lembre-se que essa tabela foi preenchida no Excel do geogebra. Então corresponde a?

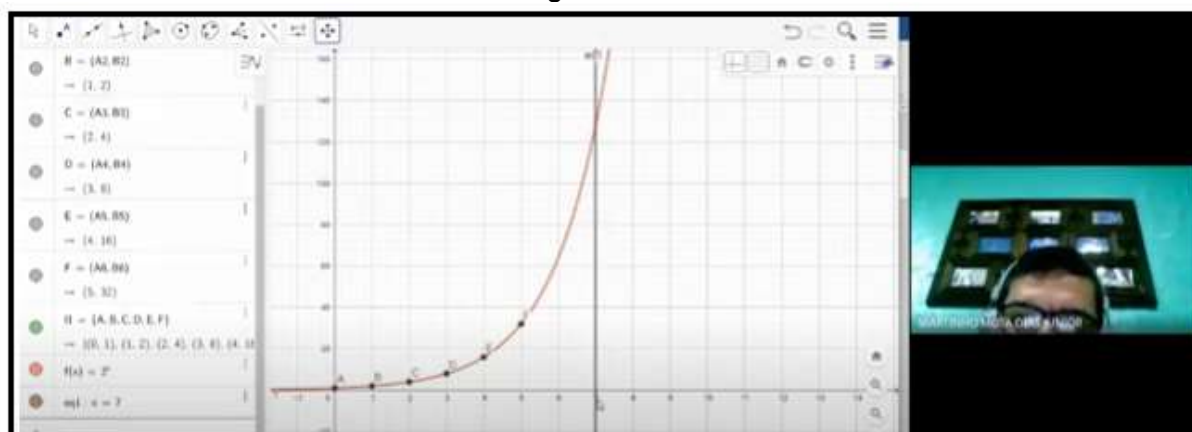
E2 – x .

Pesquisador – Correto. Qual o valor y de $x = 7$?

E2 – Não sei.

Pesquisador - Gráficamente, teremos que digitar em entrada $x = 7$, digite veja o que aconteceu.

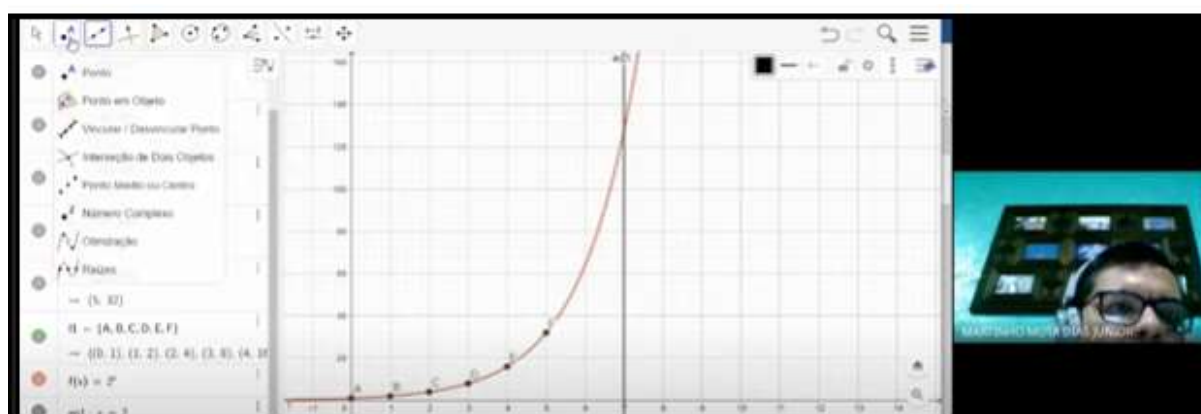
E2 – Ok (Figura 203).

Figura 203 - $x = 7$ 

Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Depois, devemos clicar no ícone “ponto A” localizado na barra de ferramenta. Vai abrir uma aba e você deverá escolher o ícone “ponto de interseção entre dois objetos”. (Figura 204).

Figura 204 - Ponto de interseção de dois objetos

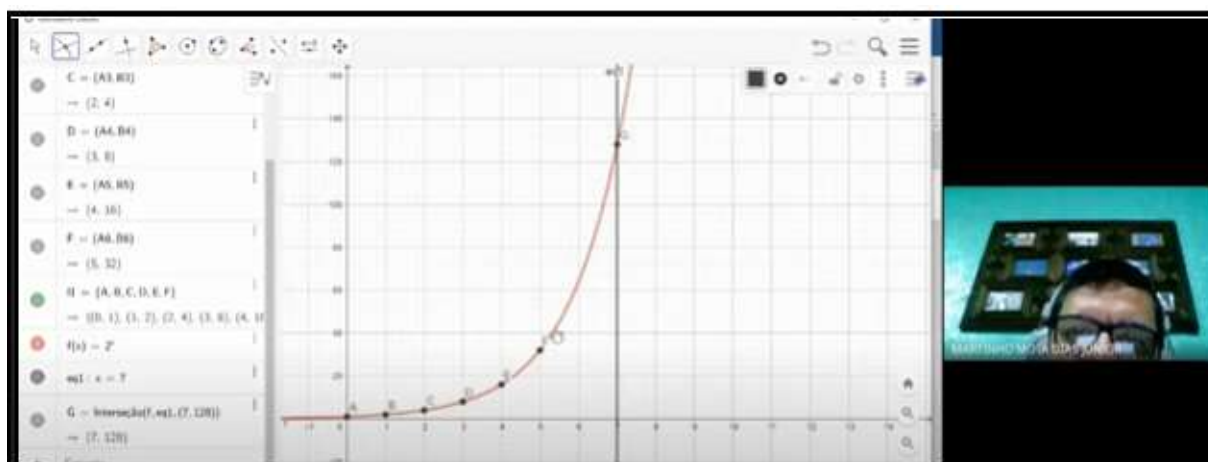


Fonte: Própria do Autor

E2 – Ok.

Pesquisador – Quando você seleciona o ponto de interseção entre dois objetos, você vai selecionar a reta que passa por $x = 7$ e depois seleciona a função. Dessa forma você determina um novo ponto, que nesse caso foi ponto G. Entendeu? (Figura 205).

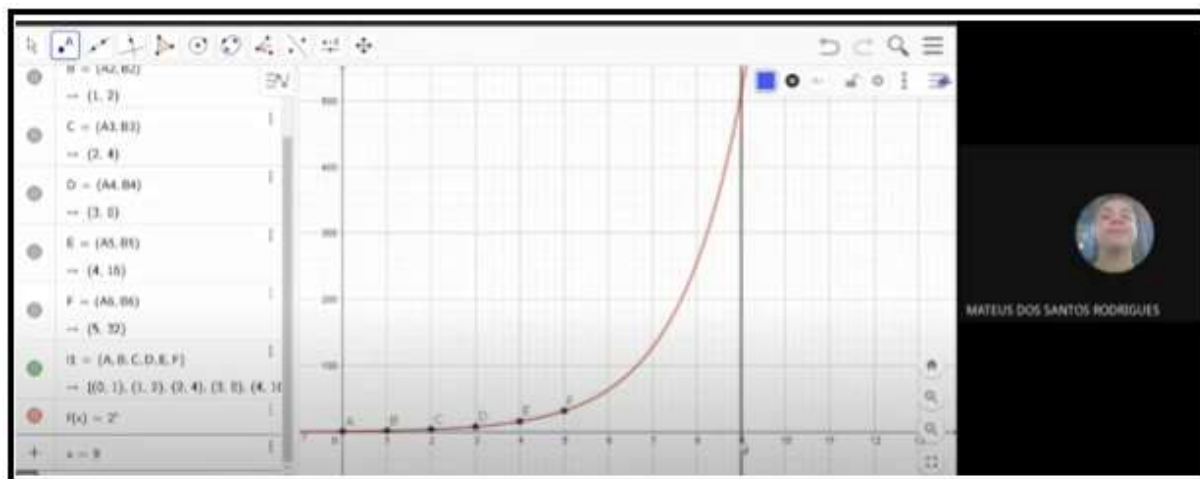
Figura 205 - Ponto G



Fonte: Própria do Autor

E2 – Ok.

Pesquisador – Observe que você fez na parte gráfica do geogebra, mas aparece na parte algébrica do geogebra. (Figura 205). Agora faça para os dois últimos números $x = 9$ e $x = 12$.

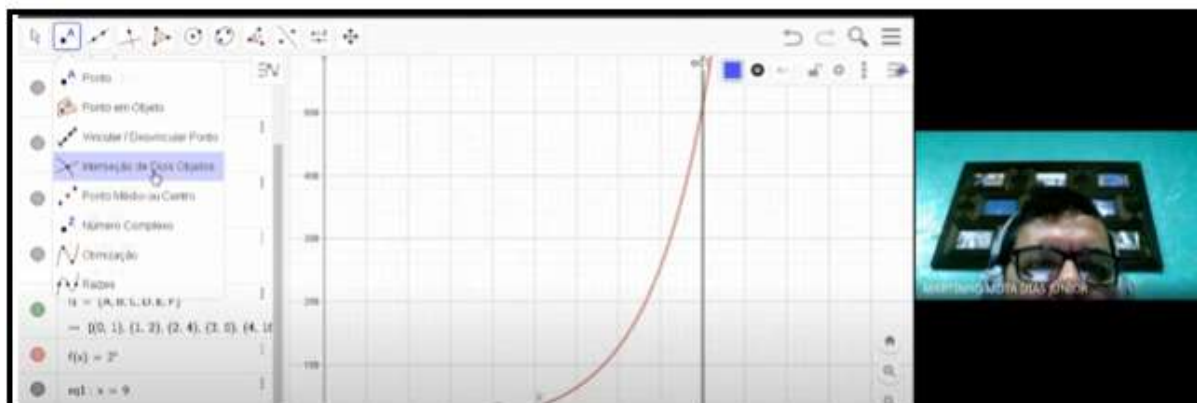
E2 – Digito $x = 9$. (Figura 206).Figura 206 - $x = 9$ 

Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Certo e depois?

E2 – Agora vou no ícone ponto de encontro entre dois objetos e clico neste ícone, seleciono a reta $x = 9$ e a função $f(x) = 2^x$. (Figura 207).

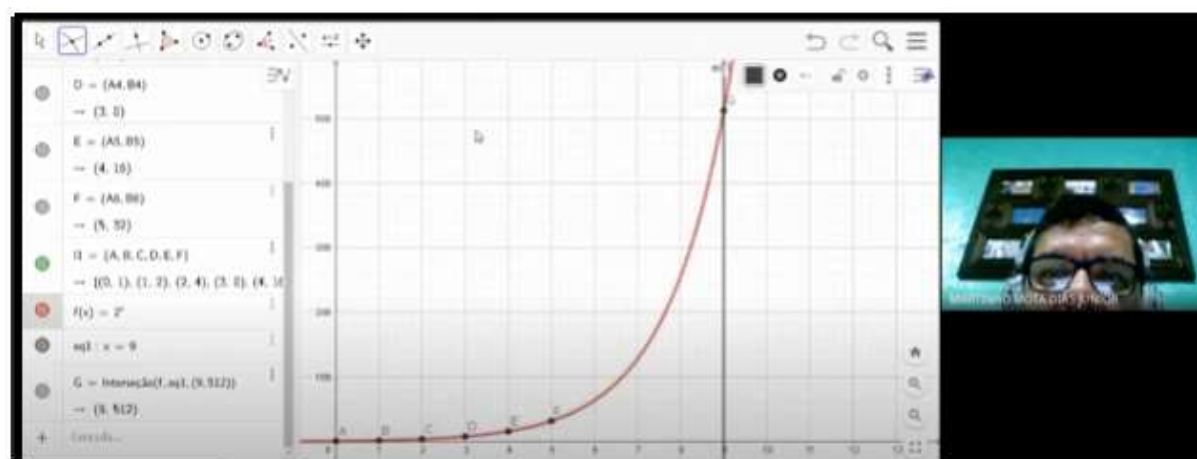
Figura 207 - interseção entre dois objetos



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Isso. Dessa forma você determina o ponto G. (Figura 208).

Figura 208 - Ponto G

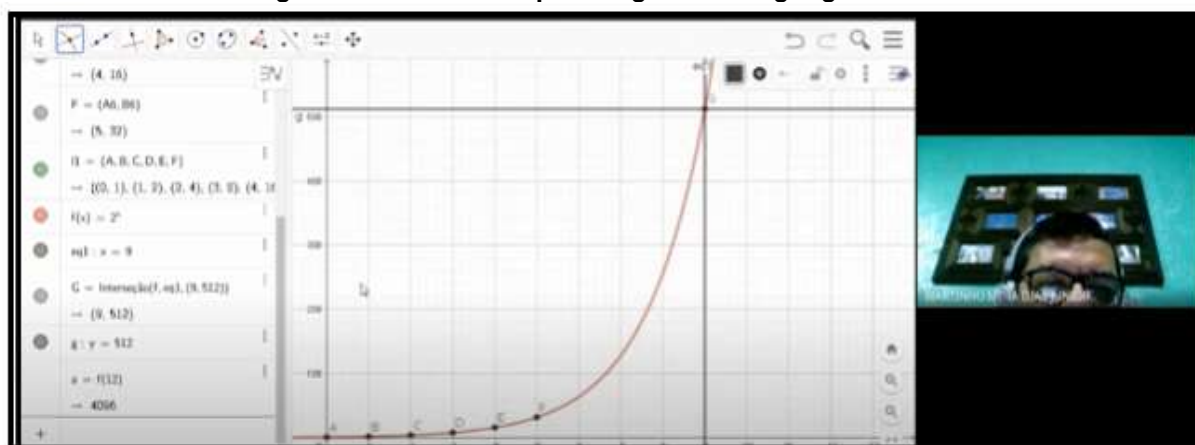


Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Vamos fazer usando somente a parte algébrica do geogebra. Vá em entrada e digite: $f(12)$ e dá o enter. Veja o que acontece.

E2 – Ok. (Figura 209).

Figura 209 - Usando a parte algébrica do geogebra



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Muito bem. É mais rápido, não é?

E2 – Sim. É mais prático.

Terceiro momento durou aproximadamente 12 minutos, fiz a leitura da questão “b” da primeira atividade e sua resolução é saber identificar se tá pedindo ou x ou y, neste caso é o valor de y (imagem). (Figura 210).

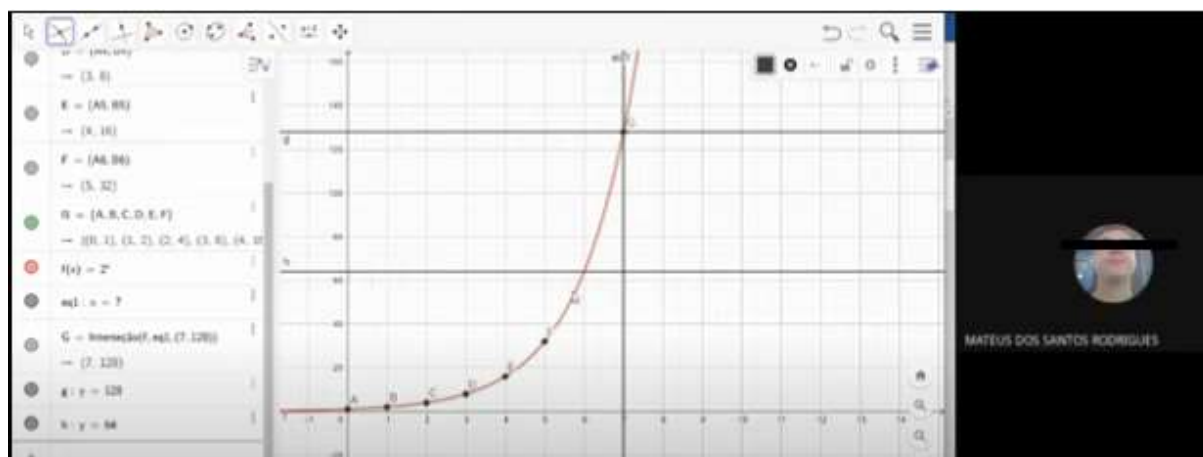
Figura 210 - Questão b - 1ª Atividade.

b) Para números de células iguais a 64, 128 e 1024 teremos quais tempos correspondentes?

Fonte: Própria do Autor

Depois para determinarmos os valores x (domínios) usamos a parte gráfica do geogebra, digitamos em entrada do geogebra a expressão $y = 64$, o geogebra traça uma reta passando por $y = 64$ e ao mesmo tempo essa reta toca a função $f(x) = 2^x$ em um ponto, (Figura 211).

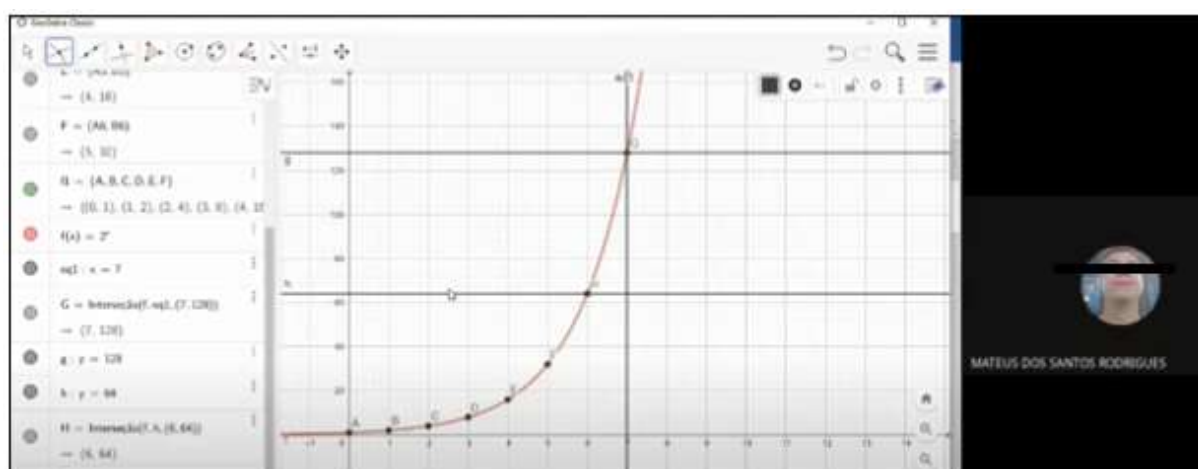
Figura 211 - Calcular o valor x.



Fonte: Própria do Autor

Depois clicamos no ícone “ponto de encontro entre dois objetos” e selecionamos a reta e a função, dessa forma o geogebra determina o ponto H em que podemos vê os valores x e y, dessa forma determinamos o valor de x. (Figura 212).

Figura 212 - Interseção entre dois pontos, ponto H.

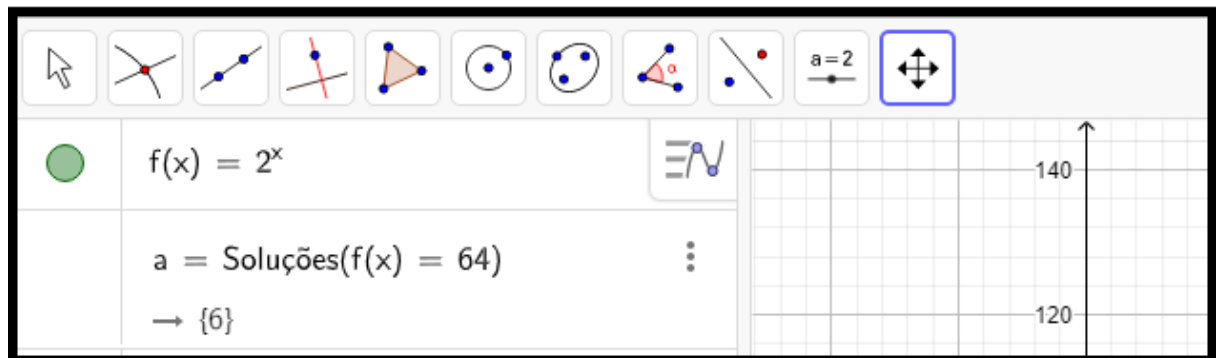


Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Podemos determinar usando somente a parte algébrica, você deve digitar em entrada Soluções e em soluções digite: $f(x)$ e dá o enter, dessa forma você determina o valor de x. Entendeu? Faça por favor.

E2 – Sim. (Figura 213).

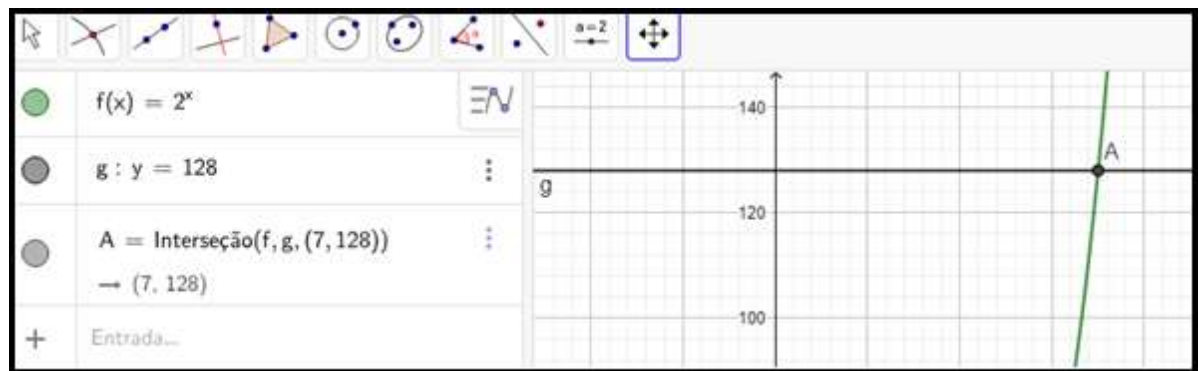
Figura 213 - Soluções.



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Faça para $y = 128$ da forma gráfica.

E2 – Ok (Figura 214).

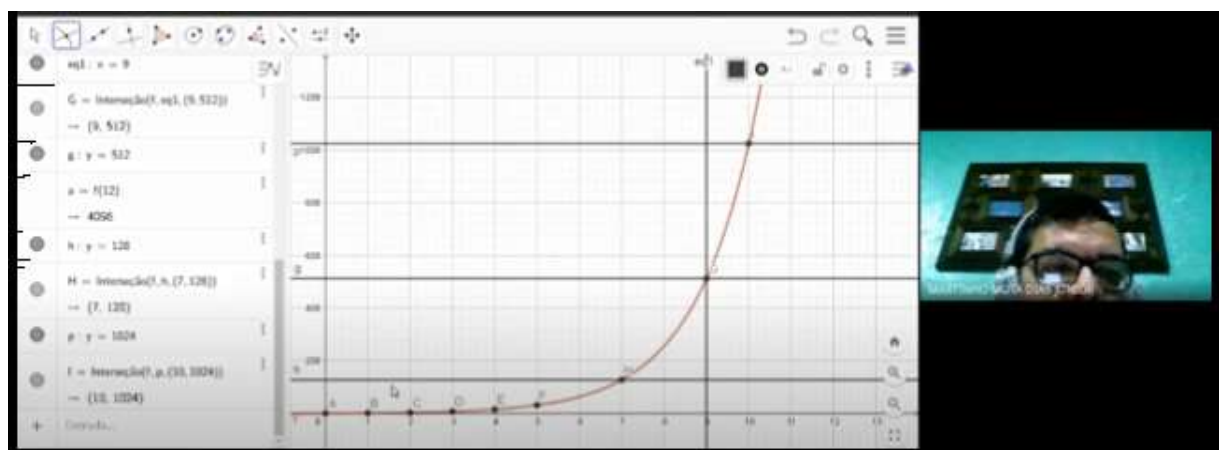
Figura 214 - Para $y = 128$.

Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Muito bem, agora faça para $y = 1024$.

E2 – Ok. A resposta de $x = 10$. (Figura 214).

Figura 215 - Forma Gráfica.



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Parabéns.

O quarto momento com duração de aproximadamente 15 minutos, fiz a leitura da questão “c” para o E2 e usamos novamente o campo algébrico e gráfico do geogebra para a resolução da questão. (Figura 216).

Figura 216 - Questão "c" da primeira Atividade.

c) O que representa dizer graficamente e algebricamente $2^x > 4$.

Fonte: Própria do Autor

Fiz um comentário em relação a função 2^x , perguntei ao E2.

Pesquisador - 2^x corresponde a x ou a y?

E2 – A y.

Pesquisador – Muito bem, e $y = f(x)$, concorda?

E2 – Sim.

Pesquisador – Desse modo posso dizer que $y > 4$, pois $f(x) > 4$, ok?

E2 – Ok.

Pesquisador – Algebricamente temos $2^x > 4$, mas $2^x > 2^2$, como as bases são iguais e maiores que um, termos expoentes $x > 2$, para satisfazer a inequação. Ok.

E2 – Sim.

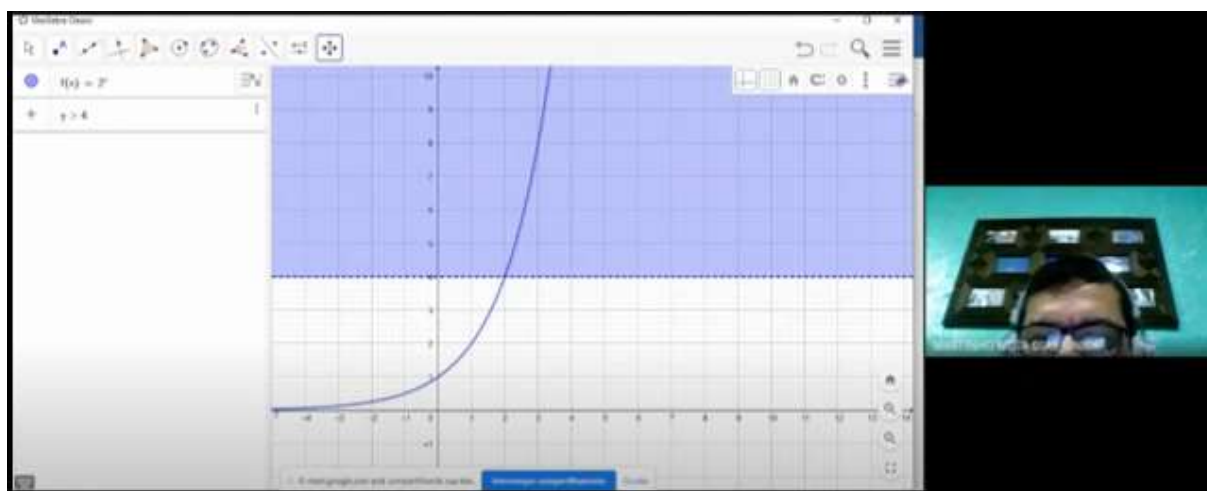
Pesquisador – Vamos fazer usando a parte gráfica do geogebra, ok?

E2 – Ok.

Pesquisador – Digite em entrada no geogebra a função $f(x) = 2^x$. E depois $y > 4$, o que aconteceu?

E2 – Ok, ficou pintado a parte de cima do 4. (Figura 217)

Figura 217- $y > 4$



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Muito bem. Por que está pontilhado a reta que passa por 4.

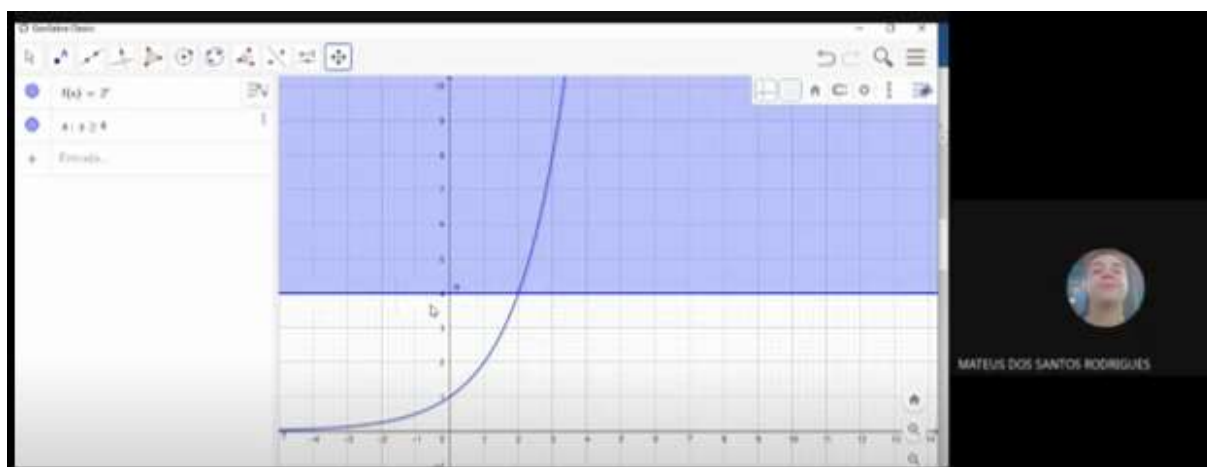
($y > 4$)?

E2 – Não sei.

Pesquisador – Digite em entrada do geogebra a expressão $y \geq 4$ e veja o que acontece com a reta.

E2 – Fica cheia. (Figura 218).

Figura 218 - Linha cheia



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador - Isso. Entendeu a diferença?

E2 – Sim.

Pesquisador -É por que $y > 4$ não tem o sinal da igualdade por isso o 4 não faz parte da solução da inequação $f(x) = 2^x$. Diferente para $y \geq 4$, o 4 faz parte da solução. Ok.

E2 – Ok.

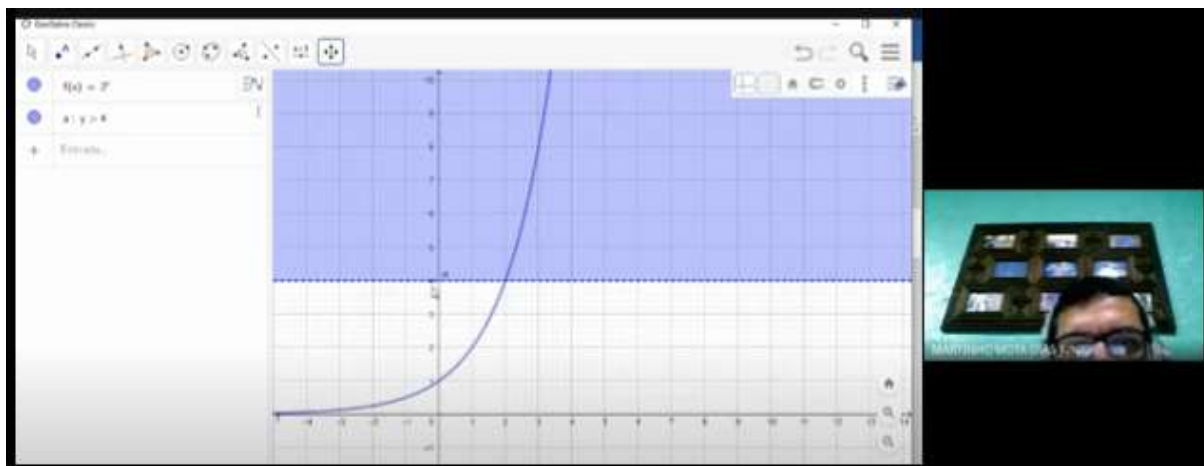
Pesquisador – Qual a solução da inequação $2^x > 4$?

E2 – Não sei.

Pesquisador – Para saber a solução da inequação $2^x > 4$. Digite a função $f(x) = 2^x$ em entrada do geogebra dê enter, depois digite $y > 4$ e dê enter.

E2 – Tudo bem. (Figura 219).

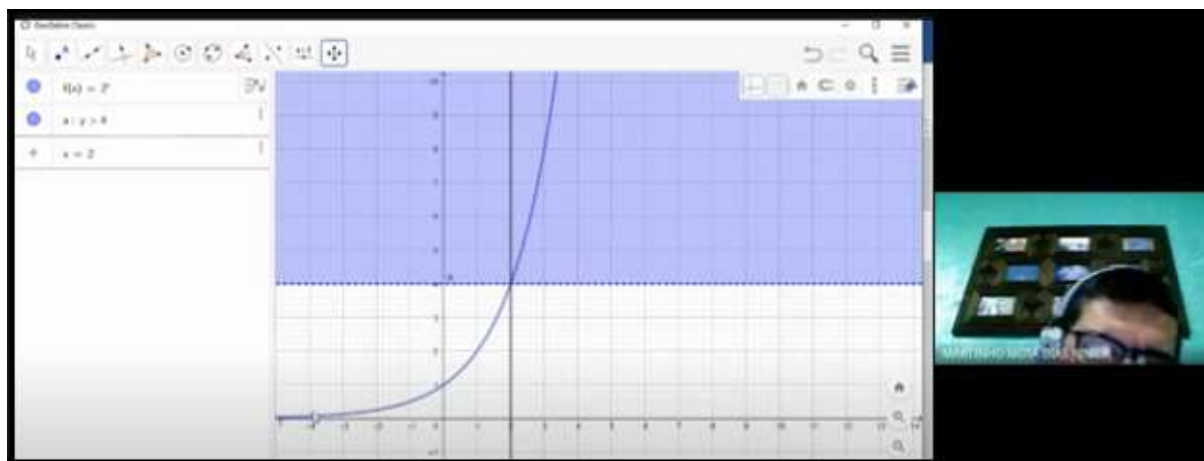
Figura 219 - Solução de $y > 4$.



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Em seguida devemos determinar o valor $y = 4$, que já sabemos. Ok

E2 – Sim, é 2. (Figura 220).

Figura 220 - $x = 2$ 

Fonte: Própria do Autor

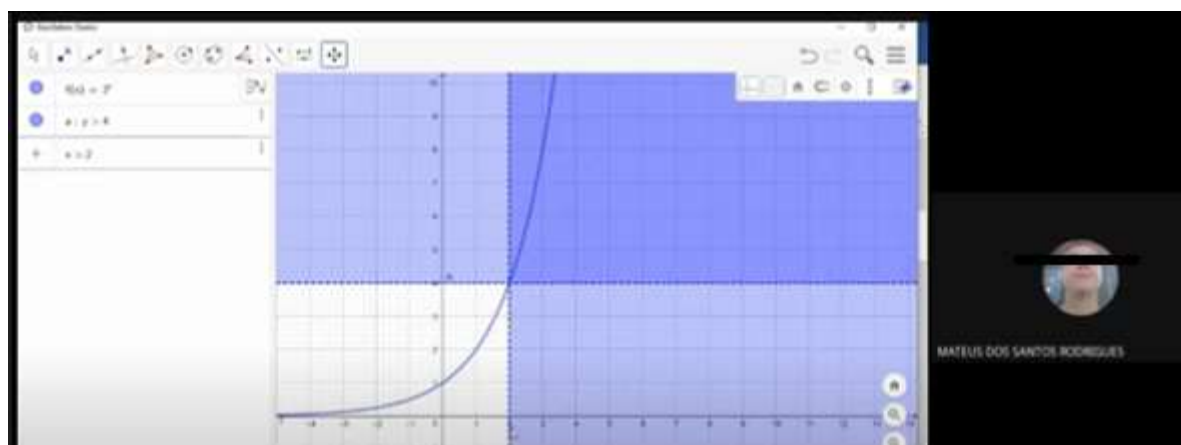
Pesquisador – Dessa forma podemos dizer: para a direita de x são os números $x > 2$ e para a esquerda de x , temos os números menores que x , quais das duas soluções você escolhe?

E2 – A primeira $x > 2$.

Pesquisador – Você chutou ou sabe por que?

E2 – Chutei.

Pesquisador – Tudo bem! você acertou. veja no gráfico do geogebra a solução da questão. (Figura 221).

Figura 221 - $x > 2$ Solução

Fonte: Própria do Autor

E2 – Não entendi.

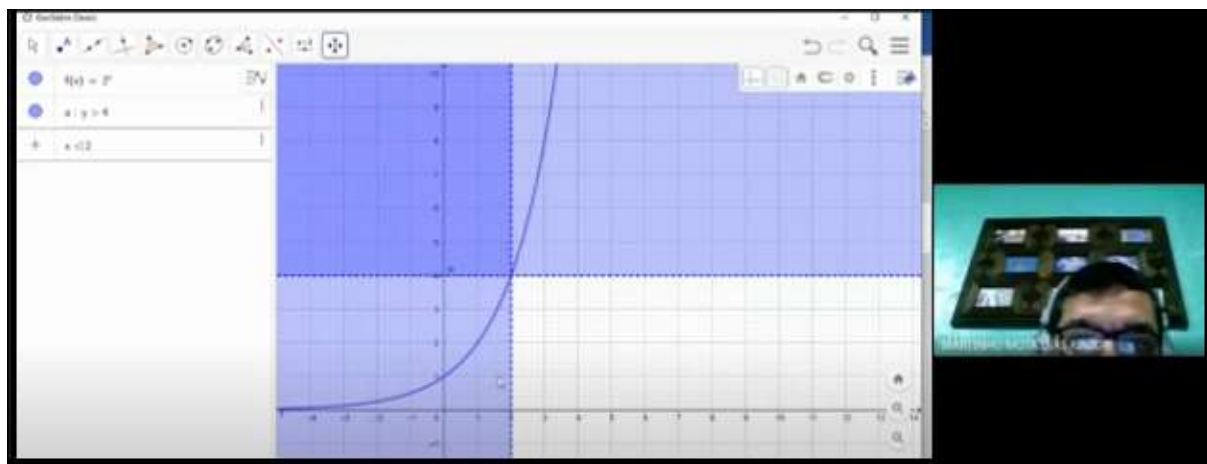
Pesquisador – Veja que quando digitamos em entrada do geogebra $x > 2$, o geogebra pinto a parte que corresponde aos números maiores que 2 e ao pintar você pode notar que houve uma sobreposição de cores, ficando uma parte mais escura e nessa parte possui gráfico da função $2^x > 4$?

E2 – Sim.

Pesquisador – Então $x > 2$ é a solução da inequação $2^x > 4$. Agora suponha que você tivesse escolhido $x < 2$ como ficaria a solução?

E2 – Ficou pintado do outro lado. (Figura 222).

Figura 222 - Resposta errada

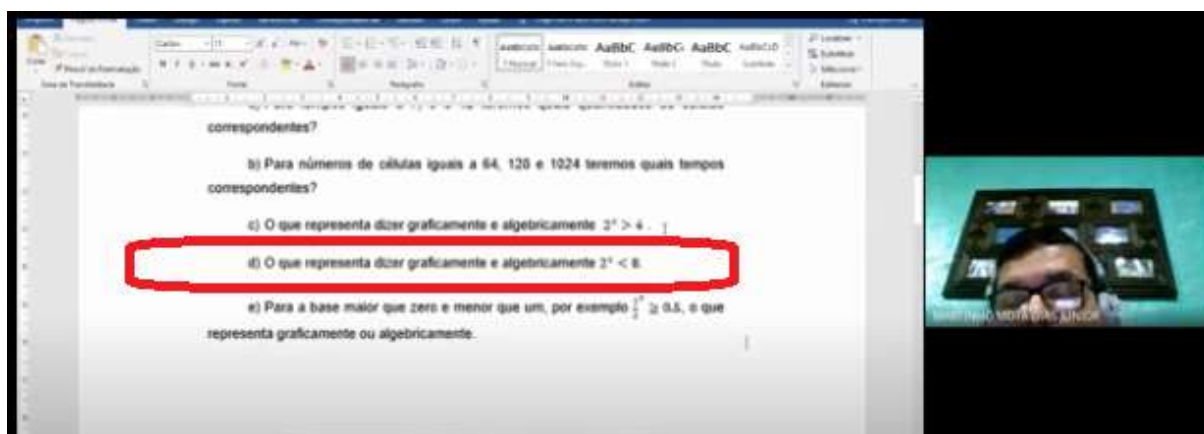


Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Perfeito, repare que não temos gráfico da função $2^x > 4$, logo não é a solução da inequação.

O quinto momento com duração de aproximadamente 16 minutos, fiz a leitura da questão “d” para o E2 e usamos novamente o campo algébrico e gráfico do geogebra para a resolução da questão. (Figura 223).

Figura 223 - questão d da 1ª atividade



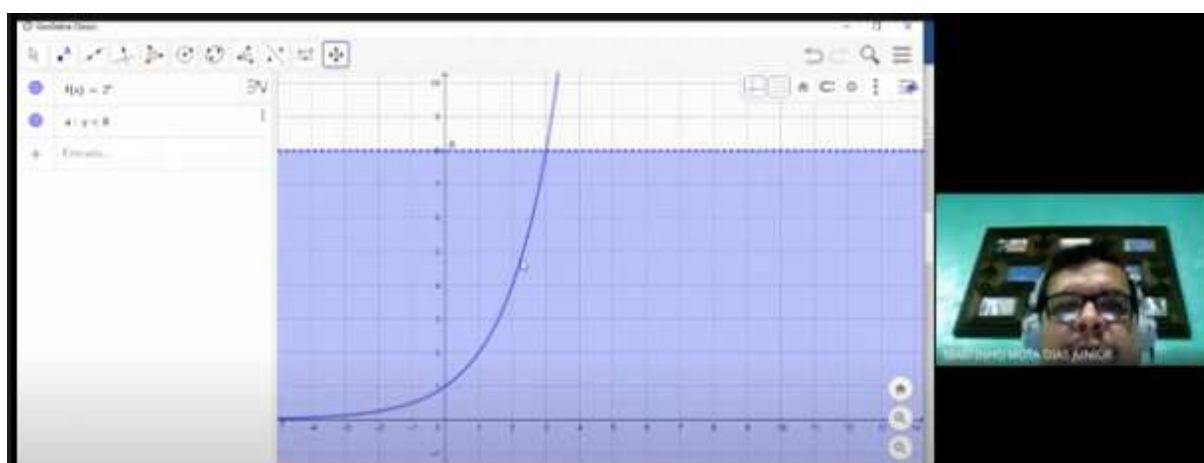
Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – A questão “c” se assemelha bastante a questão “d” em relação a sua resolução. Quando falamos $2^x < 8$, a expressão 2^x é a função $f(x)$ correto?

E2 – Sim.

Pesquisador – Dessa forma temos $y < 8$. Você deve digitar em entrada do geogebra primeiramente a $f(x) = 2^x$ e em seguida você digita $y < 8$ e diga o que acontece.

E2 – Ok, observei que a função é crescente, só que agora foi pintado a parte de baixo de oito. (Figura 224).

Figura 224 - $y < 8$ 

Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Muito bem. E quando $y = 8$, quanto vale x ?

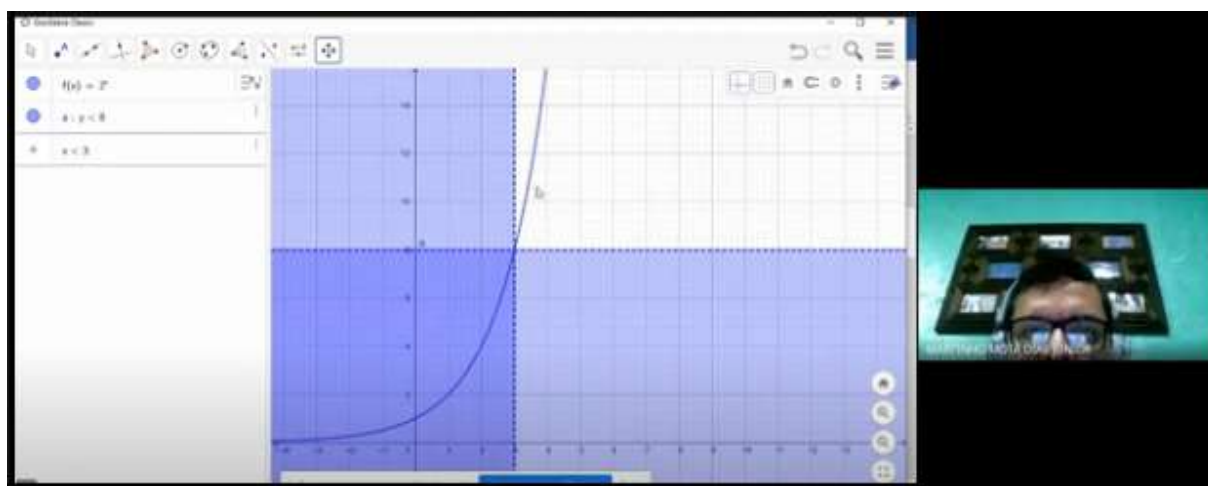
E2 - $x = 3$.

Pesquisador – Parabéns. Mas, $x = 3$ não é a resposta, sua resposta só pode ser maior que 3 ou menor que 3. Qual a resposta que você escolhe?

E2 – Menor que 3.

Pesquisador – Vamos digitar a sua resposta em entrada do geogebra. (Figura 225).

Figura 225 resposta: $x < 3$



Fonte: Própria do Autor

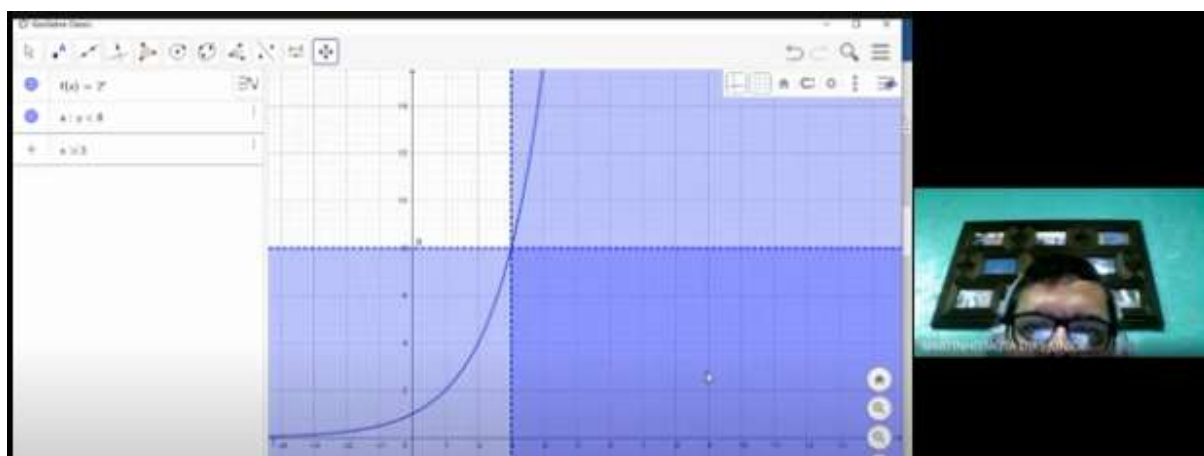
E2 – Acho que aceitei! Tem gráfico da função $2^x < 8$ na área pintada duas vezes.

Pesquisador – Muito bem! É isso mesmo.

E2 – E se fosse maior que 3, como ficaria?

Pesquisador – Vamos fazer é só digitar $x > 3$ em entrada do geogebra. (Figura 226).

Figura 226 - Resposta errada.



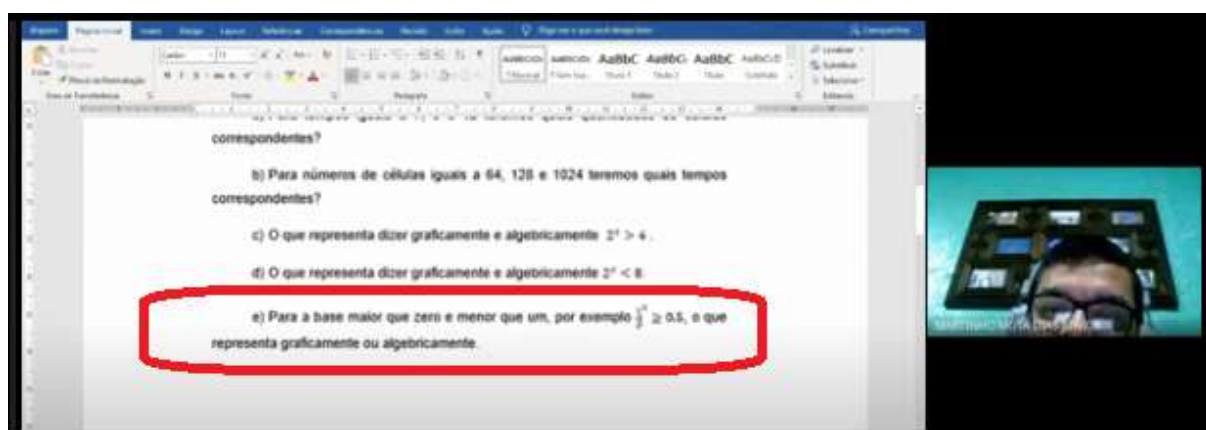
Fonte: Própria do Autor

E2 – É na área pintada duas vezes não possui gráfico da inequação $2^x < 8$.

Pesquisador – Isso. Não é resposta.

Partimos para o sexto momento da primeira atividade, teve uma duração de 16 minutos. fiz a leitura da questão “e” para o E2 e realizamos a resolução da questão usando a parte algébrica e a parte gráfica do geogebra. (Figura 227).

Figura 227 - Questão e da 1ª atividade



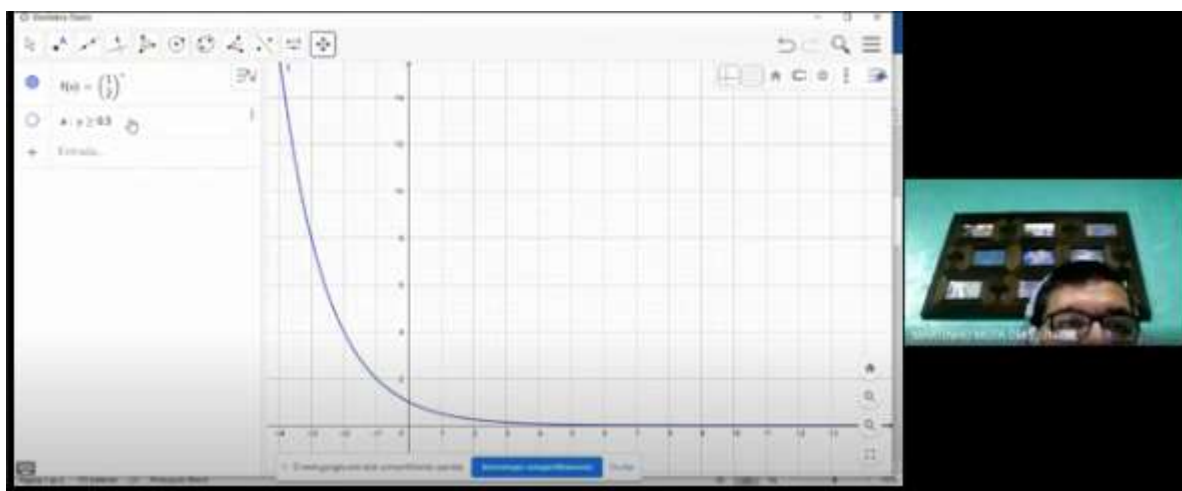
Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Nesta você tem que observar a base da função exponencial, observe que a base da exponencial é “meio”, logo você está diante de uma função exponencial crescente ou decrescente?

E2 – Crescente.

Pesquisador – Não, decrescente. (Figura 228).

