Ministério da Educação – MEC
Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal
de Nível Superior – CAPES
Diretoria de Educação a Distância – DED
Universidade Aberta do Brasil – UAB
Programa Nacional de Formação
em Administração Pública – PNAP
Bacharelado em Administração Pública

BACHARELADO EM ADMINISTRAÇÃO PÚBLICA

Matemática para Administradores

Maria Teresa Menezes Freitas

2021

Profa. Maria Teresa Menezes Freitas

Graduada em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia – UFU (1974), especialista em Matemática Superior pela UFU em parceria com a Universidade Federal de Minas Gerais (1982), mestre em Educação pela UFU (2000) e doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (2006). Atualmente é professora associada 4 da UFU, da Faculdade de Matemática, diretora do Centro de Educação a Distância da UFU, e representante da Universidade Aberta do Brasil – UAB. Tem experiência na área de Educação com ênfase em Educação Matemática. Atua principalmente nos seguintes temas: Formação dle Professor de Matemática, Educação Matemática, Professor de Matemática, Escrita na Formação do Professor e Desenvolvimento Profissional.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

F866m Freitas, Maria Teresa Menezes

Matemática para administradores / Maria Teresa Menezes Freitas. – 3. ed. rev. Ampl. – Florianópolis : Departamento de Ciências da Administração / UFSC; [Brasília]: CAPES: UAB, 2014.

143 p.: il.

Inclui bibliografia

Bacharelado em Administração Pública

ISBN: 978-85-7988-212-8

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Teoria dos conjuntos. 3. Matrizes (Matemática). 4. Sistemas lineares. 5. Cálculo diferencial. 6. Educação a distância. I. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Brasil). II. Universidade Aberta do Brasil. III. Título.

CDU: 51-77:65

Catalogação na publicação por: Onélia Silva Guimarães CRB-14/071

PRESIDÊNCIA DA REPÚBLICA

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR | CAPES

DIRETORIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

DESENVOLVIMENTO DE RECURSOS DIDÁTICOS
Universidade de Pernambuco | UPE

AUTOR DO CONTEÚDO
Maria Teresa Menezes Freitas

EQUIPE TÉCNICA – UPE | NEAD

COORDENAÇÃO DO NEAD - UPE
Renato Medeiros de Moraes

COORDENAÇÃO DO PROJETO
Roberto Luiz Alves Torres

PROJETO GRÁFICO
José Marcos Leite Barros

EDITORAÇÃO
Anita Maria de Sousa
Aldo Barros e Silva Filho
Enifrance Vieira da Silva
Danilo Catão de Lucena

REVISÃO TEXTUAL
Maria Tereza Lapa Maymone de Barros
Geruza Viana da Silva

CAPA
José Marcos Leite Barros

PNAP
PROGRAMA NACIONAL
DE FORMAÇÃO EM
ADMINISTRAÇÃO PÚBLICA

SUMÁRIO

MATEMÁTICA PARA ADMINISTRADORES

Profa. Maria Teresa Menezes Freitas

Apresentação da Disciplina

Prezado futuro administrador público, saudações!

É com imensa satisfação que convidamos você a participar de uma aventura muito interessante. Trata-se de uma viagem formativa em que, juntos, desbravaremos os conhecimentos matemáticos imprescindíveis para o administrador. Para tanto, contamos com seu envolvimento para desfrutar de todos os momentos dessa jornada com prazer, divertimento e curiosidade.

Veja que essa "viagem" que você está prestes a iniciar tem um diferencial, pois este curso é desenvolvido na modalidade a distância. Trata-se de uma aventura, pois estaremos em uma constante busca de caminhos que nos levem a ficarmos bem próximos. Assim, nas páginas seguintes procuraremos utilizar uma linguagem adequada que nos aproxime e que busque estabelecer um diálogo constante para garantir a interação, de fato, que tanto almejamos.

Entusiasme-se e sinta-se predisposto para compreender ideias e conceitos que, muitas vezes, julgava ser de difícil compreensão. Nossa intenção aqui é tornarmos acessível a você a noção de conceitos matemáticos imprescindíveis para lidar da melhor forma com os desafios da profissão de Administrador.

Durante esta viagem, faremos algumas paradas para apreciarmos diferentes paisagens e observarmos detalhes de conceitos matemáticos que desvelarão caminhos para o melhor desempenho na Administração Pública. Em um primeiro momento, recuperaremos conceitos da Teoria dos Conjuntos e, em seguida, conheceremos as Matrizes e os Sistemas Lineares. Nossa próxima parada nos oferecerá as Funções como paisagem de fundo. Na sequência, conheceremos os Limites e os detalhes de Funções Contínuas. Por último, nossos caminhos nos levarão à compreensão do conceito de Derivada de funções e sua aplicabilidade na Administração. Uma breve noção sobre integral também será apresentada.

Sempre que necessário, revisaremos conteúdos anteriormente estudados e, aos poucos e sem perceber, você estará compreendendo alguns conceitos de Cálculo Diferencial, essenciais para resolver problemas administrativos.

Temos certeza de que você já está animado e até "preparando a máquina fotográfica e arrumando as malas" para iniciarmos nossa viagem. Vale lembrarmos o quão importante será você estar com caderno, lápis e caneta à mão para anotar, registrar e resolver os problemas que aparecerão em nosso caminho. O computador também será de grande valia nessa empreitada.

Antes de darmos início ao primeiro Capítulo vamos recomendar a elaboração de um **Glossário** a ser produzido paulatinamente ao longo de todo o desenvolvimento da disciplina. O glossário pode ser elaborado de forma que seja uma atividade assíncrona que permita aos estudantes inserirem termos considerados relevantes para a compreensão de determinados temas do conteúdo em estudo. Para tornar o processo de ensino e aprendizagem mais interativo, o professor poderá sugerir termos para compor o glossário ou definir os critérios para a eleição de outros termos relevantes. Os participantes também podem visualizar os termos já existentes (apresentados pelo tutor/professor/colega) e inserir comentários sobre eles. Fazendo uma analogia, o glossário assemelha-se a um dicionário, com termos e conceituações/definições.

Verifique se será possível a elaboração da atividade Glossário no ambiente virtual de aprendizagem. Verifique também com seu tutor se a ferramenta Glossário foi disponibilizada no ambiente do curso e participe da compilação de um glossário de termos relacionados ao componente curricular *Matemática para Administradores*. Será divertido!

A seguir, apresentamos uma lista, contendo alguns termos relacionados a esse componente curricular para que você selecione, pelo menos, um e busque uma definição para ele. Claro que você pode e deve apresentar outros termos que não estão na listagem, mas que você acredita serem essenciais para a aprendizagem. Fique à vontade para consultar o seu tutor sobre a pertinência em acrescentar algum termo e usufrua desta proposta.

- Abscissa de um ponto no plano;
- Conjunto;
- Constante;
- Continuidade;
- Denominador;
- Diagonal principal de uma matriz;
- Discriminante;
- Domínio de uma função;
- Equação;
- Expoente;
- Função crescente;
- Imagem de uma função;
- Logaritmo; e
- Matriz.

Contamos com você. Sucesso a todos!

Professora Maria Teresa Menezes Freitas

CAPÍTULO I

RECUPERANDO CONCEITOS

Profa. Maria Teresa Menezes Freitas

Objetivos Específicos de Aprendizagem

Ao finalizar este Capítulo, você deverá ser capaz de:

- Utilizar a nomenclatura e a simbologia da teoria dos conjuntos em situações que envolvam contextos administrativos;
- Reconhecer e exemplificar diferentes conjuntos;
- Solucionar problemas que envolvam conjuntos e suas operações; e
- Identificar os conjuntos numéricos e utilizá-los adequadamente em situações-problemas.

Recuperando Conceitos: Conjunto, suas Simbologias e Notações

Caro estudante,
Neste Capítulo vamos relembrar a Teoria dos Conjuntos. Como já tivemos algumas noções sobre seu conteúdo na disciplina Matemática Básica, agora vamos entender como aplicá-la no contexto administrativo. Pronto para começar? Então, mãos à obra!

Inicialmente abordaremos e/ou reveremos um conceito de Matemática importante para o desenvolvimento de quase todo o conteúdo que se seguirá. Trata-se da ideia de conjunto e suas respectivas simbologias e notações associadas. Essas formas e símbolos especiais que utilizamos para denominar, indicar ou nomear entes matemáticos são necessários para que todos nós possamos nos comunicar bem e com a mesma linguagem.

Conjunto é considerado um conceito primitivo e, assim, para compreendê-lo, não necessitamos de uma definição a partir de outros conceitos matemáticos.

Teoria dos Conjuntos

Para compreendermos o que é conjunto, basta nos remetermos àquela ideia que a linguagem usual nos leva, ou seja, uma coleção ou um agrupamento de quaisquer elementos. Assim, um conjunto poderá ter em sua composição pessoas, objetos, numerais ou qualquer outro elemento ou ideia possível de agrupamento.

Dizemos que um **conjunto está bem definido** quando podemos estabelecer com certeza se um elemento **pertence** ou **não pertence** a ele. Assim, o conjunto dos setores da prefeitura da cidade x com melhor propaganda ou com mais de duas colaboradoras bonitas não caracteriza um conjunto bem definido, pois "melhor propaganda" e "colaboradora bonita" tratam de compreensões que envolvem a subjetividade.

SAIBA MAIS

Trataremos em nosso curso apenas dos conjuntos bem definidos.

Ao utilizar a linguagem de conjuntos e seus elementos, surge a chamada **relação de pertinência**, ou seja, uma vez determinado um conjunto, que normalmente é designado por uma letra latina maiúscula (A; B; C...), um elemento pode ou não pertencer a ele.

Assim, se A é o conjunto dos colaboradores do Hospital Municipal da Cidade Tirolex e Fernando é um colaborador desse órgão público, então dizemos que Fernando **pertence** ao conjunto A e indicamos:

Fernando $\in$ A (Lê-se: Fernando **pertence** ao conjunto A.)

Para o caso de Mauro, que não é um colaborador do Hospital citado, dizemos que Mauro não pertence ao conjunto A e indicamos:

Mauro $\notin$ A (Lê-se: Mauro **não pertence** ao conjunto A.)

Podemos representar um conjunto explicitando seus elementos entre chaves e cada um entre vírgulas. Assim, se o conjunto B é formado pelos números naturais ímpares menores que 10, indicamos:

$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Utilizando a intuição podemos adotar as reticências como símbolo para indicar um conjunto com um número muito grande de elementos ou que tenha uma quantidade sem fim deles. Por exemplo, imagine um dado conjunto C formado pelos números ímpares naturais menores que 100. Podemos então representar o conjunto C como:

$C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, ..., 99\}$

Assim, as reticências indicam os números não citados entre as chaves; e vale lembrar que, ao explicitar o numeral 99 como o último da sequência, isso significa que o conjunto tem um número determinado de elementos.

As reticências são, portanto, utilizadas para indicar elementos não explicitados no conjunto. Alertamos que, para um conjunto com uma quantidade sem fim de componentes, a notação utilizada se mantém, porém não se indica um último elemento após as reticências. Como exemplo para essa situação, tome um conjunto D formado pelos números naturais ímpares.

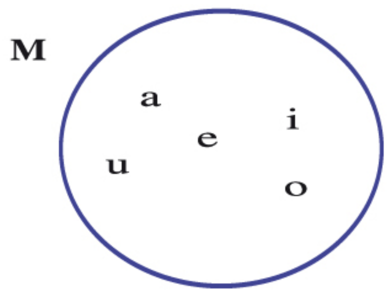
D = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...} (Note: as reticências indicam que os elementos continuam infinitamente).

Poderíamos, então, pensar na seguinte relação entre elemento e c onjunto: $1 \in D$ e $2 \notin D$

Uma maneira simples de representar um conjunto é por meio de uma curva fechada simples (não entrelaçada) conhecida como **Diagrama de Venn**. Observe como é a representação do conjunto das vogais:

- Representação por listagem dos elementos.
  M = {a, e, i, o, u}

- Representação por Diagrama.



SAIBA MAIS

Diagrama de Venn - O Diagrama de Venn foi criado em 1881 pelo filósofo inglês John Venn. A maioria das pessoas pode facilmente reconhecer esse diagrama mesmo sem saber seu nome. Os diagramas se tornaram bem aceitos e conhecidos, e têm se mostrado muito úteis por oferecerem uma representação visual nas situações em que existem relações entre vários grupos ou coisas. Fonte: Eduteka (1997).

Podemos também representar um conjunto explicitando a propriedade de seus elementos. Assim, no conjunto M, a característica de seus elementos é ser vogal e, logo, poderíamos representá-lo com a seguinte notação:

M = {x/x é uma vogal} (Lê-se: x tal que x é uma vogal)

Conjuntos Especiais

Embora a palavra “conjunto” nos leve a pensar em uma coleção de coisas ou objetos, eventualmente a quantidade de elementos pertencentes ao conjunto pode ser apenas um ou, por vezes, o conjunto pode nem ter elemento.

Conjunto com apenas um elemento é denominado Conjunto Unitário e, caso não possua elementos, é denominado Conjunto Vazio.

Pense na situação em que precisamos registrar em cada semana o conjunto P, cujos elementos são os colaboradores que compõem a equipe de trabalhadores da Escola Pública X afastados por licença médica.

Note que almejamos que esse conjunto não possua elemento na maioria das semanas registradas, mas eventualmente ele poderá ter apenas um ou até mais de um elemento.

Para entender melhor, imagine que na primeira semana o colaborador Vagner tenha faltado por motivo de saúde. Logo: $P_1 = \{\text{Vagner}\}$.

Já na segunda semana, suponha que não houve falta de colaborador por motivo de saúde e, assim, o registro ficaria $P_2 = \{\ \}$ ou, ainda, podemos representar como $P_2 = \varnothing$.

Muito bem, acreditamos que a esta altura da nossa conversa, você já esteja familiarizado com a relação de pertinência, isto é, a relação entre elemento e conjunto. Vamos agora relacionar o conjunto com outro conjunto. Fique atento.

Subconjuntos - Relação de Inclusão

Considere o conjunto S formado pelas vogais da palavra “janeiro” e o conjunto K formado pelas vogais do alfabeto. Teremos:

$S = \{a, e, i, o\}$
$K = \{a, e, i, o, u\}$

Veja que todo elemento de S é também elemento de K, ou seja, todo elemento de S pertence também ao conjunto K. Quando essa particularidade ocorre, dizemos que S é um **subconjunto** de K, ou que S é parte de K, e indicamos:

$S \subset K$ (Lê-se: S está contido em K.) ou K É S (Lê-se: K contém S.)

Se introduzíssemos nessa história o conjunto H, composto pelas letras da palavra “firma”, teríamos:

$H = \{f, i, r, m, a\}$

Note que existem elementos do conjunto S que não pertencem ao conjunto H e, assim, S **não está contido** em H; e indicamos:

$S \not\subset H$ (Lê-se: S não está contido em H.)

Poderíamos também pensar que o conjunto H **não contém** o conjunto S e, nesse caso, indicaríamos $H \not\subset S$.

Um conjunto não está contido em outro se existe pelo menos um elemento do primeiro que não seja elemento do segundo.

Geralmente, para o caso em que a inclusão entre dois conjuntos não exista, utilizamos o símbolo Ë (não está contido). Porém, a lógica nos leva a pensar, de um lado, que um conjunto com menor número de elementos **está contido** ou **não está contido** em outro com maior número. Por outro lado, um conjunto com maior número de elementos **contém** ou **não contém** outro com menor número.

Assim, basta ficar atento aos conjuntos que estamos relacionando.

Conjuntos Iguais

Simples, os Conjuntos Iguais fazem referência a dois conjuntos quaisquer, A e B, que são iguais quando têm exatamente os mesmos elementos, ou seja, quando todo elemento de A também pertence a B e vice-versa.

O símbolo utilizado para indicar a igualdade entre dois conjuntos é aquele que já estamos acostumados a usar e, assim, indicamos a **igualdade** entre os conjuntos por $A = B$.

Para o caso em que algum elemento de um deles não for elemento do outro, dizemos que A **é diferente** de B e indicamos $A \neq B$.

Note que se dois conjuntos, M e N, são iguais, isto é, $M = N$, teremos que $M \subset N$ e $N \subset M$. De outra maneira, poderemos dizer que M é subconjunto de N e, ao mesmo tempo, que N é subconjunto de M.

Observações importantes
O conjunto vazio $\varnothing$ é considerado como um subconjunto de qualquer conjunto.
Todo conjunto é subconjunto dele mesmo.
Um conjunto formado por todos os subconjuntos de um dado conjunto A é denominado Conjunto das Partes de A e indicamos por P (A).

Conjunto Universo

É importante estudarmos a procedência dos conjuntos que estamos trabalhando, ou seja, é fundamental conhecermos o conjunto do qual podemos formar vários subconjuntos em estudo.

Esse conjunto, em que todos os outros são subconjuntos dele em um determinado estudo, é denominado **Conjunto Universo**.

Podemos considerar, por exemplo, como Conjunto Universo de um determinado estudo o conjunto formado pelos colaboradores das prefeituras de todas as cidades do Brasil.

Associados a esse conjunto podemos determinar vários outros conjuntos. Você consegue identificá-los?

Simples, pense no conjunto dos colaboradores das prefeituras das cidades do Estado de Minas Gerais ou, ainda, no conjunto dos funcionários das prefeituras das cidades do Estado de São Paulo.

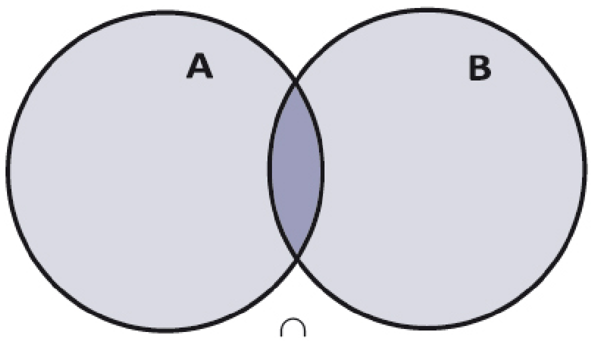
Agora, imagine, por exemplo, que nosso universo seja o conjunto de colaboradores da prefeitura da Cidade x e que façamos parte da equipe da administração. Em nosso banco de dados, podemos listar endereços de colaboradores com diferentes características: menos de 40 anos, sexo feminino, sexo masculino, moradores do mesmo bairro da sede da prefeitura, moradores do bairro vizinho etc.

Nos próximos parágrafos iremos esclarecer a importância da relação lógica que utiliza as palavrinhas "e" e "ou" associadas ao Diagrama de Venn. Esteja atento, pois será de grande importância essa compreensão para vários assuntos que teremos de abordar. Vamos continuar?

Note que alguns dos subconjuntos citados podem se sobrepor ao outro quando utilizamos a representação por **diagramas**. Para entender melhor, imagine que o conjunto A tenha como elementos os colaboradores com menos de 40 anos e o conjunto B tenha como elementos os colaboradores do sexo feminino. Ambos podem ter elementos comuns e, dessa forma, os diagramas terão uma parte sobreposta. A parte sobreposta é denominada de **interseção** dos conjuntos.

SAIBA MAIS

A representação por meio do Diagrama de Venn é feita com círculos (ou uma linha fechada) que representam os conjuntos.

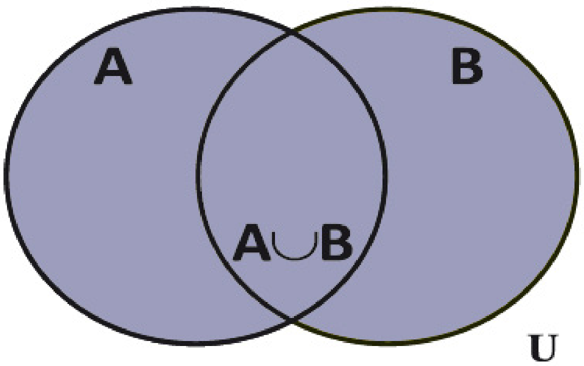


Assim, a interseção dos conjuntos A e B é formada por aqueles elementos que pertencem ao conjunto A **"e"** ao conjunto B simultaneamente. Portanto, o conjunto interseção tem como elementos colaboradores do sexo feminino com menos de 40 anos, ou seja, cada elemento do **conjunto interseção** tem as duas características ao mesmo tempo: menos de 40 anos **"e"** sexo feminino.

A interseção entre dois conjuntos é representada com o símbolo ∩. Dessa forma, a interseção entre os conjuntos A e B é indicada por A ∩ B.

Retomando novamente o banco de dados da prefeitura da cidade X, poderíamos querer listar os colaboradores que tenham idade menor que 40 anos **"ou"** que sejam do sexo feminino. Essa relação lógica expressa com a palavra **"ou"** representa a união entre dois conjuntos e consiste de todos os elementos dos dois conjuntos.

No Diagrama de Venn, a união entre os conjuntos A e B é indicada por A ∪ B. Representamos a união de dois conjuntos sombreando os dois conjuntos. O símbolo È representa união.



Muitas vezes nos referimos à **União** e à **Interseção** como operações entre conjuntos, mas atenção: não somamos ou subtraímos conjuntos como somamos e subtraímos os números. O que podemos fazer é somarmos ou subtrairmos a quantidade de elementos dos conjuntos envolvidos quando necessário.

Diante do que vimos, podemos notar a importância de compreendermos bem os conceitos relacionados à Teoria dos Conjuntos, em especial a representação com o **Diagrama de Venn**, para ilustrarmos os conceitos de União, Interseção e outros.

SAIBA MAIS

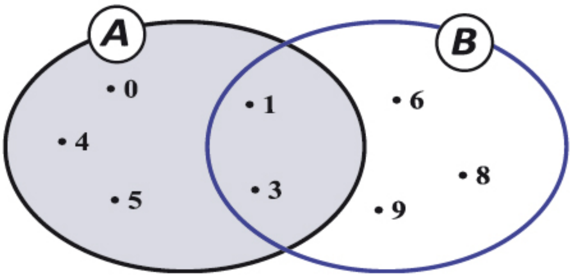
O Diagrama de Venn ajuda a motivar e a esclarecer algumas definições e leis de probabilidade quando o estudo é a Estatística.

Outras Relações entre Conjuntos: diferença e complementar

Denominamos **diferença** entre os conjuntos A e B, indicada por A – B, ao conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B.

Podemos, em símbolos, indicar: $A - B = \{x/x \in A \text{ e } x \notin B\}$. Observe a representação a seguir, em que $A = \{0, 1, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 3, 6, 8, 9\}$:

A – B



Para o caso em que B é um subconjunto de A, ou seja, B está contido em A ($B \subset A$), a diferença é chamada de **complementar de B em relação a A** e pode ser indicada por: C_A^B.

Dessa forma, $C_A^B = A - B$ (sendo $B \subset A$).

ATIVIDADES

Para verificar seu entendimento, faça as atividades a seguir. Essa é uma ótima maneira de você se autoavaliar. Vamos lá?

1. Em uma pesquisa num setor da secretaria municipal, verificou-se que 15 pessoas utilizavam os produtos A ou B, sendo que algumas delas utilizavam A e B, ou seja, ambos. Sabendo que o produto A era utilizado por 12 dessas pessoas e o produto B, por 10 delas, encontre o número de pessoas que utilizavam ambos os produtos.

2. Em um seminário de administradores públicos de certa cidade, foram servidos, entre diversos salgados, enroladinho de queijo e coxinha de frango com queijo. Sabe-se que, das 100 pessoas presentes, 44 comeram coxinha de frango com queijo e 27 comeram enroladinho de queijo. Também se tem a informação de que 20 pessoas comeram dos dois – enroladinho de queijo e coxinha de frango com queijo. Ao final do evento, verificou-se que o queijo utilizado no enroladinho e na coxinha estava com uma bactéria que provocava desconforto estomacal. Encontre para o organizador do evento a quantidade de pessoas que não comeram nem coxinha de frango nem enroladinho de queijo.

3. Imagine que na cantina da escola que você administra trabalham os seguintes colaboradores: Maria, Carlos, Clara e Beatriz. Por curiosidade o diretor lhe solicita que encontre todas as possibilidades de pedidos de licença de saúde para certo dia de trabalho desses colaboradores. E, lembre-se: o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto e todo conjunto é subconjunto dele mesmo.

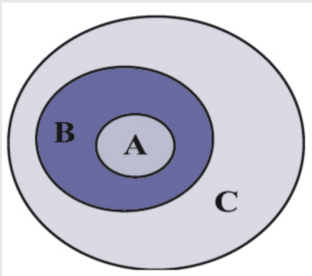
a) Nomeie o conjunto de colaboradores da cantina de G e indique o conjunto G listando todos os seus elementos.

b) Como se denomina o conjunto formado por todos os subconjuntos de G?

c) Indique e encontre o conjunto das partes de G listando todos os seus elementos.

4. Considere o diagrama a seguir, no qual: A, B e C são três conjuntos não vazios. Marque V para a(s) afirmati va(s) verdadeira(s) e F para a(s) falsa(s).

a) ( ) $A \subset B$
b) ( ) $C \subset B$
c) ( ) $B \subset A$
d) ( ) $A \subset C$
e) ( ) $B \not\subset A$
f) ( ) $A \not\subset C$
g) ( ) $B \supset A$
h) ( ) $A \not\subset B$



Agora, antes de seguirmos para um novo assunto, vamos juntos resolver o próximo exercício?

Exemplo 1

Em uma seleção de pessoal para ocupar uma nova vaga de um setor público, a equipe responsável recebeu currículos de 60 candidatos. Os três quesitos principais analisados são as habilidades de um gestor: habilidades conceituais; humanas; e técnicas. Do total, 15 candidatos tinham habilidades conceituais; 18 tinham habilidades humanas; 25 possuíam habilidades técnicas; 6 tinham tanto habilidades humanas quanto conceituais; 8 possuíam tanto habilidades humanas quanto técnicas; 2 possuíam as três; e 18 não tinham nenhuma das três habilidades. Com base nessas informações, responda:

a) Quantos candidatos possuíam apenas habilidades conceituais?

b) Quantos candidatos possuíam apenas habilidades humanas?

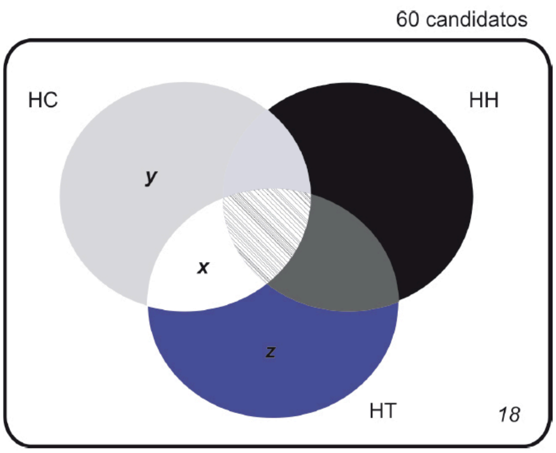
c) Quantos candidatos possuíam apenas habilidades técnicas?

Resolução

Primeiramente, vamos separar os dados do problema.

Total de 60 candidatos	Com habilidades conceituais (HC) = 15
	Com habilidades humanas (HH) = 18
	Com habilidades técnicas (HT) = 25
	Sem nenhuma das três habilidades = 18
	Com habilidades humanas e conceituais (HH $\cap$ HC) = 6
	Com habilidades humanas e técnicas (HH $\cap$ HT) = 8
	Com as três habilidades (HH $\cap$ HT $\cap$ HC) = 2

Agora, vamos elaborar o Diagrama de Venn com os dados e compreendermos o que representa cada parte.



- Cinza claro + branco + hachurado + azul claro = 15 = candidatos com HC.
- Azul escuro + branco + cinza escuro + hachurado = 25 = candidatos com HT.
- Azul claro + preto + hachurado + cinza escuro = 18 = candidatos com HH.
- Azul claro + hachurado = candidatos com HC e HH.
- Branco + hachurado = candidatos com HC e HT.
- Branco + cinza escuro = candidatos com HH e HT.

Olhando para o Diagrama de Venn, podemos descobrir a quantidade de elementos que figuram em cada uma das partes preenchidas pelas cores: azul claro, cinza escuro e pelo hachurado. Vejamos com mais detalhes:

O número de candidatos que possuem HH é igual a 18. Para encontrarmos o número de candidatos que possuem somente a HH, basta fazermos o seguinte: subtraímos de 18 a quantidade que corresponde à quantidade de elementos dos conjuntos que correspondem às partes em – azul claro – cinza escuro – hachurado.

Sabemos que hachurado + azul claro têm 6 elementos, que cinza escuro + hachurado têm 8 elementos e que hachurado tem 2 elementos (todos esses dados são fornecidos no enunciado do problema).

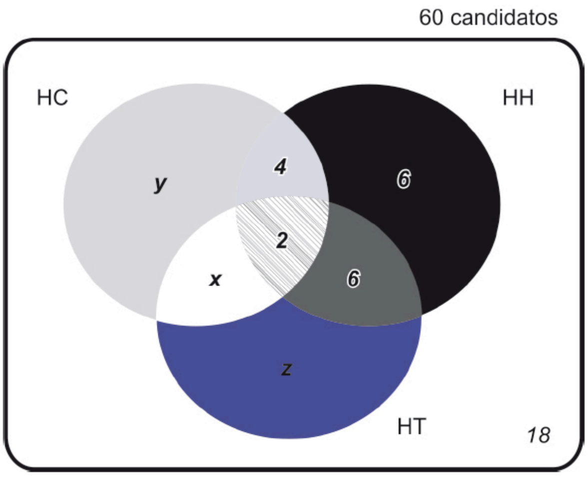
Assim, efetuando os cálculos com os dados que possuímos, descobrimos que a parte em azul claro tem 4 elementos e que a parte cinza escuro tem 6 elementos. A ilustração do diagrama poderá clarear essas ideias.

Para descobrirmos quantos candidatos possuem apenas a habilidade humana (região da cor preta), basta retirarmos a quantidade de elementos correspondentes à parte sombreada com as cores azul, hachurado e cinza escuro.

Assim: 18 – (4 + 2 + 6) = 18 – 12 = 6, ou seja, 6 candidatos possuem somente HH.

Para descobrirmos quantos candidatos possuem somente habilidade conceitual e quantos possuem somente habilidade técnica, vamos chamar a região cinza – que é uma parte de HC – de y; a região azul escuro – que é uma parte de HT – de z; e a região branca – que é uma parte da interseção de HC e HT – de x.

Veja a representação no diagrama a seguir:



Podemos registrar o seguinte sistema de equações com os dados que possuímos:

$$\begin{cases} x + y + 4 + 2 = 15 \\ x + z + 6 + 2 = 25 \\ x + y + 4 + 2 + 6 + 6 + z + 18 = 60 \end{cases}$$

Podemos também reescrever o sistema da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x + y + 6 = 15 \\ x + z + 8 = 25 \\ x + y + z + 36 = 60 \end{cases}$$

E podemos, ainda, reescrever o sistema da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x + y \ = 9 \text{ (equação 1)} \\ x + z = 17 \text{ (equação 2)} \\ x + y + z = 24 \text{ (equação 3)} \end{cases}$$

Utilizando a informação da equação 1 ($x + y = 9$), na equação 3 obtemos:

$9 + z = 24$ e, assim, obtemos que $z = 15$.

Sabendo o valor de z, poderemos substituí-lo na equação 2 e, assim, encontramos o valor de x. Substituindo o valor de x na equação 1, obtemos o valor de y. Assim teremos:

$x = 2$ e $y = 7$

Concluímos, assim, que 15 candidatos possuem somente habilidade técnica e 7 possuem apenas habilidade conceitual.

Portanto, a resposta de cada item solicitado na questão é:

a) 7 possuem apenas habilidades conceituais;
b) 6 possuem apenas habilidades humanas; e
c) 15 possuem apenas habilidades técnicas.

Na Teoria dos Conjuntos um campo específico merece destaque, já que tem uma importância específica para a Matemática: os conjuntos numéricos, objeto de nossa análise no próximo item.

Conjuntos Numéricos

No nosso dia a dia os conjuntos numéricos assumem um lugar de destaque. Estamos constantemente lidando com quantidades de pessoas, objetos, produtos, preços, porcentagens, lucros, temperatura etc. Enfim, podemos dizer que vivemos no mundo dos números.

Contudo, vale lembrarmos que, desde o reconhecimento da necessidade dos números, foram precisos séculos e séculos de descobertas e aperfeiçoamentos para chegarmos à atual forma de escrita e representação deles. A nomenclatura relacionada tem, muitas vezes, sido confundida e usada indiscriminadamente, mas parece ser importante alertarmos sobre o significado de alguns conceitos.

Denominamos de número a ideia de quantidade que nos vem à mente quando contamos, ordenamos e medimos. Assim, estamos pensando em números quando contamos as portas de um automóvel, enumeramos a posição de uma pessoa em uma fila ou medimos o peso de uma caixa.

À palavra "numeral" associamos toda representação de um número, seja ela escrita, falada ou digitada.

E a palavra "algarismo" se refere ao símbolo numérico que usamos para formar os numerais escritos.

Os símbolos – 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 – ficaram conhecidos como a notação de al-Khowarizmi, nome do qual se originou o termo latino algorismus. Daí o nome algarismo. Esses números criados pelos matemáticos da Índia e divulgados para outros povos pelo árabe al-Khowarizmi constituem o nosso sistema de numeração decimal, sendo conhecidos como algarismos indo-arábicos.

Para compreendermos todo o **processo de desenvolvimento** dos sistemas de numeração e os aspectos históricos envolvidos, precisaríamos de um tempo disponível para nos embrenharmos em todas as histórias dos povos que fizeram parte desse processo.

SAIBA MAIS

Seria muito interessante e curioso, porém, para o nosso curso, consideramos mais conveniente reduzirmos os caminhos para conseguirmos chegar à nossa meta, que é aprender a lidar com a Matemática essencial para o Administrador Público.

Assim, vamos apenas dizer que com o tempo surgiram os conjuntos numéricos para atender especificamente às necessidades da Matemática, os quais receberam a seguinte nomeação:

- Conjunto dos Números Naturais (N).
- Conjunto dos Números Inteiros (Z).
- Conjunto dos Números Racionais (Q).
- Conjunto dos Números Irracionais (I).
- Conjunto dos Números Reais (R).

Conjunto dos Números Naturais (N)

Agora, vamos ver alguns detalhes de cada um dos conjuntos referenciados anteriormente, o que certamente não será muita novidade para você.

Vamos começar relembrando o Conjunto dos Números Naturais N, que é infinito e contável.

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}

Uma notação muito interessante que podemos utilizar é o asterisco próximo de uma letra que designa um conjunto numérico. Esse símbolo indica que estamos excluindo o zero do conjunto em questão:

N* = {1, 2, 3, 4, 5, ...}

N* é chamado de conjunto dos números naturais não nulos e a leitura é simples e óbvia: lê-se N asterisco.

Operações com Números Naturais

- **Adição de Números Naturais:** é o resultado a que chegamos ao realizarmos a operação de adição partindo dos números naturais a e b, chamados parcelas, ou seja, é a soma de a e b (a + b). A soma de dois números naturais é sempre um número natural, isto é, se a ∈ N e b ∈ N, então (a + b) ∈ N.