Figura 228 - Função decrescente



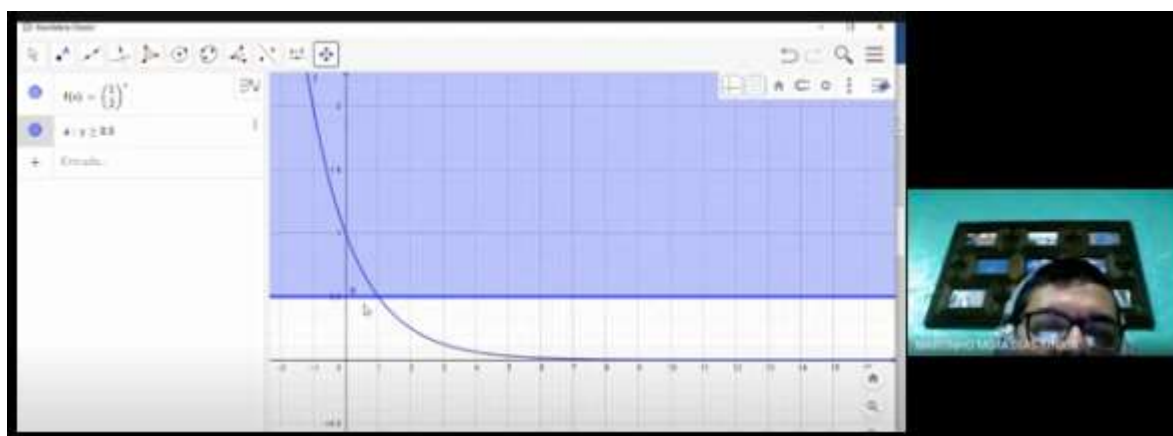
Fonte: Própria do Autor

E2 – Entendi.

Pesquisador – Digite em entrada a expressão $y \geq 0,5$.

E2 – Ok. (Figura 229).

Figura 229 - y maior ou igual a meio



Fonte: Própria do Autor

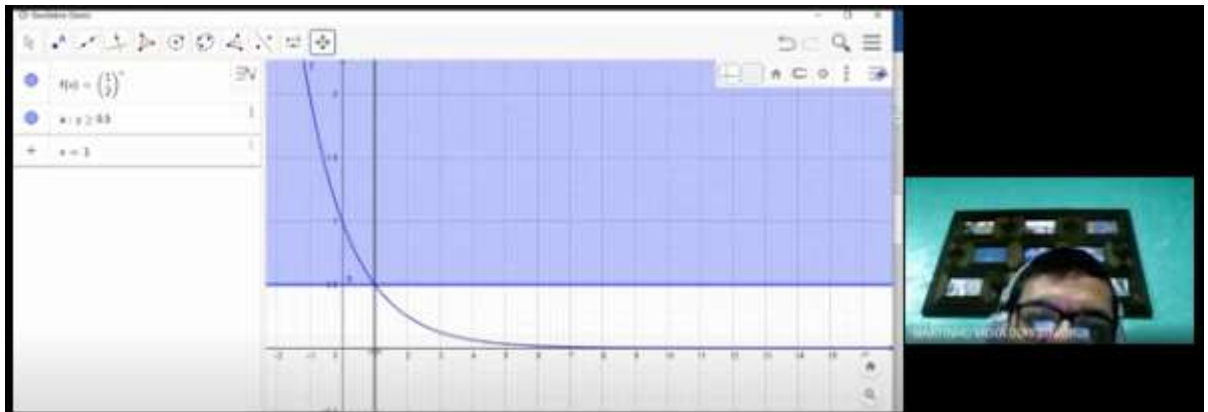
Pesquisador – Por que a linha é cheia na figura 229?

E2 – Por causa da igualdade.

Pesquisador – Isso. E quanto vale x quando $y = 0,5$?

E2 – Um. (Figura 230).

Figura 230 - O valor de x para y igual a meio.



Fonte: Própria do Autor

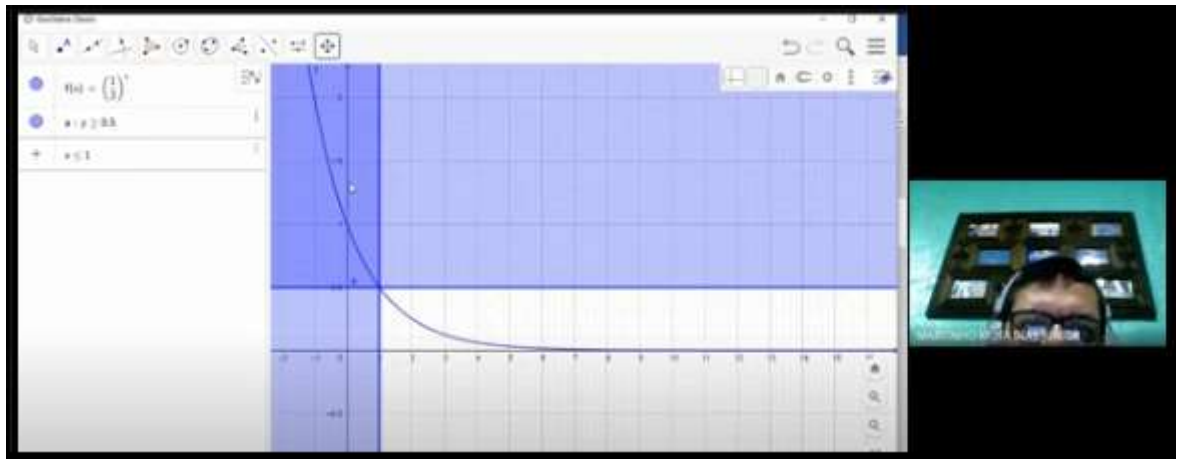
Pesquisador – A nossa resposta não é $x = 1$, a nossa resposta só pode ser maior/igual que um ou menor/igual que um. Qual a sua resposta?

E2 – Menor ou igual a um.

Pesquisador – Por que?

E2 – Por fica pintado duas vezes o gráfico quando $x \leq 1$. (Figura 231)

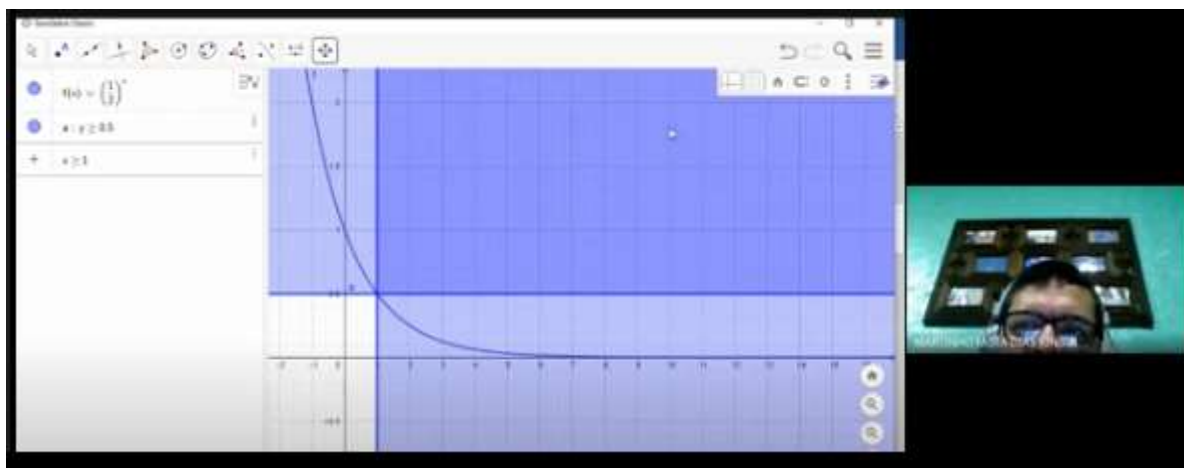
Figura 231 - Pintado duas vezes



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador - Exatamente. Veja se fosse $x \geq 1$. (Figura 232).

Figura 232 - Se fosse x maior ou igual a um.



Fonte: Própria do Autor

E2 – Não é resposta, pois não tem gráfico da função $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 0,5$ na parte pintada duas vezes.

Pesquisador – Verifique também na figura 231, que os sinais gráficos de x e de y são diferentes, o de $x \leq$ e o de $y \geq$, você sabe dizer o porquê?

E2 – Por que a função é decrescente.

Pesquisador – Muito bem. É isso mesmo.

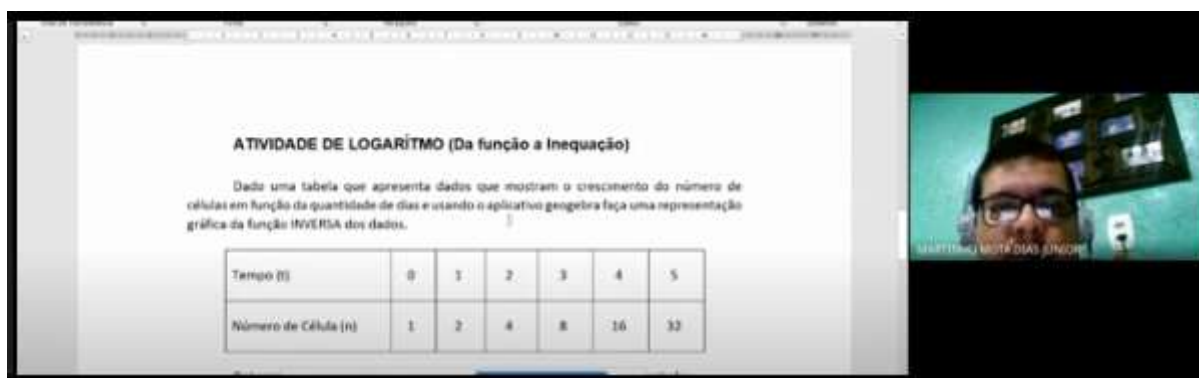
12.2.2.3. Terceiro encontro do experimento 2 (E2).

O terceiro encontro aconteceu no dia 26 de fevereiro de 2021 e durou aproximadamente duas horas e 5 minutos, tivemos sete momentos distintos.

O primeiro momento teve uma duração de aproximadamente 15 minutos, fiz uma leitura da segunda atividade que corresponde sobre logaritmo, da função a inequação, fizemos a inserção de dados da tabela, discursão sobre a melhor função que se ajusta aos dados inseridos anteriormente.

Pesquisador – Fiz a leitura da segunda atividade para o E2. E perguntei sobre função inversa, você sabe a função inversa da exponencial? (Figura 233).

Figura 233 - Leitura da segunda atividade



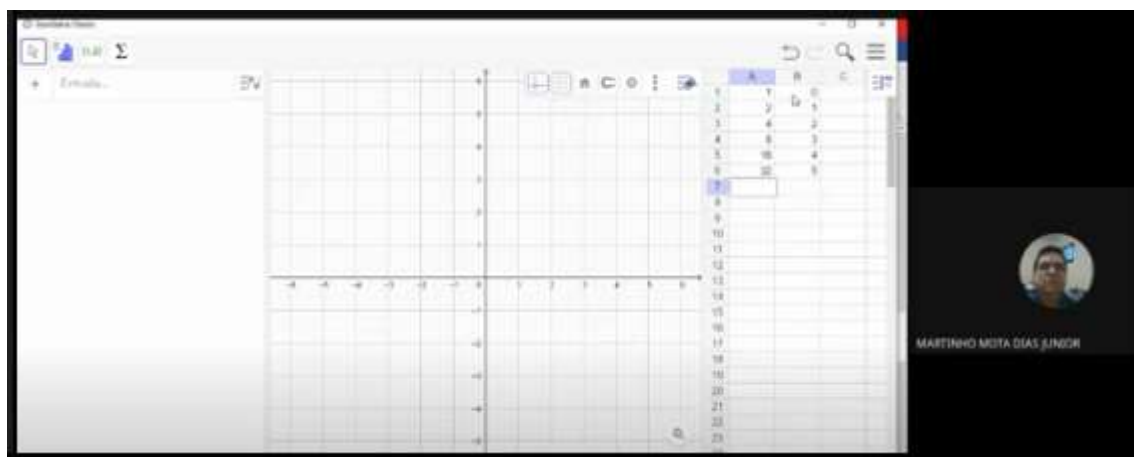
Fonte: Própria do Autor

E2 – Não sei qual é a inversa da função exponencial.

Pesquisador – Na tabela da figura 233, o tempo correspondia a x e o número de células correspondia a y, isso na função exponencial. Agora vamos inverter o tempo vai corresponde a y e o número de células vai corresponde a x. Faça no excel do geogebra.

E2 – Ok, (Figura 234).

Figura 234 - Inserção de dados invertidos

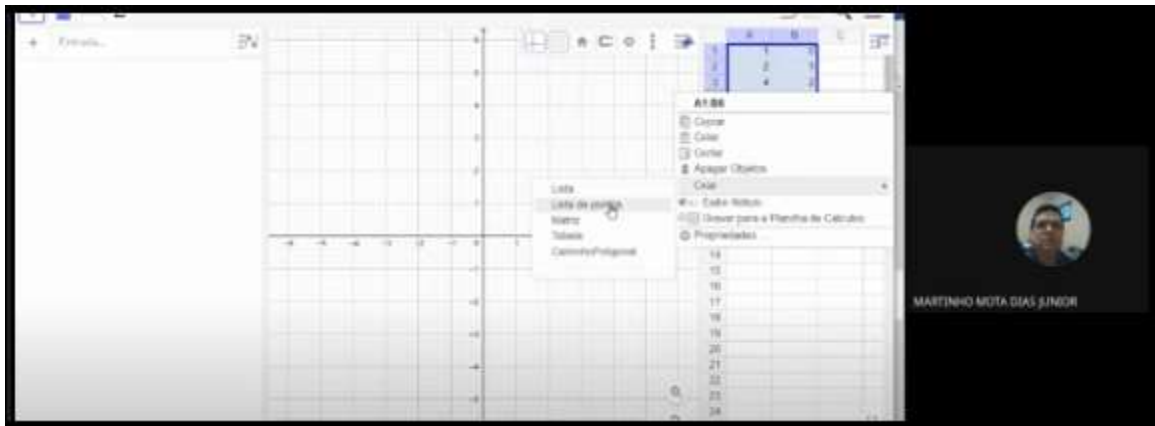


Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Isso mesmo, vejo que você inverteu, na coluna A você colocou o número de células e na coluna B você colocou o tempo. Agora de selecione a tabela, clique com o botão direito do mouse.

E2 – Ok, apareceu uma nova aba e selecionei criar, lista de pontos. (Figura 235).

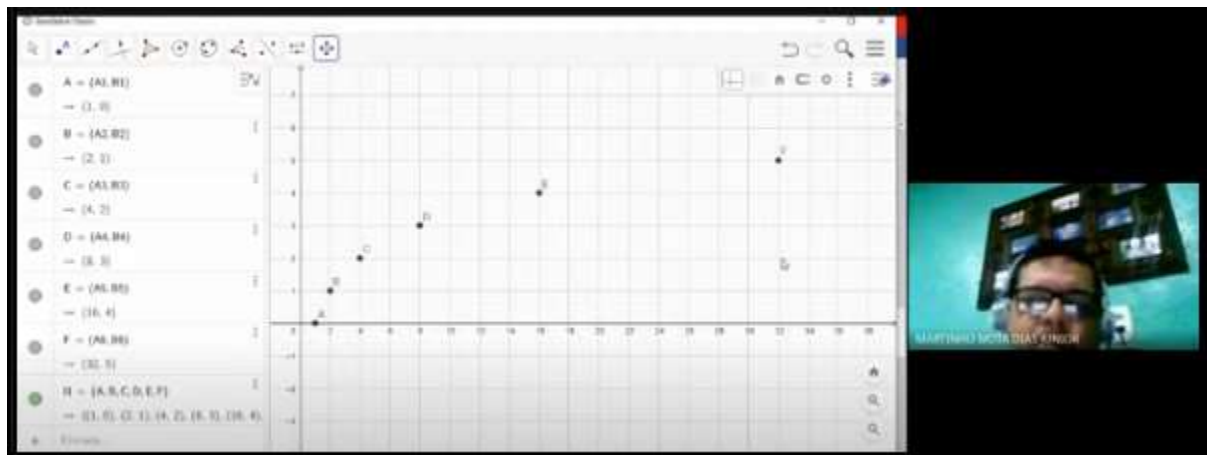
Figura 235 - Criar lista de pontos



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Isso mesmo. Retire a tabela do excel e me responda: qual a função que melhor representa esses pontos? (Figura 236).

Figura 236 - Criar pontos



Fonte: Própria do Autor

E2 – É a logarítmica.

Pesquisador – Digite em entrada a seguinte expressão $f(x) = \log_2 x$, você sabe por que apareceu o número 2?

E2 – Não.

Pesquisador – Como a base da exponencial é dois e quando invertemos a exponencial em logarítmica, a base permanece a mesma. Ok. (Figura 237).

Figura 237 - Função logarítmica



Fonte: Própria do Autor

E2 – Entendi.

Pesquisador – Esta função $f(x) = \log_2 x$ é crescente ou decrescente. (Figura 237).

E2 – Crescente.

Pesquisador – Muito bem, é crescente pois a base é um.

O segundo momento teve uma duração de 15 minutos e resolvemos algebricamente ou graficamente a primeira questão da segunda atividade, usando o geogebra.

Pesquisador – Fiz uma leitura da primeira questão da segunda atividade. (Figura 238).

Figura 238 - Primeira questão - segunda atividade



Fonte: Própria do Autor

Depois da leitura o pesquisador perguntou:

Pesquisador – O $\log_2 x = 1$, o que o $\log_2 x$ representa para você?

E2 – o y.

Pesquisador – Certo, representa o y que por sua vez representa também $f(x)$. Ok.

E2 – Ok.

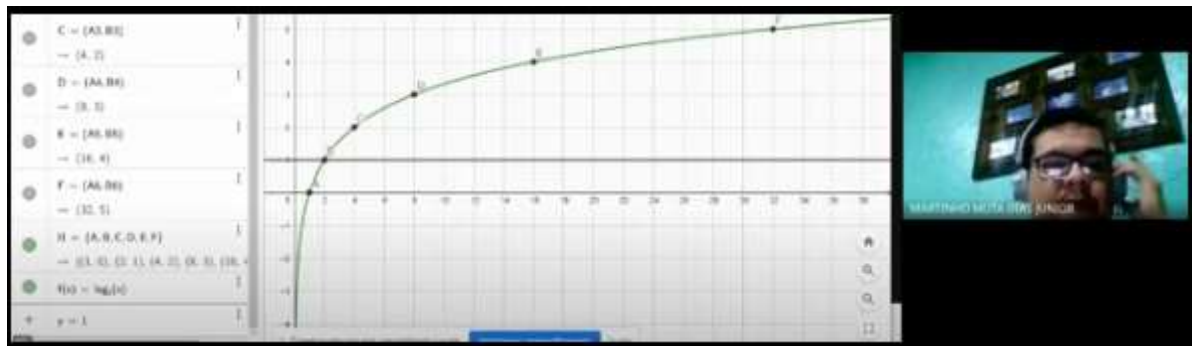
Pesquisador – Então posso dizer $y = 1$ correto?

E2 – Sim.

Pesquisador – Digite em entrada no geogebra a função $f(x) = \log_2 x$.

E2 – Ok . (Figura 239).

Figura 239 - $y = 1$



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – O que foi que apareceu na parte gráfica do geogebra?

E2 – Uma reta passando por um.

Pesquisador – Quanto vale o valor x (domínio) para $y = 1$?

E2 – Dois.

Pesquisador – Perfeito. E para $\log_2 x = 2$, quanto vale o x ?

E2 – Quatro. (Figura 240).

Figura 240 - $Y = 2$

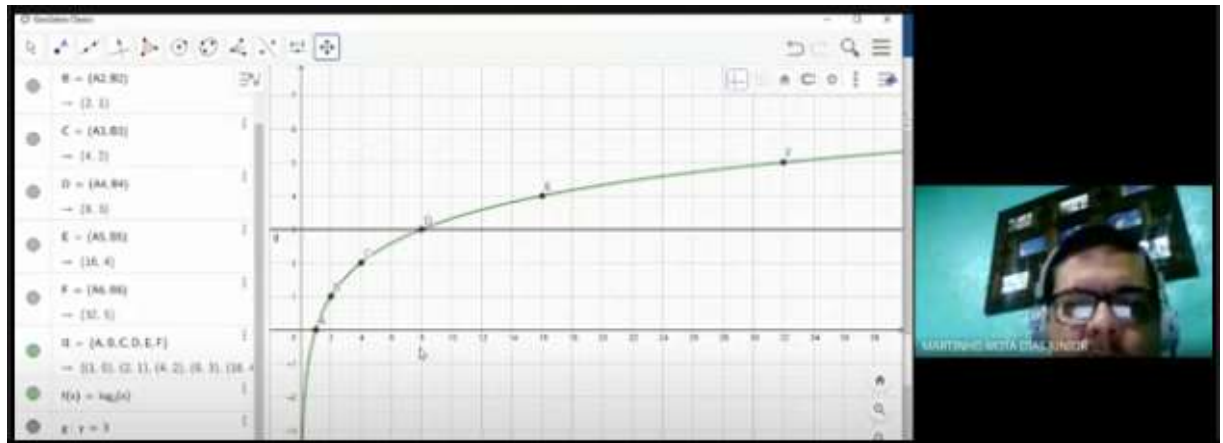


Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Bom, você apenas mudou o valor de y para dois. Correto e $\log_2 x = 3$?

E2 – Oito. (Figura 241).

Figura 241 - Solução para $y = 3$



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Certo, e o $\log_2 x = 4$?

E2 – 16.

Pesquisador – Só de olhar o gráfico você respondeu. $\log_2 x = 5$?

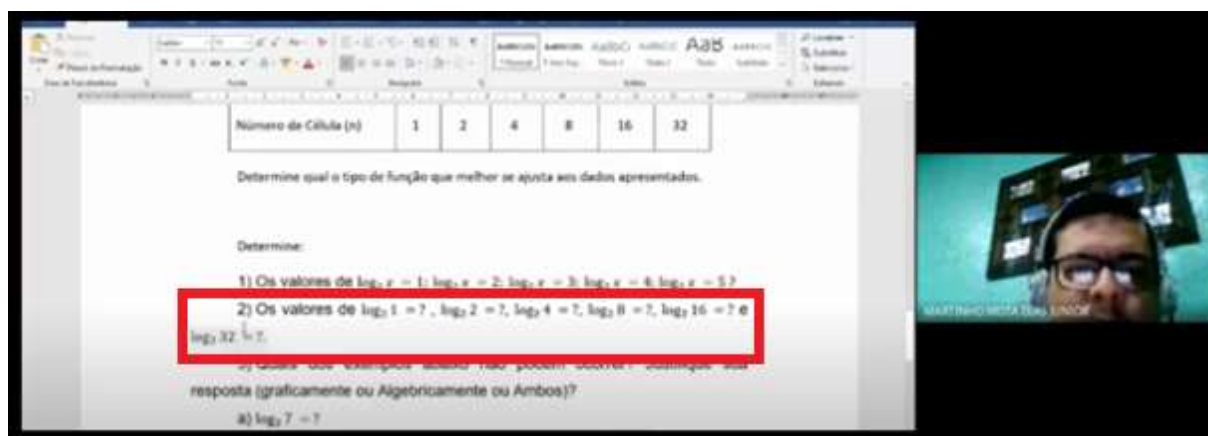
E2 – 32.

Pesquisador – Muito bom.

O terceiro momento é referente a segunda questão da segunda atividade, fiz uma leitura para E2 e a duração desta atividade foi de 15 minutos.

Pesquisador – Devemos calcular os valores dos logaritmos dado valores de x . (Figura 242).

Figura 242 - segunda questão da segunda atividade



Fonte: Própria do Autor

E2 – Ok.

Pesquisador – Vamos calcular o $\log_2 1$, essa expressão se refere ao x ou y?

E2 – Ao valor de y.

Pesquisador – Perfeito, dessa forma podemos determinar o valor de x para achar a sua imagem y. Como você faria para calcular o valor de y?

E2 – Calculo o $f(1)$. (Figura 243).Figura 243 - Cálculo do $f(1)$ 

Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Isso, você fez da forma algébrica. Parabéns. Calcule o $\log_2 2$?

E2 – Um.

Pesquisador – Ok. Você também poderia fazer desse jeito, em entrada você digita $\log_2 2$ e dá enter. Veja o que acontece. (Figura 244).

Figura 244 - Outra forma de se calcular o y.



Fonte: Própria do Autor

E2 – É direto também o resultado.

Pesquisador – Isso. Determine para $\log_2 4$.

E2 – 2.

Pesquisador - Você poderia calcular também algebricamente, como se faz em sala de aula, no quadro. Temos $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \cdot \log_2 2 = 2 \cdot 1 = 2$, quando você tem uma potência no logaritmando, o expoente da potência sai do logaritmando e fica multiplicando o logaritmo. Entendeu?

E2 – Sim.

Pesquisador – O próximo $\log_2 8$?

E2 – três.

Pesquisador - $\log_2 16$?

E2 – Quatro.

Pesquisador - $\log_2 32$?

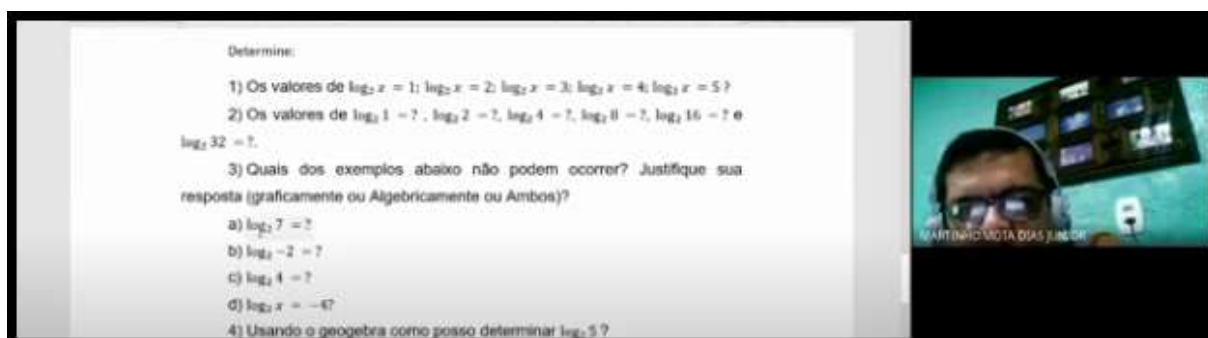
E2 – Cinco.

Pesquisador – Fácil hem? Você respondeu só olhando o gráfico no geogebra?

E2 – Sim.

O quarto momento durou aproximadamente 15 minutos, fiz a leitura da questão 3 da segunda atividade. (Figura 245).

Figura 245 - Leitura da 3ª questão da 2ª atividade



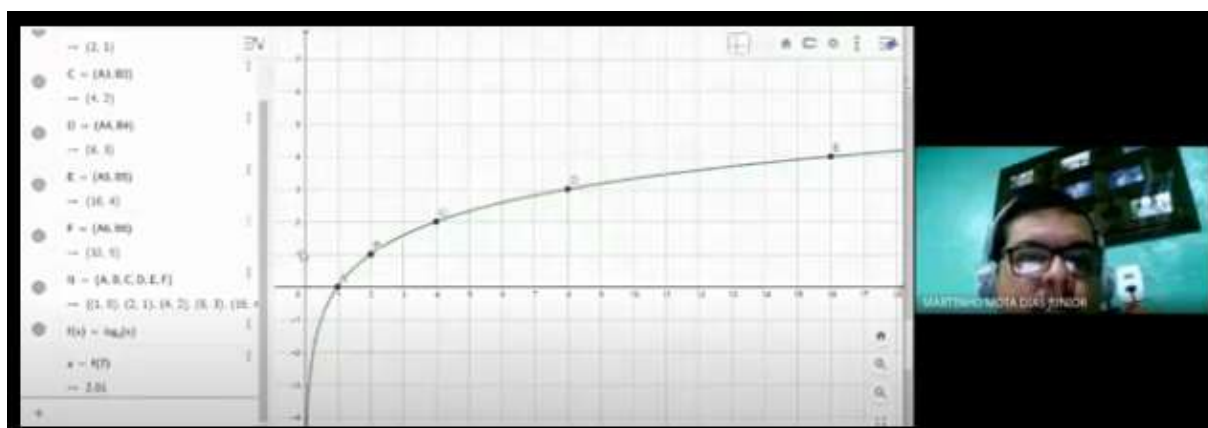
Determine:

- 1) Os valores de $\log_2 x = 1$; $\log_2 x = 2$; $\log_2 x = 3$; $\log_2 x = 4$; $\log_2 x = 5$?
- 2) Os valores de $\log_2 1 = ?$, $\log_2 2 = ?$, $\log_2 4 = ?$, $\log_2 8 = ?$, $\log_2 16 = ?$ e $\log_2 32 = ?$.
- 3) Quais dos exemplos abaixo não podem ocorrer? Justifique sua resposta (graficamente ou Algebricamente ou Ambos)?
 - a) $\log_2 7 = ?$
 - b) $\log_2 -2 = ?$
 - c) $\log_2 4 = ?$
 - d) $\log_2 x = -4?$
- 4) Usando o geogebra como posso determinar $\log_2 5$?

Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Vamos responder a cada item, o primeiro é o item “a”. Posso calcular o valor de $\log_2 7$?

E2 – Sim, basta fazer $f(7)$.(Figura 246).

Figura 246 - Calcula o valor de $x = 7$ 

Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Perfeito. Vamos para o item b, $\log_2 -2$. Posso calcular?

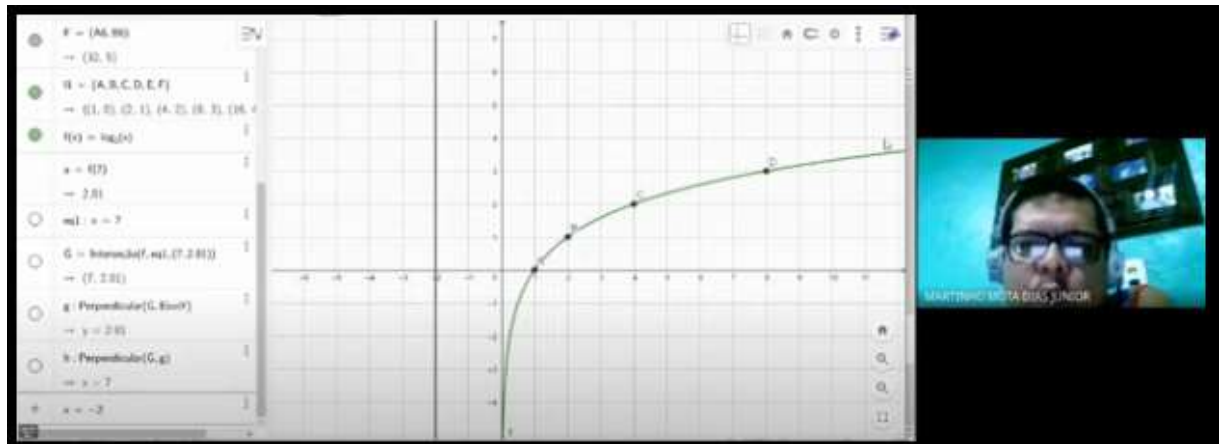
E2 – Não, não tem como.

Pesquisador – Porquê?

E2 – Por que é negativo.

Pesquisador - Correto, veja se eu digitar $x = -2$ em entrada no geogebra a reta que passa por -2 não toca o gráfico da função ($f(x) = \log_2 x$) e para qualquer valor de x negativo. (Figura 247).

Figura 247 - Valores negativos



Fonte: Própria do Autor

E2 – Ok.

Pesquisador – O $\log_2 4$ posso resolver. ?

E2 – Sim.

Pesquisador – Claro, o $\log_2 4$ é muito semelhante ao $\log_2 7$ que resolvemos no item “a”.

E2 – verdade.

Pesquisador – Faça o item “d” $\log_2 x = -4$, use o gráfico do geogebra.

E2 – Ok. Não consegui.

Pesquisador – Ok, quem é -4 ?

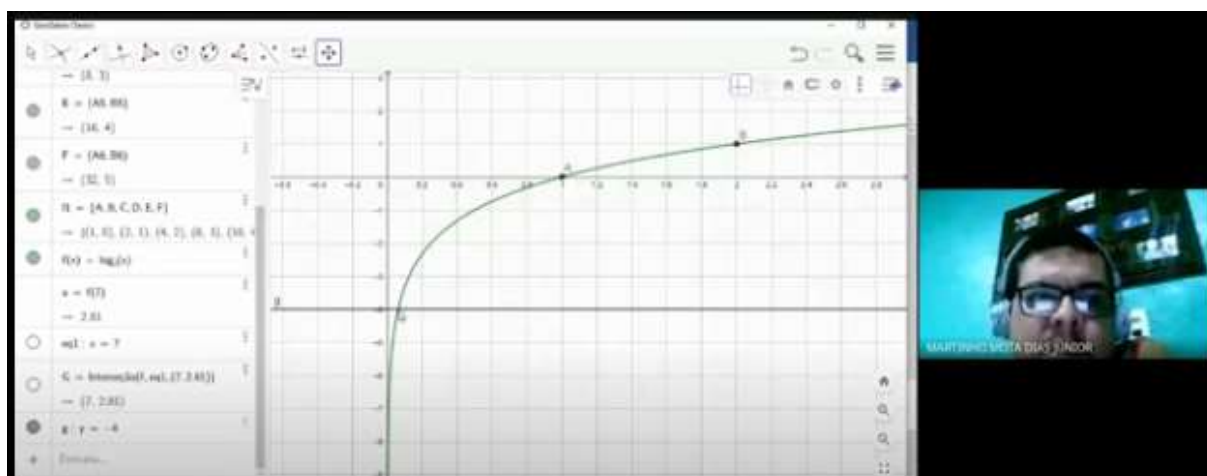
E2 – Não sei.

Pesquisador – O $-4 = y$, é a imagem x no $\log_2 x = -4$. Entendeu?

E2 – Sim.

Pesquisador – Usando o geogebra você digita em entrada o valor de $y = -4$.

E2 – Ok. (Figura 248).

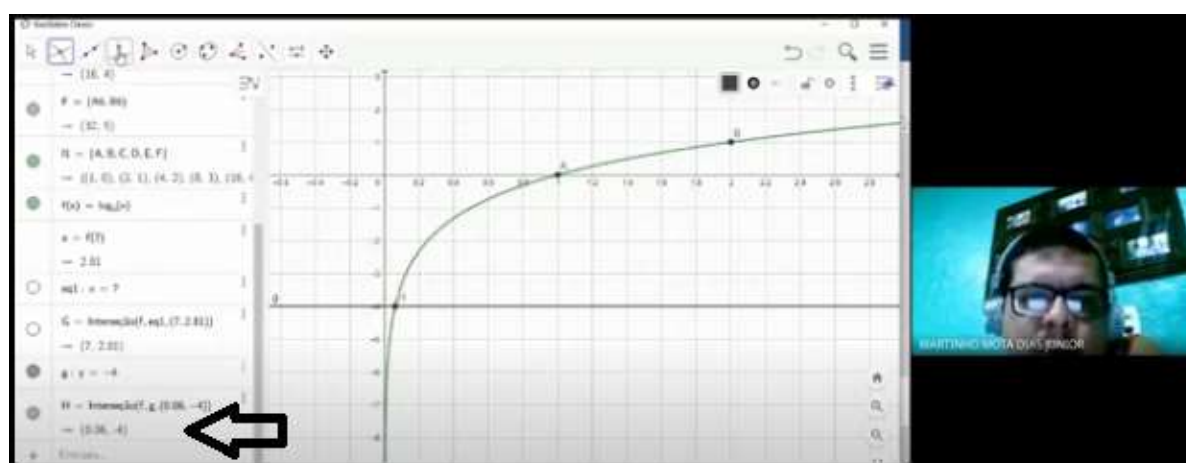
Figura 248 - Valor de $y = -4$ 

Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – a reta y toca na função?

E2 – Sim.

Pesquisador – Para descobrir o ponto que tocou no gráfico da função $f(x) = \log_2 x$ basta clicar no ícone “interseção entre dois pontos”, selecionar a reta $y = -4$ e selecionar a função $f(x)$. O geogebra determinará o ponto H que na parte algébrica aparecerá o valor de x . (Figura 249).

Figura 249 - Determinação do valor x 

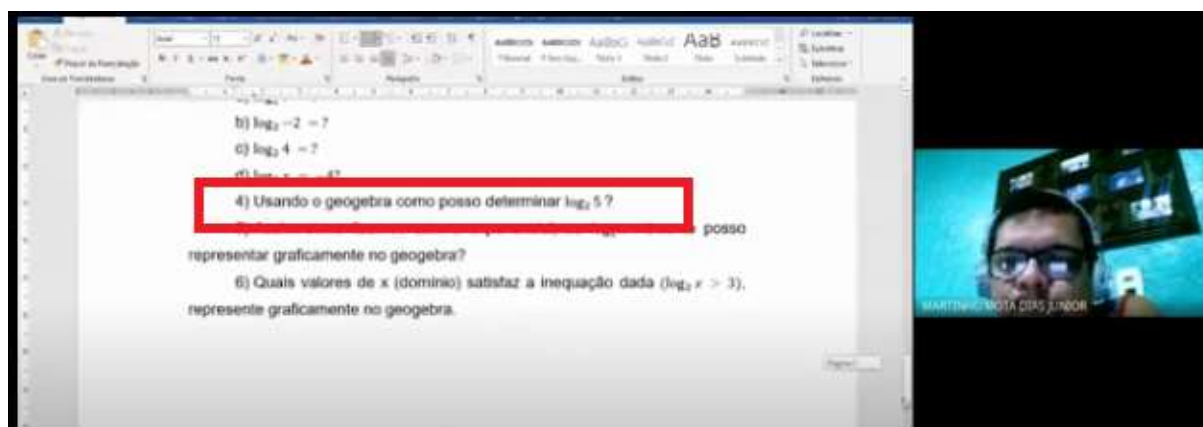
Fonte: Própria do Autor

E2 – 0,06.

Pesquisador – Correto.

O quinto momento teve uma duração de 20 minutos, fiz a leitura da questão 4 da segunda atividade. (Figura 250).

Figura 250 - Quarta questão da 2ª atividade



Fonte: Própria do Autor

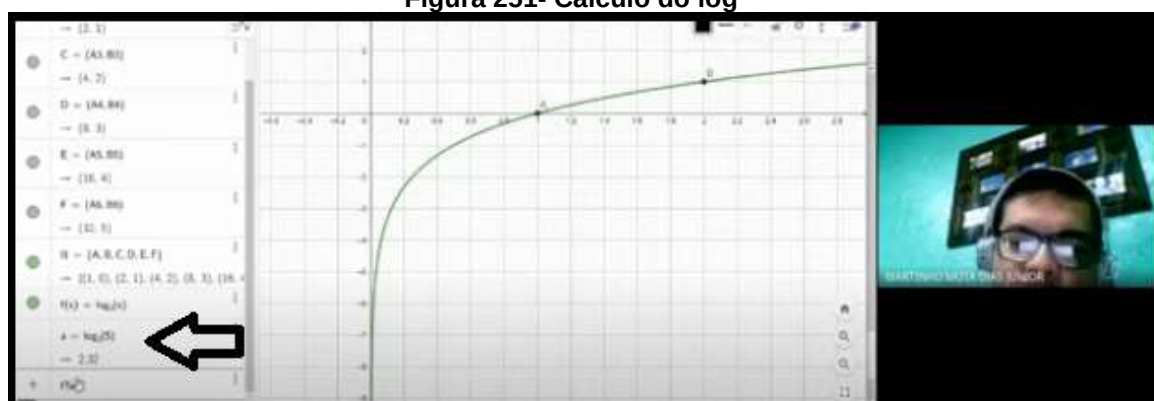
Pesquisador – Determine o $\log_2 5$

E2 – 2,32

Pesquisador – Como você fez?

E2 – Digitei em entrada $\log_2 5$ e cliquei em enter. (Figura 251).

Figura 251- Cálculo do log



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Correto.

No sexto momento durou aproximadamente 25 minutos, fiz a leitura da quinta e sexta questão da segunda atividade. (Figura 252).

Figura 252 – Quinta e Sexta questões da segunda atividade.

- 5) Assim como fizemos com a exponencial, se $\log_2 x > 3$ como posso representar graficamente no geogebra?
- 6) Quais valores de x (domínio) satisfaz a inequação dada $|\log_2 x > 3|$, represente graficamente no geogebra.

Fonte: Própria do Autor

A atividade seis é um complemento da atividade cinco desta forma o sexto momento contempla as duas questões. (Figura 252).

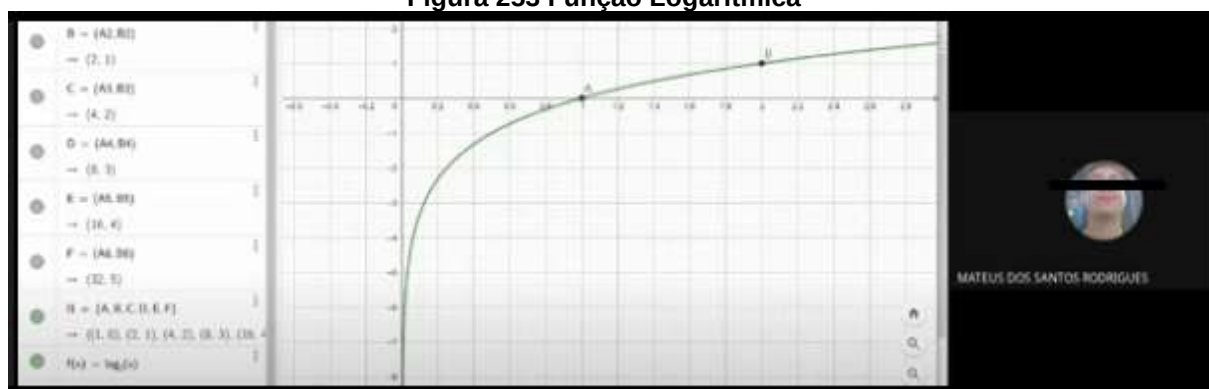
Pesquisador – Vamos determinar o valor de $\log_2 x > 3$. Quem é o $\log_2 x$?

E2 – É o y.

Pesquisador – Exato. Dessa forma termos $y > 3$, mas antes devemos digitar em entrada a função $f(x) = \log_2 x$. Faça isso.

E2 – Ok. (Figura 253).

Figura 253 Função Logarítmica

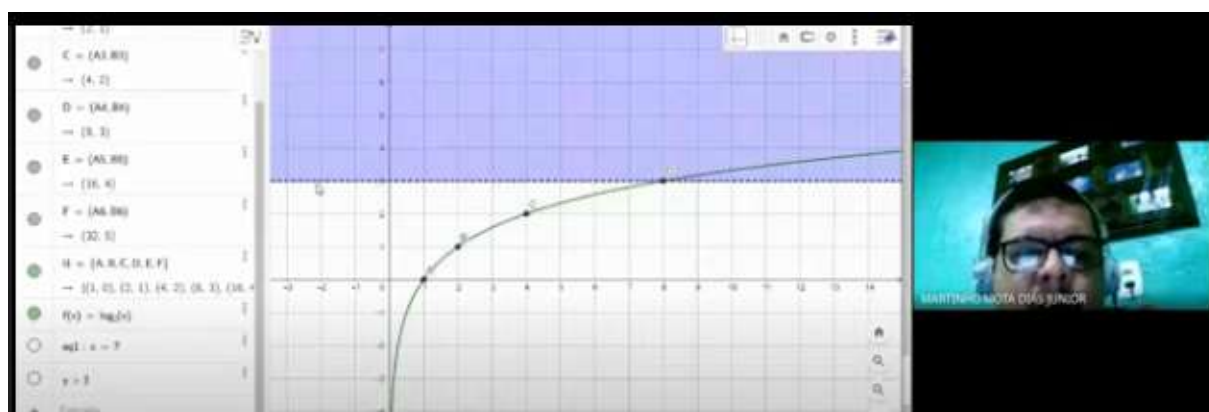


Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Agora digite $y > 3$, o que acontece?

E2 – Uma reta passa no ponto 5 do eixo y cortando a função $f(x) = \log_2 x$. (Figura 254).

Figura 254 - Y maior que 3.



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Por que a linha pontilhada?

E2 – Significa dizer que o 3 não faz parte da resposta.

Pesquisador – Muito bem. Qual é o domínio (x) quando $y = 3$?

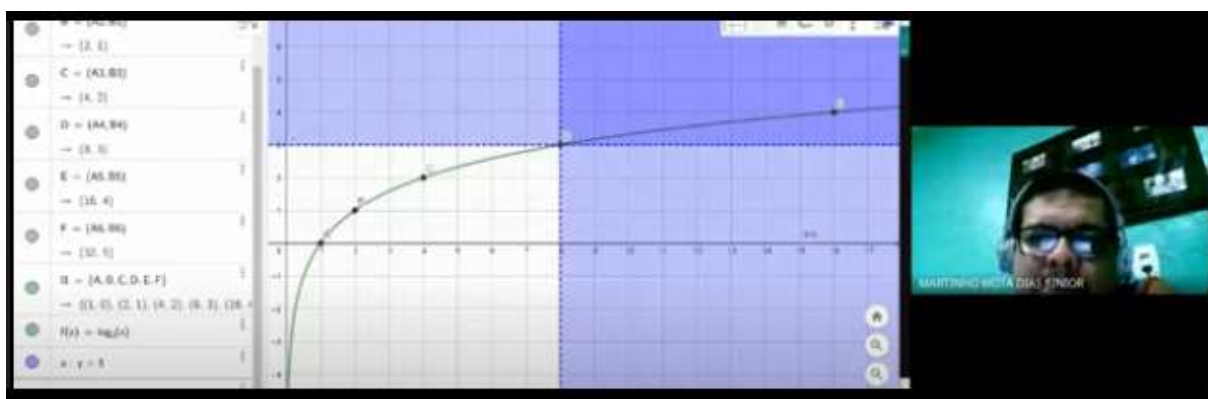
E2 – oito.

Pesquisador – Certo, mas $x = 8$ não é a sua resposta. A sua resposta é: ou $x > 8$ ou $x < 8$. Qual das duas opções?

E2 - $x > 8$.

Pesquisador – Vamos verificar a sua resposta, digite em entrada $x > 8$ e tecle enter. (Figura 255).

Figura 255 - Resposta da inequação: $x > 8$



Fonte: Própria do Autor

E2 - Ficou pintada duas vezes.

Pesquisador – Exatamente, aonde está pintado duas vezes existe o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$?

E2 – Sim.

Pesquisador – Então $x > 8$ é a solução da inequação $\log_2 x > 3$.

E2 – Ok.

O sétimo momento teve uma duração de 20 minutos e fez uma leitura da sétima questão da segunda atividade para o E2. (Figura 256).

Figura 256 Questão sete da segunda atividade

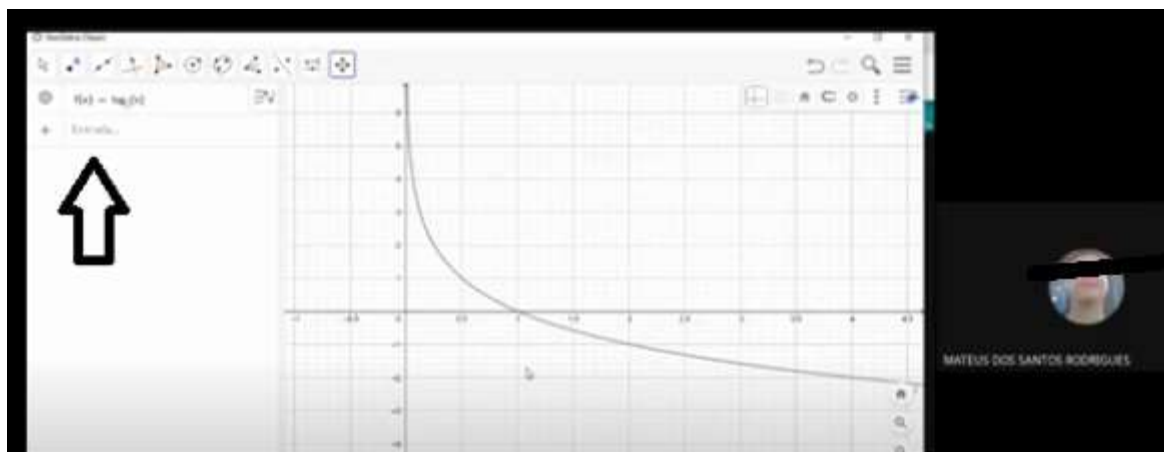
7) Para $\log_2 x < 5$? Qual a solução da inequação?

Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Digite em entrada a expressão $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

E2 – Ok. (Figura 257).

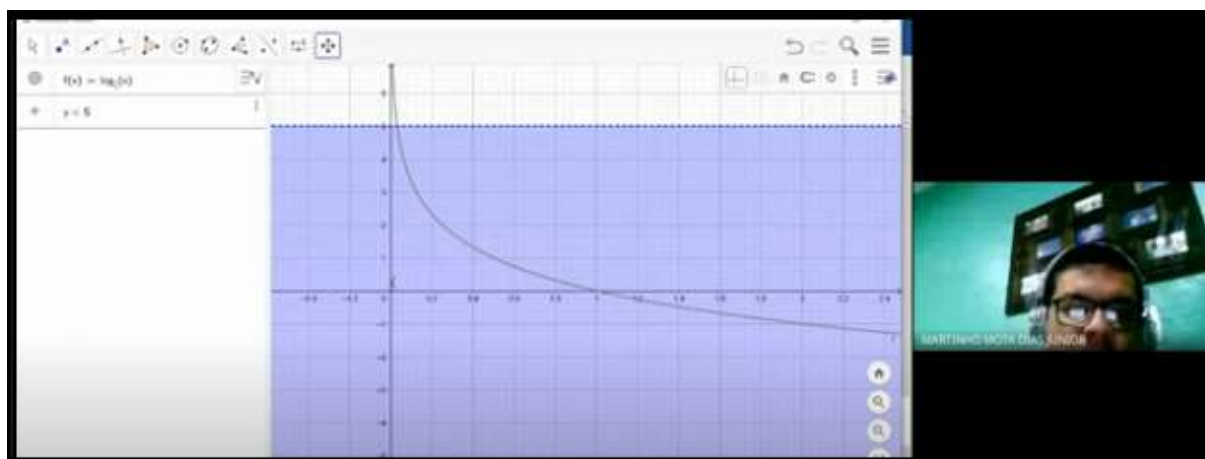
Figura 257 - Função logarítmica.



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Isso. A questão diz que a função $f(x)$ tem que ser menor que 5. ($f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x < 5$), logo digitamos em entrada a expressão $y < 5$. (Figura 258).

Figura 258 - $y < 5$



Fonte: Própria do Autor

E2 – Ok.

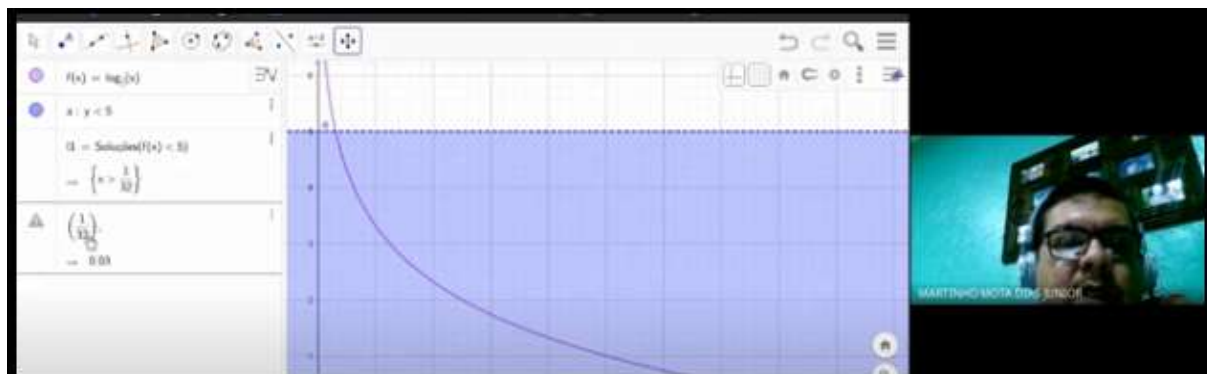
Pesquisador – Observe a parte que pintou, qual foi a parte que pintou?

E2 – Todos os números abaixo de 5, mas o cinco não entra na solução da inequação logarítmica.

Pesquisador – Muito bem. Qual é o domínio (x) da imagem ($y = 5$).

E2 – Se digitar em entrada soluções $(f(x) < 5)$ o geogebra diz a solução $x > 0,03$. (Figura 259).

Figura 259 - solução da inequação

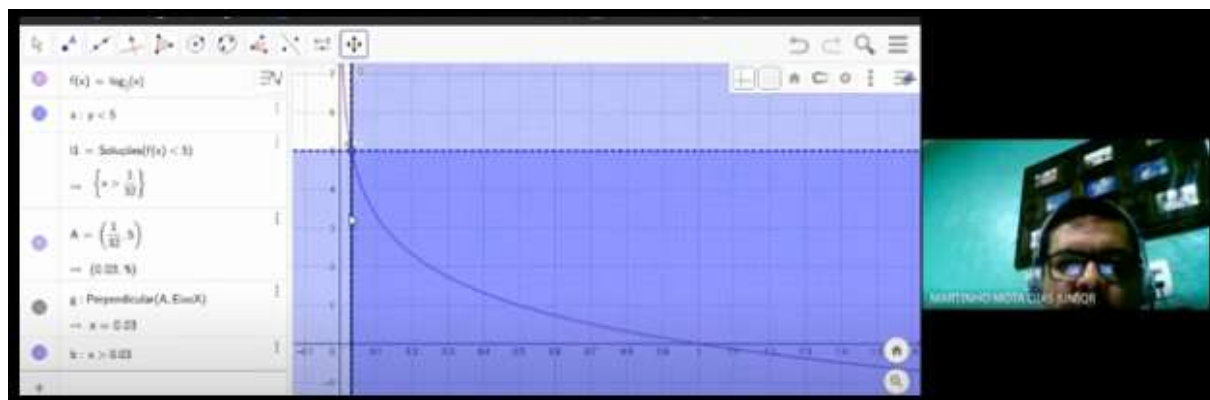


Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Ok, você já deu a solução, mas vamos fazer pelo gráfico. Já sabemos o valor de x. Então digite $x > 0,03$ em entrada do geogebra.

E2 – Ok. (Figura 260).

Figura 260 - Solução pelo gráfico



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Veja que o gráfico da função $f(x) = \log_{1/2} x$ fica na parte pintada duas vezes. E o que significa isso E2?

E2 – A solução da inequação.

Pesquisador – A função $f(x) = \log_{1/2} x$ é crescente ou decrescente?

E2 – Decrescente.

Pesquisador – Isso, é por causa disto que os sinais: de $y < 5$ e $x > 0,03$ tem sentido diferentes. Entendeu? (Figura 260).

E2 – Ok.

12.2.3. Experimento 3 (E3; E4; E5)

O terceiro experimento foi realizado com três estudantes do ensino público do estado do Pará, todos estudam na mesma série (1º ano), o E3 e E4 estudam na mesma escola, IFPA-Tucuruí e E5 na escola São Francisco Xavier, na cidade de Abaetetuba/Pa. Foram selecionados através de contatos via internet, o professor pesquisador conhecia um dos estudantes do IFPA e pediu a este que contactasse com mais dois colegas para compor o experimento, porém não conseguiu os dois, conseguiu somente um. O terceiro estudante foi contactado através dos colegas de mestrado, o estudante é filha do colega que muito ajudou nesta empreitada.

Os estudantes foram denominados de E3, E4 e E5, os E3 e E4 já viram o assunto de exponencial, mas não viram o assunto de logaritmo, vão vê agora em agosto de 2021. O E5 ainda não viu os dois assuntos (exponencial e logaritmo).

Perguntados pelo pesquisador se gostam de matemática o E3 gosta e E4 e E5 não gostam muito. Nenhum deles conheciam o software geogebra, os três usaram computadores próprios e internet de uso particular, as vezes usávamos o celular para nos comunicarmos devido a frequente queda de acesso a internet.

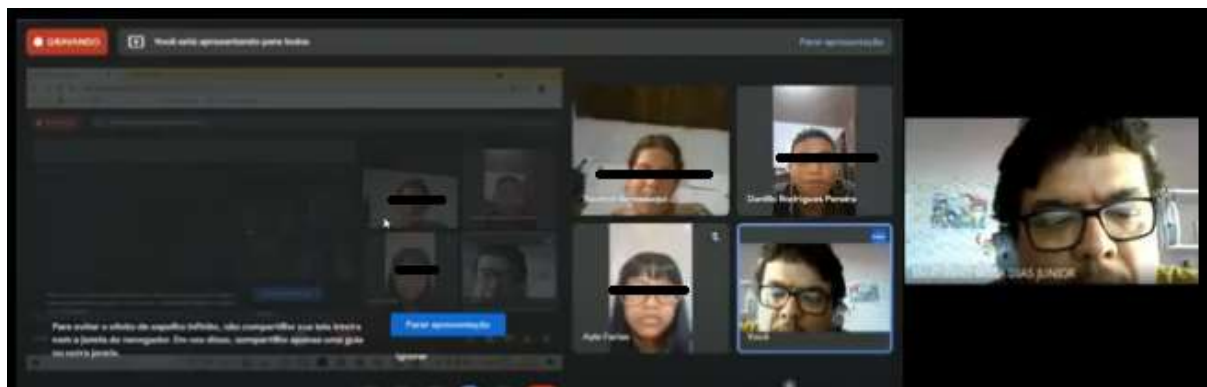
Foram três encontros, no dia 26, 27 e 28 de julho no período da tarde, com início as três horas. A duração dos encontros foi variados, em média duas horas e meia, este fato foi devido a constante queda de internet dos participantes e do pesquisador. Outro ponto negativo foi a qualidade de acesso da internet, muito problemas no áudio e as vezes lentidão no vídeo, lentidão nas respostas, não dos participantes e sim da internet.

12.2.3.1. Primeiro encontro do experimento 3 (E3; E4; E5)

O primeiro encontro foi dia 26 de julho com duração de aproximadamente 2 horas e 21 minutos, tivemos três momentos. Fiz a apresentação de todos do grupo de experimentação e do próprio pesquisador, pois o pesquisador só conhecia um

dos participantes. Demonstrei como seria a dinâmica do experimento e como deveriam ser a participação deles. (Figura 261).

Figura 261 -Apresentações dos Estudantes e pesquisador

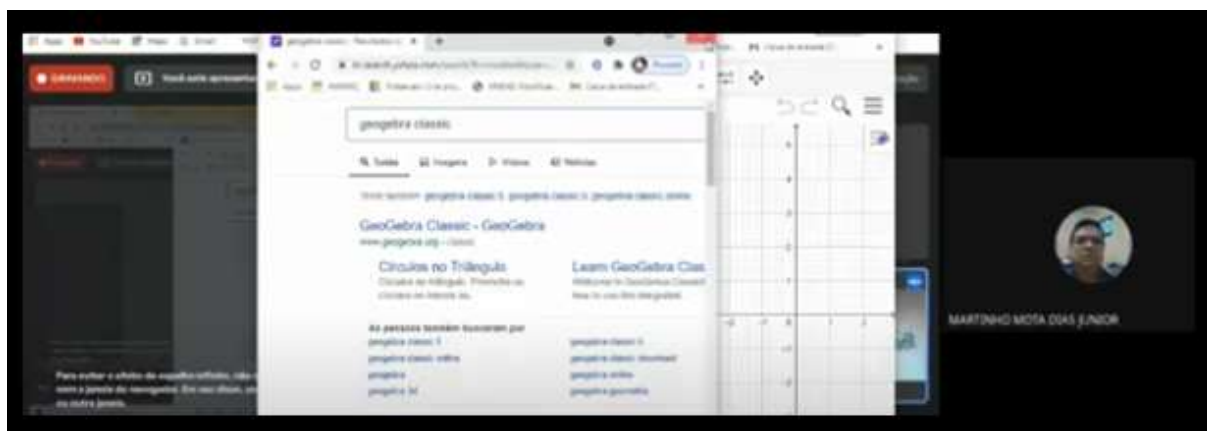


Fonte: Própria do Autor

O primeiro momento teve uma duração de aproximadamente uma hora, contando com o tempo parado da internet, falamos como entrar no geogebra classic, as partes do geogebra: campo algébrico e campo gráfico, como apagar os dados inseridos, o campo entrada do geogebra, plano cartesiano, eixos x e y, quadrantes barra de ferramentas, ponto A, ponto de interseção entre dois objetos, reta perpendicular, ícones de mover, lupa mais e lupa menos.

Começamos com a introdução do software geogebra, pedi a todos que entrasse no google e digitasse geogebra classic em pesquisa e abrisse o endereço com esse nome. (Figura 262).

Figura 262 - Geogebra Classic.



Fonte: Própria do Autor

Depois o pesquisador perguntou:

Pesquisador - Todos conseguiram entrar no geogebra?

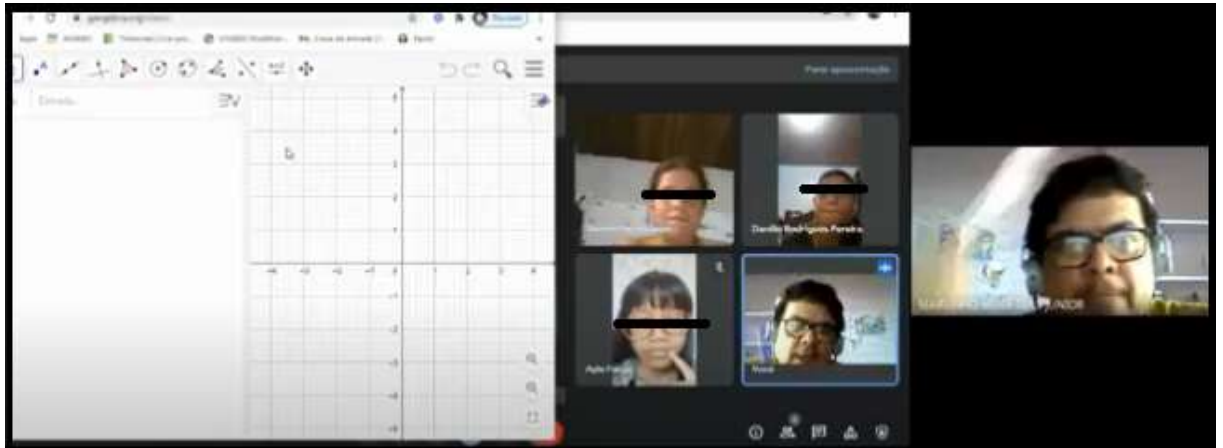
E3 – Sim.

E4 – Sim.

E5 – Sim.

Pesquisador – Estão vendo a minha tela, o geogebra que vocês estão vendo é o mesmo de vocês? (Figura 263).

Figura 263 - Visualização do geogebra



Fonte: Própria do Autor

E3 – Sim.

E4 – Sim.

E5 – Sim.

Pesquisador – O geogebra é dividido em duas partes (basicamente): parte gráfica e parte algébrica. Alguma dúvida?

E3 – Não.

E4 – Não.

E5 – Não.

Pesquisador – Temos também alguns ícones localizados na parte superior dessas partes, chamamos de barra de ferramentas. Conseguiram localizar? (Figura 264).

Figura 264 - Localização dos ícones



Fonte: Própria do Autor

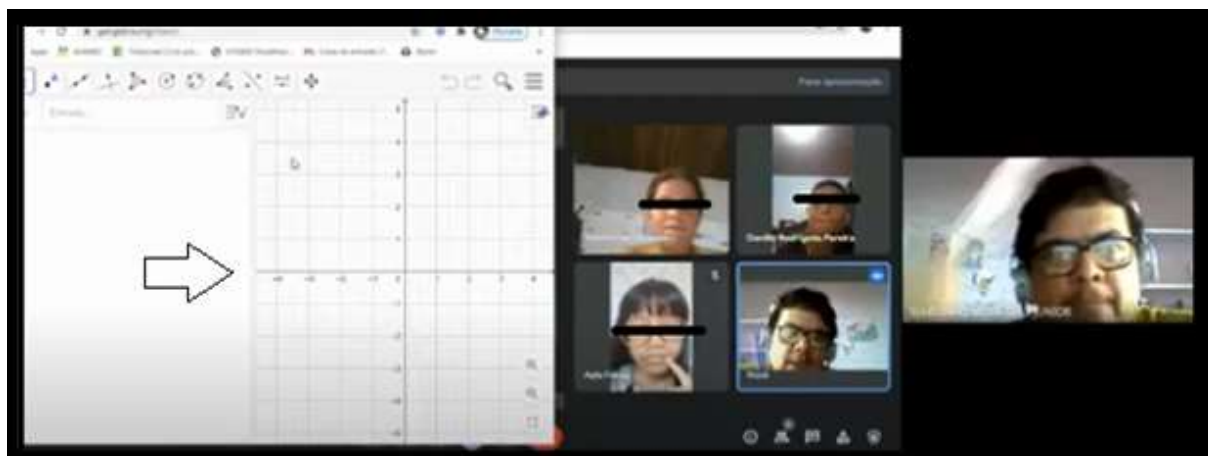
E3 – Sim.

E4 – Sim.

E5 – Sim.

Pesquisador - Vocês conseguem identificar na parte gráfica do geogebra o plano cartesiano, vocês se lembram? (Figura 265).

Figura 265 - Localização do plano cartesiano



Fonte: Própria do Autor

E3 – Sim.

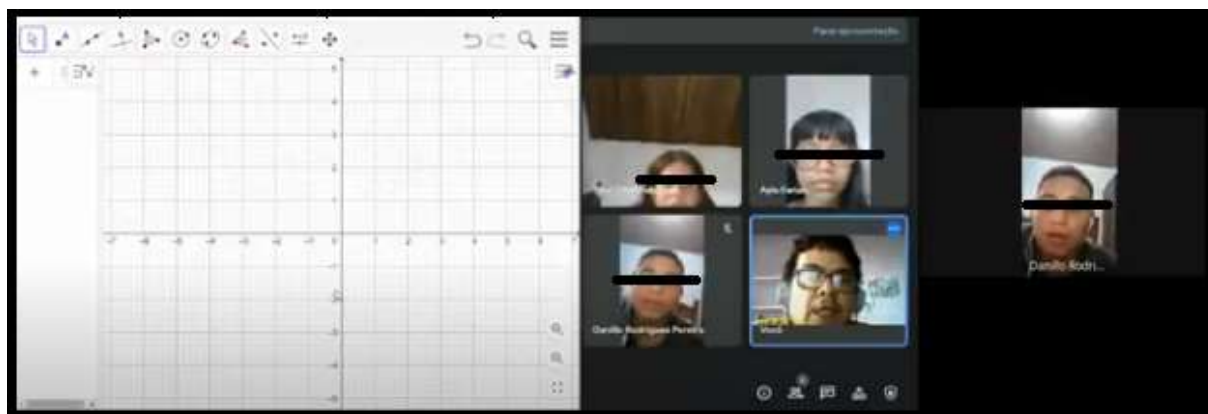
E4 – Sim.

E5 – Não.

Pesquisador – O plano cartesiano corresponde a essa “cruz”, a reta na horizontal é a abscissa ou eixo x e a reta vertical é chamada de eixo y ou

ordenada, elas são ortogonais entre si, isto é, formam ângulo de 90° e também dividem o plano em quatro quadrantes, vocês se lembram dos quadrantes? (Figura 266).

Figura 266 - Plano cartesiano



Fonte: Própria do Autor

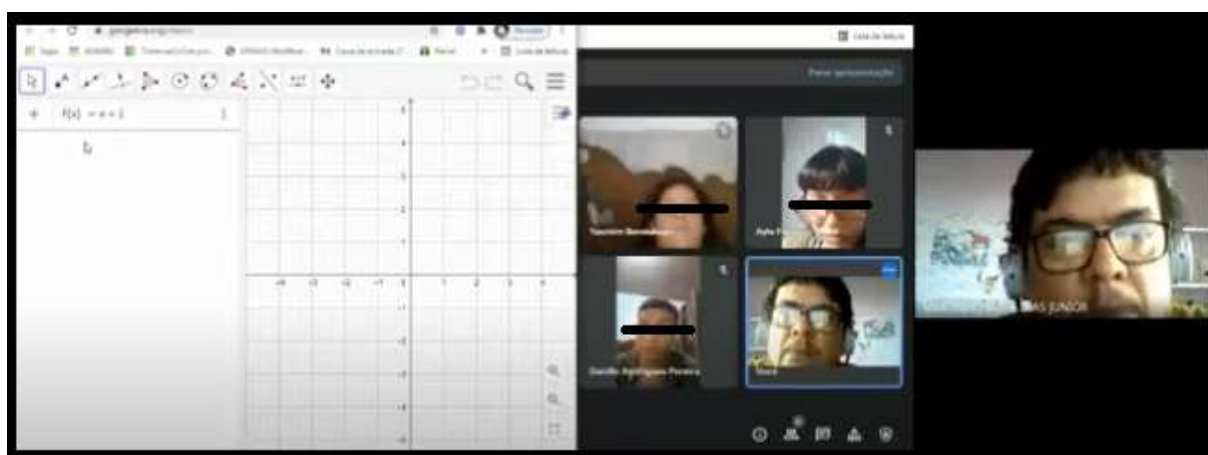
E3 – Primeiro quadrante, segundo, terceiro e quarto quadrantes.

E4 – Me lembrei.

E5 – Sim.

Pesquisador – Isso. Eles ficam no sentido anti-horário, ok, quando vocês quiserem digitar expressões matemáticas, fórmulas, vocês podem usar um espaço no geogebra denominado de “entrada” fica localizado na parte algébrica, fica ao lado esquerdo da tela, próximo de um sinal de mais. Conseguiram identificar? (Figura 267).

Figura 267 - Localização da Entrada



Fonte: Própria do Autor

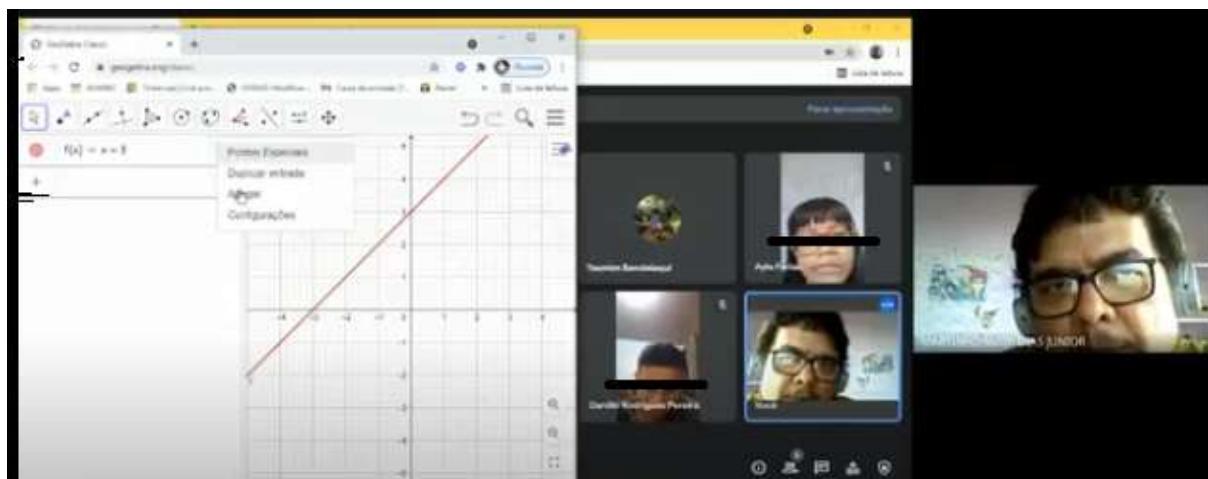
E3 – Sim.

E4 – Sim.

E5 – Sim.

Pesquisador – Se você quiser apagar o que você escreveu em entrada, clique nos três pontos que estão no lado de entrada, selecione “apagar “. Entenderam? (Figura 268).

Figura 268 - Apagar em entrada



Fonte: Própria do Autor

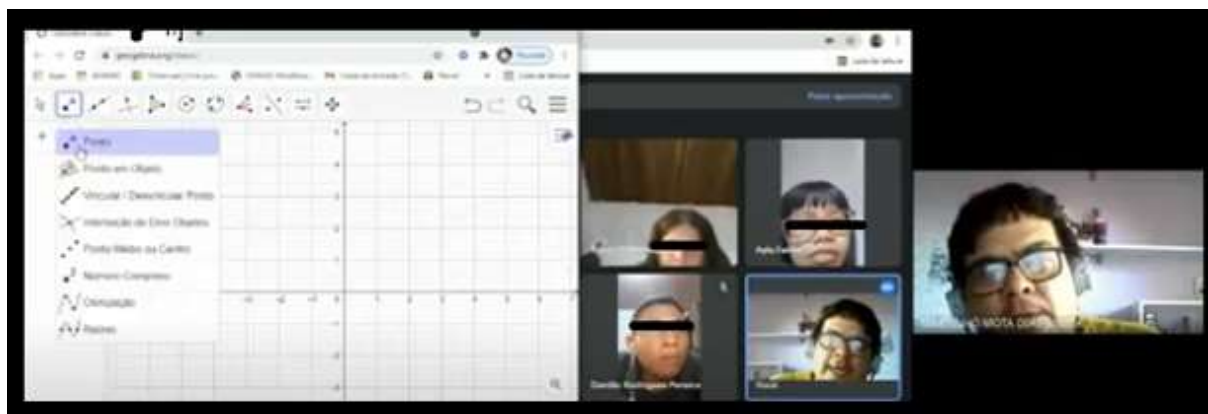
E3 – Sim.

E4 – Sim.

E5 – Sim.

Pesquisador – O ponto A que fica localizado na barra de ferramenta, ao clicar abre uma nova aba com vários outros ícones, clique em Ponto A. (Figura 269).

Figura 269 - Ponto A



Fonte: Própria do Autor

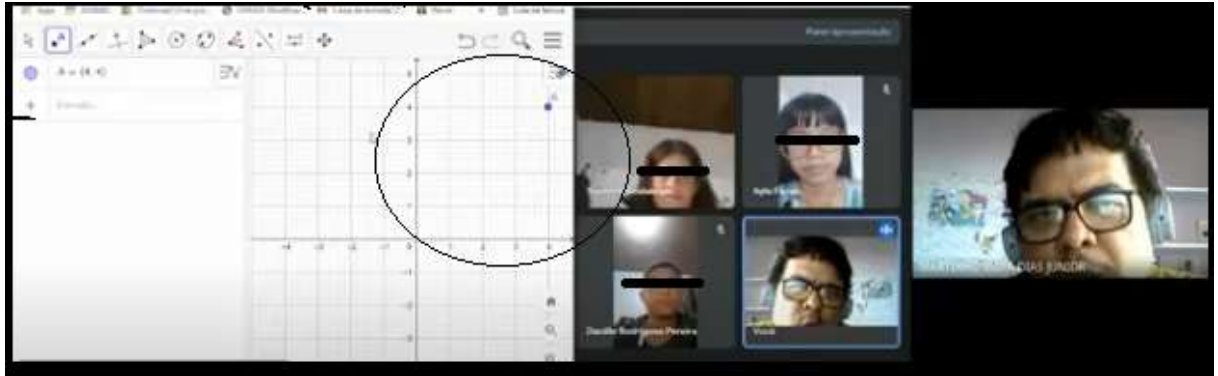
E3 – Sim.

E4 – Ok.

E5 – Ok.

Pesquisador – Determine um ponto no primeiro quadrante. E diga quais as coordenadas do ponto A. (Figura 270).

Figura 270 - Determinação do ponto A no 1º quadrante



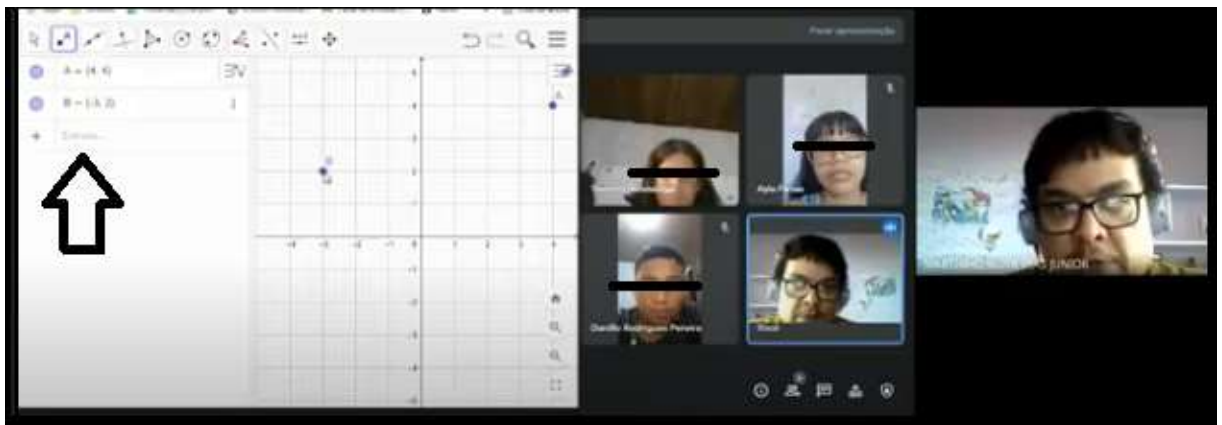
Fonte: Própria do Autor

E3 – É 4 e 4.

E4 – 4,4

Pesquisador – Determine o ponto B no segundo quadrante, quanto vale o x no ponto B e o y? Você pode olhar também na parte algébrica. (Figura 271).

Figura 271 - Determinação do ponto B



Fonte: Própria do Autor

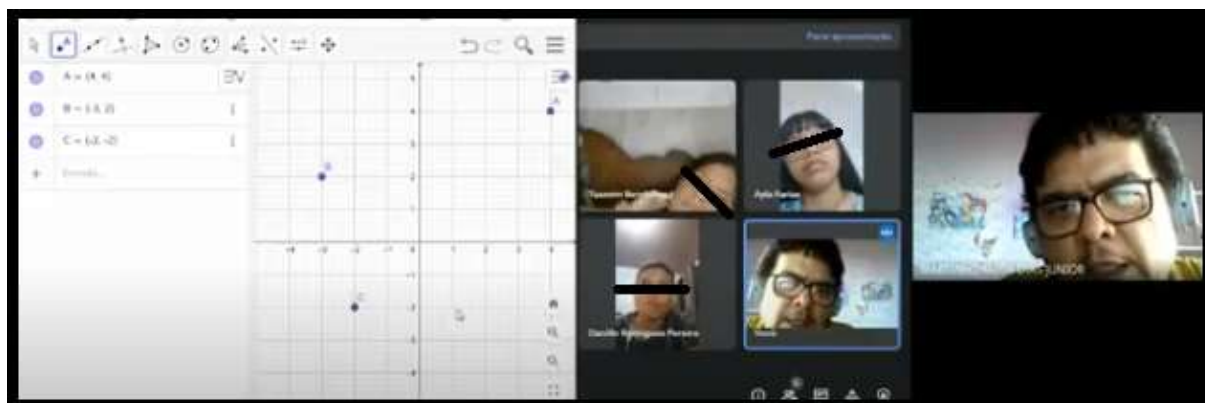
E3 - -3 e 2.

E4 – Ok

E5 - Ok

Pesquisador – No terceiro quadrante quais os valores da coordenada do ponto C? (Figura

Figura 272 - Ponto no 3ºquadrante



Fonte: Própria do Autor

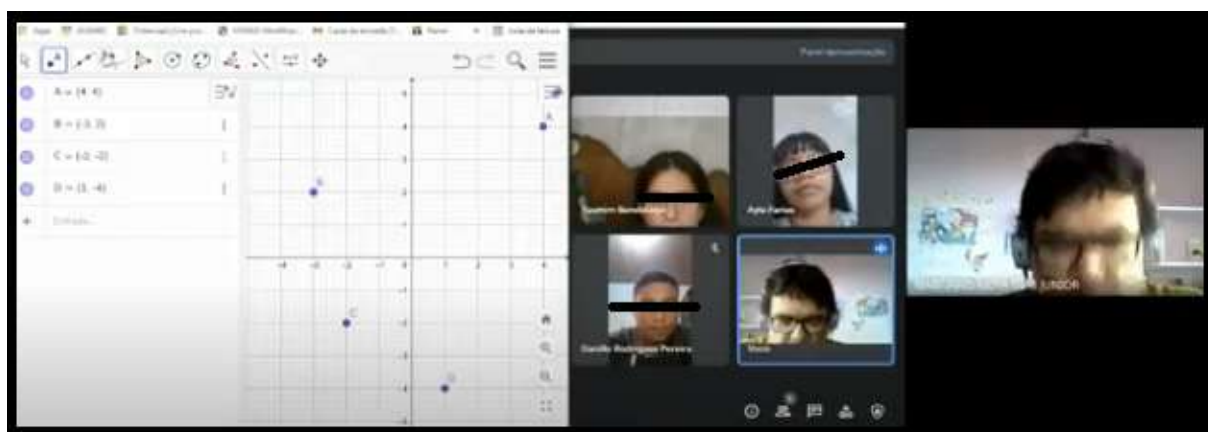
E3 - -2 e -2.

E4 – Ok

E5 - - 2 e -2

Pesquisador – O ponto D no quarto quadrante? (Figura 273).

Figura 273 - Determinação do ponto D



Fonte: Própria do Autor

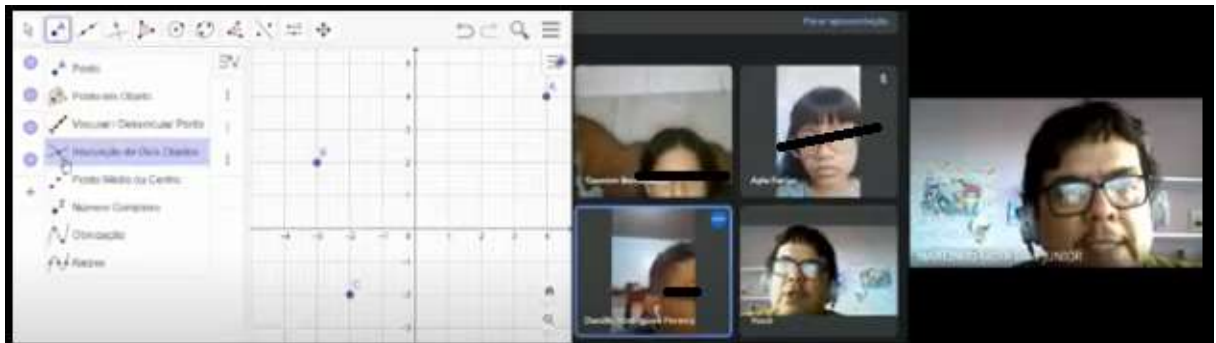
E3 - 1 e -4.

E4 – Ok

E5 - 1 e -4.

Pesquisador – Quando temos dois objetos, por exemplo uma reta ou um ponto ou um eixo, ou segmento de reta e você quer determinar um ponto em que houve uma interseção entre esses objetos. Você deve clicar no ponto A, vai abrir uma aba, com vários ícones e um deles vai ter “interseção de dois objetos”, clique nesse ícone. (Figura 274).

Figura 274 - Ponto de interseção entre dois objetos



Fonte: Própria do Autor

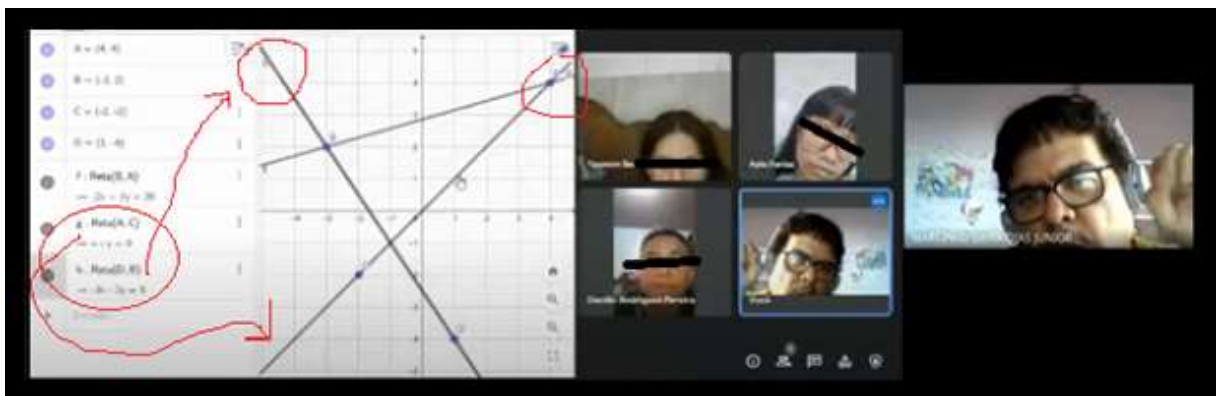
E3 - Ok.

E4 – Ok

E5 - Ok.

Pesquisador - Ao clicar, você deverá selecionar os dois objetos para determinar o ponto de interseção. Veja a seguir e selecione as retas g e h. (Figura 275).

Figura 275 - Ponto de interseção



Fonte: Própria do Autor

E3 - Ok.

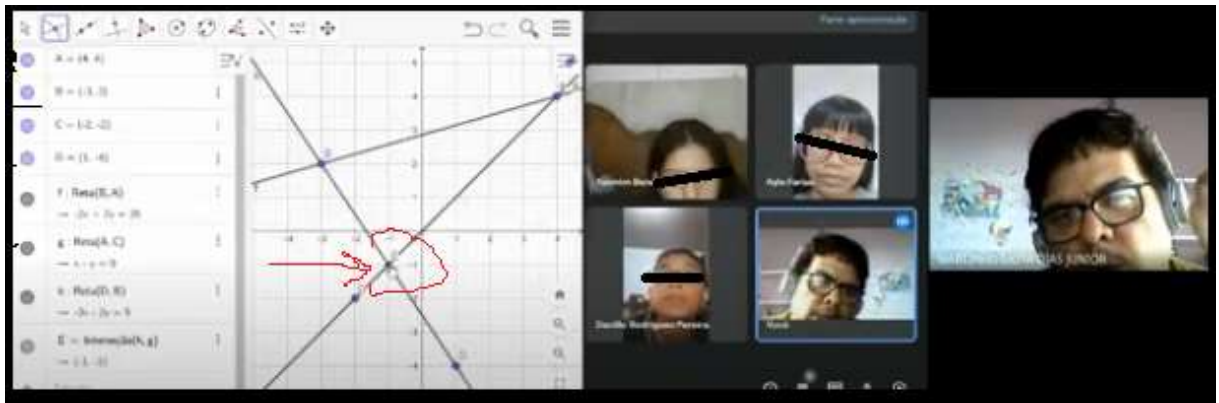
E4 – Ok

E5 - Ok.

Depois de selecionado, o pesquisador diz:

Pesquisador – Selecionados os dois objetos aparecerá um ponto que o geogebra denominará de ponto E (neste caso). Observe. (Figura 276).

Figura 276 Ponto E



Fonte: Própria do Autor

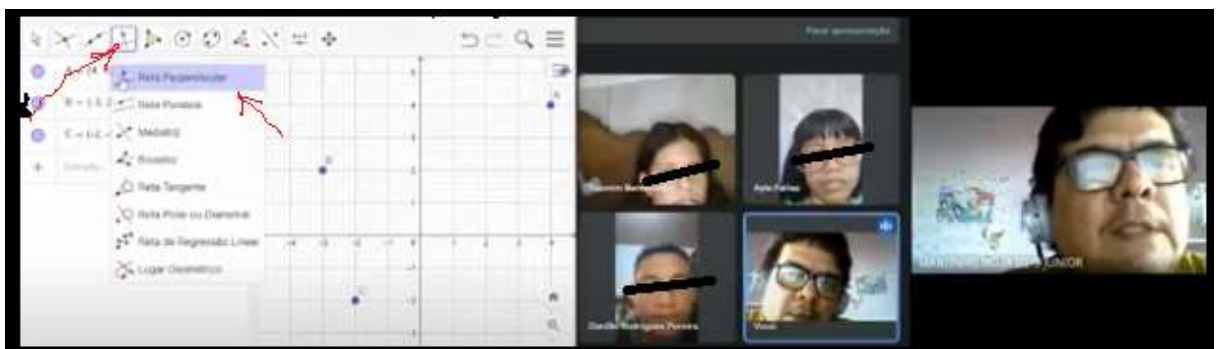
E3 - Ok.

E4 – Ok

E5 - Ok.

Pesquisador – Vamos apagar tudo na parte algébrica e observamos como podemos colocar uma reta perpendicular no geogebra. Vá no quarto ícone da barra de ferramentas, da esquerda para direita da tela e selecione o ícone “Reta perpendicular”. Abrirá uma aba com vários ícones e confirme a sua seleção, clique em “reta perpendicular” Clique. (Figura 277).

Figura 277 - Reta perpendicular



Fonte: Própria do Autor

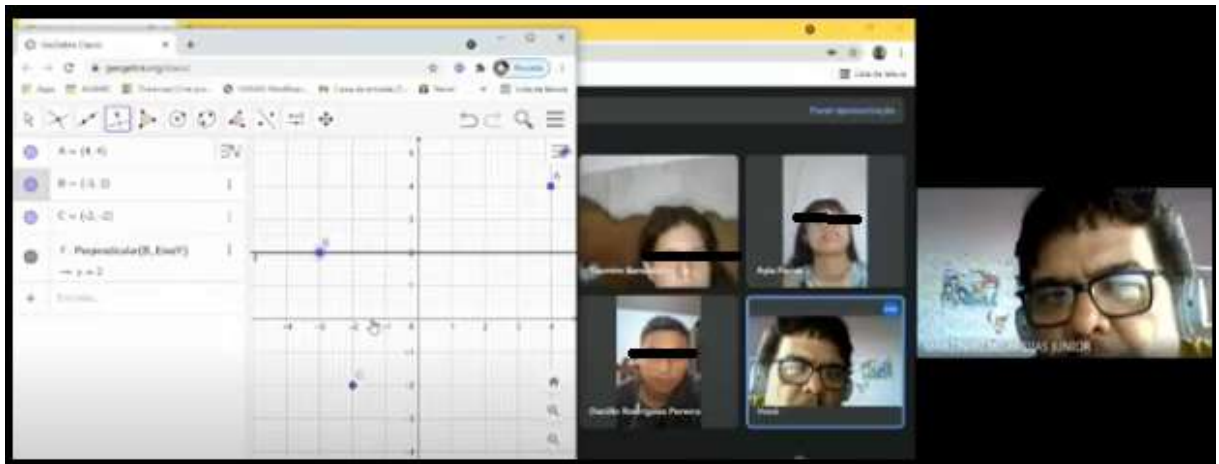
E3 - Ok.

E4 – Ok

E5 - Ok.

Pesquisador – Selecionado o ícone “reta perpendicular “ você deverá escolher um ponto e em seguida clicar em uma reta, dessa forma você terá uma reta perpendicular passando pelo ponto escolhido e perpendicular a reta escolhida. Façam por favor. (Figura 278).

Figura 278 - Reta perpendicular e um ponto



Fonte: Própria do Autor

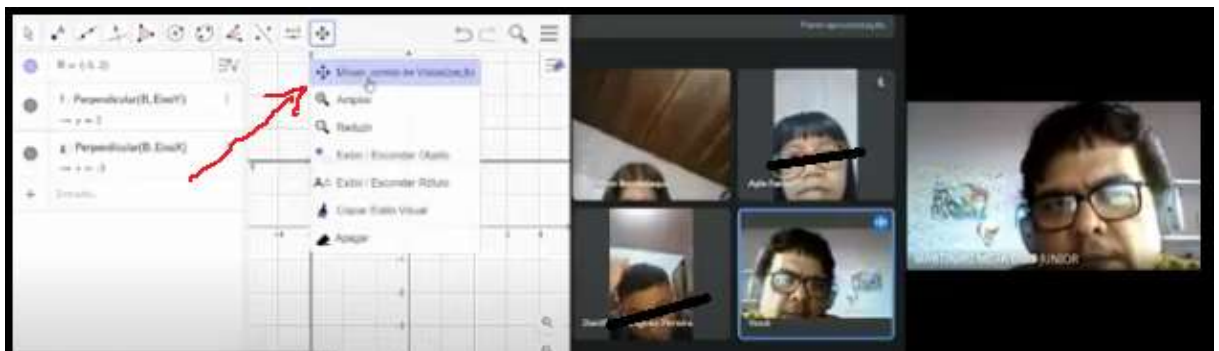
E3 - Ok.

E4 – Ok

E5 - Ok.

Pesquisador – E temos também o ícone “mover janela de visualização”, este ícone quando selecionado você clica no objeto na parte gráfica e você pode movimentar para onde você quiser. (Figura 279).

Figura 279 - Move janela de visualização



Fonte: Própria do Autor

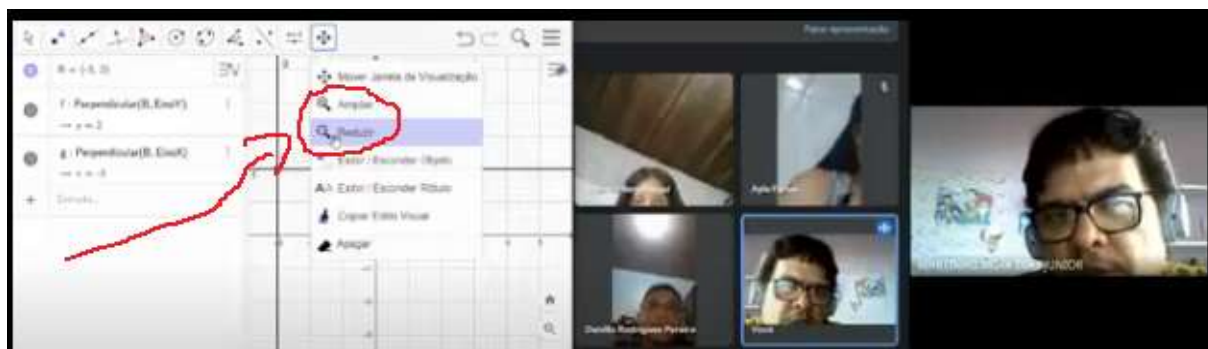
E3 - Ok.

E4 – Ok

E5 - Ok.

Pesquisador – O ícone lupa mais e lupa menos quando selecionado você pode aumentar ou diminuir o plano cartesiano na parte gráfica do geogebra. (Figura 280).

Figura 280 - Lupa + ou -



Fonte: Própria do Autor

E3. Ok .

E4. Ok.

E5. Ok.

O segundo momento teve uma duração de aproximadamente 35 minutos, vimos os tipos de funções: Constante, linear (1º grau), quadrática (2º grau), exponencial e logarítmica.

Pesquisador. Uma função pode ser representada por $f(x)$ ou y , ok. Vocês sabem o que é uma função constante? Se lembram?

E3. Não me lembro.

E4. Nem eu.

E5. Não.

Pesquisador. É quando você tem uma reta perpendicular em relação ao eixo y . Por exemplo, digite no campo entrada a expressão: $y = 5$.

E3. Ok.

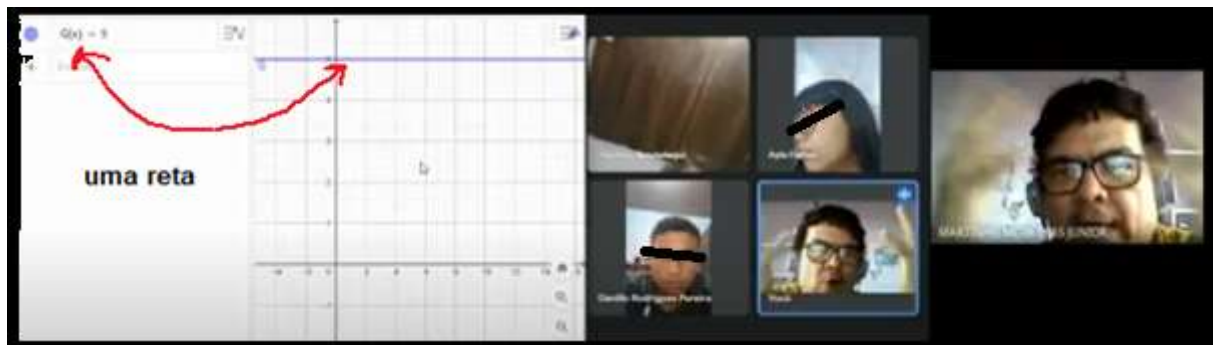
E4. Ok.

E5. Ok.

Pesquisador. O que apareceu na parte gráfica do geogebra, quando vocês digitaram em entrada $y = 5$.

E3. Apareceu uma reta passando por 5 no eixo y . (Figura 281).

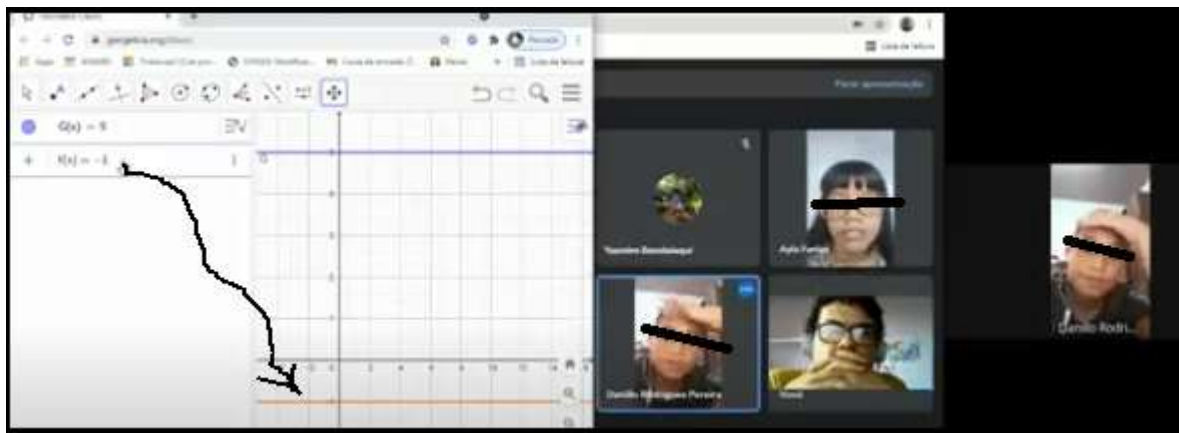
Figura 281- Reta passando por 5.



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador. A função constante pode está no eixo positivo de y ou no eixo negativo de y. Correto? (figura 282).

Figura 282 - Função constante.



Fonte: Própria do Autor

E3. Correto.

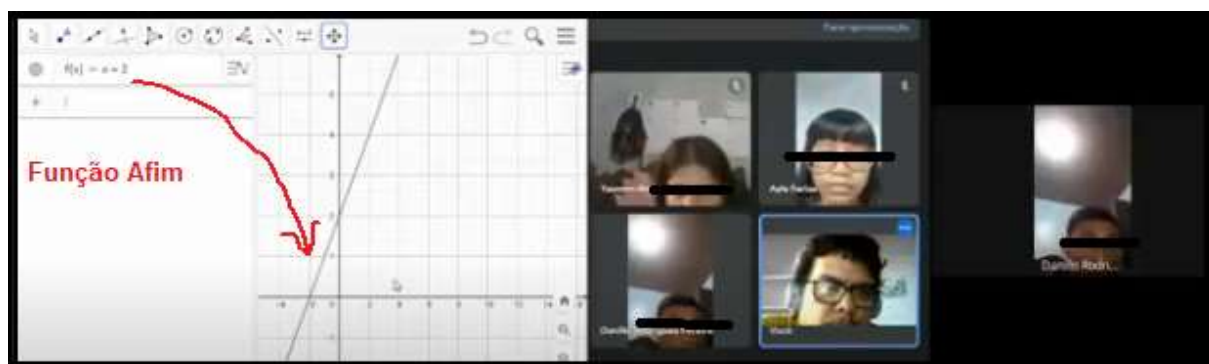
E4. Sim.

E5. Sim.

Pesquisador. Parabéns. E uma função do primeiro grau ou linear ou afim como posso fazer?

E2. Eu sei professor. (figura 283).

Figura 283 - Função do 1º Grau.



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador. Que tipo de reta é essa da figura.?

E3. Uma reta inclinada.

E4. Uma crescente.

Pesquisador. Isso, é uma reta inclinada. É crescente ou decrescente?

(Figura

E3 – Crescente.

Pesquisador. Por que é chamada de equação do primeiro grau?

E4. Não sei.

E5. Por são inclinadas.

Pesquisador. Todas possuem apenas uma raiz. E também porque tem como expoente da variável o número um. Entenderam?

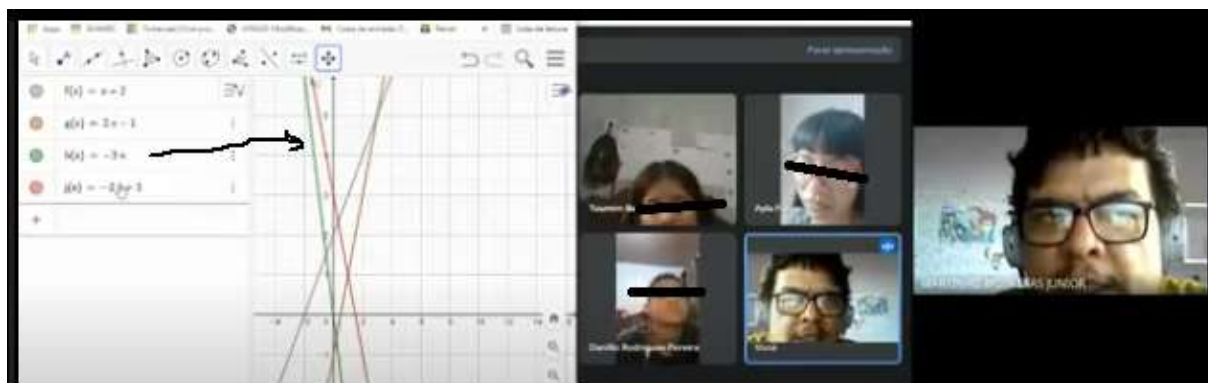
E3. Sim.

E4. Sim.