- **Subtração de Números Naturais:** no conjunto dos naturais a subtração somente é possível quando o primeiro número (minuendo) for maior ou igual ao segundo número (subtraendo). O fato de dois números naturais quaisquer não poderem ser subtraídos de modo a se obter como resultado outro número natural nos leva a inferirmos ser essa uma das razões que despertaram a necessidade de ampliação do conjunto.

- **Multiplicação de Números Naturais:** o produto do número natural a pelo número natural b ("a · b" ou "a x b") é o resultado a que chegamos ao realizarmos a operação de multiplicação partindo dos números naturais a e b, denominados fatores.

- **Divisão dos Números Naturais:** o quociente entre dois números naturais a e b é o resultado a que chegamos ao realizarmos a operação de divisão partindo do número natural a, chamado dividendo, e do número natural b, chamado divisor. Nem sempre é possível encontrar como resultado da divisão entre dois números naturais outro número também natural; e também aqui percebemos a necessidade de ampliação do conjunto dos naturais.

Conjunto dos Números Inteiros

O Conjunto dos Números Inteiros pode ser considerado como uma ampliação do conjunto dos números naturais.

O conjunto formado pelos inteiros positivos, pelos inteiros negativos e pelo zero é chamado conjunto dos números inteiros e é representado pela letra Z.

Z = { . . ., -5, -4, -3, -2, -l, O, +1, +2, +3, +4, +5, ...}

Não é preciso sempre escrever o sinal + à frente dos números positivos. Assim, 1 e +1 indicam o mesmo numer al.

Podemos identificar alguns subconjuntos dos conjuntos dos inteiros:

- Retirando do conjunto Z o numeral zero, temos o conjunto:
  $Z^* = \{ \ldots, -5, -4, -3, -2, -1, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots\}$ denominado de conjunto dos inteiros não nulos.

- Extraindo de Z os números negativos, temos o conjunto:
  $Z_+ = \{0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots\}$ que constitui o conjunto dos inteiros não negativos.

- Retirando de Z os números positivos, temos o conjunto:
  $Z_- = \{ \ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$ denominado de conjunto dos inteiros não positivos.

- Extraindo de Z+ e de Z– o número zero, temos os conjuntos:
  $Z^*_+ = \{ +1, +2, +3, +4, +5, \ldots\}$ que constitui o conjunto dos inteiros positivos; e
  $Z^*_- = \{ \ldots, -5, -4, -3, -2, -1\}$ que forma o conjunto dos inteiros negativos.

Logo, $Z_+ = N$ e $N \subset Z$.

Operações com Números Inteiros

As operações anteriormente descritas para os conjuntos naturais são também válidas para os Números Inteiros com a vantagem de que quaisquer dois inteiros podem ser subtraídos obtendo como resultado um número que também pertence ao conjunto dos números inteiros.

Contudo, em se tratando da operação de divisão, não podemos dizer o mesmo, pois nem sempre temos como resultado de uma divisão um número que também pertença ao conjunto dos números inteiros. Eis aqui mais uma razão para justificarmos a ampliação, ou seja, a criação de outros conjuntos numéricos, como veremos a seguir.

Conjunto dos Números Racionais

O conjunto constituído pelos números inteiros e pelas frações positivas e negativas é chamado conjunto dos números racionais, e é representado pela letra Q.

$Q = \{a/b$: a e b em Z, b diferente de zero$\}$, ou seja,
$Q = \{ \ldots -2, \ldots, -5/3, \ldots, 0, \ldots, 2/3, \ldots , +1, \ldots \}$

Dentro do conjunto dos números racionais, podemos identificar alguns subconjuntos:

- Retirando do conjunto Q o zero, obteremos o conjunto:
  $Q^* = Q - \{0\}$ denominado de conjunto dos racionais não nulos.

- Extraindo de Q os números racionais negativos, obtemos:
  Q_+ = conjunto dos números racionais não negativos.

- Retirando de Q os números racionais positivos, temos:
  Q_- = conjunto dos números racionais não positivos.

- Extraindo de Q+ e de Q– o número zero, obtemos:
  Q^*_+ = conjunto dos números racionais positivos; e
  Q^*_- = conjunto dos números racionais negativos.

Conjunto dos Números Irracionais

Existem alguns resultados numéricos que não representam um número inteiro e também não podem ser representados por uma fração. Esses são denominados de números irracionais, que têm uma representação decimal com infinitas casas decimais e não periódicas. Por exemplo: $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$ e $\pi = 3{,}14159...$ dentre outras situações.

Conjunto dos Números Reais

Denominamos de número real qualquer número racional ou irracional. Podemos dizer, portanto, que número real é todo número com representação decimal finita ou infinita.

A letra que designa o conjunto dos números reais é R, e R* indica o conjunto dos números reais não nulos, isto é:

R = {x | x é número racional ou irracional}; e
R* = {x | x é número real diferente de zero}.

Representação do Conjunto dos Números Reais – Eixo Real

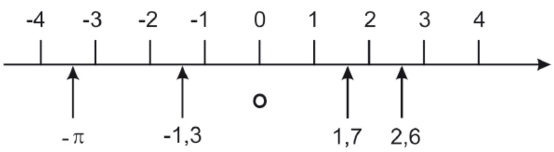
Considerando uma reta r, observe que a cada ponto dela se associa um único número real, e a cada número real podemos associar um único ponto dessa reta.

Para melhor compreender, observe os passos descritos a seguir:

- associe o número 0 (zero) a um ponto O qualquer da reta r;

- a cada ponto A de uma das semirretas determinadas por O em r, associe um número positivo x, que indica a distância de A até O, em uma certa unidade u; e

- a cada ponto A, simétrico de A em relação a O, associe o oposto de x.



Essa representação recebe o nome de **eixo real**, cuja origem é o ponto O e o sentido é o que concorda com o crescimento dos valores numéricos.

Subconjunto dos Números Reais

Sejam a e b números reais tais que $a < b$. Podemos utilizar uma representação específica para os subconjuntos dos números reais denominada por **intervalos reais**. Esses intervalos podem ser:

- Intervalo limitado fechado
  $\{x \in R \mid a \leq x \leq b\} = [a, b]$

Você lembra como é realizada a leitura do intervalo, expresso em forma simbólica como apresentado acima? Vamos relembrar juntos?

Os elementos do conjunto estão designados pela letra x e, portanto, os símbolos nos dizem que os elementos designados por x pertencem ao conjunto dos reais, e cada elemento x é menor ou igual ao número b e maior ou igual ao número a.

- Intervalo limitado aberto
  $\{x \in R \mid a < x < b\} =]a,b[$

- Intervalo limitado semiaberto
  $\{x \in R \mid a < x \leq b\} =]a,b]$
  $\{x \in R \mid a \leq x < b\} = [a,b[$

- Intervalo ilimitado
  $\{x \in R \mid x \geq a\} = [a,+\infty[$
  $\{x \in R \mid x > a\} =]a,+\infty[$
  $\{x \in R \mid x \leq a\} =]-\infty,a]$
  $\{x \in R \mid x < a\} =]-\infty,a[$
  $R =]-\infty,+\infty[$

Sistemas de Coordenadas

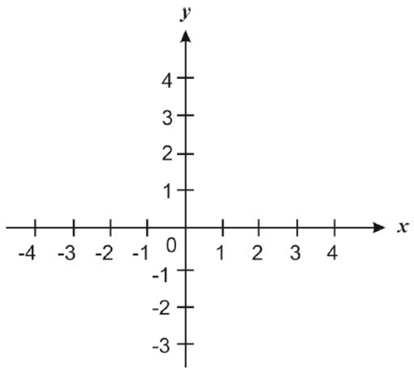
Para localizarmos precisamente um ponto qualquer de uma figura plana, usamos como referência duas retas numéricas e, assim, obtemos o que denominamos de **coordenadas do ponto**. Para isso, desenhamos duas retas numeradas e perpendiculares entre si que se cruzam no ponto zero de ambas.

SAIBA MAIS

A representação na reta numérica será muito útil para nossos estudos no curso de Administração Pública.

As retas numeradas, ou eixos, como são comumente nomeadas, dividem o plano em quatro regiões, denominadas **quadrantes**. O conjunto formado pelas retas e pelos quadrantes recebe a denominação de **sistema**

de coordenadas. Essa representação é muito útil para a construção de gráficos, conforme veremos mais adiante no curso.

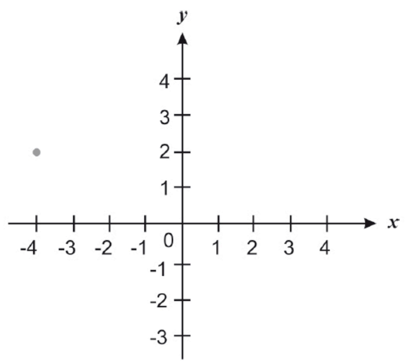


A localização de cada ponto no plano tem como referência um par ordenado de números reais em que o primeiro elemento se relaciona ao eixo horizontal, denominado de abscissa, e o segundo elemento se relaciona ao eixo vertical, denominado de ordenada do ponto. O par ordenado se denomina coordenada do ponto.

Muitas vezes iremos nos referir aos eixos que compõem o sistema de coordenadas como: eixo das abscissas e e ixo das ordenadas.

O par (0, 0) é denominado **origem** e é uma importante **referência** para o sistema de coordenadas.

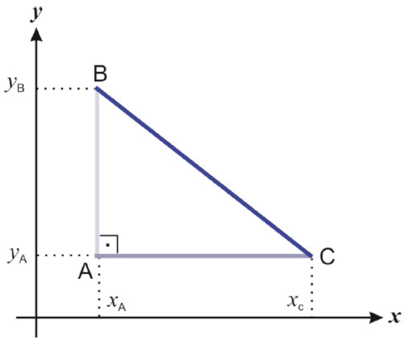
Para ilustrar, citamos o ponto P (-4, 2). As coordenadas de P são -4 e 2. Assim, podemos localizar o ponto P tendo como referência o sistema de eixos. P está localizado a 4 unidades à esquerda do zero e 2 unidades para cima. Isto é, para atingirmos o ponto P, deslocamos no sistema, a partir da origem, 4 unidades para a esquerda e, em seguida, 2 unidades para cima.



Vale lembrarmos a importância da ordem dos números, na qual as coordenadas são escritas. Por exemplo, o ponto de coordenadas (2, 4) é diferente do ponto de coordenadas (4, 2).

Dessa forma, a posição de qualquer ponto do plano será determinada por um par de números (x, y), os quais indicam as distâncias desse ponto às retas de referência (eixo das abscissas e eixo das ordenadas). Essas distâncias são medidas usando-se a escala estabelecida a partir de retas paralelas às duas retas de referência que determinam a malha coordenada.

Considerando apenas uma reta numérica (reta real), é fácil perceber que encontramos a distância entre dois pontos x e y sobre uma reta por $|x - y|$. Note que utilizamos o módulo da diferença para garantirmos que o valor seja positivo, pois se trata de distância entre dois pontos. Por exemplo, considere os pontos A (x_A, y_A), B (x_A, y_B) e C (x_C, y_A).



Perceba que os pontos A e B estão sob um segmento paralelo ao eixo das ordenadas. Assim, podemos considerá-los sob um eixo e, ao subtrairmos as ordenadas correspondentes, encontramos a distância entre eles: $y_B - y_A$.

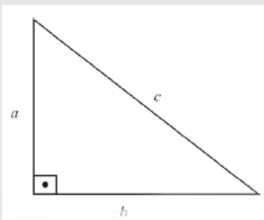
Repare que, como foi tomado na subtração o valor maior menos o menor, garantimos o resultado positivo independentemente de tomarmos o módulo.

Analogamente, para descobrirmos a distância de A até C, basta subtrairmos suas abscissas e atentarmos para a particularidade de que A e C estão sob um segmento que é paralelo ao eixo das abscissas: $x_C - x_A$.

Perceba que a figura nos apresenta a forma de um triângulo retângulo e, portanto, para descobrirmos a distância de B até C, basta utilizarmos o **Teorema de Pitágoras**, que consiste em: $a^2 = b^2 + c^2$, em que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

$$d_{BC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

SAIBA MAIS



Teorema de Pitágoras - Considerado uma das principais descobertas da Matemática, ele descreve uma relação existente no triângulo retângulo. O triângulo retângulo é formado por dois catetos e a hipotenusa, que constitui o maior segmento do triângulo e é localizada oposta ao ângulo reto. Considerando catetos (a e b) e hipotenusa (c), o teorema diz que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Fonte: Brasil Escola (2008).

Resumindo

Neste primeiro Capítulo aprendemos e relembramos a nomenclatura e a simbologia da teoria dos conjuntos numéricos.

Evidenciamos a notação afim de que os símbolos não se apresentem como empecilho para a sua aprendizagem no contexto administrativo.

Vimos ainda problemas que envolvem conjuntos numéricos e suas operações.

ATIVIDADES

Você conseguiu acompanhar o que foi exposto até aqui? Verifique se compreendeu o conteúdo realizando a atividade a seguir. Se surgir alguma dúvida, não hesite em consultar o seu tutor.

5. Imagine que um helicóptero do serviço de emergência do Hospital A esteja situado a 4km a Oeste e a 2km ao Norte de um acidente do carro a serviço da prefeitura em que você trabalha. Outro helicóptero está posicionado no Hospital B, que está a 3km a Leste e a 3km ao Norte do acidente. Qual helicóptero deverá ser acionado por estar mais próximo do acidente?

Antes de começar a resolver, veja algumas dicas que preparamos para você:

- Represente as localizações em um **plano cartesiano**. Como as localizações dos hospitais foram fornecidas tendo como referência o acidente, posicione o ponto que representa o acidente na origem do sistema de eixos – o ponto O terá como coordenada (0,0).

- Situe os pontos no plano que representa cada local em que se encontram os helicópteros - HA (-4,2) e HB (3,3) e encontre as distâncias entre os pontos OHA e OHB.

SAIBA MAIS

Plano Cartesiano - Embora o plano representado pelo sistema de eixos seja denominado por muitos de Plano Cartesiano em homenagem a Descartes, alguns historiadores revelam que na mesma época de Descartes, outro francês, Pierre Fermat (1601-1665), também chegou aos mesmos princípios, isoladamente. Assim, para sermos justos parece ser importante lembrarmos que, na realidade, o estabelecimento das bases da Geometria Analítica deve-se a ambos – Descartes e Pierre Fermat. Fonte: Elaborado pela autora deste livro.

Respostas das Atividades

1. 7 pessoas utilizavam os dois produtos.

2. 49 pessoas não comeram salgados que continham queijo.

3.
a) G = {Maria, Carlos, Clara, Beatriz} = {Ma, Ca, Cl, Be}
b) Conjunto das partes de G;
c) P (G) = {Ø, {Ma}, {Ca}, {Cl}, {Be}, {Ma, Ca}, {Ma, Cl}, {Ma, Be}, {Ca, Cl}, {Ca, Be}, {Cl, Be}, {Ma, Ca, Cl}, {Ma, Cl, Be}. {Ca, Cl, Be}, {Ma, Ca, Be}, {Ma, Ca, Cl, Be}.

4. V – F – F – V – V – F – V – F.

5.
$OH_B = \sqrt{18}$km, ou seja, está a 4,24km; e
OH_A está à distância de $\sqrt{20}$km, ou seja, a 4,47km. Logo, o helicóptero que está estacionado no Hospital B está mais perto do acidente.

CAPÍTULO II

MATRIZES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Profa. Maria Teresa Menezes Freitas

Objetivos Específicos de Aprendizagem

Ao finalizar este Capítulo, você deverá ser capaz de:

- Descrever e comentar possibilidades de uso do conceito de Matriz relacionado ao contexto da Administração Pública;
- Operar problemas, no ambiente da Administração Pública, utilizando matrizes e suas operações;
- Identificar e resolver Sistemas de Equações Lineares;
- Interpretar situações problemas relacionadas à Administração Pública que envolvem matrizes e sistemas lineares de equações; e
- Criar matrizes associadas às informações em situações diversas nos assuntos administrativos.

Utilizando Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

Caro estudante,
Agora vamos conhecer outras formas de resolver situações nas quais os dados não estão arrumados. Mas, antes de obtermos uma solução para o problema, precisamos organizar esses dados. A utilização de matrizes e sistemas de equações lineares, quando temos várias informações de distintas áreas, abre muitas possibilidades em nosso dia a dia organizacional. Vamos ver como funcionam?
Bons estudos!

Introdução a Matrizes

Muitas vezes nos encontramos diante de uma situação em que necessitamos organizar dados. Ou seja, temos muitas informações que nos são apresentadas, as quais merecem uma organização. Por exemplo: as informações sobre o estoque de remédios do Hospital Escola de uma universidade pública, sobre os nutrientes de um produto de alimentação das crianças da creche da prefeitura, sobre os equipamentos fabricados, importados ou exportados, adquiridos, vendidos, defeituosos etc. Enfim, são várias as informações que temos que compreender e que demandam uma organização.

Matriz é uma representação matemática útil para resolver problemas em diferentes áreas e se apresenta como uma tabela retangular de números, parâmetros ou variáveis organizados em uma ordem significativa.

Assim, denominamos **matriz** a um grupo ordenado de números que se apresentam dispostos de forma retangular em linhas e colunas. Veja o exemplo:

$$\begin{bmatrix} 50 & 65 & 122 \\ 22 & 32 & 85 \\ 8 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 50 & 65 & 122 \\ 22 & 32 & 85 \\ 8 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Os componentes (parâmetros ou variáveis) são denominados **elementos** da matriz. Os elementos na fileira horizontal constituem uma **linha** da matriz; e os elementos na fileira vertical constituem uma **coluna** da matriz. Como podemos observar, os componentes de uma matriz se apresentam delimitados por duas linhas (parênteses ou colchetes).

Convém alertarmos sobre a importância de saber identificar a localização do elemento na matriz, pois quando temos um contexto relacionado às linhas e colunas o elemento que figura, por exemplo, na primeira linha e segunda coluna terá um significado especial que difere dos outros elementos.

Reconhecemos a **dimensão** ou **ordem** de uma matriz pela quantidade de linhas e colunas. Assim, podemos dizer que, de acordo com o exemplo anterior, a matriz é de ordem 4 x 3 (lê-se quatro por três), em que o número 4 se relaciona ao número de linhas e o número 3 se relaciona ao número de colunas. Para você entender melhor, observe o modelo representado a seguir, que traz uma matriz de 2 x 3 (duas linhas e três colunas).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{coluna} & & \\ \downarrow & & \end{array} \\ \text{linha} \longrightarrow & \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Note que podemos nos referir a um determinado elemento da matriz fazendo uso dos índices i, j. O elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna seria indicado por a_{ij}.

Genericamente podemos dizer que matriz é uma tabela retangular de números organizados em m linhas e n colunas.

Linha,
i = 1, ..., m

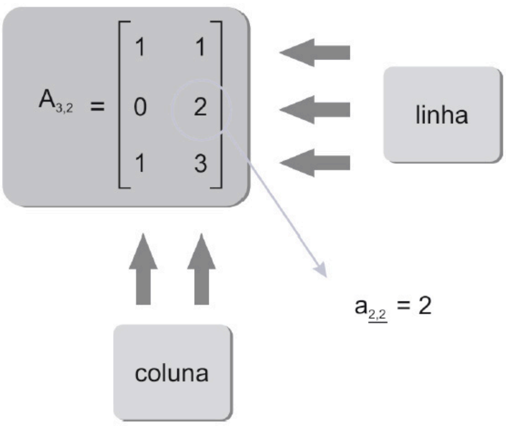
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

Colunas,
i = 1, ..., n

Com base nos exemplos, podemos dizer que matriz é uma forma de organizar informações que nos serão úteis para resolvermos problemas?

Sim. Podemos afirmar que a matriz relaciona os dados ali organizados, já que o seu número de linhas e colunas nos informa o que denominamos de **ordem da matriz**.

Uma matriz pode ser indicada por $A = [a_{i,j}]$.



Observe que o elemento em destaque na matriz de ordem 3 por 2 (3x2) representada acima se situa na segunda linha e segunda coluna e, portanto, indicamos esse elemento por $a_{2,2}$, que, nesse caso, é igual a 2.

Matrizes Especiais

As matrizes recebem uma denominação especial dependendo do número de linhas ou colunas que possuem ou por alguma especificidade de seus elementos.

Veja como a nomenclatura utilizada se apresenta coerente e de fácil compreensão:

- **Matriz linha** (ou vetor linha): é uma matriz com apenas uma linha e que pode ser representada genericamente por $r = (r_1, r_2, r_3, \ldots\ r_n)$. Um exemplo de matriz linha é [9 -5 7 0].

- **Matriz coluna** (ou vetor coluna): é uma matriz com apenas uma coluna, como mostrado a seguir.

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- **Matriz nula:** é uma matriz em que todos os seus elementos são iguais a zero. Por exemplo.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Matriz quadrada:** é a matriz que possui o mesmo número de linhas e colunas. Esse tipo de matriz apresenta uma forma semelhante à figura geométrica conhecida por quadrado. Um exemplo de uma matriz quadrada seria uma de ordem 2x2. Podemos ainda dizer que a matriz é quadrada de ordem 2.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Em uma matriz quadrada de ordem qualquer n, os elementos a_{11}, a_{22}, a_{33},..., ann formam o que denominamos de diagonal principal da matriz e representam os elementos a_{ij} com i = j. A outra diagonal é denominada de **diagonal secundária da matriz**.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonal secundária

Diagonal principal

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 3/2 & -9 & 56 & 0 \\ -6 & \sqrt{5} & 5 & 7 \\ 8 & 0 & 1 & -20 \end{bmatrix}$$

Diagonal secundária

Diagonal principal

- **Matriz diagonal:** é a matriz quadrada em que todos os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero. Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- **Matriz identidade I_n:** é a matriz quadrada, de ordem nxn, em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a um, e todos os outros elementos são iguais a zero. Observe a seguir o exemplo de uma matriz identidade de ordem 4x4.

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos compreender melhor, com o exemplo a seguir, o que vem a ser matriz e como essa forma de organizar os dados pode nos ajudar?

Suponha que você seja um auditor público e deva proceder à fiscalização em uma organização com filiais em vários Estados. Ao chegar a uma das lojas, os colaboradores lhe apresentam algumas tabelas e entre elas há a Tabela 1, a seguir, que exibe os dados de material para *camping* para um mês (junho) de dois produtos.

Tabela 1: Material para *camping*

	Estoque (1º de junho)		Venda (junho)		Entrada de produto novo (junho)	
	Pequeno	Grande	Pequeno	Grande	Pequeno	Grande
Mesa de piquenique	8	10	7	9	15	20
Grelha de churrasco	15	12	15	12	18	24

Fonte: Elaborada pela autora deste livro

De acordo com a Tabela 1, note que há o estoque (em 1º de junho), a venda (durante o mês de junho) e os produtos adquiridos (entregues no mês de junho). Perceba que podemos representar esses dados da Tabela 1 em diferentes matrizes.

No nosso exemplo, **M** será a Matriz que representa o estoque da firma em 1º de junho:

$$M = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{mesa} \\ \text{grelha} \end{array} \\ \text{pequena} \quad \text{grande} & \end{array}$$

Perceba que cada elemento, dependendo da sua localização na matriz, nos informa algo. As linhas, neste caso, nos informam o tipo de produto (mesa ou grelha) e as colunas, o tamanho do produto (pequeno ou grande). Assim, a posição do elemento localizado na primeira linha e primeira coluna nos informa a quantidade de mesas de tamanho pequeno (8).

Observe que as linhas nos informam o tipo de produto. Temos na primeira linha as mesas e na segunda linha as grelhas.

Já as colunas nos informam o tamanho dos produtos. Na primeira coluna temos os produtos pequenos e na segunda os produtos grandes.

Da mesma forma, poderíamos representar por uma matriz S a venda do mês de junho e por D os produtos adquiridos neste mês.

Que tal começarmos pensando genericamente na matriz S? Que número estaria na primeira linha e segunda coluna? Ou seja, quem seria o elemento S_{12}?

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

Se você respondeu que seria o número 9, está correto: em junho foram vendidas 9 mesas de piquenique de tamanho grande.

Agora é com você: continue e registre as matrizes S e D. Em caso de dúvida, consulte seu tutor. Ele, com certeza, terá o maior prazer em lhe ajudar. Não carregue dúvidas, pois contamos com o seu entendimento para continuarmos nossa viagem por este conteúdo. Vamos lá! Anime-se!

Operações com Matrizes

Nesta seção, vamos iniciar uma conversa sobre a álgebra das matrizes e, por vezes, voltaremos ao nosso exemplo (em que o auditor se encontrava em uma loja de material de camping) para ilustrarmos e facilitarmos a compreensão desse conteúdo.

As matrizes nos oferecem uma maneira fácil de combinarmos informações de diferentes tabelas. Para tal, teremos que compreender como funciona a sua aritmética.

Comecemos compreendendo quando podemos considerar que duas matrizes são iguais.

Igualdade de Matrizes

Inicialmente, precisamos entender o que significam **elementos correspondentes** entre duas matrizes. Trata-se de uma denominação bem intuitiva. Vejamos a seguir.

Entre matrizes de **mesma ordem**, os elementos que ocupam idêntica posição se denominam **elementos correspondentes**.

SAIBA MAIS

Atenção, apenas as de mesma ordem.

Para entendermos melhor, vamos considerar as matrizes A e B expressas na forma genérica a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

Agora, vamos identificar os pares de **elementos correspondentes** das matrizes A e B:

a_{11} e b_{11} a_{12} e b_{12}

a_{21} e b_{21} a_{22} e b_{22}

a_{31} e b_{31} a_{32} e b_{32}

Uma vez que já compreendemos o significado da expressão **elementos correspondentes de uma matriz**, podemos identificar quando duas matrizes são iguais. Ou seja, duas ou mais matrizes são iguais se, e somente se, têm a mesma ordem e possuem idênticos elementos correspondentes.

Exemplo 1

Verifique se as matrizes M e N a seguir são iguais.

$$M = \begin{pmatrix} 2^2 & (12-3) \\ \sqrt{49} & 11 \\ -3(9) & \frac{24}{3} \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 2(2) & \sqrt{81} \\ 7 & \frac{44}{4} \\ -(30-3) & 2^3 \end{pmatrix}$$

Resolução:

Inicialmente, vamos relembrar as características que fazem com que duas matrizes sejam iguais:

- As duas matrizes devem ser de mesma ordem. Neste caso, tanto a matriz M como a matriz N possuem 3 linhas e 2 colunas e, portanto, ambas são de ordem 3 por 2 (3x2).

- Se simplificarmos os elementos das matrizes M e N chegaremos, em ambos os casos, como resultado, à matriz:

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 7 & 11 \\ -27 & 8 \end{pmatrix}$$

Assim, podemos concluir que os elementos correspondentes das matrizes M e N são iguais. Logo, as matrizes M e N são iguais.

Exemplo 2

Encontre os valores de x e y para que as matrizes abaixo sejam iguais.

$$\begin{bmatrix} 2x+4 & 5 & 1 \\ -2 & -3y+5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 1 \\ -2 & -5y-3 & -4 \end{bmatrix}$$

Resolução:
Como a proposta solicita que as matrizes sejam iguais, devemos observar se elas são de mesma ordem e, além disso, avaliar as condições em que os elementos que ocupam idêntica posição sejam iguais. Assim devemos considerar $2x + 4 = 12$ e $-3y + 5 = -5y - 3$.

Resolvendo as duas equações, encontraremos $x = 4$ e $y = 1$.

Tudo bem até aqui para você? Podemos dar continuidade à Aritmética das Matrizes?

Adição e Subtração de Matrizes

Uma matriz é uma representação visualmente interessante e útil para o armazenamento de dados. Entretanto, algumas vezes os dados apresentam mudanças e, assim, sentimos a necessidade de somar e subtrair matrizes.

Para somar ou subtrair matrizes, elas devem ser da mesma dimensão, ou seja, ambas devem ser da mesma ordem e ter o mesmo número de linhas e de colunas.

Para somarmos ou subtrairmos duas matrizes de mesma ordem, basta efetuarmos a soma ou a subtração dos elementos correspondentes. Veja os exemplos:

- Soma das matrizes A e B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \; C = A + B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

- Subtração das matrizes M e N:

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -4 \\ 4 & 16 & -12 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -1 \\ 14 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 & -4 \\ 4 & 16 & -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -8 & -1 \\ 14 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -4 \\ 4 & 16 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ -14 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6+(-2) & 10+(8) & (-4)+1 \\ 4+(-14) & 16+0 & (-12)+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 18 & -3 \\ -10 & 16 & -16 \end{pmatrix}$$

Portanto $M - N = \begin{pmatrix} 4 & 18 & -3 \\ -10 & 16 & -16 \end{pmatrix}$

Exemplo 3

Retorne ao exemplo em que figuramos, imaginariamente, como auditor público e retome a tabela sobre o estoque (em 1º de junho), a venda (durante o mês de junho) e os produtos adquiridos (entregues no mesmo mês) da loja de material para *camping*. A matriz **M** representou o estoque da firma em 1º de junho. A matriz **S** representou a venda do mês de junho e a matriz **D** representou os produtos adquiridos naquele mês.

Agora, encontre a matriz resultante da operação M – S + D e interprete o significado da matriz encontrada.

Resolução:

Note que podemos efetuar a adição e subtração de matrizes em uma etapa.

$$M - S + D = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -15 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 18 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-7+15 & 10-9+20 \\ 15-15+18 & 12-12+24 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 16 & 21 \\ 18 & 24 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{mesa} \\ \text{grelha} \end{array}$$

Podemos interpretar o resultado da seguinte maneira:

No final de junho, a loja de materiais para *camping* tem 16 mesas de piquenique pequenas e 21 grandes em estoque; e também 18 grelhas de churrasco de tamanho pequeno e 24 de tamanho grande.

Expor informações de tabelas em matrizes por vezes facilita a visualização e a operação com os dados ali dispostos.

Multiplicação de uma Matriz por um Número Real

Em algumas situações será necessário multiplicar uma matriz por um número real. Esse procedimento é muito simples. Acompanhe a explicação a seguir.

Para multiplicarmos uma matriz A por um número real, k, basta multiplicarmos todos os elementos da matriz A por k. Essa operação é denominada de multiplicação por um escalar. Na álgebra das matrizes um número real é muitas vezes chamado de escalar.

Entendeu? Vamos compreender melhor?

Seja k um escalar (um número real diferente de zero) e $A = (a_{ij})_{mxn}$ uma matriz. Definimos a multiplicação do escalar k pela matriz A como outra matriz $C = k \times A$, em que $c_{ij} = k \times (a_{ij})$ para todo i e todo j. Note que, embora tenhamos utilizado algumas letras e símbolos, a informação é a mesma, ou seja, multiplicam-se todos os elementos da matriz pelo número real para se chegar, então, ao resultado da operação. Acompanhe o exemplo:

$$4\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\,(-2) & 4\,(0) \\ 4\,(4) & 4\,(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 16 & -4 \end{bmatrix}$$

No caso particular em que o número real k seja igual a –1, isto é, k = –1, o produto –1A = -A é denominado matriz oposta de A.

Note que sendo $A = (a_{ij})_{m \times n}$, a matriz $(-A) = (a'_{ij})_{m \times n}$ é tal que $A + (-A) = 0$, em que 0 é a matriz nula do tipo m x n. Temos que $(a'_{ij}) = (-a_{ij})$. Em outras palavras, os elementos da matriz oposta (-A) são os opostos dos elementos da matriz A.

Multiplicação de Matrizes

As operações com matrizes fazem uso dos conhecimentos básicos da aritmética e da álgebra. A maioria delas, como as operações de adição e de subtração, é realizada de uma maneira natural. Outras operações, como a multiplicação, têm uma lógica que muitas vezes nos parece um pouco estranha.

Antes de iniciarmos nossa conversa sobre multiplicação de matrizes, gostaríamos de alertar sobre um detalhe importante ao qual você deve ficar sempre atento.

Lembre-se: o produto de duas matrizes apenas será possível se o número de colunas da primeira matriz for o mesmo número de linhas da segunda matriz. Vale também lembrar que o produto terá o mesmo número de linhas da primeira matriz e o mesmo número de colunas da segunda matriz.

Para compreender a lógica da multiplicação de matrizes, acompanhe a ilustração a seguir considerando os detalhes que devem ser observados ao multiplicar uma matriz M de ordem 3x2 (três linhas e duas colunas) por uma matriz G de ordem 2x2 (duas linhas e duas colunas).

Agora imagine que uma prefeitura decida contratar funcionários para confeccionar brinquedos para sua creche. A equipe produz 3 tipos de bichos de pelúcia: urso, canguru e coelho. A produção de cada animal de pelúcia exige o corte do material, a costura e o arremate do produto.

Podemos representar em uma matriz a quantidade de horas de trabalho requeridas para a confecção de cada tipo de brinquedo. Veja a seguir:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{urso} & \text{canguru} & \text{coelho} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Corte} \\ \text{Costura} \\ \text{Arremate} \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 1{,}0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Cada elemento da matriz tem um significado. Olhando nossa matriz podemos encontrar quantas horas de corte são necessárias na confecção de um coelho de pelúcia?

Sim: 0,4, ou 4 décimos de hora.
Já para a costura de um urso de pelúcia são necessários 48 minutos de costura (48 = 0,8 x 60).

Continuemos testando nossa interpretação sobre as informações que a matriz nos oferece. Podemos encontrar o total de horas de trabalho necessárias para a produção de dois ursos, que seria igual a 3,8, ou seja, duas vezes (0,5 + 0,8 + 0,6).

Agora imagine que a equipe contratada tenha recebido uma solicitação para atender às prefeituras das cidades próximas para o mês de outubro e novembro. A matriz, a seguir, nos mostra a quantidade de cada tipo de brinquedo que deverá ser produzido para atender ao pedido de cada mês.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \text{Outubro} & \text{Novembro} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Urso} \\ \text{Canguru} \\ \text{Coelho} \end{array} & \begin{pmatrix} 1.000 & 1.100 \\ 600 & 850 \\ 800 & 725 \end{pmatrix} \end{array}$$

Observe que essa matriz também nos traz muitas informações. Quantos cangurus devem ser produzidos em novembro? Quantos bichos de pelúcia devem ser produzidos em outubro?

Resolução:
Isso mesmo! Em novembro devem ser produzidos 850 cangurus.
Em outubro devem ser produzidos 2.400 bichos de pelúcia (1000 + 600 + 800 = 2.400).

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{urso} & \text{canguru} & \text{coelho} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Corte} \\ \text{Costura} \\ \text{Arremate} \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 1{,}0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \text{Outubro} & \text{Novembro} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Urso} \\ \text{Canguru} \\ \text{Coelho} \end{array} & \begin{pmatrix} 1.000 & 1.100 \\ 600 & 850 \\ 800 & 725 \end{pmatrix} \end{array}$$

Agora, suponha que a secretaria de Recursos Humanos solicite saber quantas horas de trabalho de corte dos bichos serão necessárias em outubro. Pense por etapas:

Resolução:

- Quantas horas são necessárias para o corte dos ursos em outubro? 500 (0,5 x 1.000 = 500).

- Quantas horas são necessárias para o corte dos cangurus em outubro? 480 (0,8 x 600 = 480).

- Quantas horas são necessárias para o corte dos coelhos em outubro? 320 (0,4 x 800 = 320).

- Qual o total de horas de corte de bichos necessárias em outubro? 500+ 480 + 320 = 1.300.