E5. Sim.

Pesquisador. O que determina se uma função do primeiro grau é crescente ou decrescente? Observem o gráfico das funções digitadas. (Figura 284).

Figura 284 - Exemplos de função do 1º grau



Fonte: Própria do Autor

E3. Os sinais.

E4. Isso.

E5. Sim.

Pesquisador. Muito bem. É exatamente isso. E a função quadrática ou do segundo grau? Sabem?

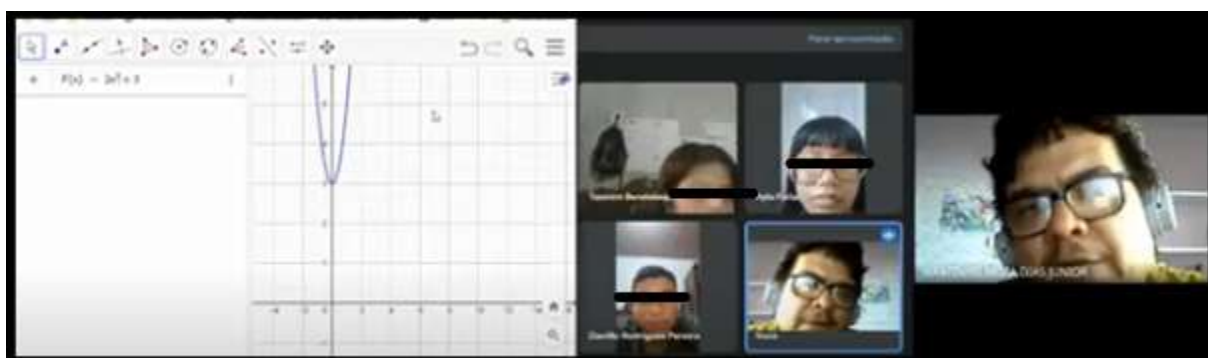
E3. Não lembro.

E4. Não sei.

E5. Não sei.

Pesquisador. A quadrática ou do segundo grau é uma parábola. Lembraram? (Figura 285).

Figura 285 - Função quadrática



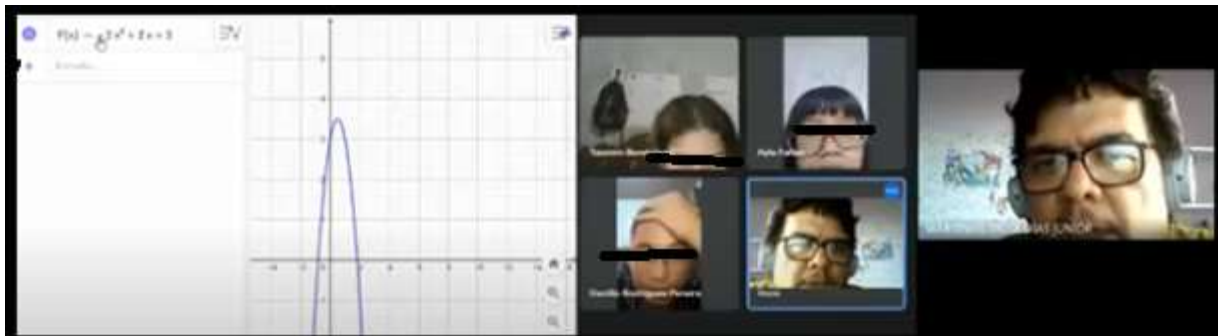
Fonte: Própria do Autor

E3. É uma parábola.

E4. Tem a concavidade.

Pesquisador. Correto. Se eu mudar o sinal do número que acompanha o x^2 para um número negativo, o que acontece com o gráfico? (Figura 286).

Figura 286 - Função quadrática decrescente.



Fonte: Própria do Autor

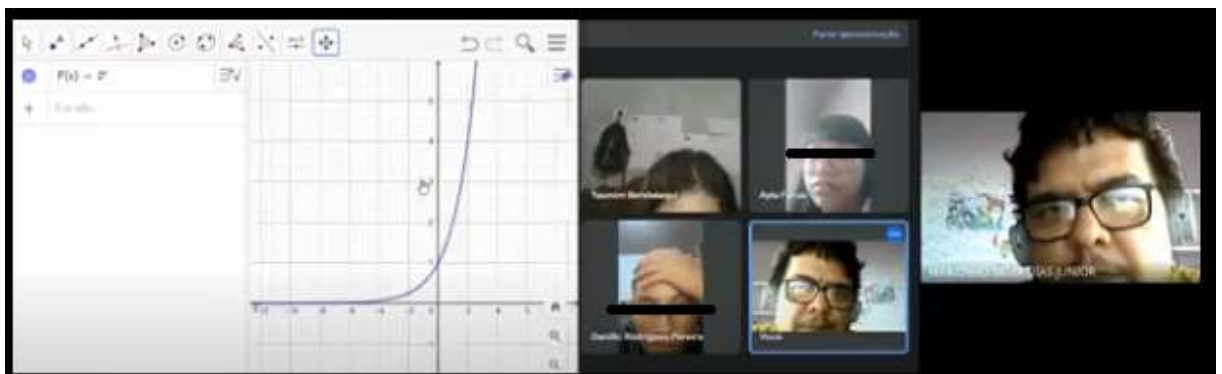
E3. Muda a parábola.

E4. Isso.

E5. Sim.

Pesquisador. Vou fazer o gráfico de uma exponencial. Observem (Figura 287).

Figura 287 - Gráfico da Exponencial.



Fonte: Própria do Autor

E3. Ok .

E4. Ok .

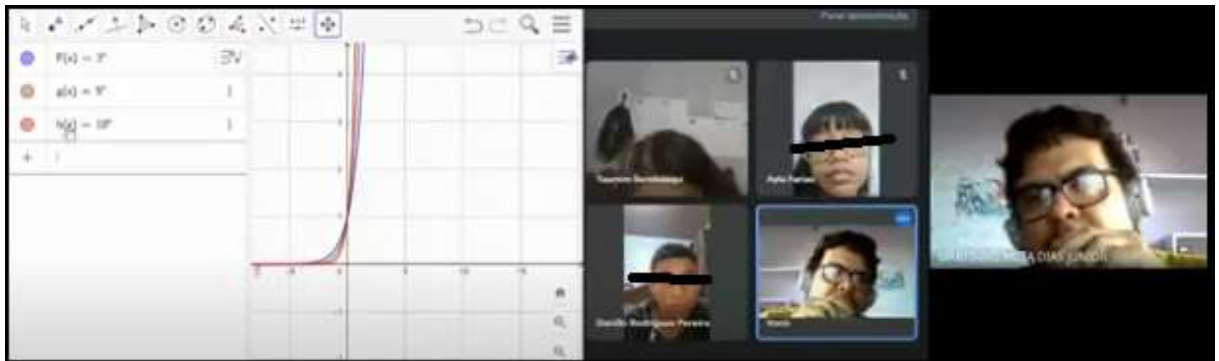
E5. Ok .

Pesquisador. Como é o gráfico da função exponencial? É uma parábola?

E3. Não é uma curva.

Pesquisador. Vejam o que acontecem com o gráfico da função exponencial para outros exemplos (Figura 288).

Figura 288 - Exemplo de função exponencial



Fonte: Própria do Autor

E3. Não sei.

E4. Todos tocam no ponto um.

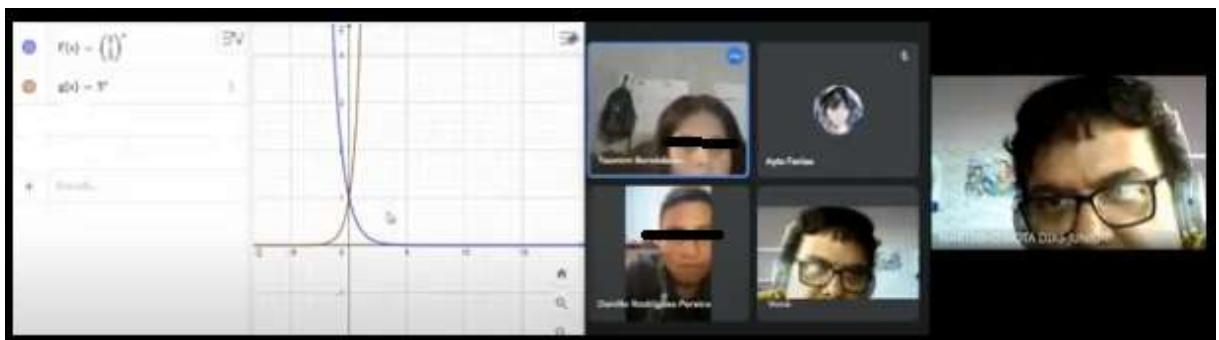
E5. Não sei.

Pesquisador. Sim correto, é crescente ou decrescente?

E3. Crescente.

Pesquisador. Correto. Por que é crescente? Vou colocar outra função exponencial decrescente. Por que é decrescente? (Figura 289).

Figura 289 - função exponencial decrescente.



Fonte: Própria do Autor

E3. Não sei explicar.

E4. Não sei.

E5. Por que um é inteiro e o outro é fracionário

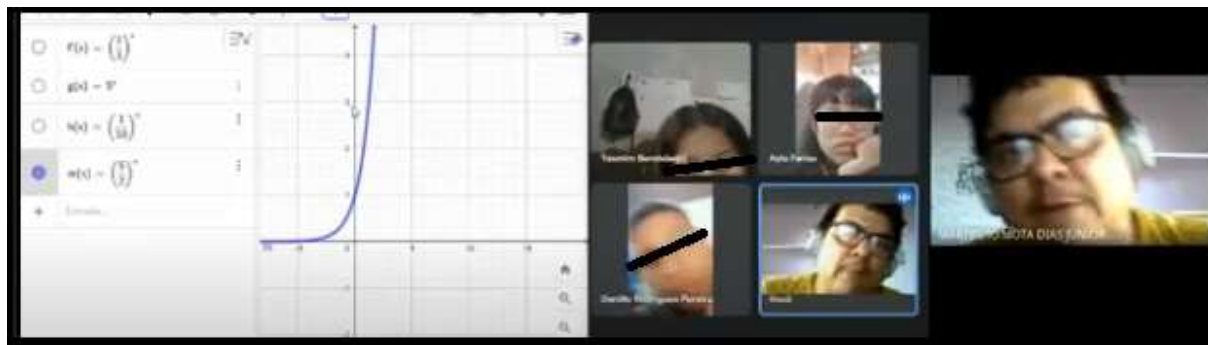
Pesquisador. Certo E3, mas quem é crescente e quem é decrescente?

E5. Quem for fração é decrescente e quem for inteiro é crescente.

Pesquisador. É mais temos que ter cuidado com as frações pois você tem que saber que tipo de fração você está se referindo. Por exemplo: se for uma

fração própria a função é decrescente e se for uma fração imprópria a função é crescente. Ok.(Figura 290).

Figura 290 - Função exponencial crescente - fração imprópria



Fonte: Própria do Autor

E3. Ok.

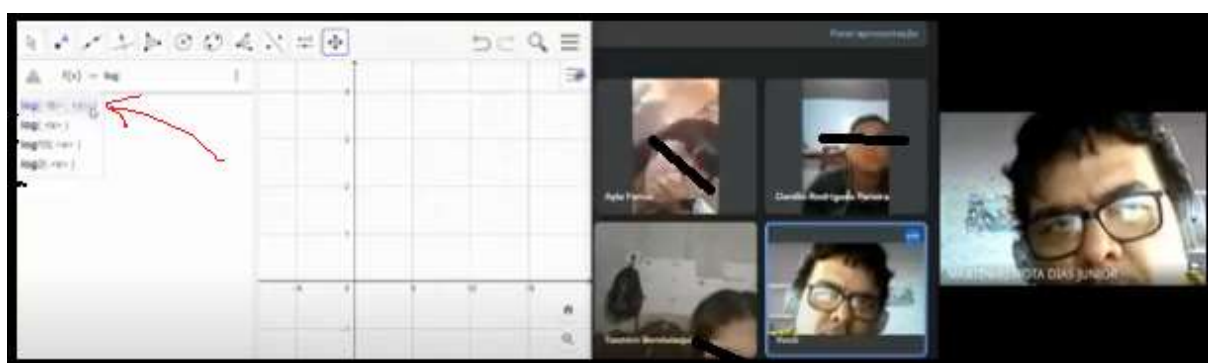
E4. Ok.

E5. Ok.

Depois observamos no experimento a função logarítmica, o pesquisador disse:

Pesquisador. Digite em entrada do geogebra a palavra log, abrirá uma aba com algumas opções, escolha a primeira opção em que você vai digitar a base e o x. (Figura 291).

Figura 291 - Função log.



Fonte: Própria do Autor

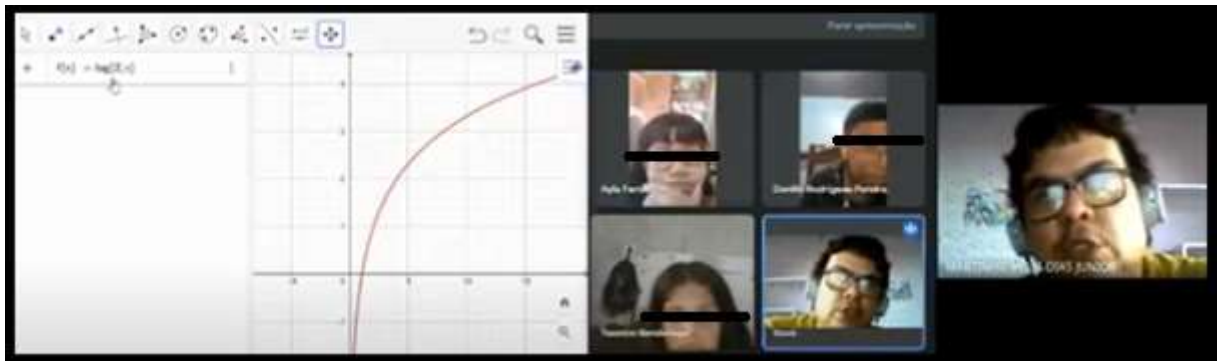
E3. Ok .

E4. Ok .

E5. Ok.

Pesquisador. Nesta função chamada logarítmica vamos digitar para a base o valor 2 e em seguida digite x, dê enter. O que aconteceu? (Figura 292).

Figura 292 - Função logarítmica crescente.



Fonte: Própria do Autor

E3. Apareceu uma curva.

E4. Uma parábola.

E5. Curva.

Pesquisador. A função é crescente ou decrescente? (Figura 292).

E3. É crescente.

E4. Crescente.

E5. Crescente.

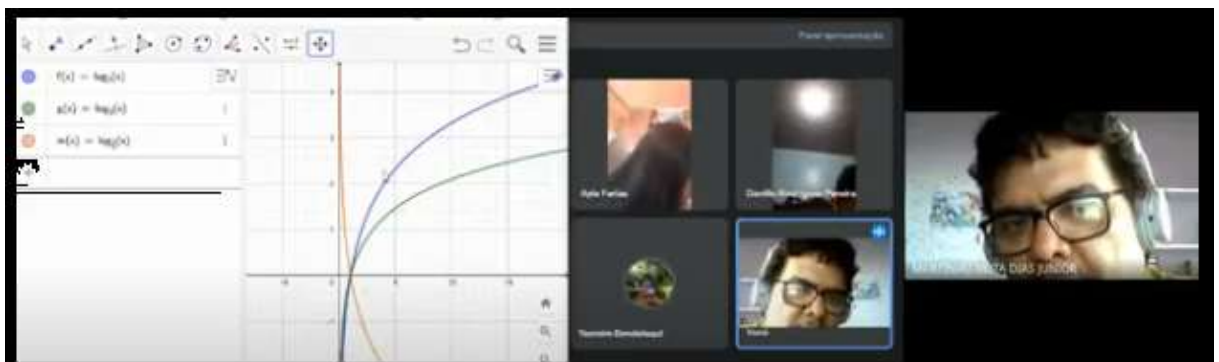
Pesquisador. Mas, por que vocês acham que é crescente, qual o motivo?

E3. Vem de baixo do infinito vai para cima.

E4. É porque a base é positiva.

Pesquisador. E se eu trocar a base da logarítmica por uma fração própria? É igual a exponencial, a ideia é a mesma. (Figura 293).

Figura 293 - Função logarítmica crescente e fração imprópria.



Fonte: Própria do Autor

E3. Ok .

E4. Ok.

E5. Ok.

O terceiro momento durou aproximadamente 46 minutos e comentamos sobre imagem e domínio das funções já estudadas aqui até o momento, valores de $x >$, $x <$, $y >$, $y <$. O pesquisador disse:

Pesquisador. A imagem está relacionada com y e o domínio está relacionado com x , falar em imagem é falar do y e falar domínio é falar de x , entendeu?

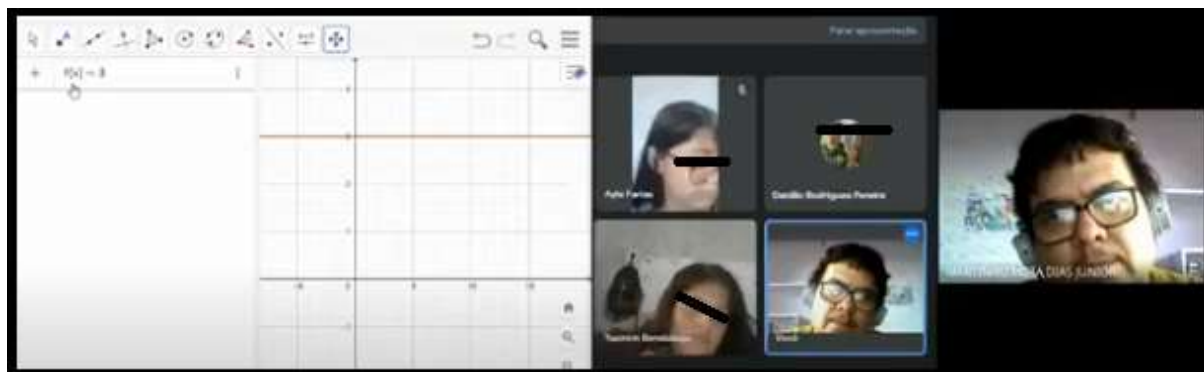
E3. Sim.

E4. Sim.

E5. Sim.

Pesquisador. Qual a imagem da função $f(x) = 3$? Que tipo de função é essa? (Figura 294).

Figura 294 - Função constante - imagem



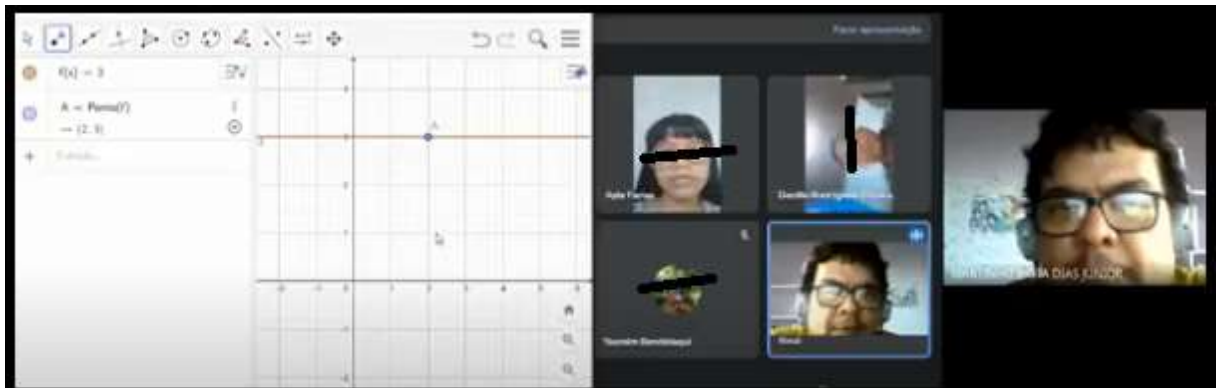
Fonte: Própria do Autor

E3. É uma função constante.

E5. A imagem é 3.

Pesquisador. Muito bem, se tivermos um ponto A localizado nesta reta, nesta função constante, qual seria a imagem e o domínio de A? (Figura 295).

Figura 295 - Imagem e domínio - função constante.

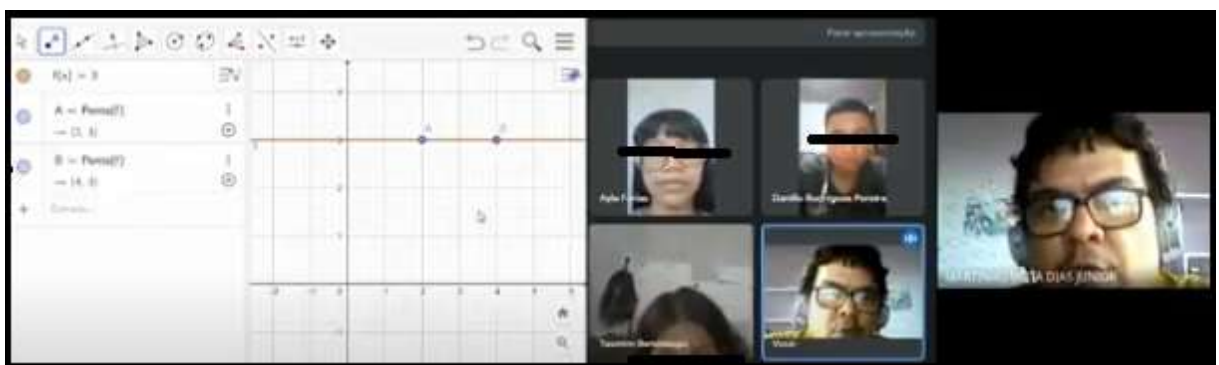


Fonte: Própria do Autor

E5 – para $x = 2$ e para $y = 3$.

Pesquisador. Para o ponto B, quais as coordenadas do ponto B? Queremos a imagem e o domínio de B. (Figura 296).

Figura 296 - Coordenadas dos pontos na função constante.

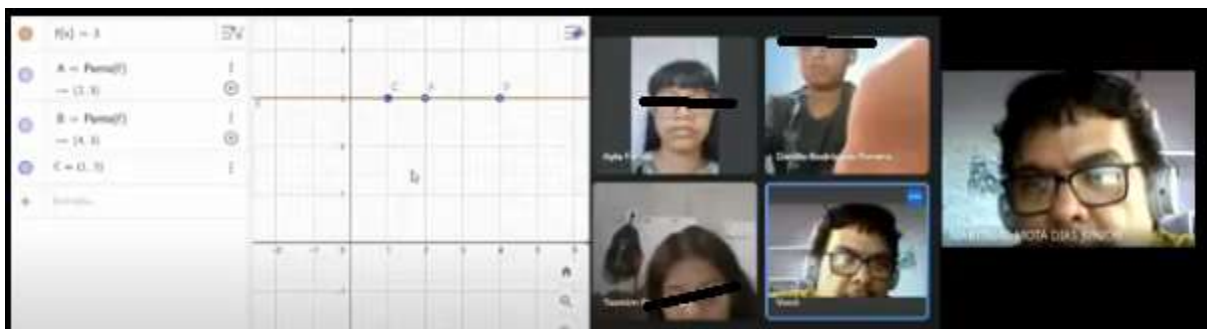


Fonte: Própria do Autor

E5. Domínio é 4 e a imagem é 3.

Pesquisador. Qualquer valor do domínio desta função $f(x) = 3$ sempre vai ter como imagem o valor 3, pois a função é constante. Entenderam? (Figura 297).

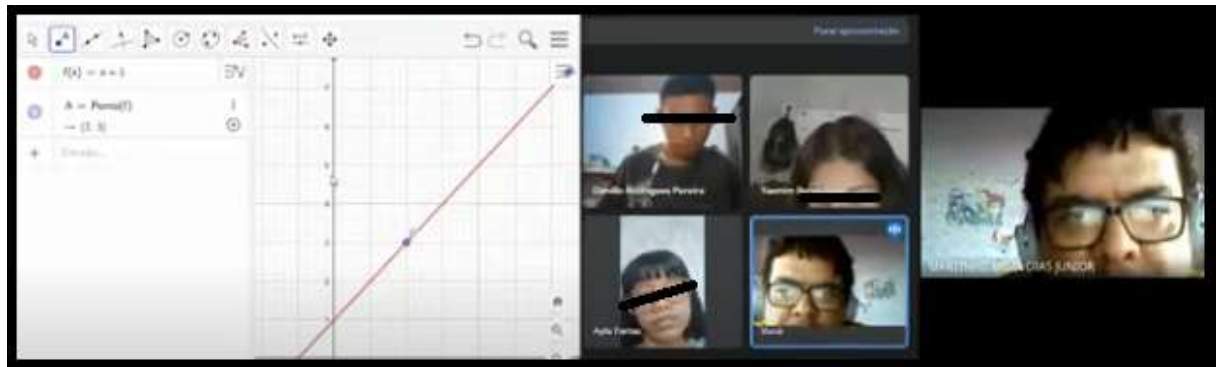
Figura 297 - Imagem da função constante.



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador. Para a função do primeiro grau determinamos o domínio e a imagem da mesma forma que fizemos para a função constante, por exemplo: dado a função do primeiro grau $f(x) = x + 1$, determine o valor das coordenadas do ponto A. (Figura 298).

Figura 298 - Função do 1º grau.



Fonte: Própria do Autor

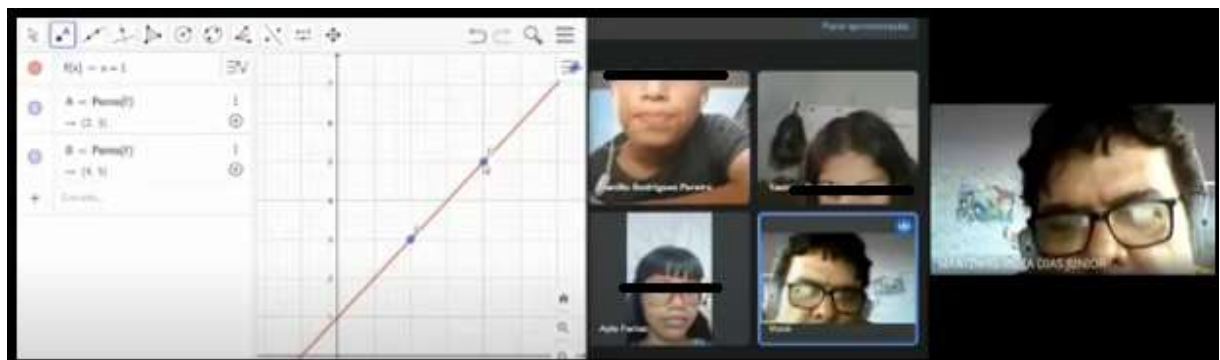
E3. 2 e 3

E4. $x = 2$ e $y = 3$.

E5. Isso.

Pesquisador. Para o ponto B, qual a sua coordenada? (Figura 299).

Figura 299 - Coordenada do ponto b na reta do 1º grau.



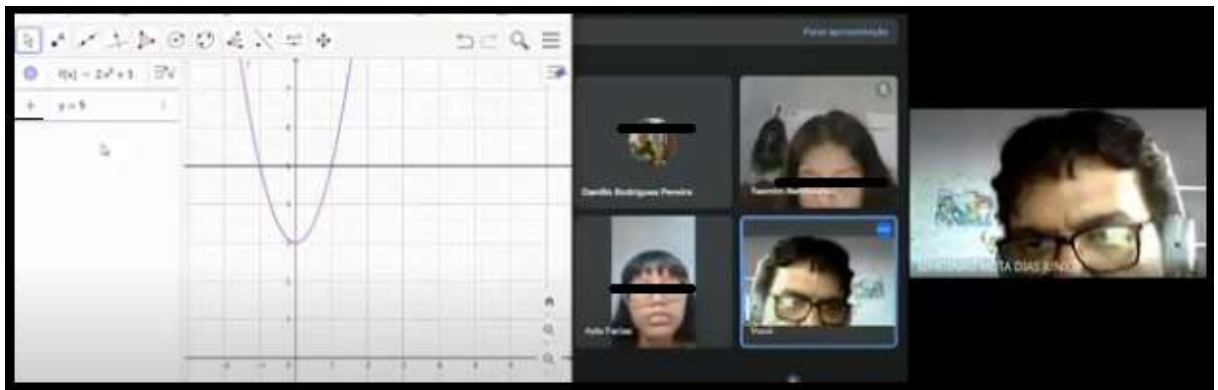
Fonte: Própria do Autor

E3. O domínio 4 e imagem 5.

E5. 4 e 5.

Pesquisador. Para uma função do segundo grau, $f(x) = 2x^2 + 3$ determine o x para a imagem $y = 5$. (Figura 300).

Figura 300 - Raízes da função quadrática.



Fonte: Própria do Autor

E3. Cinco.

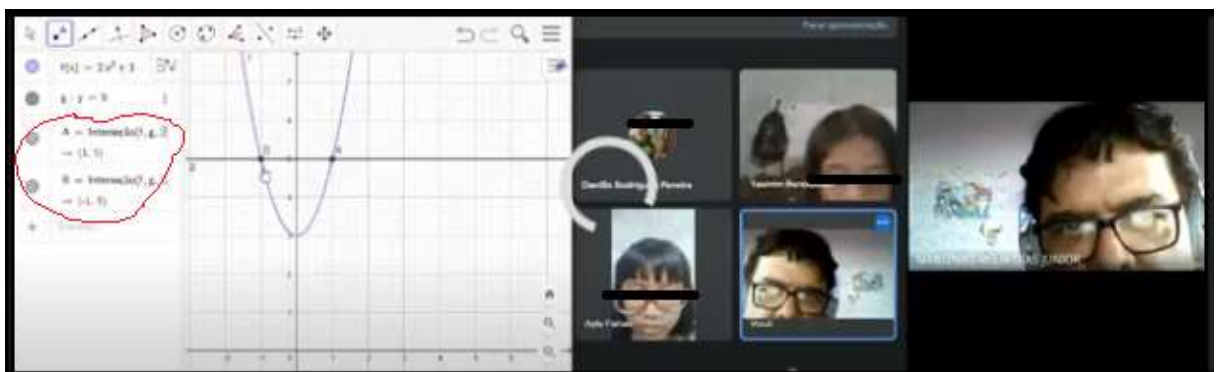
E4. Zero.

E5. Acho que é um.

Pesquisador. É um, mas tem outro?

E4. Menos um.

Pesquisador. Isso. Temos dois valores para x: um e menos um. Veja se você usar o ícone interseção entre dois objetos você observa na parte algébrica os valores de x para $y = 5$. (Figura 301).

Figura 301 - Valores de x para $y = 5$.

Fonte: Própria do Autor

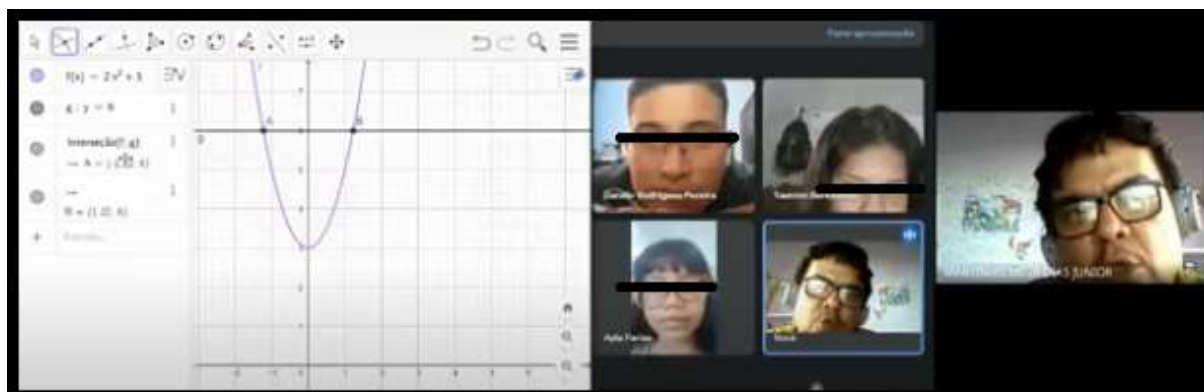
E3. Sim.

E4. Sim

E5. Sim.

Pesquisador. Vou mudar de função, determine os valores de x desta função $f(x) = 2x^2 + 3$, para $y = 6$. (Figura 302).

Figura 302 - Valores de x.

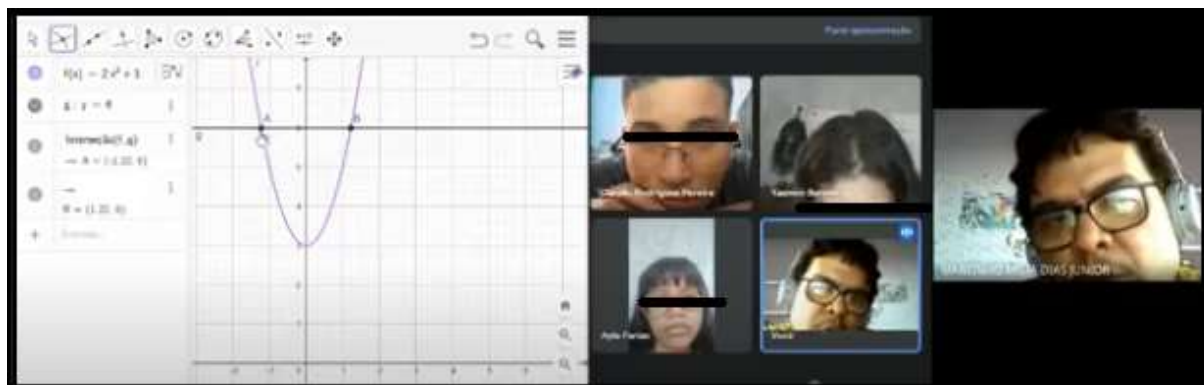


Fonte: Própria do Autor

E4. Uma vírgula dois

Pesquisador. Mais ou menos, faltou o outro ponto. Para determinamos devemos clicar no ícone interseção entre dois objetos, selecione a reta $y = 5$ e a parábola. Vejam o que acontece. (Figura 303).

Figura 303 - Determinação dos valores x



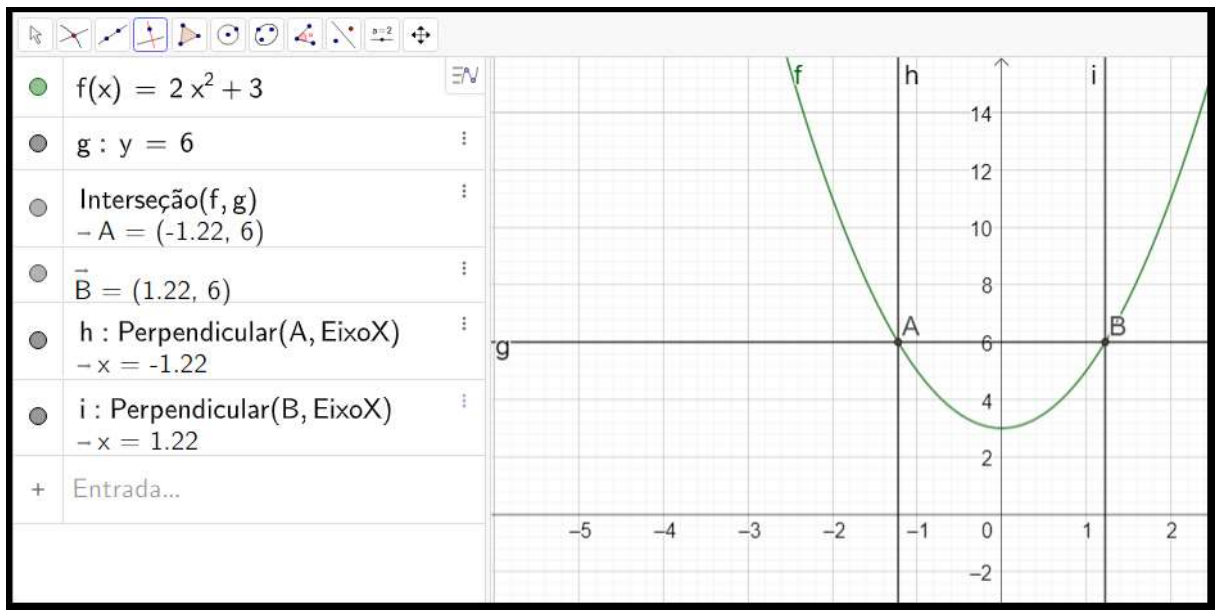
Fonte: Própria do Autor

E3. Aparecem dois pontos: A e B

E5. Isso.

Pesquisador. Para saber os valores de x basta olhar a parte algébrica e se quiser saber aonde os valores tocam no eixo x basta você usar o ícone reta perpendicular, selecione o ponto e a reta x (neste caso). (Figura 304).

Figura 304 - retas perpendiculares.



Fonte: Própria do Autor

E3. Ok.

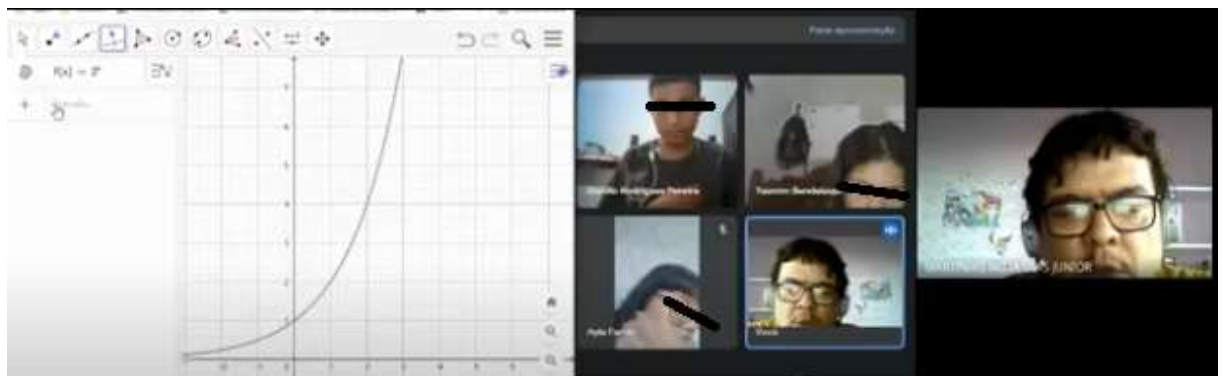
E4. Ok.

E5. Ok.

Depois observamos o gráfico da função exponencial para determinarmos a imagem e o valor de x , o pesquisador disse:

Pesquisador. Vamos inserir a função exponencial em entrada do geogebra, digite a expressão: $f(x) = 2^x$.(Figura 305).

Figura 305 - Função exponencial crescente.



Fonte: Própria do Autor

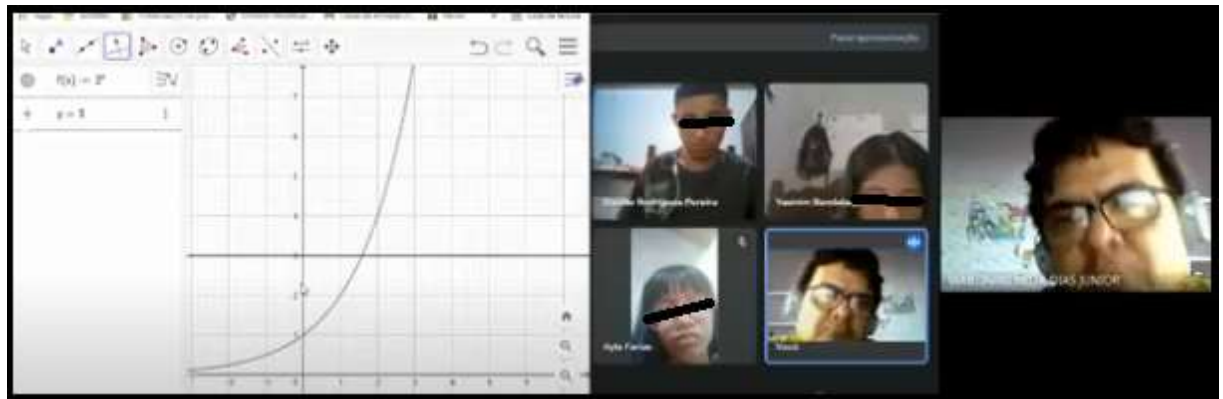
E3. Ok.

E4. Ok.

E5. Ok.

Pesquisador. Em entrada digite $y = 3$ e diga qual o valor de x correspondente a y .? (Figura 306).

Figura 306 - Função exponencial e $y = 3$.



Fonte: Própria do Autor

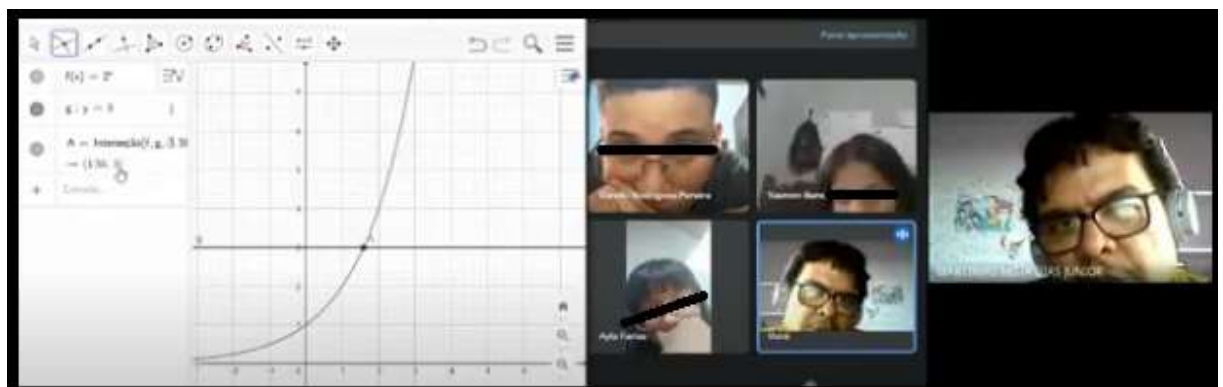
E3. Não sei.

E4. Fica entre 1 e 2.

E5. Não sei.

Pesquisador. Para achar o x , você pode fazer assim: clique no ícone ponto de interseção entre dois objetos, selecione a reta y e a função $F(x) = 2^x$. O que aconteceu? (Figura 307).

Figura 307 - Função exponencial e ponto de interseção



Fonte: Própria do Autor

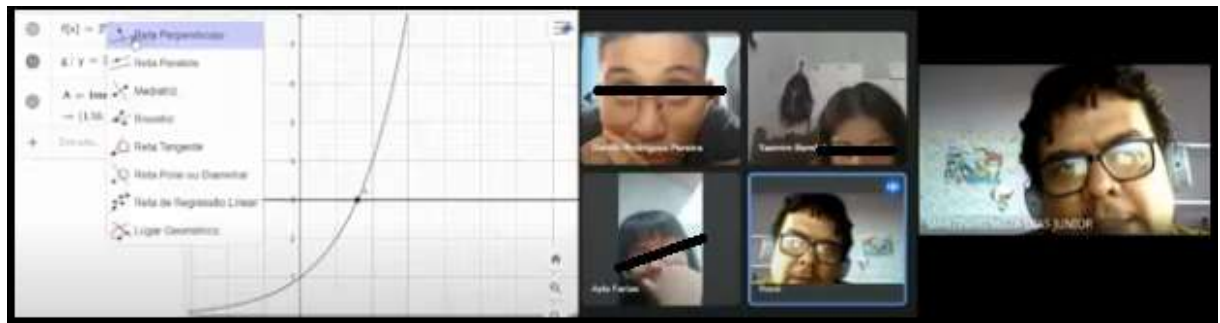
E3. Determinou um ponto A.

E4. 1,58.

E5. $x = 1,58$

Pesquisador. Certo e se você quiser saber o local, a posição em que vai ficar no eixo x é só você clicar no ícone “reta perpendicular”, vai abrir um aba com várias opções de novos ícones, daí você clica novamente em “reta perpendicular”, . (Figura 308).

Figura 308 - Função exponencial - reta perpendicular.



Fonte: Própria do Autor

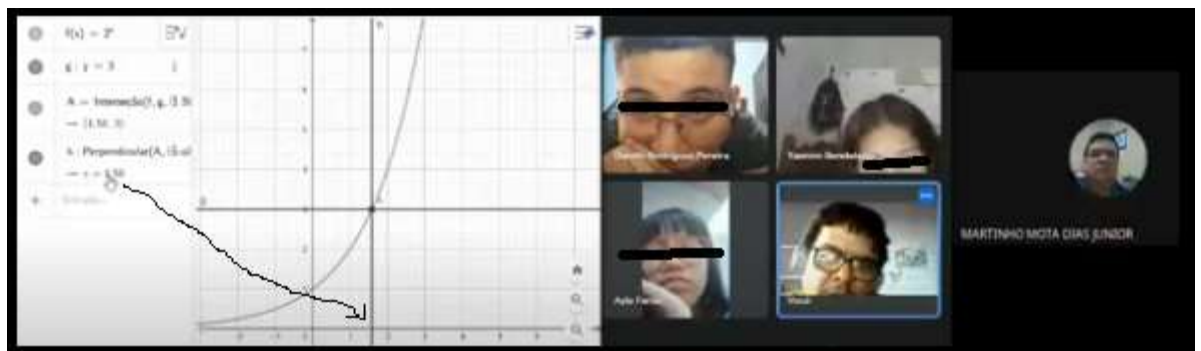
E3. Ok.

E4. Ok.

E5. Ok.

Pesquisador. Seleciona o ponto A (no caso) na parte algébrica do geogebra e desse modo você vê a posição do $x = 1,58$ no eixo x. (Figura 309)

Figura 309 - Função exponencial e $x = 1,58$.



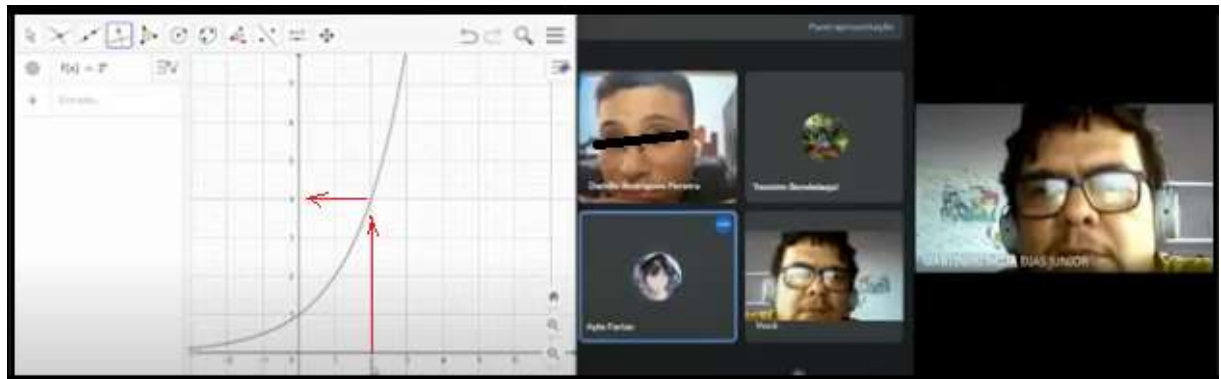
Fonte: Própria do Autor

E3. Ok.

E4. Ok.

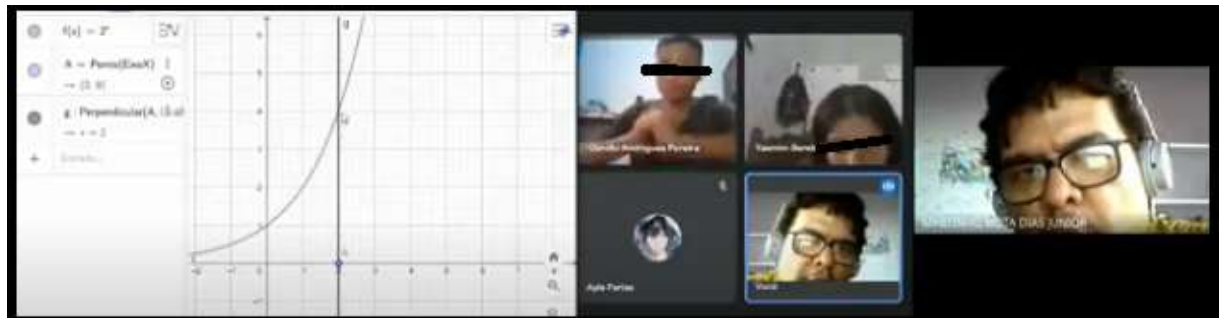
E5. Ok.

Pesquisador. Qual a imagem do $x = 2$? (Figura 310).

Figura 310 - Imagem de $x = 2$.

Pesquisador. Seleciona o ponto A no número 4 do eixo x e em seguida selecione o ícone reta perpendicular na barra de ferramenta do geogebra e clique no ponto A que está no eixo x. O que aconteceu? (Figura 312).

Figura 312 - Função exponencial e perpendicular



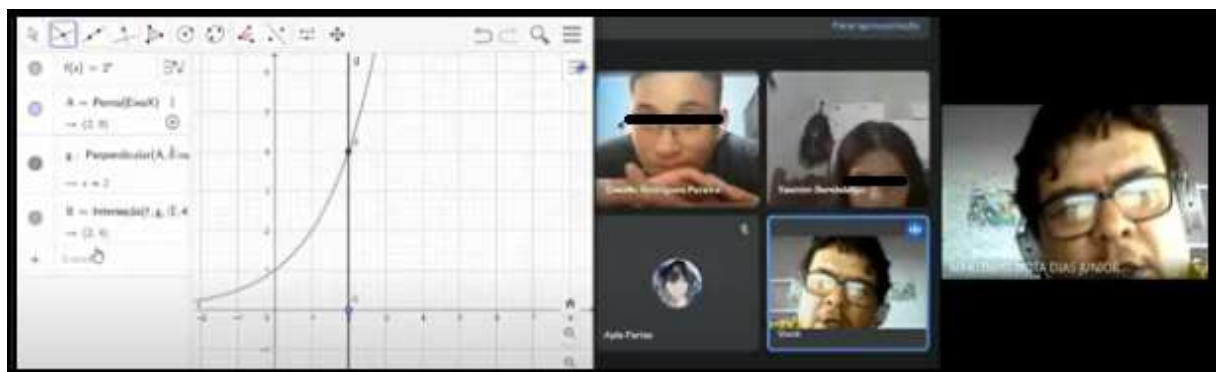
Fonte: Própria do Autor

E3. Passou uma reta em A.

E4. Passou uma reta em A e tocou a função.

Pesquisador. Para descobrir esse ponto que tocou a função $f(x) = 2^x$ basta selecionar o ícone ponto de interseção entre dois objetos e selecionar a reta perpendicular que passa em no ponto A e a função $f(x) = 2^x$. Entendeu? (Figura 313).

Figura 313 - Função exponencial e determinação do ponto.



Fonte: Própria do Autor

E3. Sim, e a resposta é 4.

E4. Isso.

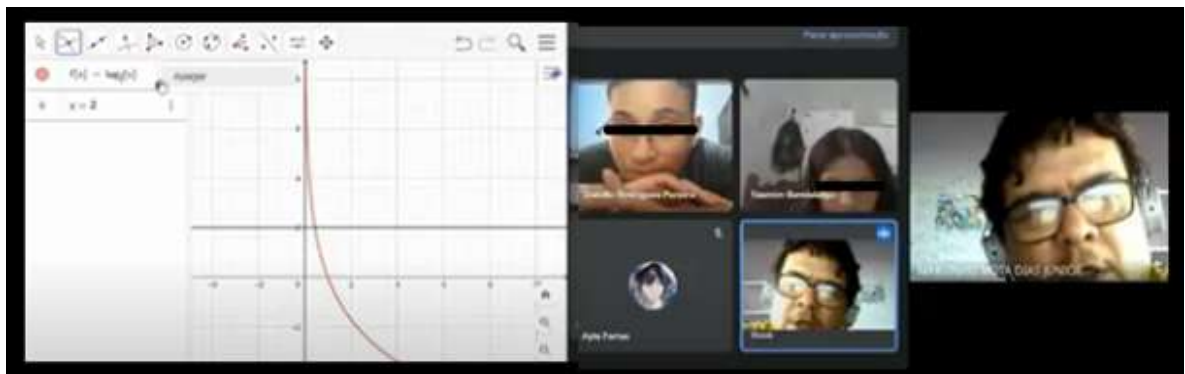
E5. 4.

Pesquisador. Verdade, dá para vê na parte algébrica.

Depois observamos o comportamento da função logarítmica para determinar a imagem de x e o valor de x quando dado um valor x . O pesquisador disse:

Pesquisador. Vou mudar de função passaremos para a função logarítmica. Digite em entrada a expressão $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. Reconhecem o gráfico da função? (Figura 314).

Figura 314 - Função logarítmica decrescente.



Fonte: Própria do Autor

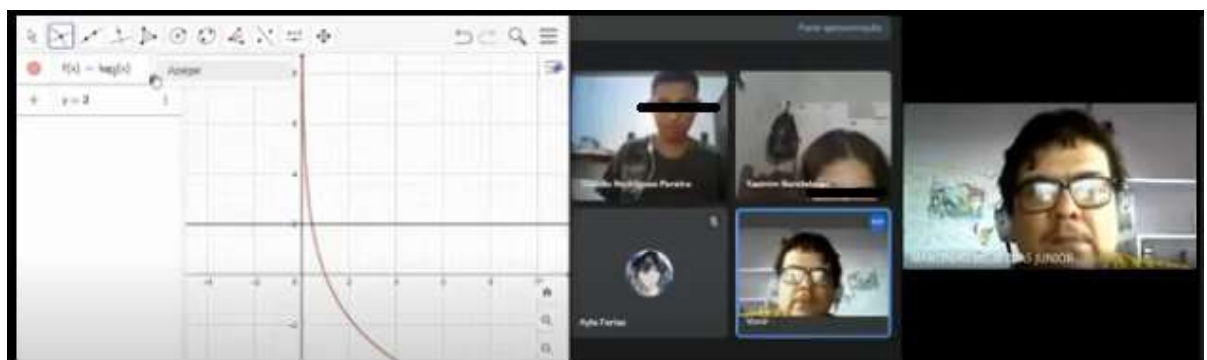
E3. Sim.

E4. Sim.

E5. Sim.

Pesquisador – Qual o valor de x cuja imagem é 2. ($y = 2$).? (Figura: 315).

Figura 315 - Função logarítmica e $y = 2$



Fonte: Própria do Autor

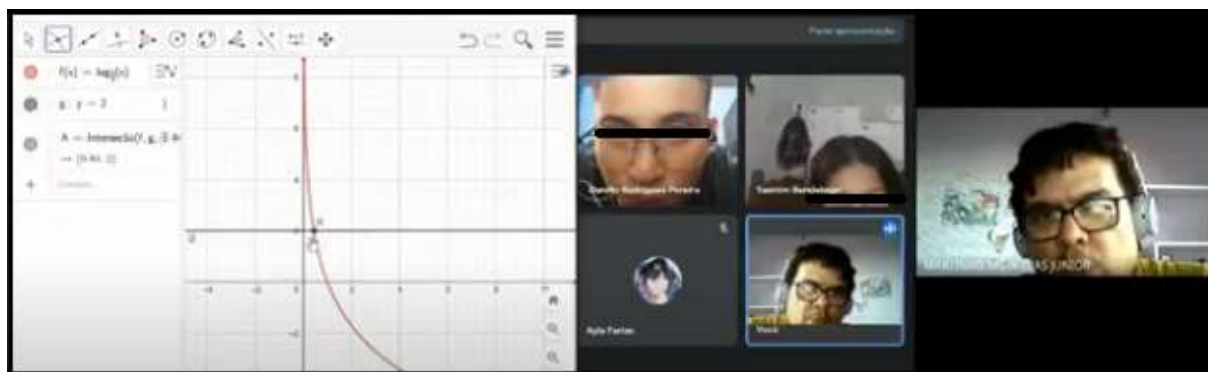
E3. Não dá pra vê.

E4. É verdade.

E5. Tá perto do zero.

Pesquisador – Exatamente, deveremos usar o ícone interseção entre dois objetos, selecionar a reta que passa por dois e a função dessa forma o geogebra determinará um ponto A. Qual é o valor de x agora? (Figura 316).

Figura 316 - Função logarítmica e valor de x.



Fonte: Própria do Autor

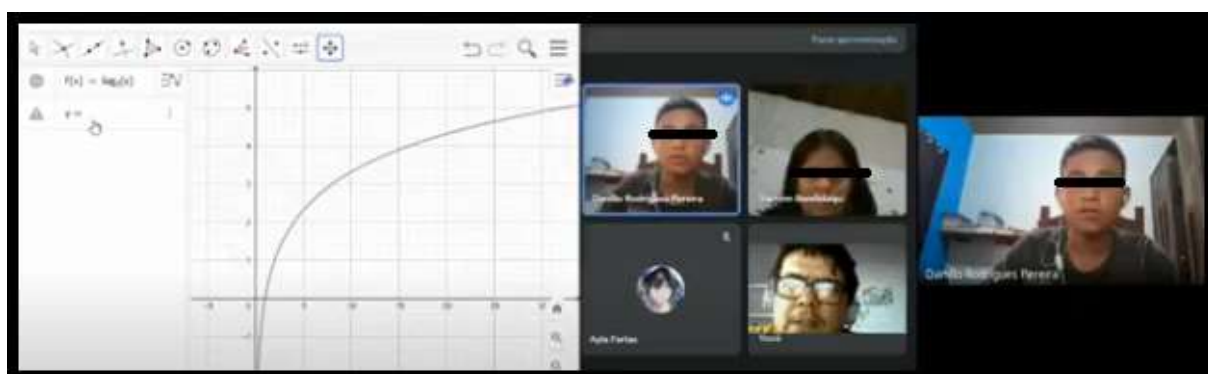
E3. 0,44.

E4. Isso.

E5. 0,44.

Pesquisador – Vamos observar uma função logarítmica crescente, por exemplo: $f(x) = \log_2 x$, para ser crescente a base tem que ser um número maior que um. Digite em entrada no geogebra. (Figura 317).

Figura 317 - Função logarítmica e base maior que 1.



Fonte: Própria do Autor

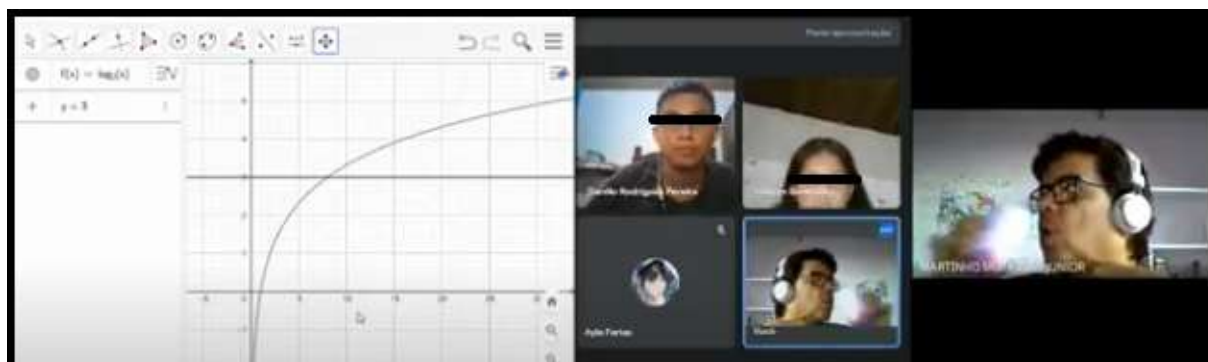
E3. Fica assim.

E4. Ok

E5. Isso.

Pesquisador – Vamos determinar o valor de x para $y = 3$? (Figura 318).

Figura 318 - Função logarítmica e $y = 3$.



Fonte: Própria do Autor

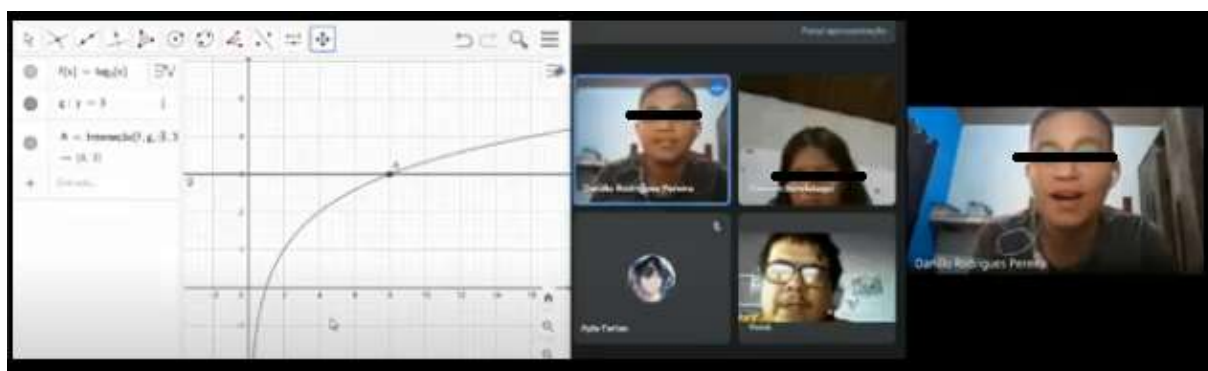
E3. Ok.

E4. Ok.

E5. Ok.

Pesquisador – Vocês observaram que ao digitar $y = 3$ o geogebra traça uma reta horizontal passando por esse ponto e que essa reta toca em um ponto na função. Devemos determinar esse ponto, clica-se no ícone interseção entre dois objetos, seleciona a reta que passa por esse ponto e em seguida seleciona a função $f(x) = \log_2 x$. O geogebra determinará o ponto de interseção. (Figura 319).

Figura 319 - Função logarítmica e ponto de interseção



Fonte: Própria do Autor

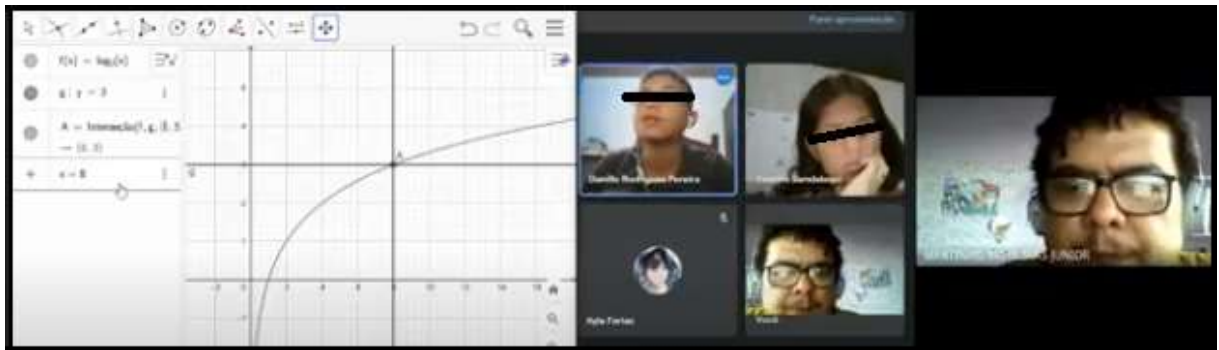
E3. 8 e 3

E4. Sim.

E5. Sim.

Pesquisador - Veja se eu determinar a imagem para $x = 8$, veja o que acontece (Figura: 320).

Figura 320 - Função logarítmica e determinação de y.



Fonte: Própria do Autor

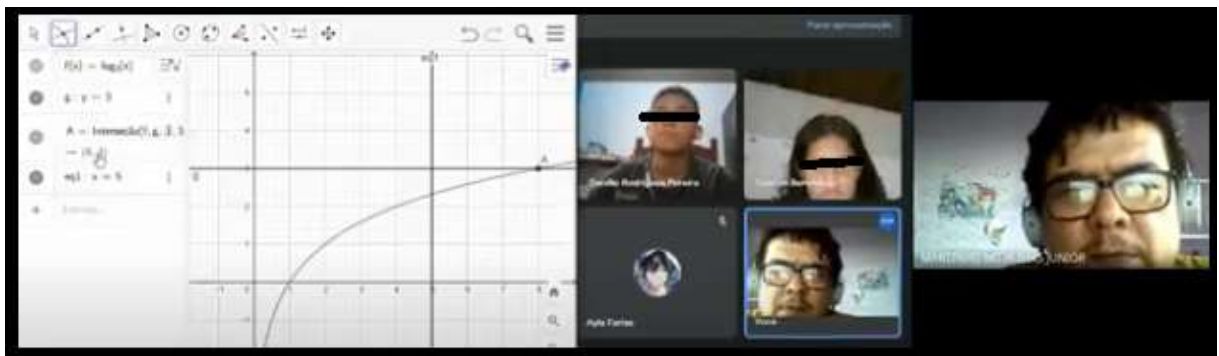
E3. Passa uma reta por 8 e toca a função.

E4. Isso.

E5. E tem imagem igual a 3.

Pesquisador – e para $x = 5$? (Figura 321).

Figura 321 - Função logarítmica e $x = 5$.



Fonte: Própria do Autor

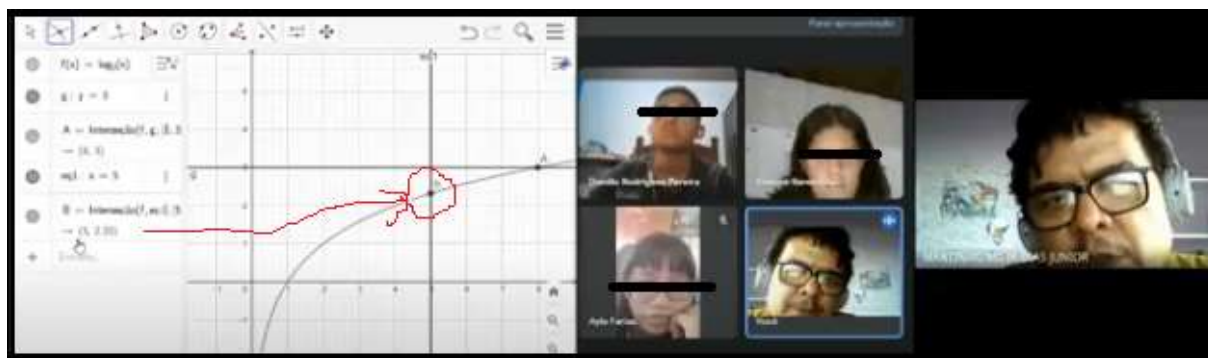
E3. Não aparece.

E4. Isso.

E5. Estar entre 2 e 3.

Pesquisador - Muito bem, não aparece e estar entre 2 e 3. Para determinarmos devemos escolher o ícone interseção entre dois objetos e selecionar a reta que passa por 5 e a função. (Figura 322).

Figura 322 - Função exponencial e ponto de interseção.



Fonte: Própria do Autor

E3. Entendi.

E4. Dá 2,32.]

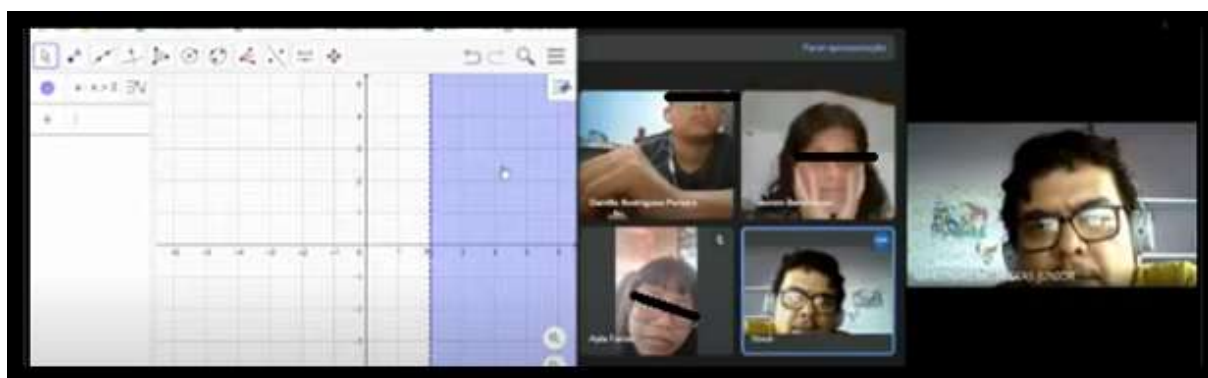
E5. Isso.

Pesquisador – Na parte algébrica aparece o par ordenado $B(5; 2,32)$.

Depois observamos umas expressões matemáticas que forão explorados nos próximos experimentos. O pesquisador pergunta:

Pesquisador – O que acontece no gráfico do geogebra se digitarmos em entrada $x > 2$? (Figura 323).

Figura 323 - Função logarítmica e $x > 2$.



Fonte: Própria do Autor

E3. Ficou pintado depois do 2.

E4. Isso.

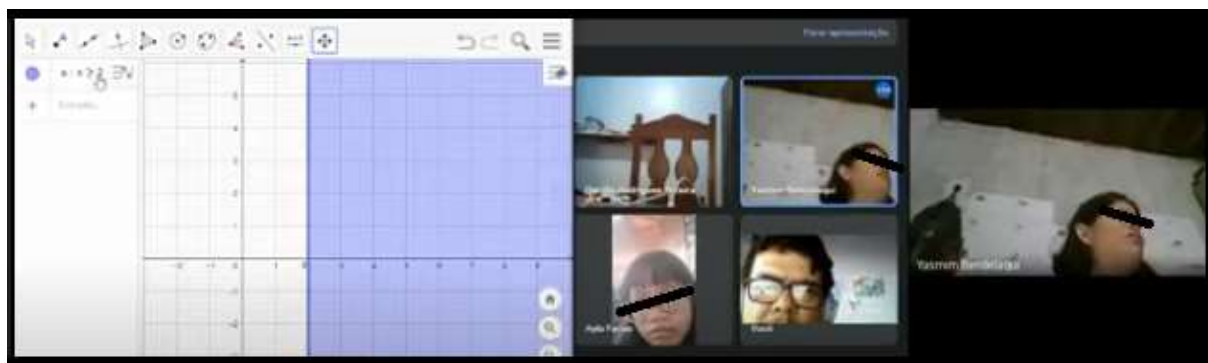
E5. Sim.

Pesquisador – O geogebra pintou de azul a tela para $x > 2$ e repare que em cima do 2 ficou uma linha pontilhada, o que significa isso? (Figura

E5. Significa que o dois não faz parte da solução?

Pesquisador – Muito bem, é isso mesmo. Por que se eu digitar $x \geq 2$. O que acontece? (Figura 324).

Figura 324 - Função exponencial e x maior ou igual 2.



Fonte: Própria do Autor

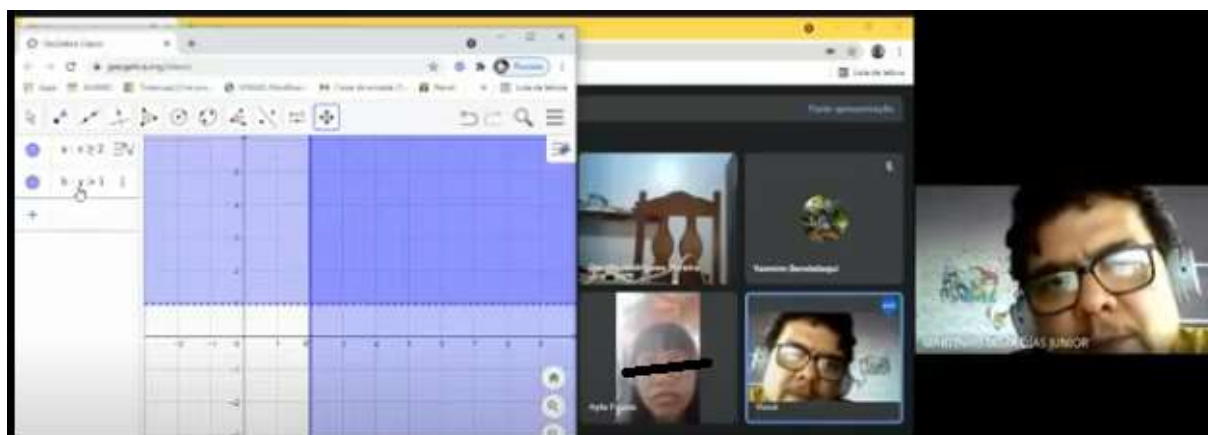
E3. Agora o número dois faz parte da solução.

E4. Ficou uma linha cheia.

E5. Isso.

Pesquisador – vou colocar $y > 1$, O que aconteceu? (Figura 325).

Figura 325 - Imagens pintadas duas vezes.

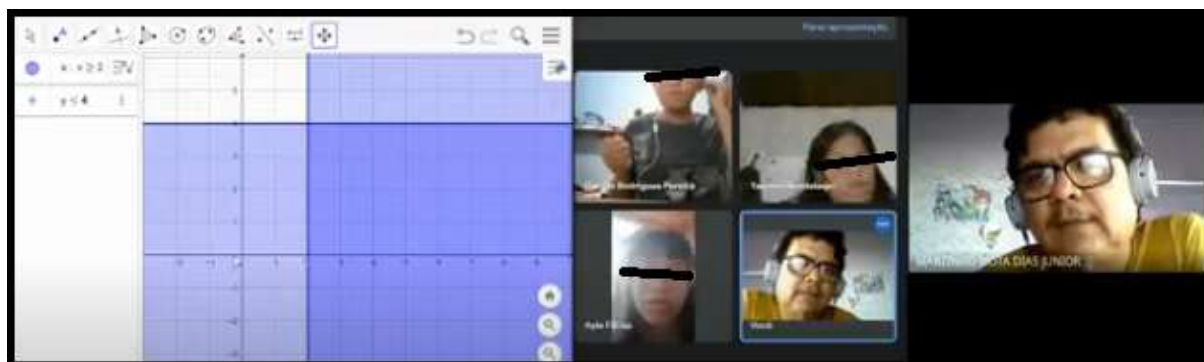


Fonte: Própria do Autor

E3. Pintou a parte do gráfico para $y > 1$.

Pesquisador – Isso, se eu digitar em entrada do geogebra $y \leq 4$. O que acontece no gráfico. (Figura 326).

Figura 326 - y menor ou igual a 4.



Fonte: Própria do Autor

E3. Certo.

E4. Pintou.

E5. O senhor vai explicar por que ficou mais escura essa região?

Pesquisador – Sim, vou explicar agora: A região pintada mais escura significa dizer que são todos os números $x \geq 2$ e $y < 4$. entendeu?

E3. Sim.

E4. Beleza.

E5. Sim.

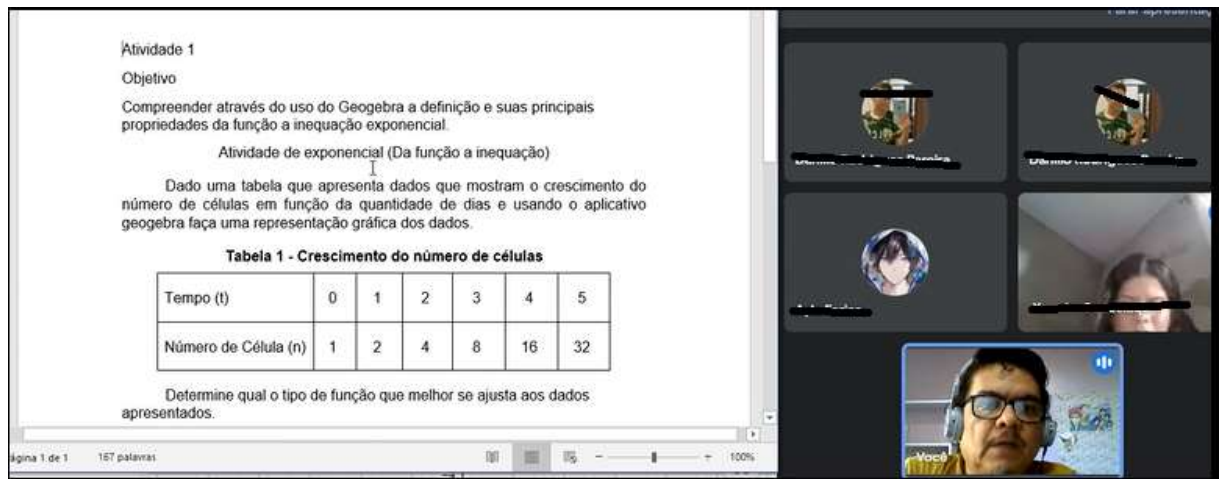
12.2.3.2. Segundo Encontro do experimento 3 (E3; E4; E5)

O segundo encontro foi realizado no dia 27 de julho de 2021, com duração de aproximadamente de 2h e 24 minutos, divididos em 6 momentos.

O primeiro momento teve uma duração de 76 minutos, e pedi para que os estudantes entrassem no geogebra, fizemos os compartilhamentos das telas dos estudantes, fiz a leitura da primeira atividade da dissertação e pedi para os estudantes inserir os dados da tabela da primeira atividade no excel do geogebra. Assim o pesquisador disse:

Pesquisador – Fiz a leitura da 1ª atividade. Entenderam a atividade a ser feita? (Figura 327).

Figura 327 - Primeira Atividade.



Atividade 1

Objetivo

Compreender através do uso do Geogebra a definição e suas principais propriedades da função a inequação exponencial.

Atividade de exponencial (Da função a inequação)

Dado uma tabela que apresenta dados que mostram o crescimento do número de células em função da quantidade de dias e usando o aplicativo geogebra faça uma representação gráfica dos dados.

Tabela 1 - Crescimento do número de células

Tempo (t)	0	1	2	3	4	5
Número de Célula (n)	1	2	4	8	16	32

Determine qual o tipo de função que melhor se ajusta aos dados apresentados.

Fonte: Própria do Autor

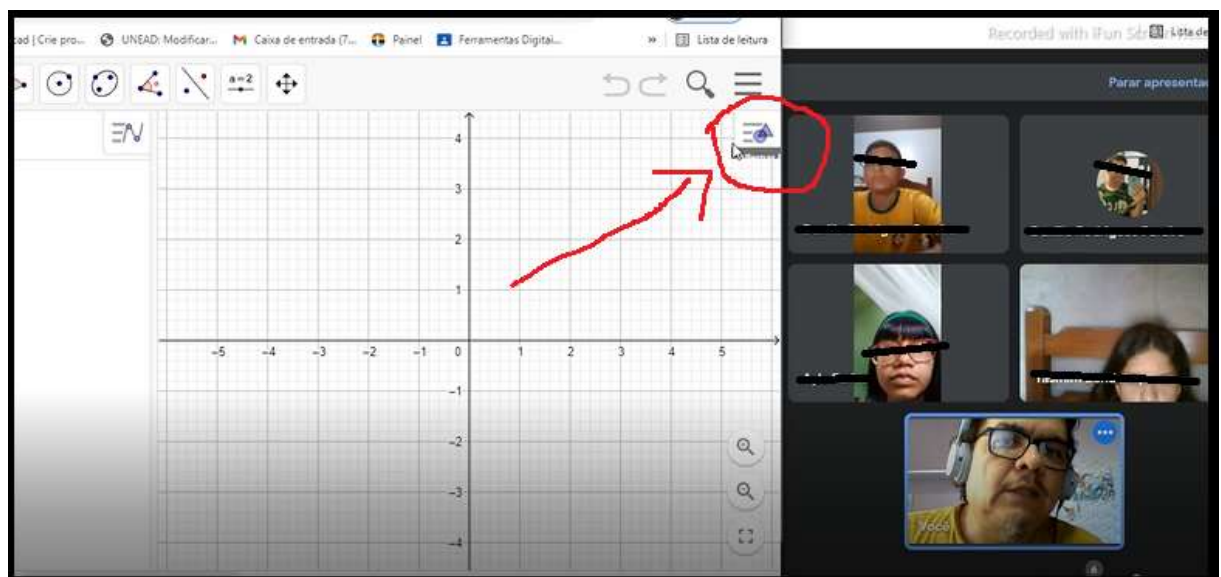
E3. Sim.

E4. Sim.

E5. Sim.

Pesquisador – Devemos representar os dados da tabela graficamente e para isso vamos utilizar o geogebra, abram o geogebra e clique no lado direito da tela, na parte gráfica do geogebra existe um ícone que tem uma imagem de um triângulo e um círculo, clique nele. (Figura 328).

Figura 328 - Inserção de dados



Fonte: Própria do Autor

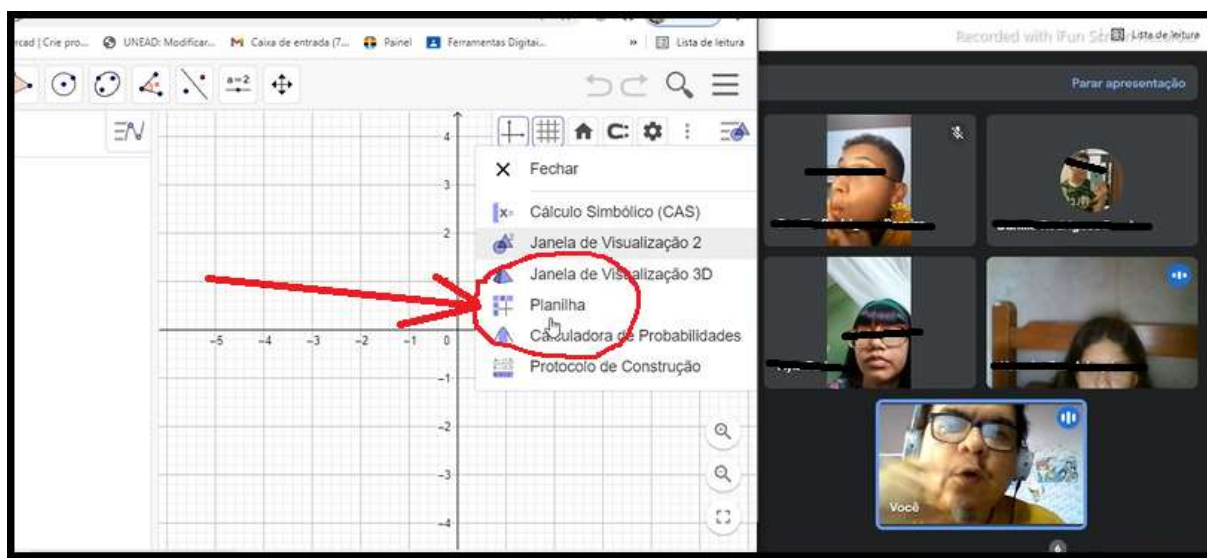
E3. Sim.

E4. Sim.

E5. Sim.

Pesquisador – Quando clicar nesse ícone com a figura de triângulo e círculo aparecerá uma aba com algumas opções. Vocês escolham o ícone planilha (Figura 329).

Figura 329 - Planilha.



Fonte: Própria do Autor

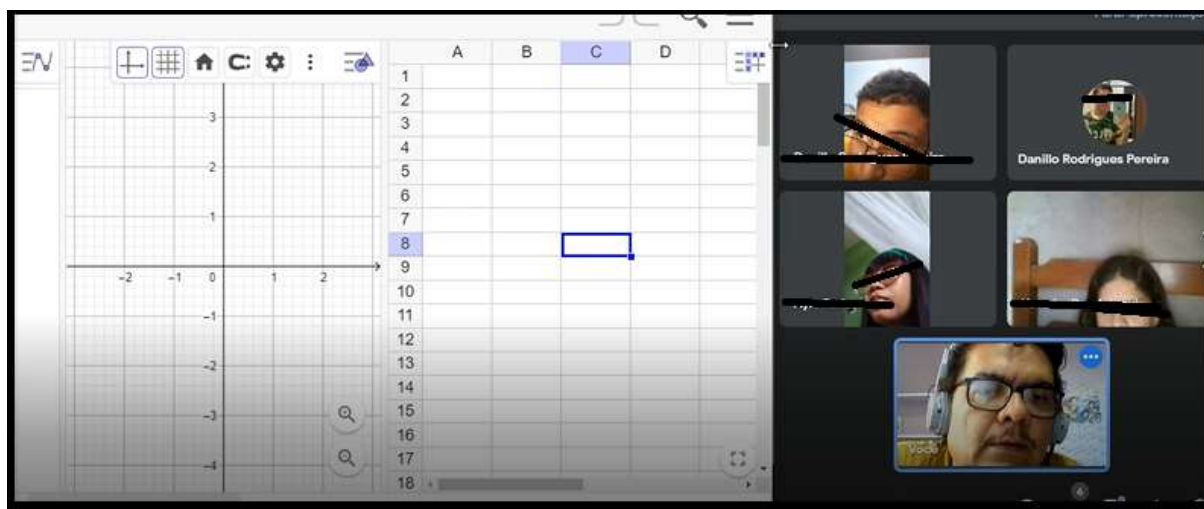
E3. Ok.

E4. Ok.

E5. Ok.

Pesquisador – O que foi que aconteceu? Vocês conhecem o Excel? (Figura 330).

Figura 330 - inserir dados na planilha.



Fonte: Própria do Autor

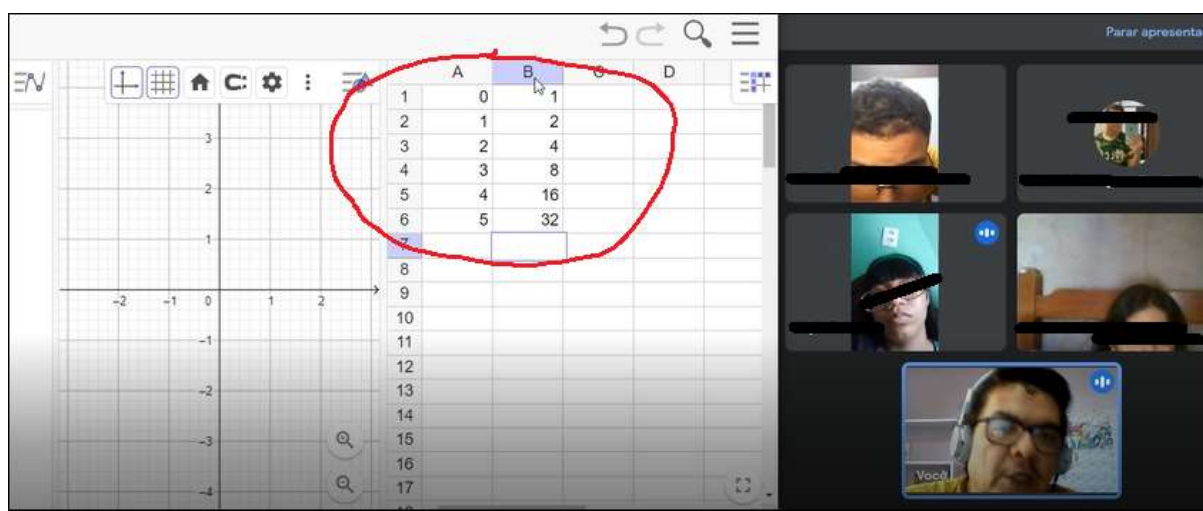
E3. Apareceu uns números no lado.

E4. Não respondeu.

E5. Acho que eu sei.

Pesquisador – No Excel temos colunas (letras) e linhas (números), juntas formam uma célula, nesta célula podemos digitar os dados de uma tabela, por exemplo. Vamos digitar na coluna A os números que representam o eixo x, que no nosso caso corresponde ao tempo e na coluna B vamos digitar a quantidade de células que corresponde ao eixo y. Entenderam? Faça no computador de vocês? (Figura 331).

Figura 331 - Excel



Fonte: Própria do Autor

E3. Sim.

E4. Sim.

E5. Sim.

Pesquisador – pedi que os estudantes compartilhassem o que tinham feito, o E3 compartilhou a sua tela (Figura 332).

Figura 332 - Tabela no Excel.

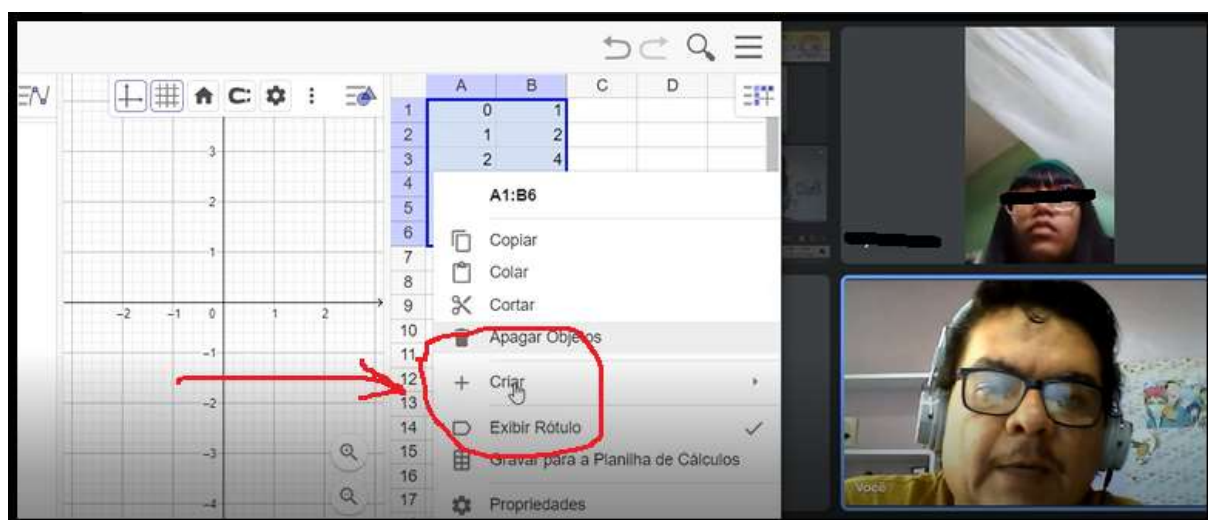


Fonte: Própria do Autor

E3. É assim.

Pesquisador – Parabéns, é isso mesmo. Agora selecionamos a tabela que fizemos e damos dois cliques em cima da seleção que fizemos o que aparece? (Figura 333).

Figura 333 - Criar



Fonte: Própria do Autor

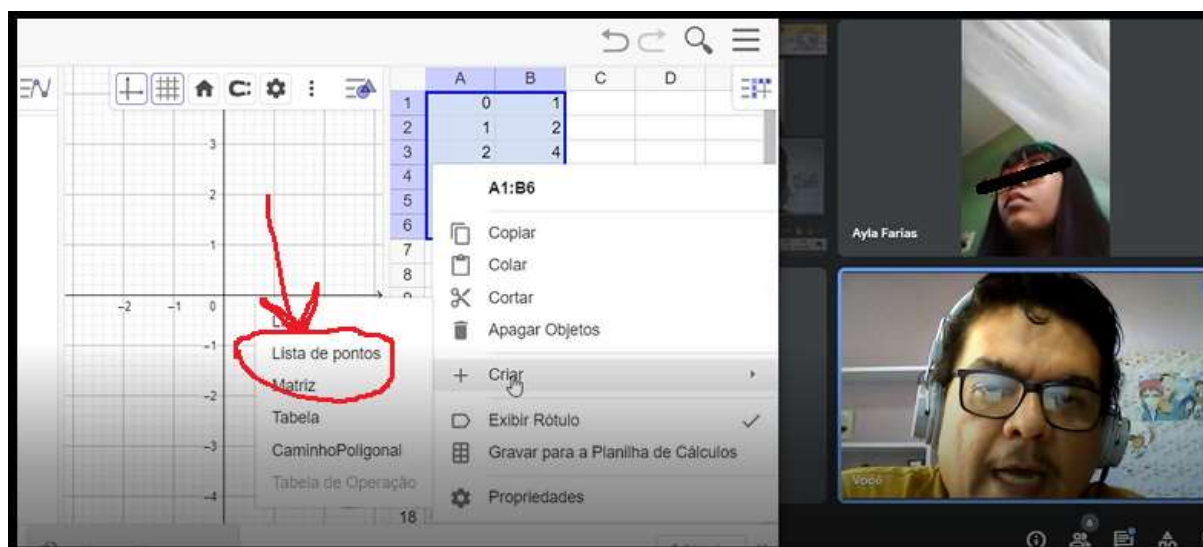
E3. Uma aba com várias opções

E4. Isso.

E5. Sim.

Pesquisador - Escolha criar. O que aparece? (Figura 334).

Figura 334 - Lista de pontos



Fonte: Própria do Autor

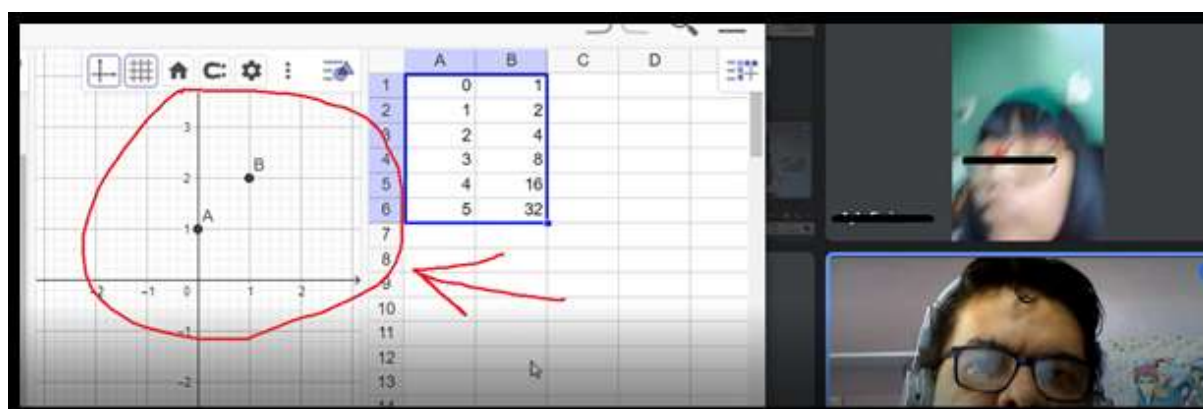
E3. Outra aba.

E4. Sim.

E5. Sim.

Pesquisador – clique em lista de pontos. O que acontece? (Figura 335).

Figura 335 - Pontos na parte gráfica do geogebra



Fonte: Própria do Autor

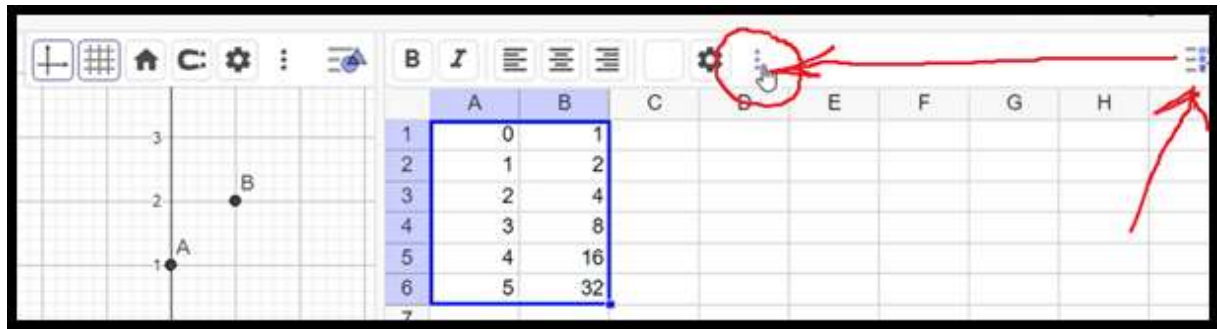
E3. Apareceu vários pontos

E4. Isso.

E5. Sim.

Pesquisador – Vamos agora tirar o excel, a tabela, que não nos interessa mais, para isso vá no ícone do triângulo e círculo, clique nele vai abrir uma nova aba. (Figura 336).

Figura 336 - Apagar tabela.



Fonte: Própria do Autor

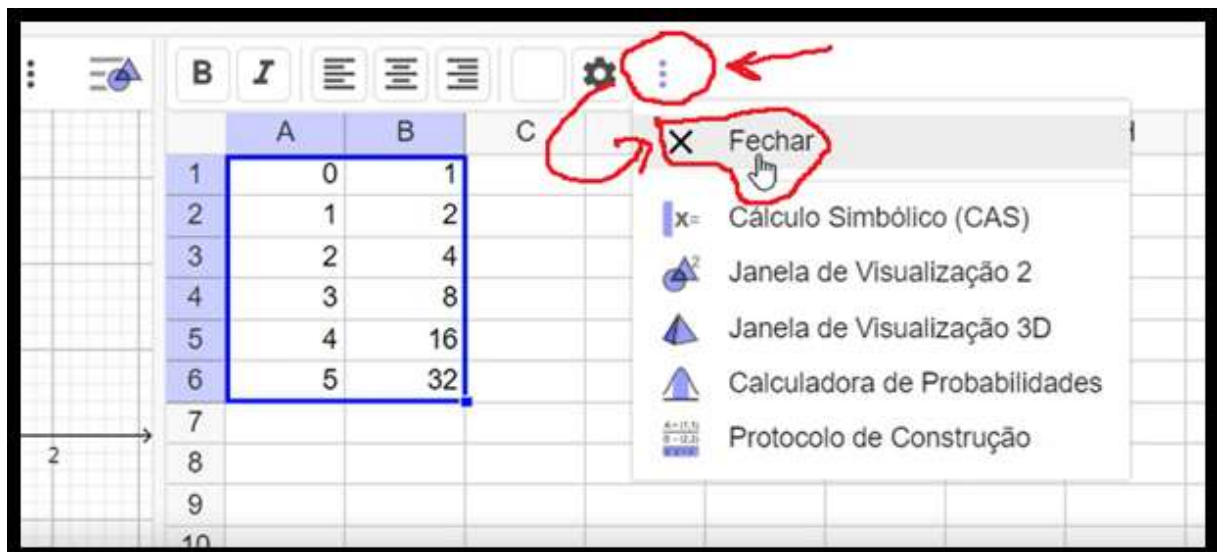
E3. Ok.

E4. Ok.

E5. Ok.

Pesquisador – Nestes três pontinhos clique nele vejam o que aparece?
(Figura 337).

Figura 337 - Três pontinhos.



Fonte: Própria do Autor

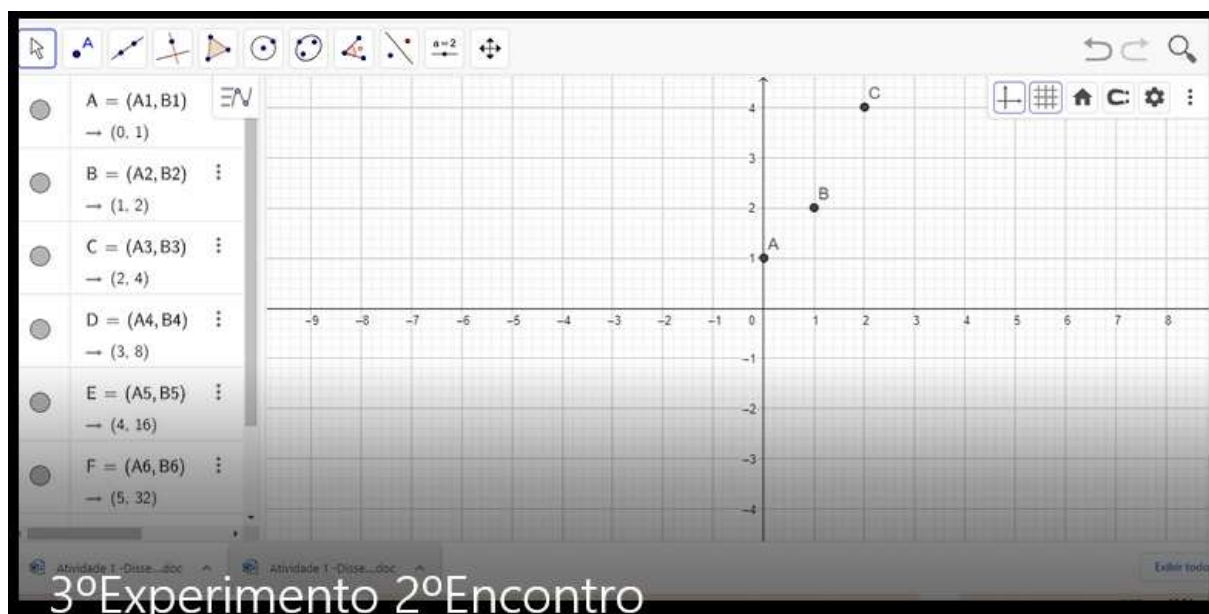
E3. Aparece uma outra aba.

E4. Sim.

E5. Sim.

Pesquisador – Vocês escolham fechar. Assim desaparece a planilha do Excel do geogebra. (Figura 338).

Figura 338 - Fechar.



Fonte: Própria do Autor

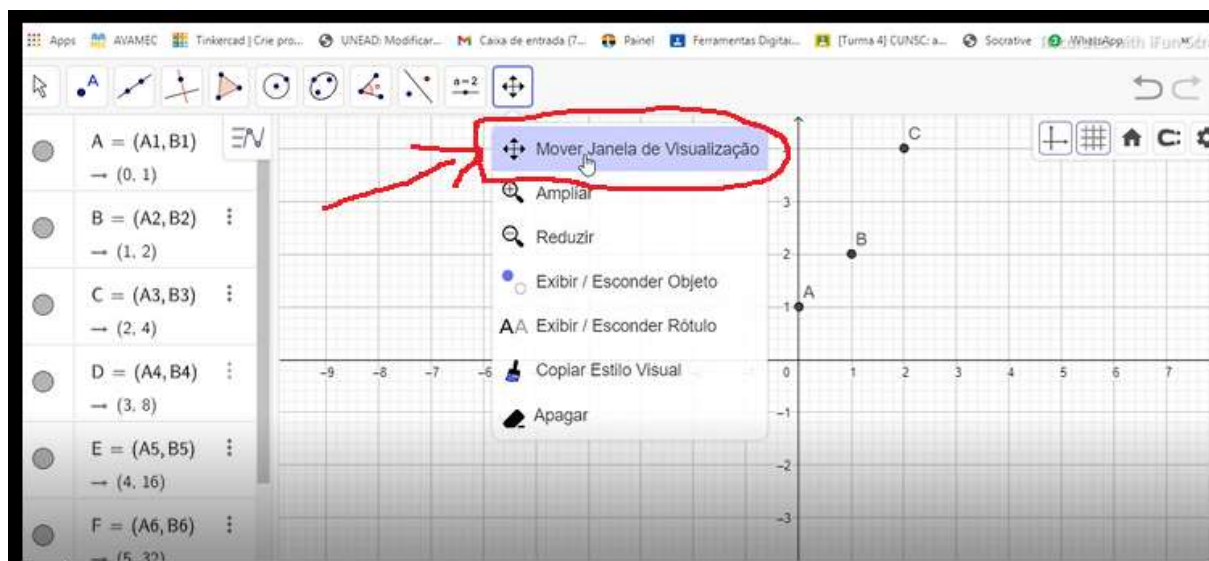
E3. Certo.