Vencida essa etapa, vamos encontrar a quantidade de horas necessárias de costura em novembro para cada tipo de bicho e, depois, a quantidade total de horas necessárias para arremate no mês de outubro.

- horas de costura para urso = 800 (0,8 x 1000);
- horas de costura para canguru = 600 (1,0 x 600);
- horas de costura para coelho = 400 (0,5 x 800);
- total de horas de costura = 1.800 (800 + 600 + 400).

O processo utilizado para responder às questões anteriores sobre corte e costura pode ser interpretado como uma operação com matriz.

Para visualizarmos o número total de horas de arremate para o mês de outubro é mais fácil, pois basta escrevermos a linha de arremate da primeira matriz próxima da coluna do mês de outubro – conforme mostrado a seguir.

$$(0{,}6 \quad 0{,}4 \quad 0{,}5) \begin{pmatrix} 1.000 \\ 600 \\ 800 \end{pmatrix}$$

Observe como é simples: multiplicamos o primeiro número (elemento) da primeira matriz pelo primeiro número da segunda matriz e, depois, multiplicamos o segundo número, o terceiro etc. e finalmente adicionamos os produtos:

(0,6 x 1.000) + (0,4 x 600) + (0,5 x 800) = 1.240

Vamos neste ponto expressar em uma matriz o total de horas, no mês de outubro, necessárias para o corte, a costura e o arremate. Como já encontramos esses dados anteriormente, basta dispô-los em uma matriz.

$$\begin{array}{r c} & \text{Outubro} \\ \begin{array}{r} \text{Corte} \\ \text{Costura} \\ \text{Arremate} \end{array} & \begin{pmatrix} 1.300 \\ 1.800 \\ 1.240 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dando continuidade ao exemplo anterior, vamos supor que o setor de finanças da prefeitura precise calcular o total de horas de trabalho necessárias (em cada tipo de trabalho) para os dois meses – outubro e novembro. Volte a olhar as matrizes que nos informam o tipo de trabalho por tipo de bicho e o tipo de bicho encomendado por mês. Lá temos o total de horas de trabalho necessárias, em cada tipo de trabalho, para outubro.

$$\begin{pmatrix} 1.300 & -- \\ 1.800 & -- \\ 1.240 & -- \end{pmatrix}$$

Mas você pode estar se perguntando: como encontrar o total de horas de trabalho – elementos da coluna do mês de novembro?

Exatamente, utilizando o mesmo procedimento anterior.

$$\begin{pmatrix} 1.300 & (0{,}5 \text{ x } 1100 + 0{,}8 \text{ x } 850 + 0{,}4 \text{ x } 725) \\ 1.800 & (0{,}8 \text{ x } 1100 + 1{,}0 \text{ x } 850 + 0{,}5 \text{ x } 725) \\ 1.240 & (0{,}6 \text{ x } 1100 + 0{,}4 \text{ x } 850 + 0{,}5 \text{ x } 725) \end{pmatrix}$$

O processo que fizemos é chamado de produto de matrizes e, assim, encontramos as informações desejadas na matriz produto, que nos mostra o total de horas de cada tipo de trabalho por mês.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \text{Outubro} & \text{Novembro} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Corte} \\ \text{Costura} \\ \text{Arremate} \end{array} & \begin{pmatrix} 1.300 & 1.520 \\ 1.800 & 2.092{,}5 \\ 1.240 & 1.362{,}5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Veja a seguir uma ilustração (descontextualizada) de como efetuar a multiplicação de uma matriz de ordem 2x3 por outra de ordem 3x3. Note que obtemos como resultado uma matriz de ordem 2x3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{2 \quad 5 \quad 3} \end{bmatrix}_{2 \text{ x } 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ 2 & 5 & \boxed{3} \\ 1 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix}_{3 \text{ x } 3} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 15 \\ 15 & 29 & \boxed{27} \end{bmatrix}_{2 \text{ x } 3}$$

Na multiplicação de matrizes, se uma matriz A tem dimensão mxn e uma matriz B tem dimensão nxr, então o produto AB será uma matriz de dimensão mxr.

Para encontrarmos o elemento da linha i e coluna j da matriz produto AB, precisamos encontrar a soma dos produtos dos elementos que se correspondem na linha i da matriz A e da coluna j da matriz B. Simbolicamente podemos representar por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

Embora essa notação pareça confusa, ela é simples e bem fácil de ser compreendida. Pois, em se tratando de matrizes, quando escrevemos uma letra – no caso a letra c – e dois índices logo abaixo – no caso i j –, estamos representando um elemento da matriz que se situa na linha i e coluna j. Nesse caso, então, cada elemento da matriz produto é obtido, ou seja, é igual à somatória – representado pelo símbolo $\sum$ – dos produtos dos elementos correspondentes das duas outras matrizes que se situam na linha i coluna k da primeira matriz com os elementos da linha k e coluna j da segunda.

Assim, cada elemento da matriz produto é obtido dessa soma de produtos.

$$C_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,k}b_{k,j}$$

Exemplo 4

Sejam as matrizes A e B. Calcule a matriz C formada pelo produto da matriz A por B (AB).

$$A_{4,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B_{3,2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad AB = C_{4,2} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 8 & 9 \\ 7 & 13 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolução:

Para entender melhor, veja os detalhes dos elementos da matriz produto e que operações devem ser realizadas para encontrar cada um destes:

- **C_{11}** – elemento da matriz produto localizado na primeira linha e primeira coluna;
- **C_{12}** – elemento da matriz produto localizado na primeira linha e segunda coluna; e
- **C_{21}** – elemento da matriz produto localizado na segunda linha e primeira coluna.

$C_{1,1} = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + a_{1,3}b_{3,1} = 1 \times 2 + 0 \times 1 + 4 \times 3 = 14$
$C_{1,2} = a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} + a_{1,3}b_{3,2} = 1 \times 4 + 0 \times 1 + 4 \times 0 = 4$
$C_{2,1} = a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} + a_{2,3}b_{3,1} = 2 \times 2 + 1 \times 1 + 1 \times 3 = 8$
E assim por diante...

Exemplo 5

Agora vamos multiplicar as matrizes que seguem.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Antes de iniciar os cálculos, é importante você verificar se é mesmo possível multiplicar a matriz A pela matriz B. Como? Verifique as dimensões das duas matrizes.

$$C_{3x2} = A_{3x3}B_{3x2}$$

Agora, efetue o produto das duas matrizes em seu caderno de registro. E, em seguida, confira seu resultado.

Resolução

$$C = A\,.\,B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+2.1+3.2 & 1.1+2.2+3.1 \\ 2.2+1.1+4.2 & 2.1+1.2+4.1 \\ 1.2+4.1+3.2 & 1.1+4.2+3.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 13 & 8 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}$$

O produto de duas matrizes **não é comutativo**. Em outras palavras, para duas matrizes A e B, AB $\neq$ BA na maioria das situações.

Continuando com mais Algumas Matrizes Especiais

- **Matriz Transposta:** quando permutamos as linhas e colunas de uma matriz, obtemos uma nova matriz, denominada matriz transposta. Veja o exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{3x5} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5x3}$$

  Logo, se A é uma matriz de ordem mxn, denominase **transposta** de A a matriz de ordem nxm obtida trocando-se ordenadamente as linhas pelas colunas.

- **Matriz Inversa:** seja uma matriz quadrada A que possui n linhas e n colunas. Se existe uma matriz B quadrada de mesma ordem (nxn) tal que $A \times B = B \times A = I_n$ (em que I_n é a matriz identidade de ordem nxn), então A e B são denominadas matriz inversa uma da outra. A inversa de uma matriz A é denotada por A^{-1}. (Note que $A^{-1} \neq \frac{1}{A}$).

Mas atenção: uma matriz A terá inversa se, e somente se, o det (A) $\neq$ 0.

Embora tenhamos trabalhado com muitos conceitos em momentos anteriores da caminhada estudantil, vamos retomar o que vem a ser expressão algébrica, equação e sistemas de equações antes de continuarmos.

Introduzindo Conceitos: Expressão Algébrica e Equação

Suponha que você queira alugar uma bicicleta em suas férias. O custo do aluguel da bicicleta é R$ 4,00 por hora mais R$ 30,00 de taxa. Para representarmos o custo do aluguel da bicicleta podemos escrever uma **expressão algébrica**. Para escrevermos uma **expressão algébrica** substituímos palavras por números, letras e símbolos, tais como +, -, ÷ ou ×.

Assim, a **expressão** para a situação do aluguel de bicicleta pode ser representada por: $4 \times h + 30$ ou $4h + 30$.

Denominamos de variáveis as letras que usamos para representar quantidades em uma expressão algébrica. A letra **h** foi utilizada na expressão algébrica $4h + 30$ para representar o número de horas que a bicicleta seria alugada.

Duas expressões algébricas separadas por um sinal de igual formam o que denominamos de **equação**.

Podemos utilizar a expressão algébrica $4h+30$ para escrevermos a seguinte equação:

$$\boxed{c \quad = \quad 4 \quad \times \quad h \quad + \quad 30}$$

O custo é igual a R$ 4,00 por hora mais R$ 30,00

Assim, ao usarmos variáveis e expressões para obtermos uma equação proporcionamos uma maneira sistemática de representar e resolver muitos tipos diferentes de problemas.

Uma equação, portanto, é uma sentença matemática que expressa uma igualdade entre duas expressões algébricas.

Sistemas de Equações

Sistemas de Equações são frequentemente utilizados para modelar eventos que acontecem na vida diária e podem ser adequados para diferentes situações.

Sistema de equações é uma coleção de equações com as mesmas variáveis.

A solução de um sistema de duas equações lineares em x e y é todo par ordenado (x, y) que satisfaz ambas as equações. Veremos mais adiante que (x, y) também representam o ponto de interseção das retas que representam cada equação do sistema.

Uma equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ é denominada equação linear.

- $a_1, a_2, ..., a_n$ são os coeficientes;
- $x_1, x_2, ..., x_n$ são as incógnitas; e
- b é o termo independente.

Caso o termo independente b seja igual a zero, a equação linear recebe a denominação de equação linear homogênea.

Um **sistema linear de equações** pode ser expresso em forma matricial como um produto de matrizes. Por exemplo:

$$\begin{array}{l} +a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ +a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad\vdots \\ +a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

Perceba que a multiplicação das matrizes indicadas nos leva a obter um sistema.

Seja o sistema: $\begin{cases} 2x + 5y - 2z = 0 \\ 8x - 4y + 10z = -5 \\ 4x + y - 12z = 9 \end{cases}$

Ele pode ser representado por meio de matrizes, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 8 & -4 & 10 \\ 4 & 1 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Exemplo 7

Suponha que, como gerente do departamento de finanças de uma autarquia, você pretenda investir R$ 50.000,00 colocando algum dinheiro em um investimento de baixo risco, com um pretenso ganho de 5% ao ano. Também pretenda aplicar alguma quantia do dinheiro em um investimento de alto risco, com possibilidade de ganho de 14% ao ano. Com essas informações, quanto deve ser investido em cada tipo de aplicação para que se possa ganhar R$ 5.000,00 por ano?

Resolução:
Inicialmente, vamos "matematizar" as informações. Denomine x e y as quantias desconhecidas a serem investidas; assim:

- x é a quantia a ser investida a 5%; e
- y é a quantia a ser investida a 14%.

Logo, podemos obter um sistema linear para representar a situação.

$$\begin{cases} x + y = 50.000 \\ 0{,}05x + 0{,}14y = 5.000 \end{cases}$$

Observe que esse sistema pode ser representado por uma equação com matrizes.

AX = B A → matriz coeficiente
X → matriz variável
B → matriz dos termos independentes

Representemos o sistema por uma multiplicação de matrizes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}05 & 0{,}14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.000 \\ 5.000 \end{bmatrix}$$

Observe que resolver uma equação matriz da forma AX = B é muito semelhante a resolver uma equação com números reais ax = b, com a ≠ 0.

Números Reais	Matrizes
$a.x = b$	$AX = B$
$\frac{1}{a}(a.x) = \frac{1}{a}.(b)$	$A^{-1}(A.X) = A^{-1}B$
$(\frac{a}{a}).x = \frac{b}{a}$	$(A^{-1}A).X = A^{-1}B$
$x = \frac{b}{a}$	$I.X = A^{-1}B$
	$X = A^{-1}B$

Agora vamos encontrar a matriz inversa. Mas primeiramente precisamos resolver a equação.

Resolução:

$$\begin{cases} x + y = 50.000 \\ 0{,}05x + 0{,}14y = 5.000 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}05 & 0{,}14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.000 \\ 5.000 \end{bmatrix}$$

Veja que precisaremos encontrar a matriz inversa de A, ou seja, A-1 e, mais ainda, é importante lembrarmos que o produto de uma matriz pela sua inversa resulta na matriz identidade, ou seja, $A \cdot A^{-1} = I$.

Vamos então encontrar a matriz inversa de A?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}05 & 0{,}14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (a+c) & (b+d) \\ (0{,}05a + 0{,}14c & (0{,}05b + 0{,}14d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando os elementos correspondentes, podemos encontrar os valores de a, b, c, d e, consequentemente, a matriz inversa; e, efetuando os cálculos, encontramos a matriz inversa de A.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{14}{9} & \frac{-100}{9} \\ \frac{-5}{9} & \frac{100}{9} \end{pmatrix}$$

Ficamos, então, com a seguinte equação de matrizes: $X = A^{-1} \cdot B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{14}{9} & \frac{-100}{9} \\ \frac{-5}{9} & \frac{100}{9} \end{pmatrix}}_{\boxed{A^{-1}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 50.000 \\ 5.000 \end{bmatrix}}_{\boxed{B}}$$

Efetuando o produto das matrizes, encontramos a matriz resultante e, consequentemente, encontramos os valores de x e y.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.222{,}22 \\ 27.777{,}78 \end{bmatrix}$$

Assim, podemos afirmar que o valor a ser investido é R$ 22.222,22 a 5% e R$ 27.777,78 a 14% para que seja alcançada a meta de ganho de R$ 5.000,00 ao ano.

Você pode estar se perguntando: para solucionar sistemas lineares utilizo sempre o mesmo método?

Não. Existem diferentes métodos para solucionar sistemas de equações lineares. Dentre eles, destacamos o **método de substituição**, que consiste em isolar uma variável de uma das equações e, por substituição, encontrar a solução.

Outro método muito prático é denominado de **método de escalonamento**, que consiste em fazer alterações nas equações do sistema de modo a obter um novo sistema equivalente ao primeiro e que seja mais conveniente para encontrar a solução.

Ainda podemos citar a resolução gráfica, que consiste em encontrar o ponto comum das representações das respectivas equações.

Vamos ver, com um pouco mais de detalhes, a resolução de um sistema pelo método de escalonamento. Preparado? Podemos continuar?

O método de escalonamento envolve a eliminação de incógnitas. Para escalonar um sistema, podemos usar os seguintes artifícios:

- trocar as posições de duas equações;
- mudar as incógnitas de posições;
- dividir uma das equações por um número real diferente de zero; e
- multiplicar uma equação por um número real e adicionar o resultado a outra equação.

Agora, acompanhe o exemplo proposto, a seguir, para verificar como tudo acontece.

Exemplo 8
Vamos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + 2y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

Resolução:
Basta trocarmos de posição a primeira equação com a segunda equação, de modo que o primeiro coeficiente de x seja igual a 1:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

Para eliminarmos a incógnita x na segunda equação, precisamos multiplicar a primeira equação por (-2) e somar com a segunda. Observe com atenção esse procedimento conforme mostrado a seguir:

$$\begin{cases} x+2y+z=3\ (-2) \\ 2x-3y-z=4 \\ 3x-y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=3 \\ -7y-3z=-2 \\ 3x-y-2z=1 \end{cases}$$

Para eliminarmos a incógnita x na terceira equação, multiplicamos a primeira equação por (-3) e somamos com a terceira:

$$\begin{cases} x+2y+z=3\ (-3) \\ -7y-3z=-2 \\ 3x-y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=3 \\ -7y-3z=-2 \\ -7y-5z=-8 \end{cases}$$

Agora vamos eliminar a incógnita y na terceira equação. Para isso, basta multiplicarmos por (-1) a segunda equação e somarmos com a terceira.

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ -7y-3z=-2\ \ (-1) \\ -7y-5z=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=3 \\ -7y-3z=-2 \\ -2z=-6 \end{cases}$$

Então na 3ª equação teremos -2z = -6, que, multiplicando ambos os membros por (-1), resulta em 2z = 6. Simplificando, temos

$$z=\frac{6}{2} \rightarrow \quad z=3$$

Logo z = 3. E, substituindo o valor de z na segunda equação, – 7y – 3z = – 2 substituimos a incógnita z pelo valor 3.

$-7y-3(3)=-2 \Rightarrow -7y-9=-2 \Rightarrow -7y=-2+9 \Rightarrow -7y=7 \Rightarrow 7y=-7 \Rightarrow y=\frac{-7}{7} \Rightarrow y=-1$

Agora que temos valores de y e de z, podemos assim encontrar o valor da **incógnita** x. Basta substituirmos os valores de y e z na primeira equação:

SAIBA MAIS

Calculamos que y = –1 e z = 3.

$x+2y+z=3 \Rightarrow x+2(-1)+3=3 \Rightarrow x-2+3=3 \Rightarrow x+1=3 \Rightarrow x=3-1 \Rightarrow x=2$

Logo, o conjunto solução do sistema será S = {x, y, z} = {2, –1, 3}.

TEXTO COMPLEMENTAR

Amplie seus conhecimentos buscando as leituras propostas a seguir:

- *Matemática básica para decisões administrativas* - de Fernando Cesar Marra e Silva e Mariângela Abrão. São Paulo: Editora Atlas, 2007.

- *Sistemas lineares* - amplie seus conhecimentos navegando no site <**http://www.somatematica.com.br/emedio/sistemas/sistemas.php**>. Acesso em: 31 jan. 2014.

Resumindo

Neste Capítulo, você viu que as operações entre matrizes estiveram em evidência, e pôde compreender mais sobre sistemas de equações lineares e sua aplicabilidade, principalmente entre os administradores públicos.

Para fixar seus conhecimentos, convidamos você a realizar a atividade referente a este Capítulo.

ATIVIDADES

Certifique-se de que você entendeu como calcular o determinante fazendo a atividade proposta a seguir.

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$. Calcule o determinante

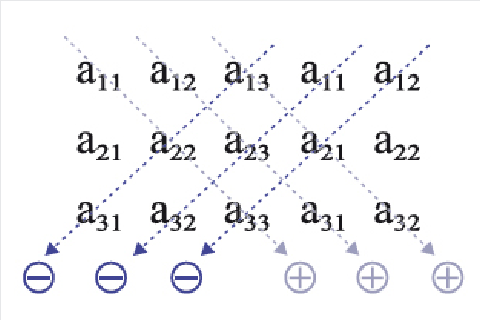
Dando continuidade aos nossos estudos, vamos ver como encontrar o determinante de uma matriz quadrada 3x3. Para tanto, consideremos a matriz genérica B de ordem 3 a seguir:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

O determinante é dado por:

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31}$$

De uma maneira simples, o determinante de uma matriz de ordem 3 pode ser obtido pela regra denominada de regra de Sarrus, que resulta no seguinte cálculo:



Para melhor compreendermos, vamos supor uma dada matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

det (A) = 3 . 1 . 4 + 2 .3 . 2 + 5 .4 . 3 - 2 .4 . 4 - 3 .3 . 3 - 5 .1 .2
det (A) = 12 + 12 + 60 – 32 – 27 – 10
det (A) = 15

Resposta da Atividade

1. 17

CAPÍTULO III

FUNÇÕES

Profa. Maria Teresa Menezes Freitas

Objetivos Específicos de Aprendizagem

Ao finalizar este Capítulo, você deverá ser capaz de:

- Descrever e comentar possibilidades de associação de relações entre grandezas com o conceito de Função em contextos administrativos;
- Analisar gráficos de funções que envolvem relações entre variáveis de diferentes contextos, em especial, administrativos;
- Resolver problemas utilizando funções;
- Interpretar situações-problemas que envolvem funções; e
- Identificar diferentes tipos de funções e suas particularidades.

Trabalhando com Funções

Caro estudante,
Estamos iniciando o Capítulo 3 de nosso estudo, na qual vamos conversar um pouquinho sobre a relação entre elementos de dois conjuntos e, a partir daí, entendermos o conceito de Função. Lembre-se que estamos aqui para lhe auxiliar, por isso, em caso de dúvida, não hesite em conversar com o seu tutor.

Relação – Variação – Conservação

Na Matemática, bem como em outras ciências, muitas vezes estabelecemos relações entre conjuntos. Comumente estamos estabelecendo relações entre grandezas variáveis. A variação é uma importante ideia matemática que pode ser explorada usando-se as ferramentas da álgebra.

A relação ocorre quando **emparelhamos** elementos entre dois conjuntos. Por exemplo, poderíamos pensar na seguinte relação: o conjunto de pessoas do setor público ao qual pertencemos e o conjunto dos diferentes salários do colaborador público. Ou, ainda, poderíamos estabelecer uma relação entre os colaboradores que ocupam cargos de chefia na nossa instituição e o número de reuniões agendadas para um determinado mês. Perceba que cada colaborador que ocupa cargo de chefia poderia ter participado em mais de uma reunião agendada para um determinado mês, ou, quem sabe, não ter participado de reunião alguma. No outro exemplo temos que, em geral, a cada colaborador público, relacionamos um único e determinado salário.

SAIBA MAIS

Podemos formar pares ou emparelhar elementos para cada situação. Entretanto, as duas relações exemplificadas se diferenciam substancialmente.

No caso em que a relação apresentar a especificidade de que cada elemento do primeiro conjunto se relaciona a um único elemento correspondente no segundo, ela será denominada de **função**.

Na maioria das vezes as **funções** envolvem conjuntos numéricos e alguma lei de formação que as regem.

Observe no exemplo apresentado na Tabela 2, que relaciona o peso da correspondência com as tarifas praticadas pelo correio brasileiro para o envio de carta comercial ou cartão-postal.

Tabela 2: Carta não comercial e cartão-postal – Nacional

Peso (em gramas)	Valor básico (em reais)
Até 20	0,80
Mais de 20 até 50	1,25
Mais de 50 até 100	1,70
Mais de 100 até 150	2,15
Mais de 150 até 200	2,65
Acima de 500 gramas serão aplicadas as mesmas condições de valor e prestação do Sedex.	

Fonte: Adaptada de Correios (2012)

Essa tabela nos permite encontrar respostas a várias perguntas, tais como:

- Qual o valor a ser pago por uma carta que pesa 73g?
- Qual o peso máximo de uma carta para que sua tarifa não ultrapasse R$ 1,00?
- É possível que duas cartas com tarifas diferentes tenham o mesmo peso?
- É possível que duas cartas com pesos diferentes tenham a mesma tarifa?

Observe que, nessa relação, o peso da carta é a variável independente, e a tarifa, a variável dependente. Podemos notar, ainda, que a cada peso de carta a ser enviada corresponde uma única tarifa. A tarifa **depende** do peso da carta.

Para facilitar a visualização e compreensão do comportamento de um fenômeno em estudo, as relações ou funções geralmente são expressas em tabelas ou gráficos.

A relação que é denominada por função, portanto, tem algumas características especiais:

- a todos os valores da variável independente está associado algum valor da variável dependente; e
- para um dado valor da variável independente está associado um **único** valor da variável dependente.

As relações que têm essas características são chamadas **funções**. Assim, podemos dizer que a tarifa postal é dada em **função** do peso da carta.

Em outras palavras, podemos dizer que uma **função** é uma relação entre dois conjuntos de variáveis de tal modo que, a cada valor do primeiro conjunto, associamos exatamente um valor do segundo conjunto.

Logo, dados dois conjuntos A e B não vazios e f uma relação de A em B; a relação **f** será uma **função** de A em B quando a cada elemento x do conjunto A estiver associado um, e apenas um, elemento y do conjunto B.

Usualmente denominamos de x a variável independente, e de y a variável dependente.

Nem toda relação pode ser considerada uma função. Acompanhe o exemplo: seja R o conjunto dos colaboradores de um órgão público que constam na lista telefônica da cidade M. Seja T o conjunto de números de telefone dos residentes na cidade M que constam na lista telefônica.

Será que a relação que associa os elementos de R ao correspondente elemento em T é uma função?

Alguns colaboradores têm mais de um número de telefone. Assim, a relação não é uma função.

Observe que uma equação pode representar uma função.

Por exemplo, a equação $y = 2x + 5$ representa uma função. A notação mais utilizada para expressar uma função é $f(x)$. Assim, teríamos $f(x) = 2x + 5$.

Mas, como vimos anteriormente, uma tabela também pode expressar uma relação que é uma função.

Notação

Diante da correspondência entre os valores de um conjunto (domínio) x e valores de outro conjunto y, que é uma função, dizemos que y = f(x), e o par (x, y) pode ser escrito como (x, f(x)).

A notação f(x) é lida como "f de x". O número representado por f(x) é o valor da função f em x.

Vamos compreender melhor as **diferentes maneiras de expressar uma função**.

SAIBA MAIS

Cupom-resposta Internacional - O Cupom-resposta Internacional adquirido no exterior, além de poder ser trocado por selos (no valor equivalente a um documento prioritário de 20g para o país escolhido), também pode ser trocado por um aerograma internacional ou um envelope pré-franqueado Carta Mundial 20g. Fonte: Correios (2008).

Por uma Tabela

Aerograma internacional Vigência: 9/3/2007	
Produtos Internacionais	**Preços em Reais**
Aerograma Internacional	R$ 1,70
Envelope Pré-franqueado Carta Mundial 20g	R$ 2,00
Envelope Pré-franqueado Carta Mundial 50g	R$ 3,70
Envelope Pré-franqueado Carta Mundial 100g	R$ 6,70
Cupom-resposta Internacional	R$ 5,00

A seguir, apresentamos outro exemplo de tabela que também representa uma função:

X (Número de artigos)	Y (Custo operacional diário, em R$)
0	500
1	700
2	900
3	1.100
4	1.300

Por uma Lei que Rege a Relação (por uma Regra)

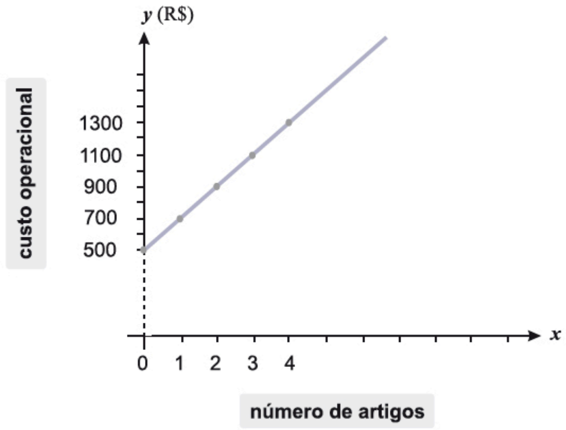
Para obtermos o custo operacional diário no exemplo exposto anteriormente na forma de tabela, para 0, 1, 2, 3 ou 4 unidades, multiplicamos o número de itens por 200 e adicionamos 500 ao resultado.

Por uma Equação

Para obtermos o custo diário no exemplo anterior, temos $y = 200x + 500$, em que x é o número de artigos e y é o custo operacional diário.

Fique atento! Embora uma função possa ser representada por uma equação, nem toda equação representa uma função.

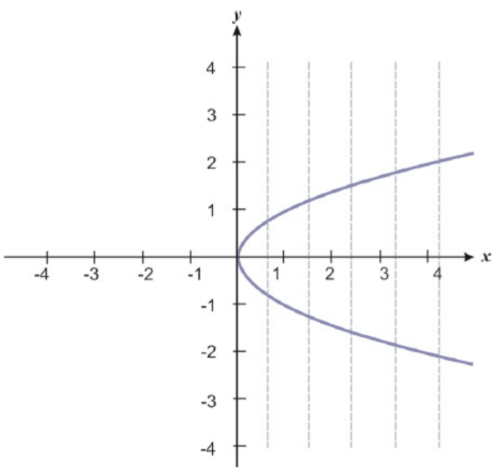
Por um Gráfico



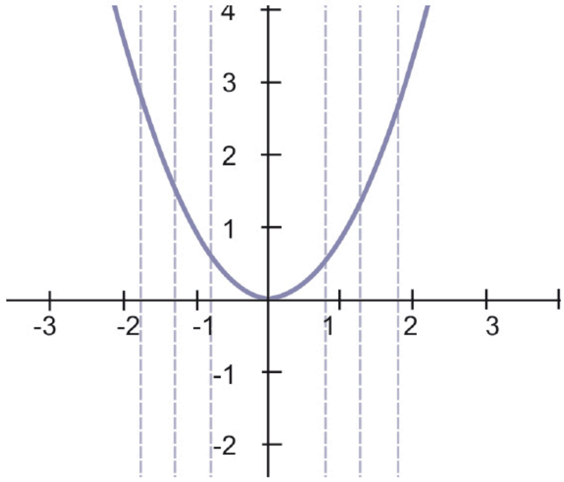
Observe que nem toda representação gráfica caracteriza uma função!

Para rapidamente identificarmos se um gráfico é uma função, basta imaginarmos retas verticais, paralelas ao eixo das ordenadas "y", **passando pelos elementos do domínio**.

Se todas as retas que imaginarmos tocarem o gráfico em a**penas um ponto**, será uma função. Isso porque com esse recurso identificamos que, para cada x (elemento do domínio), associa-se apenas um y (imagem de x).



A seguir, veremos alguns gráficos para uma reflexão sobre o conceito de função.



Observe, neste gráfico, que a cada elemento x, existe mais de um correspondente y. As retas imaginadas (pontilhadas) tocam o gráfico mais de uma vez, por isso representam uma função.

Compreendeu o que vimos nessa seção? Buscando lhe auxiliar, preparamos uma breve síntese. Em caso de dúvida, faça uma releitura da seção e converse com seu tutor.

Uma relação entre duas grandezas variáveis em que cada valor da primeira variável se relaciona a exatamente um valor da segunda é chamada de **função**.

Nomeamos de **domínio da função** o conjunto de todos os possíveis valores da primeira variável (comporão o primeiro conjunto) e nomeamos de **imagem da função** o conjunto dos valores do segundo conjunto que corresponde a elementos do domínio.

Domínio da função é o conjunto de todos os valores que a variável independente poderá assumir. Imagem da função é o conjunto de todos os valores correspondentes da variável dependente.

Assim, podemos afirmar que uma função f com domínio A e imagens em B será denotada por $f: A \rightarrow B$ (função que associa aos valores do conjunto A os valores do conjunto B). Logo, $x \rightarrow y = f(x)$; e a cada elemento x de A, corresponde um único y de B.

O conjunto A é denominado **domínio da função**, indicado por D. O domínio da função, também denominado por campo de definição, ou campo de existência da função, identifica o conjunto do contexto envolvido, isto é, os valores possíveis para a variável x.

O conjunto B é denominado **contradomínio da função**, e pode ser indicado por CD. No contradomínio, encontram-se os elementos que podem ser os possíveis correspondentes dos elementos do domínio.

Cada elemento x do domínio tem um correspondente y no contradomínio. A esse valor de y nomeamos de **imagem de x** pela função f. O conjunto de todos os valores de y que são imagens de valores de x forma o **conjunto imagem da função**, que indicaremos por Im. Note que o conjunto imagem da função é um subconjunto do seu contradomínio.

Exemplo 1

Dados os conjuntos A = {-1, 0, 1, 3} e B = {-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, qual o conjunto imagem da função f: A→ B definida por:

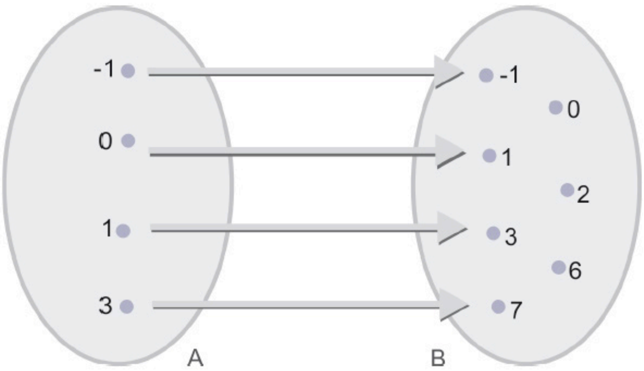
f(x) = 2x + 1

Resolução

Vamos determinar o valor correspondente de cada elemento do domínio (A):

f(-1) = 2 (-1) + 1 = -1
f(0) = 2 (0) + 1 = 1
f(1) = 2(1) + 1 = 3
f(3) = 2(3) + 1 = 4

Agora, observe o diagrama a seguir:



Im: {-1, 1, 3, 7}
f: A → B
x→y = f (x)
D = A, CD = B, Im = {y∈ CD | y é o elemento correspondente de algum valor de x}

Exemplo 2

Seja a função dada por $f(x) = \dfrac{x+4}{x-5}$, encontre seu domínio.

Resolução

Devemos sempre estar atentos para elementos de x em que possa existir dificuldade para encontrar a imagem y da função.

Com base na lei da função, teremos: $f(5) = \dfrac{5+4}{5-5} = \dfrac{9}{0}$, o que não é definido no conjunto dos números reais.

CAPÍTULO 3

Portanto, nunca podemos considerar $x = 5$ no domínio dessa função.

Assim, $D = \{x \in R \mid x \neq 5\}$ e $CD = R$.

Ou seja, qualquer número real faz parte do domínio, exceto o 5.

ATIVIDADES

Antes de prosseguirmos, convém verificar se você entendeu tudo até aqui! Para saber, procure, responder à atividade a seguir.

1. Encontre o dominío destas funções:

a) $y = \dfrac{1}{x + 5}$

b) $y = 4x - 17$

c) $y = \sqrt{x + 9}$

d) $y = x^2 + 99$

De acordo com nosso estudo, podemos afirmar que em muitas situações a função é apresentada pela sua lei de formação. Isso significa que nos é apresentada uma sentença ou equação que nos dá condições de encontrarmos a correspondência entre as variáveis.

Nesse caso, convenciona-se que o **domínio** é o maior conjunto ao qual se pode definir a referida função.

Mas você sabe o que significa encontrar o domínio de uma função quando se conhece a sua lei de formação?

Significa que teremos de encontrar o maior conjunto, isto é, o conjunto cujos elementos são todos os possíveis valores x para os quais existe um único y em correspondência.

E o que é necessário para esboçar o gráfico de uma função?

Nem sempre temos à mão recursos como programas de computadores e calculadoras científicas para construirmos um gráfico; portanto, conhecermos alguns pontos especiais dessa representação nos possibilita encontrarmos uma boa aproximação do gráfico da função.

E lembre-se: nessa representação é importante identificarmos os pontos em que o gráfico intercepta os eixos. Sempre considerando que:

- os pontos sobre o eixo das abscissas são do tipo (x,0), isto é, $y = 0$; e

- os pontos sobre o eixo das ordenadas são do tipo (0,y), isto é, x = 0.

Vale lembrarmos, ainda, que os valores de x em que f(x) = 0 (ou seja, y = 0) são chamados de **zeros**, ou **raízes da função**.

Exemplo 3
Vamos representar graficamente a função **y = x + 2**, ou seja, **f(x) = x +2**.