E4. Sim.

E5. Sim.

Pesquisador – Observem que aparecem os pontos (A, B, C, D, E, F) na parte algébrica do geogebra e na parte gráfica só apareceu três pontos, devemos fazer os ajustes, para isso use o ícone mover na barra de ferramentas. (Figura 339).

Figura 339 - Mover.



Fonte: Própria do Autor

E3. Ok.

E4. Ok.

E5. Ok.

Pesquisador - Selecciona mover janela, clica em qualquer parte gráfica do geogebra, segura e arrasta para onde você quiser e depois ponha o curso em cima dos eixos e mova para cima ou para baixo fazendo os ajustes que você quiser. (Figura 340).

Figura 340 - Clicar e arrastar.



Fonte: Própria do Autor

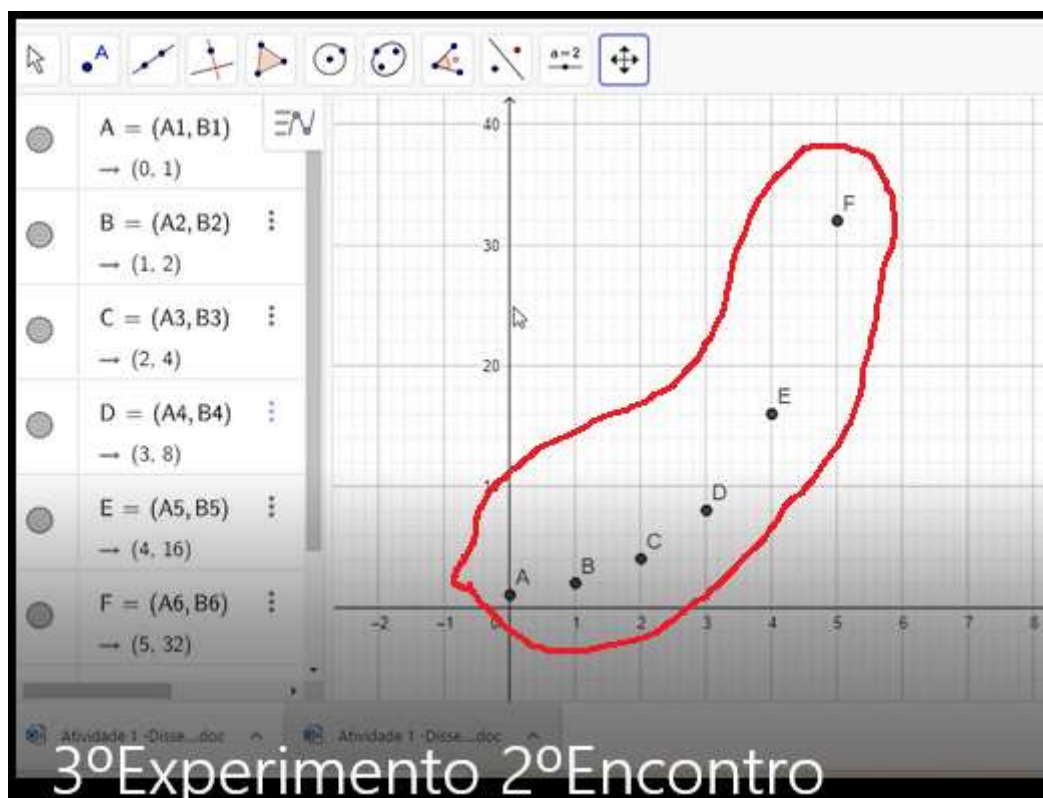
E3. Entendi.

E4. Ok.

E5. Ok.

Pesquisador - Quando vocês fizerem os ajustes vai aparecer todos os pontos e pergunta a vocês: Qual a função matemática que melhor representam esses pontos? (Figura 341).

Figura 341 - Pontos na parte gráfica do geogebra.



Fonte: Própria do Autor

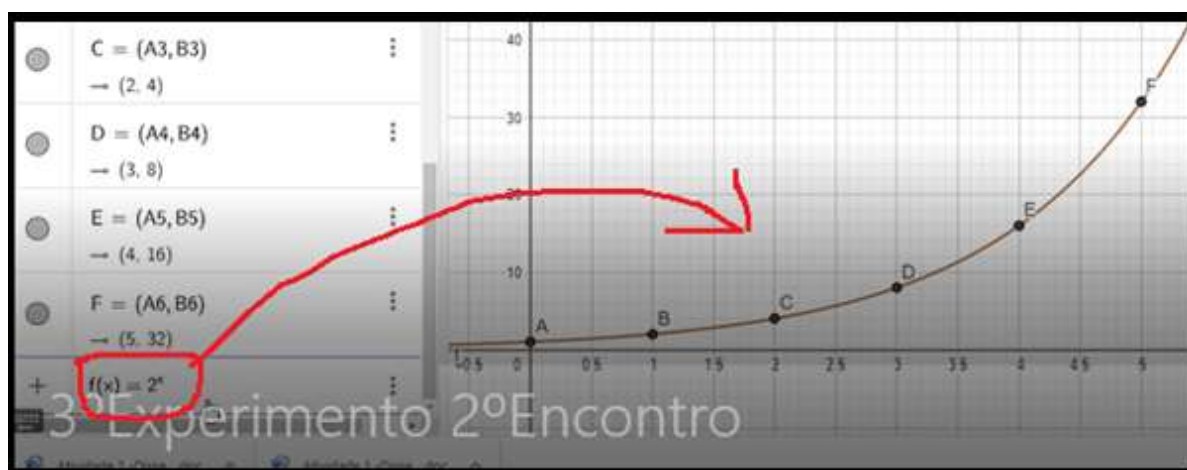
E3. É a função exponencial.

E4. Isso.

E5. Sim.

Pesquisador - Perfeito. Vamos digitar em entrada a expressão $f = 2^x$, o que aconteceu? (Figura 342).

Figura 342 - Digitar expressão.



Fonte: Própria do Autor

E3. Cobriu todos os pontos.

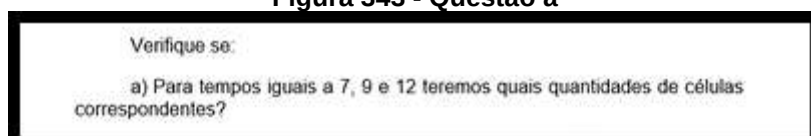
E4. Sim.

E5. Certo.

Pesquisador – Muito bem.

No segundo momento teve uma duração de aproximadamente 27 minutos, fiz a leitura da questão “a” para os estudantes. (Figura 343).

Figura 343 - Questão a



Fonte: Própria do Autor

O pesquisador fez a seguinte pergunta:

Pesquisador – Quando na questão se refere a tempo nós devemos nos referir a quem? A x ou a y? (figura343).

E3. A x.

E4. x.

E5. x.

Pesquisador – Isso mesmo. Digite em entrada a expressão $x = 7$, o que acontece? (Figura 344).

Figura 344 - $x = 7$.



Fonte: Própria do Autor

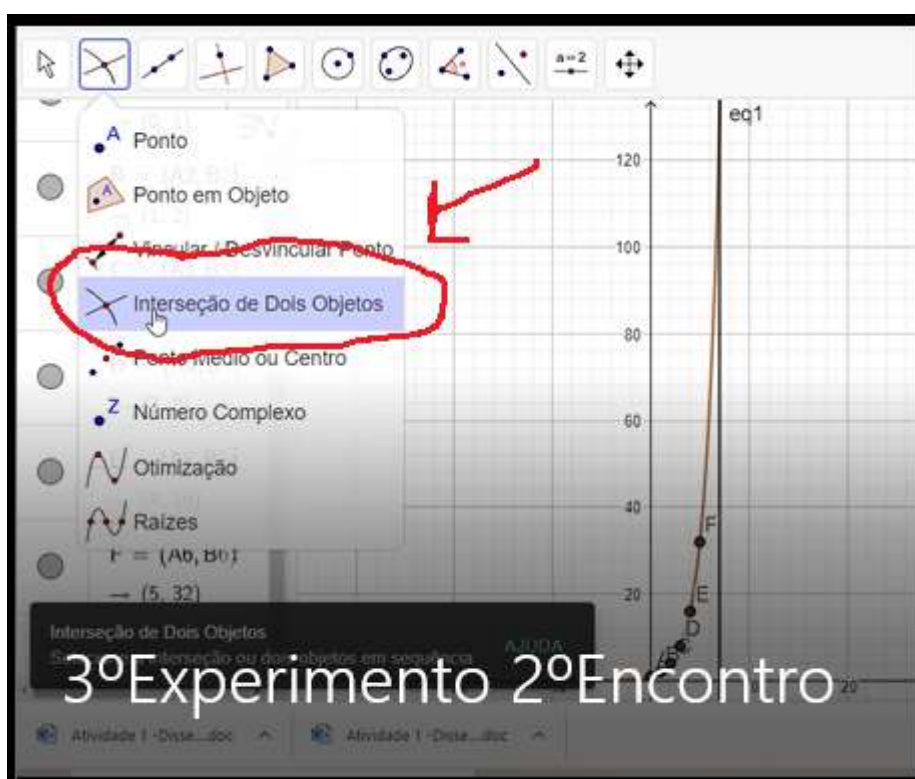
E3. Aparece uma reta passando pelo ponto 7.

E34. isso.

E5. Certo.

Pesquisador – Devemos determinar o ponto de encontro entre a reta e a função. Selecione na barra de ferramenta o ícone ponto de interseção entre dois objetos. (Figura 345).

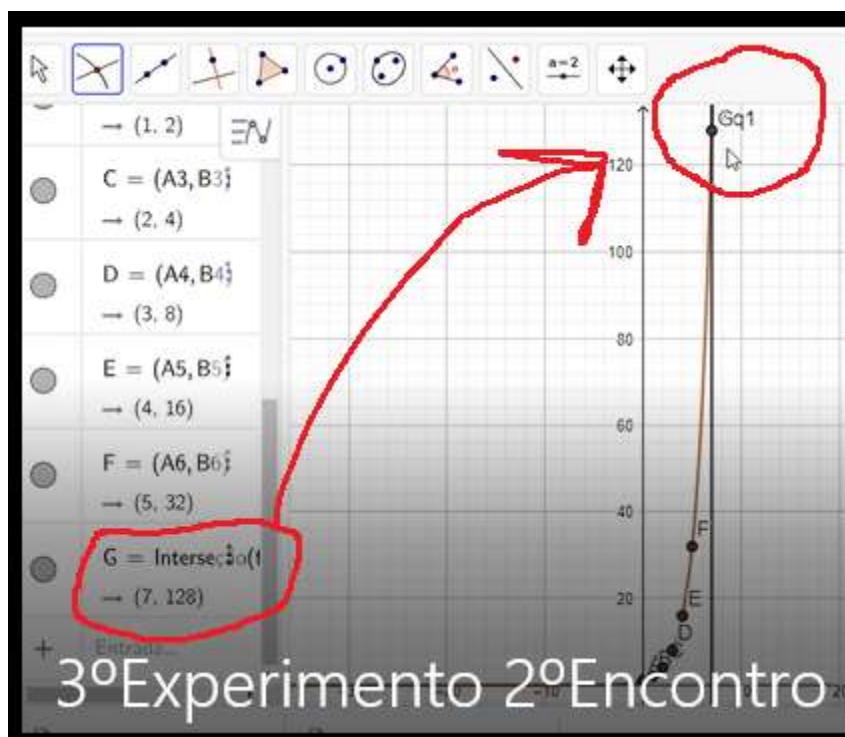
Figura 345 - Interseção entre dois objetos.



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Clique no ícone “interseção entre dois objetos” e depois selecione a reta que passa em $x = 7$ e na função $f(x) = 2^x$. O geogebra vai determinar os valores desse ponto (Figura 346).

Figura 346 - Interseção.



Fonte: Própria do Autor

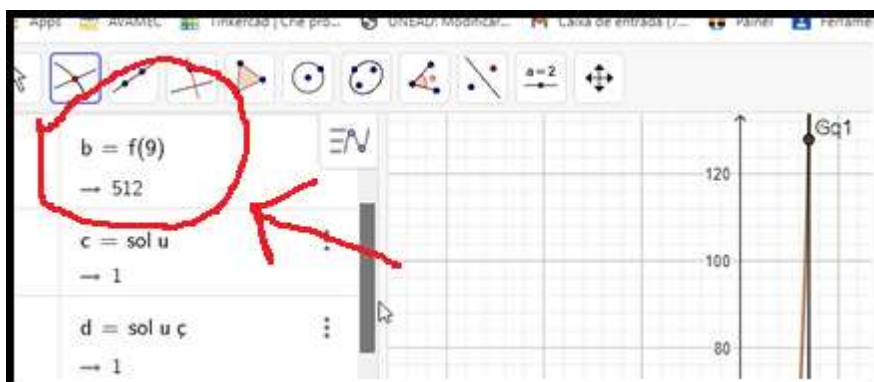
E3. Sim.

E4. O resultado de y aparece na parte algébrica.

E5. Sim.

Pesquisador – Isso mesmo, o geogebra determina os valores de x e y na parte algébrica. Vamos determinar para $x = 9$. (Algebricamente) (Figura 347).

Figura 347 - Imagem do 9.



Fonte: Própria do Autor

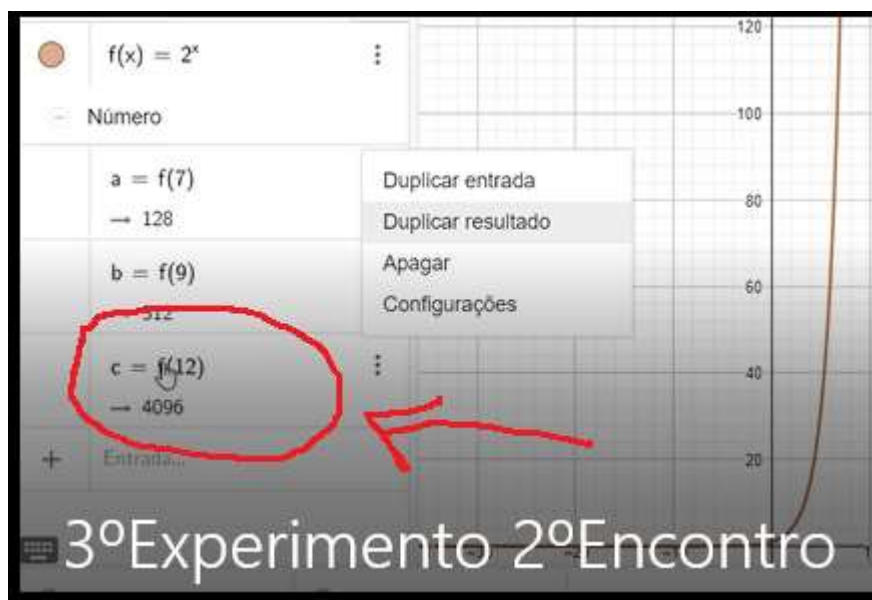
E3. Isso, vai dá 512.

E4. Sim.

E5. 512.

Pesquisador – Para $x = 12$, o valor de y é (Figura 348).

Figura 348 - valor de y



Fonte: Própria do Autor

E3. Sim

E4. $y = 4096$

E5. Isso.

O terceiro momento teve uma duração de aproximadamente 15 minutos e fez a leitura da questão “b” da primeira atividade. (Figura 349).

Figura 349 - Item b da 1ª atividade.

Tempo (t)	0	1	2	3	4	5
Número de Célula (n)	1	2	4	8	16	32

Determine qual o tipo de função que melhor se ajusta aos dados apresentados.

Verifique se:

- a) Para tempos iguais a 7, 9 e 12 teremos quais quantidades de células correspondentes?
- b) Para números de células iguais a 64, 128 e 1024 teremos quais tempos correspondentes?
- c) O que representa dizer graficamente e algebricamente $2^x = 1$?
- d) O que representa dizer graficamente e algebricamente $2^x < 8$?
- e) Para a base maior que zero e menor que um, por exemplo $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 0,5$, o que representa graficamente ou algebricamente.

3º Experimento 2º Encontro

Fonte: Própria do Autor

Depois o pesquisador perguntou:

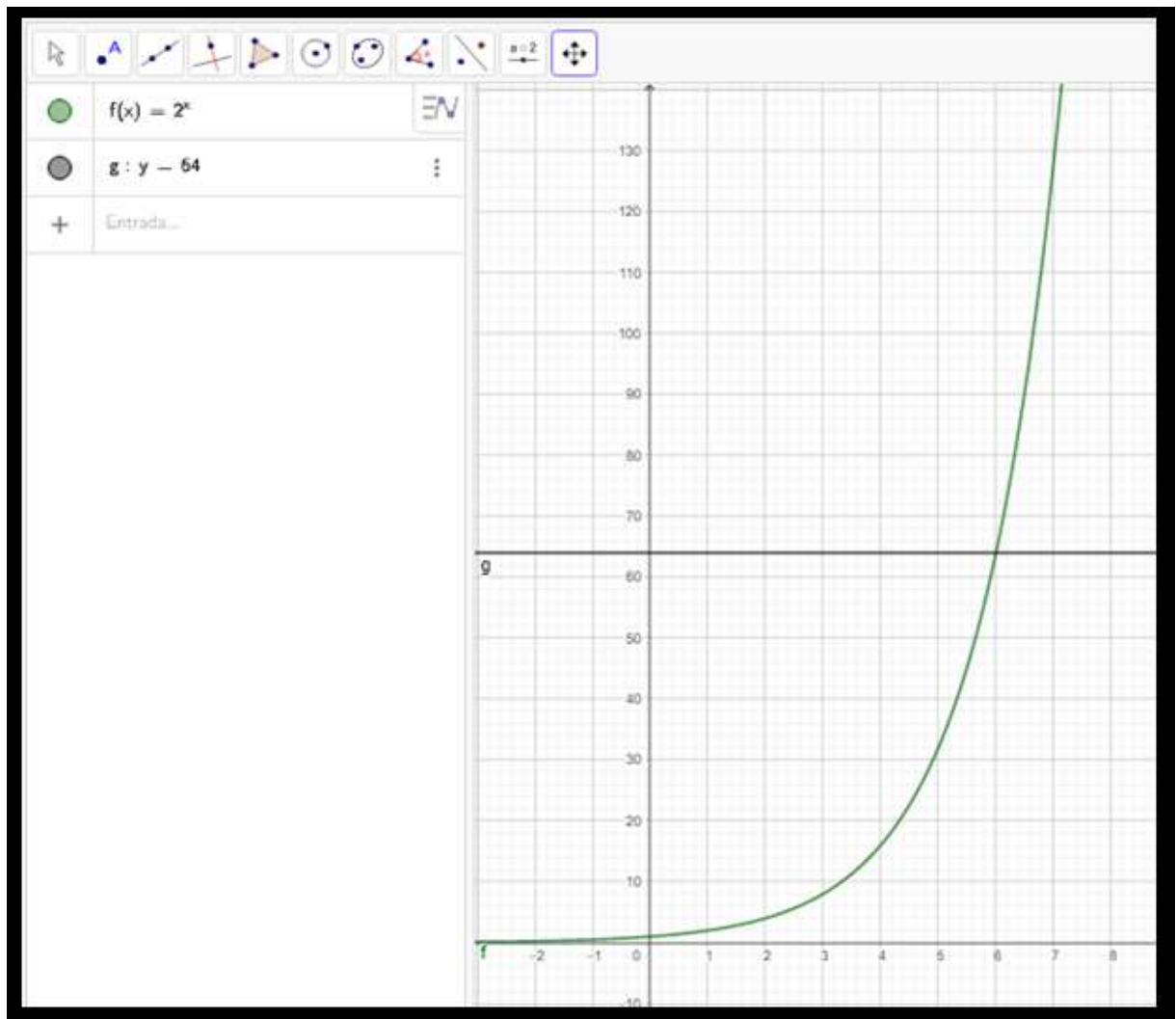
Pesquisador – O número de células 64, 128 e 1024 corresponde a x ou y ?
(Figura

E3. A y .

E4. y .

E5. y .

Pesquisador – Muito bem, devemos digitar em entrada a expressão $y = 64$, dessa forma iremos determinar o valor de x . O que aparece no gráfico do geogebra? (Figura 350).

Figura 350 - $y = 64$.

Fonte: Própria do Autor

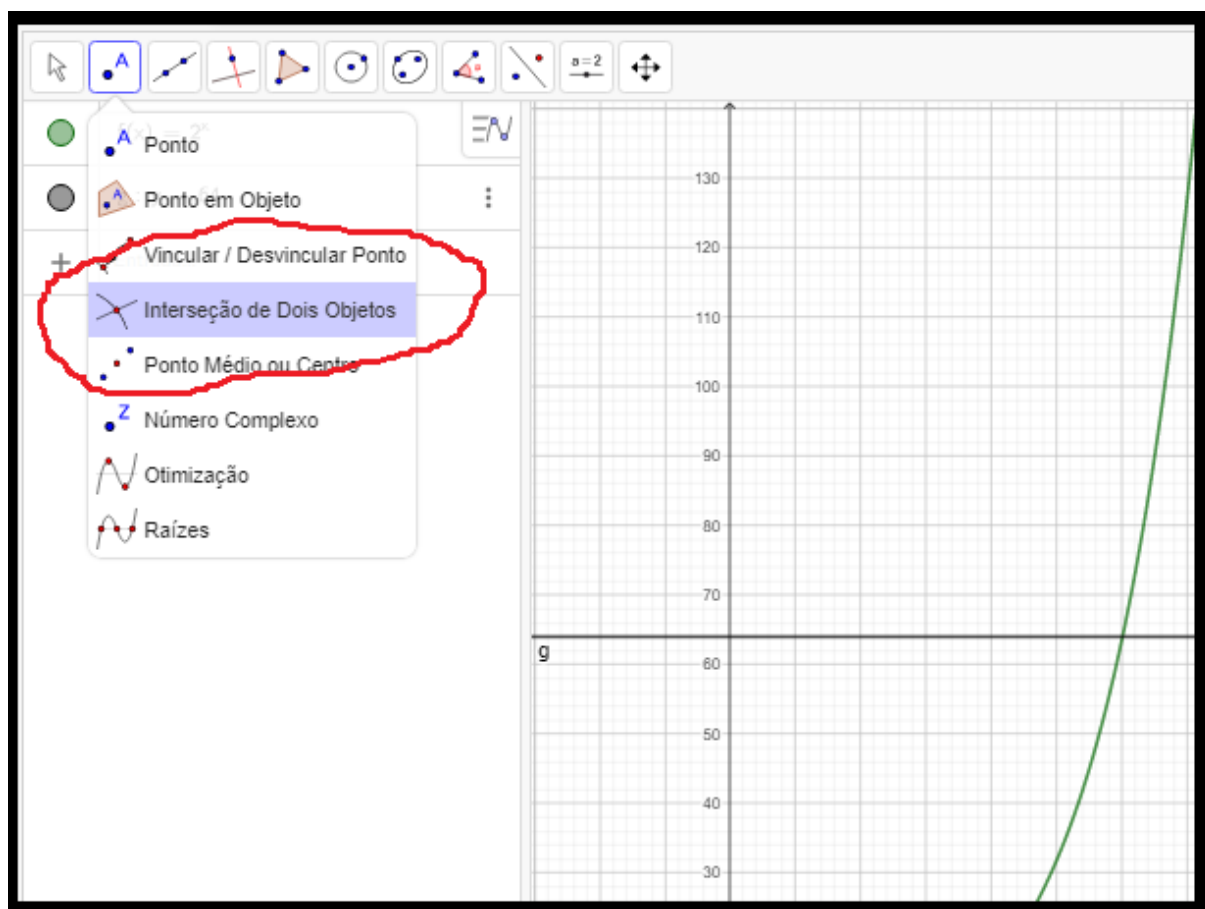
E3. Uma reta horizontal, passando por 64.

E4. Isso.

E5. Verdade.

Pesquisador – A reta horizontal passa pelo ponto 64 e toca a função $f(x) = 2^x$ em um ponto. Esse ponto determinasse usando o ícone “ponto de encontro entre dois objetos” (Figura 351).

Figura 351 - Interseção de dois objetos - 1ª atividade.



Fonte: Própria do Autor

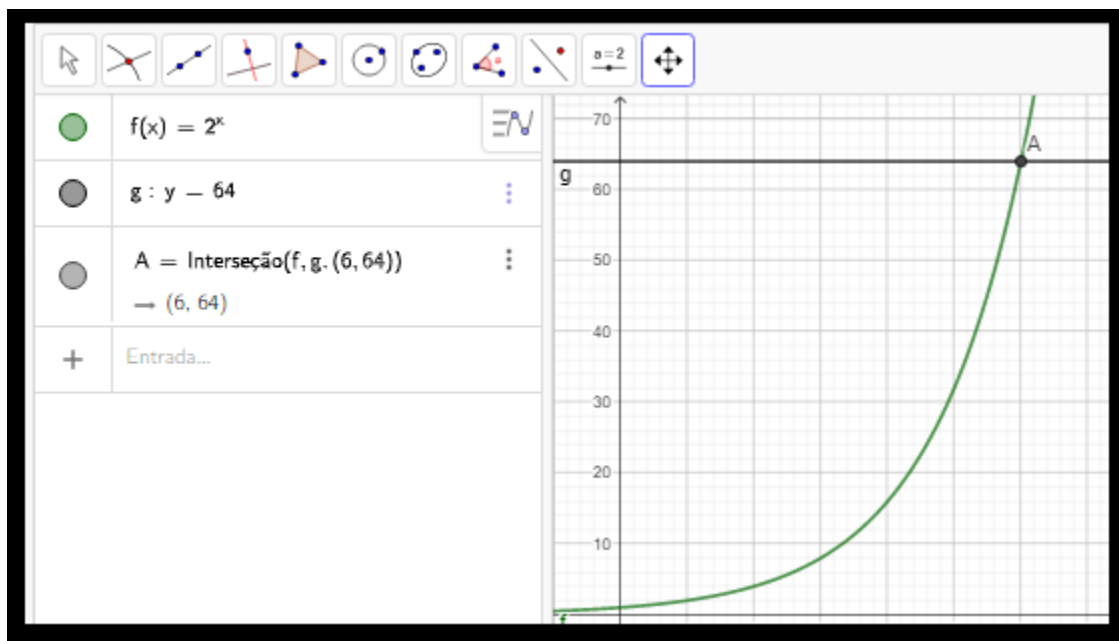
E3. É só tocar a reta e a função.

E4. Isso.

E5. E achamos o valor de x.

Pesquisador – Muito bem, selecionado o ícone ponto de interseção entre dois objetos, seleciona a reta $y = 64$ e a função $f(x) = 2^x$. O geogebra determinará o ponto de interseção e o resultado aparecerá na parte algébrica. (Figura 352).

Figura 352 - Ponto A - 1ª Atividade.



Fonte: Própria do Autor

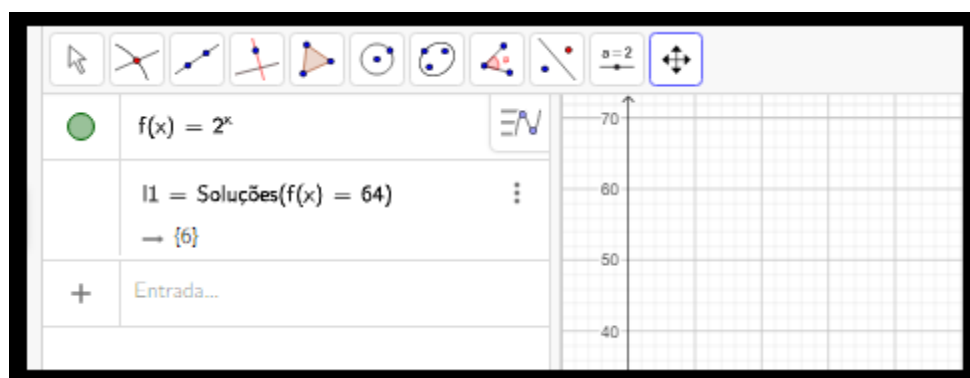
E3. Ok.

E4. $x = 6$

E5. Sim.

Pesquisador – Podemos determinar de forma algébrica basta digitar em entrada “*solução* ($f(x) = 64$)” e o geogebra mostra o resultado da função. (Figura 353).

Figura 353 - Soluções.



Fonte: Própria do Autor

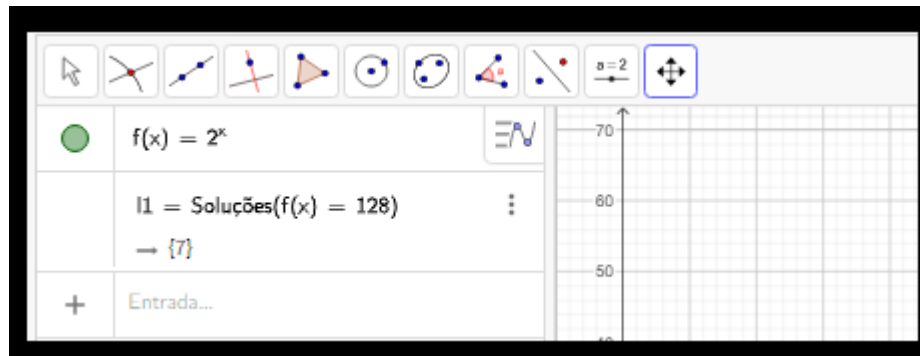
E3. É mais fácil.

E4. E rápido.

E5. Certo.

Pesquisador – Vamos fazer para $f(x) = 128$. (Figura 354).

Figura 354 - Soluções $f(x) = 128$



Fonte: Própria do Autor

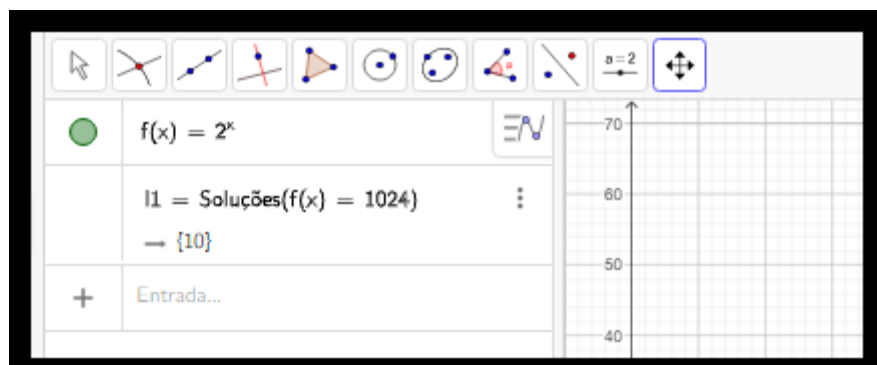
E3. $x = 7$.

E4. 7.

E5. 7.

Pesquisador – Para $f(x) = 1024$. Qual o valor de x ? (Figura 355).

Figura 355 - $y = 10$.



Fonte: Própria do Autor

E3. $x = 10$.

E4. Isso.

E5. Ok.

O quarto momento teve uma duração de 10 minutos aproximadamente, fiz a leitura para os estudantes (Figura 356).

Figura 356 - Quarto momento.

Tabela 1 - Crescimento do número de células

Tempo (t)	0	1	2	3	4	5
Número de Célula (n)	1	2	4	8	16	32

Determine qual o tipo de função que melhor se ajusta aos dados apresentados.

Verifique se:

a) Para tempos iguais a 7, 9 e 12 teremos quais quantidades de células correspondentes?

b) Para números de células iguais a 64, 128 e 1024 teremos quais tempos correspondentes?

c) O que representa dizer graficamente e algebricamente $2^x > 4$.

d) O que representa dizer graficamente e algebricamente $2^x < 8$.

e) Para a base maior que zero e menor que um, por exemplo $(\frac{1}{2})^x \geq 0.5$, o que representa graficamente ou algebricamente.

Fonte: Própria do Autor

Depois o pesquisador representou a expressão $f(x) = 2^x$ no geogebra (Figura 357).

Figura 357 - Representação de uma função.

Fonte: Própria do Autor

Depois fez a seguinte pergunta:

Pesquisador – Se $2^x > 4$, então posso digitar em entrada no geogebra a expressão $y > 4$?

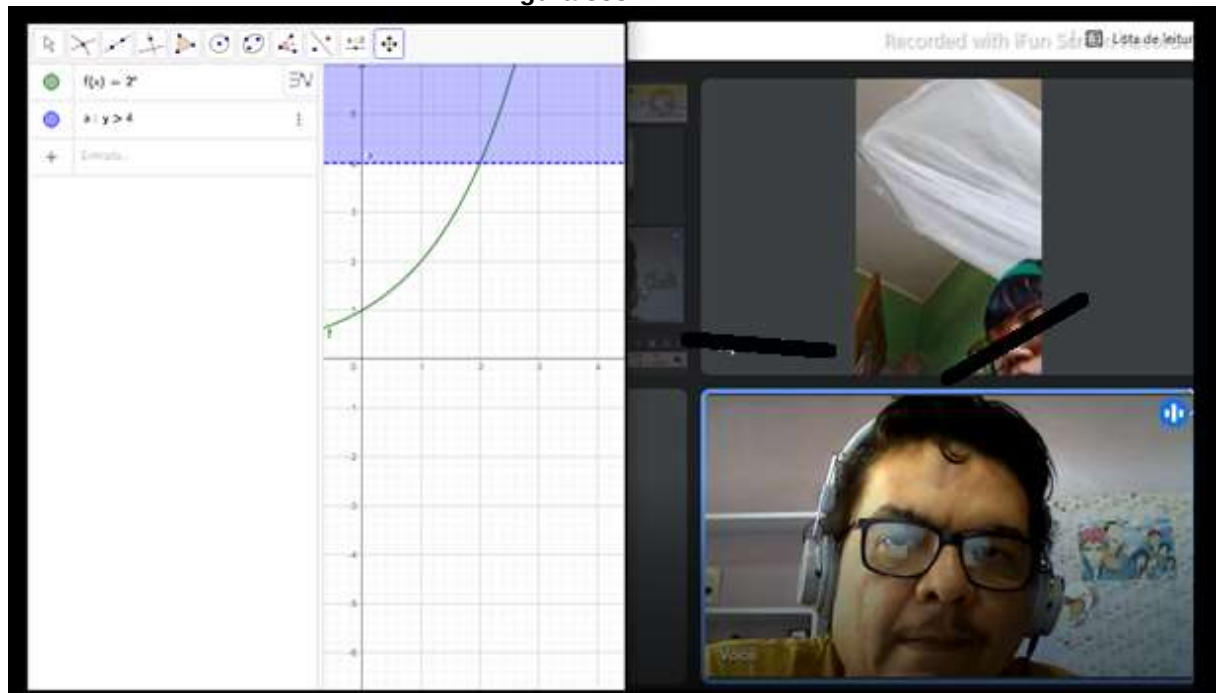
E3. Sim.

E4. Sim.

E5. Sim.

Pesquisador - O que aparece ao digita $y > 4$? (Figura 358).

Figura 358 - $x > 4$



Fonte: Própria do Autor

E3. Fica pintado acima de $y > 4$.

E4. Aparece uma linha pontilhada em cima do 4.

E5. O número 4 não faz parte da solução.

O quinto momento durou aproximadamente 8 minutos e fez a leitura da questão “d” da primeira atividade. (Figura 359).

Figura 359 - Item d

Tabela 1 - Crescimento do número de células

Tempo (t)	0	1	2	3	4	5
Número de Célula (n)	1	2	4	8	16	32

Determine qual o tipo de função que melhor se ajusta aos dados apresentados.

Verifique se:

- Para tempos iguais a 7, 9 e 12 teremos quais quantidades de células correspondentes?
- Para números de células iguais a 64, 128 e 1024 teremos quais tempos correspondentes?
- O que representa dizer graficamente e algebricamente $2^x > 4$.
- O que representa dizer graficamente e algebricamente $2^x < 8$.
- Para a base maior que zero e menor que um, por exemplo $(\frac{1}{2})^x \geq 0,5$, o que representa graficamente ou algebricamente.

Experimento 2º Encontro

The image shows a video conference window. On the left, a math problem is displayed with a table of cell growth over time. The table has two rows: 'Tempo (t)' and 'Número de Célula (n)'. The values for t are 0, 1, 2, 3, 4, 5 and for n are 1, 2, 4, 8, 16, 32. Below the table, there are five questions (a-e) about exponential functions. Question (d) is highlighted with a red box and a red arrow. On the right, there are two video feeds. The top one shows a student named Danilo Rodrigues Pereira. The bottom one shows a teacher with glasses and a headset.

Fonte: Própria do Autor

Pesquisador - Muito semelhante a questão anterior, digite em entrada $y < 8$ e o que acontece com o gráfico da função no geogebra? (Figura 360).

Figura 360 - $y < 8$

The image shows a video conference window. On the left, a graphing calculator interface is visible, showing a coordinate plane with a blue grid. A curve representing an exponential function is plotted, starting near the origin and rising steeply. The y-axis is labeled with values from -10 to 10. On the right, there is a grid of six video feeds. The top row shows two feeds, and the bottom row shows four feeds. The feeds show various participants, including a student with long dark hair and a teacher with glasses and a headset.

Fonte: Própria do Autor

E3. Fica assim.

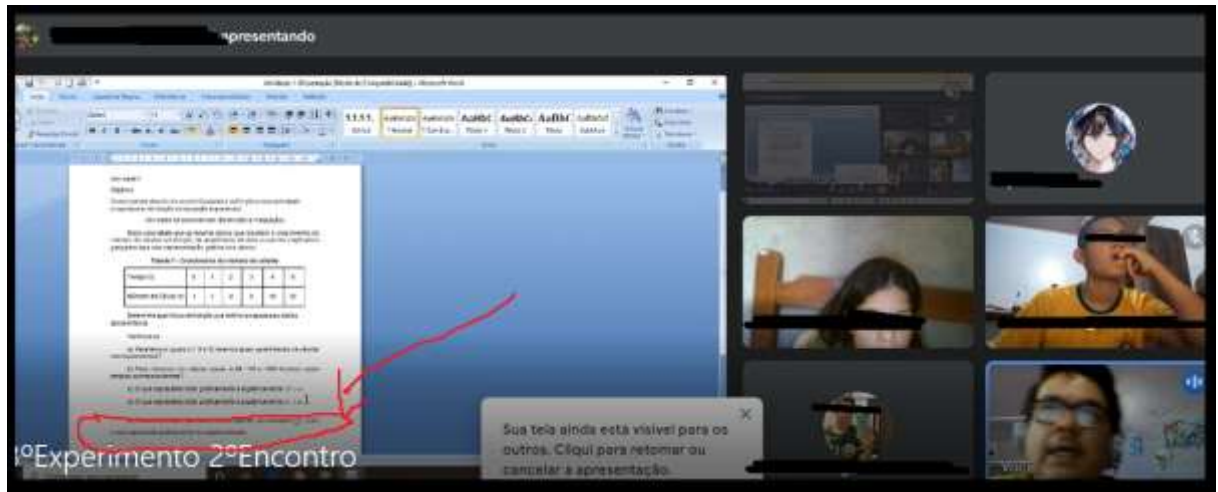
E4. Fica pintado na parte de baixo do 8.

E5. São os menores que 8.

Pesquisador – Perfeito. É isso mesmo.

O sexto momento durou aproximadamente 8 minutos e fiz a leitura da questão “e” para os estudantes. (Figura 361).

Figura 361 - Item e da 1ª atividade.



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador - Devemos digitar em entrada a função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (Figura 362).

Figura 362 - Digitar a função.

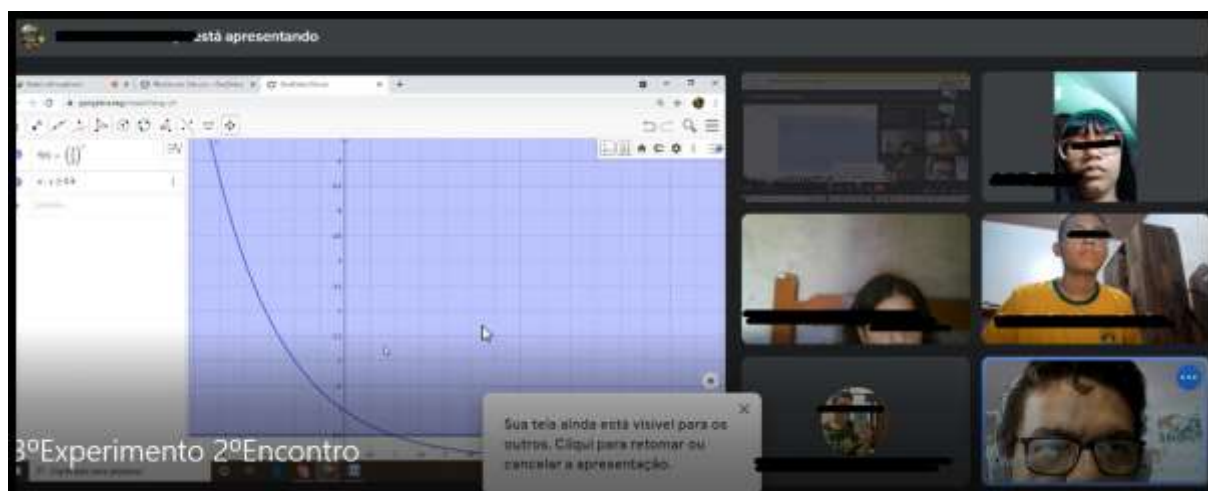


Fonte: Própria do Autor

E3. É assim.

Pesquisador – Isso, perfeito, digite em entrada $y \geq 0,5$. O que acontece com o gráfico no geogebra. (Figura 363).

Figura 363 - y Maior ou igual 0,5.



Fonte: Própria do Autor

E3. São todos os números maiores ou igual a cinco que são pintados

Pesquisador – Correto. Nesta questão era somente para apresentar graficamente ou algebricamente e não para chegar na solução.

12.2.3.3. Terceiro encontro do experimento 3 (E3; E4; E5)

O terceiro encontro foi realizado no dia 28 de julho de 2021, com duração de aproximadamente 2 horas e 21 minutos, divididos em 8 momentos.

O primeiro momento teve uma duração de 39 minutos, e pedi para que os estudantes entrassem no geogebra, fizemos os compartilhamentos das telas dos estudantes, fiz a leitura da segunda atividade da dissertação e pedi para os estudantes inserir os dados da tabela da segunda atividade no excel do geogebra. Assim o pesquisador disse:

Pesquisador – Fiz a leitura da 2ª atividade. Entenderam a atividade a ser feita? (Figura 364).

Figura 364 - 2ª atividade.

Atividade 2

Objetivo

Compreender através do uso do Geogebra a definição e suas principais propriedades da função a inequação logarítmica.

Atividade de logaritmo (Da função a inequação)

Dado uma tabela que apresenta dados que mostram o crescimento do número de células em função da quantidade de dias e usando o aplicativo geogebra faça uma representação gráfica da função INVERSA dos dados.

Tabela 2 - Tabela do número de células em uma Função Geogebra

Tempo (t)	0	1	2	3	4	5
Número de Célula (n)	1	2	4	8	16	32

Determine qual o tipo de função que melhor se ajusta aos dados apresentados.

Fonte: Própria do Autor

E3. Sim.

E4. Sim.

E5. Sim.

Pesquisador – Vamos abrir a planilha do excel no geogebra. Clique no ícone que tem como imagem um triângulo e um círculo, no lado direito acima da parte gráfica do geogebra. (Figura 365).

Figura 365 triângulo e círculo.

3ºExperimento 3ºencontro 20210728

Fonte: Própria do Autor

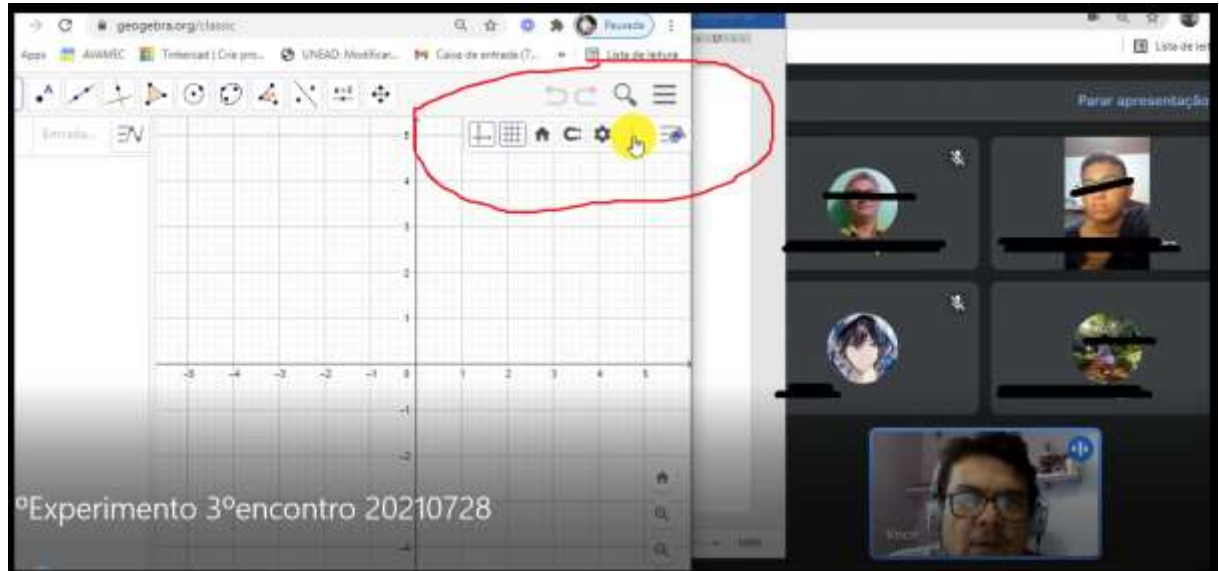
E3. Ok.

E4. Ok.

E5. Ok.

Pesquisador – Ao clicar neste ícone do triângulo e círculo vai abrir uma nova aba, selecione clique nos três pontinhos. O que aconteceu? (Figura 366).

Figura 366 - Outras opções.



Fonte: Própria do Autor

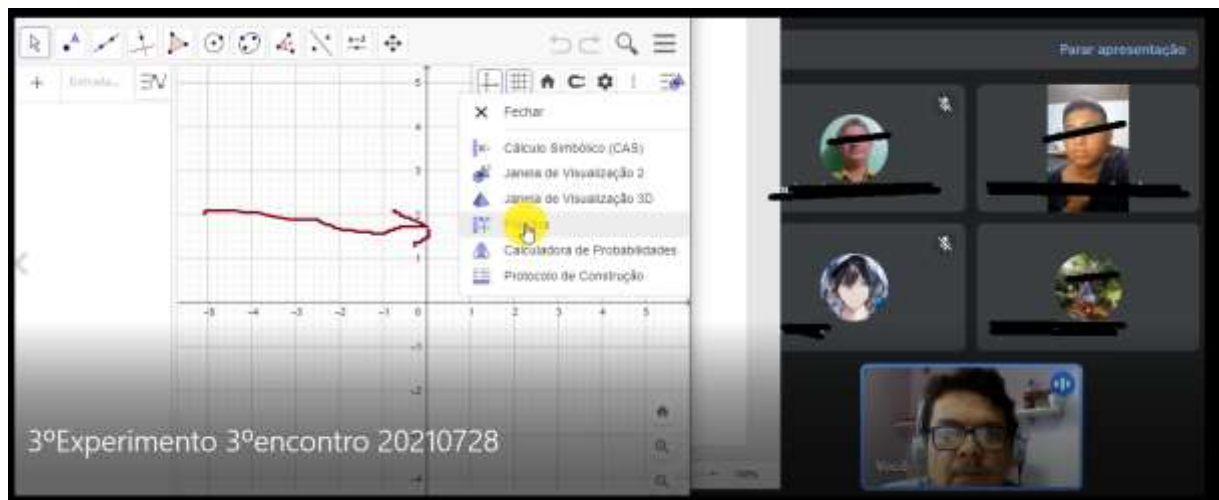
E3. Abriu uma nova aba.

E4. Com várias opções.

E5. Isso.

Pesquisador – Escolha planilha, clique nesta opção, o que acontece? (Figura 367).

Figura 367 - Planilha - 2ª atividade.

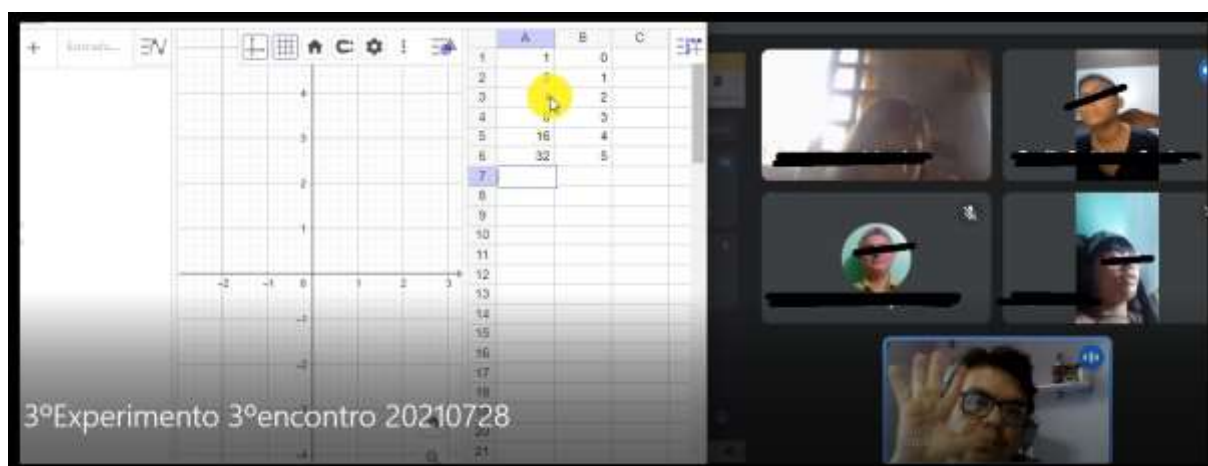


Fonte: Própria do Autor

E3. Vai abrir uma tabela do excel.

Pesquisador – Muito bem. Nesta tabela vamos digitar os dados da tabela da segunda atividade na planilha do excel do geogebra. Para isso devemos ter em mente que os dados deverão ser inseridos de forma que inversa, o que era x vai ser y e vice versa. Na coluna A do excel devemos colocar o número de células e na coluna B o tempo. (Figura368).

Figura 368 - Tabela invertida



Fonte: Própria do Autor

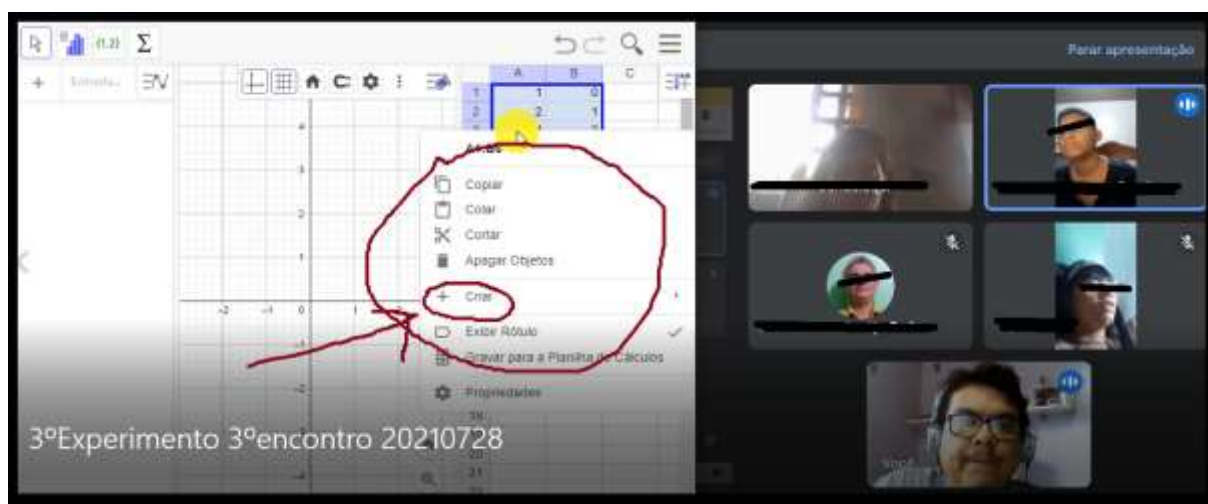
E3. Ok

E4. Ok.

E5. Ok.

Pesquisador – Devemos selecionar a tabela que digitamos, clique com o lado direito do mouse, o que aparece? (Figura 369).

Figura 369 - Criar - 2ª atividade



Fonte: Própria do Autor

E3. Aparece uma nova aba.

E4. Sim.

E5. Sim.

Pesquisador – Selecione nesta nova aba a palavra criar. O que acontece (Figura

E3. Uma nova aba.

E4. Sim.

E5. Sim.

Pesquisador - Nessa nova aba clique em lista de pontos. (Figura 370).

Figura 370 - Lista de pontos - 2ª atividade



Fonte: Própria do Autor

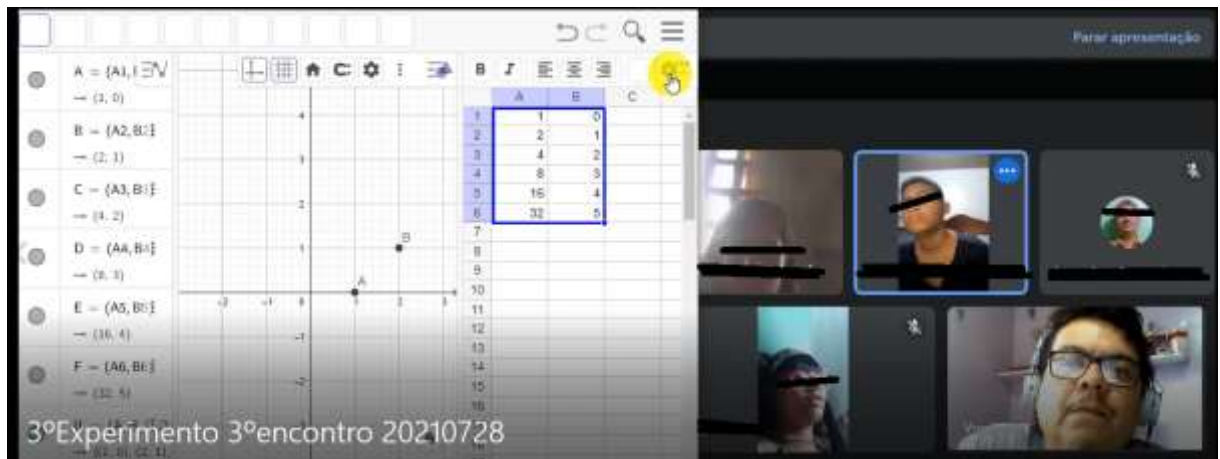
E3. Ok.

E4. Ok.

E5. Ok.

Pesquisador – O que aparece na parte gráfica do geogebra. (Figura 371).

Figura 371 - Pontos na parte gráfica do geogebra - 2ª atividade



Fonte: Própria do Autor

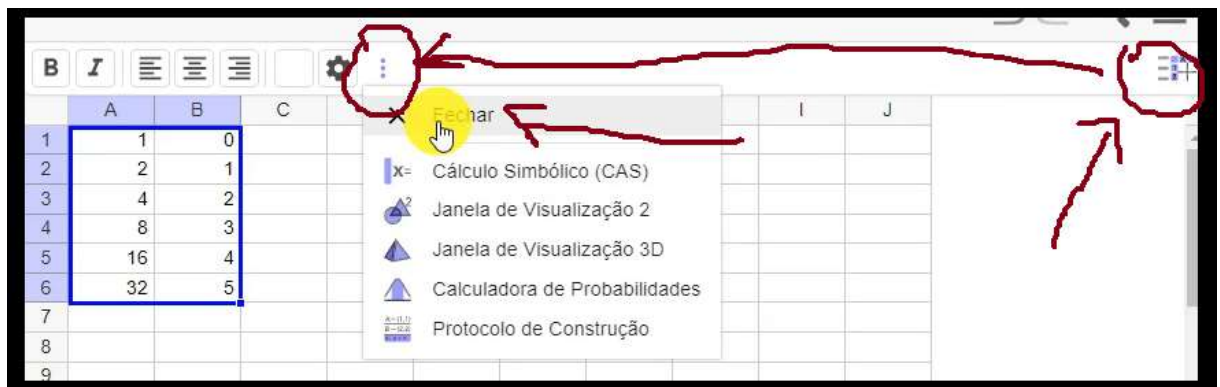
E3. Vários pontos. Só que estão ao contrário.

E4. Isso.

E5. Ok.

Pesquisador – Devemos eliminar a tabela do excel do geogebra, vá no ícone do triângulo com o círculo. Clique, aparecerá uma nova aba. (Figura 372).

Figura 372 - Fechar



Fonte: Própria do Autor

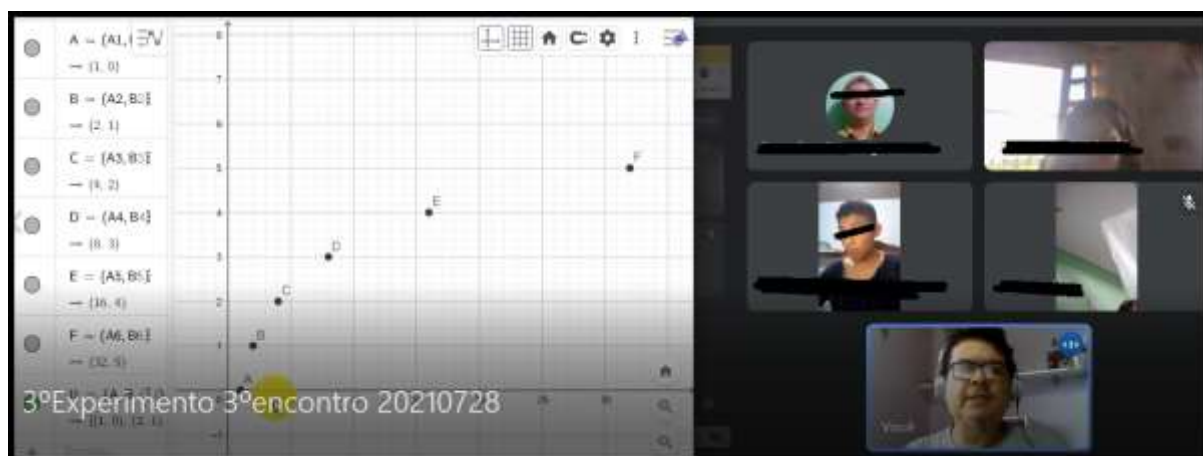
E3. Ok.

E4. Clica em fechar.

E5. O excel desapareceu.

Pesquisador – Muito bem, verifiquem os pontos na parte gráfica do geogebra e diga qual a função que melhor representa esses pontos? (Figura 373).

Figura 373 - Representação de função.



Fonte: Própria do Autor

E3. A função logarítmica.

E4. Correto.

E5. Isso.

Pesquisador – Muito bem. Digite em entrada a expressão $f(x) = \log_2 x$ e veja o que acontece com os pontos. (Figura 374).

Figura 374 - Digite log.



Fonte: Própria do Autor

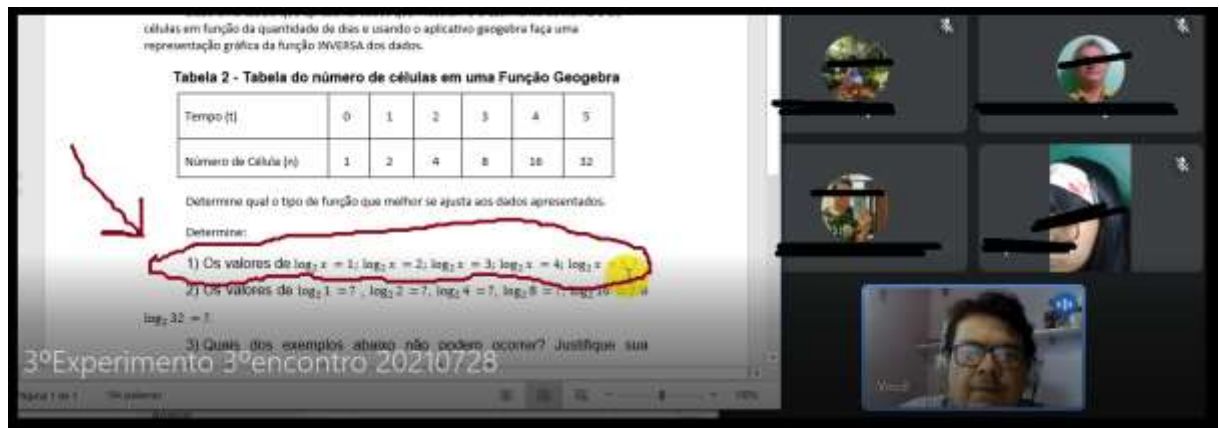
E3. Todos os pontos são contemplados.

E4. Ok.

E5. Ok.

No segundo momento teve duração de aproximadamente 28 minutos, fiz a leitura da primeira questão da segunda atividade para os estudantes. (Figura 375).

Figura 375 - Segunda atividade.



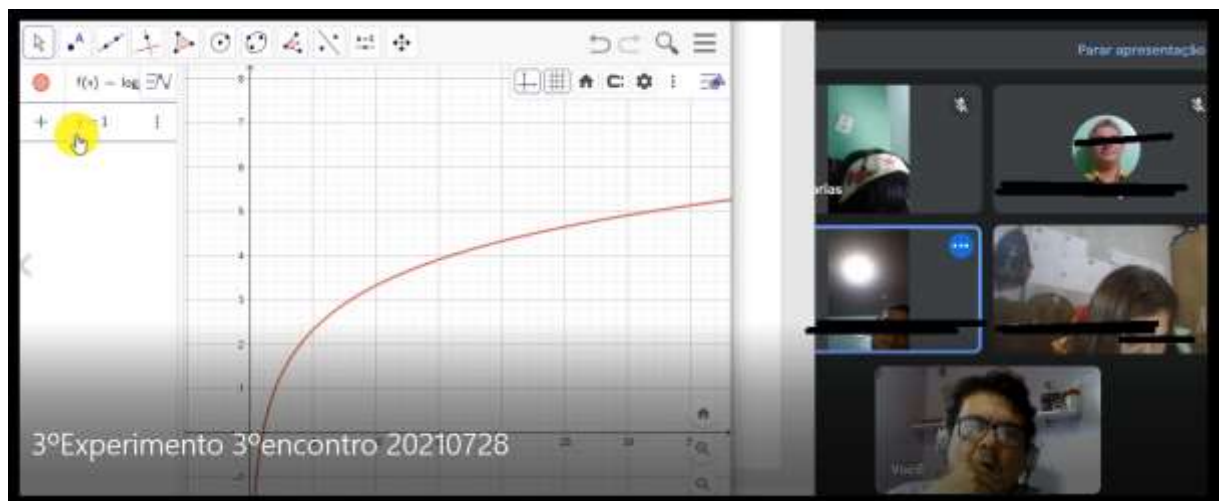
Fonte: Própria do Autor

E3. Ok.

E4. Ok.

E5. Ok.

Pesquisador – Para $\log_2 x = 1$, podemos digitar em entrada no geogebra $y = 1$? O que aconteceu quando digitamos $y = 1$? (Figura 376).

Figura 376 - $y = 1$.

Fonte: Própria do Autor

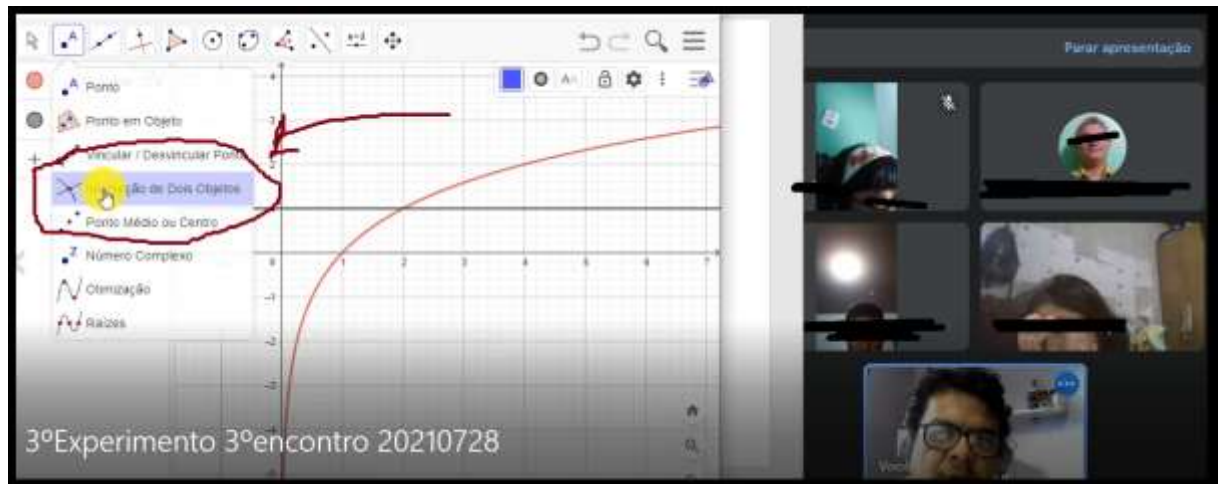
E3. Aparece uma reta passando por $y = 1$ e cortando a função $f(x) = \log_2 x$

E4. Isso.

E5. Ok.

Pesquisador – Para determinar o ponto de interseção entre a reta e a função $f(x) = \log_2 x$. Devemos clicar no ícone ponto de encontro entre dois objetos. (Figura 377).

Figura 377 - Ponto de interseção.



Fonte: Própria do Autor

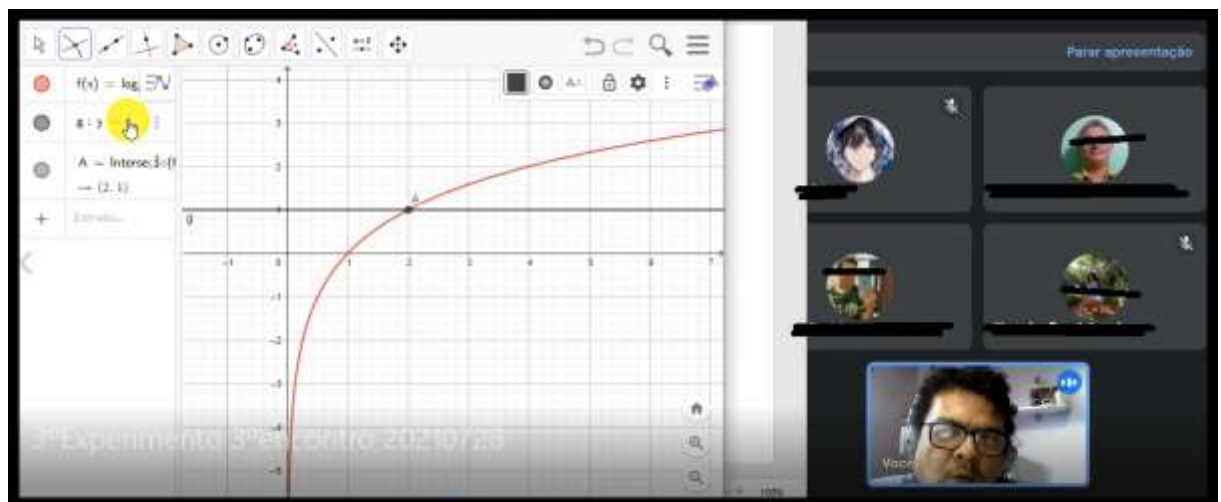
E3. Ok.

E4. Ok.

E5. Ok.

Pesquisador – Clicando no ícone interseção entre dois objetos você deve selecionar a reta $y = 1$ e a função $f(x) = \log_2 x$, o geogebra determinará o ponto de interseção entre esses dois objetos. (Figura 378).

Figura 378 - $y=1$



Fonte: Própria do Autor

E3. O valor de $x = 2$

E4. Ok.

E5. Ok.

Pesquisador – Como já foi feito para $y = 1$, agora basta trocar o valor de um para dois, assim determinamos $\log_2 x = 2$. (Figura 379).

Figura 379 - $y = 1$ - logaritmo



Fonte: Própria do Autor

E3. $x = 4$.

E4. É quatro.

E5. Sim.

Pesquisador – Para $y = 3$, basta trocar o 2 por 3. (Figura 380).

Figura 380 - $y = 3$.

Fonte: Própria do Autor

E3. Oito.

E4. Oito.

E5. Sim.

Pesquisador – Para $y = 4$, basta trocar o 3 por 4. (Figura 381).Figura 381 - $y = 4$.

Fonte: Própria do Autor

E3. Ok.

E4. Ok.

E5. 16.

Pesquisador - Para $y = 5$, basta trocar o 4 por 5. (Figura 382).

Figura 382 - $y = 5$.

Fonte: Própria do Autor

E3. 32.

E4. 32.

E5. Sim.

No terceiro momento teve duração de aproximadamente 24 minutos, fiz a leitura da segunda questão da segunda atividade para os estudantes. (Figura 383).

Figura 383 - 2ª questão

Tabela 2 - Tabela do número de células em uma Função Geogebra

Tempo (t)	0	1	2	3	4	5
Número de Célula (n)	1	2	4	8	16	32

Determine qual o tipo de função que melhor se ajusta aos dados apresentados.

Determine:

- 1) Os valores de $\log_2 x = 1$, $\log_2 x = 2$, $\log_2 x = 3$, $\log_2 x = 4$, $\log_2 x = 5$?
- 2) Os valores de $\log_2 1 = ?$, $\log_2 2 = ?$, $\log_2 4 = ?$, $\log_2 8 = ?$, $\log_2 16 = ?$ e $\log_2 32 = ?$.
- 3) Quais dos exemplos abaixo não podem ocorrer? Justifique sua resposta (graficamente ou Algebricamente ou Ambos)?

- a) $\log_2 7 = ?$
- b) $\log_2 -2 = ?$
- c) $\log_2 4 = ?$

Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Para a expressão $\log_2 1 = ?$, estamos atrás do valor x ou y? (Figura

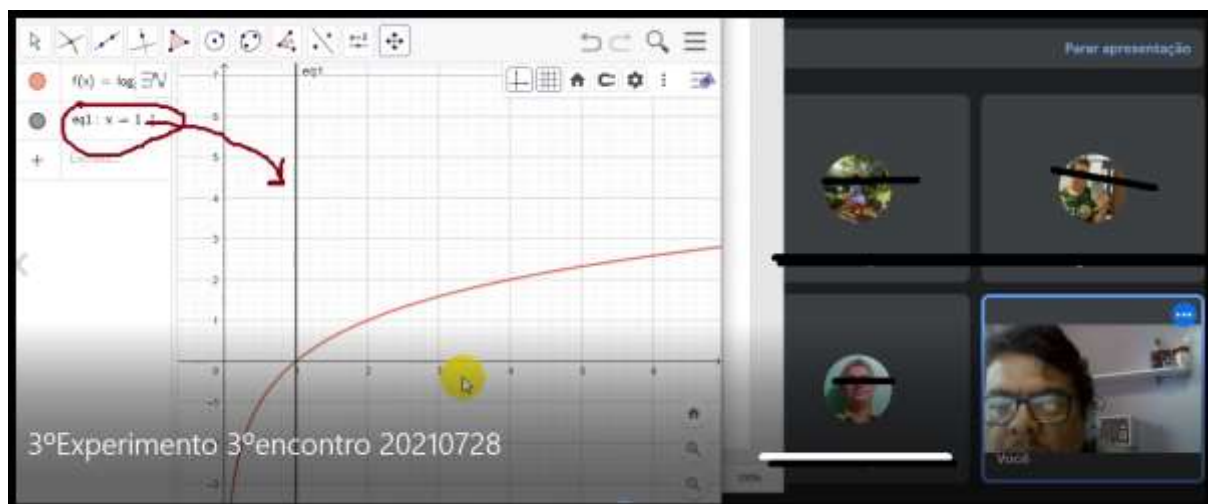
E3. x .

E4. y.

E5. y

Pesquisador – Muito bem para quem disse y . Mas devemos digitar em entrada a expressão $x = 1$, o que acontece? (Figura 384).

Figura 384 - $x = 1$.



Fonte: Própria do Autor

E3. Passa uma reta encima de 1 no eixo x.

E4. Isso.

E5. Sim.

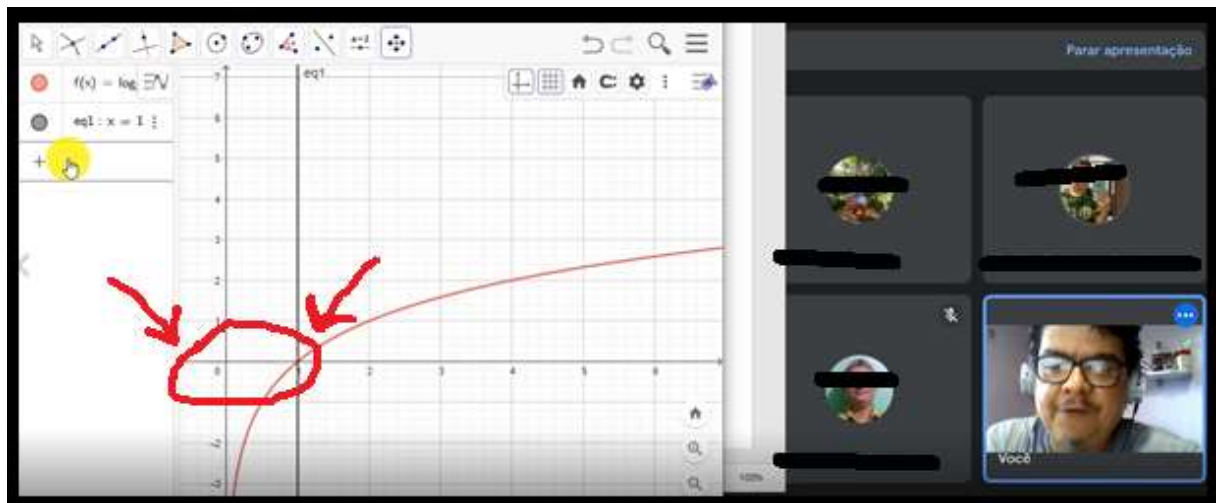
Pesquisador – Parabéns. Veja que ao passar uma reta em x , essa reta($x = 1$) toca a função $f(x) = \log_2 x$, o que devemos fazer? (Figura 384).

E3 – Usar o ícone interseção entre dois objetos.

E4. Verdade.

E5. Isso mesmo, aí vamos determinar esse ponto que já demonstra a resposta da imagem de x .

Pesquisador – Isso mesmo, mas nesse caso se vocês observarem o próprio eixo x identifica o valor da imagem de x . (Figura 385).

Figura 385 - $x = 1$ 

Fonte: Própria do Autor

E3. Zero.

E4. Ok, entendi.

E5. Também.

Pesquisador – Tem a forma algébrica, para isso basta digitar em entrada a expressão $f(1)$ e enter. O que acontece? (Figura 386).

Figura 386 - Expressão $f(1)$.

Fonte: Própria do Autor

E3. Ok.

E4. Ok.

E5. Ok.

Pesquisador – Para o $\log_2 2$ que é o x ?

E4 – Dois.

Pesquisador – Isso, para o $x = 2$ basta trocar o 1 por 2 e dá enter. (Figura 387).

Figura 387 - $x = 2$.



Fonte: Própria do Autor

E3. Um.

E4. Um

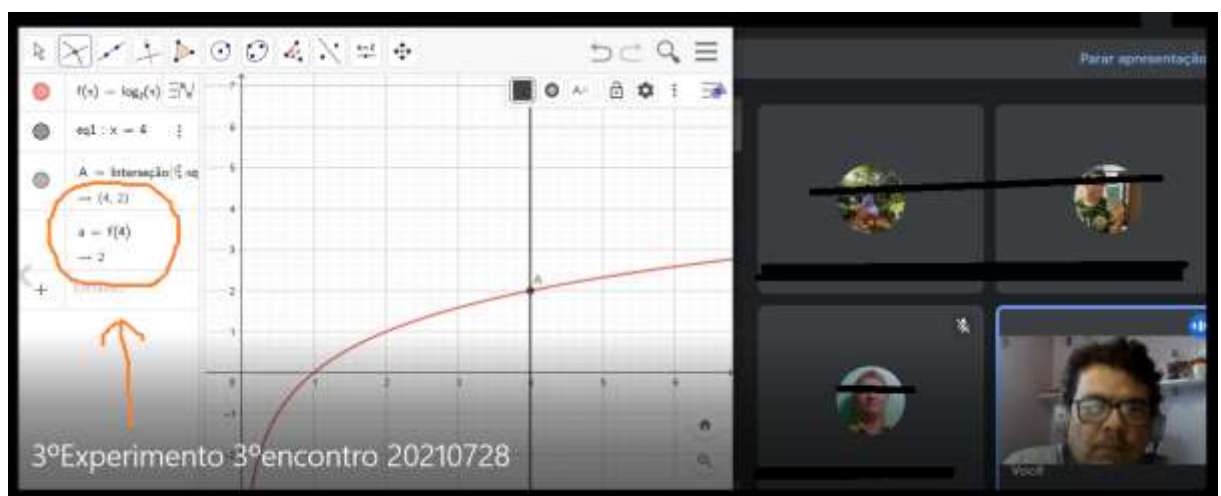
E5. Um.

Pesquisador - Para o $\log_2 4$ quem é o x ?

E4 – Quatro.

Pesquisador – Vou lá no geogebra e digito no lugar do 2 o número 4. (Figura 388).

Figura 388 - $y = 2$.



Fonte: Própria do Autor

E3. Dois.

E4. 2.

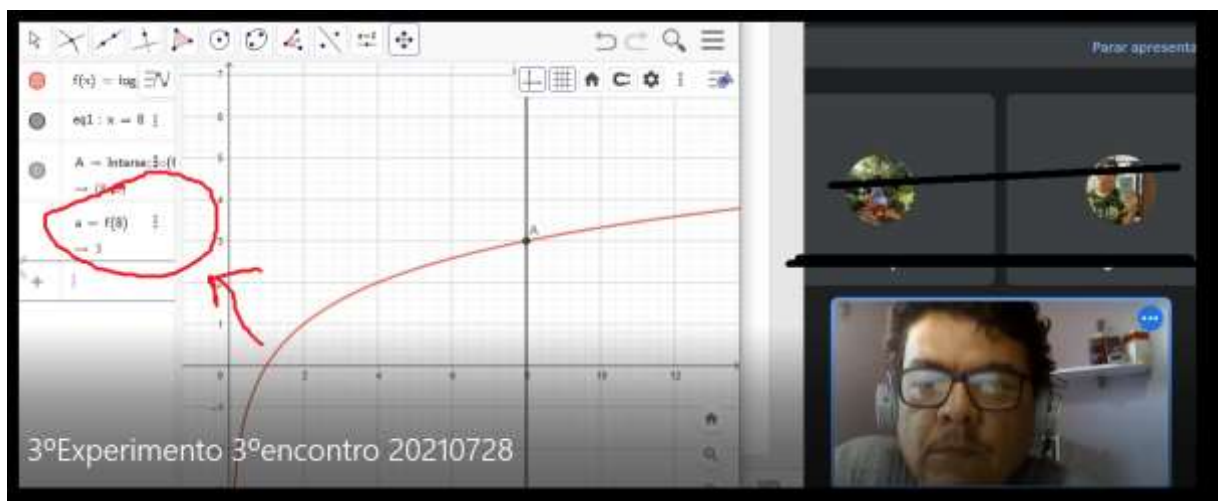
E5. 2.

Pesquisador - $\log_2 8$ quem é o x?

E3. Oito.

Pesquisador – Vou lá no geogebra digito no lugar do 4 escrevo 8. Enter (Figura 389).

Figura 389 - $y = 3$.



Fonte: Própria do Autor

E3. 3.

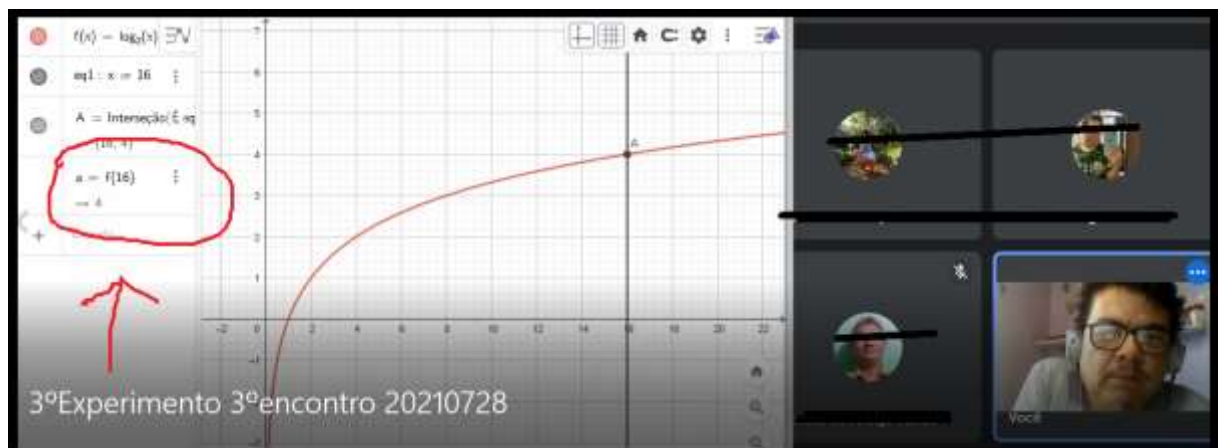
E4. 3

E5. 3

Pesquisador - $\log_2 16$ quem é o x?

E3 – 16.

Pesquisador - Vou lá no geogebra digito no lugar do 8 escrevo 16. Enter (Figura 390).

Figura 390 - $y = 4$.

Fonte: Própria do Autor

E3. 4

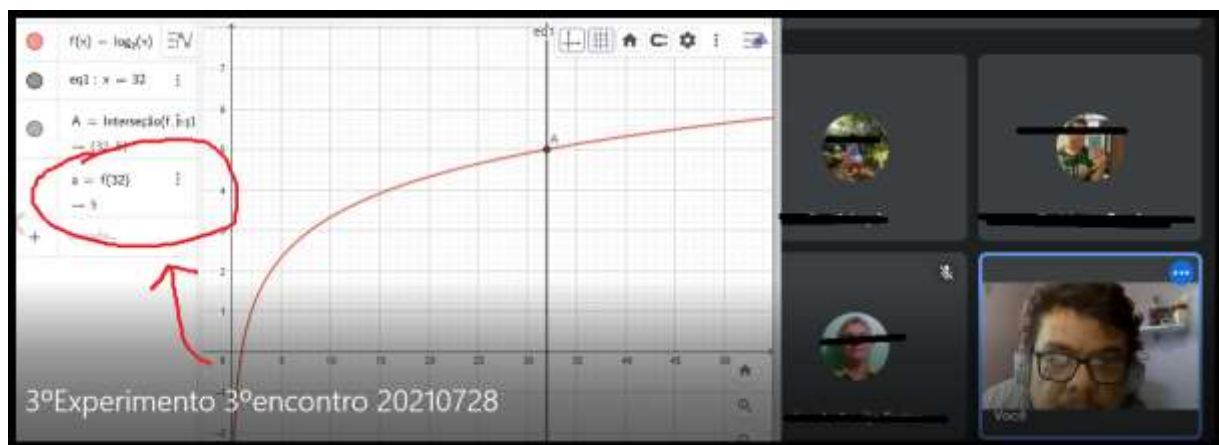
E4. 4

E5. 4

Pesquisador - - $\log_2 32$ quem é o x?

E3 – 32.

Pesquisador - Vou lá no geogebra digito no lugar do 16 escrevo 32. Enter (Figura 391).

Figura 391 - $y = 5$ 

Fonte: Própria do Autor

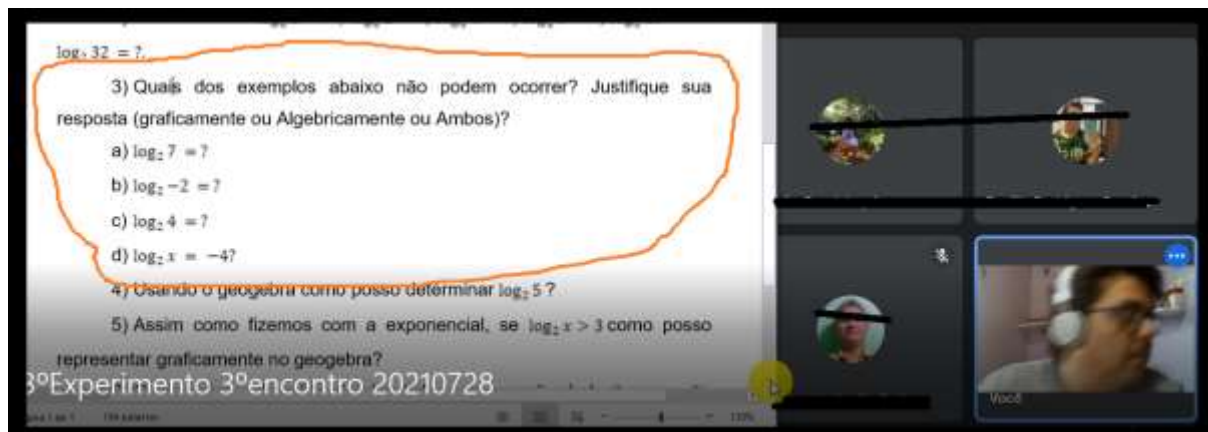
E3. 5.

E4. 5.

E5. 5.

O quarto momento durou aproximadamente 15 minutos, fiz a leitura para os estudantes. (Figura 392).

Figura 392 3ª questão.



Fonte: Própria do Autor

Nesta questão o estudante tem que verificar quais das alternativas (a;b;c;d) não podem ocorrer. O pesquisador pergunta para o primeiro item.

Pesquisador - Para o $\log_2 7$, você está atrás do x ou do y?

E4. Do y, pois o $x = 7$.

Pesquisador – Muito bem. Vamos no geogebra e vamos digitar $x = 7$ e como já foi feita a interseção no geogebra a resposta é imediata. (Figura 393).

Figura 393 - 3ª questão item a.



Fonte: Própria do Autor

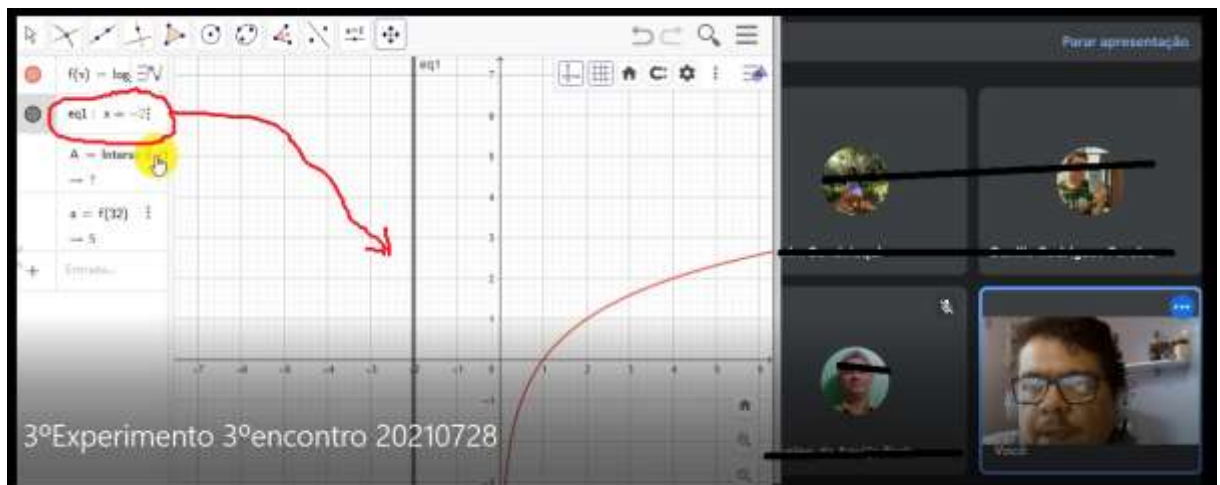
E3. $y = 28$

Pesquisador – Desta forma é claro que podemos calcular o item a. O item b é $\log_2 -2$, quem é o x?

E4. O x é o número menos dois.

Pesquisador – Isso, digite em entrada o valor de $x = -2$ e me responda a reta que passa por menos dois toca a função $f(x) = \log_2 x$? (Figura 394).

Figura 394 - $x = -2$.



Fonte: Própria do Autor

E3. Não.

E4. Não

E5. Não.

Pesquisador – Então podemos concluir?

E4. Não temos resposta para número x negativo.

Pesquisador – Parabéns. É isso mesmo.

Pesquisador – Perfeito. A letra “c”, $\log_2 4$ é semelhante ao item “a” é possível.

E3. Ok

E4. Ok.

E5. Ok.

Pesquisador – o item “d”, $\log_2 x = -4$, estamos atrás do x ou do y?

E3. Do y.

Pesquisador – Desta forma podemos dizer que $y = -4$ e se digitarmos em entrada no geogebra $y = -4$ o que aparece? (Figura 395).

Figura 395 $y = -4$



Fonte: Própria do Autor

E3. Ok.

E4. Aparece uma reta passando por -4 e como já fizemos a interseção entre dois objetos, o geogebra determina o ponto A.

E5. Isso, e o valor de x é $0,06$.

Pesquisador – Muito bem, na parte algébrica fica registrado o valor de x e de y.

No quinto momento teve duração de aproximadamente 5 minutos, fiz a leitura da quarta questão da segunda atividade para os estudantes. (Figura 396).

Figura 396 - 4ª questão.

3) Quais dos exemplos abaixo não podem ocorrer? Justifique sua resposta (graficamente ou Algebricamente ou Ambos)?

- a) $\log_2 7 = ?$
- b) $\log_2 -2 = ?$
- c) $\log_2 4 = ?$
- d) $\log_2 x = -4$
- 4) Usando o geogebra como posso determinar $\log_2 5$?
- 5) Assim como fizemos com a exponencial, se $\log_2 x > 3$ como posso representar graficamente no geogebra?
- 6) Quais valores de x (domínio) satisfaz a inequação dada ($\log_2 x > 3$).

3ºExperimento 3ºencontro 20210728

The image shows a presentation slide with a list of math questions. A red arrow points to question 4, and a red circle highlights it. To the right of the slide is a video conference interface with four participant windows. The bottom-right window shows a man with glasses and a beard.

Fonte: Própria do Autor

Nesta quarta questão podemos calcular algebricamente ou graficamente, o pesquisador perguntou:

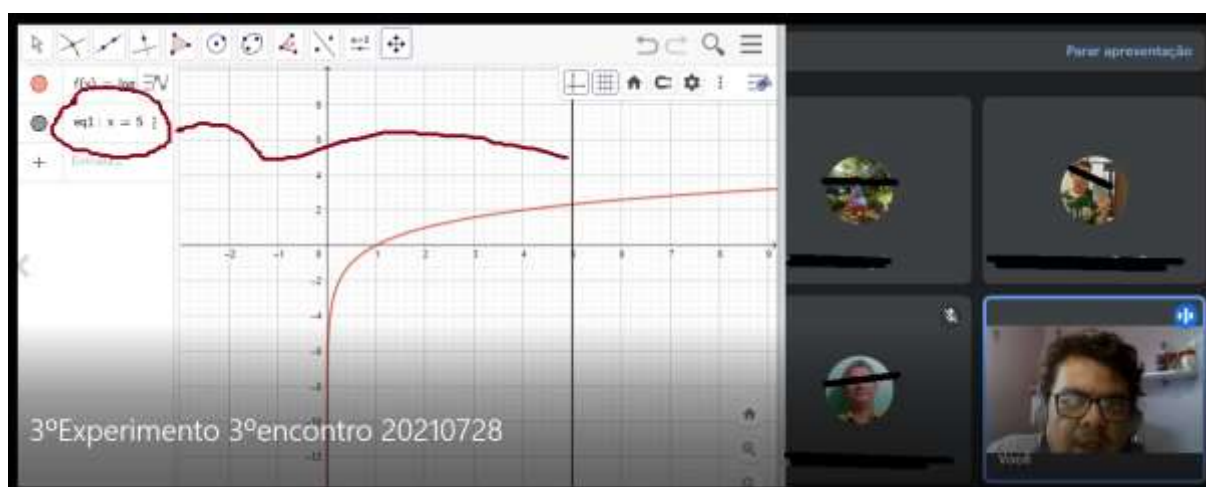
Pesquisador – Quem é o $\log_2 5$? É o x ou y?

E3. y

E4. y

E5. y

Pesquisador – Isso, temos então que digitar em entrada no geogebra $x = 5$, correto? (Figura 397).

Figura 397 - $x = 5$.

Fonte: Própria do Autor

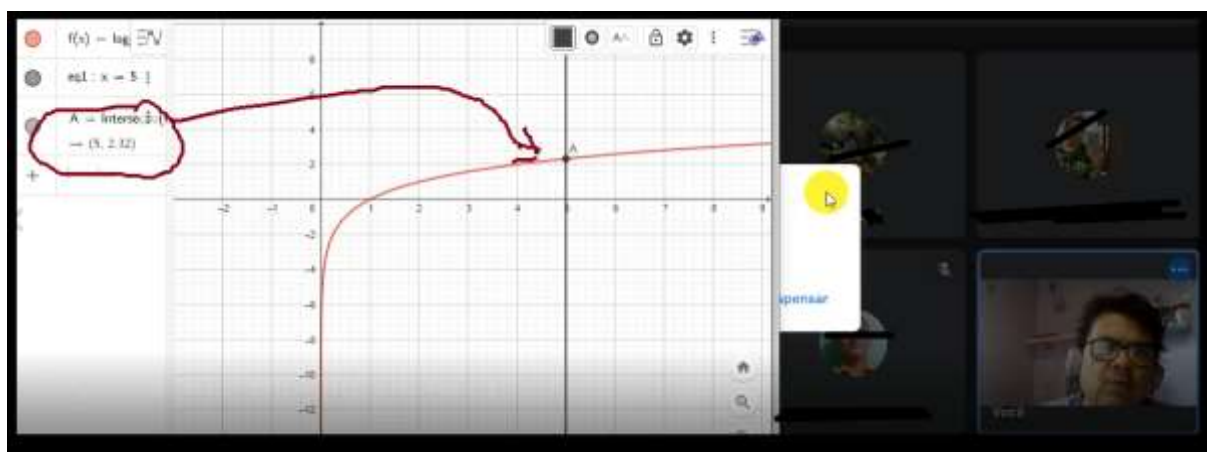
E3. Passou uma reta em cima de $x = 5$.

E4. Devemos usar aquele ícone ponto de interseção entre dois objetos.

E5. Sim.

Pesquisador – Correto, ao clicar no ícone de interseção entre dois objetos, selecionamos a reta $x = 5$ e a função $f(x) = \log_2 x$, o geogebra determinará um ponto A e nesse ponto teremos a nossa resposta. (Figura 398).

Figura 398 - Ponto A.



Fonte: Própria do Autor

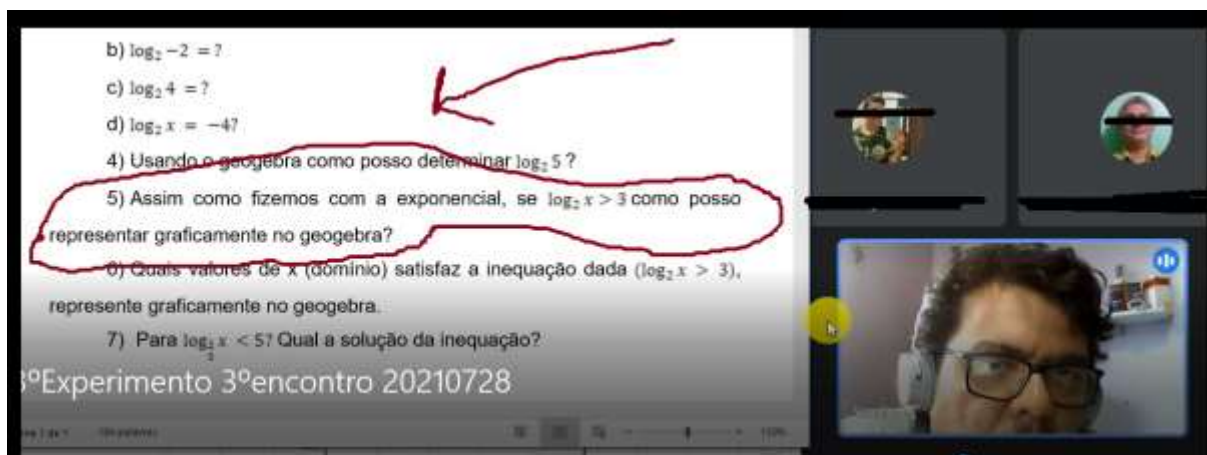
E3. $y = 2,32$

E4. Isso.

E5. Ok.

No sexto momento teve duração de aproximadamente 5 minutos, fiz a leitura da quinta questão da segunda atividade para os estudantes. (Figura

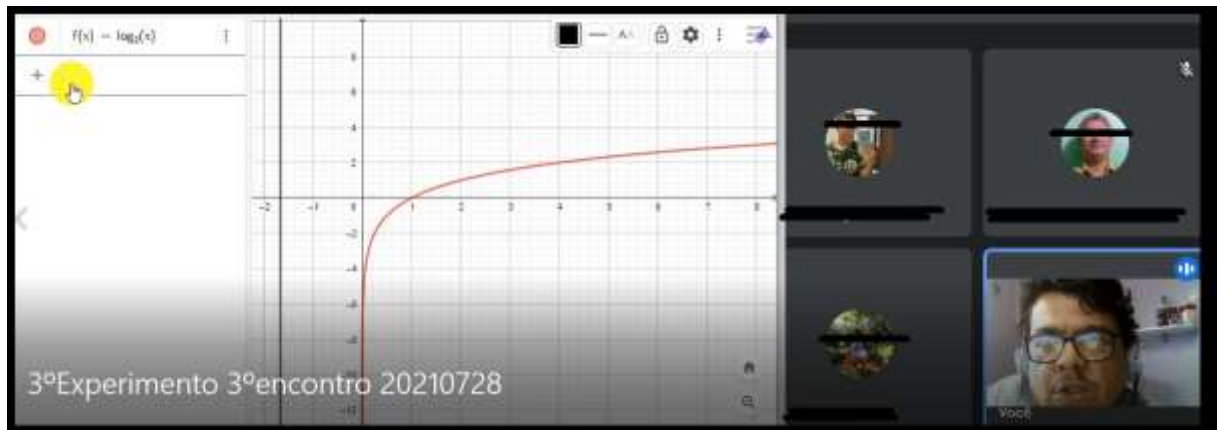
Figura 399 - 5ª questão.



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Nesta quinta questão da segunda atividade pede que o estudante represente somente graficamente na parte gráfica do geogebra. Dessa forma, digite em entrada a função $f(x) = \log_2 x$. (Figura 400).

Figura 400 - logaritmo crescente.



Fonte: Própria do Autor

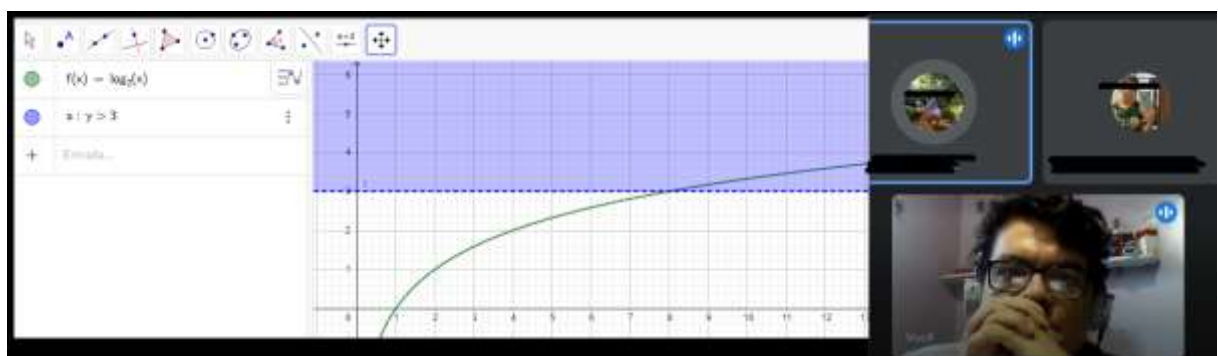
E3. Ok

E4. Ok.

E5. Ok.

Pesquisador – Vamos digitar em entrada do geogebra a expressão $y > 3$, o que acontece? (Figura 401).

Figura 401 - $y > 3$.



Fonte: Própria do Autor

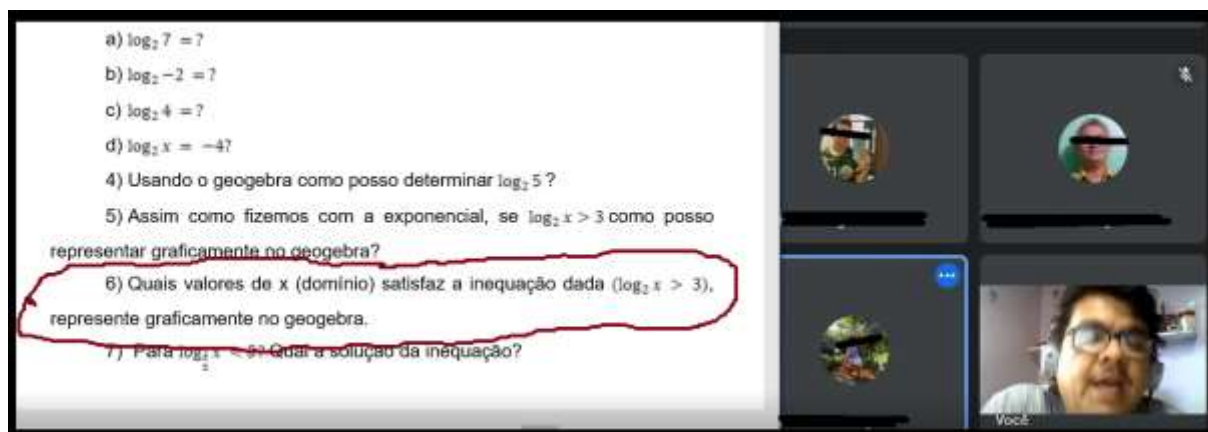
E3. Ok

E4. Ok.