- **1° passo:** atribuindo valores a x (por exemplo: -3, -2, -1, 0, 1, 2), encontraremos a respectiva imagem. Claro que poderíamos atribuir a x alguns valores fracionários, mas para facilitar a construção do gráfico atribuímos valores mais convenientes, ou seja, valores inteiros. Assim, temos:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	-1	0	1	2	3	4

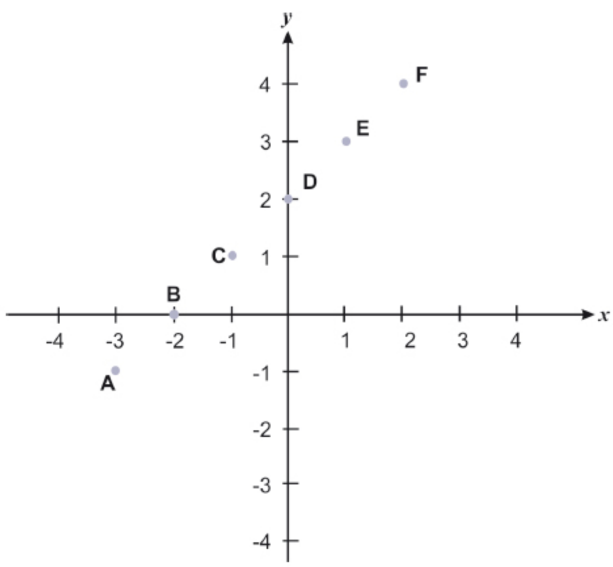
Também podemos dispor a tabela na vertical:

x	y
-3	-1
-2	0
-1	1
0	2
1	3
2	4

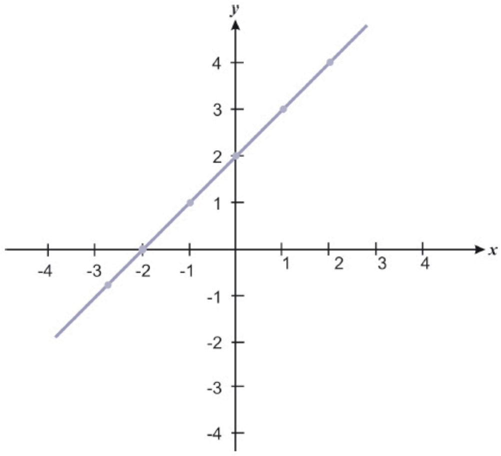
Assim, temos os pares ordenados (-3, -1); (-2, 0); (-1, 1); (0, 2); (1, 3); (2, 4).

- **2° passo:** agora vamos representar os pares ordenados, encontrados na tabela anterior, por pontos no plano cartesiano.

A (-3, -1); B (-2, 0); C (-1, 1); D (0, 2); E (1, 3); f (2, 4).



- **3°passo:** por fim, traçamos o esboço do gráfico **ligando** os pontos encontrados que satisfazem a lei $y = x + 2$. Perceba que o traçado é uma reta:



SAIBA MAIS

Dependendo do contexto que representa a função, os pontos não poderão ser ligados, como veremos mais adiante.

Diante do exposto, podemos afirmar que existem vários termos relacionados à função. Observe a Figura 1:

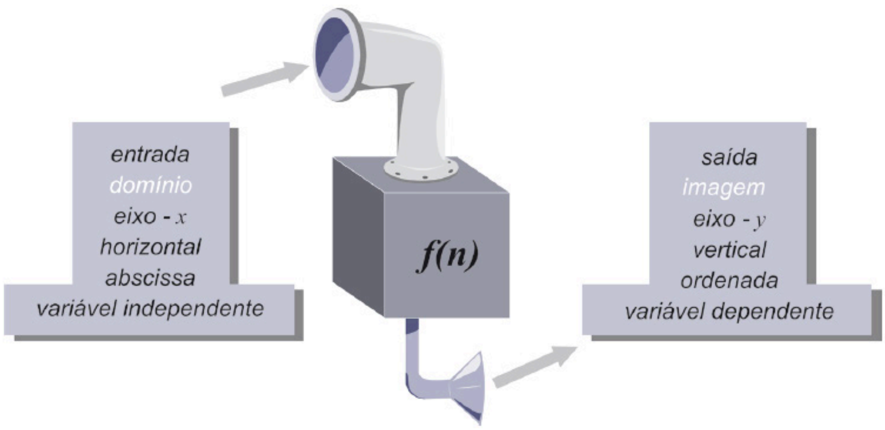


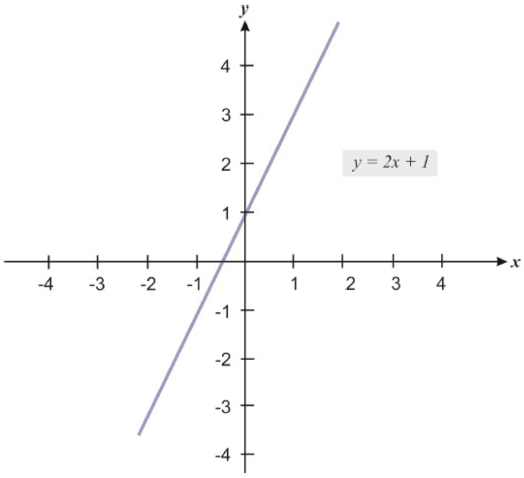
Figura 1: Termos relacionados à função
Fonte: Elaborada pela autora deste livro

Funções Especiais

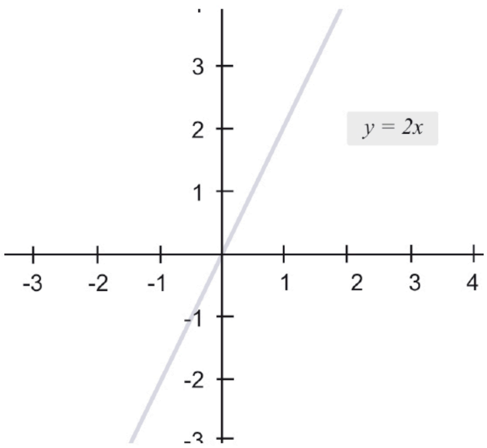
Algumas funções recebem nomes especiais que variam de acordo com seu comportamento.

- A função definida por uma equação da forma: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ é chamada de **função polinomial**. A representação gráfica da função polinomial de grau zero ou de grau um é uma reta.

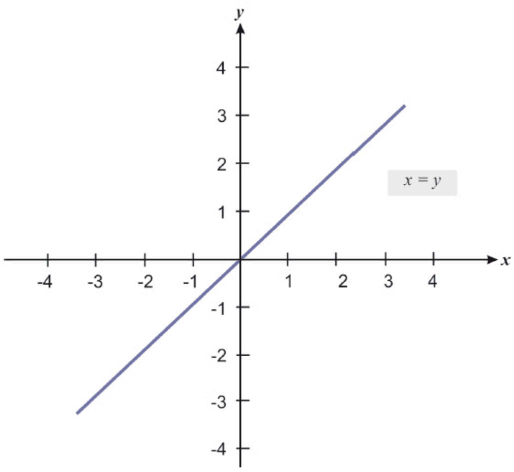
- A função $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$; $b \neq 0$) recebe o nome de **função afim**. Tomando como exemplo a função $f(x) = 2x + 1$, então $a = 2$ e $b = 1$. Veja a seguir a representação gráfica.



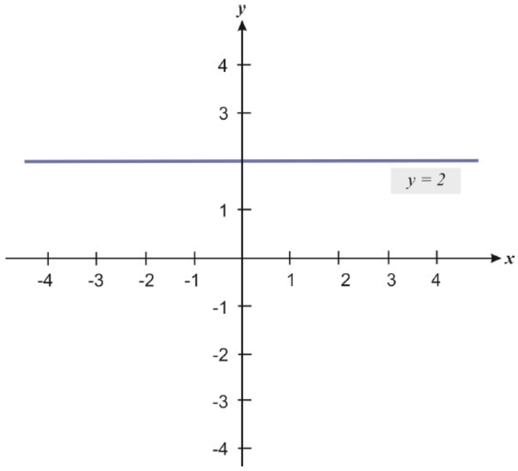
- A função $f(x) = ax$ é denominada **função linear**. Por exemplo, $f(x) = 2x$ ($a=2$).



- A função $f(x) = x$ é denominada **função identidade**, a qual associa um valor do domínio x com o mesmo valor na imagem.

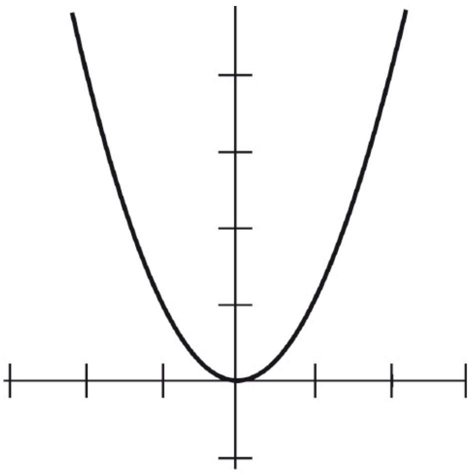


- A função $f(x) = k$ recebe o nome de **função constante**. Por exemplo, $f(x) = 2$.



Observe que a função constante associa a cada valor x um mesmo valor na imagem, que nesse exemplo é o 2.

- A função polinomial $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a^{1}0$ recebe o nome de **função quadrática**, e sua representação gráfica é uma curva denominada **parábola**. Veja a seguir a representação gráfica de $f(x) = x^2$.



É importante destacarmos ainda que:

- A representação gráfica das funções polinomiais: afim, linear, identidade e constante é uma reta.

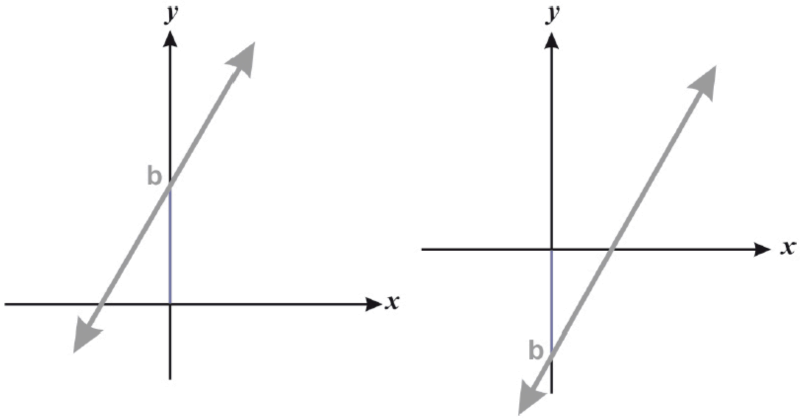
- Podemos pensar que a função linear $f(x) = ax$ e a função identidade $f(x) = x$ são casos particulares da função afim $f(x) = ax + b$.

Significado dos Coeficientes a e b da Função f(x) = ax + b

A imagem do zero é b, isto é, o gráfico contém o ponto (0, b), que é o ponto em que a reta corta o eixo das ordenadas.

$$f(0) = a\,(0) + b, \text{ ou seja, } f(0) = b$$

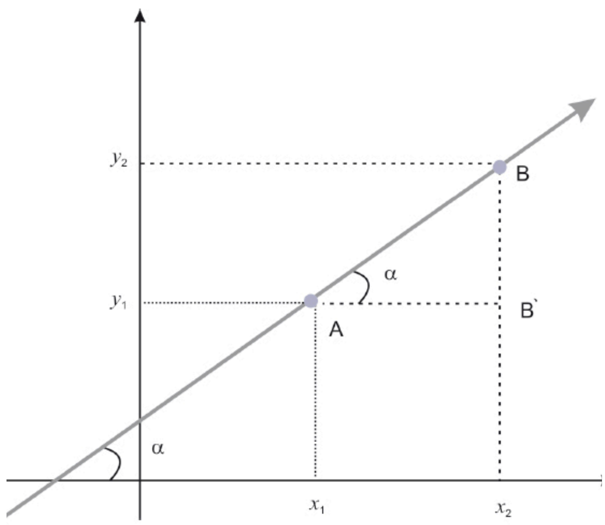
Logo, o coeficiente b é chamado coeficiente linear, e representa a ordenada do ponto em que o gráfico intercepta o eixo das ordenadas.



Agora vamos compreender o significado do coeficiente a na função y = ax + b. Para tanto, tomemos dois pontos A e B pertencentes ao gráfico da função, isto é, as coordenadas dos pontos satisfazem à lei da função.

A (x_1, y_1) e B (x_2, y_2)
$y_1 = ax_1 + b$ e $y_2 = ax_2 + b$

Logo, $y_1 = ax_1 + b (1)$ e $y_2 = ax_2 + b (2)$. Para entender melhor, observe atentamente a ilustração gráfica a seguir:



Observe os pontos A (x_1, y_1) e B (x_2, y_2) da ilustração gráfica e perceba a formação do triângulo retângulo. Lembre-se de que a tangente do ângulo é obtida pela razão entre os catetos.

$$\textit{angente de um ângulo} = \frac{\textit{cateto oposto ao ângulo}}{\textit{cateto adjacente ao ângulo}}$$

Assim, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (também conhecido como quociente da diferença).

Subtraindo as equações (1) e (2),

$y_1 = ax_1 + b$ (1)
$y_2 = ax_2 + b$ (2)

$$y_2 - y_1 = ay_2 + \cancel{b} - ax_2 - \cancel{b}$$

$$y_2 - y_1 = a\,(x_2 - x_1) \quad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \boxed{BB'} \\ \Rightarrow \boxed{AB'} \end{array}$$

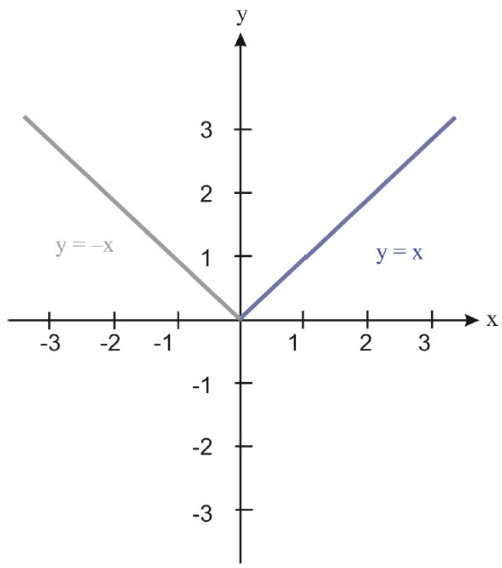
Perceba que o coeficiente a é igual à tangente de a e, portanto, depende somente do ângulo a. Veja também que a é responsável pela inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas (eixo x) e, assim, a é denominado coeficiente angular.

Nomenclaturas Especiais

Vamos dar continuidade aos nomes especiais de funções e aos respectivos comportamentos quando ilustrados graficamente. Respire fundo e se concentre para obter a compreensão que almejamos!

A função que associa cada valor de x ao módulo de x, isto é, $f(x) = |x|$, recebe o nome de **função módulo**, ou **função valor absoluto**. Portanto, pela definição de módulo teremos para todo x real:

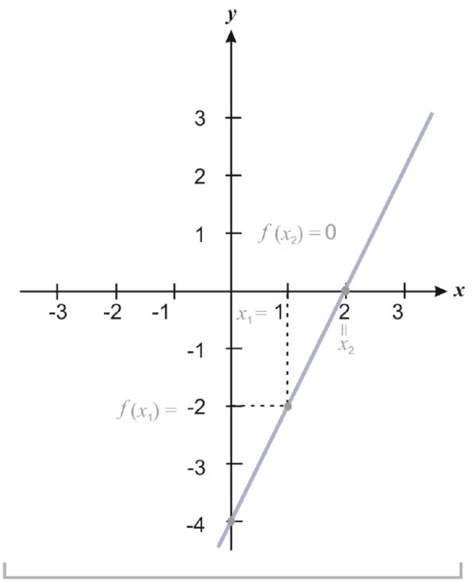
$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0. \end{cases}$$



Ainda sobre comportamentos de função, é importante destacarmos que, muitas vezes, as funções assumem comportamentos diferentes em intervalos do domínio. Assim, dependendo do comportamento em um intervalo do domínio I, poderemos classificar a função em **crescente** ou **decrescente**.

A função *f* é **crescente** em um intervalo *I* se, para quaisquer que sejam x_1 e x_2 de I com $x_1 < x_2$, obtiver em correspondência $f(x_1) < f(x_2)$. Logo, podemos dizer que a função é crescente em um determinado intervalo do domínio quando, ao tomarmos valores maiores de x, tivermos em correspondência valores maiores de y.

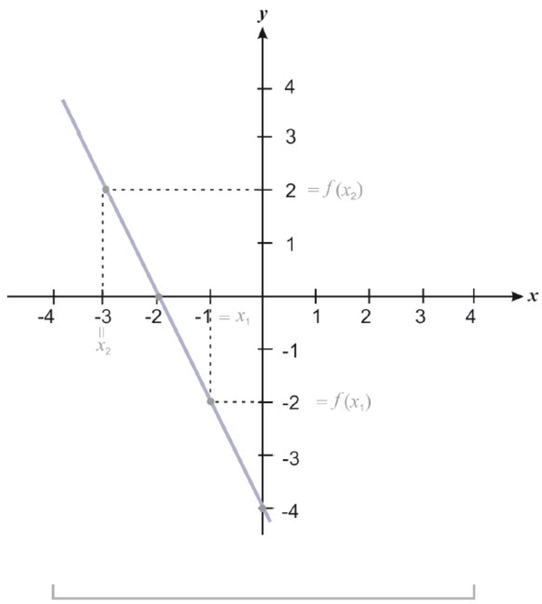
Por exemplo, suponha uma função y = 2x – 4, ou seja, f(x) = 2x – 4. Note que para x_1 = 1 temos $f(x_1)$ = -2; para x_2 = 2 temos $f(x_2)$ = 0. Para entender melhor, observe a representação gráfica a seguir:



Veja que $x_1 < x_2$ e $f(x_1) < f(x_2)$

A função f é **decrescente** em um intervalo I se, para quaisquer que sejam x_1 e x_2 de I com $x_1 < x_2$, obtiver em correspondência $f(x_1) > f(x_2)$. Em outras palavras, dizemos que a função é decrescente em um determinado intervalo do domínio quando, ao tomarmos valores maiores de x, tivermos em correspondência valores menores em y.

Então, suponha a função y = -2x – 4 , ou seja, f(x) = -2x – 4, sendo que para x_1 = -1, temos $f(x_1)$ = -2; para x_2 = -3, temos $f(x_2)$ = 2.



Veja que $x_1 > x_2$ e $f(x_1) > f(x_2)$

A esta altura da nossa conversa, começamos a perceber que as relações entre variáveis expressas, sejam em tabelas, ilustração gráfica ou mesmo por meio de uma equação, podem caracterizar uma função e nos revelam importantes informações.

Interpretação Gráfica

Nesta seção, vamos conversar sobre o crescimento e decrescimento de uma função quadrática. Relaxe um pouco para que possamos continuar. Preparado?

O vértice da parábola que representa uma função quadrática evidencia também os intervalos nos quais a função é crescente e nos quais ela é decrescente.

Vale lembrar que as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as soluções da equação do 2° grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais são dadas pela fórmula denominada por alguns de fórmula de Bhaskara:

$$\Delta = b^2 - 4ac, \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4ac$, chamado discriminante.

As coordenadas do vértice $V(x_v, y_v)$ da parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ são dadas por:

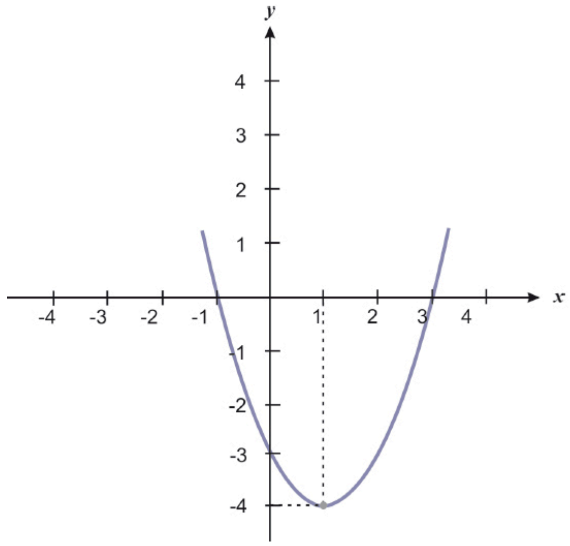
$$x_v = \frac{-b}{2a} \qquad y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

Para você compreender melhor, vamos observar o que ocorre, por exemplo, com a função $y = x^2 - 2x - 3$.

$a = 1 > 0 \rightarrow$ concavidade para cima
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$\Delta = 16 > 0 \rightarrow$ dois zeros reais distintos

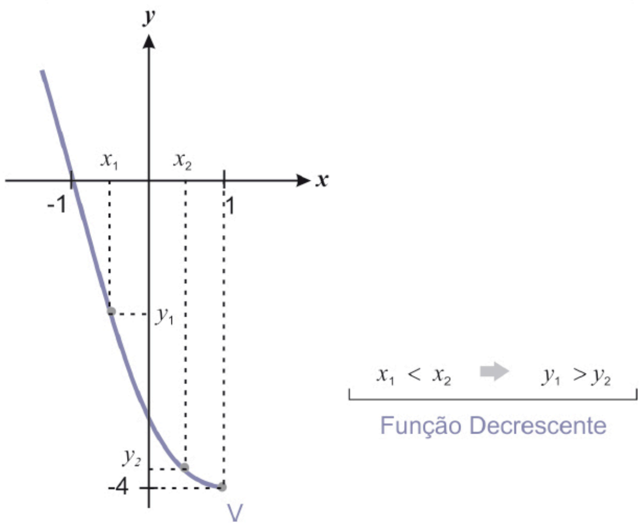
$$\left.\begin{array}{l} x_v = -b/2a = 2/2 = 1 \text{ é o ponto de mínimo} \\ y_v = -\Delta/4a = -16/4 = -4 \text{ é o valor de mínimo} \end{array}\right\} V(1,-4)$$

Podemos representar graficamente a função por:

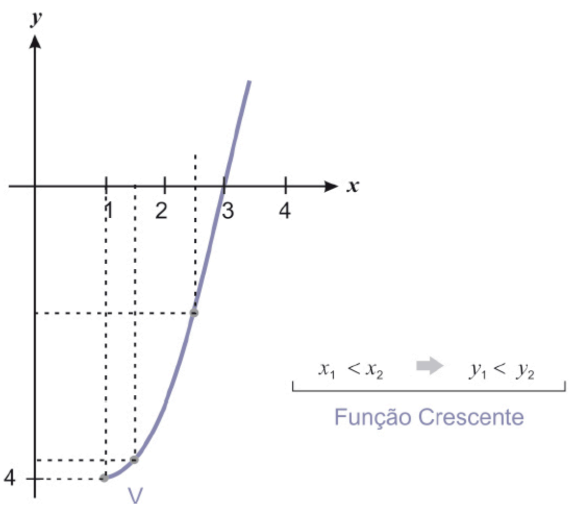


Vamos entender o comportamento das duas partes do gráfico?

Para os valores reais de x menores que a abscissa do vértice, ou seja, $x \leq x_V$, teremos:



Para os valores reais de x tais que $x \geq x_V$, vejamos o que acontece ficando atentos ao gráfico que representa estes pontos da função:



Podemos notar que o vértice determina a mudança de comportamento dessa função. Logo:

- f(x) é decrescente para $\{x \in R \mid x \leq 1\}$.
- f(x) é crescente para $\{x \in R \mid x \geq 1\}$.

Exemplo 4

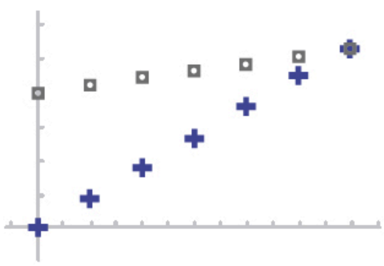
Imagine que, no setor público onde você trabalha, seu coordenador queira oferecer celulares para toda a equipe. Para tanto, ele pede para que você busque algumas companhias telefônicas recém-ingressantes no mercado de telefonia e avalie qual seria a melhor escolha. Imagine que as informações, a seguir, sejam divulgadas na propaganda com o preço em moeda americana (dólar):

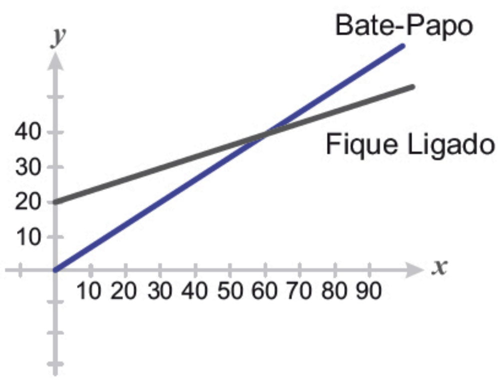
- Empresa Fique Ligado oferece serviço de telefonia por uma taxa mensal de $ 20,00 mais $ 0,10 por cada minuto usado.

- Empresa Bate-papo não cobra taxa básica mensal, mas cobra $ 0,45 por minuto.

Foi informado, também, que ambas as companhias têm uma tecnologia que permite cobrar pelo tempo exato utilizado.

Contudo, seu coordenador havia solicitado a outro colaborador que começasse a avaliar as possibilidades e, assim, você recebe a tabela e os gráficos apresentados da seguinte forma:





Minutos	0	10	20	30	40	50	60
Fique Ligado	$20,00	$21,00	$22,00	$23,00	$24,00	$25,00	$26,00
Bate-papo	$0,00	$4,50	$9,00	$13,50	$18,00	$22,50	$27,00

Então, seu coordenador levanta vários questionamentos sobre a situação:

a) Quanto cobraria cada companhia por 25 minutos? E por 100 minutos?
b) Seria legítimo unirmos os pontos do gráfico?
c) Por que apenas uma das representações gráficas inclui a origem (0,0)?
d) Como encontrar o custo para qualquer quantidade de minutos para cada companhia?

Resolução

Reflita e anote sua resposta antes de continuar. Teste você mesmo! Depois confira.

Por 25 minutos
- → a companhia Fique Ligado cobraria $ 22,50.
- → a companhia Bate-Papo cobraria $ 11,25.

Por 100 minutos
- → a companhia Fique Ligado cobraria $ 30,00.
- → a companhia Bate-Papo cobraria $ 45,00.

Supondo que a companhia calcule qualquer quantidade de minutos fracionários para sua cobrança, seria legítimo unirmos os pontos do gráfico considerando-se que cada custo da ligação de uma companhia corresponde a uma única quantidade de minutos?

Um gráfico contém a origem (0,0) e outro não, pois mesmo que o cliente da companhia Fique Ligado não utilize o serviço de ligação, pagará uma taxa básica mensal de $ 20,00. Já na companhia Bate-Papo o cliente não pagará essa taxa.

Encontramos o custo para qualquer quantidade de minutos em cada companhia substituindo a quantidade desejada nas seguintes equações:

- $y = 20{,}00 + 0{,}10x$ (Fique Ligado)
- $y = 0{,}45x$ (Bate-Papo)

Fazemos y representar o custo em $ (dólar) e x representar a quantidade em minutos.

A partir dessa situação, podemos delimitar outras perguntas, tais como:

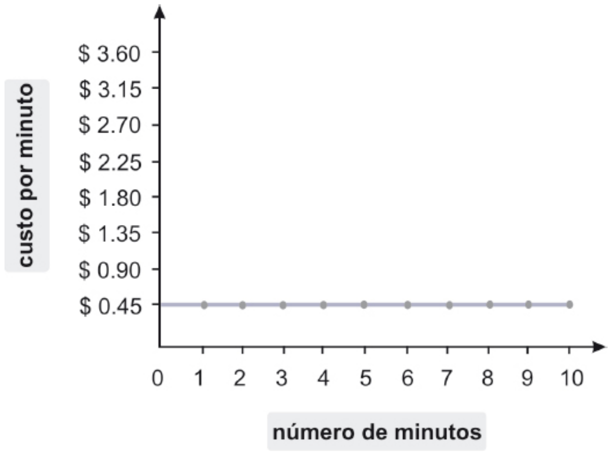
a) Será que podemos dizer que em qualquer momento que se fale ao telefone por um minuto se paga $ 0,10 a mais (ou $ 0,45 a mais)?
b) Qual companhia seria mais econômica se não se pretende demorar muito em cada ligação?
c) Caso uma pessoa não queira gastar mais de $ 50,00 por mês, mas almeja falar o máximo possível, qual seria a melhor escolha?

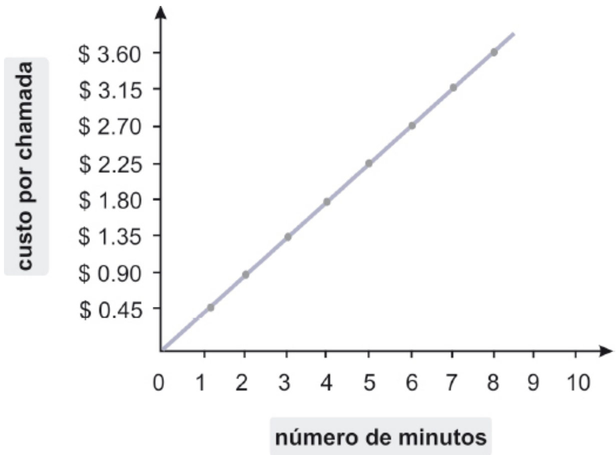
Mais uma vez alertamos: reflita e anote sua resposta antes de continuar. Teste você mesmo!

Resolução

a) Sim, podemos dizer que, em qualquer momento que se fale ao telefone por um minuto, se paga $ 0,10 a mais (ou $ 0,45).
b) Se não se pretende fazer uso do telefone com frequência, a companhia Bate-Papo é a mais econômica.
c) Caso uma pessoa não queira gastar mais de $ 50,00 por mês, a melhor escolha é a companhia Fique Ligado.

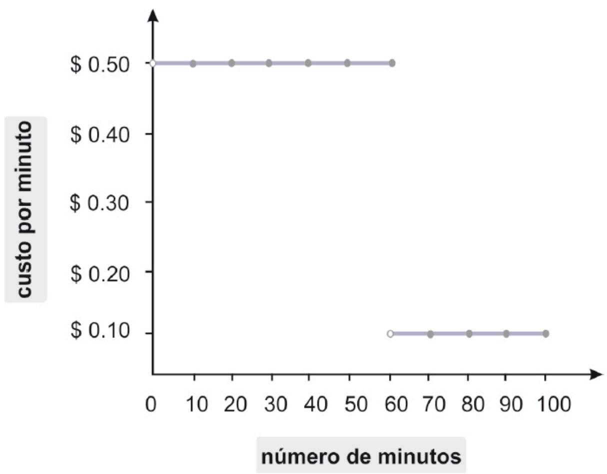
Podemos relacionar todas essas informações de diferentes maneiras. Como exemplo, veja a apresentação, a seguir, da empresa Bate-Papo:

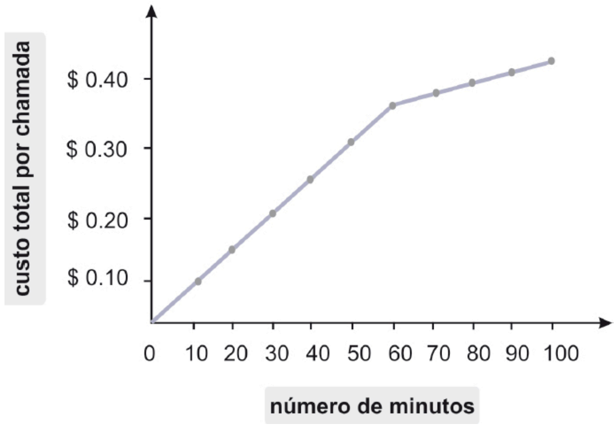




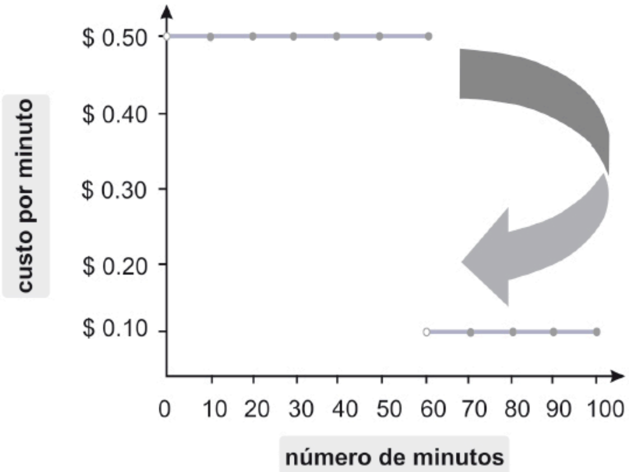
Agora, imagine que você descubra outra companhia, Tempo Rápido – que faz propaganda para o uso mensal de telefone celular por $ 0,50 o minuto para os primeiros 60 minutos e somente $ 0,10 o minuto por cada minuto depois de decorrido esse tempo –, e assim também comece a avaliar sua proposta. Considere que a propaganda informa que a Tempo Rápido também cobra pelo tempo exato utilizado.

Vamos observar algumas maneiras de relacionar as informações da companhia Tempo Rápido por meio de gráficos.



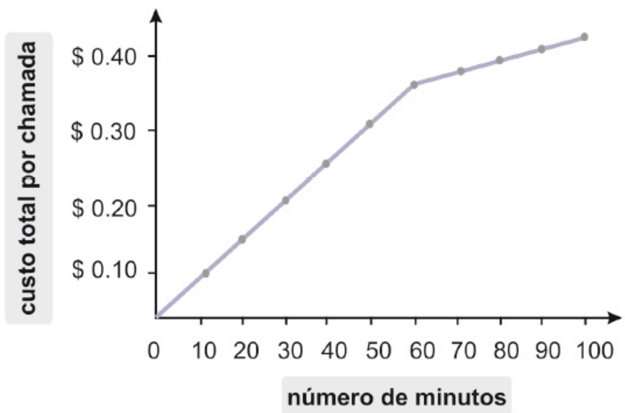


Observe algumas possíveis representações das relações entre as grandezas contidas nas informações da companhia Tempo Rápido e os questionamentos que surgem.



Note que, para cada minuto falado, se associa um valor a pagar. Como você explicaria esse salto na representação gráfica?

O salto se justifica porque, depois de 60 minutos de ligação, o custo por minuto falado fica mais barato.



Note que, à medida que conversamos ao telefone, o preço a pagar aumenta, mas o aumento varia... Como você percebe isso observando o gráfico? Em que parte a variação é maior?

Observando o gráfico notamos que, a partir de 60 minutos ocorre uma variação de custo na quantidade de minutos falados. Graficamente podemos visualizar que de 0 a 60 minutos a variação é maior.

Perceba que o custo a pagar à companhia telefônica **depende** do tempo de conversa ao telefone. Em outras palavras, podemos dizer que o custo a pagar está em **função** do tempo de conversa.

Diferentes Nomenclaturas

Algumas funções recebem nomes especiais de acordo com o contexto ao qual se relacionam.

Funções Racionais

As funções racionais são expressas pela forma:

$y = \frac{f(x)}{g(x)}$, em que f(x) e g(x) são funções polinomiais e $g(x) \neq 0$.

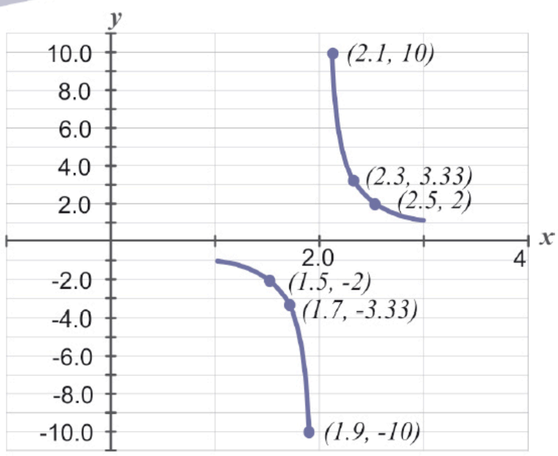
Para entendermos melhor, vejamos a função racional expressa por:

$$y = \frac{1}{x - 2}$$

Agora, observe, na demonstração a seguir, os valores que f(x) assume ao variarmos o valor de x.

Note que $x = 2$ não pertence ao domínio da função

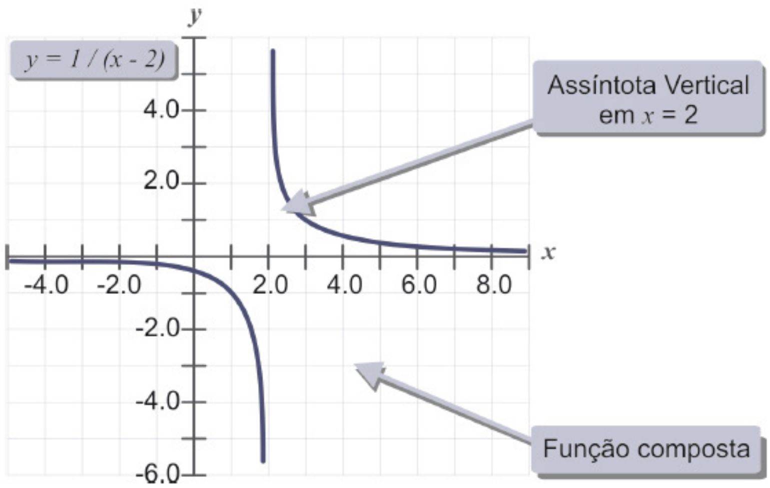
x	$y = \frac{1}{x-2}$
1.5	-2
1.7	-3.33
1.9	-10
2.0	Indefinido
2.1	10
2.3	3.33
2.5	2



Perceba que o gráfico se torna cada vez mais próximo da reta que representa os pontos em que x = 2. Essa reta recebe a denominação de **assíntota** vertical do gráfico. Observe também que, à medida que os valores de x se tornam muito grandes ou muito pequenos, os pontos gráficos se aproximam da reta y = 0. A reta y = 0 é denominada de assíntota horizontal. Por fim, vemos a reta em que y = 0 coincide com o eixo das abscissas – eixo x.

SAIBA MAIS

Mais adiante neste livro, conversaremos com mais detalhes sobre gráficos de funções que possuem assíntotas.



Função Composta

Para identificá-la, suponha uma dada função f definida de A em B e uma dada função g definida de B em C. Denominamos então a função composta de g com f de função h, definida de A em C, tal que $h(x) = g(f(x))$ para todo x pertencente à A.

Logo, a função composta de g e f é indicada por gof (x) (lê-se: g bola f), em que $gof\ (x) = g(f(x))$.

Exemplo 5

Dadas as funções de domínio real $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = x + 1$, determine valores de x para que tenhamos $f(g(x)) = 0$.

Resolução

$g(x) = x + 1$, temos que $f(g(x)) = f(x + 1)$

Logo, $f(x + 1) = (x + 1)^2 - 5(x + 1) + 6$

$x^2 + 2x + 1 - 5x - 5 + 6 = x^2 - 3x + 2$

Assim, $f(g(x)) = x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = 2 \end{cases}$$

Por fim, temos $x = 1$ ou $x = 2$.

Exemplo 6

Sejam as funções reais f e g definidas respectivamente por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 2x^2 - 3$. Determine:

a) $f(g(x))$ e $g(f(x))$; e

b) os valores de x para que se tenha $f(g(x)) = g(f(x))$.

Resolução:

a) $f(g(x)) = f(2x^2 - 3) = 2x^2 - 3 + 1$

$f(g(x)) = 2x^2 - 2$

$g(f(x)) = g(x + 1) = 2(x + 1)^2 - 3 = 2(x^2 + 2x + 1) - 3$
$g(f(x)) = 2x^2 + 4x - 1$

b) $f(g(x))=g(f(x))$
$2x^2 - 2 = 2x^2 + 4x - 1$
$4x = - l \Rightarrow x = -1/4$

Função Custo

Pense em x como a quantidade produzida de um produto. Verificamos que em geral existem alguns custos que não dependem da quantidade produzida, por exemplo: aluguel, seguro etc.

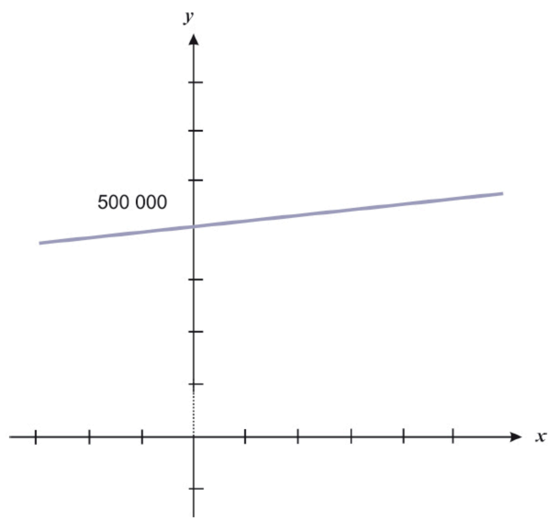
Quando os custos não dependem da quantidade produzida, costumam ser denominados de custos fixos (C_f). A parcela do custo que depende de x é chamada de custo variável (C_v).

O Custo total (Ct) pode ser expresso por:

$$C_t(x) = C_f + C_v$$

Exemplo 7
Suponha que o custo fixo de fabricação de um produto seja de 500.000 u.m. (unidade monetária) e o custo variável por unidade, 10.000 u.m.

Resolução
Ct (x) = 500.000 + 10.000x (função afim)
Graficamente podemos representar por:



Note que, para um produto indivisível (rádios, carros, etc.), os valores de x poderiam ser: 0, 1, 2,... n. E, caso o produto fosse divisível (exemplo: toneladas de aço), os valores de x variariam nos reais não negativos.

As representações gráficas, em ambas as situações, serão pontos alinhados, porém, no caso de o produto ser indivisível, não seria possível unirmos os pontos obtendo linha contínua.

Em geral, quando nada é dito, admitimos o produto em questão como divisível; e o gráfico apresenta uma **curva contínua**.

Função Receita

Supondo que x unidades do produto sejam vendidas, a receita de vendas depende de x. A função que relaciona receita com quantidade é nomeada **função receita** (R).

Logo, temos um produto vendido a 15.000 u.m. a unidade (preço constante). A função receita será dada por:

$$R(x) = 15.000x \text{ (função linear)}$$

Função Lucro

Chamamos função lucro (L) a diferença entre a função receita (R) e a função custo total (Ct), isto é:

$$L(x) = R(x) - C_t(x)$$

Sendo que:
$R(x) > C_t(x)$, temos lucro positivo;
$R(x) < C_t(x)$, obtemos lucro não positivo, ou seja, prejuízo; e
$R(x) = C_t(x)$, o lucro será nulo.

Podemos observar que, na função receita R(x), admitimos o preço constante e trabalhamos com a função receita de 1º grau. Vale lembrarmos que o preço pode sofrer variações conforme a demanda e que o valor de x para o qual o lucro é nulo é chamado ponto crítico, ou ponto de nivelamento $R(x) = C(x)$.

A margem de contribuição por unidade é dada pela diferença entre o preço de venda e o custo variável por unidade.

Exemplo 8
Dado que $Ct(x) = 500.000 + 10.000x$ (custo total) e $R(x) = 15.000x$ (receita total), encontre o ponto crítico.

Resolução
O ponto crítico será o valor de x, tal que:

$R(x) = C_t(x)$
$15.000x = 500.000 + 10.000x$
$x = 100$

Logo, se $x > 100$, haverá lucro positivo e se $x < 100$, lucro negativo.

Podemos encontrar, ainda, a margem de contribuição por unidade:

$$15.000 - 10.000 = 5.000$$

É importante destacarmos, também, o custo médio de produção, ou custo unitário (Cm), que faz referência ao valor obtido pelo custo total dividido pela quantidade. Verifique a expressão matemática a seguir:

$$C_m(X) = \frac{C_t(X)}{X}$$

Função Demanda

Facilmente podemos perceber que a quantidade de um produto com demanda no mercado é função de muitas variáveis, como preço por unidade do produto, preços de bens substitutos, renda do consumidor, preferências etc.

Para melhor compreender, considere p o preço por unidade de certo bem oferecido a um mercado e x a quantidade desse bem com demandada pelos consumidores. O que geralmente acontece é que p depende de x, ou seja, temos uma função $p = f(x)$. Essa função denominamos de função demanda, e o seu gráfico recebe a denominação de curva de demanda.

Normalmente, quanto menor o preço, maior a quantidade demandada – função decrescente.

Função Oferta

A quantidade x de um produto colocada no mercado por produtores relaciona-se com o preço por unidade p desse produto.

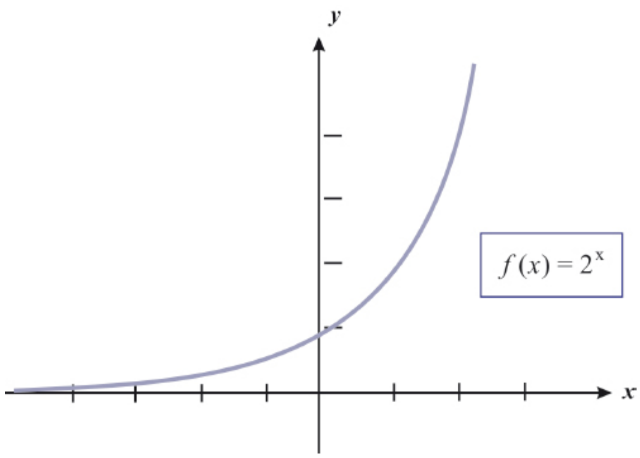
Verificamos que, em geral, quanto maior o preço, maior a quantidade do produto oferecida. Temos, então, uma função (crescente) g, $p = g(x)$, a qual é denominada função de oferta; e o seu gráfico recebe a denominação de curva de oferta.

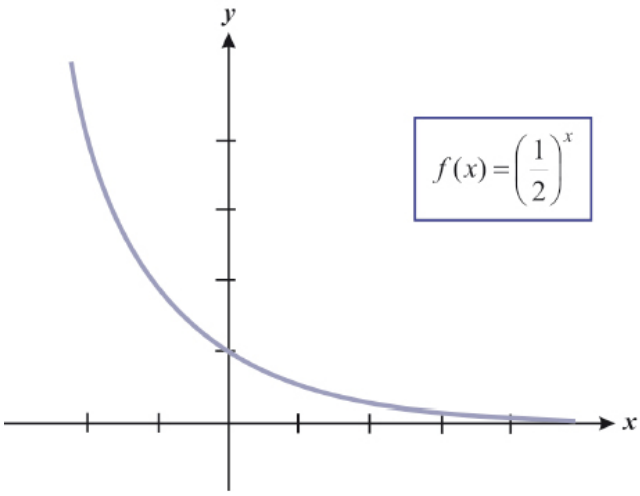
O ponto de interseção P_e dos gráficos da função demanda e da função oferta relacionados a um mesmo produto é denominado ponto de equilíbrio: $P_e\ (x_e, y_e)$.

Função Exponencial

A função que a cada x real associa a potência bx, sendo b um número real positivo e diferente de um (1), é denominada função exponencial de base b, isto é: $f(x) = b^x$, $b > 0$ e $b \neq 1$.

Graficamente





É importante observarmos que, em uma função exponencial $f(x) = b^x$, $b > 0$ e $b \neq 1$, teremos:

- Para $b > 1$, a função representa um crescimento; e
- Para $0 < b < 1$, a função representa um de crescimento.

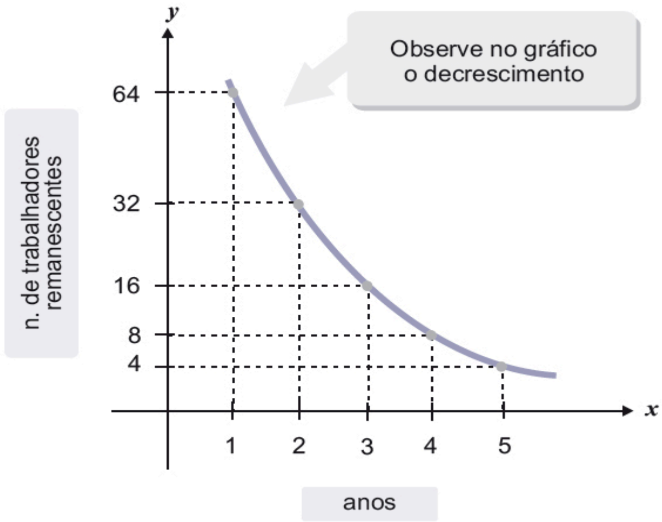
Exemplo 9

Imagine que a informatização de um setor da prefeitura com 128 servidores acarretou na diminuição do quadro de colaboradores. O programa de demissões proposto era assustador e havia uma previsão de demissões anuais para o setor durante cinco anos. Em cada ano, metade do quadro de colaboradores seria demitido. Perguntamos: seriam mesmo necessários cinco anos dessa política de demissões, uma vez que o setor necessitava de um mínimo de 10 colaboradores para dar continuidade ao serviço?

Resolução

Ano	1	2	3	4	5
Números de trabalhadores remanescentes	64	32	16	8	4

$y = a\,(1 - r)^x$	a = quantidade inicial antes das demissões iniciarem; r = taxa de decrescimento; e x = tempo (anos).
$y = 128\,(1 - 0{,}50)^x$	x varia de 1 a 5 para este problema.



Outra situação a ser observada é que o crescimento de uma aplicação financeira a juros compostos é exponencial. Pois, ao aplicar um capital inicial (principal), este pode aumentar, como bem sabemos, de acordo com os juros e segundo duas modalidades:

- **Juros simples:** ao longo do tempo, somente o principal rende juros.

- **Juros compostos:** após cada período, os juros são incorporados ao principal e passam, por sua vez, a render juros. Também conhecidos como juros sobre juros.

Vejamos alguns detalhes:
Quando um capital C é aplicado durante t unidades de tempo, e a taxa i de juro, por unidade de tempo é aplicada apenas sobre o capital inicial, o juro J é chamado de **juro simples**. Esse juro ao final da aplicação é calculado por:

$$J = C \,.\, i \,.\, t$$

Parece claro ser conveniente e vantajoso aplicar algum recurso incorporando o rendimento ao capital. Você concorda? Veja abaixo um exemplo de como ficaria a aplicação com a proposta de rendimento de juro simples ao ano.

Exemplo 10
Suponha que um investidor aplicasse R$ 15.000,00 à taxa de 30% ao ano. Vamos encontrar qual seria o juro obtido ao fim de 80 dias, sob o regime de juro simples?

Resolução
Como a unidade da taxa foi informada em anos e o período de tempo informado em dias vamos inicialmente transformar, o número de dias em anos. Teríamos nesta situação duas possibilidades: usar o mês e o ano comercial (30 e 360 dias, respectivamente), ou o ano civil de 365 dias (366 dias no caso de ano bissexto).

- Na primeira possibilidade: ano comercial de 360 dias $t = 80$ dias $= 80/360 = 2/9$ ano
  $J = C.i.t \Rightarrow J = 15.000 \cdot 0{,}30 \cdot 2/9 \Rightarrow J = 1.000$

- Na segunda possibilidade: ano civil de 365 dias $t = 80$ dias $= 80/365 = 16/73$ ano
  $J = C.i.t \Rightarrow J = 15000 \cdot 0{,}30 \cdot 16/73 \Rightarrow J = 986{,}30$

O juro acumulado por 80 dias usando o ano civil geralmente é denominado de juro exato, enquanto o juro calculado pelo ano comercial tem sido denominado juro comercial.

Portando, ao final de 80 dias de aplicação de R$ 15.000,00 à taxa de 30% ao ano obteríamos R$ l.000,00 de juro comercial ou R$ 986,30 de juro exato.

Será que esta seria uma boa aplicação?

Acreditamos que o modelo de juro mais adequado para as transações seja o de juros compostos; e apresentamos alguns detalhes:

- no final da primeira unidade de tempo considerada na aplicação, a taxa de juro incide sobre o capital inicial;

- a partir da segunda unidade de tempo considerada, a taxa de juro incide sobre o montante acumulado na unidade de tempo anterior.

Lembre-se de que no juro simples, como foi apresentado no exemplo anterior, a taxa incidiu apenas sobre o capital inicial.

Que tal compreendermos como encontrar uma fórmula para o cálculo do montante com juro composto e taxa constante?

Vamos calcular o montante M, no fim de cada unidade de tempo, da aplicação de um capital C a juro composto, à taxa i por unidade de tempo.

Unidades de tempo	Capital	Juro	Montante
1	C	iC	$C + iC = C(1 + i)$
2	$C(1 + i)$	$iC(1 + i)$	$C(1 + i) + iC(1 + i) = C(1 + i)^2$
3	$C(1 + i)^2$	$iC(1 + i)^2$	$C(1 + i)2 + iC(1 + i)2 = C(1 + i)^3$
4	$C(1 + i)^3$	$iC(1 + i)^3$	$C(1 + i)3 + iC(1 + i)3 = C(1 + i)^4$
:	:	:	:

A última coluna dessa tabela possibilita concluirmos que, em cada unidade de tempo t, o montante M é dado por: $M = C(1 + i)^{t}$.

Vale ainda ressaltarmos algumas observações:

- Para aplicar a fórmula $M = C(1 + i)t$, devemos adequar t e i na mesma unidade de tempo.

- Com essa equação calculamos o montante com juro composto e taxa constante (sempre a mesma em cada unidade de tempo). Se as taxas variarem nas unidades de tempo, isto é, i1 na primeira unidade, i2 na segunda unidade, i3 na terceira unidade; ....; it na unidade t, então o montante M será dado por : $M = C(1 + i1)(1 + i2)(1 + i3) \times ... \times (1 + it)$.

Exemplo 11:
Calcular o montante acumulado por um capital inicial de R$ 10.000,00 aplicado durante 6 meses a juros compostos de 5% ao mês. Dado: $(1,05)6 \cong 1,34$.

Resolução:
Aplicamos a fórmula $M = C(l + i)t$, em que:
C = R$ 10.000,00; i = 5% ao mês = 0,05 ao mês; e t = 6 meses

Teremos:
$M = 10.000(1 + 0,05)6 \Rightarrow M = 10.000(1,05)6 \Rightarrow M = 10.000 . 1,34 \Rightarrow M = 13.400$

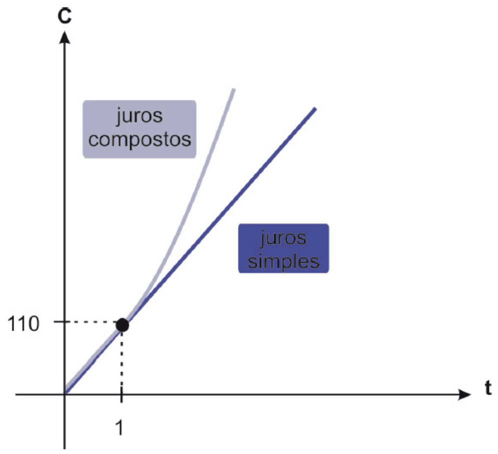
Logo, o montante é M = R$ 13.400,00, aproximadamente.

Vamos novamente entender a diferença entre os crescimentos de um capital por intermédio de juros simples e de juros compostos através de um exemplo?

Para tanto, suponha que R$ 100,00 são empregados a uma taxa de 10% a.a.

PRINCIPAL = 100	JUROS SIMPLES	JUROS COMPOSTOS
Nº de anos	Montante simples	Montante composto
1	100 + 0,1 (100) = 110	100 + 0,1 (100) = 110,00
2	110 + 0,1 (100) = 120	110 + 0,1 (110) = 121,00
3	120 + 0,1 (100) = 130	121 + 0,1 (121) = 133,10
4	130 + 0,1 (100) = 140	133,1 + 0,1 (133,1) = 146,41
5	140 + 0,1 (100) = 150	146,41 + 0,1 (146,41) = 161,05

Observe que o crescimento do principal segundo juros simples é **linear**, enquanto o crescimento segundo juros compostos é **exponencial**; portanto, tem um crescimento muito mais "rápido".



Já no que diz respeito a juros compostos, considere o capital inicial (principal P) \$ 1.000,00 aplicado a uma taxa mensal de juros compostos (i) de 10% (i = 10% a.m.). Vamos calcular os montantes (principal + juros), mês a mês:

- Após o 1º mês, teremos:
  $M_1 = 1.000 \times 1{,}1 = 1.100 = 1.000(1 + 0{,}1)$
- Após o 2º mês, teremos:
  $M_2 = 1.100 \times 1{,}1 = 1.210 = 1.000(1 + 0{,}1)^2$
- Após o 3º mês, teremos:
  $M_3 = 1.210 \times 1{,}1 = 1.331 = 1.000(1 + 0{,}1)^3$

Observação de Interesse

Observe as funções $y = x^2$ e $y = 2^x$. Nas duas expressões temos uma base e um expoente.

A função $y = x^2$ é denominada de função quadrática, e $y = 2^x$ recebe a denominação de função exponencial.

Funções exponenciais são ideais para modelar situações em que crescimento ou decrescimento acontecem.

Todo crescimento exponencial se encaixa no seguinte padrão: "a quantidade de crescimento é proporcional ao tamanho". Por exemplo, o juro que uma conta bancária ganha é proporcional ao tamanho da conta. Em contraste, a altura de uma pessoa não cresce exponencialmente.

O dinheiro investido a uma taxa de juro composto cresce exponencialmente.

E quando se fala em depreciação ou desvalorização?

A depreciação por uma taxa fixa significa que uma peça de um equipamento perde uma porcentagem fixa de seu valor a cada ano.

Isto significa quase o mesmo que calcular o juro composto... exceto... que a taxa de juro é negativa. Consequentemente, a taxa "i" neste caso é negativa.

Suponha que um carro de valor R$15.000,00 deprecia seu valor em 40% a cada ano. Quanto será o seu valor após 3 anos?

$$\mathbf{M(n) = C(1 + i)^n}$$
$$\mathbf{M(3) = R\$\ 15.000(1 - 0.40)^3}$$
$$\mathbf{M(3) = R\$\ 15.000(0.60)^3}$$
$$\mathbf{M(3) \approx R\$\ 3.240.00}$$

TEXTO COMPLEMENTAR

Amplie seus conhecimentos pesquisando no portal Só Matemática:

- *Portal Só Matemática* - disponível em: <**http://www.somatematica.com.br/emedio/funcao1/funcao1.php**>. Acesso em: 31 jan. 2014.

Resumindo

Neste Capítulo, você teve a oportunidade de reconhecer e compreender as funções em suas diferentes características e especificidades. As diversas maneiras de representar uma função e suas respectivas interpretações estiveram em evidência como aliadas do processo de compreensão da relação entre diferentes grandezas variáveis.

Respostas das Atividades

1.
a) $\{x : x \neq -5\}$
b) $\{x : x \in R\}$
c) $\{x : x \geq -9\}$
d) $\{ x : x \in R\}$

CAPÍTULO IV

LIMITE E CONTINUIDADE

Profa. Maria Teresa Menezes Freitas

Objetivos Específicos de Aprendizagem

Ao finalizar este Capítulo, você deverá ser capaz de:

- Resolver limite de função graficamente e algebricamente no contexto administrativo;
- Interpretar situações problemas que envolvam a noção de limite de funções;
- Descrever e reconhecer os tipos e o significado de descontinuidade de uma função no contexto administrativo;
- Relacionar descontinuidade de uma função com seu limite; e
- Explicar o significado da definição de continuidade de função.

Limite (Des)Continuidade de uma Função

Caro estudante,
O que você vai aprender neste Capítulo tem grande importância, não apenas em Matemática, como também em sua vida profissional. Aqui você irá conhecer o significado da definição de continuidade de função e relacionar descontinuidade de uma função com seu limite. Vamos aquecer a nossa conversa com o exemplo ilustrativo sobre a noção de limite?

Introdução: Compreendendo o Conceito de Limite

A noção de **limite** é um dos conceitos mais básicos e poderosos em toda a Matemática. A Diferenciação e Integração, que complementam o estudo do cálculo, são conceitos relacionados ao limite, o qual pode ser considerado como a **pedra fundamental** do cálculo e, como tal, se apresenta como a base de tudo o que se seguirá.

SAIBA MAIS

É muito importante que você compreenda bem a noção de limite de uma função para que possamos caminhar juntos pelos conhecimentos relacionados ao cálculo.

Antes de continuarmos nossa conversa, achamos interessante dizer que a álgebra trata de uma matemática "estática" e não pode ser utilizada para analisar a dinâmica de um objeto em movimento, por exemplo. A matemática do cálculo, entretanto, tem a capacidade de fazer tais análises. O principal conceito que nos permite fazermos a transição da álgebra (estática) para o cálculo (dinâmico) é o de **limite de uma função**.

O cálculo se torna necessário quando precisamos encontrar a variação matemática. E esse conceito é de vital importância em Física, em Administração, em Engenharia e em várias outras áreas de estudo.

Exemplo 1

Imagine que exista uma fogueira com chamas ardentes. À medida que você se aproxima do local onde está a fogueira, a distância x entre você e o fogo diminui. A qualquer distância, x, você sente o calor na sua face. Deixemos que a temperatura da superfície de sua pele facial seja denominada por f(x). Teremos então:

- $x \rightarrow$ distância até a fogueira; e
- $f(x) \rightarrow$ temperatura da superfície da sua face.

Perceba que, à medida que se aproxima da fogueira, a sensação de calor aumenta.

Logo, você realmente não gostaria de ter o valor de x igual a 0 (x = 0), certo?

Mas mesmo não tendo $x = 0$, podemos imaginar qual seria a temperatura da superfície de sua pele se o fizesse.

Com esse exemplo simples, gostaríamos que você fizesse uma analogia com a **noção de limite**, que não precisa assumir o valor de x, mas é preciso conhecer o que acontece na vizinhança de x.

SAIBA MAIS

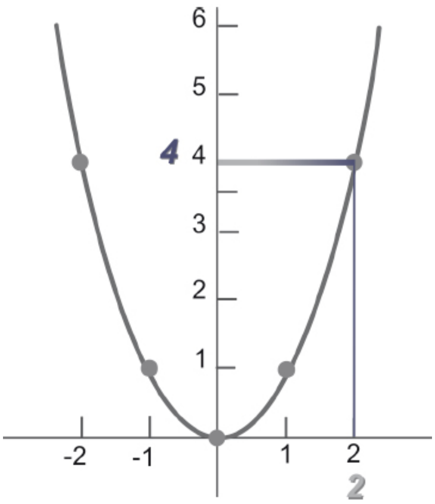
Amplie seus conhecimentos por meio do site <**http://www.somatematica.com.br/superior/limites/limites.php**>. Acesso em: 31 jan. 2014.

Geralmente utilizamos em limite as palavras **tender** ou **tendendo** para pensar na ideia de aproximação ao máximo possível. A compreensão de **tendência** quando se trata de limite pode ser associada à ideia de **chegar pertíssimo** ou **aproximar ao máximo possível**, como na história da fogueira ilustrada acima.

De uma maneira bem simples, poderíamos dizer que a noção de limite se relaciona ao valor de y ou à altura (y) que a função tem intenção de atingir.

Normalmente temos lidado com funções bem-comportadas e, dessa maneira, não nos parece ter sentido dizer a altura (y) que a função tenciona atingir.

Vamos observar uma função bem simples e conhecida, $f(x) = x^2$, cujo gráfico é uma parábola.



Note que a função f(x) atinge certa altura (y) à medida que variamos x por todo seu domínio. Assim, se tivermos x igual a 2, a função atinge o valor 4 quando x assume o valor 2.

Você deve estar se perguntando: como assim?

Isso é muito simples, pois basta que substituamos o lugar de x na função por 2. Ou seja: $f(2) = (2)^2$, isto é, $f(2) = 4$.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

Então, apresentando nossa primeira afirmação utilizando os termos de limite, temos que: o limite da função f(x) quando x **tende** a 2 é igual a 4.

Isso significa dizer que, quando estamos chegando **bem próximos** de 2, a função está se aproximando cada vez mais de 4.

Até aqui tudo está muito simples e tranquilo na nossa conversa, mas a situação pode mudar quando nossa função for outra, não tão bem-comportada e que não necessariamente atinja a altura que parece pretender atingir.

Vamos pensar na função $f(x) = \dfrac{16 - x^2}{4 + x}$.

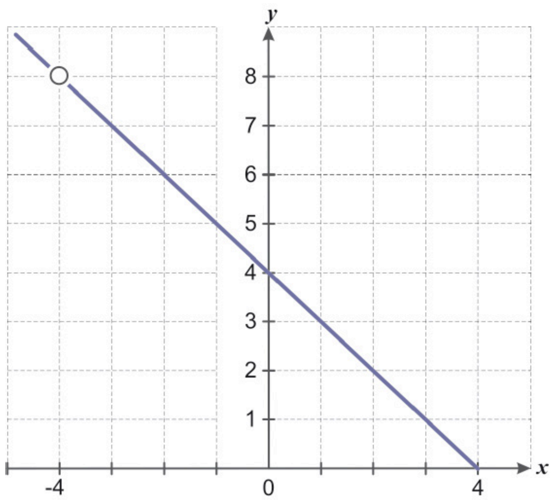
Façamos uma tabela para avaliar o comportamento da função $f(x) = \dfrac{16 - x^2}{4 + x}$ na vizinhança de – 4.

x	F(x)
-4.1	8.1
-4.01	8.01
-4,001	8.001
-4	Indefinido
-3.999	7.999
-3.99	7.99
-3.9	7.9

SAIBA MAIS

D: {x ∈ _, x ≠ – 4} Note que, quando x se aproxima de – 4, a função f(x) se aproxima de 8. A tenção! Isso nos será útil para compreendermos limite.

Agora, dê uma olhadinha no esboço do gráfico da função a seguir.



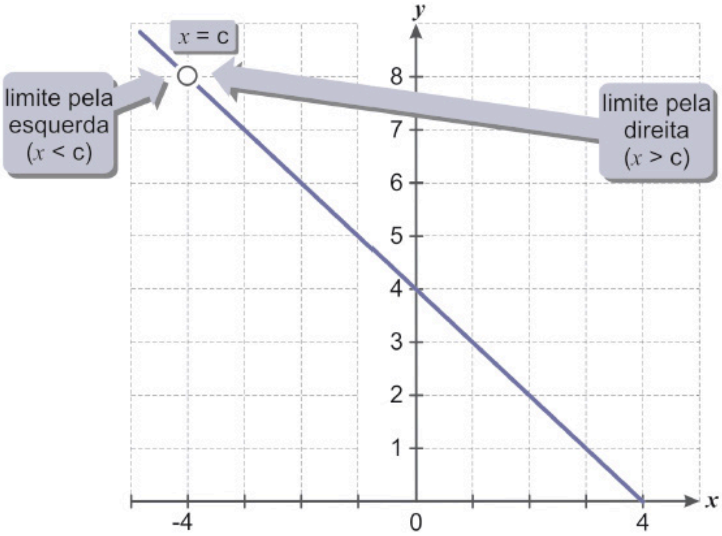
Observe que o gráfico contém um buraco, pois a função não está definida para o valor de x = - 4, ou seja, o valor - 4 não faz parte do domínio da função.

Você percebe por que isso acontece? E o que acontece quando substituímos x por (-4)?

Vejamos: $f(x) = \dfrac{16 - (-4)^2}{4 + (-4)} = \dfrac{0}{0}$

Sabemos que este quociente $\dfrac{0}{0}$ não é uma boa ideia, pois quebra algumas normas da Matemática e trata-se de um valor indefinido. Assim, não podemos encontrar o valor do limite ou o valor que a função tem intenção de atingir quando o x se aproxima de (-4) por substituição simples, como havíamos feito anteriormente para a função quadrática.

Entretanto, percebemos pela tabela e pelo gráfico que a função parece ter a intenção de atingir o valor 8 quando x se aproxima de (-4), tanto pela direita, quanto pela esquerda. Observe o gráfico:



Para encontrarmos o limite de uma função, não nos interessa o valor que ela assume no valor de x, mas sim o valor que tende a atingir.

Você lembra que não foi preciso atingir a fogueira?

Assim, vamos procurar encontrar outra forma de escrevermos a função e que seja equivalente à primeira, quando x ≠ – 4. Para tal, vamos nos lembrar do conceito de fatoração.

$$f(x) = \frac{16 - x^2}{4 + x} = \frac{\cancel{(4 + x)}(4 - x)}{\cancel{4 + x}} = 4 - x$$

Lembre-se que queremos encontrar

$$\lim_{x \to -4} \frac{16 - x^2}{4 + x} = ?$$

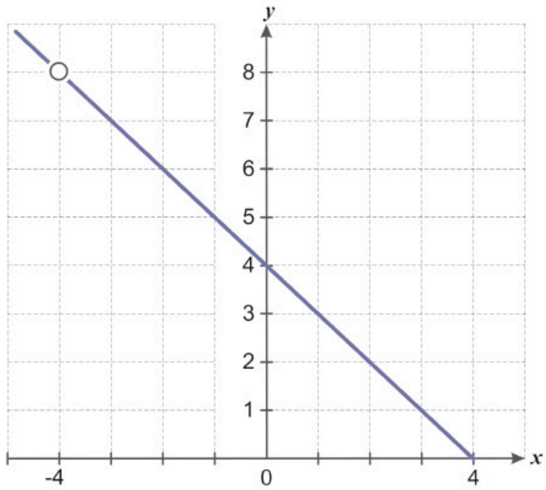
Teremos, após fatoração e supondo que x não assume o valor

$$\text{-4} \lim_{x \to -4} (4 - x) = ?$$

A função, quando expressa nessa nova forma, propicia utilizarmos a substituição para encontrarmos o limite, e, assim, podermos obter como resultado o valor 8.

Fique atento, pois a alteração realizada é apenas para o cálculo de limite. Para fazermos o esboço do gráfico da função, devemos lembrar que nele continua existindo o buraco quando temos x = – 4, pois esse valor não faz parte do domínio da função.

$x = -4$



Em cálculo, nos interessa irmos além da função, por isso focamos nos limites dela. O limite envolve o estudo do comportamento (ou tendência) de uma função em vizinhanças bem pequenas em volta de um determinado valor x = a.

Mas imagine passar o gráfico de uma função por um microscópio. Podemos dizer que isto é o que acontece quando procuramos pelo limite de uma função. Queremos saber o que acontece com a função quando nos aproximamos de um determinado valor de x.

Expressando simbolicamente, temos que:

O limite de uma função lim f(x)
...Descreve o comportamento da função conforme a entrada... x
...Aproxima-se... $\rightarrow$
...De um valor particular c.

Portanto, o limite de uma função descreve o comportamento da função quando a entrada se aproxima de um valor particular. Veja como simbolicamente expressamos o limite de uma função f(x) quando x tende a c.

$$\lim_{x \to c} f(x) = \mathrm{L}$$

Podemos dizer que o limite nos dá uma **informação pontual sobre a função**. Ele indica para **onde tende** a função em um ponto no qual ela não está definida, ou nos fornece o valor da função em um ponto onde ela está definida.

O limite de uma função em um ponto se baseia no comportamento local da função na vizinhança deste ponto.

Em outras palavras, o limite seria o valor que a função assumiria se considerássemos os valores da vizinhança próxima de x, mas não no próprio ponto.

Exemplo 2

Dada a função $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$, encontre o limite da função.

Resolução

Inicialmente pode não parecer tão simples quanto o exemplo anterior. Mas, a substituição de 4 em x para avaliar a função não parece ser uma boa ideia, pois teremos zero (0) no denominador.

Também pensar em fatoração não se apresenta como uma boa opção. Vamos então tentar a multiplicação pelo **conjugado** da parte onde aparece o radical.

Você pode estar se perguntando: o que vem a ser conjugado?

Conjugado é a mesma expressão, porém com a operação inversa. Assim, o conjugado de √x-2 seria √x+2. Então, tentaremos multiplicar e dividir por esse valor para não alterarmos a função. Estaremos multiplicando por 1, que não altera, pois 1 é o elemento neutro da multiplicação. Observe a seguir:

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} =$$

O conjugado tem a mesma expressão, mas operação inversa.

$^n/_n = 1$…então, colocar o conjugado sobre si próprio é como multiplicar por 1.

Assim, multiplicando por 1, não alteramos o valor da fração.

Veja como esse artifício de multiplicar e dividir pelo conjugado nos ajudará a encontrar o limite. Obteremos uma função equivalente quando considerarmos x diferente de 4. Vale lembrar que em limite o que nos interessa é o que acontece na vizinhança do ponto, ou seja, na vizinhança de 4.

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{x - 4}{(x - 4).(\sqrt{x} + 2)}$$

Note que obtemos no numerador e no denominador a expressão (x – 4). Ao considerarmos x diferente de 4, poderemos simplificar, pois

$\dfrac{x - 4}{x - 4} = 1.$

Ficaremos, então, com a seguinte função para calcular o limite:

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{\cancel{x - 4}}{\cancel{(x - 4)}.(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = ?$$

Agora podemos, com a substituição, avaliar a função, pois, ao substituirmos x por 4, obteremos $\frac{1}{4}$.

Logo,

$$\lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

Nesse ponto já temos uma boa ideia do que vem a ser o limite de uma função. Contudo, é importante lembrarmos que a função terá limite quando, fazendo x tender a um determinado ponto c na sua vizinhança, a função tende para um mesmo valor L, ou seja, a função tende a assumir uma mesma altura (no gráfico).

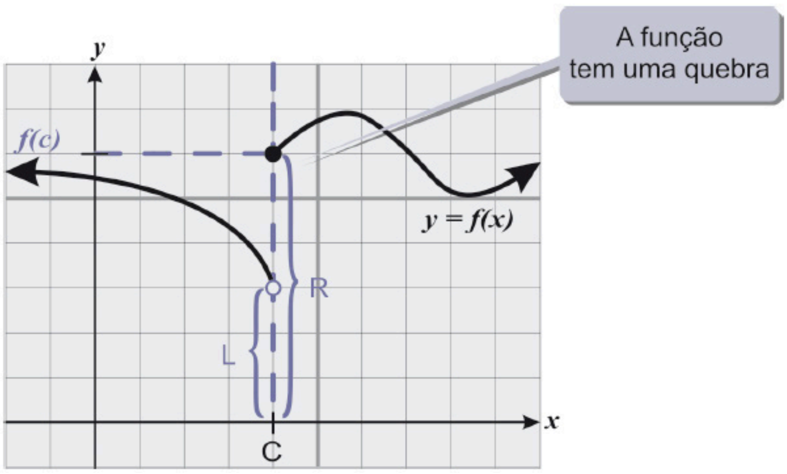
Mas será que o limite sempre existe? Que condições garantem a existência do limite?

Acompanhe a história a seguir, que tenta ilustrar essa ideia de existência do limite.

Imagine que você e seu amigo, que moram em cidades próximas, tenham marcado um jantar em um restaurante que fica entre as duas cidades. Você sai de carro de sua casa e toma uma estrada rumo ao restaurante. Seu amigo faz o mesmo: entra no carro e toma uma estrada para encontrar você no restaurante combinado.

Pense agora que a estrada representa graficamente uma função. Se vocês de fato chegarem ao restaurante, quando você tomou o caminho que aproxima pela direita e o seu amigo o caminho pela esquerda, teremos a ideia de existência do limite. Se um de vocês, vindo de uma das direções (direita ou esquerda – Leste/Oeste), não chegar ao destino, o limite não existe.

Observe que, na função representada no gráfico a seguir, o limite para x tendendo ao valor c não existe. Para melhor compreender, imagine que a função represente, em cada parte, as estradas que cada um tomou para chegar ao restaurante combinado, que se localizava em (c, f(c)). Logo, nesse caso você e seu amigo não se encontrariam.



Veja o gráfico da função f(x). Ele nos mostra que o limite de f(x) não existe para x tendendo ao valor c.

Podemos observar que, se caminhamos pela direita no gráfico, chegamos a uma altura R do gráfico, e, quando caminhamos pela esquerda, chegamos a uma altura diferente, que denominamos por L. Isso significa que o limite da função em c não existe.

Chamamos a altura a que chegamos vindo pela direita de **limite à direita** e indicamos com o símbolo (+). Para a altura a que chegamos vindo pela esquerda denominamos **limite à esquerda** e indicamos com o símbolo (–). Para que o limite exista, os limites à esquerda e à direita devem ser iguais, ou seja:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x)$$

É importante dizermos que, embora a função f(x) representada, conforme demonstração, não possua limite em x = c, isto não significa que ela não tenha limites para x tendendo a outros valores. Veja que a função tem uma quebra em x = c, quebra que nos leva à não existência do limite.

Existência de Limite

O limite de f(x), quando x tende a c $\lim_{x \to x} f(x)$ existe, se e somente se, **ambos** os limites laterais existem e são iguais ao mesmo número L.

Voltando à história do restaurante no meio das duas cidades, imagine que vocês se dirijam para o restaurante vindos de diferentes direções (Leste/Oeste – esquerda/direita) e, ao chegarem ao local combinado, o restaurante não esteja mais lá (pegou fogo, por exemplo).

Matematicamente, o limite nessa situação existe ainda que a função tenha um buraco. O que interessa no cálculo do limite não é se o ponto está lá, mas, sim, que vocês cheguem ao mesmo local.

Caminhos para Encontrar o Limite

Como já vimos, quando existe o limite, os caminhos mais comuns para encontrarmos o limite de uma função são:

- **Substituição:** quando é possível avaliar a função substituindo o valor de x.

- **Fatoração:** quando não é possível avaliar a função por substituição, mas a expressão do numerador possibilita a fatoração.

- **Multiplicação pelo conjugado:** indicado para expressões que contêm radical.

Limites no Infinito

Vamos nesta seção conversar sobre o mistério e a relação que existem entre limite e infinito.

Vamos avaliar algumas funções em determinados valores de x. Note que chegaremos a alguns resultados um tanto curiosos. Examinemos juntos a função $f(x) = \frac{2x}{x-3}$.

Observe que, ao substituirmos x por 3, obteremos o valor $\frac{6}{0}$.

Vimos anteriormente a situação em que encontramos $\frac{0}{0}$ e, para driblarmos e encontrarmos o limite, recorremos à fatoração, substituição e multiplicação pelo conjugado.

A situação que se apresenta nesse momento é um tanto diferente. Observe $f(3) = \frac{2 \,.\, 3}{3 - 3} = \frac{6}{0}$.

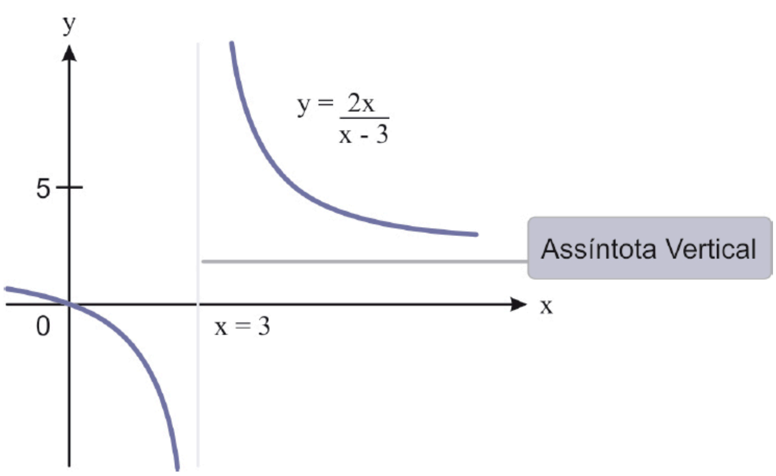
Quando obtemos um número diferente de zero divido por zero, isso indica a presença de uma **assíntota vertical***.

SAIBA MAIS

***Assíntota** - uma reta imaginária que se aproxima da curva, mas nunca a toca. Fonte: Elaborado pela autora deste livro.

***Assíntota Vertical** - se f(x) tende para infinito (ou infinito negativo) quando x tende para c pela direita ou pela esquerda, então a reta x=c é uma assíntota vertical do gráfico de f. Fonte: Larson, Hostetler e Edwards (1998).

Vamos acompanhar pelo gráfico o que acontece com a função na vizinhança do valor x = 3.



Podemos observar com facilidade que os limites da direita e da esquerda, quando x se aproxima de 3, são diferentes.

Note que, à medida que nos aproximamos de 3 pela direita, a função cresce infinitamente; e poderíamos dizer que o limite de f(x) pela direita é infinito ($+\infty$). Note que no caso de ser ($+\infty$) não há necessidade de escrevermos o sinal (+); basta escrevermos (∞).

Entretanto, à medida que nos aproximamos de 3 pela esquerda, a função decresce negativamente infinitamente, e poderíamos dizer que o limite de f(x) de x tendendo a 3 pela esquerda é menos infinito ($-\infty$); e aí neste caso utilizamos o sinal (-).

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

x	$\frac{2x}{x-3}$
3,5	14
3,4	17
3,3	22
3,2	32
3,1	62
3,05	122
3,01	602
3,0001	60.002

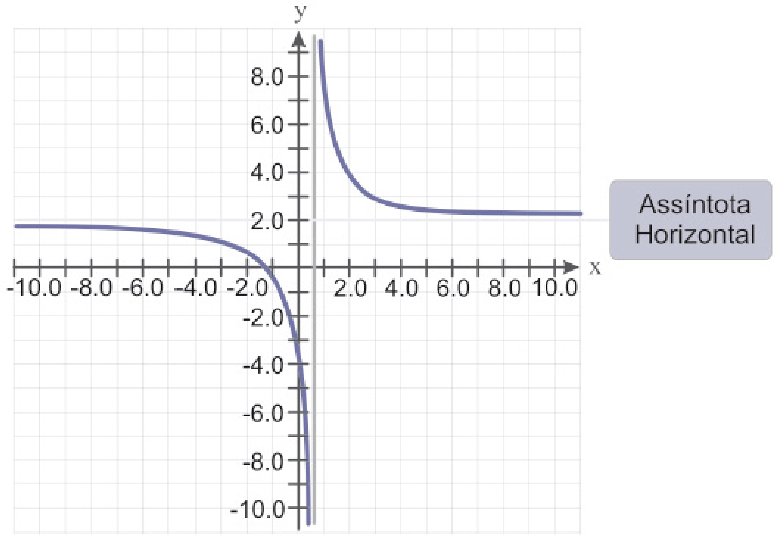
$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

x	$\frac{2x}{x-3}$
2,5	-10
2,6	-13
2,7	-18
2,8	-28
2,9	-58
2,95	-118
2,98	-298
2,999	-5.998
2,9999	-59.998

Assim, podemos identificar que não existe o limite da função quando x tende a 3, pois os limites laterais são diferentes.

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x}{x-3} = \textit{não existe}$$

As assíntotas horizontais também se relacionam com o infinito de uma maneira diferente. Vamos analisar a função $f(x) = \dfrac{4x}{2x - 1}$ e seu gráfico:



Note que $\dfrac{1}{2}$ não pertence ao domínio da função e também não existe o limite da função quando x tende a $\dfrac{1}{2}$. Veja que neste caso temos uma assintota horizontal em y= 2 e uma assintota vertical em x = 1 .

Observemos, também, o que acontece quando x tende para valores infinitamente grandes. Percebemos que a função tende a assumir valores próximos a 2, isto é, a função se aproxima da altura y = 2.

Matematicamente, isso significa que o limite da função quando x tende ao infinito é 2.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x}{2x - 1} = 2$$

x	$\dfrac{4x}{2x - 1}$
10.000	2,0001
10.000.000	2,0000001
100.000.000	–
100.000.000.000	–
100.000.000.000.000	–

Também podemos identificar que, quando a função tende a assumir valores negativos e infinitamente pequenos, a função também se aproxima da altura 2.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x}{2x - 1} = 2$$

Assim, podemos dizer que o limite existe e é igual a 2. Ou seja,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{2x-1} = 2$$

Agora que já compreendemos como se comporta o limite no infinito, vamos conhecer uma maneira prática de calculá-lo no infinito. Preparado para continuar?

Para calcularmos o limite no infinito, isto é, $\lim_{x \to \infty} f(x)$, basta compararmos o grau – maior expoente – das expressões do numerador e do denominador. Se o limite existe, a função terá uma assíntota horizontal no limite.

No caso em que o grau do numerador da fração que expressa a função que queremos calcular o limite for o mesmo, então o limite será o número resultante dos coeficientes destes termos. Retornando ao nosso exemplo $\lim_{x \to \infty} \frac{4x}{2x-1}$, note que o grau das expressões do numerador e do denominador é 1 (lembre-se: quando não está expresso o expoente, subentende-se ser o expoente 1, ou seja, $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^1}{2x^1 - 1})$). Assim, temos como coeficientes – no numerador, 4 e no denominador, 2. Dessa forma, teremos o coeficiente $\frac{4}{2}$, que ao ser simplificado chega ao resultado 2. Veja que confere com o resultado que pudemos observar no gráfico exibido anteriormente.

E, se o grau numerador for maior que o grau do denominador, teremos como resultado ∞, ou seja, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Vale observar que, quando dizemos que o limite é infinito, tecnicamente estamos dizendo que o limite não existe, pois este deve ser um número real.

É mais correto dizermos que o limite não existe, pois cresce infinitamente, em vez de dizermos que o limite é igual a infinito.

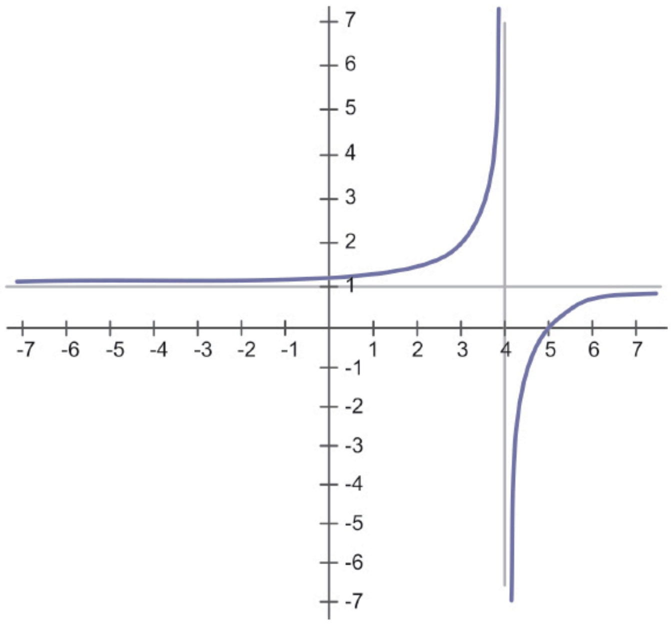
Contudo, se o grau do denominador for maior que o grau do numerador, teremos $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. Retomando o que dissemos anteriormente:

- Quando $\lim_{x \to c} f(x) = \infty \text{ ou } -\infty$, a função f terá uma assíntota vertical em x = c.
- Quando $\lim_{x \to \infty} f(x) = d$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = d$ existe, então f(x) tem uma assíntota horizontal em y = d.

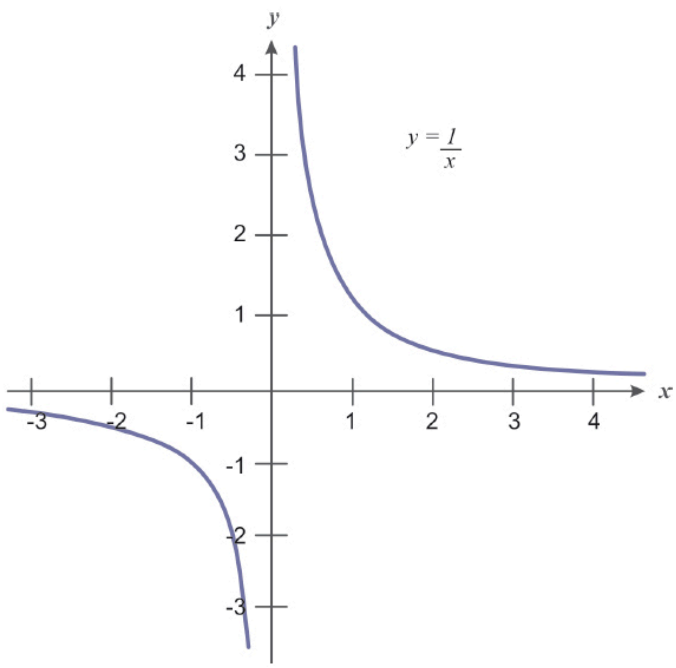
Agora, vamos refletir um pouquinho sobre a função .

Note que existe uma assíntota vertical no x que anula o denominador, portanto em x = 4. Note que x = 4 não pertence ao domínio da função e que também não teremos o limite da função quando x tende a 4. Já a assíntota horizontal, teremos em y = 1.

Observe o esboço do gráfico da função $f(x) = \dfrac{x - 5}{x - 4}$:



Reserve um tempo para observar a função e seu gráfico:



Então, qual seria o

$$\lim_{x \to 0} f(x) = ? \text{ E o } \lim_{x \to \infty} f(x) = ?$$

A função apresenta assíntotas? Vertical? Horizontal? Temos certeza de que você não teve nenhuma dúvida para responder às questões anteriores. Mas, se por acaso tiver alguma dificuldade, faça uma releitura cuidadosa do Capítulo e solicite auxílio ao seu tutor.

Exemplo 3

Suponha que um atacadista venda para a cantina da prefeitura um produto por quilo (ou fração de quilo) e, se o pedido contemplar menos do que 10 kg, o preço estipulado é R$ 1,00 por quilo. Contudo, para estimular grandes pedidos, o atacadista cobrará somente R$ 0,90 por quilo, se a solicitação for de mais do que 10 quilos.

Dessa forma, se x quilos do produto forem comprados e C(x) for o custo total da compra, teremos:

$$C(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le 10 \\ 0{,}9x & \text{se } x > 10 \end{cases}$$

Qual o limite da função C(x) quando se aproxima de 10? O limite existe? Por quê?

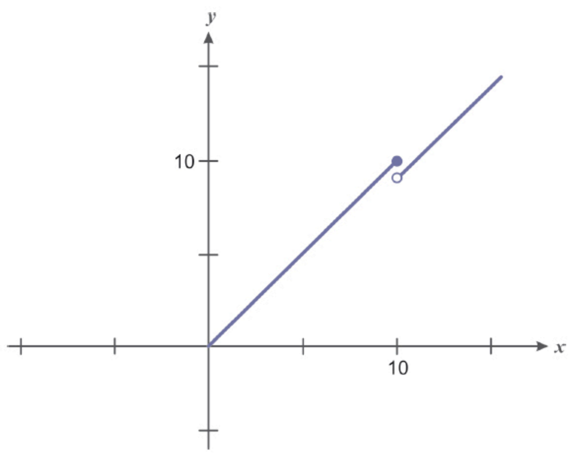
Resolução:

Mas antes de cair na tentação de olhar a resolução, tente resolver o problema. Combinado?

Vamos avaliar o limite da função na vizinhança de 10, isto é, vamos encontrar os limites laterais – x tendendo a 10 pela esquerda – x tendendo a 10 pela direita.

$$\lim_{x \to 10^-} C(x) = \lim_{x \to 10^-} x = 10 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 10^+} C(x) = \lim_{x \to 10^+} 0{,}9x = 9$$

Calculando os limites, temos que o limite de C(x) pela esquerda é 10 e pela direita é 9. Percebemos que os limites laterais não coincidem, portanto, o limite não existe. Observe o gráfico a seguir:



Introdução ao Conceito de Continuidade

Uma vez compreendido o conceito de limite de uma função na seção anterior, vamos conversar daqui em diante sobre o que vem a ser **função contínua** e, consequentemente, abordar também a **descontinuidade de uma função**.

Importante ressaltarmos que o cálculo está fortemente apoiado na existência do que denominamos por função contínua. De fato, muitos teoremas importantes no cálculo exigem a existência da função contínua para que o teorema possa ser aplicado. Como exemplo, podemos citar o Teorema do Valor Médio e, se preciso for, voltaremos aos detalhes relacionados a ele.

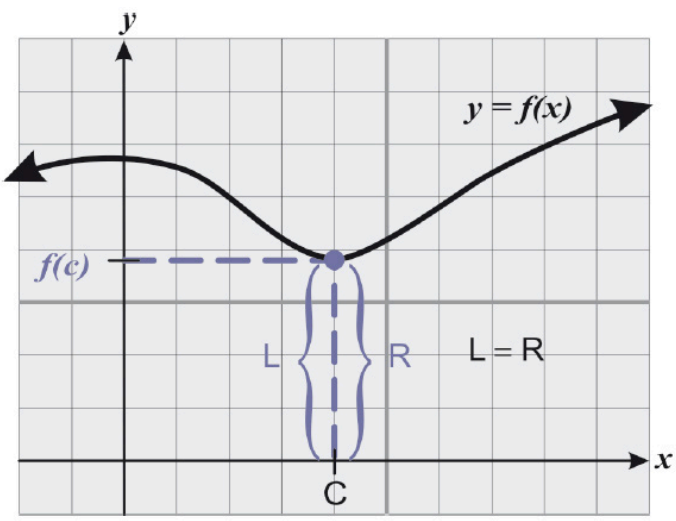
Mas, afinal, o que faz com que uma função possa ser considerada uma função contínua?

De uma maneira bem simples, podemos dizer que uma função contínua é uma função previsível e observamos que seu gráfico:

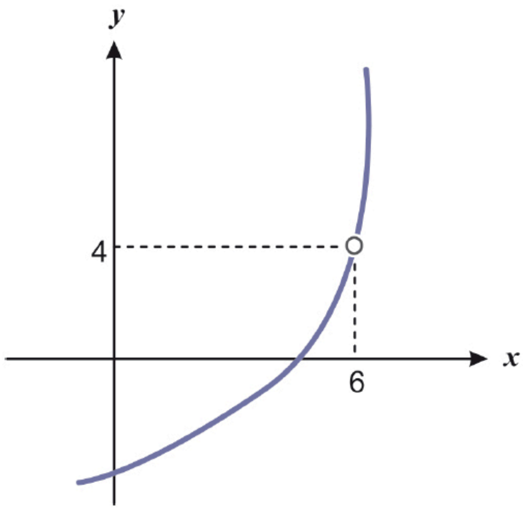
- não apresenta pontos indefinidos;
- não apresenta quebras/interrupções;
- não apresenta buracos; e
- não apresenta saltos.

Você entendeu o que caracteriza uma função contínua? E uma função descontínua?

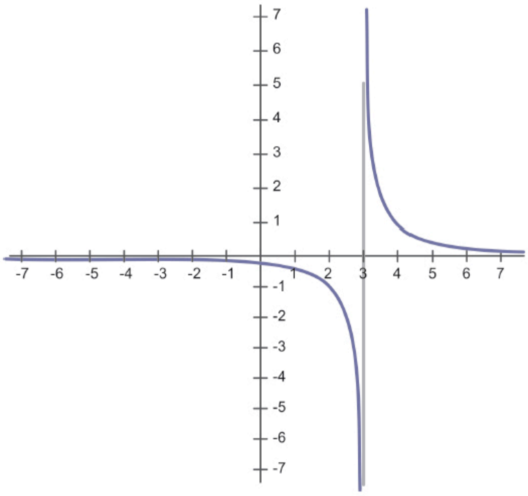
Para compreender melhor, observe o gráfico a seguir de uma dada função que representa uma estrada na qual você está dirigindo.



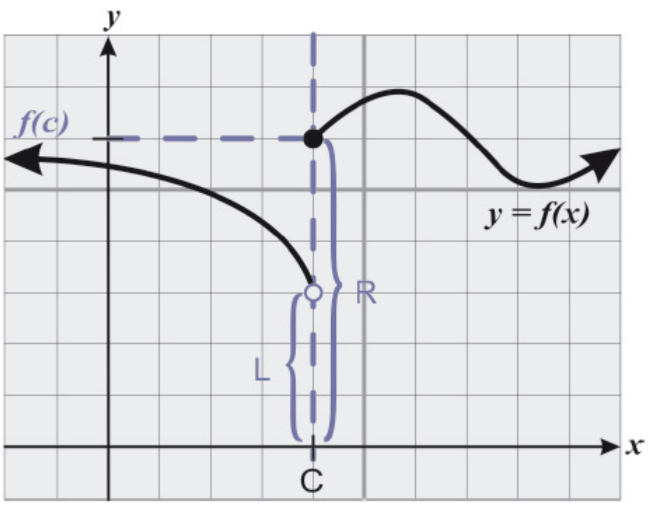
Nesse primeiro exemplo, note que a “estrada” é bem comportada e podemos passar pelos caminhos tranquilamente. Logo, temos um gráfico que representa uma função contínua.



Note que a “estrada” nesse segundo gráfico não se apresenta tão comportada. Temos um buraco e, assim, a função representa uma descontinuidade de ponto, também denominada descontinuidade removível.

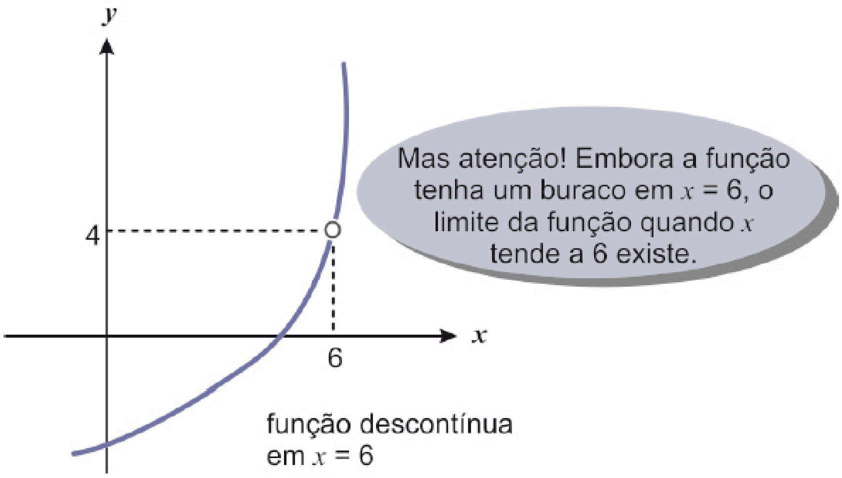


Nessa terceira representação gráfica, podemos observar que a “estrada” imaginada por nós representa a função que, nesse caso, também não é tão tranquila. Temos uma assíntota vertical e poderíamos ser jogados para fora da “estrada”. Esse gráfico ilustra uma descontinuidade, denominada de descontinuidade infinita.



Já nesse quarto exemplo, a "estrada" que imaginamos representar a função também não parece ser tranquila. Percebemos que a função dá um salto e poderíamos também sermos jogados para fora da estrada. Esse gráfico ilustra uma descontinuidade, denominada de descontinuidade de salto.

Assim, podemos concluir que uma função contínua é essencialmente uma função que não contém buraco. Ou seja, podemos traçar seu gráfico sem levantar o lápis do papel, em um traçado único.



Para compreender melhor a observação em destaque nesse gráfico, lembre-se da definição de limite! Note que os dois limites laterais, quando x se aproxima de 6, tendem a um mesmo valor, ou seja, se aproximam de um mesmo valor.

Anteriormente, afirmamos que uma função contínua é previsível, o que implica pelo menos duas coisas importantes relacionadas ao gráfico que representa a função. São elas:

- nenhuma quebra no gráfico (o limite deve existir para qualquer valor de x); e
- nenhum buraco no gráfico (o gráfico não possui assíntota vertical).

Mas como podemos dizer se isso acontece?

Na verdade, pode ser muito fácil identificar. Geralmente, se pudermos avaliar qualquer limite da função f(x) utilizando apenas o método de substituição, teremos então uma função contínua.

Formalizando Conceitos: Definição de Continuidade de Função

Uma função f é contínua em um valor c se, e somente se:

- f (c) é definida;

- *ambos* os limites laterais existem e são os mesmos; e

- o limite L da função, quando x tende a c, e a imagem da função em c coincidem.

Logo, se uma função f(x) é contínua, para qualquer x = c da função teremos:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Exemplo 5

Ao assumir o cargo como administrador de um setor público, veiculou-se uma informação de que se houver entre 40 e 80 lugares no café-restaurante geral, o lucro diário será de R$ 8,00 por lugar. Contudo, se a capacidade de assentos estiver acima de 80 lugares, o lucro diário de cada lugar decrescerá em R$ 0,04, para cada lugar ocupado acima de 80. Se x for o número de assentos disponíveis, expresse o lucro diário como função de x. Verifique se a função é contínua em 80.

Resolução:

Temos que x é o número de assentos e L(x), o lucro diário. Deste modo, obtemos L(x) multiplicando x pelo lucro por lugar.

Assim, quando $40 \leq x \leq 80$, R$ 8,00 é o lucro por lugar; logo $L(x) = 8x$.

Contudo, quando $x > 80$, o lucro por lugar é $x[8 – 0,04 (x – 80)]$.

Obtemos então:

$L(x) = x [8 – 0,04 (x – 80)]$

$L(x) =x [8 – 0,04x + 3,2]$

$L(x) =x[11,2 – 0,04x^2]$

$L(x) =11,2x – 0,04x^2$

Feito isso, precisamos encontrar em qual ponto a função **$L(x) = 11,2x – 0,04x^2$ é igual a zero**.

SAIBA MAIS

Para resolver, recorde seus conhecimentos sobre a função quadrática.

Logo, $L(x) = 11,2x – 0,04x^2 = 0$ Þ $x (11,2 – 0,04x) = 0$.

Assim, $x = 0$, ou $11,2 – 0,04x = 0 \Rightarrow -0,04x = -11,2 \Rightarrow 0,04x = 11,2 \Rightarrow$ $x = \frac{11,2}{4} \Rightarrow x = 280$.

Observe que, para $x > 280$, a função $11,2x – 0,04x^2$ é negativa e poderíamos desconsiderar. Portanto, pensemos no café-restaurante que trabalha com capacidade mínima de 40 e máxima de 280 assentos ocupados.

$$L(x) = \begin{cases} 8x \text{ se } 40 \leq x \leq 80 \\ 11{,}2x - 0{,}04x^2 \text{ se } 80 < x \leq 280 \end{cases}$$

Mas, você pode estar se perguntando: como verificar se a função é contínua?

Para a função ser contínua, é preciso atender às condições descritas a seguir:

- Ser definida em **a**, isto é, **f(a)** deve existir;
- $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ deve existir; e
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Diante dessas condições, temos que L(80) = 8×80 = 640.
Logo, f(a) = L(80) existe.
Sendo assim, para verificar se o limite de x tendendo a 80 existe, basta analisar se os limites laterais são iguais.

Observe que no valor 80 e antes (à esquerda) do valor 80 a função foi definida como f(x) = 8x e para x acima (à direita) de 80 a função assume outro comportamento, isto é: f(x)= 11, 20x-0,004x2. Ou seja:

$$\lim_{x \to 80^-} L(x) = \lim_{x \to 80^-} 8x = 640 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 80^+} L(x) = \lim_{x \to 80^+} 11{,}20x - 0{,}04\,x^2 = 640$$

Temos então:

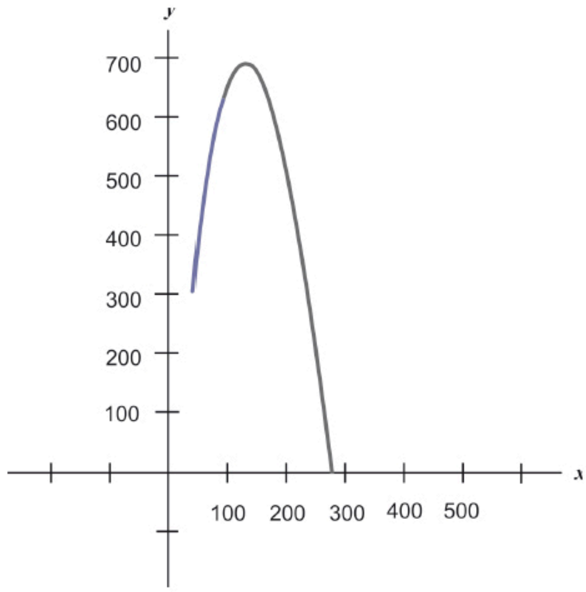
$$\lim_{x \to 80^-} L(x) = \lim_{x \to 80^+} L(x) = 640$$

Portanto, o limite de x tendendo a 80 existe.
Temos que

$$\lim_{x \to 80} L(x) = 640 = L(80)$$

De tal modo, podemos concluir que L(x) é contínua em 80.

Observe a seguir o comportamento da função quando representada graficamente.



TEXTO COMPLEMENTAR

Aprofunde seus estudos, consultando a leitura indicada:

- *Matemática básica para decisões administrativas* – de Fernando Cesar Marra e Silva e Mariângela Abrão.

Resumindo

Neste Capítulo, você esteve envolvido com a compreensão do conceito de limite de funções. Diferentes estratégias para encontrar o limite foram apresentadas a você ressaltando a potencialidade da representação gráfica para facilitar o entendimento e a visualização do tema. O mistério que permeia a relação entre o limite e o infinito também esteve em destaque.

Exemplos ilustrativos tentaram fazer uma analogia com a ideia de continuidade de funções para auxiliar na compreensão do conceito. A definição de continuidade foi apresentada para formalizar o tema em questão.

ATIVIDADES

Agora é com você! Verifique como foi seu entendimento até aqui. Uma forma simples de fazer isso é realizar as atividades a seguir.

1. Analise com atenção a função apresentada graficamente a seguir e encontre os limites solicitados, quando existirem.

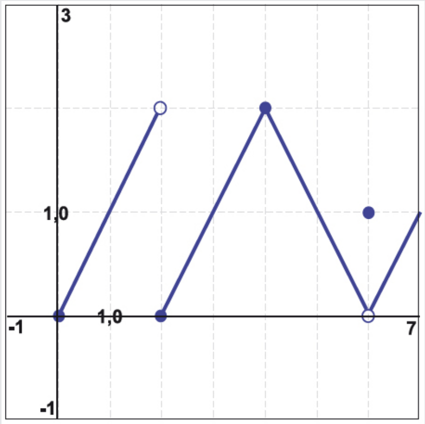
a) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$

d) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) =$

e) $\lim\limits_{x \to 6} f(x) =$



2. Encontre o limite das funções:

a) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 + x - 30}$

b) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 4x + 9)$

e) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$

3. Verifique se as funções abaixo são contínuas em x = c. Caso considere que alguma delas não seja contínua, justifique sua resposta.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}, \quad c = 5$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \neq 1 \\ -1 & \text{se } x = 1 \end{cases}, \quad c = 1$

c) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + x + 1}, \quad c = 0$

Respostas das Atividades

1.

a) 2

b) 0

c) Não existe (limites laterais são diferentes).
d) 2
e) 0

2.
a) $\frac{10}{11}$
b) $\frac{1}{6}$
c) 3
d) 5
e) -5

3.
a) A função não é contínua, pois não está definida em x = 5, ou seja, f(5) não está definida, pois 5 não pertence ao domínio da função.

b) Não é contínua, pois embora $\lim_{x \to 1} f(x)$ exista e também a função esteja definida em x =1, esses dois valores não são iguais. Em outras palavras, $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

c) Sim é contínua, pois $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

CAPÍTULO V

DERIVADA

Profa. Maria Teresa Menezes Freitas

Objetivos Específicos de Aprendizagem

Ao finalizar este Capítulo, você deverá ser capaz de:

- Descrever e comentar o significado de taxa de variação;
- Associar o conceito de taxa de variação à derivada de uma função;
- Calcular a derivada de uma função pela definição;
- Calcular a derivada utilizando as regras de derivação e associar esses cálculos aos contextos administrativos; e
- Resolver problemas que envolvam a derivada de uma função.

Derivada de Funções e sua Aplicabilidade no Contexto Administrativo

Prezado estudante,
Como você sabe, nosso objetivo neste Capítulo é aprofundar os conhecimentos sobre derivadas, seu significado e aplicação no contexto administrativo. Para tanto, é muito importante que você procure se inteirar de todas as seções aqui apresentadas. Em caso de dúvida, lembre que estamos prontos para lhe auxiliar. Não deixe de consultar seu tutor e tampouco de trocar informações e curiosidades com seus colegas de curso. Bons estudos!

Introdução ao Conceito de Derivada

A **derivada** é uma das grandes ideias do cálculo e tem relação tanto com a taxa de variação da função, que por vezes é representada graficamente por uma curva, quanto com a **tangente** à curva. Vale lembrar que a tangente à curva existe em qualquer ponto e, ainda, que a inclinação da tangente representa a taxa de variação daquele ponto.

SAIBA MAIS

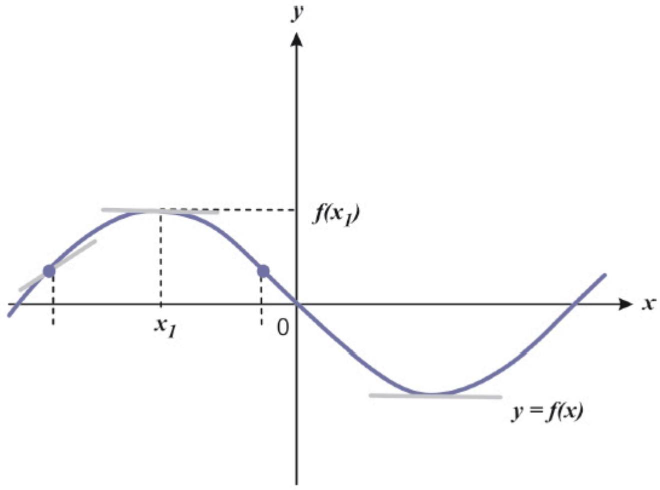
A tangente é uma reta que toca o gráfico f(x) em um determinado ponto.

Uma reta tangente a uma curva no plano intercepta a curva em exatamente um ponto, denominado ponto de tangência. A cada ponto de uma curva existe uma reta que o tangencia.

Em cálculo, a derivada é a inclinação da reta tangente em um determinado ponto da curva que representa a função f(x). A derivada de uma função f(x) pode ser indicada por f′(x).

Como imaginar que uma curva possui uma reta tangente em cada um dos pontos que a representa?

Poderíamos associar com uma sensação de viajar ao longo da curva, que representa a função f(x) – aproximando um limite, passeando de montanha-russa.



Para encontrarmos a taxa de variação ou a inclinação de uma reta tangente a uma curva, precisaremos rever o importante **quociente da diferença**. Vimos como encontrar esse quociente na Unidade 3, quando compreendemos o significado dos coeficientes da função afim representada graficamente por uma reta.

Taxa de Variação

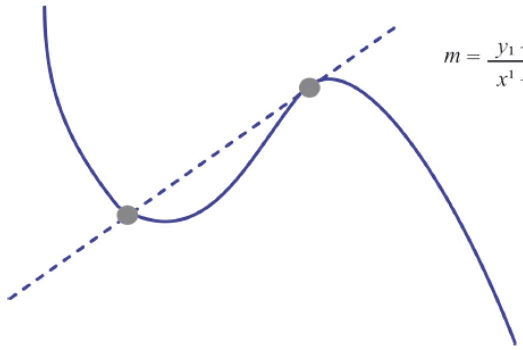
A **Taxa de variação** é uma razão relacionada a uma reta que compara a variação vertical com a horizontal; é comumente simbolizada por m ou a.

Existem várias maneiras de pensar a taxa de variação; a aproximação geralmente depende da situação.

Para compreender melhor, considere algumas versões demonstradas a seguir para indicar a taxa de variação.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad m = \frac{\textit{diferença} - \textit{em -y}}{\textit{diferença} - \textit{em -x}} \qquad m = \frac{y_1 - y_2}{x^1 - x^2} \qquad m = \frac{\textit{vertical}}{\textit{horizontal}}$$

Para qualquer função, poderemos encontrar a inclinação para dois pontos do gráfico. Isto é a taxa média de variação da função no intervalo de x_1 a x_2.



$$m = \frac{y_1 - y_2}{x^1 - x^2} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x^1 - x^2}$$

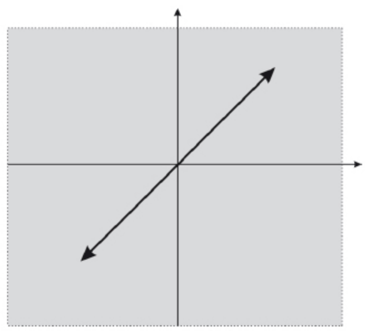
Note que temos aqui uma reta secante, pois toca a curva em mais de um ponto.

Assim, podemos dizer que a **taxa média de variação** de f(x) em um intervalo [a,b] é dada pelo quociente $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

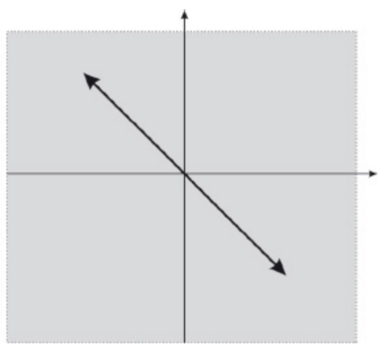
Tipos de Inclinação

Temos quatro possibilidades de inclinação.

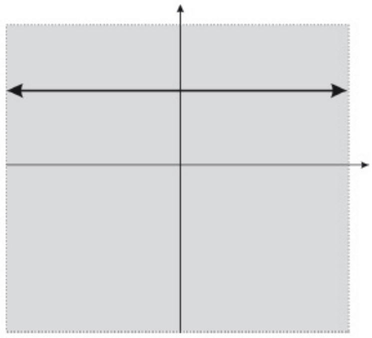
- Inclinação positiva, visto que teremos +/+ ou – /– para $m = \frac{\text{vertical}}{\text{horizontal}}$. Graficamente representada por:



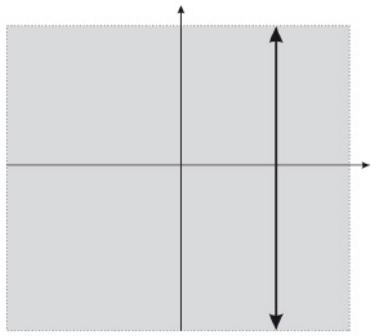
- Inclinação negativa, visto que teremos +/– ou – /+ para $m = \frac{\text{vertical}}{\text{horizontal}}$. Sua representação gráfica é:



- Inclinação nula (0), visto que teremos 0/– ou 0/+ para $m = \frac{\text{vertical}}{\text{horizontal}}$. Representada graficamente por:

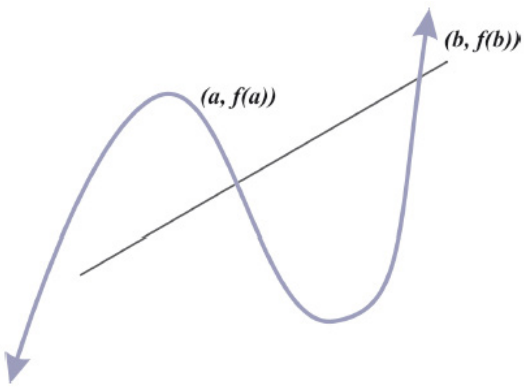


- Inclinação indefinida, visto que teremos +/0 ou – /0 para $m = \frac{\text{vertical}}{\text{horizontal}}$. Sendo sua representação gráfica dada por:



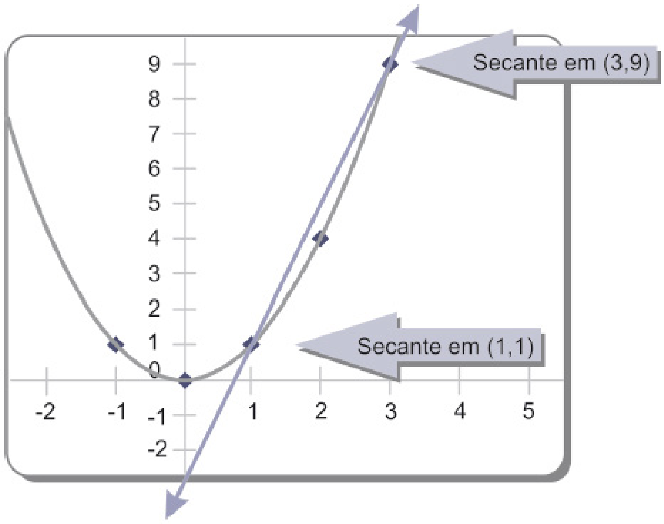
Considerando o que vimos até aqui, podemos dizer que tanto a taxa de variação como a inclinação são vitalmente importantes em cálculo. Por exemplo, pense que a função representa uma montanha-russa e que você experimenta a sensação de mudar de inclinação quando se move nela – da esquerda para a direita. Nessa situação, você estaria vivenciando a base para a derivada.

Perceba que, na vida, podemos considerar os constantes fatores de mudança, como a mudança na economia. Preços sobem e descem. Oferta e demanda flutuam. Inflação, recessão, e outras variáveis econômicas e financeiras estão constantemente mudando dentro do sistema econômico. Quando uma ou mais dessas características mudam dentro do sistema, disparam uma série de mudanças em algum setor da economia. A derivada nos ajuda a lidar com isto.



Vimos que é bem tranquilo encontrarmos a taxa média de variação, que representa a inclinação da reta secante que passa por dois pontos. Mas como encontrar a inclinação da reta tangente?

Para entender melhor, acompanhe as representações gráficas a seguir.

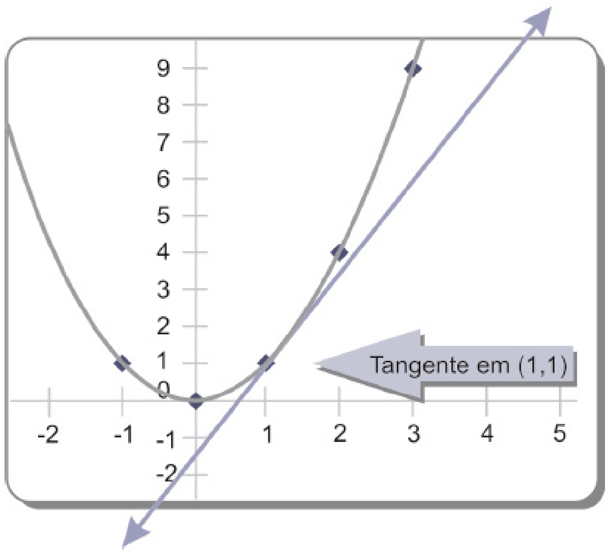


Na representação acima, encontrando a inclinação para a reta secante, temos:

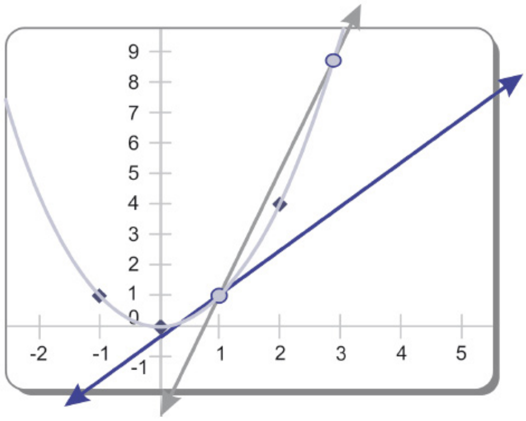
$$m = \frac{y_1 - y_2}{x^1 - x^2} \rightarrow \quad m = \frac{9-1}{3-1} \rightarrow \quad m = \frac{8}{2} = 4$$

Agora, analisemos juntos a representação a seguir.

Como encontrar a inclinação da reta tangente?

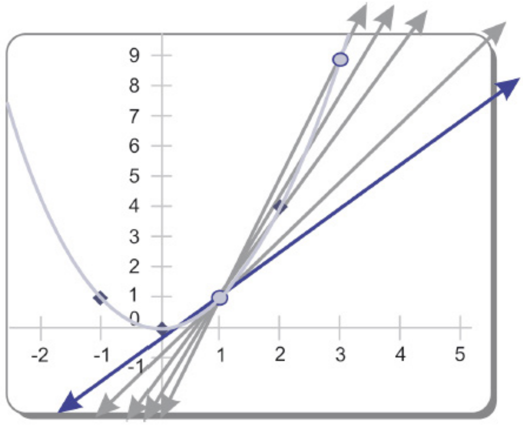


Primeiramente, note o que acontece quando diminuímos cada vez mais a distância entre x = 3 e x = 1



Teoricamente, repetiríamos esse processo várias vezes. A cada vez, a inclinação da reta secante se aproximaria mais e mais da inclinação da reta tangente.

Logo, temos uma secante que se aproxima da tangente. O que nos permite dizer que a distância entre os valores de x na tangente e a secante móvel irá eventualmente diminuir/desaparecer, pois estará na mesma localização.



Quando a distância entre eles for quase zero, não poderemos dividir por zero. Então, o que fazer?

Neste caso, a variação horizontal seria zero porque o segundo ponto na secante estaria eventualmente sobre o ponto de tangência. Então… Poderemos encontrar a inclinação da reta tangente se obtivermos o limite da secante móvel quando se aproxima da tangente.

A inclinação da reta tangente seria:

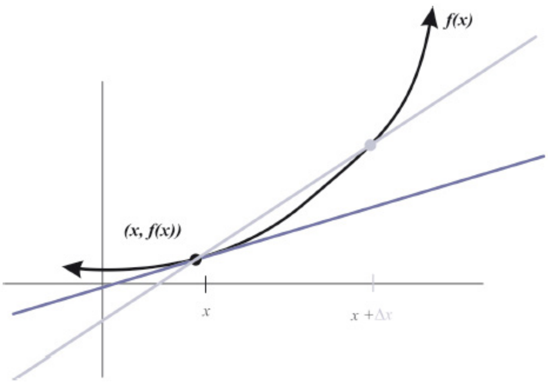
y_2 seria a altura do segundo ponto $f(x+h)$

y_1 seria $f(x)$

$$\boldsymbol{m} = \lim_{\textit{horizontal} \to 0} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Substitua a hotizontal por h

Em Matemática o acréscimo muitas vezes é denominado de Δx. Portanto, $x + \Delta x$ é o mesmo que $x + h$.



Definição de Derivada

A derivada de uma função $y = f(x)$ no ponto $(x, f(x))$ é definida como:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

A derivada pode ser representada pelas seguintes notações:

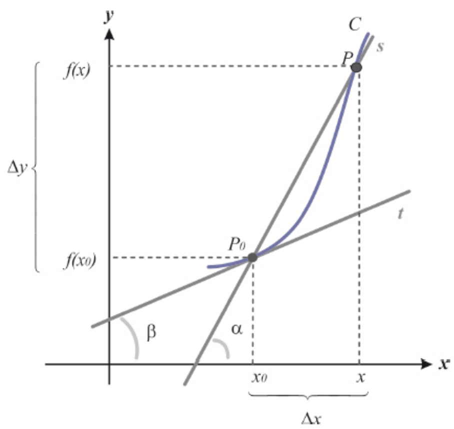
- $f'(x)$ ou y'
- $\frac{d}{dx} f(x)$ ou $\frac{dy}{dx}$

Significado Geométrico da Derivada

Para entendermos o significado geométrico da derivada, teremos de recorrer ao conceito de coeficiente angular da reta.

Considerando a função $y = f(x)$ contínua e definida no intervalo A, cujo gráfico é representado pela curva C, sendo x e x_0 elementos desse intervalo, com $x \neq x_0$.

Se a reta s, secante à curva C, é determinada pelos pontos $P_0(x_0, f(x_0))$ e $P(x, f(x))$, podemos dizer que o coeficiente angular de s é tga $tg\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, que corresponde à razão incremental de f(x) no ponto x_0.



Observe que se Δx tende a 0, ou seja, se x tende a x_0, o ponto P se aproxima de P_0 e a reta secante s tenderá à reta t, tangente à curva C no ponto P_0.

Se a reta s tende à reta t, então α tende a β. Portanto,

$$\lim_{x \to x0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\beta$$

Então, concluímos que:

$$\mathbf{f'(x) = tg\beta}$$

A derivada da função f(x) no ponto x0 é igual ao coeficiente angular (tgb) da reta t, tangente ao gráfico da função f(x) no ponto $P(x_0, f(x_0))$.

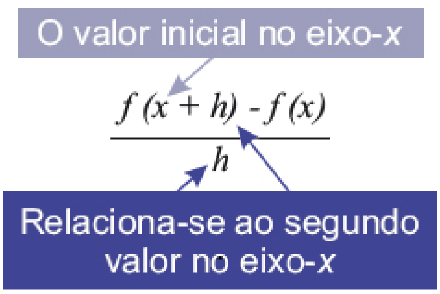
A equação da reta t pode ser assim representada: $f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \times (x - x_0)$, ou, ainda, se $f(x) = y$, temos:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \times (x - x_0)$$

Exemplo 1
Encontre a taxa de variação instantânea para **f(x) = 5x + 1** em **x = 3**.

Resolução:
Retomemos a ideia de **Taxa média de variação** de f(x) em um intervalo [a,b], que é obtida pelo quociente $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Ou seja, quando pensamos em a=x e b= x+h, teremos



Se a Taxa de variação média de y em relação a x **tende** a um valor limitado quando h tende a zero, este valor tem sido denominado de Taxa de Variação Instantânea de y em relação a x. Observe que a palavra **tende** nos leva a pensar em limite.

Dessa forma, vamos lembrar que taxa de variação instantânea é a derivada e, assim, devemos encontrar o limite do quociente quando h tende a zero. O que, em símbolos, implica:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{[5\,(x+h)+1] - (5x+1)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{5x + 5h + 1 - 5x - 1}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{5h}{h} = \lim_{h \to 0} 5 = 5$$

Portanto, a **taxa de variação instantânea** em x = 3 é igual a **5**.

Dizemos que diferenciar f significa encontrar a derivada de f. Assim, se existe f ′(a), dizemos que f é diferenciável e m x = a.

Condições de Existência da Derivada

Uma função é dita diferenciável em x se existe o limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Para tanto, a derivada não existe em três situações. Basicamente, onde a tangente não existe ou onde a inclinação da tangente é indefinida. Ou seja, aqui a sugestão é que você pense na tangente e em sua inclinação.

- em uma descontinuidade → nenhuma tangente para usar;
- em uma ponta (em forma de V) → inclinação indefinida; e
- em um ponto de inflexão vertical → inclinação indefinida.

Assim, podemos dizer que se o gráfico de uma função contínua possui uma tangente em um ponto onde sua concavidade muda de sentido, esse ponto é denominado ponto de inflexão. Quando a tangente é vertical, estamos nomeando esse ponto de ponto de inflexão vertical.

Para entender melhor, veja a seguir a relação de conceitos que separamos para você relembrar.

- **Limite:** a altura (coordenada y) de uma função para uma dada entrada (coordenada x); você às vezes não poderá encontrar essa altura exatamente por causa dos buracos, da assíntota etc.; algumas vezes, você ainda poderá se "aproximar" daquele valor, apesar dos buracos.

- **Taxa Média de Variação:** a inclinação entre dois pontos de uma secante – reta que intercepta a curva em dois pontos.

- **Taxa de Variação Instantânea:** a inclinação da reta tangente à curva.

- **Derivada:** a inclinação da reta tangente à curva; semelhante à taxa de variação instantânea.

É importante lembrarmos que precisamos do limite para encontrarmos a **derivada** de uma função e que observar o gráfico também foi fundamental para nossa compreensão.

Entretanto, seria impraticável depender do gráfico para cada derivada. E consumiria muito tempo usar a taxa de variação instantânea a todo momento. Precisamos aprender como encontrar a inclinação da reta tangente por outras técnicas legítimas.

Passemos às **regras de diferenciação**, ou **regras de derivada**.

Vamos deixar um pouco de pensar na representação gráfica da derivada, e chegar a isso por uma aproximação diferente?

Regras de Derivação

Caminho mais curto. Método mais simples. Regras que nos atraem. São esses temas que trataremos nesta seção.

Regra da Potência (x^n)

Para qualquer expoente constante n, temos que:

$$\boxed{\frac{d}{dx}x^n = n \cdot x^{n-1}}$$

Veja os exemplos a seguir:

$$\frac{d}{dx}x^{100} = 100\ .\ x^{100-1} = 100x^{99}$$

$$\frac{d}{dx}x^{-2} = -2\ .\ x^{-2-1} = -2x^{-3}$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\ x^{\frac{1}{2}}$$

E se tivermos uma constante c? Como resolver?

Mais simples ainda. Para qualquer constante c, temos que:

$$\boxed{\frac{d}{dx}c = 0}$$

Observe os dois exemplos, a seguir, para que você mesmo veja quanto é simples.

- $\frac{d}{dx} 7 = \mathbf{0}$

- $\frac{d}{dx} - 31 = \mathbf{0}$

Espere! Vamos pensar sobre essa regra da constante?

Cada uma das constantes seria representada graficamente por uma reta horizontal, isto é, **paralela ao eixo x**.

Por exemplo, f(x) = 7, que é o mesmo que y = 7 e é representada por uma reta paralela ao eixo x. Ou seja, todas as retas horizontais (paralelas ao eixo x) não têm inclinação; nestas a inclinação é zero.

A derivada é a inclinação da reta tangente. Então deveria ter inclinação zero, também. Concorda?

Regra do Múltiplo – constante

Para qualquer constante c, temos que:

$$\boxed{\frac{d}{dx}[c.\, f(x)] = c.\, f'(x)}$$

Compreenda melhor analisando os exemplos a seguir:

- $\frac{d}{dx} 5x^3 = 5 \,.\, (3x^2) = \mathbf{15x^2}$

- $\frac{d}{dx} 3x^{-4} = 3 \,.\, (-\,4x^{-5}) = \mathbf{12x^{-5}}$

- $\frac{d}{dx} 7x = 7 \,.\, 1 = \mathbf{7}$

Regra da Soma e da Diferença

Note que ambas as regras – soma e diferença – se assemelham muito:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)} \\[2ex] \boxed{\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)} \end{array}\right\} \quad \boxed{\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)}$$

Assim, podemos observar que calcular a derivada de uma soma ou de uma diferença de uma função é muito semelhante. A atenção deve estar voltada para o sinal de soma ou diferença. Observe nos exemplos que seguem.

- $y = x^5 - 2x^{\frac{3}{2}} + 2x^2 \rightarrow y' = 5x^4 - 3\sqrt{x} + 4x$
- $y = x^3 + 5x^2 - x + 3 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 10x - 1$
- $\frac{d}{dx}(x^3 - x^5) = \rightarrow 3x^2 - 5x^4$
- $\frac{d}{dx}(5x^{-2} - 6x^{\frac{1}{3}} + 5) = \rightarrow -10x^{-3} - 2x^{-\frac{2}{3}}$

Agora, vamos dar um intervalo nas regras por alguns instantes e entrar um pouquinho em dois outros itens bem simples:

- derivada no ponto; e
- uma aplicação de derivada.

Avaliar ou encontrar o valor no ponto simplesmente significam substituir e simplificar.

Primeiro encontramos a derivada e depois avaliamos a função, isto é, encontramos o valor da função no ponto. Existem diferentes notações para a derivada no ponto (usando x = 2):

$$f'(2) \qquad \frac{df}{dx}(2)$$

Suponha que uma empresa pública tenha calculado funções representando sua receita (renda), seu custo e seu lucro (da produção e venda) como representado abaixo:

- R(x) = Total receita da venda x unidades;
- C(x) = Total custo da produção x unidades; e
- L(x) = Total lucro x unidades.

O termo **custo marginal** significa o custo adicional da produção de uma unidade a mais. Isto é, essencialmente a função custo avaliada para uma unidade a mais que x.

C(x + 1) – C(x)

Claro que, se dividíssemos toda a expressão por 1, não mudaria o r esultado. Certo?
Ou seja, teríamos $\frac{C(x+1) - C(x)}{1}$, que parece ser familiar, concorda?

Exatamente, é o calculo da taxa de variação média. Semelhante ao quociente da diferença. Semelhante à inclinação.

Assim, temos que quanto mais unidades (x) produzidas, menor se apresenta h = 1 se comparado com o x. E, h se aproxima de zero.

$$\lim_{h \to 0} \frac{C(x+1) - C(x)}{1}$$

Essa expressão também parece familiar?

Sim, representa a taxa instantânea de variação. Semelhante à derivada. Semelhante à inclinação da tangente.

Então, podemos afirmar que cada função na versão marginal é a derivada da função original. Observe as representações a seguir.

Custo Marginal	$Cmg\ (x) = C'\ (x)$
Renda Marginal	$Rmg\ (x) = R'\ (x)$
Lucro Marginal	$Lmg\ (x) = L'\ (x)$

Uma vez que compreendemos a necessidade de encontrarmos a derivada, nos parece importante conhecermos os caminhos mais curtos para chegar até ela. Certo? Está preparado?

Regra do Produto

O produto das derivadas é igual à derivada da primeira função multiplicada pela segunda função **mais** a primeira função multiplicada pela derivada da segunda função.

$$\frac{d}{dx}\ [f(x).\ g(x)] = f'(x).\ g(x) + f(x).\ g'(x)$$

Não entre em pânico, vamos utilizar o truque da ajuda à memória. Para compreender, considere a função **$p(x) = (x^2 + x + 2)(3x - 1)$**. Perceba que ela é uma função expressa como produto de duas funções.

Usando o caminho mais curto para chegar à derivada, isto é, usando a fórmula do produto para encontrar a derivada, teremos:

$p'(x) = (x^2 + x + 2)'(3x - 1) + (x^2 + x + 2) \times (3x - 1)'$
(lembre da ajuda à memória!)
$p'(x) = (2x + 1) \times (3x - 1) + (x^2 + x + 2) \times 3$
$p'(x) = 6x^2 - 2x + 3x - 1 + 3x^2 + 3x + 6$
$p'(x) = 9x^2 + 4x + 5$

Entretanto, poderíamos expandir p(x), ou seja, efetuar a multiplicação, chegando à função expressa como: $p(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x - 2$. Dessa forma, usando os caminhos para derivar potência e soma de funções obteríamos, também, a derivada:

$p'(x) = 9x^2 + 4x + 5$

Regra do Quociente

A derivada do numerador vezes o denominador menos o numerador vezes a derivada do denominador, tudo divido pelo denominador ao quadrado. Ou seja,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Calma! Novamente, vamos utilizar o **truque da ajuda à memória:**

$$\frac{1' \cdot 2 - 1 \cdot 2'}{2^2}$$

Para uma melhor compreensão, considere a derivada da função

$y = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$.

Agora, utilizando o caminho mais curto (regra) e o nosso truque (ajuda à memória) teremos:

$$y' = \left(\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}\right)' = \frac{(x^3 - 1)' \cdot (x^3 + 1) - (x^3 - 1) \cdot (x^3 + 1)'}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^2 (x^3 + 1) - (x^3 - 1) \cdot 3x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^5 + 3x^2 - (3x^5 - 3x^2)}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^5 + 3x^2 - 3x^5 + 3x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{6x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

Portanto, $y' = \dfrac{6x^2}{(x^3 + 1)^2}$

Para entender melhor, acompanhe o raciocínio: suponha que a prefeitura tenha calculado funções representando sua receita (renda), seu custo e seu lucro (produção e venda) da produção de sua gráfica, como representado a seguir:

$R(x)$ = Total receita da venda x unidades;
$C(x)$ = Total custo da produção x unidades; e
$L(x)$ = Total lucro x unidades.

Partindo do pressuposto de que o custo médio (CM) é encontrado dividindo o custo total C(x) pelo número de unidades x, temos que:

$$\boxed{CM\,(x) = \frac{C\,(x)}{x}}$$

Desse modo, dizemos que a derivada da função custo médio é denominada custo médio marginal, ou CMmg, e esta pode ser representada da seguinte maneira:

$$\boxed{CMmg\,(x) = \frac{d}{dx}\,[\frac{C\,(x)}{x}]}$$

As derivadas semelhantes descrevem a renda média marginal como RMmg(x) e o lucro médio marginal como LMmg(x).

Exemplo 2

Imagine que custa à editora da prefeitura R$ 12,00 para produzir cada livro que será utilizado para divulgar informações do Posto de Saúde. Sabemos que existe um gasto fixo de R$ 1.500,00. Dessa forma, a função custo seria:

C(x) = 12x + 1.500, em que x é a quantidade de livros.

Queremos encontrar o custo médio CM, o custo médio marginal CMmg e o custo médio marginal em x = 100 CMmg(100). Também queremos interpretar o resultado obtido.

Resolução:

Para resolvermos esse exemplo, temos três situações a serem determinadas.

Encontrar o custo médio CM, o CMmge o CMmg em x = 100.

- Vamos encontrar o **CM** para **C(x) = 12x + 1.500**.

$$CM\,(x) = \frac{12x + 1.500}{x} = \frac{12\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{1.500}{x}$$

$$\boxed{CM\,(x) = 12 + 1.500x^{-1}}$$

- Vamos encontrar o **CMmg** do **CM(x)**, ou seja, vamos encontrar a função derivada.

$$CMmg\,(x) = \frac{d}{dx}\,(12 + 1.500x^{-1})$$

$$CMmg\,(x) = -1.500x^{-2} \boxed{= \frac{-1.500}{x^2}}$$

- Vamos calcular o **CMmg** em **x = 100**. Para tanto, basta avaliarmos a função obtida anteriormente em x = 100.

$$CMmg(100) = \frac{-1.500}{(100)^2}$$

$$CMmg(100) = \frac{-1500}{10.000} \boxed{= -0,15}$$

Feitos esses cálculos, vamos interpretar o resultado obtido, ou seja, **CMmg** em **x = 100**. Esse resultado quer dizer que, quando 100 livros forem produzidos, o custo médio por livro é decrescente (indicado pelo sinal negativo), de aproximadamente 15 centavos por livro adicional produzido.

Apesar de o custo total aumentar quando se produz mais, o custo médio por unidade decresce devido à economia da produção em massa.

Esperamos que tenha gostado e que tenha compreendido. Em caso de dúvida, lembre-se de que seu tutor terá o maior prazer em lhe atender.

Agora vamos recordar alguns conhecimentos sobre função composta, que são fundamentais para compreendermos a próxima regra de derivação.

De uma maneira bem simples, poderíamos dizer que **funções compostas** são simplesmente funções de funções.

Uma função g(x) é colocada "dentro" de outra f(x). Isto é expresso da seguinte maneira: **f(g(x))**. Observe a Figura 2:

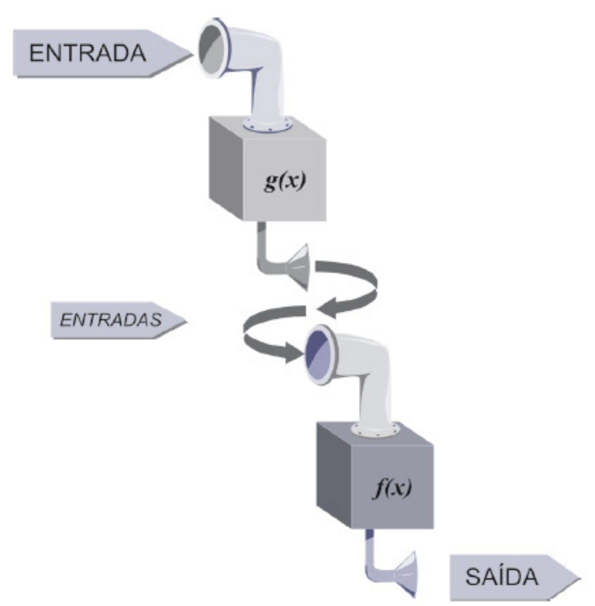


Figura 2: Função g(x) entra em f(x)
Fonte: Elaborada pela autora deste livro

Para entendermos melhor, vamos olhar alguns exemplos. Para tanto, considere $f(x) = x^2$ e $g(x) = 4 - x$.

Diante dessa condição, calculando $f(g(x))$, temos $f(g(x)) = (g(x))^2$, o que resulta em $f(g(x)) = (4 - x)^2$. (Basta substituir no lugar de x de f a função g(x)). Agora vamos calcular **g(f(x))**. Então, teremos $g(f(x)) = 4 - f(x)$, o que resulta em $g(f(x)) = 4 - x^2$.

Sente-se mais preparado para continuar nossos estudos? Então, vamos acrescentar mais duas regras – regra da cadeia e a regra generalizada da potência – ao nosso arsenal de técnicas?

Regra da Cadeia

Para começarmos, imagine que precisemos encontrar a derivada da função $f(g(x)) = (x^2 - 5x + 1)^{10}$

Claro que não vamos utilizar a regra da potência e multiplicar 10 vezes a base $(x^2 - 5x + 1)$. Vamos, sim, utilizar a **regra da cadeia**, a qual determina que **para duas funções diferenciáveis**

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Logo, basta que reconheçamos as funções envolvidas. Observe na sequência como é simples.

A f é como $f(x) = x^{10}$ onde x é a função g → $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ ← A função $g(x)$ é $g(x) = x^2 - 5x + 1$

$$f'(g(x)) = 10(x^2 - 5x + 1)^9 \qquad g'(x) = 2x - 5$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 5x + 1)^{10} = 10\,(x^2 - 5x + 1)^9\,(2x - 5) \longleftarrow \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Importância da Derivada

Poderemos nos valer de todas as informações que a derivada nos oferece para esboçarmos a curva de uma função. Também poderemos utilizar as informações para trabalharmos com problemas de otimização. Trabalhamos com otimização quando procuramos encontrar o maior ou o menor valor de uma função. Por exemplo: maximizar o lucro ou minimizar o risco etc.

As informações que a derivada nos fornece para avaliar seus aspectos gráficos serão de grande valia para o trabalho c om otimização.

Para compreender melhor, imagine que uma empresa pública, após vários estudos, conclui que seu lucro bruto poderia ser expresso pela função LB = $0{,}1672x^3 - 4{,}306x^2 + 35{,}635x - 93{,}646$, para uma produção entre x=4 e x=15 unidades. Ao longo da experiência como administrador, o colaborador percebeu que, à medida que a produção saía de 4 unidades e se aproximava de 7 unidades, os resultados iam melhorando, fazendo com que a organização saísse do prejuízo e começasse a dar lucro.

No entanto, quando a produção continuava aumentando, no intervalo entre 7 unidades e 11 unidades, o resultado voltava a piorar, chegando até a apresentar prejuízo novamente. Somente a partir de 12 unidades ele percebia que a tendência de melhora do resultado voltava a acontecer.

Conhecida a expressão que representa o lucro bruto e utilizando o que aprendemos sobre derivadas, podemos verificar se o sentimento do administrador com relação aos resultados pode ser confirmado pela análise da primeira e da segunda derivadas da função.

Como assim?

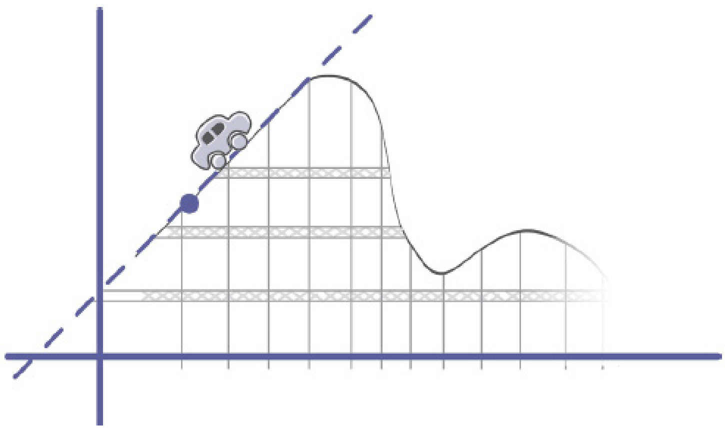
Vamos pensar com calma. Temos a função lucro bruto.

$LB = 0{,}1672x^3 - 4{,}306x^2 + 35{,}635x - 93{,}6464 \leq x \leq 15$

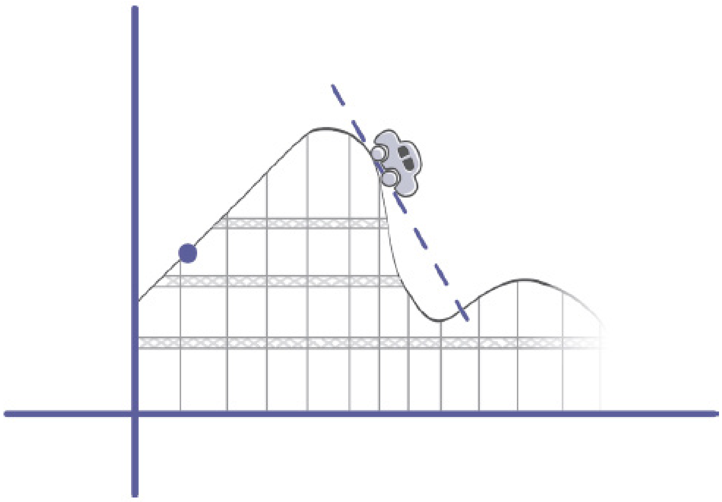
Será verdade que nos intervalos descritos a seguir acontece mesmo o que pressentia o colaborador?

- [4, 7] = melhorava – saía do prejuízo e tinha lucro;
-]7, 11[= piorava – saía do lucro e apresentava prejuízo; e
-]12, 15] = melhorava o resultado.

Para analisar melhor, imagine uma função como uma montanha russa indo da esquerda para a direita. Na subida, teremos inclinação positiva (> 0), logo, uma função crescente.



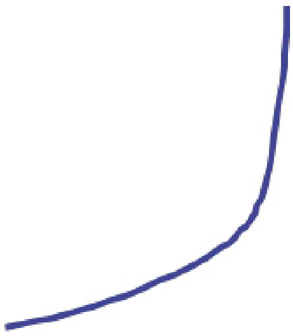
Já na descida, com inclinação negativa (< 0), teremos uma função decrescente.



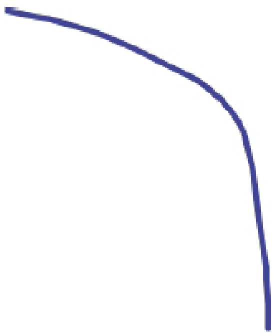
Note que a derivada de uma função nos dá a inclinação do gráfico. Para visualizar a situação, volte a refletir sobre o exemplo da montanha-russa.

Outro ponto importante são os **números críticos** de uma função, que dizem respeito às localizações onde o valor da derivada é zero – inclinação horizontal para a tangente – ou indefinido – inclinação indefinida para a tangente, ou a derivada não existe.

Sendo que se $f' > 0$ (positiva) em um intervalo, então f é crescente nesse intervalo. Teríamos neste caso uma curva que pode ter a aparência a seguir.

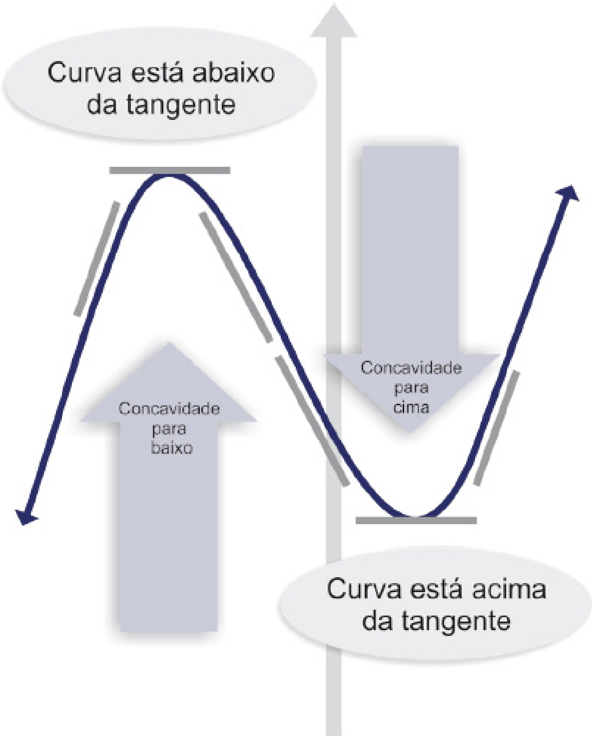


E, se $f' < 0$ (negativa) em um intervalo, então f é decrescente nesse intervalo. Teríamos neste caso uma curva que pode ter a aparência a seguir.



Vejamos a descrição com mais detalhes de um esboço gráfico apresentado a seguir, o qual ilustra uma curva que apresenta períodos de crescimento e decrescimento. Observe que ora a representação gráfica está encurvada para cima e ora está encurvada para baixo. Esta noção de encurvamento (para cima ou para baixo) tem sido denominada de **concavidade** do gráfico da função.

Observe ainda, no gráfico esboçado abaixo, que quando a curva é côncava para baixo o gráfico está abaixo de sua tangente que toca o ponto o qual parece ser um ponto de máximo relativo (ou seja, ponto de máximo em um intervalo considerado). Observe também no intervalo que quando a curva é côncava para cima o gráfico está acima de sua tangente que toca o ponto o qual parece ser um ponto de mínimo relativo (ou seja, ponto de mínimo em um intervalo considerado).



Mas como podemos usar o cálculo para determinar a concavidade?

É aí que a segunda derivada entra em cena. Derivada da derivada, ela nos fornece a taxa de variação da inclinação. Em outras palavras, a segunda derivada mostra se a inclinação está crescendo ou decrescendo.

Quando encontramos a segunda derivada, podemos usar as seguintes relações para nos auxiliar na construção do gráfico:

- $f'' > 0$ (derivada segunda positiva) → inclinação aumentando → concavidade para cima;
- $f'' = 0$ (derivada segunda nula) → sem inclinação → pode ser um ponto de inflexão se a concavidade muda de sentido no ponto; e
- $f'' < 0$ (derivada segunda negativa) → inclinação decrescente → concavidade para baixo.

O teste da primeira derivada:
Se uma função f tem o ponto c como **ponto crítico**, então em x = c a função tem:

- um **máximo** relativo se f′ >0 um pouquinho antes de c e f′<0 um pouquinho depois de c (lembre da montanha-russa); e
- um **mínimo** relativo se f′ <0 um pouquinho antes de c e f′ >0 um pouquinho depois de c (pense na montanha-russa).

SAIBA MAIS

Ponto crítico - Ponto crítico de uma função f é um valor de x do domínio de f em que acontece uma das situações: f′(x) = 0 ou f′(x) é indefinida. Fonte: Elaborado pela autora deste livro.

O teste da segunda derivada:
Se x= c é um ponto crítico da função f na qual f″ está definida, então a função tem:

- um **mínimo** relativo se f″ (c) > 0 em x = c; e
- um **máximo** relativo se f″ (c) < 0 em x = c.

Voltemos ao nosso caso e comecemos calculando a derivada primeira da função LB.

$LB = 0{,}1672x^3 - 4{,}306x^2 + 35{,}635x - 93{,}646$

$LB' = 3 \times 0{,}1672x^2 - 2\times 4{,}306x + 35{,}635 - 0$

$LB' = 0{,}5016x^2 - 8{,}612x + 35{,}635$

Igualemos a derivada primeira a zero e resolvamos a equação para achar os pontos críticos.

$0{,}5016x^2 - 8{,}612x + 35{,}635 = 0$

$$x = \frac{+8{,}612 \pm \sqrt{74{,}166544 - 71{,}498064}}{1{,}0032}$$

$x' = 6{,}9562$ e $x'' = 10{,}2128$

Como não há valores de x para os quais LB′ não seja definida, decorre que x=6,9562 e x = 10,2128 são os únicos pontos críticos.

Assim, os intervalos que devem ser testados são:

]4; 6,95[;]6,95; 10,21[e]10,21; 15[

O Quadro 3 apresenta o resultado do teste desses três intervalos. Analise-o:

INTERVALO	4<x<6,95	6,95<x<10,21	10,21<x<15
Valor (livre)	x = 5	x = 8	x = 13
Sinal de ***f'(x)***	5,115 > 0 ***f'(x) > 0***	-1,1586 < 0 ***f'(x) < 0***	8,4494 > 0 ***f'(x) > 0***
Conclusão	**Crescente**	**Decrescente**	**Crescente**
Sinal de f''(x)	– 3,596)< 0 ***f''(x) < 0***	- 0,5864 < 0 ***f''(x) < 0***	4,4296 > 0 ***f''(x) > 0***
Conclusão	Concavidade p/ baixo cresce cada vez mais devagar.	Concavidade p/ baixo decresce cada vez mais devagar.	Concavidade p/ cima cresce cada vez mais devagar.

Quadro 3: Resultado do teste dos intervalos previstos
Fonte: Elaborado pela autora deste livro

Assim, as observações do colaborador foram confirmadas utilizando as derivadas primeira e segunda.

$LB' = 0{,}5016x^2 - 8{,}612x + 35{,}635$	$LB'' = 1{,}0032x - 8{,}612$
Para $x = 5$, $LB' = 5{,}115$	$LB'' = -3{,}596$
Para $x = 8$, $LB' = 14{,}8414$	$LB'' = -0{,}5864$
Para $x = 13$, $LB' = 8{,}4494$	$LB'' = 4{,}4296$

Ainda sobre o mesmo caso, poderíamos identificar o mínimo e o máximo relativo no período considerado. Para isso, deveremos determinar os extremos relativos de uma função.

Vamos fazer o teste da derivada primeira?

Seja f uma função contínua e derivável em intervalo (a, b), exceto possivelmente em c Î (a, b):

- Se f' passa de positiva para negativa em c, então f(c) é máximo relativo de f. Assim, o máximo relativo de f é f(6,25) = 2,1561.

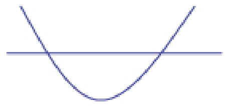
- Se f' passa de negativa para positiva em c, então f(c) é mínimo relativo de f. Logo, o mínimo relativo de f é f(10,21) = -0,7314.

Ainda sobre o mesmo caso, responda-nos: qual é exatamente o intervalo em que a contribuição marginal é negativa? Ou seja, nesse trecho um acréscimo na produção significa uma redução no resultado?

Lembremos que CM = derivada da função lucro - nesta situação foi negativa, ou seja, CM < 0.

Para compreendermos esse resultado, vamos estudar os sinais dessa função e observar onde a função é negativa.

$LB' = 0{,}5016x^2 – 8{,}612x + 35{,}635$
$x' = 6{,}9562$ ou $x'' = 10{,}2128$



Assim, o intervalo em que a contribuição marginal é negativa seria entre os valores 6,9562 e 10,2128.

Dando continuidade, podemos mostrar matematicamente os trechos em que a função lucro bruto é crescente e aqueles em que ela é decrescente. Então, considerando que o lucro bruto está definido no intervalo de 4 a 15 unidades, e que os pontos críticos (onde $f'(x) = 0$) são:

$x' = 6{,}9562$ (máximo relativo) e $x'' = 10{,}2128$ (mínimo relativo), podemos mostrar o crescimento e o decrescimento da função substituindo x na função lucro bruto. Vamos tomar valores próximos.

$LB = 0{,}1672x^3 – 4{,}306x^2 + 35{,}635x – 93{,}646$

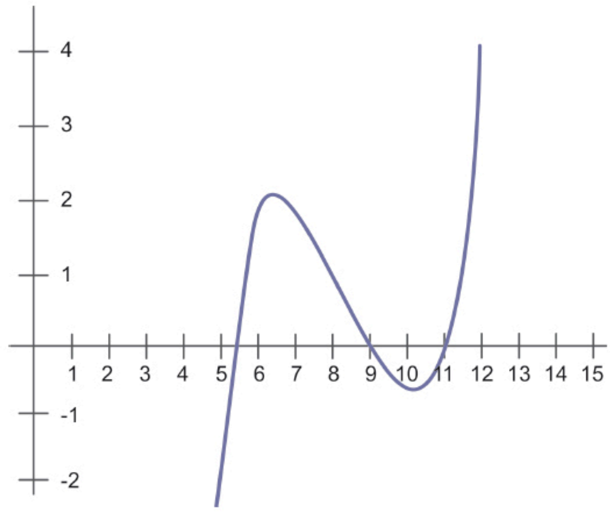
- No intervalo de 4 a 7
  Para x = 4 LB = –9,3012
  Para x = 6,95 LB = 2,1561
  Para x = 7 LB = 2,1546
  Função crescente até seu máximo relativo.
  Crescente [4; 6,95[
  Observe que para $x_1 < x_2$ temos $f(x1) < f(x_2)$ (ou seja, se x cresce, y cresce).

- No intervalo de 6,95 a 10,21
  Para x = 6,95 LB = 2,1561
  Para x = 10,21 LB = -0,731
  Função decrescente no intervalo de 6,95 a 10,21.
  Observe que para $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) > f(x_2)$ (ou seja, se x cresce, y decresce).

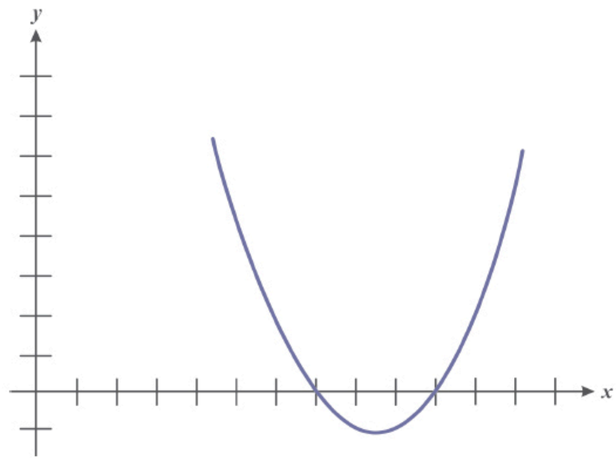
- No intervalo de 10,21 a 15
  Para x = 10,21 LB = -0,731
  Para x = 11 LB = -0,1438
  Para x = 12 LB = 2,8316
  Função crescente no intervalo de 10,21 a 15.
  Observe que para $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) < f(x_2)$ (ou seja, se x cresce, y cresce).

Com base na análise conjunta da derivada primeira e da derivada segunda da função, qual é a produção mínima para garantir que a partir desse número os resultados tendam sempre a melhorar, dentro do domínio analisado?

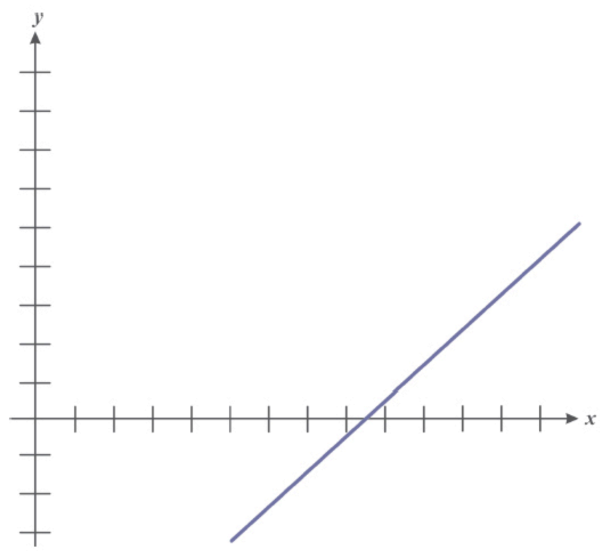
Pela análise realizada podemos dizer que seria a partir do mínimo local 10,21. Observe o gráfico da função lucro bruto:



Veja a seguir o gráfico da função derivada $LB' = 0{,}5016x^2 - 8{,}612x + 35{,}635$:



Agora, note o gráfico da derivada segunda expressa por $LB'' = 1{,}0032x - 8{,}612$, mostrado a seguir:



Observe também um resumo da situação no Quadro 4:

INTERVALO	4 < x < 6,95	6,95 < x < 10,21	10,21 < x < 15
Valor (livre)	x = 5	x = 8	x = 13
Sinal de **f'(x)**	5,115 > 0 **f'(x) > 0**	-1,1586 < 0 **f'(x) < 0**	8,4494 > 0 **f'(x) > 0**
Conclusão	**Crescente**	**Decrescente**	**Crescente**
Sinal de (x) nos pontos críticos	f ''(6.95) < 0 **(-1,6335402<0)**	________	f ''(10.2128) > 0 **(1,63348>0)**
Conclusão	Concavidade para baixo (ponto máximo)		Concavidade para cima (ponto mínimo)

Quadro 4: Resultado do domínio analisado
Fonte: Elaborado pela autora deste livro

Muitas vezes necessitamos otimizar a função encontrando seus valores máximos ou mínimos. Vamos esclarecer o significado de alguns termos utilizados:

- O valor máximo absoluto de uma função é o **maior** valor da função em seu domínio.

- O valor mínimo absoluto de uma função é o **menor** valor da função em seu domínio.

- O valor extremo absoluto de uma função é o valor que é ou *maxabs* ou *minabs* da função.

Outro aspecto importante que devemos estudar faz referência ao intervalo fechado de uma função contínua. Uma função contínua f em um dado intervalo [a, b] tem valores máximos e mínimos absolutos.
Para encontrá-los:

- busque os pontos críticos de f em [a, b]; e

- avalie f na abscissa do ponto crítico e também nos extremos do intervalo a e b; os valores máximo e mínimo são os maiores e menores valores encontrados.

Note que, basicamente, para encontrarmos os valores extremos da função, precisamos dos pontos críticos e dos extremos do intervalo.

- Somente um ponto crítico no intervalo? Então precisamos encontrá-lo e usar o teste da segunda derivada para sabermos se f atinge neste valor um máximo ou um mínimo.

- O intervalo é fechado? Então avalie f em todos os pontos críticos e extremos do intervalo; os valores máximo e mínimo são os maiores e menores valores encontrados.

Pontos Extremos Relativos

Em uma curva temos o ponto **mais alto** e o ponto **mais baixo**. Ao ponto mais alto denominamos de ponto máximo relativo e ao ponto mais baixo de uma região de uma curva nomeamos de ponto mínimo relativo.

Concavidade é a ideia do gráfico "entortar" para baixo (como um franzido) ou "entortar" para cima (como um sorriso). Como mostra a Figura 3:

Figura 3: Concavidade para baixo e para cima
Fonte: Elaborada pela autora deste livro

O momento dessas alterações de "para cima" para "para baixo", ou ainda, de "para baixo" para "para cima" chamamos de ponto de inflexão. Observe na Figura 4.

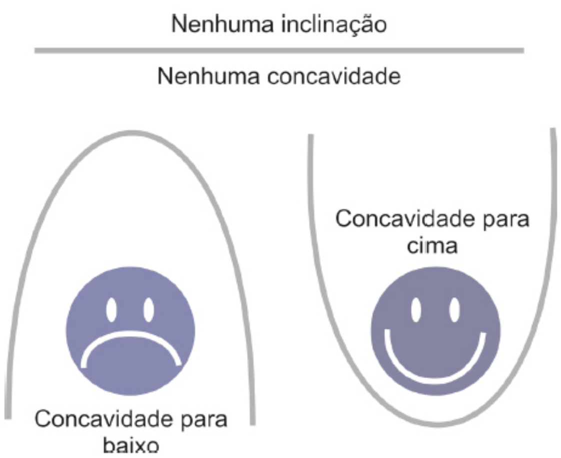


Figura 4: Situação em que o ponto de inflexão acontece
Fonte: Elaborada pela autora deste livro

É importante relembrarmos que números críticos de uma função são as localizações onde o valor da derivada é zero (inclinação horizontal para a tangente) ou a derivada é indefinida (inclinação indefinida para a tangente ou a derivada não existe).

Exemplo 3

Consideremos que a plantação de eucalipto da organização que você administra tem permissão de produção para t anos. Sabemos que o valor da madeira cresce proporcionalmente à raiz quadrada de t, enquanto o custo de manutenção é proporcional a t. Queremos encontrar o tempo necessário para que a produção atinja o seu máximo.

Resolução:

Com base nas informações, podemos construir a função a seguir, que descreve o valor da plantação após t anos, em que a e b são constantes. Acompanhe:

$$V(t) = a\sqrt{t} - bt$$

milhões de reais para $t > 0$

E, utilizando a função a seguir, vamos encontrar quando a função atinge seu máximo.

Para $t > 0$

$$V(t) = 96\sqrt{t} - 6t$$

$$V(t) = 96t^{\frac{1}{2}} - 6t$$

$$V'(t) = 48t^{\frac{-1}{2}} - 6$$

Lembre-se que

$$\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$$

Agora, fazendo a derivada igual a zero, vamos encontrar o valor de t:

$$0 = 48t^{\frac{-1}{2}} - 6$$

$$6 = 48t^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{6}{48} = t^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{1}{8} = t^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$\sqrt{t} = 8$$

$$(\sqrt{t})^2 = (8)^2$$

$$\boxed{t = 64}$$

Como existe um único ponto crítico, vamos usar o teste da segunda derivada:

$$V'(t) = \frac{48}{\sqrt{t}} - 6$$

$$= 48t^{\frac{-1}{2}} - 6$$

$$V''(t) = -24t^{\frac{-3}{2}}$$

Vamos avaliar em $t = 64$:

$$V''(t) = -24t^{\frac{-3}{2}}$$

$$= \frac{-24}{\sqrt{t^3}}$$

$$V''(64) = \frac{-24}{\sqrt{(64)^3}} = \frac{-24}{512}$$

Claramente percebemos que $V''(64)$ é negativo. Logo, $V(t)$ tem um máximo em $t = 64$.

O valor da plantação atinge seu máximo em 64 anos. Qual será o valor nessa época?

Como a função descrevia a quantia em milhões de reais, $V(64) = 384$ significa que a resposta é R$ 384.000.000!

TEXTO COMPLEMENTAR

Divirta-se e aprofunde seus estudos passeando pelas leituras indicadas a seguir:

- *Matemática básica para decisões administrativas* – de Fernando Cesar Marra e Silva e Mariângela Abrão.
- *Derivadas* – para saber mais consulte o site <**http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/calculo/derivada/derivada1.htm**>. Acesso em: 27 jan. 2014.
- *Cálculo de máximo e mínimo* – busque mais informações consultando o site <**http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/maxmin/mm01.htm**>. Acesso em: 27 jan. 2014.
- *Teste da primeira derivada* – para saber mais, consulte o site <**http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/maxmin/mm02.htm**>. Acesso em: 27 jan. 2014.
- *Teste da segunda derivada* – explore mais sobre o tema no site <**http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/maxmin/mm03.htm**>. Acesso em: 27 jan. 2014.

Resumindo

Neste Capítulo, esforços foram destinados a captar sua atenção e sensibilizá-lo para a compreensão do conceito de derivada. Exemplos ilustraram a ideia de derivada e sua aplicação. As regras de derivação foram apresentadas como um caminho mais curto para chegar à derivada de uma função sem fazer uso de limite da taxa de variação da função. Problemas de otimização ilustraram a aplicabilidade do conceito de derivada.

ATIVIDADES

1. Encontre a derivada das funções, a seguir:

a) $f(x) = (3x + 1)^2$

b) $f(x) = \sqrt{13x^2 - 5x + 8}$

c) $f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x)$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{3x - 1}$

2. Resolva o problema a seguir uti lizando seus conhecimentos de máximos e mínimos e também de derivada.
Imagine que um setor da prefeitura de sua cidade cuida de um pomar para suprir as necessidades de maçãs das escolas municipais da região. Sabe-se que há 50 árvores (macieiras) no pomar e que cada macieira produz 800 maçãs. Os agrônomos informaram que para cada árvore adicional plantada no pomar, a produção por árvore diminuirá em 10 frutas.
Encontre a quanti dade de árvores (macieiras) que devem ser acrescidas (plantadas) no pomar de modo a maximizar a produção de maçãs.

3. Colaboradores da fábrica do Estado se reuniram para angariar fundos destinados a organizar a escola que atenderá aos jovens e adultos da região. Para tanto, se propuseram a vender artigos bordados, produzidos por voluntários (na maioria esposas dos colaboradores). Sabe-se que o lucro resultante da venda de x unidades de um artigo é dado por $P(x) = 0{,}0002x^3 + 10\,x$.
Encontre o lucro marginal para uma produção de 50 unidades.

Respostas das Atividades

1.

a) $6(3x+1)$

b) $\dfrac{26x-5}{2\sqrt{13x^2-5x+8}}$

c) $\dfrac{-2}{(x+1)^2}$

d) $\dfrac{x(3x-2)}{(3x-1)^2}$

2. Com mais 15 árvores plantadas a produção atingirá o seu máximo, que é 42.250.

3. R$ 11, 50 por unidade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Antes de nos despedirmos vamos conhecer alguns desdobramentos de derivada, ou seja, vamos nos aproximar de algumas noções de antiderivada – que pode ser denominada por integral.

Veja que para cada operação, geralmente, temos uma inversa que se assemelha a desfazer o que foi realizado. Adição nos leva à subtração… Multiplicação nos leva à divisão… Expoentes nos levam aos radicais…

A ideia que queremos propor é "desfazer" derivadas com... antiderivadas.

Vamos continuar esta linha de raciocínio.

Derivada transforma funções custo em funções custo marginal.

Antiderivada transforma funções custo marginal 'CMg (x)' de volta a funções custo 'C(x)'.

Para compreendermos o conceito da antiderivada, vamos pensar na relação entre expoentes e radicais…

$x^2 = 9 \longrightarrow x = \sqrt{9}$ ou $-\sqrt{9}$, (ou seja +3 oouu –3)

Vamos continuar nesta esta linha de raciocínio para compreendermos derivadas… Observem como ficaria a derivada de x^2

$$\frac{d}{dx} x^2 = 2x$$

Mas se tivéssemos que pensar em 2x para voltar. De onde vem 2x ?

Veja algumas das possibilidades:

x^2 ;$x^2 + 5$; $x^2 – 72$; $x^2 + p$; entre outras.

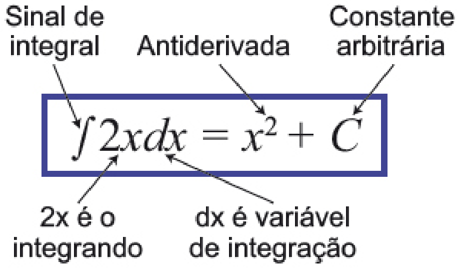
Note que 2x poderia ser a resposta da derivada de muitas funções diferentes; dizemos então que a antiderivada de 2x é $x^2 + C$, onde C é uma constante.

Dizemos que $x^2 + C$ é a "antiderivada mais geral" ou a "integral indefinida".

Podemos "checar" nossa resposta... Como?

$$\frac{d}{dx} x^2 + C = 2x$$

Utilizamos a seguinte notação:



Podemos formalizar a definição da seguinte maneira:

f (x)dx = g(x) +C se, e somente se, g′ (x) = f (x)

Recordemos nossa mais "poderosa" ferramenta para diferenciação:

A Regra da Potência da Diferenciação

Para qualquer expoente constante n,

$$\frac{d}{dx}x^n = n \cdot x^{n-1}$$

Temos agora uma maneira de "inverter" o processo...
Para qualquer expoente n ≠ – 1,

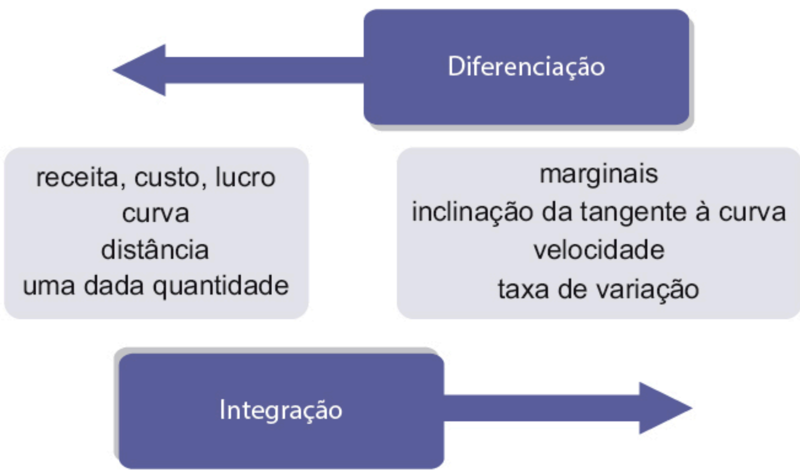
$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$$

Existem várias outras regras que facilitam encontrarmos a integral e aos poucos fica fácil compreendermos, mas vamos deixar para detalhar em outra oportunidade.

Vale salientarmos que começamos a noção de integral conversando sobre operações inversas. Por exemplo, integração recupera custo, receita e lucro de suas marginais.

$$C(x) = \int CMg(x) \qquad R(x) = \int RMg(x) \qquad L(x) = \int LMg(x)$$

Em certo sentido, integração recupera qualquer quantidade de sua taxa de variação.



Assim, podemos "recuperar" a função custo do custo marginal essencialmente seguindo as duas etapas:

1) Integrar a função custo marginal para encontrar a função custo; e

2) Usando o custo fixo, estimar a constante arbitrária.

Esses saberes nos serão úteis em várias aplicações.

Se soubermos o valor atual de uma economia e sua taxa de crescimento, então poderemos encontrar o valor da economia em qualquer tempo futuro usando as técnicas de integração.

Que tal uma aplicação?

Imaginemos que A função custo marginal de uma companhia seja $CMg(x) = 6\sqrt{x}$ e o custo fixo de R$1.000,00.

Vamos encontrar a função custo.

Devemos inicialmente Integrar CMg(x) para encontrar C(x):

$$= 4x^{\frac{3}{2}} + K \quad C(x) = \int CMg(x) \;= \int 6\sqrt{x}dx \;= 6\int x^{\frac{1}{2}}dx \;= 6 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + K$$

Onde K representa o custo fixo; é usado para evitar confusão com C(x) para custo.

K é o custo fixo porque C(0)=K como visto abaixo:

$$C(x) = 4x^{\frac{3}{2}} + K$$

$$C(0) = 4(0)^{\frac{3}{2}} + K = K$$

Teremos que substituir K = 1.000 para obtermos a função custo:

$$C(x) = 4x^{\frac{3}{2}} + 1.000$$

Bem, vamos ficar por aqui.

Claro que seria interessante continuarmos pelos caminhos mais profundos do cálculo, mas essa "viagem" terá de ficar para outra oportunidade.

Recomendamos, entretanto, que você visite as páginas do livro *Matemática Básica para Decisões Administrativas*, que trata sobre os temas integrais. De maneira bem simples, poderíamos pensar que a integral de uma função desfaz o que a derivada fez, como foi relatado nesta breve introdução ao tema. Esperamos que tenha ficado curioso. Anime-se e mergulhe nas páginas do livro.

Desejamos a você muito sucesso nos estudos e no trabalho!

REFERÊNCIAS

BOULOS, Paulo. **Cálculo diferencial e integral**. São Paulo: Makron Books, 1999. v. 1.

BRASIL ESCOLA. **Teorema de Pitágoras**. [2008]. Disponível em: <**http://www.brasilescola.com/matematica/teorema-pitagoras.htm**>. Acesso em: 31 jan. 2014.

CORREIOS. **Cartas:** carta não comercial e cartão-resposta. 2012. Disponível em: <**http://www.correios.com.br/para-voce/consultas-esolicitacoes/precos-e-prazos/servicos-nacionais_pasta/carta**>. Acesso em: 28 maio 2014.

______. **Cupom-resposta Internacional.** [2008]. Disponível em: <**http://www.correios.com.br/produtos_servicos/catalogo/internacionais/intl_cupom_resposta.cfm**>. Acesso em: 31 jan. 2014.

EDUTEKA. **Diagramas de Venn.** [1997]. Disponível em: <**http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/activities/Vdiagram/Index.html**>. Acesso em: 31 jan. 2014.

HOFFMANN, Laurence D. **Cálculo:** um curso moderno e suas aplicações. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1999.

LARSON, Roland E.; HOSTETLER, Robert P.; EDWARDS, Bruce H. **Cálculo com aplicações.** 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

MARRA E SILVA, Fernando Cesar; ABRÃO, Mariângela. **Matemática básica para decisões administrativas.** São Paulo: Atlas, 2007.

MORETTIN, Pedro Alberto; BUSSAB, Wilton de Oliveira; HAZZAN, Samuel. **Cálculo:** funções de uma variável. 3. ed. São Paulo: Atual, 1987.

WHIPKEY, Kenneth L.; WHIPKEY Mary Nell. **Cálculo e suas múltiplas aplicações.** 3. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1982.