E5. Ok.

No sétimo momento teve duração de aproximadamente 10 minutos, fiz a leitura da sexta questão da segunda atividade para os estudantes. (Figura 402).

Figura 402 - 6ª questão.



Fonte: Própria do Autor

Pesquisador – Quem é o $\log_2 x$? É o x ou y ?

E3. É y .

E4. x .

E5. x .

Pesquisador – É o y pois o x já está na pergunta, entende?

E4. Sim.

Pesquisador – Qual o valor de x para $y = 3$. (Figura

E3 – É 8

E4 – 8.

E5 – 8.

Pesquisador – Muito bem, 8 não é a resposta da sua inequação $\log_2 x > 3$. A sua resposta ou é $x > 8$ ou $x < 8$. Qual das duas vocês escolhem.

E3 - $x > 8$.

E4 $x < 8$.

E5 - $x > 8$.

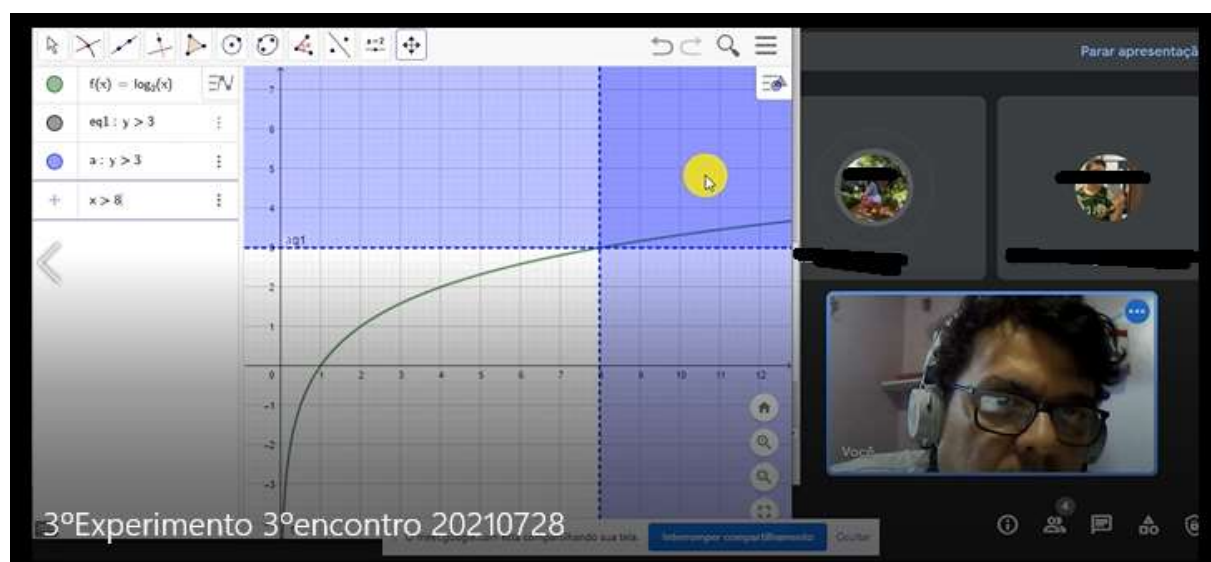
Pesquisador – Para quem escolheu $x > 8$, acertou. Por que vocês escolheram essa resposta.

E3 – Por que a função é crescente.

E5 – Não sei, só escolhi.

Pesquisador – Tudo bem, você acertou novamente, mas vamos confirmar a sua resposta usando o gráfico do geogebra. Digite $x > 8$ em entrada no geogebra e veja o que acontece. (Figura 403).

Figura 403 - $x > 8$.



Fonte: Própria do Autor

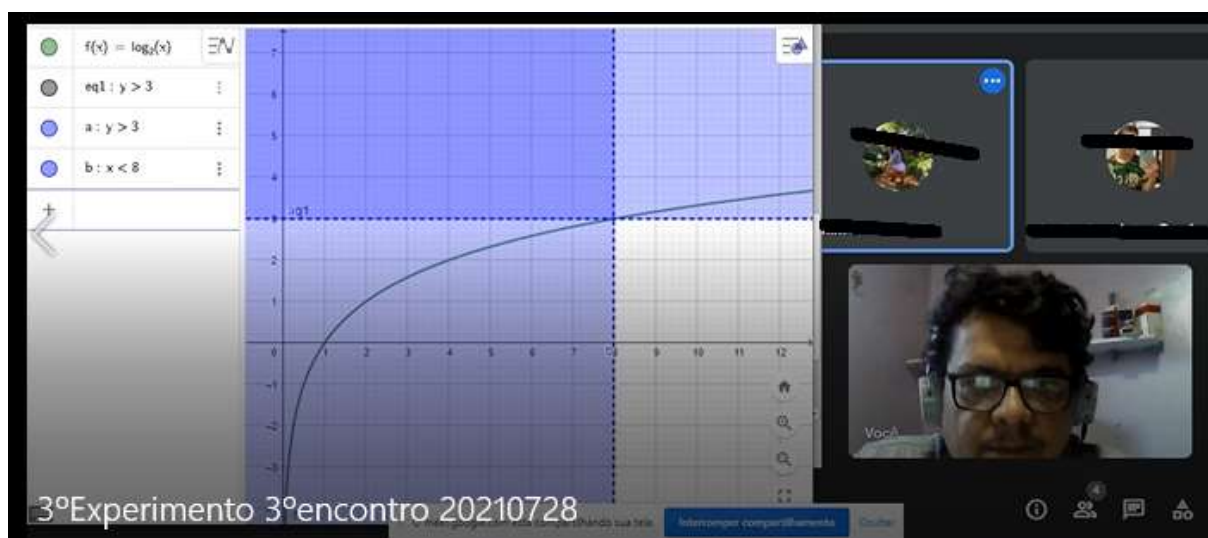
E3 – Ficou pintado de azul depois do 8, do lado direito, para os números maiores que 8

E4 – Ficou também pintado duas vezes na parte de cima.

E5 – Por que ficou pintado duas vezes?

Pesquisador – Exatamente, reparem que na parte que pintou duas vezes temos a presença do gráfico da função $f(x) = \log_2 x$. E é isto que comprova que E3 acertou. Vamos supor que a resposta fosse $x < 8$. O que acontece? (Figura 404).

Figura 404 - Pintada duas vezes. não tem gráfico.



Fonte: Própria do Autor

E3 – Pintou, mas dessa vez foi antes do 8, do lado esquerdo, para os números menores que 8.

E4 - É não tem gráfico na função.

E5 – É isso mesmo.

Pesquisador - Exato, observe que na parte pintada duas vezes, não há presença de gráfico da função $f(x) = \log_2 x$. Logo $x < 8$, não é solução da inequação $\log_2 x > 3$. Entenderam?

E3 – Sim.

E4 – Sim.

E5 – Sim.

No oitavo momento teve duração de aproximadamente 15 minutos, fiz a leitura da sétima questão da segunda atividade para os estudantes. (Figura 405).

Figura 405 - 7ª Questão.

3) Quais dos exemplos abaixo não podem ocorrer? Justifique sua resposta (graficamente ou Algebricamente ou Ambos)?

- $\log_2 7 = ?$
- $\log_2 -2 = ?$
- $\log_2 4 = ?$
- $\log_2 x = -4?$

4) Usando o geogebra como posso determinar $\log_2 5$?

5) Assim como fizemos com a exponencial, se $\log_2 x > 3$ como posso representar graficamente no geogebra?

6) Quais valores de x (domínio) satisfazem a inequação dada ($\log_2 x > 3$), represente graficamente no geogebra.

7) Para $\log_{\frac{1}{2}} x < 5$? Qual a solução da inequação?

3ºExperimento 3ºencontro 20210728

Fonte: Própria do Autor

Nesta sétima questão está pedindo a solução da questão $(\log(\frac{1}{2})x < 5)$, o pesquisador perguntou:

Pesquisador – O $\log(\frac{1}{2})x$ está se referindo a x ou a y ?

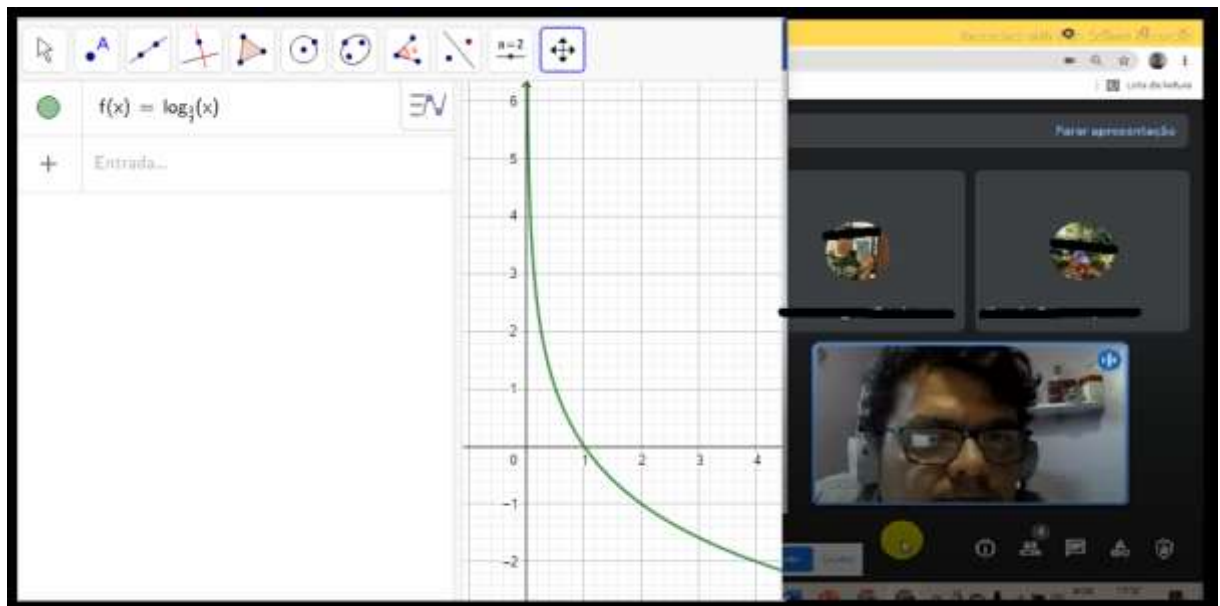
E3 – A y .

E4 – y .

E5 – y .

Pesquisador – Digite em entrada a expressão $f(x) = \log_{1/2} x$. (Figura 406).

Figura 406 - Logaritmo decrescente.



Fonte: Própria do Autor

E3 – Ok.

E4 – Ok.

E5 – Ok.

Pesquisador – A função é crescente ou decrescente?

E3 – Decrescente.

E4 – Decrescente.

E5 – Decrescente.

Pesquisador – Para $y < 5$ o que acontece com o gráfico. (Figura 407).

Figura 407 - $y < 3$.

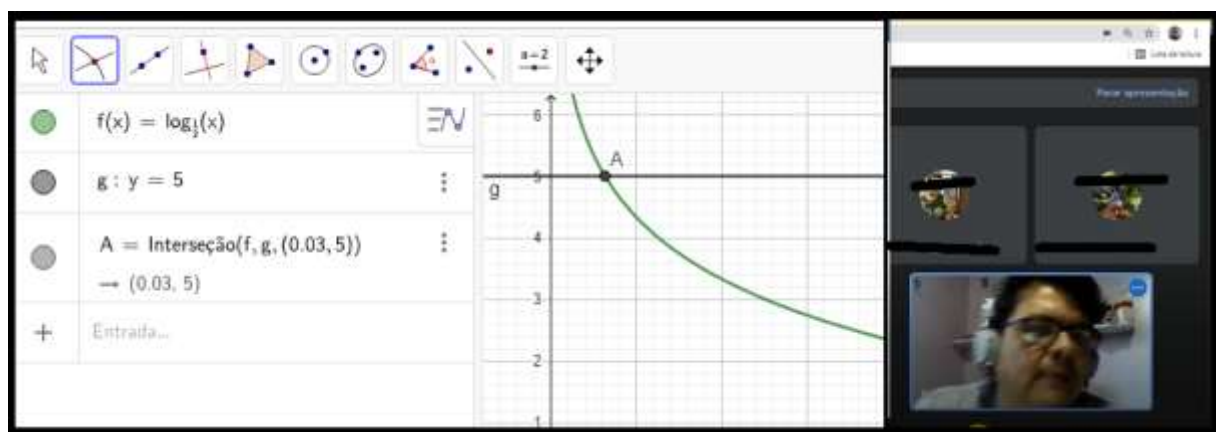
Fonte: Própria do Autor

E3 – Pintou a parte dos números menores que 5.

E4 – o 5 não faz parte da solução.

E5 – Ok.

Pesquisador – A solução da inequação $\log_{1/2} x < 5$ depende da base do logaritmo, qual o valor de x quando $y = 5$? (Figura 408).

Figura 408 - $y = 5$.

Fonte: Própria do Autor

E3 – 0,03.

E4 – 0,03.

E5 – 0,03

Pesquisador – Mas a resposta não é 0,03, devemos saber se $x > 0,03$ ou $x < 0,03$. Qual a solução de vocês?

E3 – Para mim a resposta é $x > 0,03$.

E4 - $x < 0,03$

E5 – Não sei.

Pesquisador – A resposta correta é $x > 5$, pois a função $f(x) = \log_{1/2} x$ é decrescente. Vamos observar o resultado na parte gráfica do geogebra. (Figura 409).

Figura 409 - Parte pintada duas vezes, é solução da inequação.



Fonte: Própria do Autor

E3 – Ficou pintada duas vezes a parte do gráfico.

E4 – Verdade, por isso que é a resposta correta.

E5 – Isso.

Professor – Verdade, pelo fato que do gráfico da função $f(x) = \log_{1/2} x$ está na parte pintada duas vezes, isso garante que ele seja a resposta correta. Vamos observa para $x < 0,03$. (Figura 410).

Figura 410 - $x < 0,03$.

Fonte: Própria do Autor

E3 – Não tem gráfico da função na parte pintada duas vezes.

E4 – Isso.

E5 – Não é solução.

Pesquisador – Correto, pelo fato de não ter gráfico da função na parte pintada duas vezes significa dizer que $x < 0,03$ não é solução da inequação $f(x) = \log_{1/2} x$.

12.2.4 - Análise sobre os registros. (Áudio visual)

Para essa análise utilizamos os registros de áudio e vídeo (A/V) coletados durante os experimentos através do Meet e também de um software chamado: “IFun Screen Recorder” gratuito obtido pela internet.

Por meio de uma visão panorâmica dos registros (A/V) das atividades dos experimentos, foi possível verificar que a teoria de Rabardel teve um impacto positivo na aprendizagem dos estudantes, pois melhorou as transformações de Conversão e Tratamento e segundo Durval (2009), a aprendizagem do estudante depende de ambas transformações de representações semióticas disponibilizadas.

Para que tenhamos a percepção de êxito na aprendizagem dos estudantes por meio de seus registros (A/V), faremos essa análise mediante o nosso modelo proposto inicialmente, em que consideramos as seguintes relações em dois sentidos (ida e volta): Sujeito e Instrumento [S-I] e Instrumento e Objeto [I-O], que podemos dizer que são relações diretas, e a interação Sujeito – Objeto, mediada pelo Instrumento [S-(I)-O], considerada como uma relação indireta. Temos também, Rabardel (1995) que considera a utilização da relação [S-I] sendo um processo de

instrumentalização da Gêneses instrumental e as relações [I-O] e [S-(I)-O] para o processo de instrumentalização.

12.2.4.1 – Sujeito e instrumento

Nestes experimentos utilizamos a interação [S-I] para investigar sobre o manuseio do software geogebra (I) pelos estudantes (S). Assim, tomando por base os pressupostos da Análise Instrumental de Rabardel (1995) investigaremos com esta relação o processo de instrumentação da Gênese Instrumental que poderá ocorrer entre os estudantes e o geogebra.

De acordo com a teoria da instrumentação consideramos as interações do modelo SAI que possibilitarão investigar elementos nas ações dos estudantes que sinalizem a presença da gênese instrumental ao longo da execução das duas atividades propostas no contexto geogebra.

Foram três experimentos, denominados experimento 1 – E1 (Exp1), experimento 2 (Exp2) e experimento 3 (Exp3). Cada experimento fora dividido em três encontros e foi possível perceber, no início, no primeiro encontro de cada experimento a dificuldade de todos os estudantes em relação ao manuseio do software geogebra. Verificamos ao longo do processo (três encontros) que, conforme cada estudante se apropriava e interagiu com o geogebra, os estudantes aos poucos melhoravam ambas transformações de tratamento e de conversão em seus registros (A/V).

Para demonstrar a evolução da aprendizagem de um modo geral dos estudantes, faremos a amostra de alguns registros (A/V) utilizados por cada estudante durante os encontros e de suas respectivas atividades. Adotaremos a aleatoriedade como metodologia de escolha dos estudantes cujos registros (A/V) serão analisados.

Os registros (A/V) mostrado nas figuras 78 do E1, consideramos a transformação tratamento a linguagem algébrica e a transformação conversão a linguagem escrita, sendo essa última feita para registrar a regra prática que foi proposta a ser descoberta na atividade.

Questão: 1ª questão da primeira atividade que diz: “Para tempos iguais a 7, 9 e 12 teremos quais quantidades de células correspondentes?”. Dessa forma tivemos na figura 78 a representação do item a. O Pesquisador perguntou:

Figura 411 - Primeira questão Item a



Fonte: próprio do autor

Pesquisador – Para $x = 7$, o valor de $f(x) = 2^x$, o valor de $f(x)$ é?

E1 - É 128.

Pesquisador - Para $x = 9$, o valor de $f(x) = 2^x$, o valor de $f(x)$ é?

E1 – É 512.

Para $x = 12$, o valor de $f(x) = 2^x$, o valor de $f(x)$ é?

E1 – É 4096.

A minha impressão foi que no final da resolução do item “a” o estudante compreendeu a transposição da parte algébrica para a parte gráfica, que em relação a teoria de Rabadel aconteceu o que dizemos de convecção.

Ainda com o E1, temos na figura 83 a resolução algébrica da inequação $2^x > 4$.

Figura 412- Resolução Algébrica

$$\begin{aligned}
 f(x) &= y \\
 f(x) &= 2^x \\
 y &= 2^x \\
 2^x &> 4 \\
 y &> 4 \\
 2^x &> 4 \\
 2^x &> 2^2 \\
 x &> 2
 \end{aligned}$$

Fonte: próprio do autor

Fiz durante a realização algébrica da inequação $2^x > 4$ para o E1 algumas perguntas do tipo:

Pesquisador – você sabe que $f(x)$ pode ser também ser chamado de y ?

E1 – Sim.

Pesquisador – Se $f(x) = 2^x$ então eu posso afirmar que $2^x = y$?

E1 – posso.

Pesquisador – Mas $y > 4$, então $2^x > 4$, certo?

E1 – Certo.

Pesquisador – Posso fatorar o 4, já fizemos isso, correto?

E1 – Sim e é $(2,2)$.

Pesquisador – Muito bem! Dessa forma podemos fazer isso: $2^x > 2^2$?

E1 – Sim.

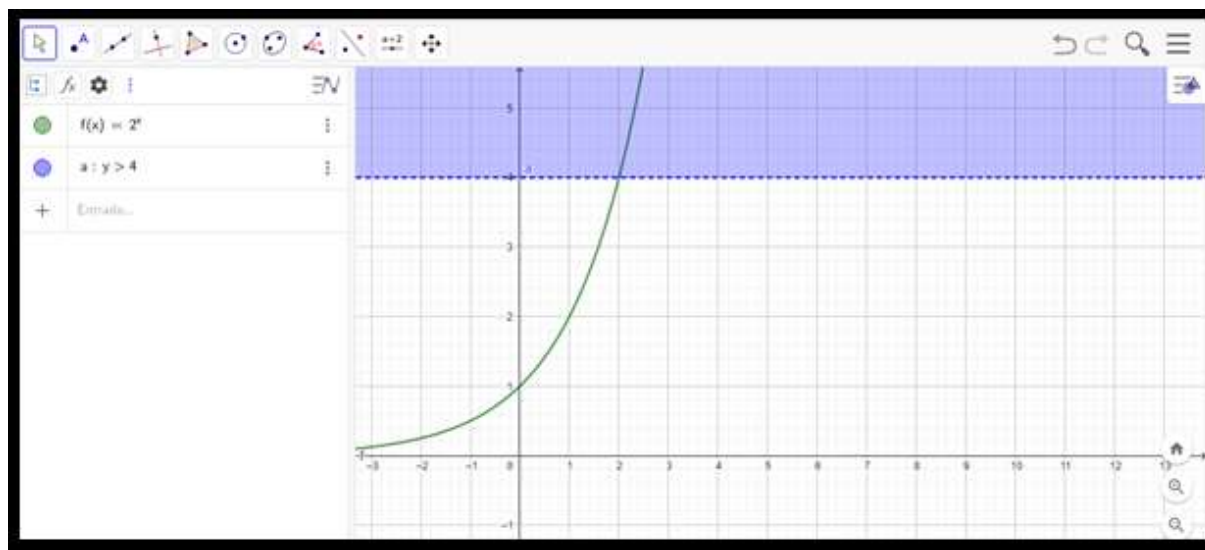
Pesquisador – Propriedade da potenciação, bases iguais, expoentes iguais, certo?

E1 – Correto.

Percebe-se que o tratamento realizado no word foi convertido no gráfico, por conversão na figura 84.

Depois da parte algébrica fomos para o geogebra demonstrar graficamente, a solução da inequação $2^x > 4$. Pedi para o E1 digitasse em “entrada” no geogebra a a função $f(x) = 2^x$, depois a expressão $y > 4$ e desse enter. (Figura 84).

Figura 413 - Demonstração gráfica



Fonte: próprio do autor

Depois o Pesquisador perguntou:

Pesquisador – Qual o valor de x do domínio que corresponde a imagem $y = 4$?

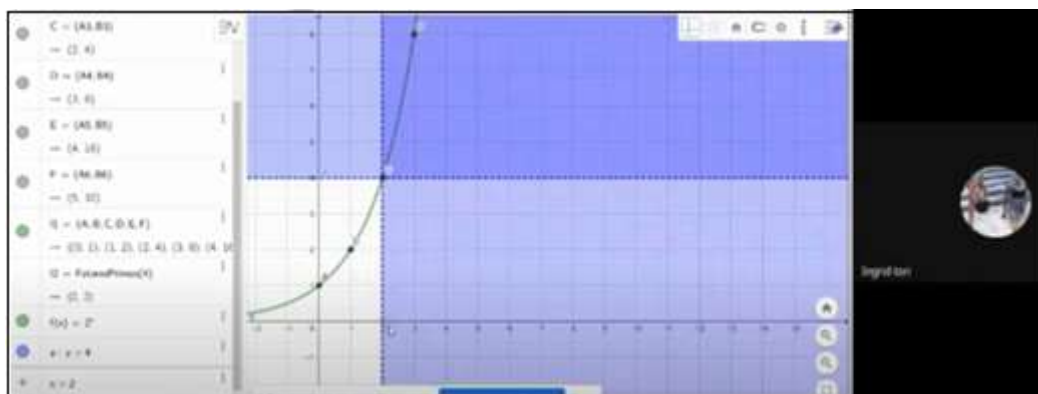
E1 – É dois.

Pesquisador – Você acha que a solução da inequação $2^x > 4$ são os números maiores que dois ou menores que dois?

E1 – maiores.

Depois o Pesquisador pede para o E1 digitar $x > 2$ em entrada do geogebra e observar o que aconteceu. (Figura 85). O Pesquisador disse:

Figura 414 - Solução da Inequação



Fonte: próprio do autor

Pesquisador – O que aconteceu ao digitar $x > 2$?

E1 – Ficou pintado para $x > 2$ e pintado duas vezes na interseção das cores.

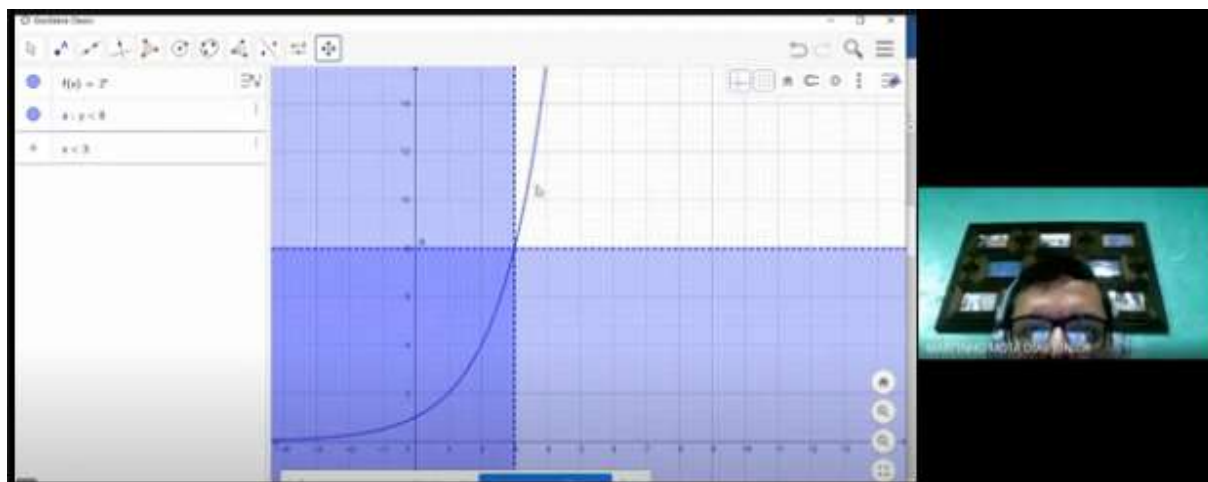
Pesquisador – Observe que tem gráfico na interseção das cores, o que significa isso?

E1 – Significa que é a solução da inequação $2^x > 4$.

Verificamos um indício de aprendizagem quando o E1 respondeu com firmeza em sua resposta.

Para o E2 tivemos um indício de aprendizagem no momento que ele respondeu a pergunta a seguir em relação a figura 225.

Qual a solução da inequação?

Figura 415 resposta: $x < 3$ 

Fonte: Própria do Autor

E2 – Acho que aceitei! Tem gráfico da função $2^x < 8$ na área pintada duas vezes.

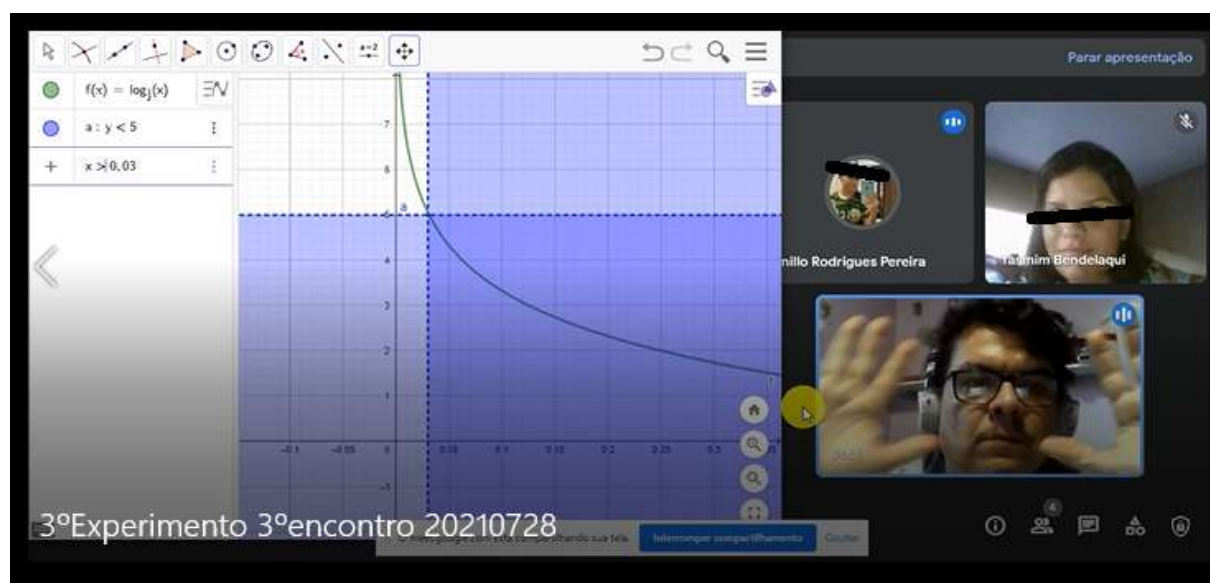
Pesquisador – Muito bem! É isso mesmo.

Neste caso, apesar de responder “eu acho” na verdade é uma força de expressão do E2, e acredito que o estudante depois de outros exemplos realizados respondeu corretamente observando o gráfico do geogebra.

Para o experimento 3 houve indício de aprendizagem quando os estudantes responderam corretamente a questão do pesquisador.

Pesquisador – A resposta correta é $x > 5$, pois a função $f(x) = \log_{1/2} x$ é decrescente. Vamos observar o resultado na parte gráfica do geogebra. (Figura 409).

Figura 416 - Parte pintada duas vezes, é solução da inequação.



Fonte: Própria do Autor

E3 – Ficou pintada duas vezes a parte do gráfico.

E4 – Verdade, por isso que é a resposta correta.

E5 – Isso.

Professor – Verdade, pelo fato que do gráfico da função $f(x) = \log_{1/2} x$ está na parte pintada duas vezes, isso garante que ele seja a resposta correta.

12.2.4.2 – Instrumento e Objeto

Nesta relação Instrumento – Objeto devemos identificar as interações entre o geogebra e o estudo inequação logaritmica (Objeto), isto é, a relação [I-O].

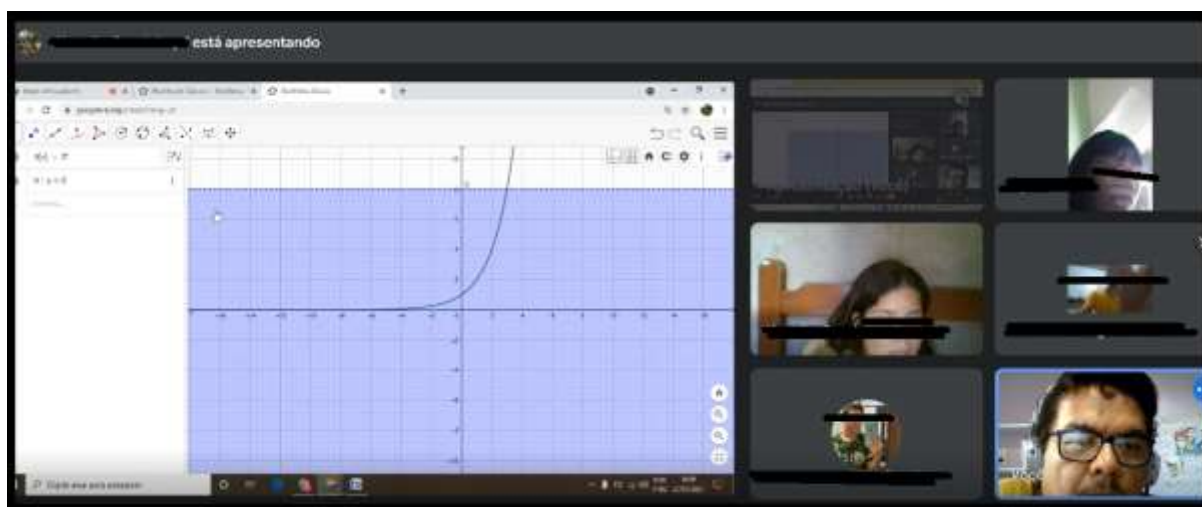
Para o estudante houve uma consideravel aprendizagem na utilização do software geogebra na construção de um objeto de aprendizagem sobre inequação logaritmica. No começo dos experimentos, nos primeiros encontros, percebemos uma certa dificuldade de manuseiar o software, porém com o passar do tempo e manipulando o software constatamos que os estudantes já estavam familiarizados com o software geogebra.

Dessa forma, a interação entre o software geogebra (I) e o assunto inequação logaritmica (O) em nossos três experimentos contribuíram para uma melhor abordagem no ensino de Inequação Logaritmica, onde tal abordagem foi feita e apresentada de forma coerente durante todo o nosso experimento.

Os estudantes envolvidos estavam sempre motivados, bastante interessados na realização das atividades propostas e a relação sujeito – instrumento – objeto [S-(I)-O] ficou evidente na aprendizagem dos estudantes através da participação do pesquisador, orientando quando necessário no desenvolvimento das atividades. Segundo Durval (2009), são os meios dependentes pelos quais é possível verificar a aprendizagem.

No experimento 3 temos a participação sincrona de três estudantes e um deles compartilhou a sua tela, mostrando que houve um índice de aprendizagem pois respondeu corretamente a questão do pesquisador a seguir:

Pesquisador - Muito semelhante a questão anterior, digite em entrada $y < 8$ e o que acontece com o gráfico da função no geogebra? (Figura 360).

Figura 417 - $y < 8$ 

Fonte: Própria do Autor

E3. Fica assim.

E4. Fica pintado na parte de baixo do 8.

E5. São os menores que 8.

Pesquisador – Perfeito. É isso mesmo.

12.2.4.3 – Sujeito e Objeto

As relações diretas [S-I] e [I-O] apresentam de certa forma o resultado da relação [S-I-O] evidenciada durante todos os experimentos caracterizando dessa maneira a relação [S-O] de uma forma indireta.

Assim podemos concluir que as relações diretas S-I e I-O e a relação indireta S-O mediada pela relação S-I-O provocam a aprendizagem esperada do sujeito, já que, de um modo qualitativo, o sujeito conseguiu descrever o objeto nos registros (A/V) por meio de duas transformações diferentes, ou seja, o tratamento e a conversão em todo o experimento realizado.

Os resultados obtidos em nossa análise são similares aos que encontramos nas dissertações de Araújo (2000); Beltrão (2010) e Clara (2007) no que diz respeito a solução das inequações.

Então, o Pesquisador diz ao E1 que a resposta da inequação $\log_2 x > 3$, os valores de x , não é $x = 8$, que só pode ser ou maior ou menor que oito.

Pesquisador – Qual seria a resposta pra voce? Maior ou menor?

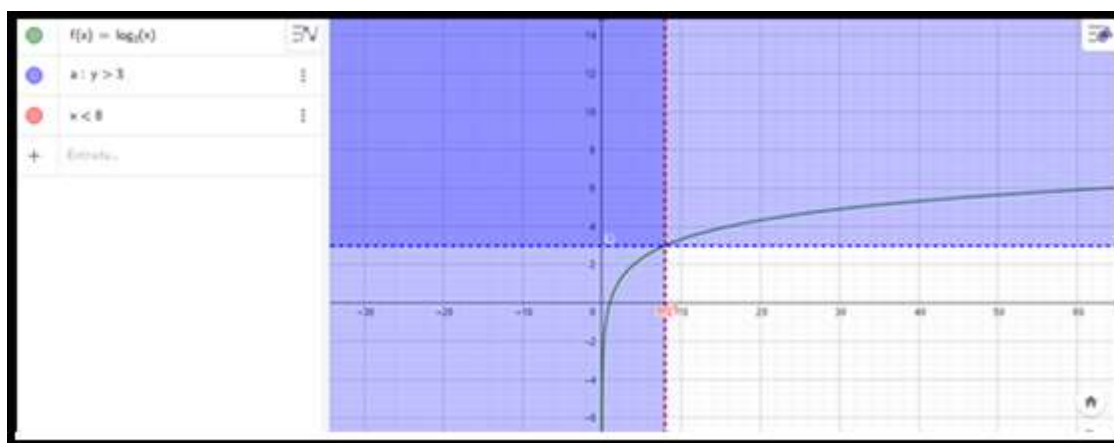
E1 – Menor

Pesquisador – Menor?

E1 – Sim

Pesquisador – Então, vamos colocar x menor que oito. (Figura 130). O que aconteceu? Estais vendo aí?

Figura 418 Para $x < 8$



Fonte: Próprio do autor

E1 – Sim.

Pesquisador – Observe que a parte pintada duas vezes não possui gráfico (azul mais forte), ok? Eu te pergunto tem gráfico aqui?

E1 – Não

Pesquisador – Então não é resposta.

E1 – Então é maior.

O pesquisador fez com que o estudante percebesse o seu erro e com isso ratificasse logo em seguida a solução correta.

12.2.5 – Análise Geral

Realizamos uma análise nas relações de interação do sujeito (estudante), com o artefato (S – I), (ida e volta), sujeito com objeto (ida e volta) intermediado pelo instrumento (S – I – O). Verificando dessa forma os processos envolvidos na

transformação do artefato em instrumento, que de acordo com a teoria de Rabardel (1995) chama-se gênese instrumental.

Nos registros dos estudantes (áudios e vídeos), observamos segundo a teoria das representações semióticas de Duval I(2009), afim de verificar se houve uma conversão entre diferentes linguagens ou mesmo da própria representação, com a intensão de constatar a aprendizagem ocorrida. Levando em consideração que a conversão acontece na transformação de representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse objeto, situação ou informação em um outro registro (Durval, 2009, p58).

Percebemos que após aplicarmos nossa sequência didática houve uma mudança de comportamento dos estudantes (sujeito) em relação ao objeto de estudo (inequação logarítmica), em um primeiro momento os estudantes tinham aversão ao objeto somente em escutar o seu nome, após utilizar o software geogebra que anteriormente era um artefato para os estudantes passou a ser um instrumento de ensino de sua aprendizagem. As atividades 1 e 2 que antes só eram vista de forma algébrica, agora já podem ser vista de uma outra forma. (gráfica). E as análises das soluções das inequações exponenciais ou logarítmicas que eram vistas de uma forma estática agora passam a ser vistas de uma forma dinâmica, através do instrumento geogebra, compreendendo o sentido que uma função exponencial ou logarítmica se pode ser: crescente ou decrescente. Os estudantes perceberam o por quê quando em uma inequação logarítmica se repete o sinal gráfico de maior ou menor, dependendo de sua base do logaritmo, na solução da inequação logarítmica.

13 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com os resultados obtidos na resolução das atividades de inequação logarítmicas (I.L) podemos chegar a algumas conclusões e apresentar para os próximos experimentos sugestões que possam contribuir a melhorar o ensino aprendizagem de inequações logarítmica.

O objetivo principal citado no início desta dissertação: foi estudar por meio da Gênese Instrumental o ensino de Inequação Logarítmica utilizando-se como instrumento o Geogebra sob a ótica de Pierre Rabardel e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Durval no intuito de se obter uma eficácia do ensino proposto de uma sequência didática, a este objetivo foi alcançado com êxito, comprovado através dos registros de áudios e vídeos.

E, de acordo com as perguntas investigativas da dissertação: “De que maneira ocorre a Gênese Instrumental no ensino de Inequação Logarítmica usando o Geogebra em estudantes do 1º ano do ensino médio? E uma sequência didática para o ensino de inequações logarítmicas, com auxílio do aplicativo Geogebra potencializa a aprendizagem deste assunto?” foram respondidas perfeitamente através dos resultados obtidos na sequência didática.

Os resultados apontam a eficiência e eficácia o uso deste software chamado geogebra potencializando o ensino e aprendizagem dos estudantes e através do produto educacional esperasse contribuir aos professores de um modo satisfatório, fortalecer e consolidar uma aprendizagem significativa.

Propomos aos estudantes uma forma diferenciada no que tange a aprendizagem, acostumados de verem os assuntos abordados por seus professores de uma maneira “tradicional”, na forma algébrica, com pouco recurso visual e as vezes, raramente com o uso de algum software. Aqui, puderam correlacionar a forma algébrica com a gráfica de maneira dinâmica, através do uso de um software gratuito (Geogebra). Além disso, puderam observar as propriedades e a construção do gráfico, as soluções da equação e inequação logarítmica, usando cores para mostrar suas soluções.

Usamos a teoria de Instrumentação de Rabardel, por apresentar uma forma mais eficaz da análise e coleta dos dados, utilizando para isso o meet em que foram coletados os áudios e vídeos do experimento. E, através do modelo SAI pudemos observar os diferentes esquemas, as relações entre o sujeito, instrumento e o objeto, os tratamentos e convenções que foram necessários para os estudantes fazerem suas representações do objeto matemático (inequação logarítmica), transformando os artefatos (software) em instrumentos.

Esperamos que esse experimento ajude não somente ao professor em administrar sua aula de uma maneira diferenciada, sofisticada e atualizada, mas também aos estudantes que não puderam ter até o momento (2021) uma aula utilizando um software e dando a oportunidade para esse estudante de compreender a resolução e a solução de inequações logarítmicas.

Todas as solicitações dos professores que participaram deste experimento foram acatadas e para quem for utilizar esse experimento a sugestão que deixo é que utilize, a priori, atividades fáceis (bastantes) até a total assimilação e só depois aplicar outras atividades com um certo grau de dificuldade.

Também, como mais uma sugestão digo que esse experimento pode ser estendido não apenas para os logaritmos, mas sim para todas as funções. Pudemos observar durante o experimento que utilizamos a priori a função exponencial para enfim chegamos nos logaritmos. Então, cabe perfeitamente para outras funções do tipo: função do primeiro grau, segundo grau, função modular, etc... sendo que necessariamente devemos fazer suas devidas adequações com certeza.

E, aproveitando o ensejo digo que nós professores de todas as áreas (matemática, português, química, etc...) devemos utilizar mais o espaço do laboratório de informática ou sala de informática das escolas. Em nosso caso, devemos estudar o software geogebra (e outros semelhantes) pois tem muito mais coisas que podemos aprender e ensinar para os nossos estudantes.

REFERENCIAS

- ALENCAR, Sergio Vicente; ***A Gênese Instrumental na Interação com o Geogebra: Proposta de uma Oficina para professores de Matemática***, Mestrado Profissional em Ensino da Matemática – São Paulo, 2012.
- ALVARENGA, Karly Barbosa; ***O que dizem as pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de inequações***, Doutorado em Educação Matemática – São Paulo, 2013.
- ARAUJO, Elpidio de; ***A Concepção de um Software de Matemática para Auxiliar na Aprendizagem dos Alunos da Primeira Série do Ensino Médio no Estudo das Funções Exponenciais e Logarítmicas***. 2005. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontífica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- ARTIGUE, M..***Learning Mathematics in a CAS environment: The Genesis of a Reflection about instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Word***. International Journal of Computers for Mathematical Learning 7.P.245-27. Netherlands. 2002.
- _____, DOUARDY, R., MORENO, L..***Ingenleria Didáctica en Educación Matemática***. Grupo editorial Iberoamérica. Colômbia. 1995.
- _____, Teacher training as a key issue for the integration of computer technologies, In: Information and communications technologies in school mathematics, Ed D. Tinsley and D. C. Johnson IFIP 98, Chapman and Hall, 1998, pp. 121-129.
- _____; LAGRANDE, J-B. Instrumentation et écologie didactique de calculatrices complexes: éléments d'analyse a partir d'une expérimentation en classe de Première S. In: CONGRESS DES CALCULATRICES SYMBOLIQUES ET GEOMETRIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES, Atas... Montpellier, IREM de Montpellier, 1999, p. 15-38.
- ÁVILA, G.S.S, ***Várias faces da matemática***. São Paulo: Blucher, 2007.
- BELTRÃO, Rinaldo César. ***Dificuldades dos Alunos para Resolver Problemas com Inequações***; Florianópolis, 2010.
- BITTAR, M. ***A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do Pesquisador de matemática***. Educar em Revista (Impresso). Curitiba: Editora UFPR, v. 1, pp. 157 – 171, 2011.
- _____; Marilena. ***Uma proposta para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica de professores de matemática***. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática/INMA - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS. EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – vol. 6 - número 3 – 2015.
- ***Biografia de Leonard Euler***. Disponível em < https://www.ebiografia.com/leonhard_euler > Acesso em: 07 Fev 2020.

- BORBA, M. C.; PENTEADO M. G. **Informática e educação matemática** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 8. ed. São Paulo: Edusp, 1974. 488 p.
- BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto/Secretária de Educação fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática**. Brasília:MEC/SEF, 1998.
- CLARA, Margarete da Silva Hungria Castro, **Resolução de inequações logarítmicas: um olhar sobre a produção de alunos**. 2007. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Centro de Ciências Exatas e tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- CHAQUIAM, M. **Ensaio Temático: História e Matemática em Sala de Aula** / Miguel Chaquiam. Belém:SBEM/SBEM-PA, 2017.
- COSTA, M.J. **Vizualização e mudança de quadros numa perspectiva construtiva: uma contribuição para o estudo das inequações**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Pedagógica: Mocambique, 1998.
- COURANT, R. ROBBINS, H. **O que é matemática?** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.
- DA SILVA, José Carlos Teixeira; **Tecnologia: novas abordagens, conceitos, dimensões e gestão**; Prod. vol.13 no.1 São Paulo 2003; disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0103-65132003000100005>
- DA ROCHA FALCÃO, Jorge Tarcísio. – **A Álgebra como Ferramenta de Representação e Resolução de Problemas**, em SCHLIEMANN, A. D. E outros, Estudos em Psicologia da Educação Matemática, p.85-107, ed. UFPE, Recife, 1993.
- D'AMORE, Bruno. **Elementos de didática da matemática**. Tradução: Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007. 452p.
- DINIZ, Girlene Firmina. **Um estudo sobre exponenciais e logaritmos e aplicações** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2018.
- DURVAL, R., Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática **In: Aprendizagem em matemática: registro de representação semiótica**. 1 ed.Campinas: Papirus, 2003, v.1, p.11-33.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Traduzido de Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004. p. 340-381.
- FLEURY, A. C. C. **Organização do trabalho industrial: um confronto entre teoria e realidade**. São Paulo, 1978. Tese (Doutorado), Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- GRAVINA, M. A. **Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria**. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7., 1996, Belo Horizonte. Anais... Belo Horizonte: SBC, 1996. p. 1-13. CD-ROM

- ***Invenção da Imprensa***. Disponível em <<https://brasilecola.uol.com.br/historiag/invencao-imprensa.htm>>. Acesso em: 12 Fev 2020.
- KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação**. 5. ed. Campinas: Papirus, 2009.
- Lopes, Maria Maroni **Sequência didática para o ensino de trigonometria usando o software GeoGebra**. Bolema: Boletim de Educação Matemática [online]. 2013, v. 27, n. 46 [Acessado 5 Junho 2021] , pp. 631-644. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000300019>>. Epub 13 Jan 2014. ISSN 1980-4415. <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000300019>.
- LONGO, W. P. **Tecnologia e soberania nacional**. São Paulo: Ed. Nobel, 1984.
- MAGALHÃES, Adil Ferreira; **Estudo das Inequações: Contribuições para a Formação do Pesquisador de Matemática na Licenciatura**, UFOP – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2013.
- MARILENA Bittar, **A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do Pesquisador de matemática**. Data da pesquisa: 16/08/2019.
- MELO, M. **O ensino de desigualdades e inequações em um curso de licenciatura em matemática**. Dissertação de Mestrado. Pontífica Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2007.
- MISKULIN, R. G. S. **As possibilidades didático-pedagógicas de ambientes computacionais na formação colaborativa de Pesquisadores de matemática**. In: FIORENTINI, D. (Org.). **Formação de Pesquisadores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares**. Campinas: Mercado de letras, 2008. p. 217-248.
- NICAUD, J. F.; BITTAR, M.; CHAACHOUA, H.; INAMDAR, P.; MAFFEI, L. **Experiments of Aplusix in four countries**. International Journal for Technology in Mathematics Education. v. 13, n. 2, 6, 2006.
- OLIVEIRA, Michelle Noberta Araújo de. **Análise da contextualização da função exponencial e da função logarítmica nos livros didáticos do ensino médio** /Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, 2014.
- PIMENTA, S.G. **Pesquisa-ação crítico-colaborativa: construindo seu significado a partir de experiências com a formação docente**. Educação e Pesquisa, v. 31, n. 3, p.521-539, 2005.
- POLYA, G. **A arte de resolver problema**. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Segunda reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
- SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do Professor: Matemática. Ensino Médio** 1ª série. São Paulo: SEE, 2009a. V. 3.
- SALDANHA, Maria Sueli Gomes. **Análise de uma intervenção didática sobre desigualdades e inequações logarítmicas no ensino médio**. 2007. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontífica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

- SOARES, E. C. ***A difusão dos logaritmos no século XVII***. REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura / Universidade Federal do Rio Grande do Norte. – Ano 1 n. 1 (jul./nov. 2008). – Natal, RN: EDURFN – editora da UFRN, 2006.
- _____. ***Uma investigação sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula***. Dissertação (Mestrado Profissionalizante) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.
- SOUSA, Rainer Gonçalves. ***"Renascimento"***; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/historiag/renascimento.htm>. Acesso em 10 de fevereiro de 2020.
- _____, Joamir Roberto de, ***Novo Olhar matemática*** /Joamir Roberto de Souza, 1ª Ed. São Paulo: FTD, 2010. (Coleção Novo olhar; v. 1)
- SCHEFFER, N. F. ***Corpo tecnologias matemática: uma interação possível no ensino fundamental***. Erechim: Edifapes, 2002.
- RABADEL, P.. ***Les hommes et les Technologies: approche cognitive des instruments contemporains***. Paris. Armand Colin. 1995.
- _____. ***Los Hombres y las Tecnologías: visión cognitiva de los instrumentos cognitivos***. Tradución de Martin Acosta Gempeler. Universidade Industrial de Santander. Escuela de Matemáticas. Colômbia. 2011.
- _____. ***Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques***. In: BAILLEUL, M.(Ed). Actes de la Xème Ecole d'Été en Didactiques des Mathématiques. Houlgate: IUFM de Caen, 1999.p. 202-213.
- VALENTE, J. A. (Org.). ***O computador na sociedade do conhecimento*** Campinas: UNICAMP/NIED, 1999.
- Zandonadi, Ednilson Carlos. ***Aplicação do software GeoGebra no ensino de funções exponenciais e logarítmicas***. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática – Londrina, 2013.
- ZULATTO, R. B. A. ***Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica: suas características e perspectivas***. 2002. 184f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.
- WARDE, M.J.;CARVALHO,M.M.C. de. ***Política e cultura na produção da história da educação no Brasil***. Contemporaneidade e Educação, n.7, p.9-33,2000.
- XAVIER NETO; M.J.F. Silva, ***A Gênese Instrumental do artefato simbólico função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas em um ambiente não digital***, Revista Iberoamericana de educación matemática – Union, Número 51- Diciembre 2017 – Página 107.



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem