Universidade Franciscana

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
DOUTORADO

MAURICIO RAMOS LUTZ

POSSIBILIDADE DE INSERÇÃO DA GEOMETRIA FRACTAL NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO IFFAR

Santa Maria/RS
2020

MAURICIO RAMOS LUTZ

POSSIBILIDADE DE INSERÇÃO DA GEOMETRIA FRACTAL NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO IFFAR

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Pinto Leivas

Santa Maria/RS

2020

L975p Lutz, Mauricio Ramos
Possibilidade de inserção da Geometria Fractal na licenciatura em Matemática do IFFar / Mauricio Ramos Lutz ; orientação José Carlos Pinto Leivas – Santa Maria : Universidade Franciscana – UFN, 2020.
253 f. : il.

Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Universidade Franciscana – UFN

1. Geometria Fractal 2. Registro de Representação Semiótica 3. Tecnologias Digitais 4. Geogebra 5. Ensino Superior I. Leivas, José Carlos Pinto II. Título.

CDU 51

Elaborada pela Bibliotecária Eunice de Olivera CRB/10 – 1491

ÁREA DE CIÊNCIAS HUMANAS

Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática

MAURICIO RAMOS LUTZ

POSSIBILIDADE DE INSERÇÃO DA GEOMETRIA FRACTAL NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO IFFAR

Esta Tese foi submetida ao processo de avaliação pela Banca Examinadora para obtenção do Título de:

DOUTOR EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

e aprovada em vinte e três de julho de 2020, atendendo às normas de legislação vigente da Universidade Franciscana, Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática.

TSCD

Doutor Thais Scotti do Canto Dorow
Coordenadora do Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática

Banca examinadora:

José Carlos Pinto Leivas
Orientador/Presidente

Ana Marli Bulegon

Ana Marli Bulegon
Examinador

Danise Kriedte da Costa
Examinador

Eleni Maria Nehring
Examinador

Osvaldo Jesús Rojas Velázquez
Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus por iluminar meus caminhos, dando-me forças para traçar metas e alcançar meus objetivos durante essa caminhada.

Ao Prof. Dr. José Carlos Pinto Leivas, pela orientação, amizade, palavras de incentivo, paciência e por partilhar seus conhecimentos, sua experiência de vida e de pesquisador, evidenciando nas suas atitudes que o conhecimento sem partilha é vazio.

Ao meu pai (*in memoriam*) e a minha mãe, que motivou, acompanhou e contribuiu de todas as formas possíveis para a realização deste trabalho.

Aos amigos e companheiros Alexandre Mendes, Jussara Aparecida da Fonseca, Luciano de Oliveira, Marcia Viaro Flores, Moacir Silvestre Mann, Vitor Hugo Chaves Costa, enfim, a todos que acompanharam as alegrias e dificuldades vividas durante a realização do doutorado.

Aos professores e colegas que tive e com os quais convivi no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciência e Matemática da Universidade Franciscana, os quais, cada um com suas características, contribuíram no meu crescimento profissional e pessoal.

Aos membros do Grupo de Estudo e Pesquisa em Geometria (GEPGEO), liderado pelo meu orientador, pelas contribuições, amizade e pelos alegres momentos de estudos que compartilhamos.

Aos professores que compuseram a banca de qualificação e defesa, Dra. Ana Marli Bulegon, Dra. Denise Kriedte da Costa, Dra. Cátia Maria Nehring, Dr. Osvaldo Jesús Rojas Velázquez, Dra. Janilse Fernandes Nunes e Dr. Valdir Pretto, que se disponibilizaram a analisar e a contribuir com valiosas sugestões de encaminhamento deste trabalho.

À equipe diretiva do Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete pela compreensão, apoio e por permitir a realização do Projeto de Ensino e, em especial, à coordenação do curso de licenciatura em Matemática, do referido campus, composta pela professora Ma. Francisca Brum Tolio (Coordenadora) e pelo professor Me. Luciano de Oliveira (Coordenador Substituto).

Aos meus queridos alunos do curso de licenciatura em Matemática, por aceitarem e colaborarem para a realização desta pesquisa, pois sem eles tudo isso não seria possível.

Por fim, às demais pessoas que contribuíram direta ou indiretamente, agradeço pelo carinho e pela compreensão nos momentos em que a dedicação aos estudos foi decisiva para a realização deste trabalho.

Muito obrigado a todos!!!

RESUMO

O presente trabalho de pesquisa tem como objetivo investigar possibilidades de inserção de noções de Geometria Fractal nos cursos de licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha (IFFar) com o uso de Tecnologias Digitais (TD). A escolha de pesquisar tal temática deve-se, entre outros motivos, ao fato de os cursos de licenciatura em Matemática do IFFar desenvolverem em seus currículos somente a Geometria Euclidiana, além de haver poucos trabalhos científicos com aplicação relacionados à Geometria Fractal e ao uso das TD. Como aporte teórico, é utilizada os Registro de Representação Semiótica (RRS), de Raymond Duval, com o intuito de poder analisar as diferentes mobilizações de registros de representação que podem ocorrer para a apreensão de um objeto matemático. A metodologia é de cunho qualitativo. Os sujeitos da pesquisa são acadêmicos do curso de licenciatura em Matemática do IFFar – Campus Alegrete. Para a obtenção dos dados, foi desenvolvida e aplicada, a esse público, uma sequência de atividades em forma de oficinas com duração de 20 horas, sendo utilizadas como recurso metodológico as TD. A coleta dos dados ocorreu a partir de três instrumentos: observação direta e anotações do pesquisador em seu diário de campo; registros escritos pelos acadêmicos; e registros figurais realizados no *GeoGebra*. A análise se apoiou no método qualitativo, buscando observar os procedimentos de resolução dos alunos em relação aos diferentes tipos de transformações (tratamento ou conversões) dos RRS. Com as oficinas, foi possível apresentar aos acadêmicos envolvidos na pesquisa uma outra Geometria, a qual não consta no Projeto Pedagógico de Curso. Por meio das respostas apresentadas pelos discentes e análise do RRS, concluímos que houve aprendizagem. Como sugestão de melhoria das oficinas, para dinamizações posteriores, indicamos explorar mais a planilha e a janela *CAS* do *GeoGebra*. Para tanto, sugerimos repensar algumas atividades, direcionando os acadêmicos a trabalhar com essas duas ferramentas. Esperamos que os discentes, em suas futuras práticas pedagógicas, possam transpor, na Educação Básica, o conhecimento adquirido. Em relação a não constar no projeto pedagógico nenhuma disciplina de geometrias não euclidianas, julgamos importante, quando houver a reformulação do referido projeto, a inclusão de pelo menos uma disciplina dessa natureza, sendo obrigatória ou optativa. Para futuros trabalhos e pesquisas, destinadas ao ensino e à aprendizagem de Geometria, recomendamos a exploração de outras geometrias não euclidianas.

Palavras-chave: Geometria Fractal. Registro de Representação Semiótica. Tecnologias Digitais. *Geogebra*. Ensino Superior.

ABSTRACT

This research aims to investigate possibilities of inserting notions of Fractal Geometry in the Mathematics undergraduate courses from Farroupilha Federal Institute of Education, Science and Technology (IFFar) by using Digital Technologies (DTs). The choice to research this subject is due, among other reasons, to the fact that the undergraduate courses in Mathematics of IFFar develop in their curricula only Euclidean Geometry. Moreover, there are few scientific papers with application related to Fractal Geometry and the use of DTs. As a theoretical contribution, Raymond Duval's Register of Semiotic Representation (RSR) is used to analyze the different mobilizations of representation registers that can occur for the apprehension of a mathematical object. The methodology is qualitative. The research subjects are academics from the Mathematics undergraduate course at IFFar – Alegrete Campus. With the intention of obtaining the data, a sequence of activities, in the form of workshops lasting 20 hours, was developed and applied to this public, with DT as a methodological resource. The data collection occurred from three instruments: direct observation and notes of the researcher in his field journal; records written by academics; and figurative records made in GeoGebra. The analysis was based on the qualitative method, seeking to observe the students' resolution procedures in relation to the different types of transformations (treatment or conversions) of the RSR. With the workshops, it was possible to present to the academics involved in the research another Geometry, which is not included in the Pedagogical Course Project. Through the answers presented by the students and the RSR analysis, we concluded that learning process had occurred. As a suggestion for the improvement of the workshops, for further dynamization, we indicated to explore more the spreadsheet and the CAS window of GeoGebra. To this end, we suggested rethinking some activities, guiding students to work with these two tools. We hope that these students, in their future pedagogical practices, will be able to transpose, in Basic Education, the knowledge acquired. Regarding the fact that non-Euclidean geometry discipline is not included in the pedagogical project, we believe it is important to include at least one such discipline, being either mandatory or optional. For future works and investigations, targeted to the teaching and learning of Geometry, we recommend the exploration of other non-Euclidean geometries.

Keywords: Fractal geometry. Registration of Semiotic Representation. Digital Technologies. Geogebra. Higher Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplo de autossemelhança aproximada em fractais...23
Figura 2 – Resumos dos tipos de obtenção dos fractais 25
Figura 3 – Linha cronológica da Geometria Fractal...26
Figura 4 – Fractal hexagonal de Dürer 26
Figura 5 – Detalhe do fractal hexagonal de Dürer..27
Figura 6 – Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor...28
Figura 7 – Curva de Peano 28
Figura 8 – Curva de Hilbert 29
Figura 9 – Etapa 1 da construção Curva de Hilbert 30
Figura 10 – Etapa 2 da construção Curva de Hilbert 30
Figura 11 – Curva de Koch...31
Figura 12 – Ilha de Koch ou Floco de Neve...31
Figura 13 – Triângulo de Sierpinsky 32
Figura 14 – Tapete de Sierpinsky 32
Figura 15 – Tetraedro de Sierpinsky...33
Figura 16 – Esponja de Menger...34
Figura 17 – Algumas amostras do Conjunto de Julia para a função quadrática $f(z)=z^2+c$.....35
Figura 18 – Conjunto de Mandelbrot apresentando vários valores para c e seus correspondentes Conjuntos de Julia 36
Figura 19 – Número de artigos nos periódicos Internacionais e Nacionais obtidos com busca automática...42
Figura 20 – Síntese do processo de obtenção das 7 dissertações recuperadas no Banco de Teses e Dissertações da CAPES sobre o tema Geometria Fractal..49
Figura 21 – Árvore Pitagórica nível 3 destacando as cores em cada nível 51
Figura 22 – Tetracírculo 53
Figura 23 – Resumo das atividades apresentadas nas sete dissertações.......................................58
Figura 24 – Exemplo de conversão em RRS..67
Figura 25 – Tipos de transformação de representações semióticas 68
Figura 26 – Tipos de registros utilizados na pesquisa...69
Figura 27 – Áreas de trabalho do *GeoGebra* 80
Figura 28 – Esboço de Fractal representado pelos Acadêmicos B, C, G e K 88
Figura 29 – Fractal hexagonal de Dürer (nível 3) construído pelo Acadêmico I.........................91
Figura 30 – Fractal hexagonal de Dürer (nível 4) construído pelo Acadêmico L.........................92

Figura 31 – Cálculo da medida do segmento do Fractal octogonal de Dürer (nível 1) 93
Figura 32 – Resposta do Acadêmico H para a área da região do fractal hexagonal de Dürer (nível 0)..95
Figura 33 – Resposta do Acadêmico C para a área da região do fractal hexagonal de Dürer (nível 1)..95
Figura 34 – Resposta para a área da região do fractal hexagonal de Dürer, níveis 2 e 3, dos Acadêmicos A e I, respectivamente 96
Figura 35 – Resposta para a sexta questão da Atividade 3 dos Acadêmicos H e J 97
Figura 36– Resposta ao primeiro questionamento da Atividade 4 apresentada pelo Acadêmico G 98
Figura 37 – Resposta ao segundo questionamento da Atividade 4 apresentada pelo Acadêmico B 99
Figura 38 – Resposta ao terceiro questionamento da Atividade 4 apresentada pelo Acadêmico J 100
Figura 39 – Fractal octogonal de Dürer elaborado pelo Acadêmico L.......................................105
Figura 40 – Repostas apresentadas pelo Acadêmico G para a divisão de um segmento............108
Figura 41 – Repostas apresentadas pelo Acadêmico G para a divisão dos lados de um quadrado 108
Figura 42 – Repostas apresentadas pelo Acadêmico G para a divisão dos lados de um quadrado 109
Figura 43 – Dedução da fórmula da dimensão fractal apresentada pelo Acadêmico E.............110
Figura 44 – Planilha e Janela CAS apresentada pelo Acadêmico C..111
Figura 45 – Curva de Peano apresentada pelos Acadêmicos B, E e H 116
Figura 46 – Curva de Peano apresentada pelo Acadêmico G..117
Figura 47 – Resposta do Acadêmico L para a primeira questão da Atividade 3 Oficina 3 117
Figura 48 – Resposta do Acadêmico C para a primeira parte da segunda questão da Atividade 3 Oficina 3 118
Figura 49 – Resposta do Acadêmico C para a segunda questão da Atividade 3 da Oficina 3 .118
Figura 50 – Esboços apresentados para o Tetraedro de Sierpinsky..123
Figura 51 – Tetraedro de Sierpinsky apresentada pelos Acadêmicos H, J e K..........................124
Figura 52 – Nível 3 do Tetraedro de Sierpinsky apresentada pelo Acadêmico L 125
Figura 53 – Resposta do Acadêmico E para a primeira questão da Atividade 3 da Oficina 4 ...126
Figura 54– Resposta do Acadêmico C para a primeira parte da segunda questão da Atividade 3 da Oficina 4 127

Figura 55 – Respostas dos Acadêmicos B e H para a segunda parte da segunda questão da Atividade 3 da Oficina 4 127
Figura 56 – Resposta do Acadêmico A para a primeira parte da terceira questão da Atividade 3 da Oficina 4 128
Figura 57 – Respostas dos Acadêmicos B e D para a segunda parte da terceira questão da Atividade 3 da Oficina 4 129
Figura 58 – Resposta do Acadêmico I para a primeira parte da quarta questão da Atividade 3 da Oficina 4 130
Figura 59 – Respostas dos Acadêmicos B e C para a segunda parte da quarta questão da Atividade 3 da Oficina 4 131
Figura 60 – Imagem (a) não fractal e imagem (a) transformada em fractal 140
Figura 61 – Imagem (h) não fractal e imagem (h) transformada em fractal 141

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Figura obtida e relação entre o número de divisões e o fator de redução para um segmento...38
Quadro 2 – Figura obtida e relação entre o número de divisões e o fator de redução para um quadrado...38
Quadro 3 – Figura obtida e relação entre o número de divisões e o fator de redução para um cubo...39
Quadro 4 – Dimensões de alguns fractais...40
Quadro 5 – Relação dos textos internacionais selecionados...42
Quadro 6 – Relação dos textos nacionais selecionados e seus respectivos grupos...44
Quadro 7– Disciplinas de Geometria ofertadas nos cinco cursos de licenciatura em Matemática do IFFar...60
Quadro 8 – Tipos e funções das representações...64
Quadro 9 – Quadro da classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático...65
Quadro 10 – Atividades desenvolvidas durante o Projeto de Ensino...79
Quadro 11 – Conversão do RLN para RF no fractal hexagonal de Dürer...89
Quadro 12 – Esboços apresentados para o fractal hexagonal de Dürer...90
Quadro 13 – Questionamentos referentes às áreas das regiões hexagonais do Fractal Hexagonal Dürer para os níveis 0, 1, 2 e 3...94
Quadro 14 – Registros mobilizados para o quinto questionamento da Atividade 3...96
Quadro 15 – Registros mobilizados para o sexto questionamento da Atividade 3...97
Quadro 16 – Quadro-resumo das atividades da Oficina 1...103
Quadro 17– Valores das medidas dos lados do octógono nos níveis 1, 2 e 3...104
Quadro 18 – Figuras geométricas Oficina 2...106
Quadro 19 – Quadro-resumo das atividades da Oficina 2...112
Quadro 20 – Conversão do RLN para RF na Curva de Peano...114
Quadro 21 – Esboços apresentados para a Curva de Peano...115
Quadro 22 – Respostas apresentadas pelos Acadêmicos E, K e L para o terceiro, quarto e quinto questionamentos da Oficina, respectivamente...119
Quadro 23 – Quadro-resumo das atividades da Oficina 3...121
Quadro 24 – Conversão do RLN para RF na Tetraedro de Sierpinsky...122
Quadro 25 – Quadro-resumo das atividades da Oficina 4...131
Quadro 26 – Quadro-resumo das mobilizações das quatro oficinas...133

Quadro 27 – Pergunta e respostas ao primeiro questionamento da pesquisa de opinião 134
Quadro 28 – Pergunta e respostas ao segundo questionamento da pesquisa de opinião 135
Quadro 29 – Pergunta e respostas ao terceiro questionamento da pesquisa de opinião 137
Quadro 30 – Pergunta e respostas ao quarto questionamento da pesquisa de opinião...............138
Quadro 31 – Figuras geométricas (pós-teste) 139
Quadro 32 – Figuras geométricas (pós-teste) e suas respectivas marcações 140

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACC	Atividades Acadêmica-cientifico-culturais.
Bolema	Boletim de Educação Matemática.
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.
CAS	*Computer Algebra System*.
CNE	Conselho Nacional de Educação.
GD	Geometria Dinâmica.
IES	Instituições de Ensino Superior.
IF	Institutos Federais.
IFFar	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha.
IFRS	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul.
IFSul	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense.
IREM	Instituto de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática.
PPC	Projetos Pedagógicos de Curso.
PROFMAT	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
RENOTE	Revista Novas Tecnologias na Educação.
REVEMAT	Revista Eletrônica de Educação Matemática.
RF	Registro Figural.
RLN	Registro da Língua Natural.
RRS	Registros de Representação Semiótica.
RS	Registro Simbólico.
SciELO	*Scientific Electronic Library Online.*
SEER	Sistema Eletrônico de Editoração de Revistas.
TD	Tecnologias Digitais.
UFN	Universidade Franciscana.
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
ULBRA	Universidade Luterana do Brasil.
UNIÓN	Revista Iberoamericana de Educación Matemática.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 12
1.1 Problema da pesquisa 15
1.2 Objetivos 16
1.2.1 Objetivo Geral 16
1.2.2 Objetivos específicos 16
1.3 Justificativa 16
1.4 Estrutura do trabalho 20
2 GEOMETRIA FRACTAL 21
2.1 Tipos de fractais 24
2.2 Fractais clássicos e seus precursores 25
2.2.1 Fractal de Dürer 26
2.2.2 Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor 27
2.2.3 Curva de Peano 28
2.2.4 Curva de Hilbert 29
2.2.5 Curva de Koch 30
2.2.6 Fractais de Sierpinsky 32
2.2.7 Esponja de Menger 33
2.2.8 Conjunto de Fatou e Julia 34
2.2.9 Conjunto de Mandelbrot 35
2.3 Dimensão fractal ou dimensão Hausdorff-Besicovitch 36
2.4 Estudo de trabalhos a respeito da temática Geometria Fractal 40
2.4.1 Mapeamento de periódicos científicos 41
2.4.2 Mapeamento de teses e dissertações 48
2.5 As Geometrias trabalhadas nos cursos de licenciatura em Matemática no IFFar . 59
3 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA 62
4 AS TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA 71
5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA 75
5.1 A natureza da pesquisa 75
5.2 O contexto da pesquisa e os investigados 77
5.3 Atividades propostas e instrumentos para coleta de informações 78
5.4 Procedimentos de análise 82
6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS 85

6.1 Pré-teste 86
6.2 Oficina 1 89
6.3 Oficina 2 104
6.4 Oficina 3 113
6.5 Oficina 4 122
6.6 Pós-teste 138
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 143
REFERÊNCIAS 148
APÊNDICES 164
Apêndice 1 – Trabalho completo publicado no 5º SIPEMAT 165
Apêndice 2 – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido 180
Apêndice 3 – Projeto de Ensino 181
Apêndice 4 – Oficina 1 – Fractal hexagonal de Dürer 193
Apêndice 5 – Oficina 2 – Dimensão fractal 215
Apêndice 6 – Oficina 3 – Curva de Peano 229
Apêndice 7 – Oficina 4 – Tetraedro de Sierpinsky 239

1 INTRODUÇÃO

Considero importante iniciar este trabalho indicando um breve histórico de minha trajetória acadêmica e profissional com a intenção de justificar a temática da pesquisa e as motivações envolvidas nesse processo.

O professor deve constantemente reavaliar e refletir sobre o seu fazer pedagógico em sala de aula, de forma que ele possa verificar a importância de metodologias e adequar-se às necessidades e aos perfis de seus alunos. Segundo Lerman (2001, p. 33, tradução nossa), "[...] o professor é o elemento chave na aprendizagem matemática dos alunos".

Atuo há aproximadamente 15 anos como docente, sendo que, nos últimos 10 anos, tenho me dedicado ao Ensino Básico, Técnico e Tecnológico, como professor efetivo no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha (IFFar) – Campus Alegrete. Durante esse tempo, percebi que inúmeros alunos têm dificuldades no aprendizado de Matemática, o que acaba causando desgosto ou desinteresse pela disciplina por parte desses discentes. Diante dessa situação, surgiram inquietações que me fazem constantemente estar (re)pensando o meu fazer pedagógico.

Por ser inquieto e sentir a necessidade de buscar outras formas de trabalhar conteúdos de Matemática, desse modo, podendo contribuir com o processo de ensino e aprendizagem e melhorá-lo, realizei o mestrado em Ensino de Matemática[1] (2012), na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Também, cursei a especialização em Matemática, Didática e Mídias Digitais[2] (2015) – junto à UFRGS. Carvalho (2009, p. 27) relata que "a universidade oferece apenas as ferramentas com as quais o futuro professor irá construir suas estratégias para trabalhar com as situações complexas de sala de aula". Logo, depende dos professores fazerem o uso dos conhecimentos adquiridos nos bancos escolares e universitários para desenvolverem suas práticas. No entanto, isso nem sempre é fácil.

Pensando como educador, intensifiquei e priorizei, nos últimos anos, a minha formação e estudo na área de Educação Matemática, participando de eventos nacionais e internacionais. Tais encontros têm trazido trocas de experiências e reflexões entre colegas da área. Um exemplo disso foi o meu contato com o professor Dr. José Carlos Pinto Leivas em 2013, no VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática, ocorrido na Universidade Luterana do Brasil

---

[1] Link da dissertação: <http://hdl.handle.net/10183/49625>.
[2] Link do trabalho de conclusão da especialização: <http://hdl.handle.net/10183/134074>.

(ULBRA), em Canoas/RS, no qual ele abordou as Geometrias Não-Euclidianas[3]. Acredito que foi nesse momento que comecei a refletir mais sobre os programas escolares que desenvolvem somente a Geometria Euclidiana. A respeito disso, Araújo e Borba (2006, p. 30) relatam que,

> quando um professor (de matemática) se dispõe a realizar uma pesquisa na área de Educação (Matemática), talvez seja porque ele vem problematizando sua prática, o que poderá levá-lo a se dedicar com afinco ao desenvolvimento de uma pesquisa originada dessa problematização e, para isso, é preciso que ele sintetize suas inquietações iniciais em uma (primeira) pergunta diretriz.

Em 2016, novamente tive a oportunidade de participar da Aula Magna do curso de licenciatura em Matemática, do IFFar – Campus Alegrete, na qual, mais uma vez, o professor Leivas retoma o tema geometrias não euclidianas, com especial atenção à Geometria Fractal. Esse foi o passo inicial que deu origem a esta pesquisa, aliás, ao tema o qual me dediquei a estudar no ano de 2016. Isso culminou no meu ingresso, no ano de 2017, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (UFN), para cursar o doutorado em Ensino de Ciências e Matemática.

Ao estudarmos[4] a História da Matemática, percebemos que muitas ideias e conceitos aconteceram há muitos anos, em geral, no período da antiga Grécia ao século XIX. Já a Geometria Fractal teve sua evolução até chegar à formalização de Benoit B. Mandelbrot há muito pouco tempo, considerando a História da Matemática, ou seja, há menos de 50 anos.

Porém, para atingirmos os estudantes da Educação Básica, devemos apresentar essa Geometria aos nossos alunos de graduação e, amparando essa ideia, Nascimento, Silva e Maciel (2012) levanta a questão de obstáculos para a inclusão da Geometria Fractal nos Ensinos Fundamental e Médio. Isso ocorre devido aos professores de Matemática sequer terem ouvido falar nessa Geometria em suas graduações. O autor relata que:

> [...] é um tema recente para a maioria dos professores de Matemática, pois em muitos cursos de licenciatura em Matemática não constam na grade curricular e nem nos livros didáticos, quando aparecem, são apenas de forma ilustrativa, sem a devida orientação de como desenvolver o trabalho. (NASCIMENTO; SILVA; MACIEL, 2012, p. 114).

O autor apoia o ensino da Geometria Fractal, o qual descreve como um tema que pode ser trabalhado na Educação Básica na forma de incentivo para a aprendizagem de conteúdos matemáticos, tais como “padrões numéricos e geométricos; sequências e séries; progressões geométricas; problemas de contagem; perímetro, figuras planas; volume de sólidos

---

[3] Utilizamos a notação Geometrias Não-Euclidianas, quando se faz referência à Geometria de Lobachevsky e à Geometria de Riemann e a notação geometrias não euclidianas, às outras.

[4] O texto está escrito na primeira pessoa do plural, com exceção da parte inicial, que envolve experiências e trajetórias profissionais do professor/pesquisador autor do estudo.

geométricos; logaritmos; introdução ao conceito de limite". (MOREIRA, 2013, p. 35). Corroborando com essa ideia, Rabay (2013, p. 101) relata que:

> o uso de fractais em sala de aula provoca a quebra de paradigma que a matemática é uma ciência pronta. Como tem aplicações práticas e de fácil compreensão, e reconhecida a semelhança com diversos elementos da própria natureza, mostra que a matemática que é estudada é aplicável. Estimula o uso de computadores, provocando mais fascínio para quem ensina e para quem aprende. Mesmo que abordados em diferentes níveis, o uso da Geometria Fractal provoca nos alunos um olhar diferenciado no mundo que nos rodeia.

Mesmo não estando nos currículos escolares, a Geometria Fractal, uma das geometrias não euclidianas, pode ser explorada em sala de aula aliada ao uso do computador, desenvolvendo uma Geometria mais próxima da rotina dos educandos.

Na atualidade, as transformações sociais requerem mudanças, também nos contextos escolares, porque as informações estão cada vez mais acessíveis aos estudantes, seja por meio do computador, do celular e do *tablet*, dentre outras ferramentas de comunicação. Nesse universo, não há fronteiras nem portas fechadas, tudo acontece na mesma hora, em qualquer lugar, basta passar o dedo na tela. Dessa forma, a popularização das Tecnologias Digitais (TD) oferece ao educador a possibilidade de procurar recursos e maneiras diferenciadas de ensinar, que forneçam auxílio em sua prática pedagógica, como a inserção do uso do computador em sala de aula. Segundo Valente (1998, p. 24), "o advento do computador na educação provocou o questionamento dos métodos e da prática educacional".

Nesse contexto, um dos desafios para os docentes é tornar as aulas de Matemática mais dinâmicas, participativas e instigadoras. Para que isso ocorra, podemos utilizar outras ferramentas como os *softwares* educacionais, exemplo disso é o *software GeoGebra*[5]. Uma das vantagens é o fato de ele ser gratuito e funcionar com o sistema operacional *Linux*[6], presente na maioria dos laboratórios das escolas públicas; também é compatível com o *Windows*[7], e possui versão em português, o que é um facilitador para os estudantes que não possuem domínio em outra língua. Entretanto, observamos que, com ele, ainda vem sendo priorizado o ensino da Geometria Euclidiana. Desse modo, a utilização dessa ferramenta é limitada para o ensino de geometrias não euclidianas.

Além da pesquisa teórica sobre a temática, também realizamos aplicação de atividades, previamente planejadas, com os alunos do curso de licenciatura em Matemática do IFFar –

[5] Para mais informações: <https://www.geogebra.org/>.

[6] *Linux* é um Sistema Operacional que possibilita a execução de programas em um computador e outros dispositivos.

[7] *Windows* é um sistema operacional de multitarefas para computadores e dispositivos móveis, desenvolvido pela *Microsoft*.

Campus Alegrete, no qual não consta o tema Geometria Fractal. Os alunos já estão familiarizados com o uso da informática na sala de aula, o que facilitou a pesquisa.

A aplicação das atividades da pesquisa, envolvendo a Geometria Fractal, tem aporte teórico nos Registros de Representação Semiótica (RRS), de Duval (1995; 2009; 2010). Os estudos foram guiados por meio de uma sequência de atividades, em que se coloca o aluno como sujeito ativo do seu processo de aprendizagem, ou seja, ele irá construir seu conhecimento a partir do contato entre vários elementos que podem compô-la. Para Henriques e Almouloud (2016, p. 467),

> o professor que pretende fazer com que os seus alunos aprendam Matemática, sob diferentes pontos de vista, não deve, simplesmente, tratá-la sem evocar o importante papel exercido pelos diferentes registros que ele mobiliza em função dos objetos matemáticos a representar/ensinar.

Para Duval (2010), representar, tratar e converter RRS são elementos principais de sua teoria. O teórico considera ser fundamental mobilizar sistemas cognitivos específicos para cada atividade matemática, basicamente ligada às operações semióticas. Ou seja, para o autor, só é possível conhecer, compreender e aprender conceitos matemáticos pela utilização das representações semióticas do objeto matemático. A compreensão que se deve fazer em relação aos RRS é de que, quando se visualiza um objeto matemático sob diferentes formas de registros, ele fica fortalecido na memória.

Diante do que foi exposto, elaboramos o problema, o objetivo geral e os específicos, bem como a justificativa da pesquisa, dos quais passamos a tratar.

1.1 Problema da pesquisa

Em função do tema da pesquisa, Geometria Fractal, os processos de ensino com enfoque no uso das TD e o de aprendizagem por meio dos RRS, elaboramos o problema: investigar possibilidades de inserção de noções de Geometria Fractal nos cursos de licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha com a utilização das Tecnologias Digitais.

A fim de responder a esse problema, delineamos o objetivo geral e os específicos para a pesquisa, como seguem.

1.2 Objetivos

Visando responder a referida questão, formulamos o objetivo geral e os específicos.

1.2.1 Objetivo Geral

Investigar possibilidades de inserção de noções de Geometria Fractal nos cursos de licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha com o uso das Tecnologias Digitais.

1.2.2 Objetivos específicos

– Verificar, no Projeto Pedagógico dos cursos de licenciatura em Matemática adotados nos *campi* do IFFar, quais Geometrias são abordadas;

– Realizar um levantamento de conteúdos algébricos e geométricos que possam ser desenvolvidos a partir do estudo da Geometria Fractal;

– Explorar o ensino, por meio de TD, e a aprendizagem, através dos RRS, da Geometria Fractal;

– Planejar uma sequência de atividades com base em conhecimentos algébricos e geométricos (a partir da Geometria Fractal) que incluam o uso das TD;

– Executar e analisar a sequência de atividades com um grupo de alunos do curso de licenciatura em Matemática do IFFar – Campus Alegrete.

1.3 Justificativa

Não sabemos bem sobre as origens da Geometria, pois os primórdios de seu conhecimento são mais antigos que a própria escrita. Boyer (1996) acredita que ela teve origem no Egito pelas necessidades práticas de medir terras após enchentes anuais do rio Nilo. Tais medidas eram necessárias para regular a quantidade de terra que cada indivíduo possuía e, assim, estabelecer cobranças de impostos.

O reconhecimento da Geometria Euclidiana na Matemática e no cotidiano das pessoas é inegável, posto que, por meio dela, aprendemos sobre formas e medidas que facilmente são encontradas na natureza, por meio de estruturas com padrões regulares como, por exemplo, uma fachada de uma casa, uma caixa de sapato, entre outros objetos industrializados. Entretanto, na natureza existem outras formas que escapam a esse regramento, não tendo como descrevermos ou analisarmos partindo da visão da Geometria de Euclides. A partir dessa dificuldade, foram criados outros sistemas axiomáticos, como os representados pelas geometrias não euclidianas.

Kaleff (2007) realizou uma pesquisa com professores de Matemática, na qual apontou que mais de 50% dos profissionais em atividade relataram não ter estudado Geometrias Não-Euclidianas durante sua graduação e 34% narraram que não sabiam do que se tratavam. Santos (2009), apoiando-se em seus conhecimentos como professora no Ensino Superior e nos resultados conseguidos em pesquisa com professores de escolas estaduais da cidade de Maringá, estado do Paraná, relata que são raros os cursos de licenciatura em Matemática que trabalham essas Geometrias. Em particular, no caso do autor desta pesquisa, durante a graduação, realizada na Universidade Federal de Santa Maria (2000–2003), não houve conhecimento de tais Geometrias, somente tendo ocorrido no mestrado, realizado na UFRGS (2010–2012), com a professora doutora Maria Alice Gravina. Na ocasião, foi apresentada a existência de outras geometrias que não a Euclidiana, mas de forma muito superficial, pois não era o objetivo da disciplina.

Na presente pesquisa, realizamos um levantamento em grades curriculares de cursos de licenciatura em Matemática dos Institutos Federais (IF) do estado de Rio Grande do Sul, com a finalidade de identificarmos, nas propostas curriculares dos referidos cursos, a presença de conteúdos de geometrias não euclidianas ou tópicos relacionados.

O estado do Rio Grande do Sul possui três IF (BRASIL, 2016a). O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense (IFSul), formado por 14 *campi*: Pelotas, Visconde da Graça (Pelotas), Sapucaia do Sul, Charqueadas, Passo Fundo, Bagé, Camaquã, Venâncio Aires, Santana do Livramento, Sapiranga, Lajeado, Gravataí, Jaguarão e Novo Hamburgo. Em nenhum deles é oferecido o curso de licenciatura em Matemática. (BRASIL, 2015).

O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS) é composto por 17 *campi*: Bento Gonçalves, Canoas, Caxias do Sul, Erechim, Farroupilha, Feliz, Ibirubá, Osório, Porto Alegre, Restinga (Porto Alegre), Rio Grande, Sertão, Alvorada, Rolante, Vacaria, Veranópolis e Viamão. Desses, apenas cinco possuem o curso de licenciatura em Matemática, a saber, os das cidades de Bento Gonçalves, Canoas, Caxias do Sul, Ibirubá e Osório. (BRASIL, 2017).

O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha (IFFar), apresenta 11 *campi*: Alegrete, Frederico Westphalen, Jaguari, Júlio de Castilhos, Panambi, Santa Rosa, Santo Ângelo, Santo Augusto, São Borja, São Vicente do Sul e Uruguaiana. Desses, cinco de suas unidades têm o curso de licenciatura em Matemática: Alegrete, Frederico Westphalen, Júlio de Castilhos, Santa Rosa e São Borja. (BRASIL, 2016b).

Portanto, temos um total de 42 IF distribuídas pelo Rio Grande do Sul e, desses, apenas 10 possuem o curso de licenciatura em Matemática, o que representa aproximadamente 24% das Instituições.

Analisando os Projetos Pedagógicos de Curso (PPC) – Bento Gonçalves (2013), Canoas (2012), Caxias do Sul (2017), Ibirubá (2014), Osório (2017), Alegrete (2014), Frederico Westphalen (2018), Júlio de Castilhos (2014), Santa Rosa (2014) e São Borja (2014) – verificamos que os cursos de licenciatura em Matemática possuem de três a quatro disciplinas de Geometria, distribuídas entre o primeiro e quarto semestres do curso. Apenas um campus, Caxias do Sul, disponibiliza, como disciplina optativa, Desenho Geométrico e noções de Geometria Descritiva, com carga horária de 80 horas/aula, sendo que os demais permanecem somente com as disciplinas obrigatórias ofertadas. Outra constatação, mediante a análise das ementas, é que não são oferecidas aos alunos outras geometrias a não ser a Euclidiana.

Após a realização desse levantamento, percebemos que seria melhor restringir a aplicação da pesquisa no âmbito do IFFar – Campus Alegrete. Justificamos essa escolha devido ao fato de o autor ser professor do quadro ativo permanente desse campus do IFFar desde fevereiro de 2010. Também, por desenvolver atividades e disciplinas no curso de licenciatura em Matemática desde sua primeira turma, em 2011.

Para verificar e justificar a relevância do assunto, Geometria Fractal, foi realizado mapeamento dos últimos 10 anos (2008–2017) nas publicações acadêmicas nacionais e internacionais na área de Ensino, com especial atenção dada às com escopo em Educação Matemática ou Multidisciplinar. Para tanto, foram recuperados 14 trabalhos (10 nacionais e 4 internacionais), sendo possível constatar que a maioria deles constituem-se como propostas e/ou relatos de experiências que ocorreram com a Educação Básica. Além disso, muito poucos utilizaram algum tipo de *software* ou objeto de aprendizagem. Informações mais detalhadas desse mapeamento podem ser vistas no Capítulo 2, seção 2.4.1, Mapeamentos de periódicos científicos.

Também, com a mesma finalidade, foi realizado um segundo mapeamento, agora no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) dos últimos cinco anos (2013–2017), dando ênfase aos trabalhos que tiveram propostas/aplicações de atividades com uso das TD. Após a realização da pesquisa sobre a temática Geometria Fractal, foi averiguado que, até o momento da realização dessa consulta em tal repositório, obtivemos sete dissertações, sendo que seis envolviam proposta/aplicação de atividades com o uso de TD no Ensino Fundamental e/ou Médio e uma com desenvolvimento de atividades no Ensino Superior. Esclarecimentos mais aprofundados desse mapeamento podem ser vistos no Capítulo 2, seção 2.4.2, Mapeamentos de teses e dissertações.

Depois de realizarmos o levantamento nos IF do Rio Grande do Sul e os dois mapeamentos, percebemos que o tema não é desenvolvido nos cursos de licenciatura em Matemática, é pouco explorado nos periódicos científicos e não existe tese com essa temática, o que torna essa pesquisa inédita.

Outro motivo da escolha da Geometria Fractal como tema de pesquisa deu-se por ela perpassar o mundo em que vivemos. O entendimento das competências e habilidades associadas a essa área da Matemática é fundamental, se considerarmos o quanto a Geometria, de forma geral, está presente no cotidiano de nosso alunado. Além disso, a Geometria Fractal permite, por exemplo, saber pensar iterativamente e recursivamente, desenvolvendo a percepção de autossimilaridades e raciocínio dedutivo.

Barbosa (2005), em seu livro "Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula", aponta uma vasta possibilidade de tópicos de Matemática que podem ser desenvolvidos na sala de aula. Por exemplo, a exploração de temas como sequências, contagem, frações, razão, proporcionalidade, perímetro, área, volume, sempre olhando pelo viés dos padrões e o senso estético dos fractais. Além disso, o tema estimula o uso de TD no ensino, no nosso caso, o *software* de Geometria Dinâmica (GD) *GeoGebra*[8], o qual possibilita outra postura do professor, na qual ele se torna um mediador do conhecimento e o aluno, um sujeito ativo de sua aprendizagem.

Ainda, segundo o autor, as justificativas para inserir Geometria Fractal no ensino se dão por:

> - conexões com várias ciências;
> - deficiências da Geometria Euclidiana para o estudo de formas da natureza, desde que é, em geral, apenas apropriada para formas do mundo oriundas do humano, como construções de casas, prédios, pontes, estradas, máquinas etc.; os objetos naturais são com frequência mais complicados e exigem uma geometria mais rica, que os modela com fractais, possibilitando desenvolver projetos educacionais sobre temas transversais voltados para a compreensão de fenômenos que ocorram nos diversos ambientes;
> - difusão e acesso aos computadores e a tecnologias da informática nos vários níveis de escolarização;
> - existência do belo nos fractais e possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo e arte aplicada à construção de fractais, entendendo-se arte como toda ação que envolve simultaneamente emoção, habilidade e criatividade;
> - sensação de surpresa diante da ordem na desordem. (BARBOSA, 2005, p. 19).

[8] No decorrer do texto, chamaremos apenas de *GeoGebra*.

Aliado ao que foi exposto anteriormente, salientamos o interesse de proporcionar o contato dos futuros educadores com a Geometria Fractal e com o uso de recursos tecnológicos, no intuito de que, futuramente, os conhecimentos adquiridos qualifiquem sua prática docente e, consequentemente, os auxiliem no processo de ensino e aprendizagem.

1.4 Estrutura do trabalho

O desenvolvimento deste trabalho está estruturado em sete capítulos. O Capitulo 1 é dedicado à apresentação da pesquisa, em que apresentamos as inquietações que levaram ao trabalho, a questão norteadora, os objetivos e a justificativa.

O Capítulo 2 relata o estudo sobre os fractais, iniciando com a conceituação de fractal, passando pelos tipos, bem como trazendo os clássicos e seus precursores. Depois mostramos como é determinada a dimensão fractal e passamos para o estudo dos trabalhos a respeito dessa temática (mapeamento em periódicos científicos e em teses e dissertações). Para finalizar, apresentamos um estudo das geometrias que são desenvolvidas nos cursos de licenciatura em Matemática do IFFar.

O Capítulo 3 traz um estudo resumido sobre os RRS utilizados como aporte teórico para essa tese. No Capítulo 4, abordamos sobre as TD empregadas no ensino de Matemática, o que auxiliou como recurso metodológico para esta pesquisa.

Já no Capítulo 5, apresentamos os procedimentos metodológicos utilizados na pesquisa, relatando sobre sua natureza; o contexto em que foi realizada e os investigados; as atividades propostas e os instrumentos de coleta de dados. Finalizamos tratando sobre os procedimentos de análise.

O Capítulo 6 mostra as análises e discussões das atividades realizadas pelos acadêmicos, perpassando pelo pré-teste e pós-teste, bem como cada uma das quatro oficinas desenvolvidas. O Capítulo 7 foi dedicado às considerações finais, no qual realizamos uma retomada de todo o trabalho e apresentamos algumas conclusões.

Por último, são relacionados as referências e os apêndices. Nesses, está o material produzido e aplicado nas oficinas, o modelo do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e o Projeto de Ensino.

2 GEOMETRIA FRACTAL

Neste capítulo estruturamos os aspectos referentes à revisão de literatura que fundamenta nossa pesquisa, nesse caso, a Geometria Fractal. No decorrer dele, apresentamos a origem histórica, juntamente com os fractais clássicos e seus precursores; a dimensão fractal; um mapeamento dos trabalhos relacionados a essa temática e, para finalizar, um estudo das geometrias que são desenvolvidas nos cursos de licenciatura em Matemática do IFFar.

A Geometria pode se relacionar diretamente com o cotidiano do sujeito. É um dos ramos dos estudos matemáticos que instiga a interpretação e o entendimento, possibilitando, tanto a quem ensina, quanto a quem aprende, ver com outros olhos o mundo que os rodeia. Essa área trata das formas, do espaço, das grandezas e das medidas, tudo que é ligado às nossas rotinas e muito mais.

Durante inúmeros séculos, empregamos conceitos relacionados à Geometria Euclidiana para representar objetos matemáticos e modelar elementos da natureza. Essa Geometria, muitas vezes, reproduz de forma satisfatória os objetos criados pelo homem, entretanto, há casos em que não temos uma boa representação ou essa é muito complexa. A partir dessa inquietação, da não representação de vários objetos da natureza pela Geometria Euclidiana, foi desenvolvida a Geometria Fractal pelo matemático Benoit B. Mandelbrot.

Segundo Alves (2007) e Mandelbrot (1977), o estudo dos fractais atualmente tem inúmeras aplicações em diversas áreas. Por exemplo, na área das tecnologias, em um misturador de fluidos, otimiza o consumo de energia; na agricultura, em movimentos dos rios e análise de solos; na medicina, em um estudo da fisiologia animal, analisa as ramificações pulmonares, veias e artérias. Também, aplica-se ao diagnóstico precoce, por meio da análise de imagens, do Mal de Alzheimer e do câncer, por meio de modelagem. Fazendo uso na Biologia, podemos encontrar inúmeras estruturas fractais em plantas e micro-organismos; na computação gráfica, são utilizadas pelo cinema quando necessitamos criar um cenário com rios, montanhas e plantas, pois um fractal fornece uma boa aproximação de suas representações.

A Geometria Fractal, uma das não euclidianas, é uma opção para tais aplicações, pois ela nos possibilita ir além das dimensões inteiras, próprias dos objetos da Geometria Euclidiana. Ela permite-nos ir além dos estudos de quadrados, retângulos, círculos e outras formas geométricas, dificilmente encontradas na natureza, a saber, vegetais, rochas e rios, que não apresentam, em geral, a dimensão inteira.

Segundo Goldenberg (1991, p. 50, tradução nossa), a Geometria Fractal,

> [...] tem sido reconhecida como uma ferramenta de modelagem altamente valorizada, aplicável em grande variedade de ciências.
> [...] Essas grandes aplicações em ciências atestam a importância da Geometria Fractal como uma ferramenta para além do domínio da matemática acadêmica e sua posição potencialmente crucial no currículo como uma organização e forma unificadora para ciência e matemática.

Considerando a História da Matemática, a Geometria Fractal é um estudo recente, desenvolvido pelo matemático Benoit B. Mandelbrot, nos meados da década de cinquenta, com a publicação do livro “Os objetos fractais: forma, acaso e dimensão”, em 1975. Segundo Janos (2008, p. 17), a Geometria Fractal “é uma linguagem matemática que descreve, analisa e modela as formas encontradas na natureza”.

É preciso esclarecermos que não estamos dizendo não ser importante desenvolvermos os conceitos da Geometria Euclidiana na Educação Básica e Superior. Ao contrário, afirmamos que é um estudo essencial para o desenvolvimento do pensamento geométrico e matemático, porém existem outras possibilidades de descrever objetos naturais que podemos explorar em sala de aula.

Mas afinal, qual é a definição de fractal? Segundo Mandelbrot (1989, p. 15, tradução nossa), um de seus precursores, “Um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovith excede estritamente a dimensão topológica”. Percebemos que o autor necessitou do conceito de dimensão para poder definir fractal, o que, inicialmente, recebeu críticas e revisões. Outros estudiosos vêm reformulando essa definição, como, por exemplo, Feder (1988, p. 11, tradução nossa): “Um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos”. Também Falconer (2003, p. xx–xxi, tradução nossa) propõe entendimento do fractal por caracterizações:

> (i) F tem uma estrutura pequena, isto é, detalhes sobre escalas arbitrariamente pequenas.
> (ii) F é muito irregular para ser descrito em linguagem geométrica tradicional, ambos local e globalmente.
> (iii) Muitas vezes, F tem alguma forma de autossemelhança, talvez aproximada ou estatística.
> (iv) Geralmente, a "dimensão fractal" de F (definida de alguma forma) é maior do que a sua dimensão topológica.
> (v) Na maioria dos casos de interesse, F é definido de uma maneira muito simples, talvez recursivamente.

Ainda, procurando formalizar uma definição, Stewart (1996, p. 12) relata que “Os fractais são formas geométricas que repetem sua estrutura em escalas cada vez menores”. Gouvea e Murari (2004, p. 5) consideram os fractais:

> [...] como formas que se caracterizam por repetir um determinado padrão (auto-similaridade). Em consequência da auto-similaridade, quando vistas através de uma

> lente de aumento, as diferentes partes de um Fractal se mostram similares à forma como um todo.

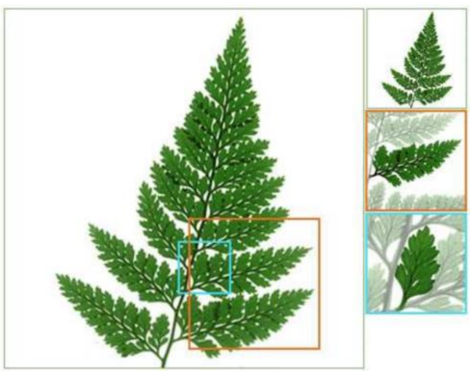
Percebemos que a primeira definição de Mandelbrot é mais abrangente e utiliza conceitos matemáticos mais avançados. Já as outras, aparentemente, são mais objetivas e compreensivas aos objetivos desta pesquisa. Ainda assim, precisamos esclarecer alguns conceitos envolvidos nessa definição.

Segundo Leivas (2007), a autossimilaridade pode ser definida como a semelhança que uma parte tem com o todo, ou seja, é uma característica primordial de uma estrutura fractal, segundo a qual cada nova imagem obtida conserva as mesmas propriedades ou características da imagem original. Ainda, pelo autor, um processo é denominado recursivo ou iterativo, se, ao final de seu processo de criação, quando replicado novamente, é gerada uma estrutura similar.

Portanto, a autossimilaridade é o resultado da aplicação, várias vezes, de uma mesma lei de formação. Entretanto, vale ressaltar que essa mesma característica é chamada por Nunes (2006, p. 29) de autossemelhança: "Uma figura é autossemelhante se apresenta sempre o mesmo aspecto visual a qualquer escala que seja ampliada ou reduzida, ou seja, se parte de uma figura se assemelha à figura vista como um todo". O autor considera dois tipos de autossemelhança, a exata e a aproximada ou estatística.

Dizemos que a autossemelhança é exata, quando as figuras são provenientes de processos matemáticos nos quais o conjunto total é o resultado de várias reproduções perfeitas geradas por processos iterativos. Já a autossemelhança aproximada ou estatística está presente em formas da natureza, em que as partes, independentemente de apresentarem a mesma estrutura, não são reproduções exatas entre si e com o todo. Como exemplo, temos a couve-flor e a folha de uma samambaia (Figura 1).

Figura 1 – Exemplo de autossemelhança aproximada em fractais



Fonte: Serra *et al*. (2005, p. 15).

Entretanto, como visto, existe mais de uma definição para fractais, o que não impossibilita entendermos seu conceito singular e transmiti-lo de forma simples e objetiva. Segundo Mandelbrot (1989, p. 13-14, tradução nossa),

> será necessário definir uma figura fractal de modo rigoroso, para em seguida dizer que um objeto real é fractal por se assemelhar à figura geométrica que constitui o modelo? Considerando que um tal formalismo seria prematuro, adaptei um método muito diferente: um método baseado numa caracterização aberta e intuitiva, onde os avanços se efetuam por retoques sucessivos.

Por esse viés, Barbosa (2005) reforça a ideia de Mandelbrot para o uso dos fractais, sem se apegar ao formalismo conceitual. Leva essa discussão para o campo educacional: "essa dificuldade não deve ser obstáculo na Educação, a qual pode simplesmente convir com uma conceituação simples e de fácil entendimento. Bastará considerarmos a autossimilaridade". (p. 19).

Para a nossa pesquisa, optamos por utilizar a definição de Barbosa (2005), que considera fractais como entes que constituem uma imagem de si próprios em cada uma de suas partes, sendo essas semelhantes e definindo assim a propriedade de autossimilaridade.

2.1 Tipos de fractais

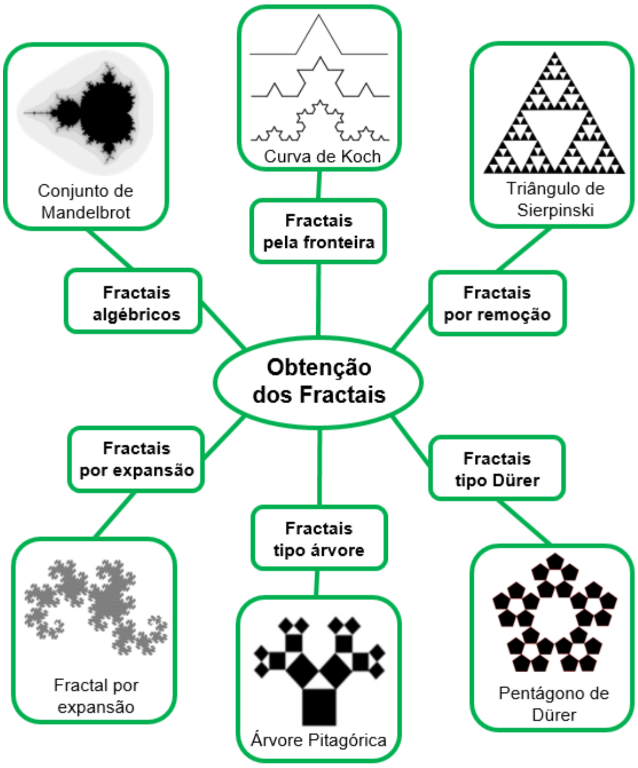
Podemos obter um fractal por mais de uma forma. No livro "Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula", Barbosa (2005) classifica suas formas de obtenção em quatro tipos: fractais pela fronteira, por remoção, tipo Dürer e tipo árvore. Suas construções ocorrem por meio de processos recursivos, isto é, sempre é utilizado um procedimento de criação infinito que, nesse caso, é um processo geométrico.

O procedimento para a construção dos fractais pela fronteira é realizado a partir de uma geração recursiva sobre a linha poligonal da figura geométrica geradora do fractal. Para a geração de um fractal por remoção, a forma que se dá à criação desses fractais é a partir da remoção de regiões internas semelhantes à figura inicial – figura geométrica geradora do fractal. Para os fractais tipo Dürer, seu processo de obtenção baseia-se em fazer as iterações de um mesmo polígono regular, criando um novo polígono interno a eles a partir de seus vértices, em um processo recursivo. Já para os fractais tipo árvore, a maneira para sua criação é gerar imagens semelhantes às de uma árvore.

Além dessas quatro categorias apresentadas por Barbosa (2005), podem ser acrescentadas mais duas, segundo Gouvea (2005), quais sejam, os fractais por expansão e os fractais algébricos.

Os fractais por expansão são obtidos expandindo polígonos para a região exterior da imagem inicial, o que se diferencia das categorias anteriores, pois a imagem geométrica geradora do fractal é constituída por mais de uma imagem geométrica. Já os algébricos são aqueles gerados por equações matemáticas não-lineares, e não por imagens geométricas regulares, com um grau de complexidade superior aos citados anteriormente. A Figura 2 apresenta um resumo dos tipos de obtenção dos fractais com suas respectivas imagens.

Figura 2 – Resumos dos tipos de obtenção dos fractais

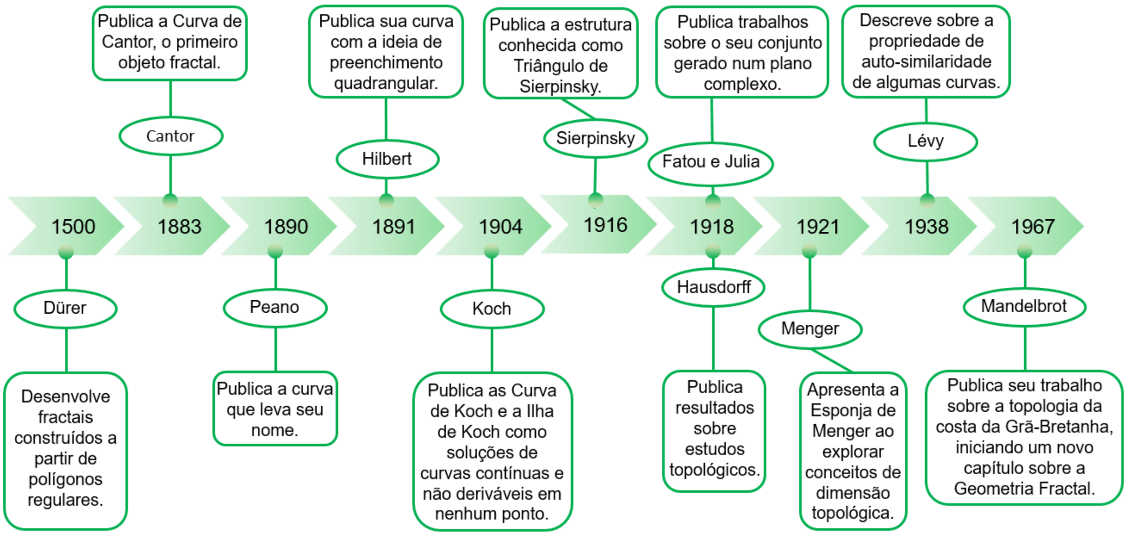


Fonte: elaborada pelo próprio autor.

2.2 Fractais clássicos e seus precursores

Apesar de o termo Geometria Fractal ter sido criado por Mandelbrot na década de 70, diversos estudos antecederam essa época e vários objetos matemáticos, atualmente, são considerados fractais. Para um melhor entendimento, traçamos uma breve linha cronológica, Figura 3, com base nos trabalhos de Rabay (2013) e Neto (2015), relatando autoria e obra de acordo com o respectivo ano de publicação.

Figura 3 – Linha cronológica da Geometria Fractal



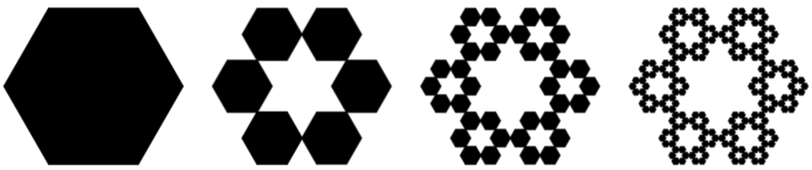
Fonte: elaborada pelo próprio autor[9].

Veremos, a seguir, os aspectos estruturais de alguns objetos fractais pioneiros, que foram desenvolvidos no decorrer da história, os quais constituem o início da Geometria Fractal, e seus precursores.

2.2.1 Fractal de Dürer

O alemão Albrecht Dürer (1471–1528) foi pintor, ilustrador, matemático e teórico de arte, sendo o autor dos fractais que levam seu nome (Figura 4). Também é atribuída a Dürer a autoria da construção do desenho do pentágono regular utilizando apenas régua e compasso. (OLIVEIRA, 2016).

Figura 4 – Fractal hexagonal de Dürer

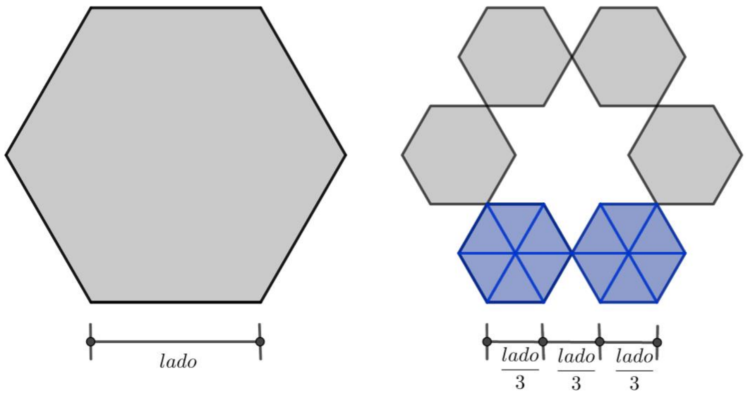


Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

[9] As informações relativas a cada um dos autores serão descritas na sequência deste texto.

Para construirmos o fractal do tipo Dürer, seguimos as orientações de Barbosa (2005) e Rabay (2013). Primeiramente, escolhemos um polígono regular, nesse caso, um hexágono regular. O segundo passo é construir internamente, em cada vértice do hexágono inicial, um novo hexágono com lado de tamanho igual a um terço do tamanho do lado inicial, pois o triângulo formado pelo lado do hexágono inicial e dos hexágonos gerados é equilátero, conforme apresentado na Figura 5.

Figura 5 – Detalhe do fractal hexagonal de Dürer



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Os novos polígonos gerados são semelhantes e devem estar igualmente espaçados. Para mais iterações, é só repetir o segundo passo. Podemos observar que, para *n* iterações, teremos 6^n hexágonos regulares.

2.2.2 Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor

O matemático russo Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) é conhecido por ter contribuído imensamente para a teoria dos conjuntos e utilizar, de forma pioneira, o símbolo $\mathbb{R}$ para designar o conjunto dos números reais. (OLIVEIRA, 2016).

Segundo Janos (2008), em 1883, Cantor publicou um trabalho no qual é construído um conjunto atualmente denominado de Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor. Formado por uma quantidade infinita de segmentos de dimensões muito pequenas (tanto mais próximas de zero, quanto mais segmentos forem tomados), o Conjunto de Cantor é constituído por partes autossemelhantes, possuindo cardinalidade igual à dos números complexos ou dos números reais, ou seja, é não-enumerável, como pode ser visto na Figura 6.

Figura 6 – Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor

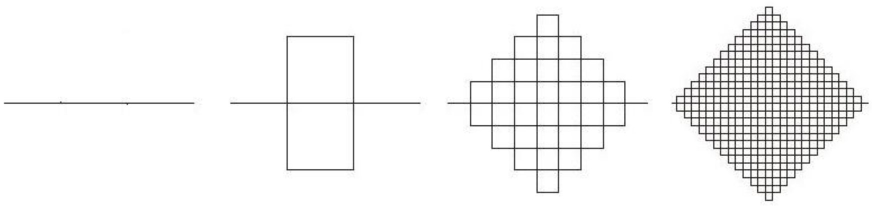
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Montenegro (1991), Barbosa (2005) e Janos (2008) apresentam a regra para a construção do Conjunto de Cantor. Ele é um subconjunto infinito de pontos do intervalo [0, 1]. Para o construirmos, consideramos o intervalo fechado [0, 1] e o dividimos em 3 partes congruentes, retirando a parte central (ou terço médio). Dessa maneira, ficamos com 2 intervalos fechados disjuntos, de comprimento igual a 1/3 do comprimento inicial. Repetindo esse processo aos intervalos formados, obtemos 2^2 intervalos fechados de comprimento 1/9 ou $\frac{1}{3^2}$. Para a próxima iteração, obtemos 2^3 intervalos fechados de comprimento 1/27 ou $\frac{1}{3^3}$. Replicando esse processo *n* vezes, teremos 2^n intervalos fechados de comprimento $\frac{1}{3^n}$ cada. Segundo Paixão (2014), como o valor de *n* aumenta para cada iteração, infinitamente, o comprimento de cada segmento tende a zero. Na construção numérica, isso significa que o intervalo tende a um ponto, de onde surge a denominação, “Poeira de Cantor”.

2.2.3 Curva de Peano

O matemático italiano Giuseppe Peano (1858–1932) publicou, em 1890, um estudo aprofundado das noções de continuidade e dimensões, no qual desenvolveu a curva que leva seu nome, em que prometia cobrir totalmente uma superfície plana quadrangular (BARBOSA, 2005). Para melhor exemplificação, vejamos a Figura 7.

Figura 7 – Curva de Peano



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

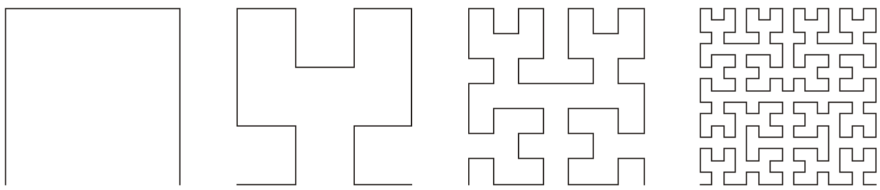
Para a confecção da Curva de Peano, empregamos o processo iterativo. Para tanto, utilizamos a construção conforme Coelho (2015) e Iwai (2015) a apresentam em seus trabalhos. Para iniciá-la, tomemos um segmento de reta de comprimento unitário. Dividimo-lo em três partes congruentes. No segmento central, desenhamos um retângulo, que é dividido pelo segmento inicial em dois quadrados congruentes. Ao final dessa primeira iteração, obtemos 9 segmentos de comprimento 1/3 cada. Para a segunda iteração, vamos repetir os passos anteriores. Assim, vamos obter 81 segmentos de comprimento 1/81 do inicial. Continuando esse processo de iteração *n* vezes, teremos 9^n segmentos de comprimento $\frac{1}{3^n}$.

2.2.4 Curva de Hilbert

David Hilbert (1862–1943) foi um matemático alemão cuja maior contribuição à matemática, segundo Barbosa (2005), foi a organização da Geometria Euclidiana na forma axiomática.

A Curva de Hilbert, descoberta em 1891 (Figura 8), percorre todos os pontos de um quadrado, logo, ela pertence a uma família das curvas de Peano. Entretanto, essa curva possui pequenas diferenças, comparada à de Peano. A primeira é que, a cada iteração no seu processo recursivo, a curva preenche quadrados menores, mas ela nunca se intercepta. Outra característica dessa curva é que ela passa por todos os pontos de uma superfície e, por meio do seu processo de recursividade, o seu comprimento é infinito. (PAIXÃO, 2014).

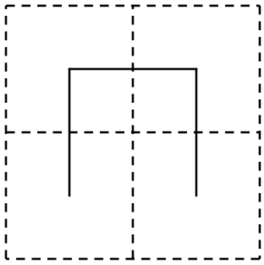
Figura 8 – Curva de Hilbert



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Para realizar a construção, seguimos o relatado por Negri (2014). Primeiramente (Etapa 1), tomemos um quadrado de lado *l*; formamos quatro quadrados ligando os pontos médios de seus lados opostos. Após unir os pontos centrais desses quadrados, forma-se a curva com três segmentos consecutivos, como apresentada na Figura 9.

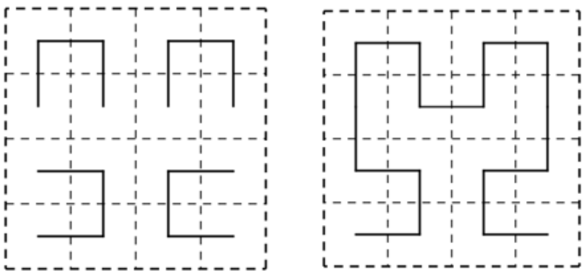
Figura 9 – Etapa 1 da construção Curva de Hilbert



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Na segunda parte da construção (Etapa 2), representada na Figura 10, percebemos cada um dos quatro quadrados pequenos sendo substituído por outros quatro quadrados. Logo após, são ligados os pontos centrais dos 16 novos quadrados, como foi feito na etapa anterior.

Figura 10 – Etapa 2 da construção Curva de Hilbert



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Veja que rotações convenientes são realizadas de forma que todos os pontos centrais ficam interligados sem que exista intersecção da curva. Esse processo é repetido indefinidamente, de forma que a origem da curva sempre ocupe o canto inferior esquerdo e sua extremidade fique no canto inferior direito, como pode ser visto na Figura 10. Segundo Mendonça (2014), se continuarmos esse processo de iteração *n* vezes, teremos 4^n quadrados e o comprimento da curva será dado por $(4^n - 1)\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

2.2.5 Curva de Koch

O matemático sueco Niels Fabian Helge von Koch (1870–1924) é reconhecido por ter descrito um dos primeiros fractais de curva, em 1904, a Curva de Koch, a qual, mais tarde, originou a Ilha de Koch ou Floco de Neve de Koch, sendo que ambas construções são feitas pelo mesmo processo.

Segundo Spinadel, Perera e Perera (1993), a Curva de Koch (Figura 11) foi considerada uma curva “patológica”, pois ela é exemplo de curva contínua que não tem tangente em nenhum dos seus pontos, além de ter a propriedade de que, dados dois pontos quaisquer sobre a curva, o comprimento do arco entre os dois é infinito.

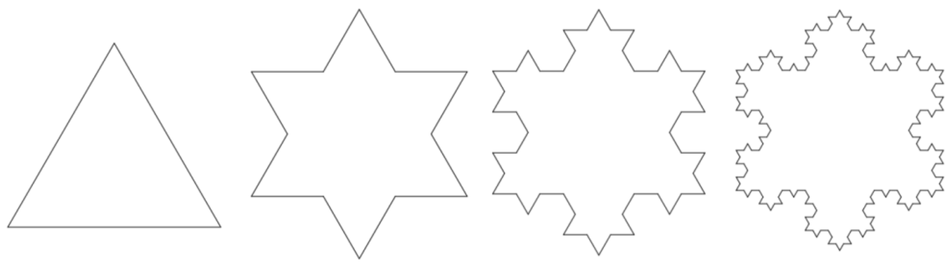
Figura 11 – Curva de Koch

Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Segundo Barbosa (2005) e Iwai (2015), podemos construir a Curva de Koch a partir de um segmento de reta, dividindo-o em três partes congruentes, em que a parte central será a base para a construção de um triângulo equilátero, sendo suprimida após a construção do triângulo. Assim, ficarão quatro segmentos de reta com tamanho de 1/3 do segmento original. Aplicando, novamente, esse processo de construção, obtemos 16 segmentos com tamanho de 1/9 do segmento original. Repetindo n vezes, teremos 4^n segmentos de reta de comprimento $\frac{1}{3^n}$ do segmento original.

Janos (2008) ressalta que uma versão da Curva de Koch é a Ilha de Koch ou Floco de Neve (Figura 12), cuja construção se diferencia apenas no primeiro passo, pois em vez de começarmos com um segmento de reta, iniciamos com um triângulo equilátero e construímos, sobre cada um de seus lados, a Curva de Koch.

Figura 12 – Ilha de Koch ou Floco de Neve



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

2.2.6 Fractais de Sierpinsky

Barbosa (2005) relata que o Triângulo e o Tapete de Sierpinsky, apresentados em 1916, são obras do matemático polonês Waclaw Sierpinsky (1882–1969). Iwai (2015) destaca as contribuições excepcionais de Sierpinsky para a teoria dos conjuntos (pesquisa sobre o axioma da escolha e da hipótese do contínuo), teoria dos números, teoria de funções e topologia.

Para construir o Triângulo de Sierpinsky, Janos (2008) inicia o processo com um triângulo equilátero. Inicialmente, encontramos o ponto médio de cada lado. Posteriormente, unimos esses pontos por três segmentos de reta, formando quatro triângulos menores e congruentes, sendo que o triângulo central deve ser retirado, sobrando três triângulos para aplicarmos novamente o procedimento. A cada nova iteração, a quantidade de triângulos congruentes fica multiplicada por três e a medida do lado fica igual à metade da medida do lado do triângulo anterior (Figura 13). Repetindo esse processo *n* vezes, formaremos 3^n triângulos congruentes com lados de comprimento $\frac{1}{2^n}$ da medida do lado do triângulo inicial.

Figura 13 – Triângulo de Sierpinsky

Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Para a construção do Tapete de Sierpinsky (Figura 14), utilizamos a mesma técnica de construção do Triângulo de Sierpinsky, porém, a figura geométrica inicial utilizada agora é um quadrado.

Figura 14 – Tapete de Sierpinsky

Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Barbosa (2005) parte de um quadrado, dividindo-o em nove pequenos quadrados congruentes e eliminando o central. Após essa etapa, aplica esse mesmo procedimento em cada um dos oito quadrados restantes e, assim, sucessivamente e iterativamente. A cada nova iteração, a quantidade de quadrados fica multiplicada por oito e a medida do lado é igual a 1/3 da medida do lado do quadrado anterior. Repetindo esse processo *n* vezes, teremos formado 8^n quadrados de $\frac{1}{3^n}$ da medida da aresta do quadrado inicial.

Outro fractal que leva o nome de Sierpinsky é o Tetraedro de Sierpinsky (Figura 15), sendo esse uma generalização tridimensional do Triângulo de Sierpinsky.

Figura 15 – Tetraedro de Sierpinsky

Fonte: adaptado de Neto (2015, p. 48).

Iwai (2015) apresenta a construção do Tetraedro de Sierpinsky, iniciando o processo com um tetraedro. Primeiramente, localiza o ponto médio de cada aresta e une esses pontos médios por 12 segmentos de reta, formando seis tetraedros menores e congruentes. Retira os dois tetraedros centrais (que formam um octaedro). Disso, resultam quatro tetraedros para novamente aplicar o mesmo processo. A cada nova iteração, a quantidade de tetraedros fica multiplicada por quatro e a medida da aresta é a metade da medida da aresta do tetraedro anterior. Portanto, se repetirmos *n* vezes o processo, terão se formado 4^n tetraedros com arestas medindo $\frac{1}{2^n}$ da aresta do tetraedro inicial.

2.2.7 Esponja de Menger

Segundo Negri (2014), a Esponja de Menger (Figura 16) foi criada pelo matemático austríaco Karl Menger (1902–1985) em 1921. Ela é uma generalização tridimensional do Tapete de Sierpinsky, tendo sua construção baseada na mesma forma, porém o processo iterativo é feito a partir de um cubo.

Figura 16 – Esponja de Menger

Fonte: adaptado de Negri (2014, p. 42).

Montenegro (1991) apresenta o processo de construção da Esponja de Menger em duas etapas, considerando um cubo de aresta l. Na primeira etapa, divide o cubo em 27 cubos menores e congruentes, cada um com uma aresta igual 1/3 da aresta inicial (processo similar ao do Tapete de Sierpinsky) em cada face do cubo. Então, remove o cubo central e os seis cubos que têm uma face localizada no meio de cada face do maior. A segunda etapa consiste em repetir o processo da etapa 1 nos 20 cubos restantes e assim sucessivamente.

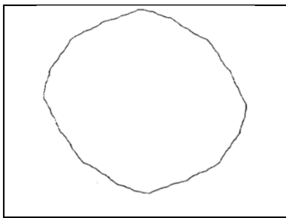
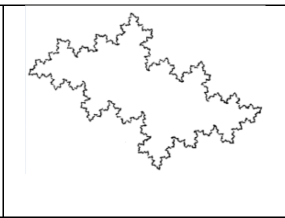
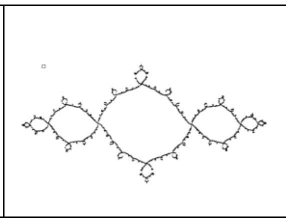
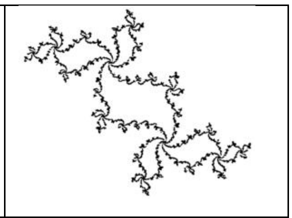
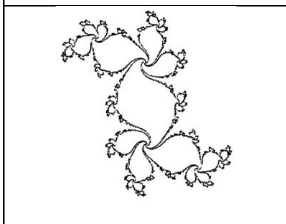
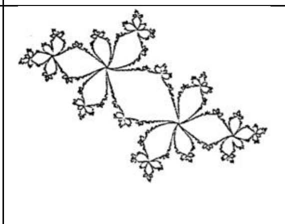
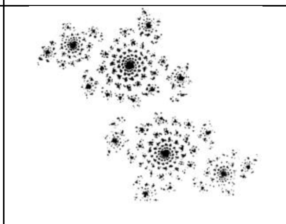
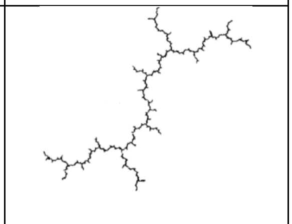
Observamos que, a cada nova iteração, a quantidade de cubos fica multiplicada por 20 e a medida da aresta é igual a 1/3 da medida da aresta do cubo anterior. Portanto, se repetirmos n vezes o processo, teremos formado 20^n cubos com arestas medindo $\frac{1}{3^n}$ da aresta do cubo inicial.

2.2.8 Conjunto de Fatou e Julia

Na época da Primeira Guerra Mundial, em 1918, os matemáticos franceses Pierre Fatou (1878–1929) e Gaston Julia (1893–1978) publicaram trabalhos sobre o estudo de propriedades iterativas envolvendo números complexos estudadas sem o auxílio computacional. É interessante destacarmos que Fatou e Julia, embora fossem contemporâneos, não desenvolveram seus trabalhos em conjunto. Lamentavelmente, esses estudos permaneceram esquecidos até serem recuperados por Mandelbrot, ao usá-los como base para o desenvolvimento do que hoje denominamos Conjunto de Mandelbrot, cuja representação gráfica se tornou símbolo da Geometria dos Fractais. (BARBOSA, 2005).

Segundo Peitgen, Jürgens e Saupe (2004), Fatou e Julia exploraram o que ocorre com a imagem no plano complexo quando se emprega, iterativamente, a função $f(z) = z^2 + c$ para um z complexo inicial e c, um complexo constante. Cabe salientar, para melhor compreensão, que a construção parte com um $z_0 = a_0 + ib_0$ e cada iteração parte de um z_n conhecido para obter $z_{n+1} = (z_n)^2 + c$. Relatam os autores que a sequência de pontos deve ter uma das duas características: na primeira, as órbitas convergem para a origem; e na segunda, elas tendem ao infinito. A Figura 17 apresenta algumas amostras do Conjunto de Julia.

Figura 17 – Algumas amostras do Conjunto de Julia para a função quadrática $f(z)=z^2+c$

			
$c = -0{,}1 + 0{,}1i$	$c = -\,0{,}5 + 0{,}5i$	$c = -1 + 0{,}05i$	$c = -0{,}2 + 0{,}75i$
			
$c = 0{,}25 + 0{,}52i$	$c = -0{,}5 + 0{,}55i$	$c = 0{,}66i$	$c = -i$

Fonte: adaptado de Falconer (2003, p. 214).

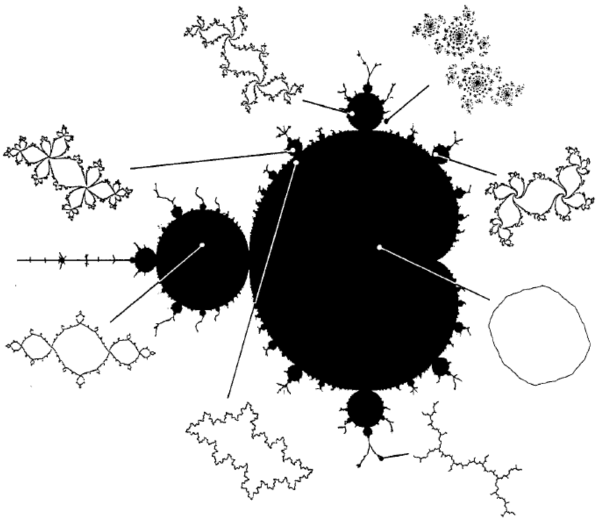
2.2.9 Conjunto de Mandelbrot

Os trabalhos de Fatou e Julia, como relata Barbosa (2005, p. 45), “forneceram as bases matemáticas para Mandelbrot, que soube aproveitá-los e desenvolvê-los com recursos computacionais para seu conjunto conhecido hoje como Conjunto de Mandelbrot”. Negri (2014) e Moura (2016) relatam que, no final da década de 70 (1979), Mandelbrot tentou elaborar uma forma de generalizar os Conjuntos de Julia, no caso de funções quadráticas, com a variação do parâmetro c. Utilizaram isso para desenhar as regiões estudadas por Fatou e Julia de maneira a verificar o comportamento caótico que produz a estrutura fractal. Quando nos referimos ao termo “comportamento caótico”, o estamos atribuindo ao fenômeno de imprevisibilidade.

Dalpiaz (2016), em sua pesquisa, resume o Conjunto de Mandelbrot como uma expressão matemática essencial para a construção de imagens dadas pela fórmula iterativa, no plano de números complexos ($z = x + iy$), expressa por $z_{n+1} = (z_n)^2 + c$. Nela, $c = a + ib$ é uma constante complexa e devemos partir de um certo valor para z_0. O autor conclui que o Conjunto de Mandelbrot é o conjunto dos valores de c tais que, para $z_0 = 0$, a sequência de valores definida recursivamente permanece limitada. A Figura 18 apresenta o Conjunto de

Mandelbrot, com a variação de c e seus correspondentes Conjuntos de Julia, apresentados anteriormente na Figura 17.

Figura 18 – Conjunto de Mandelbrot apresentando vários valores para c e seus correspondentes Conjuntos de Julia



Fonte: Falconer (2003, p. 213).

2.3 Dimensão fractal ou dimensão Hausdorff-Besicovitch

Uma característica dos fractais é sua dimensão. Esse número representa o grau de ocupação de um fractal no espaço, estando relacionado com o seu grau de irregularidade. Difere da dimensão Topológica e da Euclidiana, pois seu número não é necessariamente inteiro positivo. Segundo Mucheroni (2017, p. 5), a

> [...] dimensão topológica está relacionada com a forma que um conjunto tem de ocupar o espaço. Em Topologia, através de homeomorfismos, retas podem ser transformadas em curvas, círculos em quadrados, etc. Nestes casos suas dimensões topológicas são preservadas. A partir da Topologia, foram surgindo várias noções de dimensão, nas quais objetos topologicamente equivalentes sempre tenham a sua dimensão mantida e que esta seja sempre um número natural.

Segundo Lesmoir-Gordon (2010, p. 10-11, tradução nossa), o conceito de dimensão, nos moldes da Geometria Euclidiana, nos diz que:

> (a) Um segmento de reta tem dimensão 1, pois entende-se que qualquer ponto *A* do segmento pode ser especificado usando apenas uma coordenada, isto é, um ponto *A* está a uma distância de *x* unidades de uma extremidade do segmento.

> (b) Um quadrado tem dimensão 2, isto é, qualquer ponto *A* do quadrado pode ser determinado usando apenas duas coordenadas *(x, y)*, de sorte que *x* é a distância de *A* até o lado esquerdo e *y* é a distância de *A* até o lado inferior do quadrado.
> (c) Um cubo tem dimensão 3, pois entende-se que qualquer ponto *A* do cubo pode ser especificado usando apenas três coordenadas *(x, y, z)*, onde *x*, *y* e *z* representam, respectivamente, as distâncias de *A* até a face esquerda, a face inferior e a face traseira.

Nessa perspectiva, um ponto, isoladamente, não tem direções, portanto tem dimensão zero. Uma linha tem um único sentido de direção, logo tem dimensão 1; no quadrado encontram-se duas direções, portanto tem dimensão 2 e, no cubo, temos três direções, logo, sua dimensão é 3. Partindo por esse viés, a dimensão de um objeto é a quantidade de coordenadas necessárias para representar, de forma única, um ponto dele. Assim, ela é um número inteiro positivo. Veremos, no decorrer deste capítulo, que a dimensão de um fractal também pode ser um número real positivo, e não somente um número inteiro positivo. Mas ela será um número real positivo qualquer? Esclareceremos isso mais adiante.

O número que representa a dimensão fractal pode ser calculado pelo método da Dimensão de Hausdorff-Besicovitch, em homenagem aos matemáticos Felix Hausdorff (1868–1942) e Abram Samoilovitch Besicovitch (1891–1970), considerados fundadores da Topologia Moderna e que contribuíram para os trabalhos de Mandelbrot. Para Reis (2014a, p. 34), “Define-se então dimensão de uma curva fractal como sendo um número que caracteriza a maneira na qual a medida do comprimento entre dois pontos aumenta à medida que a escala diminui”.

Para Mandelbrot (1989, p. 14, tradução nossa), a dimensão fractal pode ser concebida com a noção de,

> [...] curvas planas muito irregulares, que sua dimensão fractal se situa entre 1 e 2, a respeito de certas superfícies muito enrugadas e cheias de pregas, que a sua dimensão fractal está entre 2 e 3 e, enfim, conjuntos de pontos sobre uma linha cuja a dimensão fractal está entre 0 e 1.

Complementando a concepção de Mandelbrot para dimensão fractal, Capra (2006, p. 119) exemplifica: “Quanto mais denteados forem os contornos de um relâmpago ou as bordas de uma nuvem e, quanto mais acidentadas forem as formas de uma linha litorânea ou de uma montanha, mais altas serão suas dimensões fractais”.

Sendo assim, a dimensão de Hausdorff-Besicovitch permite calcular a dimensão dos fractais que, com a ampliação ou redução, permanecem autossemelhantes. Para entender esse processo de cálculo da dimensão fractal, utilizaremos figuras geométricas já conhecidas da Geometria Euclidiana, tomando como exemplo um segmento de reta, um quadrado e um cubo, até chegarmos à generalização da dimensão.

Tomemos um segmento de reta e o dividamos em 2, 3 e 4 partes. Então, realizemos algumas análises, conforme apresentado no Quadro 1.

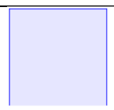
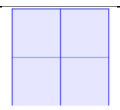
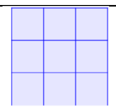
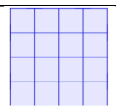
Quadro 1 – Figura obtida e relação entre o número de divisões e o fator de redução para um segmento

Figura obtida	Número de divisões (ou número de segmentos obtidos) N	Fator de redução r	Relação entre N e r $N = \frac{1}{r^1}$
	1	*1*	$1 = \frac{1}{1^1}$
	2	*1/2*	$2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^1}$
	3	*1/3*	$3 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^1}$
	4	*1/4*	$4 = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^1}$

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Tomemos um quadrado de lado C. Dividamos cada lado em 2, 3 e 4 partes para realizar algumas investigações, conforme apresentado no Quadro 2.

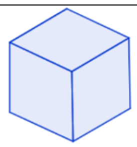
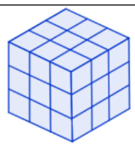
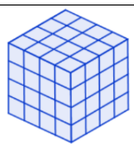
Quadro 2 – Figura obtida e relação entre o número de divisões e o fator de redução para um quadrado

Figura obtida	Número de divisões (ou número de peças geradas) N	Fator de redução r	Relação entre N e r $N = \frac{1}{r^2}$
	*1*	*1*	$1 = \frac{1}{1^2}$
	*4*	*1/2*	$4 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$
	*9*	*1/3*	$9 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$
	*6*	*1/4*	$16 = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}$

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Para finalizar os exemplos, tomemos um cubo de aresta C. Dividamos sua aresta em 2, 3 e 4 partes para realizar o estudo apresentado no Quadro 3.

Quadro 3 – Figura obtida e relação entre o número de divisões e o fator de redução para um cubo

Figura obtida	Número de divisões (ou número de peças geradas) N	Fator de redução r	Relação entre N e r $N = \frac{1}{r^3}$
	*1*	*1*	$1 = \frac{1}{1^3}$
	*8*	*1/2*	$8 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$
	*27*	*1/3*	$27 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^3}$
	*64*	*1/4*	$64 = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^3}$

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Analisando a divisão do segmento, do quadrado e do cubo, podemos observar que a quantidade N de partes semelhantes ao todo é igual ao inverso do coeficiente de redução (r) elevado à dimensão (D) da figura. Portanto,

$$N = \frac{1}{r^D} = \left(\frac{1}{r}\right)^D.$$

Na Geometria Euclidiana, a dimensão (D) de uma reta, ou segmento de reta é 1, enquanto quadrados são figuras bidimensionais, portanto sua dimensão é igual a 2. Por sua vez, cubos são figuras tridimensionais, logo sua dimensão é igual a 3.

Aplicando logaritmo em ambos os lados da igualdade $N = \left(\frac{1}{r}\right)^D$, iremos obter, após algumas manipulações algébricas, a igualdade

$$D = \frac{logN}{\log\frac{1}{r}}.$$

Pela definição, em Geometria Euclidiana, a dimensão de um objeto pertence ao conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$. Pela definição de Hausdorff-Besicovitch, a dimensão fractal pertence ao intervalo [0, 3] e, conforme estabelecido por Mandelbrot (1977), a dimensão fractal deve refletir a textura, consistência, completude e densidade. O Quadro 4 apresenta a dimensão de alguns fractais que são abordados ao longo deste trabalho.

Quadro 4 – Dimensões de alguns fractais

Fractal	Número de divisões N	Fator de redução r	Dimensão fractal $D = \frac{logN}{\log\frac{1}{r}}$
Conjunto de Cantor	*2*	*1/3*	$D \cong 0{,}631$
Curva de Peano	*9*	*1/3*	$D = 2$
Curva de Hilbert	*4*	*1/2*	$D = 2$
Curva de Koch	*4*	*1/3*	$D \cong 1{,}262$
Triângulo de Sierpinsky	*3*	*1/2*	$D \cong 1{,}585$
Tapete de Sierpinsky	*8*	*1/3*	$D \cong 1{,}893$
Tetraedro de Sierpinsky	*4*	*1/2*	$D = 2$
Esponja de Menger	*20*	*1/3*	$D \cong 2{,}727$

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Assim, a dimensão de Hausdorff-Besicovitch é válida para calcular a dimensão de quaisquer objetos, sejam figuras euclidianas com dimensão inteira positiva, ou fractais com dimensão fracionária. Cabe destacar que nem sempre a dimensão dos fractais é fracionária, mas essa é uma característica que as figuras euclidianas não possuem.

2.4 Estudo de trabalhos a respeito da temática Geometria Fractal

Para desenvolvermos esta pesquisa, relativa à tese de doutorado, precisávamos estar atualizados com relação àquelas realizadas e publicadas recentemente, a fim de buscar subsídios que contribuíssem com nossa proposta. Portanto, o objetivo de estudar trabalhos publicados sobre a Geometria Fractal é nada mais do que realizar dois mapeamentos: um em periódicos científicos voltados para a área de Educação Matemática ou Multidisciplinar; outro nos programas de pós-graduação *stricto senso* nas áreas de concentração Ensino de Matemática e Ensino de Ciência e Matemática.

2.4.1 Mapeamento de periódicos científicos

É interessante realizarmos uma análise sobre as pesquisas relacionadas à temática Fractal e Geometria Fractal, pois, segundo Cury (2013, p. 15), esta é uma maneira de “fazer uma síntese dos dados encontrados até aquele momento em investigações a respeito do mesmo tema, para verificar as tendências ou fazer correções de rumo em seus trabalhos”. Também, colaborando com essa ideia, Creswell (2010) indica alguns objetivos para a realização de uma revisão de literatura em uma pesquisa, os quais são os de proporcionar referências para comparações de resultados, compartilhar com o leitor resultados de outros estudos e preencher lacunas de investigações.

O levantamento foi realizado em janeiro de 2018, o qual se compõe de uma análise de publicações acadêmicas brasileiras e internacionais em periódicos da área de Ensino, com ênfase nas que possuem em seu escopo a Educação Matemática ou Multidisciplinar, compreendidas nos últimos 10 anos (2008–2017). Para tanto, pesquisamos somente periódicos possuindo *Qualis*[10] A1, A2 e B1, que estivessem disponíveis em meio eletrônico e que fossem gratuitos. Empregamos a classificação de periódicos do quadriênio 2013-2016 da Plataforma Sucupira[11]. Para evitarmos perdas de possíveis trabalhos relevantes à temática investigada, utilizamos para a pesquisa, além do termo “Geometria Fractal”, as expressões “*Fractal Geometry*”, “Fractal”, “Fractais” e “*Fractals*”, pois consideramos importante mapear e analisar os trabalhos existentes, verificando o que está sendo produzido com tal temática. Para recuperarmos esses artigos, utilizamos o Sistema Eletrônico de Editoração de Revistas (SEER) e o sistema *SciELO*[12] (*Scientific Electronic Library Online*), ambos pela viabilidade do uso do recurso “Pesquisa”. Por meio deles, encontramos publicações que possuem os termos acima mencionados em seu título, nas palavras-chaves ou no seu texto.

Foram selecionadas 12 revistas internacionais e 45 nacionais. Após uma primeira análise, tivemos oito artigos selecionados nos periódicos internacionais, dos quais, após avaliação dos títulos, descartamos quatro, pois não estavam relacionados ao ensino da

[10] *Qualis* é o conjunto de procedimentos utilizados pela CAPES para estratificação da qualidade da produção intelectual dos programas de pós-graduação. Esses veículos são enquadrados em estratos indicativos da qualidade, de modo que A1 é o mais elevado; A2; B1; B2; B3; B4; B5 até C, o menos elevado.

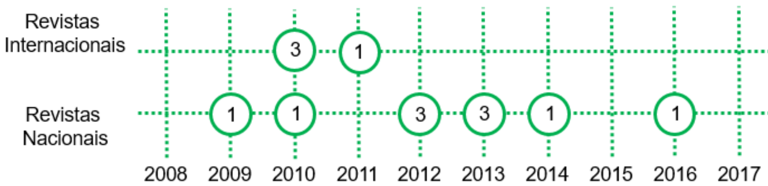
[11] A Plataforma Sucupira é uma importante ferramenta para coletar informações, realizar análises e avaliações, sendo a base de referência do Sistema Nacional de Pós-Graduação.

[12] *SciELO* é uma biblioteca eletrônica que abrange uma coleção selecionada de periódicos científicos brasileiros.

Geometria Fractal ou Fractais. Com essa primeira etapa concluída, restaram quatro artigos para análise.

Quanto a revistas nacionais, foram recuperados 18 artigos. Após análise do título, foram descartados oito deles pelo mesmo motivo mencionado anteriormente, restando, assim, 10 publicações para análise. Na Figura 19, apresentamos um resumo do número de artigos, ano de publicação e sua classificação e quanto a ser internacional ou nacional.

Figura 19 – Número de artigos nos periódicos Internacionais e Nacionais obtidos com busca automática



Fonte: elaborada pelo próprio autor.

Os quatro artigos internacionais recuperados são todos da Revista Iberoamericana de Educación Matemática – UNIÓN (*Qualis* B1), periódico esse destinada à publicação de trabalhos na área de Educação Matemática para professores de todos os níveis de ensino. Primeiramente, apresentamos, no Quadro 5, a relação dos textos selecionados com seus respectivos autores. Em um segundo momento, trazemos o relato dos estudos.

Quadro 5 – Relação dos textos internacionais selecionados

Título do texto	Autor(res)
Matemáticas del más allá: el infinito	Eugenio M. Fedriani Martel; Ángel F. Tenorio Villalón.
De la tortura mental a los fractales	Antonio Rosales Góngora
Imágenes fractales con GeoGebra	Fabián Vitabar
Dimensión fractal en la enseñanza secundaria	María Alejandra Cañibano; Patricia Sastre Vazque; Marcelo Gandini.

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

O primeiro trabalho que relatamos é de Martel e Vilatón (2010), no qual eles apresentam um estudo teórico sobre o conceito de infinito, perfazendo um caminho histórico, por meio de alguns pensadores que foram envolvidos pelas intrincadas e paradoxais sutilezas do infinito. Relatam a Curva de Koch (de autoria de Niels Fabian Helge von Koch) como um exemplo de curva que possui como uma característica do comprimento de arco entre dois pontos ser infinito.

Isso acarretou em um estudo, pelos autores, de outras curvas obtidas com procedimentos semelhantes. Inclusive mais tarde, na década de 70, este estudo, realizado por Mandelbrot, originou o que atualmente se chama de Geometria Fractal. Os autores concluíram sua pesquisa relatando que uma das formas mais simples de se trabalhar com o conceito de infinito é por meio das formas geométricas.

O segundo trabalho, de Góngora (2010), apresenta um estudo teórico da História da Matemática, refazendo quatro séculos, desde os números negativos de Cardano até as imagens obtidas por meio da programação computacional para os fractais. Relata, ainda, que a aceitação da representação geométrica dos imaginários ilustra uma história de múltiplos progressos na Matemática, além das dificuldades de interpretação e utilização que precisaram de um tempo de amadurecimento até a obtenção de uma resposta. O autor finaliza seu trabalho reportando que, a partir dos estudos de Fatou e Julia, no século XX, sobre sistemas dinâmicos, Mandelbrot relançou a representação geométrica dos complexos, finalizando com seus trabalhos computacionais.

O próximo artigo é de Vitabar (2010), no qual o autor apresenta uma proposta de utilização do *software* de GD *GeoGebra* para a geração de fractais para alunos do Ensino Médio. Ele afirma que a utilização do *GeoGebra* permite visualizar, quase que imediatamente, os gráficos gerados por expressões matemáticas. Neste artigo, o autor destaca que, além do conhecimento matemático (Geometria Analítica, Álgebra Linear, Análise Real e Complexa), temos de propor situações problematizadoras e motivadoras aos nossos alunos, tornando significativa a aprendizagem de conteúdos matemáticos, incentivando a autonomia dos estudantes na construção do seu conhecimento. Para tanto, Vitabar propõe a construção de imagens fractais a partir de uma função polinomial complexa, o que ele denomina imagens de Fractais de Newton. Finaliza alertando que devemos levar novas ferramentas para nossa prática pedagógica, possibilitando novos debates pedagógicos.

O quarto, e último, artigo internacional, de autoria de Cañibano, Vazque e Gandini (2010), apresenta uma proposta de atividades para desenvolver o conceito de dimensão fractal com alunos do Ensino Médio. O conceito de dimensão fractal é explorado por meio do método da contagem de caixas, chamado *box-couting*, aplicado a uma imagem que, nesse caso, foi uma lagoa. Os autores finalizam relatando que o objetivo dessa proposta é a inovação em sala de aula, ou seja, apresentar conteúdos que não estão no currículo, mas que podem ser entendidos e desenvolvidos pelos alunos. Também, indicam que temos de desmistificar o ensino de Matemática para além do formalismo na sala de aula e trabalhar com fatos concretos, do cotidiano dos estudantes.

Para a análise dos periódicos nacionais, levamos em conta as diferentes abordagens adotadas nos trabalhos, ou seja, se houve utilização de tecnologias, o nível de ensino considerado e suas principais conclusões descritas. Para melhor entendimento, ordenamos as pesquisas em seis grupos, por revista, conforme apresentado no Quadro 6.

Quadro 6 – Relação dos textos nacionais selecionados e seus respectivos grupos

	Título do texto	**Autor(res)**	**Periódico científico**
Grupo 1	Um estudo sobre o modo como alunos compreendem Fractais	Fatih Karakus.	Bolema: Boletim de Educação Matemática
Grupo 2	A Geometria que existe além do olhar: levando a Geometria da natureza para dentro da escola	Karin Ritter Jelinek; Adriana Justin Cerveira Kampff.	Educação Matemática em Revista – Rio Grande do Sul
	Educação Geométrica: reflexões sobre ensino e aprendizagem em Geometria	José Carlos Pinto Leivas.	
Grupo 3	Para ler com os Alunos: uma conversa inicial sobre a Geometria dos Fractais	Alexsandra Camara.	Educação Matemática em Revista
	Dobras, cortes e Fractais no Ensino Fundamental	Antônio do Nascimento Gomes; José Antônio Salvador	
	Aprendizagens matemáticas a partir da construção de Fractais	Teresinha Aparecida Faccio Padilha.	
	Fractais na Educação Básica: Aprendendo com quebra-cabeças, arte francesa e cartões	Maria Regina Carvalho Macieira Lopes; Alessandry Amaral; Adriana Fernandes de Matto; Karolina Barone Ribeiro da Silva.	
Grupo 4	Tópicos Atuais em Matemática e Etnomatemática: pontos de convergência	Sérgio Florentino da Silva; Bárbara Cristina Pasa; Roberta Nara Sodré de Souza; Méricles Thadeu Moretti.	Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT
Grupo 5	Uma proposta didática para o ensino de Geometria Fractal em sala de aula na Educação Básica	Maristel do Nascimento; Sani de Carvalho Rutz da Silva; Nilcéia Aparecida Maciel;	Vidya
Grupo 6	Geometria Fractal e progressões geométricas: análise de um simulador de fractais	Claudia Márcia Ribeiro de Azeredo; Michelle Dinelli de Souza; Silvia Cristina Freitas Batista; Gilmara Teixeira Barcelos.	Revista Novas Tecnologias na Educação – RENOTE

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

O Grupo 1 apresenta um artigo no Boletim de Educação Matemática (*Qualis* A1). Karakus (2013) realiza um estudo para verificar como os educandos compreendem fractais, mediante sua idade. Divide em quatro dimensões: na primeira, a definição de fractais; a segunda determinando fractais; a terceira determinando padrões fractais e a última desenvolvendo operações matemáticas com fractais. A pesquisa foi realizada com 187 estudantes do Ensino Fundamental e Ensino Médio. O autor concluiu que os estudantes podem identificar e determinar os fractais, porém quando o nível de ensino aumenta, a identificação e a determinação dos fractais diminuem. Entretanto, os alunos puderam determinar, intuitivamente, uma forma de verificar se o objeto apresentado seria ou não um fractal. Eles demonstraram alguns problemas em encontrar regras e padrões na formulação dos fractais.

O Grupo 2 apresenta dois artigos na Educação Matemática em Revista – Rio Grande do Sul (*Qualis* A2). O primeiro trabalho, de Jelinek e Kampff (2009), apresenta um relato de experiência realizada com alunos da sétima série do Ensino Fundamental, a qual buscou estimular os alunos a um outro olhar para a Matemática, por meio do cotidiano dos estudantes. Para tanto, utilizou elementos de Geometria Fractal para explorar diferentes conceitos matemáticos, como por exemplo, variável, simetria, proporcionalidade, semelhança, entre outros. Os autores associaram esse trabalho com o uso do *software Imagine* (ambiente de programação *Logo*[13]). Finalizam relatando que essa experiência valorizou o estudo da Geometria no Ensino Fundamental, além de verificar os benefícios que o uso das tecnologias da informação pode proporcionar para o ensino de Matemática.

No segundo trabalho deste grupo, Leivas (2012) realiza uma reflexão teórica sobre a Educação Geométrica, procurando apresentar contribuições para a formação inicial e continuada de professores de Matemática sobre alternativas para o ensino e aprendizagem de Geometria. O ponto de partida de seu artigo é a pergunta: o que é Geometria? Ele não responde, mas deixa traços que permitem ao leitor um posicionamento a respeito. Provoca a discussão e enfatiza a possibilidade de inserir tópicos de Geometria Fractal e geometrias não euclidianas nos currículos dos cursos de licenciaturas em Matemática. O autor finaliza destacando a imaginação, intuição e visualização como objetos de uma nova forma de fazer o ensino e aprendizagem na Educação Geométrica.

Já o Grupo 3 é composto por quatro trabalhos, todos são relatos de experiência da Educação Matemática em Revista (*Qualis* A2). Camara (2010), em seu trabalho, considera a Geometria Fractal como uma alternativa de ensino para a Educação Básica, apresentando as características de um fractal e explorando, como exemplo, a Curva de Koch. Ele comenta que os fractais possuem dimensão fracionária, além da inteira. Finaliza, sugerindo que a Geometria Fractal é uma excelente oportunidade de trabalhar com processos iterativos, com fórmulas, criar

[13] L*ogo* é uma linguagem de programação interpretada, voltada para crianças, jovens e até adultos. É utilizada com grande sucesso como ferramenta de apoio ao ensino regular e por aprendizes em programação de computadores.

algoritmos, calcular área e perímetro, além de desenvolver a ideia intuitiva do conceito de limite, por meio das progressões geométricas.

O trabalho de Gomes e Salvador (2012) apresenta parte de uma pesquisa de mestrado aplicada em uma escola estadual paulista. Os autores desenvolvem atividades relacionando conteúdo do currículo com a Geometria Fractal. Promovem seu aspecto lúdico e investigativo para desenvolver o conceito de semelhança de figuras geométricas no nono ano do Ensino Fundamental. Também foram realizadas atividades com dobradura de papel para a construção de fractais. Ao final do estudo, concluem que, a partir dessas atividades e dos registros dos alunos, puderam perceber o empenho e interesse dos estudantes sobre a temática abordada.

O trabalho de Padilha (2013) apresenta uma atividade com fractais desenvolvida em 14 encontros em uma escola municipal com alunos da sétima série do Ensino Fundamental. São apresentadas, no decorrer do trabalho, as 10 atividades propostas pelo autor. A primeira foi "Descobrindo a Geometria Fractal", a qual teve por objetivo despertar nos alunos a percepção de que nem tudo pode ser explicado pela Geometria Euclidiana na representação de elementos da natureza. A segunda atividade é a apresentação do *GeoGebra* para os alunos. Na terceira, quarta, quinta e sétima atividades, os discentes deveriam construir a Curva de Koch, a Ilha de Koch, o Triângulo de Sierpinsky e o Tapete de Sierpinsky, respectivamente, com o auxílio do *GeoGebra*, do qual foi apresentado o passo a passo para sua construção. Na sexta atividade, o autor propõe aos alunos verificarem a relação entre o Triângulo de Sierpinsky e o de Pascal no *GeoGebra*, baseado em Barbosa (2005). Na oitava atividade, os estudantes deveriam criar fractais no *GeoGebra* e apresentar à turma tais criações. A nova atividade foi a construção de fractal, por meio de dobraduras de cartões e, para finalizar suas atividades, a décima consistiu na elaboração de fractais a partir de sólidos geométricos. Padilha conclui seu trabalho alertando que a Geometria Fractal possui um grande potencial, sendo que precisamos trabalhá-la mais em sala de aula, adaptando aos níveis de ensino da Educação Básica, pois isso pode contribuir para a ampliação do significado dos conteúdos e serem desencadeadores de muitos outros conceitos matemáticos.

O último trabalho encontrado nesse periódico é de Lopes *et al*. (2014), no qual se afirma que, nem sempre, os docentes estão preparados para trabalhar com outras geometrias que não a Euclidiana, nesse caso o Geometria Fractal. Para melhorar isso, foi pensado um curso de formação continuada, em forma de oficina, para professores da Educação Básica. As atividades desenvolvidas envolveram quebra-cabeças com figuras de alguns fractais, a utilização da arte francesa em fractais, planos e construção de fractais a partir de dobraduras e colagem de figuras.

Como resultado, o autor constata que os participantes não têm o hábito de trabalhar com fractais com seus alunos por falta de tempo ou por desconhecimento dessa Geometria.

O Grupo 4 apresenta um artigo de Silva *et al*. (2016) na Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT (*Qualis* A2). Nesse artigo, os autores iniciam abordando alguns elementos do discurso de Etnomatemática, tentando levar o leitor a compreender que a Matemática é uma produção humana histórica e não uma produção absoluta, infalível e fechada em si mesma. Após essa parte inicial, os autores fazem uma breve reflexão sobre as novas Lógicas, as Geometrias Não-Euclidianas e a Geometria dos Fractais, principalmente no que se refere ao contexto em que essas foram construídas. Como finalização do estudo, eles realizam algumas relações e aproximações entre elementos do discurso do Programa Etnomatemática na produção dos conhecimentos matemáticos, os quais eles denominam de tópicos atuais.

O penúltimo, Grupo 5, apresenta um artigo de Nascimento, Silva e Maciel (2012) na revista Vidya (*Qualis* A2). Esse trabalho é um recorte dos resultados de uma pesquisa de mestrado, a qual teve por objetivo analisar se a aplicação de diferentes atividades de ensino permitiria aos alunos do primeiro ano do Ensino Médio, de uma escola estadual, compreenderem a existência da Geometria Fractal. Os autores utilizaram como base teórica documentos oficiais que apoiam o ensino de Geometria e autores que sugerem a inserção do ensino de Geometria Fractal para alunos da Educação Básica. Encerram seu trabalho revelando a defasagem dos estudantes, em relação ao entendimento de conceitos geométricos básicos. Além disso, afirmam ser possível desenvolver em sala de aula outras geometrias, empregando atividades diferenciadas que possibilitem aos alunos uma participação ativa no processo de ensino e aprendizagem.

Para finalizarmos, o Grupo 6 apresenta o artigo de Azeredo *et al*. (2013) na Revista Novas Tecnologias na Educação – RENOTE (*Qualis* B1). Os autores iniciam abordando a Geometria Fractal e o relacionamento dela com as progressões geométricas. Em seguida, apresentam o objeto de aprendizagem, o simulador de fractais "Progressões Geométricas em Fractais" como instrumento mediador da aprendizagem. Eles apresentaram para um grupo de alunos da licenciatura em Matemática e, posteriormente, aplicaram em forma de atividade a alunos do Ensino Médio. Encerram o trabalho, destacando que as TD são um excelente motivador para o processo de aprendizagem dos alunos. Também foi observado que, a partir dos fractais, os alunos do Ensino Médio conseguiram investigar e explorar um conteúdo desconhecido pela maioria e descobriram como trabalhar com iterações, criação de fórmulas gerais, cálculo de área e perímetro de figuras de complexidade crescente e a aplicação de progressões geométricas intuitivamente ao conceito de limite.

Pela análise realizada dos 14 trabalhos, recuperados em periódicos científicos, é possível observar que a grande maioria teve o enfoque voltado para propostas e/ou aplicação de atividades para e Educação Básica. Alguns autores procuram desenvolver atividades utilizando o auxílio de *software* ou objeto de aprendizagem, mas não foram muitos. Também percebemos que as atividades mais frequentes nos trabalhos foram Curva de Koch, Ilha de Koch, Triângulo e Tapete de Sierpinsky.

Chamamos a atenção para dois trabalhos, Martel e Vilatón (2010) e Azeredo *et al*. (2013), os quais desenvolveram o conceito intuitivo de infinito com alunos do Ensino Médio, o qual nem sempre é de fácil compreensão entre os discentes. Também destacamos os trabalhos de Cañibano, Vazque e Gandini (2010) e Camara (2010), que desenvolveram com os alunos a dimensão fractal, isto é, que a dimensão pode ser expressa por um número fracionário, diferente da dimensão Euclidiana.

2.4.2 Mapeamento de teses e dissertações

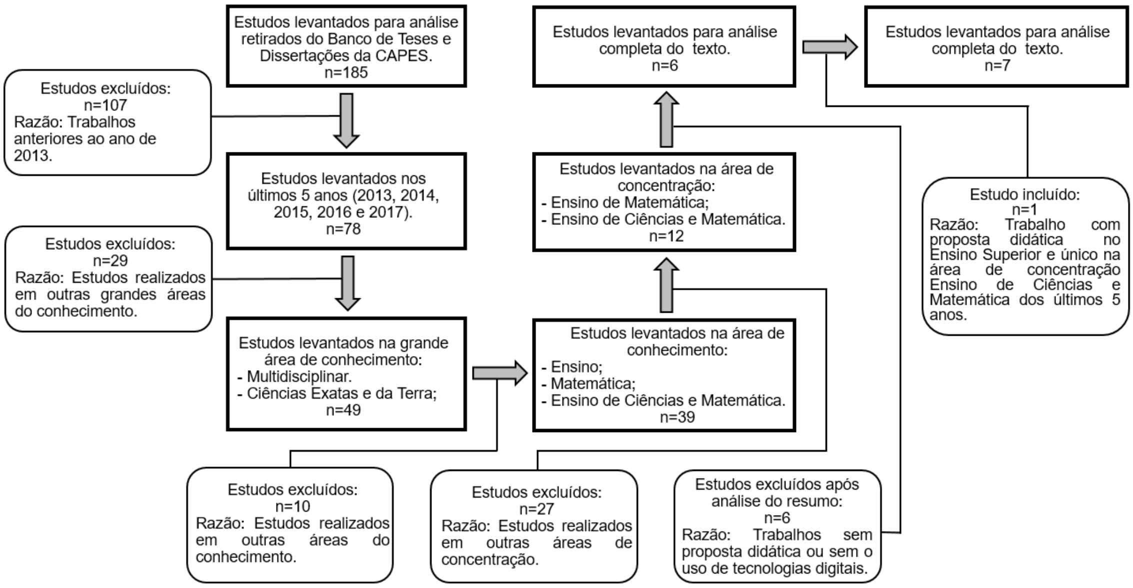
Para objetivarmos a busca em teses e dissertações, foi dada ênfase à temática Geometria Fractal, com a inserção do uso de TD, nos programas de pós-graduação *stricto sensu* com concentração em Ensino de Matemática e Ensino de Ciência e Matemática, em âmbito nacional. Em nossa pesquisa, houve interesse nos trabalhos que tiveram aplicações/propostas aplicadas e indicação do público envolvido, se Educação Básica ou Ensino Superior. Particularmente, foi dada ênfase aos trabalhos envolvendo o Ensino Superior, uma vez que a tese pretendida se volta a pesquisa nesse nível[14].

Para a realização desse mapeamento, utilizamos o Banco de Teses e Dissertações da CAPES. Foram recuperadas 185 pesquisas desenvolvidas em âmbito nacional, publicadas entre 1987 e 2017, selecionadas pelas palavras-chave “geometria AND fractal”, sendo essa procura realizada em outubro de 2017. Após essa busca inicial, realizamos seu refinamento, pois nem todos os trabalhos encontrados atendiam aos propósitos citados, especialmente porque estávamos interessados naqueles que tivessem propostas/aplicações utilizando a inserção de tecnologias e, se possível, no Ensino Superior. Na Figura 20, apresentamos uma síntese desse

[14] Como resultado desse mapeamento no Banco de Teses e Dissertações da CAPES, realizamos um recorte e submetemos ao 5º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEMAT), ocorrido em Belém do Pará/PA no período de 27 a 29 de junho de 2018, do qual tivemos aceite. Realizamos a apresentação e o trabalho foi publicado nos anais do evento. Para maiores detalhes, ver no Apêndice 1 o trabalho completo.

processo de refinamento, do qual restaram 7 dissertações para serem analisadas em sua totalidade, cujos resultados serão apresentados no decorrer do texto.

Figura 20 – Síntese do processo de obtenção das 7 dissertações recuperadas no Banco de Teses e Dissertações da CAPES sobre o tema Geometria Fractal



Fonte: elaborada pelo próprio autor.

A seguir, apresentamos a análise das sete dissertações, a qual foi dividida em cinco momentos. No primeiro, verificamos a autoria, área de concentração, ano da defesa e título. No segundo e terceiro momentos, foram analisados os objetivos e justificativas das dissertações. Já no quarto, observamos a fundamentação teórica e as atividades propostas. Para finalizar as análises, no quinto momento, verificamos as conclusões a que os autores chegaram em suas pesquisas.

A primeira dissertação analisada é de autoria de Adami (2013), desenvolvida na área de Ensino de Matemática. Apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de São Carlos, a pesquisa é intitulada “Fractais no Ensino Médio: uma sequência didática”.

Essa dissertação teve por objetivo dar condições para que os alunos construíssem noções sobre as aplicações da Geometria Fractal nos sistemas dinâmicos, ajudando-os a perceber a importância da Matemática para o desenvolvimento dos mais diversificados campos do conhecimento humano (ADAMI, 2013). Aliado a esse objetivo, o autor utilizou recurso tecnológico, em especial, o *GeoGebra*.

Adami (2013) justificou a escolha da temática e a forma de aplicação a partir da necessidade de trabalhar, com os alunos do Ensino Médio, noções de geometrias não euclidianas e aplicações da Matemática em diversas áreas da atuação humana. Ele buscou, assim, motivar os alunos a perceberem uma matemática além daquela proposta para resolver problemas, os quais nem sempre são contextualizados ou então estão distantes da realidade dos alunos. O púbico envolvido foi composto por alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola privada e as atividades desenvolvidas foram realizadas no turno inverso.

O trabalho, inicialmente, se desenvolveu por meio de uma pesquisa de análise bibliográfica, que englobou alguns conceitos iniciais de fractais (breve histórico e cálculo de sua dimensão), Triângulo de Sierpinsky, sistemas dinâmicos, *GeoGebra* e Engenharia Didática baseada nos pressupostos de Michèle Artigue. A Engenharia Didática, conforme Artigue (1996), é desenvolvida em quatro fases: a primeira são as análises prévias; a segunda envolve a concepção e análise a priori das situações didáticas da engenharia; a terceira diz respeito ao desenvolvimento da experimentação; a quarta e última fase consiste das análises a posteriori e validação.

A segunda parte dessa dissertação compreendeu a realização de três atividades, duas utilizando materiais manipulativos e uma com o uso do *GeoGebra*. A primeira atividade foi o "Jogo do Caos", que consiste na formação de um fractal com iterações a partir de um ponto interno de um triângulo (ADAMI, 2013). Esse é um algoritmo criado pelo matemático Michael Fielding Barnsley, em 1988. Na segunda atividade, os alunos deveriam obterem pontos médios de segmentos determinados aleatoriamente no interior da região triangular. Foi pensada na tentativa de obter um maior número de pontos, uma vez que a primeira atividade poderia não apresentar resultados significativos. Da mesma forma que na primeira, os pontos obtidos foram determinados de modo aleatório. A terceira e última atividade desta etapa foi a construção do Triângulo de Sierpinsky, com o auxílio do *GeoGebra*, a qual tinha como objetivo implementar uma rotina computacional para ser executada e que repetisse as condições da segunda.

Adami (2013) concluiu, ao final de sua pesquisa, que as atividades marcaram um espaço de reflexão sobre a importância da Matemática e de tecnologias para o desenvolvimento científico. Foi a partir delas que ele pôde criar outras situações problematizadoras como, por exemplo, determinar a dimensão de um fractal ou mesmo contextualizar conteúdos do Ensino Médio, como funções, logaritmos, números complexos, sequências, entre outros. O autor acredita que atividades como essas possam trazer para a sala de aula reflexões interessantes sobre a evolução da Matemática e como ela pode contribuir para que os alunos percebam sua beleza, e não como sinônimo de fórmulas e cálculos que nem sempre são interessantes para eles.

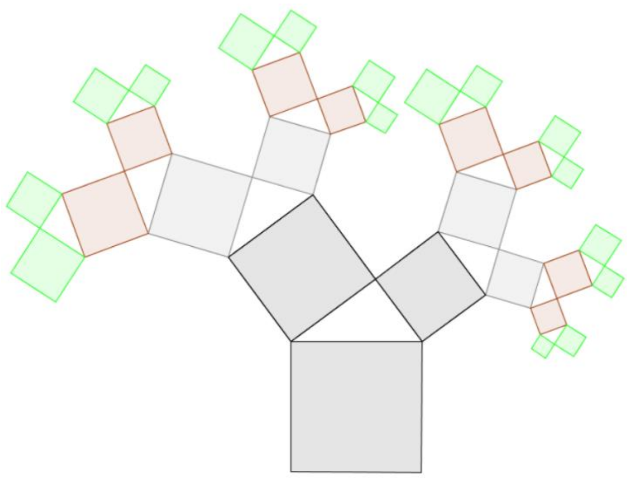
A segunda dissertação, intitulada "Conhecendo Fractal no Ensino Médio – Árvore Pitagórica", também realizada na Universidade Federal de São Carlos, é de autoria de Nicola (2013) e foi desenvolvida na área de Ensino de Matemática. Foi apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas em parceria com o PROFMAT.

Nicola (2013) teve por objetivo a apresentação para os alunos da ideia de Geometria Fractal de maneira simples. Foi construído no *GeoGebra* o fractal Árvore Pitagórica e, consequentemente, a exploração do Teorema de Pitágoras, aplicando conceitos matemáticos já estudados em anos anteriores.

O autor justificou sua escolha por essa temática para apresentar uma propriedade fundamental da Geometria – a semelhança. Acrescenta que as figuras mostram uma configuração que pode despertar a atenção e o interesse dos alunos e, consequentemente, os motivando a compreenderem conceitos matemáticos. A utilização de um *software* de GD também auxiliou o aprendizado desses estudantes. O púbico constituiu-se uma turma de 30 alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola privada.

O trabalho iniciou com uma breve descrição da escola, dos alunos e do professor. Logo após, o autor realizou uma pesquisa por meio de análise bibliográfica, buscando conceitos de alguns fractais precursores, como por exemplo, Conjunto de Cantor, Curva de Koch, Floco de Neve de Koch, Triângulo de Sierpinsky e Árvore Pitagórica. O último foi o centro do estudo da dissertação (Figura 21). A metodologia utilizada para a realização do estudo foi a Engenharia Didática de Michèle Artigue.

Figura 21 – Árvore Pitagórica nível 3 destacando as cores em cada nível



Fonte: Nicola (2013, p. 43).

Na sequência, o autor desenvolveu, passo a passo, a construção da Árvore Pitagórica no *GeoGebra*, com o grupo de alunos. Após essa etapa, ele iniciou a exploração de conceitos matemáticos. Primeiro, foi a contagem do número de quadrados apresentados no nível 3 da Árvore Pitagórica e, para finalizar, foi explorado o Teorema de Pitágoras.

Nicola (2013) finalizou seu trabalho concluindo que foi uma experiência válida, salientando a importância do uso da informática na sala de aula, pois isso já é uma realidade dos educandos, sendo que a escola deve se aliar e acompanhar a evolução tecnológica. Também concluiu que os professores têm de procurar se apropriar dessa realidade, por meio de cursos de formação inicial ou continuada, pois cada vez mais os alunos estão inseridos no meio informatizado.

A terceira dissertação analisada é de autoria de Castilhos (2014), desenvolvida na área de Ensino de Matemática, apresentada no PROFMAT da Universidade Federal Fluminense – Campus Niterói, intitulada “Possibilidades pedagógicas para introdução de Geometria Fractal no Ensino Básico e na formação de professores de Matemática”.

Essa dissertação teve por objetivo apresentar propostas de atividades empregando fractais para serem utilizados em sala de aula no Ensino Básico (Fundamental e Médio) e na formação de professores, na graduação ou em formação continuada.

Castilhos (2014) justificou a escolha desse tema devido ao fractal possibilitar desenvolver, de uma forma diferente, contagem, frações, área, perímetro, razão, proporcionalidade, conteúdos esses desenvolvidos no Ensino Fundamental. Já no Ensino Médio, com a introdução inicial do conceito de fractal, acompanhado de sua parte histórica e, com o auxílio da tecnologia, o objetivo foi de construir a ideia de infinito, um conceito de difícil entendimento para os estudantes deste nível de escolaridade. Além disso, outro ponto importante, destacado pelo autor, foi um exemplo de aplicação de logaritmo na determinação da dimensão fractal. Afirma, também, que podem ser desenvolvidos o conceito de recursividade, o pensamento indutivo, a progressão geométrica e a composições de função por meio de iterações nos objetos fractais, utilizando uma construção geométrica para introdução desses conceitos, o que, para o aluno, é mais fácil, ou seja, trabalhar conceitos abstratos em materiais concretos.

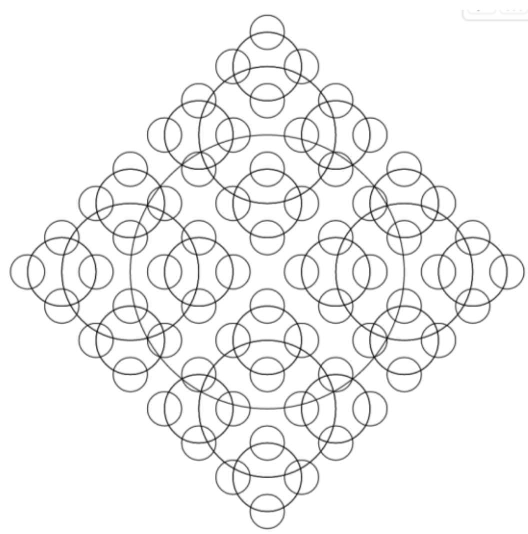
A dissertação iniciou com uma pesquisa de cunho bibliográfico, que englobou: um breve histórico da Geometria Fractal até chegar à definição do que é um fractal. Apresentou o Conjunto de Cantor, Curva de Peano, Curva de Hilbert, Curva de Koch, Ilha de Koch, Triângulo e Tapete de Sierpinsky, Cubo de Sierpinsky (ou Esponja de Menjer) e Pirâmide de Sierpinsky.

Após esta parte, o autor trabalhou com dimensão fractal e comprimento de curvas. Na segunda parte dessa dissertação, o autor analisou atividades dinamizadas no sétimo e oitavo ano do Ensino Fundamental, primeiro e segundo ano do Ensino Médio e no contexto de estudantes de licenciatura em Matemática.

O autor propôs, para o sétimo e oitavo anos do Ensino Fundamental, a construção do Triângulo de Sierpinsky, utilizando cartolina para desenvolver conceitos de Geometria e de fração para o sétimo ano. Quanto aos conceitos geométricos de razão e potenciação, esses constavam das atividades para o oitavo ano. Também teve como objetivo promover a interdisciplinaridade entre Matemática e Artes, quando foram utilizados oito períodos de aula, sendo quatro desses para cada disciplina na aplicação da atividade.

Para o primeiro ano do Ensino Médio, ele propôs o uso do *GeoGebra* na construção do Tetracírculo (Figura 22) com a utilização de seis períodos de aula. A atividade teve por objetivo desenvolver conceitos de Geometria, além de introduzir a tecnologia no ensino da Matemática por meio de *software* de GD, apresentando uma aplicação de progressão geométrica e, consequentemente, formalizando os conceitos de infinito e de limitado.

Figura 22 – Tetracírculo



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Já na atividade do segundo ano do Ensino Médio, o autor propôs desenvolver o conceito de Geometria Fractal calculando a dimensão de um objeto fractal natural e seu comprimento, também fazendo uso da interdisciplinaridade com Geografia e Biologia. A atividade teve como objetivo a apresentação do conceito de Geometria Fractal, trabalhando com aplicação de logaritmo e discutindo a importância do cálculo da dimensão de uma fronteira, explorando a do litoral da cidade de Armação dos Búzios.

Para os alunos do curso de licenciatura em Matemática, o autor propôs mostrar uma maneira de ensinar potência, razão, progressão geométrica, resolver problemas que envolvem infinito e limite, generalizar situações por meio de fórmulas matemáticas, apresentar o conceito de Geometria Fractal e recolher opiniões sobre a introdução de fractais no Ensino Básico.

Castilhos (2014) finalizou sua pesquisa revelando que os alunos se interessaram mais pela Matemática quando ela foi apresentada com uma atividade dinâmica, bem como ao apresentar uma aplicação, pois eles se sentiram instigados a resolver uma situação proposta, principalmente por ela ter sido feita de forma interdisciplinar na apresentação dos conteúdos.

O quarto trabalho, de autoria de Mingoranci (2014), foi desenvolvido na área de Ensino de Matemática, tendo sido apresentado ao PROFMAT em parceria com a Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – Campus de Três Lagoas. A dissertação foi intitulada “A Geometria Fractal aliada à contextualização, protagonismo juvenil e tecnologias como proposta de melhoria no processo ensino/aprendizagem da Matemática na Educação Básica”.

O estudo de Mingoranci (2014) teve por objetivo a inserção do tema Geometria Fractal utilizado como um conteúdo curricular capaz de motivar e enriquecer as aulas de Matemática, consequentemente, melhorando o processo de ensino e aprendizagem.

O autor justificou sua escolha pela Geometria Fractal devido a ela permitir o estímulo de diversas habilidades necessárias para o entendimento não só da Matemática, mas do mundo em geral. Por exemplo, saber pensar iterativamente e recursivamente e no desenvolvimento da percepção de autossimilaridade e do raciocínio dedutivo. Além do mais, ela fornece ferramentas ao professor para trabalhar diferentes sentidos, como visão, audição e atividades manuais. Também, possibilita a abordagem de diversos conteúdos matemáticos de áreas não geométricas e de outras disciplinas, podendo ser utilizada como tema central para um projeto interdisciplinar.

O trabalho, inicialmente, se desenvolveu por meio de análise bibliográfica, que englobou cinco tópicos: definição de fractal; autossimilaridade; precursores da Geometria Fractal e suas criações; dimensão fractal; e aplicações.

A segunda parte da dissertação apresentou uma breve revisão sobre a Geometria Fractal na sala de aula, em que finalizou apresentando uma proposta de aplicação, descrevendo-a, e isso a diferenciou das outras apresentadas até o momento. Ela utilizou o *GeoGebra* e, para tanto, trouxe o passo a passo para a construção da Curva de Koch, Ilha de Koch, Triângulo de Sierpinsky e Fractal Pitagórico ou Árvore Pitagórica.

Mingoranci (2014) finalizou sua pesquisa enfatizando ter apresentado com êxito conceitos da Geometria Fractal. Destacou que ela não foi idealizada com o intuito de defender a inclusão da Geometria Fractal como conteúdo do currículo de Matemática na Educação Básica. Além disso, relatou que a Geometria pode desenvolver diversos sentidos, habilidades e possibilidade de desenvolver conteúdos matemáticos variados, bem como de outras disciplinas, evidenciando um tema a ser inserido nas escolas por meio de projetos interdisciplinares.

A quinta dissertação analisada é de autoria de Reis (2014b), desenvolvida na área de Ensino de Matemática, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, em parceria com o PROFMAT da Universidade Federal Rural do Semiárido – Campus Mossoró, intitulada "Fractais no Ensino Médio: da observação de padrões da natureza ao uso do *GeoGebra"*.

Essa dissertação teve por objetivo propor uma breve análise de padrões geométricos da natureza como ponto inicial para a introdução da Geometria Fractal no currículo do Ensino Médio e a inserção do uso de TD na sala de aula, em especial com o uso do *GeoGebra*.

A escolha da Geometria Fractal, por Reis (2014b), como tema central, justificou-se principalmente por ela permear o mundo em que vivemos. A plena compreensão das competências e habilidades relacionadas a essa área da Matemática é indispensável, se for considerado o quanto essa Geometria está presente no cotidiano dos alunos. A abordagem da Geometria Fractal no Ensino Médio é uma proposta que visa levar os estudantes a um primeiro contato com uma geometria não euclidiana e com temas importantes na área da computação como as recorrências e, até mesmo, mais timidamente, as estruturas lógicas dos algoritmos de programação.

A dissertação iniciou com uma pesquisa bibliográfica, a qual apresentou: um breve histórico da Geometria Fractal e fractais famosos como, por exemplo, o Conjunto de Cantor, a Curva de Koch e o Triângulo de Sierpinsky.

Na segunda parte, o autor apresenta o público que realizou a aplicação, o qual foi composto de 24 alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola estadual. Ele realizou uma aula de campo para coleta de materiais que seriam utilizados em aula, na Praia do Requenguela, situada no litoral leste do Ceará. Após essa análise, Reis propôs aos alunos a produção de alguns fractais com a utilização do *GeoGebra*. Foram construídos a Curva de Koch, o Triângulo de Sierpinsky, a Árvore Pitagórica e, para essas três primeiras construções, o pesquisador elaborou um manual. Depois, solicitou aos alunos que criassem outro tipo de fractal. Para finalizar, propôs a exploração matemática dos fractais que foram produzidos anteriormente, analisando área, perímetro e fator de crescimento.

Reis (2014b) finalizou sua pesquisa relatando que os conceitos de progressão geométrica, análise combinatória e noções de geometria plana foram bem explorados. As construções no *GeoGebra* viabilizaram a fixação das ideias de razão e proporção. Além disso, temas transversais, como as recorrências, tiveram boa aceitação por parte dos alunos, o que o levou a acreditar que seu trabalho teve êxito.

A penúltima dissertação analisada é de autoria de Araújo (2015), desenvolvida na área de Ensino de Matemática, apresentada ao PROFMAT da Universidade Federal de Roraima. O trabalho foi intitulado "Teoria Matemática implícita na Geometria Fractal: construindo fractais com a ferramenta computacional *Asymptote*".

Essa dissertação teve por objetivo realizar um estudo sobre os fractais pioneiros, destacando suas principais características e relacionando-os com conteúdo matemático presente no currículo da Educação Básica, fazendo uso de TD na sala de aula, em especial com o *software Asymptote*.

A justificativa da escolha da Geometria Fractal, por Araújo (2015), como tema central de sua pesquisa de mestrado, é por despertar curiosidades nos alunos, além de uma imensa possibilidade de aplicações. Porém, afirma ser, ainda, pouquíssimo trabalhada e conhecida.

A dissertação iniciou com uma pesquisa bibliográfica que explorou: o axioma da indução; progressões geométricas; Teorema de Pitágoras; números complexos; Conjunto de Cantor e fractais pioneiros. Na segunda parte, o autor apresenta uma proposta para alunos do Ensino Médio com a utilização do *Asymptote*[15], o qual possui uma linguagem descritiva para gráficos vetoriais, fornecendo um sistema de coordenadas matemáticas para desenho técnico. Ele traz o passo a passo para a construção da Árvore Pitagórica, Curva de Koch, Triângulo de Sierpinsky e Conjunto de Mandelbrot.

Araújo (2015) finaliza seu trabalho, relatando ser possível perceber que muitos conteúdos básicos de Matemática podem ser desenvolvidos utilizando conceitos fractais. Esse estudo pode ser usado tanto para apresentar um conteúdo novo, como para fixar outros já desenvolvidos anteriormente. Desta forma, o autor acredita que introduzir o estudo da Geometria Fractal na sala de aula pode dar aos alunos a oportunidade de investigar tópicos da Matemática tradicional por um novo ângulo e, de certa forma, mais motivador.

A última dissertação analisada é de autoria de Batista (2017), desenvolvida na área de Ensino de Ciências e Matemática, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro Universitário Franciscano, atual Universidade Franciscana.

[15] *Asymptote* é um *software* que utiliza a linguagem de programação para construção de gráficos.

Intitulada “Sequências numéricas a partir da Geometria Fractal para licenciandos em Matemática”, o trabalho foi selecionado em nosso estudo porque, apesar de não utilizar TD, ele foi o único encontrado que desenvolveu proposta utilizando como público somente alunos do Ensino Superior.

A autora teve por objetivo investigar quais as contribuições da Geometria Fractal quando utilizada para introdução do conteúdo de sequências numéricas para licenciandos em Matemática. Para Batista (2017), a inserção de Geometria Fractal na introdução de sequências numéricas, na formação de professores de Matemática, conecta-se às competências e habilidades próprias do educador matemático, possibilitando ao licenciando desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a sua criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos.

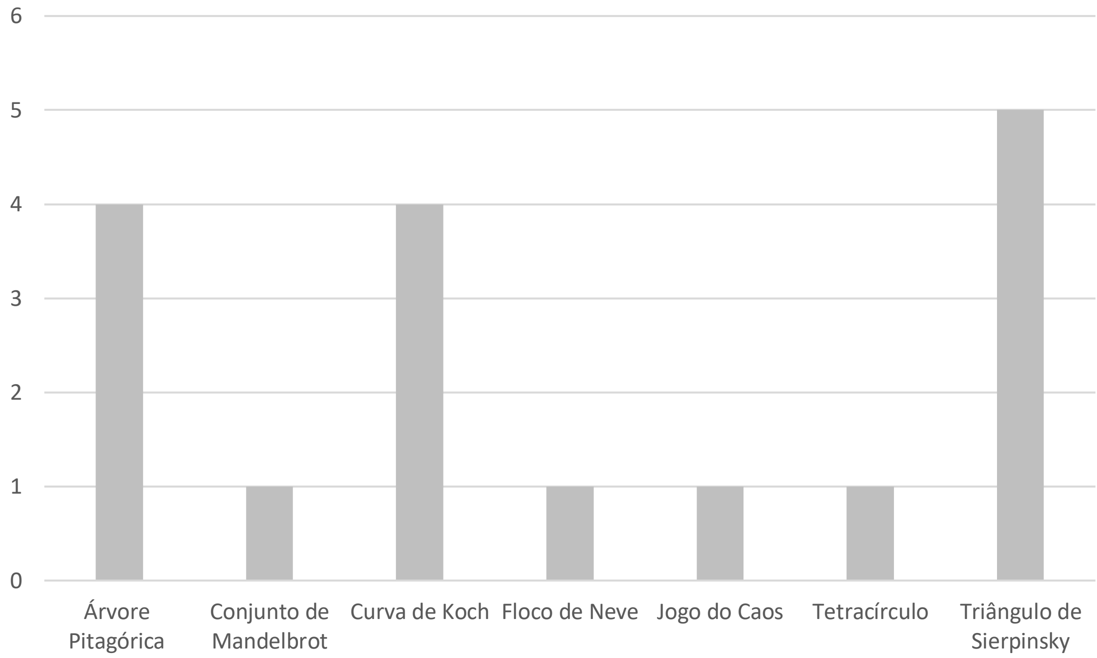
A autora inicia a dissertação com uma pesquisa bibliográfica, que explorou os conceitos de Investigação Matemática, o ensino de Geometria e a Geometria Fractal (autossimilaridade, dimensão fractal e processo iterativo de construção). Na segunda parte da dissertação, apresenta o público de sua aplicação, constituído de nove alunos do curso de licenciatura em Matemática de uma instituição privada. Em quatro períodos, na realização da atividade, ela desenvolveu com os alunos a Curva de Koch, utilizando para a construção papel, régua e compasso. Para finalizar a atividade, os acadêmicos deveriam preencher um quadro, o qual tinham de completar com a quantidade de segmentos em cada iteração, medida do lado, área e perímetro de cada objeto fractal a partir de sua dimensão.

Batista (2017) conclui sua pesquisa relatando que a Investigação Matemática, envolvendo a construção de um fractal e nela explorando o conteúdo de sequências numéricas, propiciou aos participantes uma nova forma de abordagem desse conteúdo, o que foi ratificado nas falas e nos registros dos participantes. Além disso, destaca que os envolvidos relataram que a visualização e a construção do fractal levaram, de maneira direta, ao conceito de sequência numérica, bem como ao de convergência, assim possibilitando a conexão entre os conteúdos.

Em cinco trabalhos analisados, nos quais houve aplicação, os autores utilizaram como instrumento de coleta de dados registros fotográficos, anotações, material confeccionado pelos participantes e as construções e atividades realizadas e registradas em diário de campo durante os encontros.

Por meio da análise das sete dissertações, constatamos que algumas trouxeram suas propostas a mais de um nível de ensino, sendo que seis as desenvolveram no Ensino Médio, uma no Ensino Fundamental e duas no Ensino Superior. Na Figura 23, apresentamos um resumo das atividades trazidas nas dissertações.

Figura 23 – Resumo das atividades apresentadas nas sete dissertações



Fonte: elaborada pelo próprio autor.

Analisando a Figura 23, podemos concluir que a maioria das dissertações trouxe a construção do Triângulo de Sierpinsky (5), seguida pela Curva de Koch (4) e Árvore Pitagórica (4).

Após a pesquisa realizada, podemos tecer algumas considerações sobre a temática Geometria Fractal. Foi constatado que não existe, até o momento da busca, no Banco de Teses e Dissertações da CAPES, tese sobre a referida temática, o que torna nossa proposta inédita nesse quesito. Um segundo ponto relevante é que houve apenas sete trabalhos que envolveram atividades práticas e, desses, somente seis utilizaram a inserção de tecnologias no Ensino Médio e/ou Ensino Fundamental (cinco usaram o *GeoGebra*) e dois aplicaram atividades com alunos do Ensino Superior.

Portanto, a partir desse levantamento, iremos desenvolver atividades diferentes das exploradas na literatura analisada, trabalhando construções fractais com recursos tecnológicos.

2.5 As Geometrias trabalhadas nos cursos de licenciatura em Matemática no IFFar

Outra análise que colabora para com nossa pesquisa é sobre as Geometrias que estão sendo abordadas nos cursos de licenciatura em Matemática no IFFar. Antes de iniciarmos esse levantamento, vamos verificar o que os documentos oficiais sugerem para tal disciplina e conhecer os *campi* que ofertam o curso de licenciatura em Matemática.

O Conselho Nacional de Educação (CNE) é o órgão responsável pela elaboração do documento que orienta sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática (bacharelado e licenciatura). Tal diretriz tem como objetivos guiar melhorias e transformações na formação acadêmica dos licenciandos ou bacharéis em Matemática das Instituições de Ensino Superior (IES). Além disso, possibilitar que os egressos dos cursos credenciados tenham sido devidamente preparados para uma carreira na qual a Matemática seja empregada de modo essencial, assim como para um processo contínuo de aprendizagem (BRASIL, 2002a). Ainda, nas Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de licenciatura em Matemática, a organização dos currículos das IES deve considerar os conteúdos comuns a todos os cursos de Matemática, complementados com disciplinas organizadas conforme o perfil escolhido pelo aluno.

O Parecer CNE/CES 1.302/2001 estabelece os conteúdos que devem ser distribuídos ao longo do curso, que são comuns a todos os de licenciatura em Matemática que são: o Cálculo Diferencial e Integral; Álgebra Linear; Fundamentos de Análise; Fundamentos de Álgebra; Fundamentos de Geometria; e Geometria Analítica. (BRASIL, 2002a). Observamos que em nenhum momento é mencionada carga horária mínima ou máxima para tais tópicos, ficando a critério da IES.

Em relação à carga horária que os cursos de licenciatura devem ter, a Resolução Nº 2, de 1º de julho de 2015, define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior e para a formação continuada. O capítulo V apresenta que os cursos de formação inicial do magistério da Educação Básica em nível superior terão:

> [...], no mínimo, 3.200 (três mil e duzentas) horas de efetivo trabalho acadêmico, em cursos com duração de, no mínimo, 8 (oito) semestres ou 4 (quatro) anos, compreendendo:
> I - 400 (quatrocentas) horas de prática como componente curricular, distribuídas ao longo do processo formativo;
> II - 400 (quatrocentas) horas dedicadas ao estágio supervisionado, na área de formação e atuação na educação básica, contemplando também outras áreas específicas, se for o caso, conforme o projeto de curso da instituição;
> III - pelo menos 2.200 (duas mil e duzentas) horas dedicadas às atividades formativas estruturadas pelos núcleos definidos nos incisos I e II do artigo 12 desta Resolução, conforme o projeto de curso da instituição;

> IV - 200 (duzentas) horas de atividades teórico-práticas de aprofundamento em áreas específicas de interesse dos estudantes, conforme núcleo definido no inciso III do artigo 12 desta Resolução, por meio da iniciação científica, da iniciação à docência, da extensão e da monitoria, entre outras, consoante o projeto de curso da instituição. BRASIL (2015, p. 11).

A partir do que foi exposto, realizamos um estudo nos PPC das licenciaturas em Matemática do IFFar para investigarmos as Geometrias que são desenvolvidas em tais cursos.

O IFFar, possui a referida licenciatura em cinco unidades de sua Instituição, Alegrete, Frederico Westphalen, Júlio de Castilhos, Santa Rosa e São Borja. Todas possuem uma carga horária de 3.376 horas divididas em 8 semestres. Portanto, os cursos estão de acordo com a Resolução Nº 2, de 1º de julho de 2015, a qual dispõe o mínimo de 3.200 horas.

Todos os PPC dispõem de uma disciplina de Geometria Analítica, uma de Geometria Plana e outra de Geometria Espacial, distribuídas entre o segundo e quarto semestre do curso. Também, como pode ser visto no Quadro 7, todas possuem uma carga horária de 72 horas e as mesmas ementas para todos os *campi*.

Quadro 7– Disciplinas de Geometria ofertadas nos cinco cursos de licenciatura em Matemática do IFFar

Disciplina	Carga horária (hora/aula)	Semestre da disciplina	Ementa
Geometria Analítica	72	2º	Vetores no R^2 e R^3: definição algébrica e geométrica, operações com vetores e suas propriedades; produto escalar, produto vetorial, produto misto e suas aplicações; estudo da equação da reta no plano e no espaço; estudo do plano; distâncias; posições relativas de retas e planos; ângulos entre retas e planos; estudo da circunferência; estudos das cônicas.
Geometria Plana	72	3º	Construção axiomática da Geometria Plana: elementos fundamentais da geometria, paralelismo, perpendicularismo, polígonos; estudo dos triângulos; estudo dos quadriláteros notáveis; estudo da circunferência; áreas de superfícies planas.
Geometria Espacial	72	4º	Estudo axiomático da Geometria Espacial; poliedros: de Platão, prismas e pirâmides; sólidos de revolução: cilindros, cones e esfera.

Fonte: retirado de Alegrete (2014); Frederico Westphalen (2018); Júlio de Castilhos (2014); Santa Rosa (2014) e São Borja (2014).

A partir da análise do Quadro 7, verificamos, por meio das ementas das disciplinas, que é dada ênfase à Geometria Euclidiana e nenhum campus oferece disciplina optativa de geometria não euclidiana. Outra constatação é em relação à carga horária disponibilizada para Geometria, ela representa aproximadamente 6,4% da carga horária total do curso.

Portanto, após realizarmos as análises dos PPC de licenciaturas em Matemática do IFFar, constatamos que os referidos *campi* estão de acordo com a legislação em vigor, no que se refere ao Parecer CNE/CES 1.302/2001, pois em todos os seus cursos são desenvolvidos os fundamentos de Geometria e Geometria Analítica. Além disso, percebemos a predominância da Geometria Euclidiana, não havendo ofertas de outros tipos de Geometria, como por exemplo, Geometria Esférica, Geometria Hiperbólica, Geometria Fractal, entre outras.

Por trabalhar com alunos de graduação e disciplinas de Estágio Curricular Obrigatório no curso de licenciatura em Matemática do IFFar, campus Alegrete, vivenciamos essa realidade, ao ver somente a Geometria Euclidiana desenvolvida nos bancos escolares da Educação Básica. Logo, acreditamos que uma das formas de levar outros conteúdos para sala de aula da Educação Básica, por exemplo Geometria Fractal, é ofertarmos nos cursos de formação inicial alguma disciplina (regular ou optativa) com tal conteúdo, ou mesmos ofertarmos curso de extensão (presencial ou a distância).

3 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Neste capítulo, estruturamos os aspectos relativos ao referencial teórico que fundamenta nossa pesquisa, ou seja, os RRS. No decorrer da discussão, apresentamos seus elementos que consideramos relevantes para nossa pesquisa. Tal teoria aborda aspectos cognitivos da aprendizagem, além de analisar os meios pelos quais o aluno pode ter acesso ao objeto matemático.

Raymond Duval é filósofo e psicólogo de formação, desde a década de 70, desenvolvendo pesquisas associadas com a psicologia cognitiva, o que tem contribuído para os estudos na área de Educação Matemática. No período de 1970 a 1995, ele esteve vinculado ao Instituto de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática (IREM), na França, na cidade de Estrasburgo. Atualmente, é professor emérito em Ciências da Educação da *Université du Littoral Côte d'Opale*, na cidade de *Boulogne-sur-mer*, residindo em *Lille*, cidade essa situada ao norte da França. (FREITAS; REZENDE, 2013).

Machado (2010) relata que, dentre a vasta produção de Duval, a obra intitulada "*Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*", publicada em 1995, foi o ponto de partida para sua teoria, por tratar-se da primeira apresentação sistematizada do pensamento do autor.

Segundo Duval (2010, p. 11), o objetivo da Matemática é "contribuir para o desenvolvimento geral de capacidades de raciocínio, de análise e de visualização". Ele destaca que, para haver a compreensão Matemática, se faz necessária uma abordagem cognitiva, porém essa deve buscar retratar os processos de aquisição de conhecimentos que possibilitem ao aluno compreender, efetuar e controlar a variedade dos procedimentos matemáticos que lhe são propostos em situações de ensino. Outro ponto que o autor salienta é a existência de duas características essenciais para atividades cognitivas necessárias para a Matemática: a importância das representações semióticas e a diversidade das utilizadas em Matemática.

Corroborando essa ideia de diversidade de representações, André (2011) relata a necessidade de levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático. Para a autora, não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa sem o auxílio de uma representação. Os conceitos matemáticos são cognitivamente diferentes dos de outras ciências, não são diretamente perceptíveis ou observáveis, muitas vezes necessitando de representações semióticas para suas aprendizagens. (MAGGIO; NEHRING, 2012).

Diante da quantidade de sistemas semióticos, se faz necessário distinguir entre objeto e sua representação. Para Duval (2009), existem duas atividades cognitivas entre o objeto e a sua representação, sendo uma relacionada à representação do objeto matemático e outra, ao próprio objeto. Ele denomina *semiósis* para dar conta da apreensão ou produção de uma representação semiótica, enquanto *noésis* seria a responsável pelos atos cognitivos ligados à apreensão conceitual de um objeto. Segundo o autor, as representações semióticas caracterizam-se por

> [...] serem relativas a um sistema particular de signos, como a linguagem, a escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações “equivalentes” em outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para os sujeitos que as utilizam. (DUVAL, 2009, p. 32).

Para ocorrer a aprendizagem, se faz necessária a apreensão de um determinado objeto matemático, ou seja, deve ocorrer a *noésis* por meio de significativas *semiósis.* A aprendizagem só ocorrerá quando o aluno conhecer os diferentes RRS de um determinado objeto.

A esse respeito, Damm (2012, p. 177) postula:

> para que ocorra a apreensão de um objeto matemático, é necessário que a *noésis* (conceitualização) ocorra através de significativas *semiósis* (representações). A apreensão conceitual dos objetos matemáticos somente será possível com a coordenação, pelo sujeito que aprende, de vários registros de representação.

Um sistema semiótico é um conjunto de signos que possui finalidade de se comunicar e dar significado. Para Santaella (2012), o signo é um substituto ou representante de um objeto. Conforme a autora, não é o objeto nem o representa em sua totalidade, mas sim cria a ideia de um equivalente. Damm (2012) exemplifica sistemas semióticos, na Matemática, como o sistema de numeração, a escrita algébrica, a representação gráfica, entre outros.

> Por exemplo, quando trabalhamos com as funções, os gráficos, as tabelas e as equações são todos registros parciais desse objeto. Cada um desses registros é parcial e possui uma especificação própria. Perceber essas especificidades a cada registro e reforçá-los é um caminho para o entendimento do objeto como um todo. (DAMM, 2012, p. 185).

Na Matemática nem sempre trabalhamos com objetos concretos, pelo contrário, às vezes o fizemos com os abstratos. Diante dessa realidade, recorremos ao uso de uma representação para sua compreensão, para auxiliar, seja essa, por exemplo, mediante o uso de tabelas, gráficos ou algoritmos. Segundo Breunig, Nehring e Pozzobon (2010), é interessante apresentar aos alunos situações de ensino que possam estimular identificação, utilização e mobilização de diferentes RRS a partir dos conceitos.

A teoria de Duval (2010) é estabelecida como produções concebidas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, sendo que esses se referem ao uso da linguagem (símbolos, códigos, gráficos, entre outros), os quais possuem suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento. Segundo Vertuan (2007, p. 21),

> o termo "registro de representação semiótica" é usado para designar os diferentes tipos de representações semióticas. As representações em língua natural, tabular, gráfica, figural e algébrica são exemplos de tipos diferentes de representação. Cada uma delas consiste num registro de representação diferente (ou sistema de representação).

Para Machado (2010), os RRS estabelecem uma importante ferramenta que discorre sobre a aquisição de conhecimentos matemáticos e a organização de situações de aprendizagem desses conhecimentos.

Duval (2009) classificou as representações em três categorias (sejam elas conscientes ou não-conscientes): mentais; internas ou computacionais; e semióticas. No Quadro 8, apresentamos os tipos e funções das representações.

Quadro 8 – Tipos e funções das representações

	Interna	Externa
Consciente	Mental função de objetivação	semiótica função de objetivação função de expressão função de tratamento intencional
Não-consciente	computacional função de tratamento automático ou quase instantâneo	

Fonte: Duval (2009, p. 43).

As representações mentais são internas e cumprem a função de objetivação. Consistem em um conjunto de imagens e concepções que um indivíduo pode ter de um objeto, de uma situação ou aquilo que está associado a ele ou à situação. Essas representações estão correlacionadas à interiorização das representações externas. (DUVAL, 2009). Damm (2012) relata que tais representações são referidas às ideias, às crenças, às explicações do indivíduo em relação a determinado fenômeno e apresenta, como exemplo, as fantasias relacionadas à água, ao fogo, ao ar, as quais são provenientes das representações mentais.

Para Duval (2009), as representações computacionais, internas e não-conscientes, são aquelas caracterizadas pela execução de tarefas automaticamente, sem pensar em todas as etapas necessárias para sua realização. Segundo Damm (2012, p. 172), "[...] o sujeito acaba executando certas tarefas sem pensar em todos os passos necessários para a sua realização (por exemplo, os algoritmos computacionais, ou mesmo os algoritmos das operações)".

Por sua vez, as representações semióticas são produções concebidas a partir do emprego de signos, próprios de um sistema de referência associado a um conceito ou a um conjunto de conceitos. Como exemplos dessas representações, temos a escrita algébrica, os gráficos cartesianos, as tabelas e as figuras geométricas, todos possuindo suas dificuldades próprias de significado e funcionamento. (DUVAL, 2009). A representação semiótica, para o autor, por ser externa, exerce tanto a função de comunicação quanto de funções cognitivas. Em outras palavras, é por meio das representações semióticas que o indivíduo vai exteriorizar, comunicar e objetivar seu pensamento.

Ainda, Duval (2009) destaca a dualidade das representações semióticas, a forma (o representante) e o conteúdo (o representado). Para o autor, o tratamento dos conhecimentos depende da forma e não do conteúdo envolvido, em que a atividade Matemática consiste na transformação das representações semióticas e a mobilização de diferentes representações para o mesmo objeto. Segundo Duval (2011, p. 68) "o que é essencial em uma representação semiótica são as transformações que se pode fazer e não a própria representação". Logo, essas representações semióticas podem possuir naturezas distintas, dependendo de qual aspecto do objeto matemático queremos evidenciar.

Ao tratar da natureza dos RRS, Duval (2010) organiza duas classificações, os registros multifuncionais e os registros monofuncionais, aos quais estão relacionadas as representações discursivas e as representações não-discursivas, conforme apresentado no Quadro 9.

Quadro 9 – Quadro da classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático

	Representação Discursiva	Representação Não Discursiva
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua Natural Associações verbais (conceituais) Forma de raciocinar: argumentação a partir de observações, de crenças; dedução válida a partir de definições ou uso de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectiva. Apreensão operatória e não somente perceptiva; construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escrita: numéricas (binária, decimal, fracionária); algébricas; simbólicas (línguas formais). Cálculo.	Gráficos cartesianos. Mudanças de sistemas de coordenadas; interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2010, p. 14).

Observando o Quadro 9, temos dois tipos de registros: os registros multifuncionais e os monofuncionais. Nos primeiros, não se utilizam os algoritmos, os quais possuem uma representação discursiva (envolvem a língua natural, associações verbais e forma de raciocinar) ou uma representação não discursiva (envolvem as figuras geométricas). Já os registros monofuncionais utilizam os algoritmos, que também possuem uma representação discursiva (envolvem as escritas numéricas, algébricas e simbólicas, além do cálculo), ou representação não discursiva (envolvem os gráficos cartesianos). Portanto, para cada um dos registros monofuncionais ou multifuncionais, existe uma nova subdivisão de registros que são a representação discursiva ou a representação não discursiva.

Segundo Duval (1995), um sistema de representação semiótica é considerado um RRS quando permite três atividades cognitivas:

a) a formação de uma representação identificável;

b) o tratamento de um registro de representação;

c) a conversão de um registro de representação.

Quando identificamos na representação o objeto que ela representa, dizemos que ela é identificável. Segundo Duval (2009, p. 53), a formação de uma representação identificável "implica sempre uma seleção no conjunto de caracteres e determinações que queremos representar". Essa representação pode ser dada, por exemplo, na composição de um texto, no desenho de uma figura geométrica, na escrita de uma fórmula, de um gráfico, entre outros.

O tratamento de um registro de representação implica transformar a representação do objeto matemático conservando o próprio registro de origem, caracterizando, assim, uma transformação interna a um registro. Para Duval (2010, p. 16),

> os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo sistema de representação: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura seguindo critérios de conexidade e simetria.

Corroborando essa ideia, Henriques e Almouloud (2016, p. 469) definem tratamento de uma representação como "transformação desta em outra representação no mesmo registro no qual foi formada. O tratamento é, portanto, uma transformação interna num registro".

Já a conversão de um registro de representação em outro, segundo Duval (2009, p. 58), consiste em "transformar um registro de representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada, num registro de representação usando outro sistema de representação". Corroborando isso, Damm (2012, p. 180) explica que essa conversão ocorre "conservando a totalidade ou parte do objeto matemático em questão". Para Henriques e Almouloud (2016, p. 469), "a conversão de uma representação é a transformação desta representação em uma representação de outro registro".

Duval (2010) relata que o ato de mudar o sistema de representação de um objeto matemático é um mecanismo que leva à compreensão, uma vez que cada sistema semiótico tem suas particularidades e especificidades representacionais. Além disso, o autor, afirma que, para analisar atividades matemáticas, sob a luz do ensino e aprendizagem, se faz indispensável fazer uma abordagem cognitiva a respeito dos dois tipos de transformações de representações: os tratamentos e as conversões. Portanto, segundo o autor, a conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento.

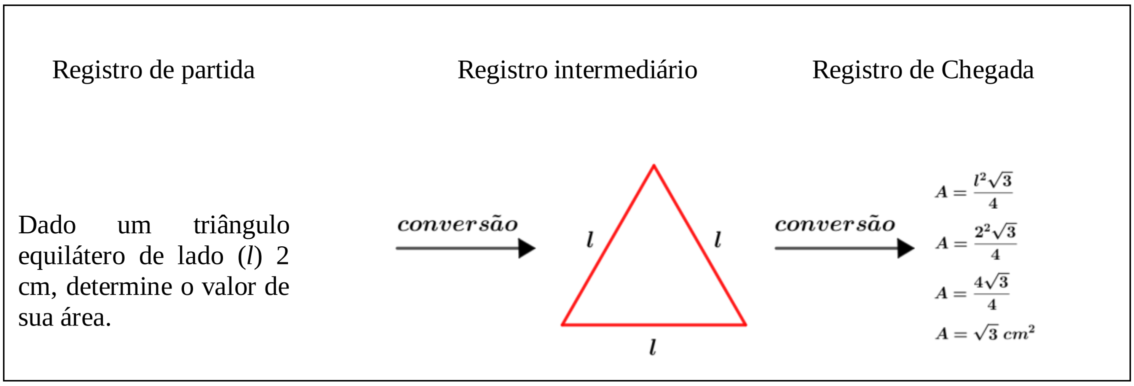
Os tratamentos são operações que abrangem transformações internas de registros e ocorrem no mesmo sistema semiótico de representação. Por exemplo, reconhecer um trapézio dentre seus diferentes tipos de representações figurais. Para Duval (2009, p. 57),

> um tratamento é uma transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema. O cálculo é um tratamento interno ao registro de uma escritura simbólica de algarismo e de letras: ele substitui novas expressões em expressões dadas do mesmo registro de escritura de números.

A partir dessas observações preliminares, consideramos que os tratamentos estão relacionados à forma e não ao conteúdo do objeto matemático. Duval (2009) apresenta que a conversão é uma transformação externa em relação ao registro da representação inicial, “a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos”. (p. 63).

A Figura 24 ilustra uma conversão em que sistemas de representações diferentes são mobilizados para representar o objeto área de um triângulo equilátero. Para esse exemplo, também utilizamos um triângulo equilátero de lado medindo 2 cm.

Figura 24 – Exemplo de conversão em RRS



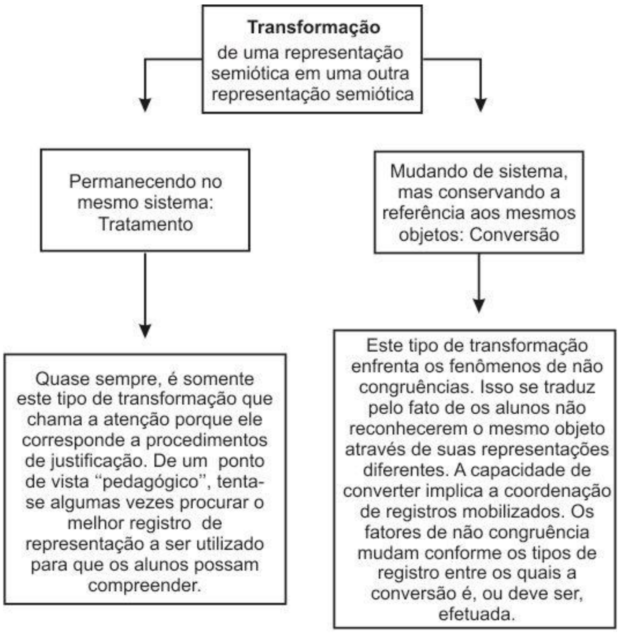
Fonte: elaborada pelo próprio autor.

O exemplo demonstra a transformação de um Registro da Língua Natural (RLN), registro de partida, para o Registro Figural (RF), registro intermediário, e do RF para o Registro

Simbólico (RS), registro de chegada. Como todas essas representações pertencem a sistemas semióticos diferentes, a movimentação de uma para a outra é praticável pela atividade cognitiva de transformá-las por intermédio das conversões.

A Figura 25 resume a diferença existente entre tratamento e conversão para a análise do funcionamento cognitivo da compreensão dos dois tipos diferentes de transformações de representações semióticas.

Figura 25 – Tipos de transformação de representações semióticas



Fonte: Duval (2010, p.15).

Duval (2010) alerta que um registro completa o outro, isto é, mesmo que um registro de representação retrate um dado objeto, ele será parcial, pois os conteúdos envolvidos em questão são diferentes. "Porque passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto". (p. 22).

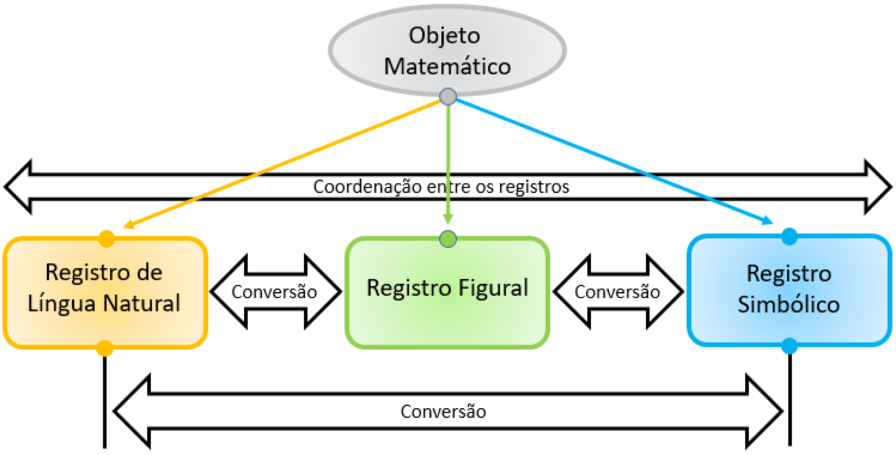
> Do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro. [...] Mas do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. (DUVAL, 2010, p. 16).

Para o autor, a compreensão do objeto estudado está ligada às relações estabelecidas entre os diferentes registros, compreendendo as particularidades de cada um. Por exemplo, um RLN não oferece as mesmas possibilidades de representação de uma expressão algébrica ou de um gráfico. Cada um desses registros possui uma característica própria. Entender essas características é um caminho para a compreensão do objeto como um todo. Portanto, percorrendo os diferentes registros associados a um objeto matemático, definimos a coordenação entre eles. Segundo Henriques e Amouloud (2016, p. 470), a coordenação "[...] é a manifestação da capacidade do indivíduo em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos".

Segundo Damm (2012), toda a comunicação estabelecida na Matemática faz-se com base em representações, em que os objetos estudados podem ser conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes formas de representações semióticas. Ela destaca que a Matemática trabalha com objetos abstratos, isto é, não são objetos diretamente perceptíveis, necessitando para sua apreensão o uso de outras formas de representações, sejam essas, por exemplo, símbolos, tabelas, gráficos, algoritmos ou desenhos, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento matemático. Entretanto, para compreensão da Matemática, é fundamental que o aluno faça a distinção entre o objeto matemático e sua representação.

Diante do exposto, podemos dizer que os RRS, segundo Duval (2010), distingue-se das demais por considerar a importância da mobilização de diferentes registros de representação para a apreensão de um objeto matemático: o RLN, o RF e o RS[16], os quais, juntamente com as respectivas conversões, serão explorados na análise dos dados da pesquisa (Figura 26).

Figura 26 – Tipos de registros utilizados na pesquisa



Fonte: elaborada pelo próprio autor.

Perante o apresentado, interessamo-nos em investigar, por meio das atividades elaboradas, a construção de saberes de Geometria Fractal, na qual os RRS fornecerão um

[16] Para uma melhor organização, optamos por agrupar os registros algébricos e numéricos, que possam aparecer nessa pesquisa, junto aos registros simbólicos.

referencial estruturado da análise do funcionamento cognitivo dos alunos envolvidos na pesquisa diante de uma situação de ensino envolvendo esse objeto matemático.

4 AS TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Vivemos em uma sociedade em que o indivíduo tem acesso aos mais variados meios e formas de tecnologias. Não podemos deixar de lado essa realidade, pois, segundo Almeida (2000, p. 77), o educador deve "[...] promover a aprendizagem do aluno para que ele possa construir o conhecimento dentro de um ambiente que o desafie e o motive para a exploração, a reflexão, a depuração de ideias e descobertas [...]" e o uso das TD vem ao encontro dessa realidade.

Optamos por utilizar o termo TD pautando em dois autores, Almeida (2007) e Valente (2005). Para Almeida (2007, p. 3), TD "[...] é um conceito polissêmico que varia seguindo o contexto e a perspectiva teórica do autor, podendo ser vista como: artefato, cultura, atividade com determinado objeto, processo de criação, conhecimento sobre uma técnica e seus respectivos processos". Já para Valente (2005, p. 23) as TD são o resultado da concentração de "diferentes mídias em um só artefato", como por exemplo, o vídeo, o computador, o celular, realidade virtual, entre outros.

As mais variadas formas de tecnologias estão presentes em nossa cultura e em nosso cotidiano, criando novas possibilidades de expressão e comunicação, cabendo a nós, professores, sabermos escolher e estudar sua aplicação na sala de aula.

A realidade tecnológica está presente em nosso cotidiano, podendo nos apoderarmos de metodologias para a atuação profissional. Lèvy (1995, p. 9) afirma que a Informática é um "campo de novas tecnologias intelectuais, aberto, conflituoso e parcialmente indeterminado". Pensando por esse viés, o uso das TD passa a ser uma realidade e cabe aos professores refletirem sobre possibilidades dessa inserção em suas aulas. Colaborando com essa ideia, Perrenoud (2002, p. 89) relata que: "as reformas atuais confrontam os professores com dois desafios: reinventar sua escola enquanto local de trabalho e reinventar a si próprios enquanto pessoas e membros de uma profissão". Dessa forma, o uso das TD, em especial o emprego do computador, requer das instituições de ensino e do professor novas posturas para a realidade.

Acreditamos que a utilização de recursos tecnológicos digitais, especialmente na Educação Matemática, deva ser pensada como um recurso que possa melhorar os processos de ensino e aprendizagem. De acordo com Bacich, Neto e Trevisani (2015, p. 41), "o uso de tecnologias digitais no contexto escolar propicia diferentes possibilidades para trabalhos educacionais mais significativos para os seus participantes". Mas, para essa ocorrência, os educadores devem estar constantemente pesquisando e atualizando suas metodologias de ensino. Para Kenski (2012), as TD não mudam apenas as formas de produção, organização e difusão da informação, mas a maneira como percebemos e entendemos o mundo. Corroborando essa ideia, Gravina e Basso (2012, p. 12) relatam que:

> nossas rotinas de sala de aula também deveriam incorporar, cada vez mais, as tecnologias, pois elas também influenciam nas nossas formas de pensar, de aprender, de produzir. O "giz e quadro-negro" é uma tecnologia que teve seu momento de impacto no processo educativo, no século XIX. Com o crescimento das cidades, decorrente da Revolução Industrial, a necessidade da educação em massa consolida a organização da sala de aula em grandes grupos com atenção voltada para a "fala" do professor. [...]

Ainda, segundo os dois autores, o uso das TD é um excelente recurso metodológico nas aulas de Matemática, pois pode disponibilizar ferramentas interativas que criam objetos dinâmicos e manipuláveis, contribuindo no processo de aprendizagem e desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Para esta pesquisa, utilizamos o computador, destacando que ele não é um instrumento que ensina, mas apenas uma ferramenta que auxilia o aluno a desenvolver algo. Sendo assim, o aprendizado deverá ocorrer por intermédio do computador, quando o aluno realizar alguma tarefa designada pelo professor. Gravina (2001, p. 4-5) declara que:

> tecnologia informática apresenta-se como um meio a dar suporte ao pensar, possibilitando "mudar os limites entre o concreto e o formal", já que "o computador permite criar um novo tipo de objeto – os objetos "abstratos-concretos"; concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados; abstratos por se tratarem de realizações feitas a partir de construções mentais". Assim, a tecnologia informática transmuta-se em tecnologia da inteligência – termo cunhado por LEVY – abarcando a possível versatilidade e até mesmo a ampliação dos funcionamentos cognitivos.

O uso dessa tecnologia deve auxiliar o enriquecimento do ambiente educacional, possibilitando a construção de conhecimentos por meio de uma ação ativa, crítica e criativa, tanto por parte dos estudantes, como dos educadores. Papert (1994) defende o uso do computador por acreditar que ele é mais eficaz no desenvolvimento cognitivo, além de acelerar a passagem do pensamento infantil para o adulto. Para Oliveira *et al*. (2001, p. 32),

> o uso da informática na educação exige em especial um esforço constante dos educadores para transformar a simples utilização do computador numa abordagem educacional que favoreça efetivamente o processo de conhecimento do aluno. Dessa forma, a sua interação com os objetos da aprendizagem, o desenvolvimento de seu pensamento hipotético dedutivo, da sua capacidade de interpretação e análise da realidade tornam-se privilegiados e a emergência de novas estratégias cognitivas do sujeito é viabilizada.

Acreditamos que seja importante a familiarização do aluno com o computador, pois pode gerar uma série de oportunidades de expansão dos conhecimentos, além de promover sua autonomia. Segundo Lèvy e Moraes (2001, p. 132), "é na escola que o indivíduo tem a oportunidade do aprendizado interativo e cooperativo, sendo o principal canal de acesso para a inclusão e cidadania". Além disso, os autores descrevem que o computador propicia, atualmente, a aprendizagem, ao mesmo tempo, do professor e do aluno, promovendo uma atualização contínua de seus saberes pedagógicos. Porém, com a introdução das TD, Tarja (2001, p. 114) salienta que

> o professor deve estar aberto para mudanças, principalmente em relação à sua nova postura: a de facilitador e coordenador do processo de ensino e aprendizagem; ele precisa aprender a aprender, a lidar com as rápidas mudanças, ser dinâmico e flexível. Acabou a esfera educacional de detenção do conhecimento, do professor "sabe tudo".

Ainda, segundo o autor, é necessária a capacitação do educador desde o início de sua formação acadêmica, para que, quando surgirem obstáculos, esse profissional seja capaz de superá-los. Reforçando esse pensamento, Porto (2006, p. 44) sugere ser fundamental que os ambientes escolares insiram as "[...] informações presentes nas tecnologias as próprias ferramentas tecnológicas, articulando-as com os conhecimentos escolares e propiciando a interlocução entre os indivíduos". Nessa perspectiva, fica evidenciado o papel do educador para incorporar na escola as inovações existentes na sociedade. Para Borba e Penteado (2010, p. 66),

> aspectos com incerteza e imprevisibilidade, geradas num ambiente informatizado, podem ser vistos como possibilidades para desenvolvimento: desenvolvimento do aluno, desenvolvimento do professor, desenvolvimento das situações de ensino e aprendizagem.

Entretanto, o computador é apenas uma máquina que depende do indivíduo para fazer uma programação e realizar certa atividade. Com esse intuito, escolhemos um *software* de GD para realizar a pesquisa, o *GeoGebra*. O termo GD é entendido como um "ambiente oferecido por *softwares* que possibilitam manipular construções e objetos geométricos na tela do computador" (PEREIRA, 2012, p. 26). Na perspectiva de utilização da GD, Gravina (1996, p. 13) destaca que:

> quanto às atitudes dos alunos frente aos processos de aprender: experimentam; criam estratégias; argumentam e deduzem propriedades matemáticas. A partir da manipulação concreta, "o desenho em movimento", passam para a manipulação abstrata atingindo níveis mentais superiores da dedução e rigor, e dessa forma entendeu a natureza do raciocínio matemático.

Segundo Bairral (2009, p. 26), a GD apresenta contribuições como "[...] a interação do sujeito com a TIC[17]; a descoberta mediante tentativa e erro; a observação, o levantamento e verificação de conjecturas, bem como as diferentes formas (não estáticas) de representação do

[17] TIC – Tecnologias da Informação e Comunicação.

objeto em estudo”. Também, podemos destacar outros pontos positivos como a facilidade na construção geométrica, dinamicidade na visualização e na verificação de propriedades.

Para Gravina (1996), o uso de *softwares* de GD pode melhorar o processo de aprendizagem dos alunos, uma vez que eles partem de um processo estático, apresentado pelos livros didáticos e o quadro-negro, e chegam a um processo de construção do conhecimento, por meio de explorações, conjecturas, argumentações e demonstrações. Além disso, ela apresenta dois aspectos didáticos importantes para o uso dos *softwares* de Geometria.

> Dois são os principais aspectos didáticos para a utilização dos programas: a) os alunos constroem os desenhos dos objetos ou configurações, quando o objetivo é o domínio de determinados conceitos através da construção; b) recebem desenhos prontos, projetados pelo professor, sendo o objetivo as descobertas de invariantes através da experimentação e, dependendo do nível da escolaridade dos alunos, num segundo momento, trabalham as demonstrações dos resultados obtidos experimentalmente. (GRAVINA, 1996, p. 7).

Borba, Silva e Gadanidis (2014) destacam que "[...] é fundamental explorarmos não somente os recursos inovadores de uma tecnologia educacional, mas a forma de uso de suas potencialidades com base em uma perspectiva educacional". Desse modo, ao utilizarmos um *software* de GD, os objetos matemáticos ganham dinamicidade e dependência entre as representações, fazendo com que o aluno desenvolva um olhar sobre seu processo de aprendizagem.

Nesse sentido, Melo e Silva (2013, p. 14) afirmam que “o *GeoGebra* proporciona condições que permitem a elaboração de situações onde o próprio aluno constrói conhecimentos”, corroborando com a ideia de que essa é uma ferramenta capaz de propiciar mais autonomia aos alunos. Ele é um *software* livre[18] e de código aberto[19], voltado para a aprendizagem de Matemática, estabelece uma relação entre a Geometria (*Geo*) e a Álgebra (*Gebra*). É considerado de GD, pois possibilita a movimentação de entes geométricos (por exemplo, pontos, retas, segmento de reta, entre outros), mantendo as propriedades geométricas em sua construção. Foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburg, Áustria e, atualmente, conta com colaboradores de várias partes do mundo, envolvidos no desenvolvimento e melhorias desse *software*. O *GeoGebra* é gratuito e pode ser encontrado em <www.geogebra.org>, podendo ser utilizado de forma *online*, diretamente na página do programa na rede, ou *off-line*, com a instalação no computador. (PERLIN, 2010). Ainda, existe a possibilidade de ser instalado e utilizado em dispositivos móveis, como *tablets* e celulares.

[18] *Software* livre é uma expressão utilizada para designar qualquer programa de computador que pode ser executado, copiado, modificado e redistribuído pelos usuários gratuitamente.
[19] O código aberto é um termo que se refere a um *software* cujo código está disponível para download por qualquer pessoa e a uma filosofia de criação de aplicativos voltada para a colaboração entre desenvolvedores.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Neste capítulo, descrevemos a natureza da pesquisa na busca de atingir os objetivos propostos, assim como definimos os procedimentos para a escolha dos participantes, a elaboração dos instrumentos de coleta das informações e a realização da análise dos dados.

5.1 A natureza da pesquisa

A metodologia de pesquisa adotada para este estudo é a qualitativa de cunho interpretativo. Segundo Goldenberg (1999), a preocupação do pesquisador, em uma pesquisa qualitativa, é com o aprofundamento da compreensão do fenômeno e não com sua representatividade numérica. Ao empregar a abordagem qualitativa, almejamos compreender o modo como os alunos, em uma situação específica, pensam, agem e buscam a generalização de conteúdos matemáticos. Já na concepção de Garnica (2004, p. 86),

> o adjetivo "qualitativa" estará adequado às pesquisas que reconhecem: (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese *a priori*, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, se vale de suas perspectivas e filtros eventuais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configurados; (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas.

A esse respeito, Bogdan e Biklen (1994) relatam que as investigações qualitativas apresentam algumas características fundamentais, como o interesse maior pelo processo do que pelos resultados ou produtos, a importância do significado atribuído pelos sujeitos às suas ações e a descrição minuciosa. Nesse sentido, os autores afirmam que "a abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para construir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo". (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 49). Eles destacam cinco características fundamentais para uma pesquisa qualitativa.

Característica 1 – O ambiente natural como fonte de dados e o pesquisador como instrumento fundamental de coleta de dados. É possível coletar os dados com a utilização de equipamento de vídeo ou áudio. Entretanto, muitos se limitam a utilizar tão somente um caderno e caneta para anotações. Mesmo quando utilizam o equipamento, os dados são recolhidos em situação real e complementados pela informação obtida por meio do contato direto.

Em nosso caso, o contexto investigativo compreende discentes de um curso de licenciatura em Matemática do IFFar – Campus Alegrete. A coleta de dados se dá por meio dos registros realizados por eles. Além disso, também utiliza-se diário de campo do pesquisador.

Característica 2 – A investigação qualitativa é descritiva. Os dados coletados não são em forma de números, e sim de palavras ou imagens, as quais podem compreender descrições de entrevistas, notas de campo, fotos, vídeos, entre outros instrumentos.

Nesta tese, os dados qualitativos compreendem os escritos realizados pelos discentes e/ou as construções realizadas no *GeoGebra*. Salientamos que poderão ocorrer algumas correções gramaticais ou mesmo textuais, mediante a aprovação do sujeito da pesquisa.

Característica 3 – Os pesquisadores estão preocupados com o processo, e não simplesmente com os resultados e o produto. A proximidade dos pesquisadores com o campo investigativo proporciona um acompanhamento constante do objeto investigado. Dessa forma, alguns detalhes considerados irrelevantes podem ser percebidos e evidenciados ao longo da pesquisa como elementos responsáveis por determinados acontecimentos.

Em nosso caso, após realizado um extenso levantamento bibliográfico na temática abordada na revisão de literatura (Geometria Fractal), seguido de reflexões e de produções textuais dos autores pesquisados, a coleta de dados por meio do material escrito do discente deverá ser lenta e criteriosa, para que os cuidados metodológicos necessários a esse tipo de coleta sejam respeitados.

Característica 4 – Os pesquisadores têm de analisar seus dados indutivamente. Ou seja, partir de uma situação particular para um plano geral.

Para esse trabalho, na medida em que os dados apresentados pelos discentes forem agrupados, classificados e relacionados ou inter-relacionados, podem surgir novas interpretações ou mesmo novas questões de pesquisa, as quais não foram anteriormente pensadas, demonstrando a diversidade dessa abordagem metodológica.

Característica 5 – O significado é a preocupação essencial na abordagem qualitativa. Existe uma preocupação com os modos como os indivíduos dão sentido às suas vidas, como experimentam, interpretam e a maneira como eles próprios estruturam o mundo social em que vivem.

No material entregue aos sujeitos, conduzimos para que eles construíssem seu próprio conhecimento, por meio de uma sequência de atividades, deixando o pesquisador na posição de mediador. Além disso, realizaram-se devolutivas aos pesquisados, possibilitando alterações julgadas necessárias para um melhor entendimento, caso necessário. Essas devolutivas ocorreram durante a semana após a realização da oficina de forma individual. Após esse procedimento os dados podem ser analisados.

Os autores Goldenberg (1999), Garnica (2004) e Bogdan e Biklen (1994) reforçam a importância do contato direto com o sujeito da pesquisa, pois é por meio dele que se pode complementar os dados recolhidos. Portanto, nesse sentido, frequentar o ambiente de pesquisa tem sua relevância para que se conheça o contexto em que ela está inserida, o que é o caso presente, no qual o pesquisador está inserido no contexto como professor efetivo da instituição onde se realiza a pesquisa, sendo conhecedor dos sujeitos envolvidos.

5.2 O contexto da pesquisa e os investigados

A pesquisa foi desenvolvida com 12 acadêmicos do curso de licenciatura em Matemática do IFFar – Campus Alegrete, localizado no município de Alegrete, no estado do Rio Grande do Sul. O referido curso possui atualmente – segundo semestre de 2018 – 72[20] estudantes regularmente matriculados e seu funcionamento se dá no período noturno.

A escolha dessa Instituição se deu em decorrência da atuação do pesquisador como professor, além de estar envolvido ministrando disciplinas desde o início do curso, em 2011, tais como: Tecnologias da informação e da comunicação; Tecnologia da informação I; Tecnologia da informação II; Estatística aplicada à educação; Estatística básica; Laboratório de Educação Matemática I; Metodologia para o ensino da Matemática II; Estágio curricular supervisionado I; Estágio curricular supervisionado II; Estágio curricular supervisionado III; Estágio curricular supervisionado VI; Álgebra linear I, Prática enquanto componente curricular III; Prática enquanto componente curricular VI; Prática enquanto componente curricular V; e Matemática discreta.

Embora o pesquisador já conheça os licenciandos do curso, como descrito anteriormente, por ministrar tais disciplinas, não estará mais atuando somente como professor, mas como professor/pesquisador e seus alunos como sujeitos da pesquisa.

Embora já tenhamos realizado o contato com a direção da Instituição, a qual já sinalizou, verbalmente, autorização para o desenvolvimento da pesquisa, sendo desenvolvida na forma de Projeto de Ensino, também, salientamos, que todos os sujeitos assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (ver Apêndice 2). Esse documento manifesta total e irrestrita concordância do sujeito em participar da pesquisa, voluntariamente, após explicação

[20] Dados fornecidos pela Secretaria de Registros Acadêmicos do IFFar – Campus Alegrete.

completa e pormenorizada sobre sua natureza, objetivos, metodologia, coleta de dados, benefícios e riscos que possa acarretar.

5.3 Atividades propostas e instrumentos para coleta de informações

As atividades desenvolvidas foram realizadas no turno inverso das aulas dos discentes, à tarde, pois a aplicação não fez parte de nenhuma disciplina em que estivessem matriculados.

O IFFar possui regulamentação própria, por meio da Resolução CONSUP Nº 046/2016, de 26 de julho de 2016, a qual regulamenta os Projetos de Pesquisa, Ensino e Extensão e dá outras providências. No Capítulo I, referente aos Projetos de Ensino, fazendo um recorte do artigo 4º, apresentamos alguns objetivos:

> I - Estimular práticas com foco na permanência e no êxito dos Estudantes;
> II – Contribuir para o aprimoramento e a qualidade dos cursos;
> III – Impulsionar o desenvolvimento de atividades de ensino articuladas com a pesquisa e a extensão;
> IV – Estimular práticas que ampliem o universo de vivências dos Estudantes para além daquelas já propostas no projeto pedagógico do curso; [...] (BRASIL, 2016, p. 4).

A pesquisa se desenvolveu fora da sala de aula regular, com conteúdo não constante do PPC e somente com a participação dos acadêmicos. Tendo o intuito de complementação de sua formação, elaboramos um Projeto de Ensino (ver Apêndice 3), que foi encaminhado e aprovado pela Direção de Ensino da Instituição, órgão responsável pelo registro dessas atividades.

O registro se faz necessário para a certificação dos acadêmicos, os quais poderão, se o desejarem, contar como horas em Atividades Acadêmica-cientifico-culturais (ACC). Essas têm por objetivo contribuir na "formação ampla e diversificada do licenciando, a partir de vivências e experiências realizadas para além do âmbito do curso ou da instituição, valorizando a pluralidade de espaços educacionais e incentivando a busca pelo conhecimento". (ALEGRETE, 2014, p. 37).

Pensando nas atividades do Projeto de Ensino, planejamos a realização de oito encontros, um por semana, com duração de duas horas e meia cada, totalizando 20 horas. Em todos os encontros, utilizamos as TD, nesse caso o *GeoGebra*, no Laboratório de Informática da Instituição, o qual dispõe de 25 computadores.

Quando convidamos os alunos e explicamos como decorreria o Projeto de Ensino, eles sugeriram que fossem realizados encontros com duração de cinco horas, porém explicamos que talvez fosse muito cansativo todo esse tempo. Eles justificaram essa necessidade, pois, pela distância do campus à cidade de Alegrete, não teriam como retornar às suas casas e voltar à noite para a aula. Então, acordamos que o primeiro e segundo encontro seriam de duas horas e meia e ao final do segundo encontro faríamos uma avalição para verificar a possibilidade de fazermos os próximos com duração de cinco horas. Após a finalização do segundo encontro, os participantes solicitaram que os próximos encontros fossem agrupados e tivessem duração de cinco horas.

No Quadro 10, apresentamos as atividades que foram contempladas durantes a realização do Projeto de Ensino, o qual dividimos em quatro oficinas.

Quadro 10 – Atividades desenvolvidas durante o Projeto de Ensino

1º encontro	Oficina 1 – Fractal hexagonal de Dürer.
2º encontro	Oficina 1 – Fractal hexagonal de Dürer.
3º encontro	Oficina 2 – Dimensão Fractal.
4º encontro	Oficina 3 – Curva de Peano.
5º encontro	Oficina 4 – Tetraedro de Sierpinsky.

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

A Oficina 1 (ver Apêndice 4) foi dividida em dois encontros. Teve como objetivos: desenvolver a parte histórica do fractal de Dürer; construir o fractal hexagonal de Dürer utilizando o *GeoGebra*; explorar as relações geométricas envolvidas no fractal hexagonal de Dürer; e chegar à elaboração de uma definição de fractal.

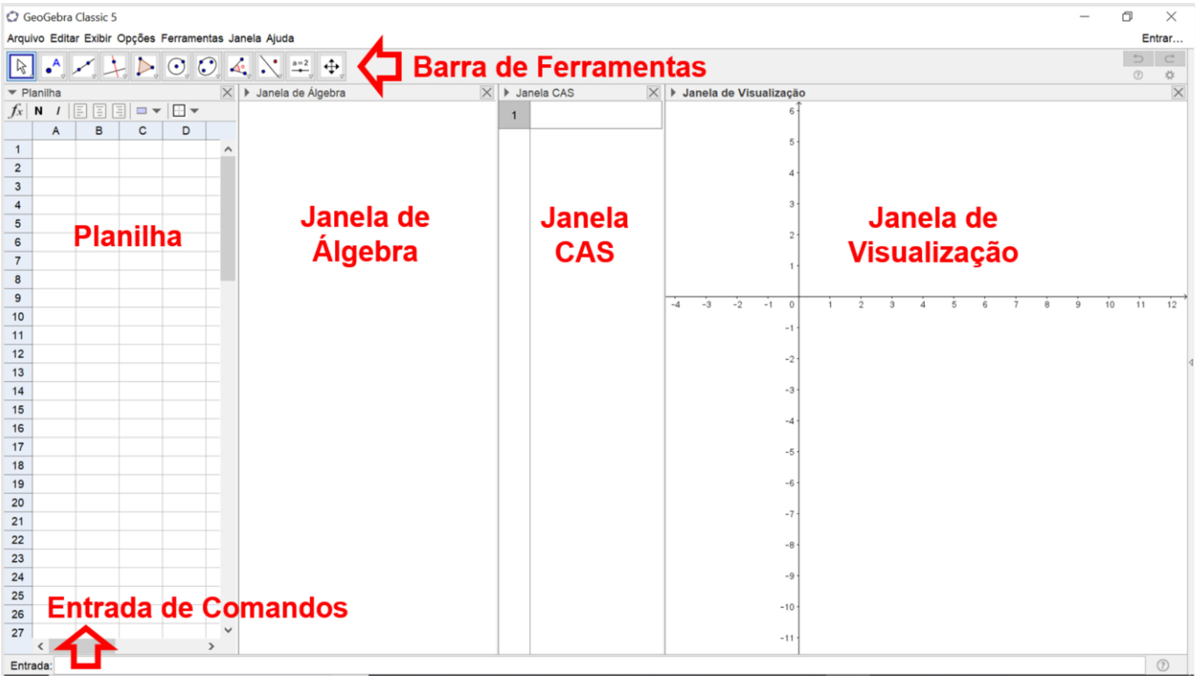
O 1º encontro foi dividido em três momentos. No primeiro, aconteceu uma breve explanação aos acadêmicos, sujeitos da pesquisa, sobre o trabalho fazer parte das atividades práticas de uma tese de doutoramento, apresentando os objetivos, metodologia adotada e como seria realizada a coleta e análise dos dados. Após esse momento, todos aceitaram participar e assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Então, passamos para o segundo momento, que foi a realização de um pré-teste, com o objetivo de verificar as concepções dos participantes sobre fractal. Após essa etapa, partimos para o terceiro momento, que foi a construção do fractal hexagonal de Dürer, no *GeoGebra*.

No 2º encontro, foi realizada a exploração da construção, por meio de observação, no qual foram calculadas as áreas das regiões hexagonais dos níveis 0, 1, 2 e 3 até chegarmos a uma conjectura para o nível *n*. Após esse momento, foram apresentados outros fractais, como o Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor, Curva de Koch e os Fractais de Sierpinsky. Finalizamos essa etapa com a solicitação aos acadêmicos da escrita de uma definição de fractal, realizada a partir do que havia sido exposto.

Já a Oficina 2 (ver Apêndice 5) foi realizada em um único encontro, conforme já mencionado anteriormente, por solicitação dos acadêmicos. Esta teve como objetivos: reconhecer fractais a partir de sua estrutura; conhecer a cronologia de fractais e alguns fractais clássicos; apresentar a fórmula da dimensão fractal; e calcular a dimensão de alguns fractais.

Para o 3º encontro, tivemos dois momentos. O primeiro consistiu em demonstrar, algebricamente, o cálculo da dimensão fractal. Já no segundo, calculamos dimensões dos principais fractais, usando a Planilha e Janela *CAS*[21] do *GeoGebra*. Na Figura 27, apresentamos as áreas de trabalho do *GeoGebra*, a serem exploradas.

Figura 27 – Áreas de trabalho do *GeoGebra*



Fonte: elaborada pelo próprio autor.

Para a Oficina 3 (ver Apêndice 6), foi realizada a exploração do fractal Curva de Peano. Esta teve como objetivos: desenvolver a parte histórica da Curva de Peano; construir a Curva de Peano utilizando o *GeoGebra*; e explorar relações geométricos envolvidas na Curva de Peano.

No 4º encontro, tivemos também dois momentos. No primeiro foi realizada a construção da Curva de Peano, que é um objeto matemático construído a partir de um processo recursivo

---

[21] A Janela *CAS* (*Computer Algebra System*) é uma das áreas de trabalho do *GeoGebra*, assim como a Janela de Álgebra, Janela de Visualização e Planilha.

infinito, com o auxílio do *GeoGebra*. Em seguida, no segundo momento, realizamos as explorações geométricas: soma do comprimento dos segmentos e área da superfície formada na Curva de Peano dos níveis 0, 1, 2 e 3 até chegarmos a uma conjectura para o nível *n*. Ao final dessa exploração, os discentes deveriam chegar à conclusão que a soma do comprimento dos segmentos para um nível *n* tenderia a infinito e a área da superfície para um nível *n*, tenderia a ser a área de um superfície de um quadrado.

Para finalizar, o último encontro, Oficina 4 (ver Apêndice 7), foi destinado ao estudo do Tetraedro de Sierpinsky, o qual teve por objetivos: construir o Tetraedro de Sierpinsky utilizando o *GeoGebra*; e explorar relações geométricas envolvidas no Tetraedro de Sierpinsky.

Nesse 5º encontro, estudamos algumas propriedades geométricas do fractal denominado de Tetraedro de Sierpinsky, que é um objeto matemático construído a partir de um processo recursivo infinito, com o auxílio da Janela de Visualização e Planilha do *GeoGebra*. Dividimos em duas partes tal construção. A primeira foi destinada à construção do referido fractal, e a segunda envolveu explorações geométricas como a soma das medidas dos comprimento das arestas, somas das áreas e, finalizando, a soma dos volumes dos níveis 0, 1, 2 e 3 até chegar a uma conjectura para o nível *n*. Ao final dessa exploração, os participantes deveriam concluir que a soma das medidas dos comprimentos das arestas para um nível *n* tenderia a infinito; a soma das áreas da superfície para um nível *n* tenderia a ser constante; e o soma dos volumes para um nível *n* tenderia para zero.

Foi planejado um pós-teste, realizado depois de seis meses do encerramento das atividades, com o intuito de verificar se houve aprendizagem ou entendimento sobre o que é um fractal.

A partir das atividades apresentadas no Quadro 10 e explicitadas anteriormente, elaboramos uma sequência de atividades, as quais possibilitaram a coleta dos dados por meio das produções escritas dos acadêmicos. O envio das construções realizadas no *GeoGebra* foi encaminhado para o e-mail do pesquisador. Cada uma foi salva, em seu computador, para posterior análise. Salientamos que os acadêmicos já possuem conhecimento sobre os comandos do *GeoGebra*. Segundo Gil (2008), essa é umas das técnicas da investigação qualitativa, pois não estamos visando na representação numérica, mas sim com o aprofundamento da compreensão do fenômeno analisado. Também se fez o uso do diário de campo, o qual se constitui em mais um instrumento para análise das atividades aplicadas. Foi organizado de maneira a conter, sempre que necessário, transcrições de diálogos com os discentes antes, durante ou depois dos encontros. Para melhor organizar e facilitar a análise, foi dividida em duas partes, uma descritiva e outra reflexiva, abrangendo as observações e/ou impressões pessoais do pesquisar a respeito de cada encontro.

Portanto, apoiando a ideia de Bogdan e Biklen (1994) de que pesquisa qualitativa é descritiva, os instrumentos para a obtenção dos dados, que julgamos necessários, serão obtidos a partir de:

a) observação direta e anotações do pesquisador em seu diário de campo;

b) registros escritos pelos acadêmicos, oriundos da aplicação da sequência de atividades;

c) figuras realizadas no *GeoGebra*.

Para Yin (2005), o emprego de múltiplas fontes de dados, (no nosso caso, produções escritas dos acadêmicos, diário de campo do pesquisador e construções no *GeoGebra*) permite ter um conjunto mais variado para a realização de uma análise fidedigna. O uso desses instrumentos possibilita o cruzamento de informações, se necessário, o que permite, por um lado, garantir os diferentes olhares dos investigados no estudo e, por outro, ao pesquisador obter outras perspectivas do mesmo fenômeno, criando situações para uma melhor análise dos dados.

5.4 Procedimentos de análise

Em nossa tese, temos como objetivo investigar possibilidades de inserção de noções de Geometria Fractal nos cursos de licenciatura em Matemática do IFFar com o uso das TD. Sendo assim, considerando que, no desenvolvimento das atividades propostas, poderão surgir diferentes registros de representação para um determinado objeto matemático, buscamos nos RRS o aporte teórico para guiar nossa pesquisa. Complementando essa ideia, Duval (2010) argumenta que, para haver aprendizagem matemática, o aluno deve saber coordenar as diferentes representações provenientes de diversos registros. Corroborando isso, Damm (2010, p. 175) salienta que “[...] o ensino/aprendizagem de qualquer conhecimento está estreitamente vinculado à compreensão de diferentes registros de representação”.

Duval (2012) destaca que só iremos aprender matemática quando a compreendermos. O autor considera a compreensão sob dois pontos de vista diferentes, o matemático e o cognitivo. “Do ponto de vista matemático, a compreensão começa com uma explicação que se baseia na utilização de propriedades matemáticas”. (DUVAL, 2012, p. 309). O ponto de vista matemático é aquele em que é dada ênfase aos registros dos conteúdos e procedimentos da resolução do aluno. Ainda, segundo Duval (2012, p. 310), “[...] o desenvolvimento da compreensão no aprendizado se reduz a um processo de conceituação [...]”, ou seja, relativo à construção do conhecimento e ao uso adequado de cada propriedade do objeto matemático.

No segundo ponto de vista, o cognitivo, segundo Duval (2012, p. 310), “[...] a compreensão é guiada pelo modo de acesso aos objetos estudados”. Entretanto, esse acesso aos objetos matemáticos é conduzido pela produção de representações semióticas, conversões entre elas e de sua coordenação. Ainda, segundo o autor, a compreensão em matemática está intrinsicamente ligada, antes de tudo, ao reconhecimento dos objetos matemáticos representados.

Pensando nesses dois pontos de vista apresentados por Duval (2012), as atividades propostas nas oficinas serão analisadas a partir do desenvolvimento das respostas apresentadas pelos acadêmicos, sendo dada ênfase nos tratamentos e conversões, além da coordenação dos diferentes tipos de RRS.

Assim, estruturamos a análise das atividades das oficinas levando em consideração os aspectos matemáticos e cognitivos, pretendendo verificar se o acadêmico compreende não somente o que a representação semiótica representa, mas como ela representa. Dessa forma podemos conjecturar sobre a compreensão da matemática e do problema no desenvolvimento das atividades que envolvem noções de Geometria Fractal.

Para Bogdan e Biklen (1994), a análise dos dados pode ser caracterizada como um processo de busca e de organização de materiais. Nessa perspectiva, a (metodologia de) análise das atividades propostas ocorreu a partir dos três instrumentos de coleta: diário de campo, registros escritos dos alunos e construções no *GeoGebra*.

> A análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros. Em última análise, os produtos finais da investigação constam de livros, artigos, comunicações e planos de ação. A análise de dados leva-o das páginas de descrições vagas até estes produtos finais. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 205).

Pensando por esse viés, apoiamo-nos no método qualitativo quando buscamos analisar os procedimentos de resolução dos alunos em relação aos diferentes tipos de transformações (tratamento ou conversões) das representações semióticas. Lembrando que, segundo Bogdan e Biklen (1994, p. 11), a pesquisa qualitativa é aquela “[...] que enfatiza a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das percepções pessoais”.

Cabe destacar que nem sempre o processo de aprendizagem pode ser facilmente quantificado. Como mencionado anteriormente, essa é uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo que envolve a observação, registros escritos e construções realizadas no *GeoGebra* pelos acadêmicos, além de seus relatos registrados no diário de campo. Para Fiorentini e Lorenzato (2009), é no diário de campo “[...] que o pesquisador registra observações de fenômenos, faz descrições de pessoas e cenários, descreve episódios ou retrata diálogos". (p.118).

Para a realização da análise dos dados coletados nas oficinas, categorizamos as respostas dos acadêmicos nos seguintes aspectos:

- resposta correta;

- resposta parcialmente correta, quando faltou alguma informação para ser considerada correta;

- resposta errada, em que o acadêmico não chegou à resposta correta ou parcialmente correta.

Segundo Moraes e Galiazzi (2011, p. 22), "[...] a categorização é um processo de comparação constante entre as unidades definidas no momento inicial de análise levando a agrupamentos de elementos semelhantes. Conjunto de elementos de significação próximos constituem categorias."

Portanto, obtidos os dados a partir da aplicação das atividades propostas e manipulados (categorizados), o passo seguinte foi a análise e interpretação deles, ambas se constituindo a parte principal de nossa pesquisa. Posteriormente, verificamos se o problema da pesquisa foi respondido e se seus objetivos foram alcançados.

6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, apresentamos a análise e discussão dos resultadas desde o pré-teste, passando pelas oficinas 1, 2, 3 e 4 e finalizando com o pós-teste. Antes de iniciarmos a fase de aplicação das atividades, como a pesquisa envolve seres humanos, foi realizado o cadastro junto à Plataforma Brasil[22], para que o Comité de Ética em Pesquisa da Universidade Franciscana autorizasse a realização do estudo com os acadêmicos do curso de licenciatura em Matemática do IFFar – Campus Alegrete. Esse encaminhamento foi realizado após a banca de qualificado do Projeto de Tese, em fevereiro de 2019, sendo aprovado na primeira quinzena de março desse ano.

Após essa aprovação, na segunda quinzena de março, realizamos uma sondagem de interesse junto aos acadêmicos do 3°, 5° e 7° semestres, com o intuito de identificar qual o melhor dia da semana para a realização das atividades. Obtivemos 31 interessados, sendo escolhido pela maioria (18 discentes) a quarta-feira à tarde como melhor dia e turno para a execução do projeto.

Posteriormente a essa sondagem, na semana seguinte, entramos em contato com cada um dos acadêmicos, comunicando que o curso seria realizado às quartas-feiras dos meses de abril e maio. Dos 18 alunos que escolheram quarta-feira, dois não poderiam mais frequentar, porém, entrando em contato com os demais alunos que escolheram outros dias, quatro discentes demonstraram interesse em participar na quarta-feira. Como a proposta inicial do Projeto de Ensino previa no máximo 25 discentes, ficamos com 20 participantes nessa pré-inscrição. A escolha desse número deve-se à infraestrutura dos Laboratórios de Informática da Instituição, os quais possuem 25 computadores. No entanto, no decorrer da semana, mais três acadêmicos, que não estavam no dia da conversa com as turmas, demonstraram interesse em participar. Logo, chegou-se ao total de 23 discentes para a realização do curso.

Optamos por não convidar a turma de 1° semestre, pois iniciariam suas atividades acadêmicas na segunda quinzena de março e ainda estariam se ambientando com o mundo acadêmico, além de ser uma turma com 40 alunos e restavam apenas duas vagas para completar as 25.

As atividades foram realizadas entre os meses de abril e maio de 2019, iniciando na primeira semana de abril, com 16 acadêmicos confirmando sua inscrição, tendo concluído o curso na primeira semana de maio, com 12 alunos. Para análise dos resultados, consideramos os acadêmicos que tiveram certificação no Projeto de Ensino, ou seja, aqueles que obtiveram

[22] A Plataforma Brasil é um sistema eletrônico criado pelo Governo Federal para sistematizar o recebimento dos projetos de pesquisa que envolvam seres humanos nos Comitês de Ética em todo o país.

frequência igual ou superior a 75%. Para garantir o anonimato, os 12 discentes serão identificados pelas letras A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K e L.

Salientamos que, para facilitar a comunicação professor/pesquisador e acadêmicos, criamos um grupo no *WhatsApp*[23] denominado Geometria Fractal, o qual foi utilizado como meio de comunicação direta com os acadêmicos.

Todas as oficinas desenvolvidas no Projeto de Ensino foram pensadas levando em consideração os pontos de vista matemático e cognitivo, apontados por Duval (2012). A análise do ponto de vista matemático, que envolve a compreensão dos objetos matemáticos, foi verificada mediante as repostas apresentadas pelos acadêmicos. Em relação ao ponto de vista cognitivo, tivemos o cuidado de planejar a mobilização de mais de um tipo de RRS, conversões entre elas e sua coordenação. Mediante as respostas apresentadas, verificamos se houve ou não a aprendizagem dos conceitos envolvidos.

6.1 Pré-teste

Iniciamos as atividades do Projeto de Ensino explicando que fazem parte do trabalho de doutorado do professor/pesquisador, tendo todos aceitado participar e assinar o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Estavam presentes nessa atividade todos os 12 investigados dos 16 que confirmaram a inscrição.

Após essa parte inicial, aplicamos um pré-teste com o objetivo de verificar quais concepções os estudantes teriam sobre a temática fractal e, a partir disso, analisar os RRS (RLN e RF) apresentados. Para tanto, foram realizados dois questionamentos:

– Para você o que é um fractal?

– Caso você tenha uma concepção de fractal, esboce um desenho de um fractal.

Para essa atividade, não esperávamos nenhuma definição formal de fractal, mas sim verificar se já haviam ouvido falar. Acreditávamos que os acadêmicos, antes de iniciar o curso, buscariam informações sobre a temática que seria abordada. Em conversa com a turma, eles disseram que não pesquisaram, esperavam que o professor/pesquisador desenvolvesse a temática e, por esse motivo, não tivemos uma conceituação e desenho de fractal de todos os pesquisados.

Analisando as respostas obtidas, tivemos 7 participantes (A, D, E, F, I, J e L) que responderam não saber o que seria um fractal e, consequentemente, não esboçaram o desenho.

---

[23] *WhatsApp* é um aplicativo multiplataforma de mensagens instantâneas e chamadas de voz para *smartphones*.

Já os demais participantes, aproximadamente 42%, apresentaram uma definição sobre o que seria um fractal e apenas o participante H relatou não saber desenhar um fractal. Dentre as respostas apresentadas, temos:

> *É uma figura geométrica que, quando ampliada, volta a manifestar a figura inicial.* (Acadêmico B).
> *Fractal é uma figura geométrica proporcional, que ocorre a repetição de uma parte (principal) em várias escalas.* (Acadêmico C).
> *Uma figura geométrica com repetições de uma forma original cada vez menores ou maiores, de forma infinita.* (Acadêmico G).
> *Repetições de uma mesma imagem.* (Acadêmico H).
> *É uma parte ou todo de mesmo objeto, sobrepostos formando um objeto maior.* (Acadêmico K).

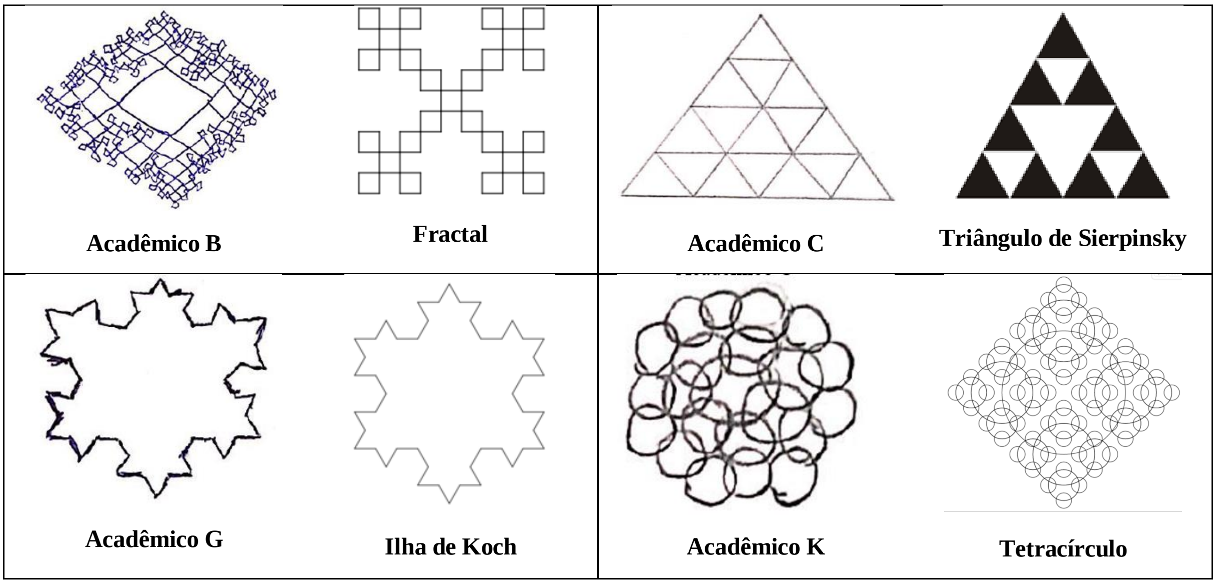
Conforme apresentado na fala dos cinco acadêmicos, existe uma ideia informal sobre fractal, não chegando a uma definição formal como a apresentada por Feder (1988), Falconer (2003), Gouvea e Murari (2004) e Barbosa (2005), porém muito próxima a apresentada por Stewart (1996), ao definir fractais como formas geométricas nas quais existe uma reprodução de sua estrutura original em proporções menores.

Para a segunda parte, conforme dito anteriormente, foi solicitado um esboço de algum fractal que eles conhecessem (Figura 28)**.** Com exceção do Acadêmico H, os demais o apresentaram. Acreditamos ser importante fazer essa ligação entre o conceito e a figura, pois, segundo Arcavi (2003), a visualização é um ponto central na aprendizagem e no fazer matemático. Ainda, segundo o autor, a visualização

> [...] é a habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e comentário sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de desenhar e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias não conhecidas e avançar na compreensão. (ARCAVI, 2003, p. 217, tradução nossa).

Para Dreyfus (1990, p. 119), a "visualização do ponto de vista da educação matemática inclui duas direções: a interpretação e compreensão de modelos visuais e a capacidade de traduzir em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica". Exatamente por essa ideia de melhorar e colaborar com a aprendizagem de conceitos matemáticos é que optamos em solicitar o esboço gráfico.

Figura 28 – Esboço de Fractal representado pelos Acadêmicos B, C, G e K



Fonte: acervo do autor.

Na Figura 28 tomamos o cuidado de apresentar o desenho do acadêmico (imagem da esquerda) e a respectiva representação do pesquisador (imagem da direita). Observamos que o Acadêmico B tentou criar um fractal em que houvesse repetições por iterações. O Acadêmico C tentou criar um Fractal de Sierpinsky, o que não ocorreu de forma correta. O Acadêmico G fez a representação correta da Ilha de Koch ou Floco de Neve e, por fim, o Acadêmico K tentou fazer um esboço por meio de sobreposições, o que não ficou claro como uma figura fractal. Portanto, apenas o acadêmico G realizou de forma correta a representação de uma figura fractal.

De acordo com Duval (2009), a aprendizagem e a compreensão dos objetos matemáticos só irão existir quando formos capazes de os representar pelo menos de dois modos diferentes, transformando-os entre si, o que nos leva a analisar o efeito na aprendizagem de situações de ensino que valorizem a transformação de representações. Em nosso caso, já iniciamos os RRS, pois, no primeiro questionamento, os alunos deveriam fazer um RLN, por meio da conceituação de fractal. No entanto, apenas cinco acadêmicos o fizeram. Já no segundo questionamento, com a solicitação do esboço de um fractal, os discentes estariam realizando um RF, sendo que apenas quatro deles conseguiram fazer esse registro, partindo do RLN. Salientamos que esse foi o primeiro contato que o grupo de acadêmicos teve com a temática, que seria posteriormente desenvolvida nas oficinas.

Dessa forma, concluímos que apenas o Acadêmico G apresentou uma noção correta, por meio de um RLN e um RF do fractal. Porém, isso não impediu a realização das oficinas, pois os demais participantes estavam ali para aprenderem sobre fractais.

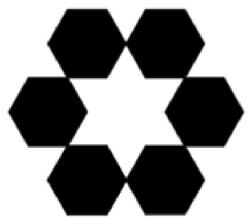
6.2 Oficina 1

A Oficina 1, como mencionada anteriormente, foi realizada em duas partes, a primeira partindo da construção do fractal hexagonal de Dürer (Atividades 1 e 2) e a segunda, com a exploração de conceitos geométricos do referido fractal e a apresentação de outros fractais (Atividades 3 e 4). Nessa etapa, todos os acadêmicos investigados (12) estiveram presentes.

Iniciamos a oficina, após o pré-teste, perguntando o que eles entendiam por fractal e a partir desse momento começamos a falar sobre a história e o conceito do fractal de Dürer (Atividade 1), porém sem apresentar a figura do fractal. Após esse momento, a partir do conceito apresentado para o fractal hexagonal de Dürer, solicitamos que eles imaginassem como seria esse tal fractal.

Nessa etapa, apresentamos um RLN e verificamos se eles conseguiam fazer uma conversão para o RF, ou seja, realizar um esboço do referido fractal conforme apresentado no Quadro 11.

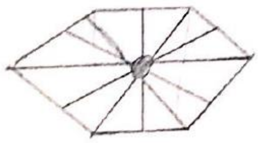
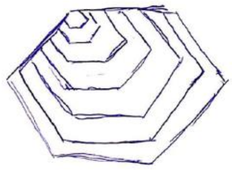
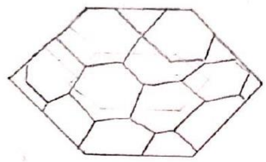
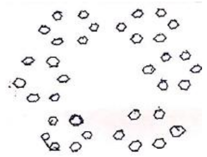
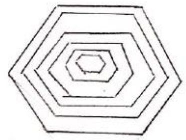
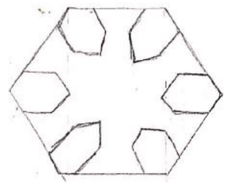
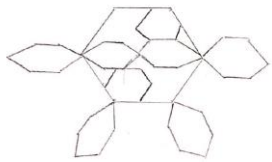
Quadro 11 – Conversão do RLN para RF no fractal hexagonal de Dürer

RLN	RF
É um fractal construído a partir de um hexágono regular, em que a cada iteração (ou repetição de procedimentos) ocorre a substituição de cada vértice do polígono original por um hexágono regular com a mesmo número de lados, de forma que um de seus ângulos coincida com o ângulo do hexágono regular inicial, tendo a condição de que os hexágonos regulares gerados tenham um vértice em comum.	

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Solicitamos que os acadêmicos fizessem um esboço até a primeira iteração (nível 1) do fractal hexagonal de Dürer com o objetivo de estimular a visualização e a imaginação. Segundo Jones (2001), a visualização pode ter alguns ganhos físicos ou mentais, por exemplo, ao mesmo tempo que a imaginação é capaz de ser algo pictórico e acabar tendo relações com percepção, com memorização e com a natureza de imagens dinâmicas, além de interação com a formação de conceitos. Pelas respostas apresentadas, concluímos que eles não entenderam como seria esse fractal, logo não conseguiram realizar a conversão da RLN para a RF. No Quadro 12, apresentamos os esboços feitos pelos alunos.

Quadro 12 – Esboços apresentados para o fractal hexagonal de Dürer

Acadêmico A	Acadêmico B	Acadêmico C	Acadêmico D
			
Acadêmico E	Acadêmico F	Acadêmico G	Acadêmico H
			
Acadêmico I	Acadêmico J	Acadêmico K	Acadêmico L
			

Fonte: acervo do autor.

Depois de os participantes esboçarem o desenho, apresentamos-lhes a imagem do fractal hexagonal de Dürer. Conforme observado no Quadro 12, nenhum discente realizou o esboço da forma correta. Os Acadêmicos A, B, C, E, G, H I, J e K perceberam que, para realizar a construção do referido fractal, deveriam colocar hexágonos regulares no interior da figura, porém não souberam como fazer de forma correta. O Acadêmico D tentou esboçar o nível 0, entretanto não fez a representação com um hexágono regular. O Acadêmico F não soube realizar um RF de forma correta. Já o Acadêmico L fez a construção errada, pois utilizou um pentágono.

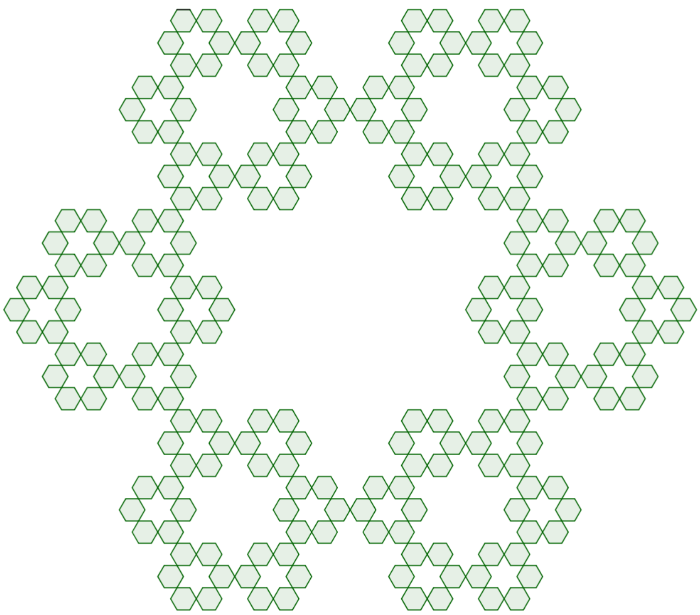
Em conversa com os estudantes, depois que viram o desenho do fractal, eles relataram que era um desenho muito simples, porém nenhum professor até aquele momento havia desenvolvido essa dinâmica de utilizar a imaginação e a visualização. Isso nos mostrou ser importante instigar e incentivar o desenvolvimento nos alunos na conceituação a partir da imaginação e visualização.

Após esse momento, iniciamos a construção, no *GeoGebra*, do fractal hexagonal de Dürer (Atividade 2). Segundo Kenski (2012, p. 44), "a presença de uma determinada tecnologia pode induzir profundas mudanças na maneira de organizar o ensino". Pensando por esse viés, estamos associando o uso do computador e o *GeoGebra* como um recurso metodológico, pois, a partir da imagem e movimentos que podem ser feitos na construção, por exemplo, oferecemos informações mais realistas em relação ao que está sendo estudado e ensinado.

Todos os presentes têm conhecimento sobre o *software*, porém, em conversa anterior ao início do curso, eles disseram não se lembrarem de todos os comandos. Por isso resolvemos fazer a construção do fractal hexagonal de Dürer realizando um passo a passo, o que foi uma excelente estratégia, pois, durante a execução, os acadêmicos iam questionando e relembrando os comandos.

Construímos o nível 0 e o nível 1 juntos e proporcionamos um tempo para pensarem como poderiam fazer para construir o nível 2. Oito alunos conseguiram realizar a construção desse nível, pois é um processo iterativo que passa a se repetir. Depois desse tempo, realizamos a construção do nível 2, sendo sanadas as dúvidas de quem não havia conseguido realizar a construção. As dificuldades foram em relação à digitação correta dos comandos no *GeoGebra*, alguns estavam fazendo de forma errada. Entretanto, faltava ainda o nível 3. Quando pedimos a eles para tentarem fazer isso, prontamente fizeram. Todos os 12 acadêmicos conseguiram finalizar a construção sem nosso auxílio (Figura 29).

Figura 29 – Fractal hexagonal de Dürer (nível 3) construído pelo Acadêmico I



Fonte: acervo do autor.

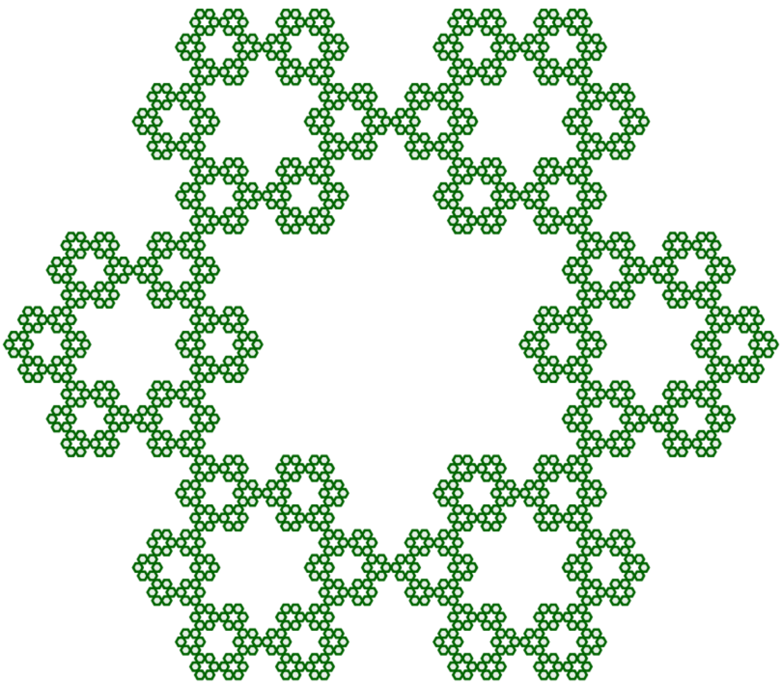
Ao final da oficina, todos os alunos conseguiram construir o seu fractal hexagonal de Dürer. Então, pedimos para salvarem nos seus e-mails sua construção e que mandassem por e-mail para o professor/pesquisador, pois na aula seguinte iríamos explorar os entes geométricos desse fractal.

Acreditamos que a prática docente precisa ser pensada com novas abordagens e formas de ensino que culminem na aprendizagem do acadêmico. Ele precisa ir além da memorização de conceitos e regras e, pensando por esse viés, o RF do fractal hexagonal de Dürer, por meio do *GeoGebra*, proporciona vantagem didática, ou seja, a visualização e manuseio do que está sendo trabalhado oportuniza um aspecto fundamental na Matemática, que é despertar a motivação, o buscar o conhecimento e o aprender. Dessa forma, as aulas tornam-se mais dinâmicas, participativas e produtivas.

Ao final da aula, eles relataram que gostaram muito dessa primeira parte da oficina e que estavam ansiosos para sua continuação na próxima semana.

À noite eu teria aula com alguns dos acadêmicos participantes do Projeto de Ensino. O Acadêmico L se sentiu desafiado e ficou no seu computador pessoal fazendo o nível 4 do fractal hexagonal de Dürer antes do início das aulas. Durante a aula, ele avisou que havia mandado por e-mail a construção do nível 4 do fractal hexagonal de Dürer, conforme apresentado na Figura 30.

Figura 30 – Fractal hexagonal de Dürer (nível 4) construído pelo Acadêmico L



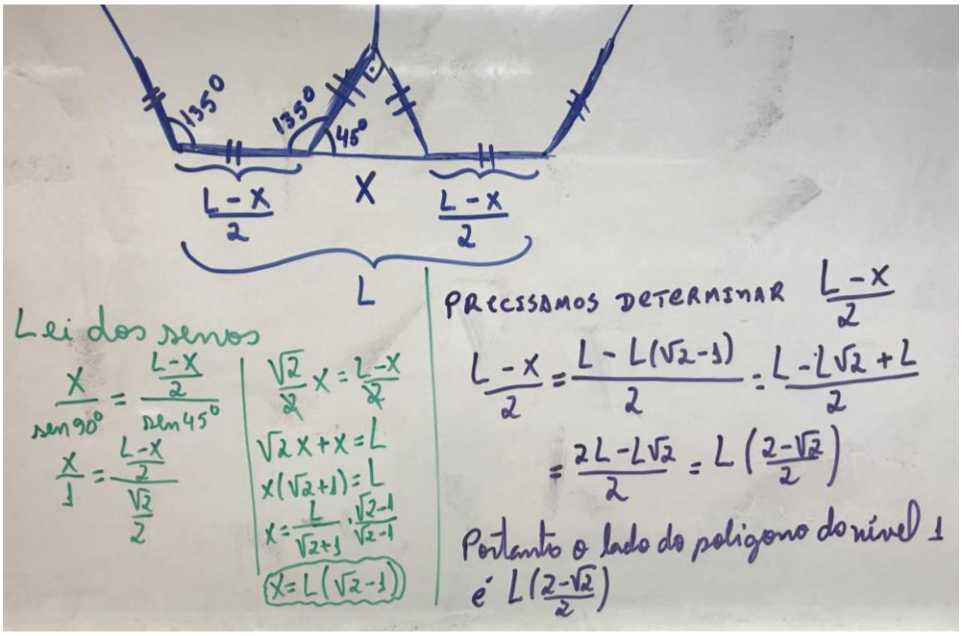
Fonte: acervo do autor.

Após o término dessa etapa, o professor/pesquisador analisou o arquivo e percebeu que realmente o aluno havia construído mais uma iteração de forma correta. Logo, percebemos que conseguimos estimular os acadêmicos a realizarem as construções propostas e, nesse caso, em especial, esse acadêmico foi além do solicitado na oficina. Sua construção seguiu os passos desenvolvidos durante a primeira parte da Oficina 1.

Alguns minutos antes de iniciarmos a parte 2 da Oficina 1, na semana seguinte à primeira parte, o acadêmico L questionou como seria a construção do fractal octogonal de Dürer, pois havia tentado fazer sua construção e chegado até o nível 2, porém não a havia salvado em seu computador. Ele estava em dúvida sobre a medida que deveria usar para o segmento de nível 1. Perguntamos como ele havia feito esse cálculo. O discente explicou que o havia feito usando a Lei dos Senos.

Pedimos que viesse ao quadro e explicasse o que fizera. Depois de alguns cálculos, chegou ao valor do segmento para o nível 1, conforme Figura 31.

Figura 31 – Cálculo da medida do segmento do Fractal octogonal de Dürer (nível 1)



Fonte: acervo do autor.

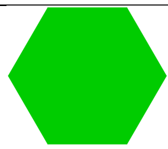
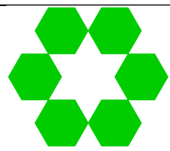
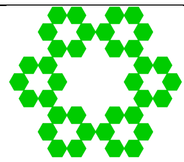
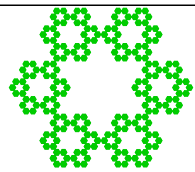
Após esse cálculo, questionamos: qual é a medida do segmento para os níveis 2 e 3? Novamente, respondeu que teria de pensar. Então, perguntamos se ele não havia feito no *GeoGebra* essa construção. Respondeu que sim, mas foi por tentativa e erro para acertar o tamanho do segmento. Porém, no dia anterior, ele pensara em fazer os cálculos para determinar a medida do segmento pela Lei dos Senos. Conversamos com o cursista sobre tais construções e como não as havia salvo, o desafiamos, ficando ele de fazer uma nova e enviar. Consideramos importante incentivar e motivar os acadêmicos a irem além do que é exposto em sala de aula, em especial o Acadêmico L, que demonstrou interesse.

Percebemos que conseguimos motivar os acadêmicos, pois todos estavam ansiosos para o início da parte 2 da Oficina 1. Todos os investigados estavam presentes nessa segunda etapa.

Dando continuidade, explicamos como seria a dinâmica dessa segunda etapa, que estava dividida em duas partes, a primeira seria a exploração dos entes geométricos do fractal hexagonal de Dürer (Atividade 3) e a segunda parte era para que os participantes conhecessem outros tipos de fractais (Atividade 4).

Sendo assim, retomamos a construção realizada na aula anterior, fractal hexagonal de Dürer, e iniciamos com questionamentos referentes às áreas das regiões hexagonais (Atividade 3), pensando nos registros mobilizados, conforme apresentado no Quadro 13.

Quadro 13 – Questionamentos referentes às áreas das regiões hexagonais do Fractal Hexagonal Dürer para os níveis 0, 1, 2 e 3

Registro de Partida		Registro de chegada
RLN	RF	RS
a) Qual é o valor da área da região hexagonal obtida no nível 0 (A_0)? Explique como você obteve essa área.		$A_0 = \frac{6(L)^2\sqrt{3}}{4}$
b) Qual é o valor de cada uma das áreas das regiões hexagonais obtidas no nível 1 (A_1) ? E o valor total, obtido em função de A_0?		$A_1 = \frac{2}{3}A_0$
c) Qual é o valor de cada uma das áreas das regiões hexagonais obtidas no nível 2 (A_2)? E o valor total, obtido em função de A_0?		$A_2 = \frac{4}{9}A_0$
d) Qual é o valor de cada uma das áreas das regiões hexagonais obtidas no nível 3 (A_3) ? E o valor total, obtido em função de A_0?		$A_3 = \frac{8}{27}A_0$

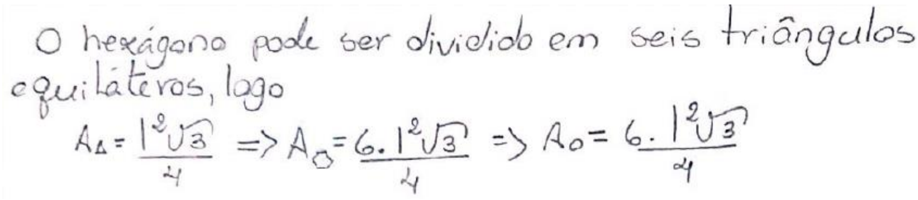
Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Para Duval (2009), devemos ser capazes de mobilizar pelo menos dois modos diferentes de representação de um objeto para haver compreensão. Mobilizamos o registro de partida, a conversão do RLN e RF, tendo como registro de chegada a RS.

No início, os acadêmicos tiveram um pouco de dificuldade nas manipulações algébricas, pois foi solicitado que as áreas das regiões, a partir do nível 1, fossem dadas em função da área inicial, porém, com uma breve explicação, eles entenderam como deveria ser realizado o RS.

Para o valor da região da área no nível 0, a maioria, 11 participantes, teve o cuidado de explicar que o valor da região hexagonal pode ser calculado pela divisão dessa área em seis triângulos equiláteros, conforme apresentado pelo Acadêmico H (Figura 32).

Figura 32 – Resposta do Acadêmico H para a área da região do fractal hexagonal de Dürer (nível 0)

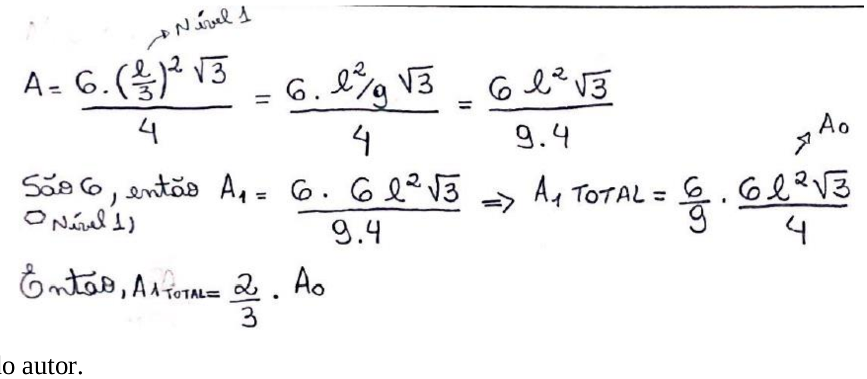


Fonte: acervo do autor.

Observamos que o acadêmico utilizou um registro intermediário, RLN, no intuito de explicar como chegaria à resposta e, consequentemente, ao RS.

Já para o segundo questionamento, valor da região da área no nível 1, apesar da dificuldade em manipulações algébricas, todos conseguiram chegar à resposta correta, conforme a apresentada pelo Acadêmico C na Figura 33.

Figura 33 – Resposta do Acadêmico C para a área da região do fractal hexagonal de Dürer (nível 1)

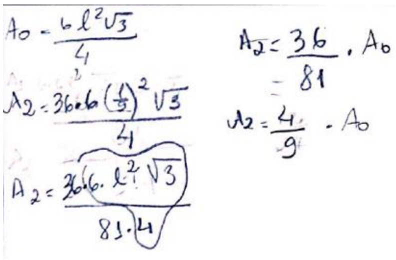


Fonte: acervo do autor.

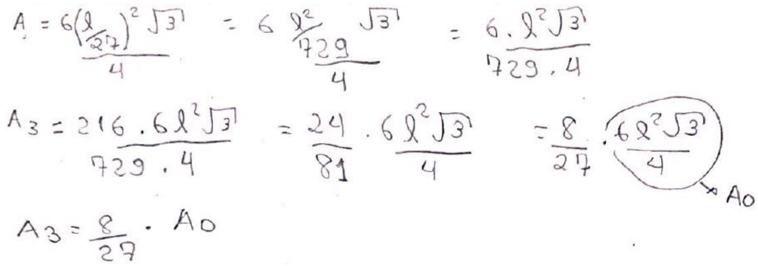
Para os próximos dois questionamentos, não houve dificuldades e todos novamente chegaram à resposta correta, como observado na Figura 34, reposta do Acadêmico A e do Acadêmico I.

Figura 34 – Resposta para a área da região do fractal hexagonal de Dürer, níveis 2 e 3, dos Acadêmicos A e I, respectivamente

Acadêmico A



Acadêmico I



Fonte: acervo do autor.

No penúltimo questionamento, não houve dificuldades e todos acertaram a resposta. A quinta questão teve como registros de partida o RLN e o RS. Logo, estamos mobilizando dois tipos de registro e, consequentemente, realizando conversões entre eles. Como registro de chegada (RS) tivemos a generalização da região de uma área hexagonal para um nível *n*, conforme apresentado no Quadro 14.

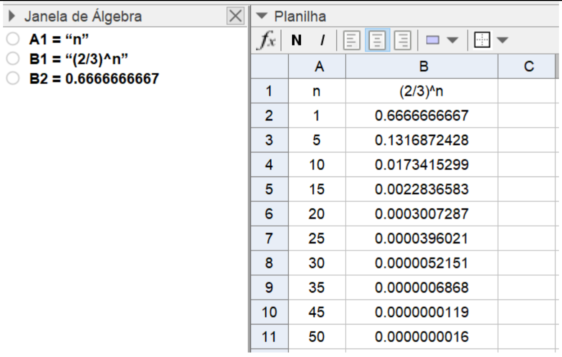
Quadro 14 – Registros mobilizados para o quinto questionamento da Atividade 3

<table>
<tr><td colspan="7">Registro de Partida</td><td>Registro de chegada</td></tr>
<tr><td>RLN</td><td colspan="6">RS</td><td>RS</td></tr>
<tr><td rowspan="4">e) A partir das observações, cálculos e explicações feitas nos itens anteriores, preencha o Quadro 1 determinando medida do lado, número de hexágonos e a área (em relação a A_0) para um fractal hexagonal de Dürer de nível n. Salientamos que n é um número natural genérico.</td><td></td><td>Nível 0</td><td>Nível 1</td><td>Nível 2</td><td>Nível 3</td><td>...</td><td>Nível n</td></tr>
<tr><td>Lado</td><td>l</td><td>$\frac{l}{3}$</td><td>$\frac{l}{9}$</td><td>$\frac{l}{27}$</td><td>...</td><td>$\frac{l}{3^n}$</td></tr>
<tr><td>Número de hexágonos</td><td>1</td><td>6</td><td>36</td><td>216</td><td>...</td><td>6^n</td></tr>
<tr><td>Área total em relação a A_0</td><td>A_0</td><td>$\frac{2}{3}A_0$</td><td>$\frac{4}{9}A_0$</td><td>$\frac{8}{27}A_0$</td><td>...</td><td>$\frac{2^n}{3^n}A_0$ ou $\left(\frac{2}{3}\right)^n A_0$</td></tr>
</table>

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

No sexto e último questionamento da Atividade 3, todos chegaram à resposta correta. No Quadro 15, apresentamos os registros mobilizados e a resposta que esperávamos.

Quadro 15 – Registros mobilizados para o sexto questionamento da Atividade 3

<table>
<tr><th>RLN</th><th>RS</th><th>RLN ou RS</th></tr>
<tr>
<td>f) Se pensarmos em um valor de n muito elevado, ou seja, n tender a infinito, o que ocorrerá com a área A_n?</td>
<td>

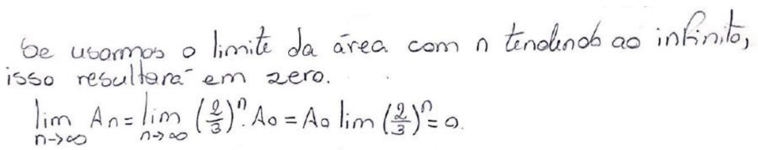
ou $\lim_{n\to\infty} A_n$</td>
<td>A partir da análise da Figura 26, observamos que, quanto maior for o valor de n, menor será o valor da área; Portanto, para um n tendendo a infinito, a área A_n tende a zero.
ou
$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n A_0\right) = 0$</td>
</tr>
</table>

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

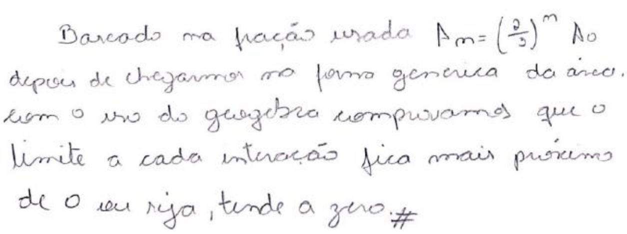
Nessa questão, os participantes ficaram divididos, sendo que 50% resolveram utilizando a planilha do *GeoGebra*, apresentando uma RLN, e a outra metade utilizando o conceito de limite, mostrando uma RS, como observado na Figura 35, reposta do Acadêmico H e do Acadêmico J.

Figura 35 – Resposta para a sexta questão da Atividade 3 dos Acadêmicos H e J

Acadêmico H



Acadêmico J



Fonte: acervo do autor.

Consideramos ser importante o uso da planilha no *GeoGebra*, pois ela pode proporcionar um ambiente para investigações. Nesse caso, os acadêmicos averiguaram o que acontece para um valor elevado de *n*, além de realizar explorações de forma rápida e dinâmica.

Após o término da Atividade 3, percebemos que houve a mobilização de pelo menos dois tipos diferentes de registros de partida o que, segundo Duval (2009), leva à compreensão dos objetos matemáticos mobilizados. Pelas repostas apresentadas, identificamos que houve conversão entre os RRS e a compreensão dos objetos matemáticos envolvidos na Atividade 3.

Para finalizarmos a Oficina 1, iniciamos a última atividade, a qual previa a apresentação de outros fractais, além do trabalhado até o momento, com o intuito de os participantes elaborarem uma definição de fractal. Foram mostrados os fractais: Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor; Curva de Koch; e os Fractais de Sierpinsky. Para ambos os fractais, foi realizado um questionamento e, a fim de auxiliar a resposta, foi solicitado o preenchimento de um quadro do qual os participantes analisariam alguns itens relacionados a sua construção a partir do nível 0 até chegar a uma generalização no nível *n*.

Os Acadêmicos se mostraram interessados questionando, por exemplo, aspectos de como seria o valor da área para um nível *n* do Fractal do Sierpinsky, bem como a medida do comprimento do segmento da Curva de Koch.

Nos três primeiros questionamentos, tivemos os registros de partida RLN e RS e o registro de chegada sendo o RS. A primeira pergunta foi relacionada ao Conjunto de Cantor, em que sete acadêmicos apresentaram como respostas o RLN, enquanto os RS foram trazidos pelos outros cinco que o fizeram por meio da notação de limite. A Figura 36 ilustra a resposta apresentada pelo Acadêmico G.

Figura 36– Resposta ao primeiro questionamento da Atividade 4 apresentada pelo Acadêmico G

a) A partir da observação da figura do Conjunto de Cantor, preencha o Quadro 2 e responda: se o número n de iterações (n é um número natural qualquer) for um número muito grande o que acontece com a medida do comprimento do segmento resultante? Argumente sua resposta.

Quadro 2 – Medida do comprimento de cada segmento e número de intervalos fechados na Poeira de Cantor por níveis.

	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	...	Nível n
Comprimento de cada segmento	L	$L/3$	$L/9$	$L/27$	...	$L/3^n$
Número de intervalos fechados	1	2	4	8	...	2^n

Sendo a medida do segmento igual a $\frac{L}{3^n}$, pelo limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{L}{3^n} = L.\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = L.0 = 0$$

vemos que para um n muito grande, a medida do segmento tenderá a zero.

Fonte: acervo do autor.

Percebemos que os acadêmicos já haviam realizado, na Atividade 3, algo semelhante. Então, não demonstrando dificuldade em preencher os quadros dos 3 primeiros questionamentos, todos concluíram corretamente.

O segundo fractal apresentado foi a Curva de Koch, porém, apenas dois alunos apresentaram a resposta por meio do RLN. Os demais (10) mostraram o RS por meio da notação de limite, conforme apresentado na Figura 37 pelo Acadêmico B.

Figura 37 – Resposta ao segundo questionamento da Atividade 4 apresentada pelo Acadêmico B

b) A partir da observação da Figura 22, preencha a Quadro 3 e responda: se o número n de iterações (n é um número natural) for um número muito grande qual vai ser o comprimento da curva naquele nível? Justifique sua resposta.

Quadro 3 – Comprimento de cada segmento e número de segmentos de retas na Curva de Koch.

	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	...	Nível n
Comprimento de cada segmento	l	$\frac{l}{3}$	$\frac{l}{9}$	$\frac{l}{27}$	...	$\frac{l}{3^m}$
Número de segmentos de retas	1	4	16	64	...	4^m

COMPRIMENTO DA CURVA $= 4^m \cdot \frac{l}{3^m}$

$$c = \left(\frac{4}{3}\right)^m l$$

$$\lim_{m \to +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^m l = l \lim_{m \to +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^m = +\infty$$

Fonte: acervo do autor.

Para finalizar a apresentação de alguns fractais, trabalhamos com o Triângulo de Sierpinsky. Sete acadêmicos apresentaram como respostas o RS e os demais, cinco, o RLN, por meio da notação de limite. Percebemos uma preferência da maioria dos participantes, a partir do segundo questionamento, em utilizar um RS, e acreditamos que isso seja devido aos discentes utilizarem muito esse tipo de representação nas aulas da disciplina de Cálculo. Vejamos a resposta apresentada pelo Acadêmico J na Figura 38.

Figura 38 – Resposta ao terceiro questionamento da Atividade 4 apresentada pelo Acadêmico J

c) A partir da observação da figura do Triângulo de Sierpinsky, preencha o Quadro 4 e responda: se o número n de iterações (n é um número natural) for um número muito grande qual vai ser o valor da área da região triangular nesse nível n? Justifique sua resposta.

Quadro 4 – Comprimento do lado do triângulo, número de triângulos gerados e área em relação a área inicial (A_0) para o fractal de Sierpinsky de n iterações.

	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	...	Nível n
Comprimento do lado do triângulo	l	$1/2$	$1/4$	$1/8$	...	$1/2^2$
Número de triângulos gerados	1	3	9	27	...	3^n
Área em relação a A_0	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3}{4}A_0$	$\frac{9}{16}A_0$	$\frac{27}{64}A_0$	...	$\left(\frac{3}{4}\right)^n A_0$

Quanto maior for o n, nossa área da região triangular será menor, ou seja quanto maior o n a região tende a zero.

Fonte: acervo do autor.

É importante salientar que a intenção de realizar essa exploração foi a de investigar o pensamento algébrico, não deixando essa atividade somente teórica, e sim tentar despertar a curiosidade e o interesse dos participantes. Analisando os RRS apresentados pelos acadêmicos, nos três primeiros questionamentos, concluímos que houve a conversão entre os registros e, consequentemente, ocorreu a aprendizagem.

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009), existem três direções fundamentais do pensamento algébrico que são: representar, raciocinar e resolver problemas. Nesse sentido, o representar diz respeito à aptidão do estudante em empregar diferentes sistemas de representação, o que se encaixa com os RRS de Duval (2009). Já o raciocinar, conforme Ponte, Branco e Matos (2009), é a capacidade de relacionar, analisando propriedades dos objetos matemáticos e, ainda, a capacidade de generalizar, que acontece ao estabelecer relações válidas para uma determinada classe de objetos. Por fim, para resolver problemas que incluem modelar situações, bem como usar diversas representações, novamente foram utilizados os RRS.

Para finalizarmos essa oficina, solicitamos aos discentes que elaborassem um conceito de fractal. Podemos concluir que, mesmo aqueles que não tinham ideia do que era um fractal, no pré-teste, esboçaram um conceito. Dividimos em três categorias os registros: correto para os que esboçaram uma definição no pré-teste, correto para aqueles que não tinham uma formalização de definição no pré-teste e, por fim, parcialmente correto para aqueles que não se encaixam nas duas categorias anteriores, e não estavam errados. Iniciamos apresentando as definições corretas dos cinco acadêmicos que elaboraram uma definição preliminar no pré-teste.

> *É o resultado de infinitas iterações sobre uma figura geométrica, cujas iterações seguem um padrão.* (Acadêmico B).
> *Um fractal é formado por infinitos níveis, onde em cada nível perde-se mais das regiões (áreas). Fractal é uma estrutura geométrica*[24]*.* (Acadêmico C).
> *É uma figura geométrica que segue iterações por meio de uma mesma regra que causa a aparição de um número ordenado de figuras que em um certo conjunto tem a forma semelhante ao nível anterior de iteração.* (Acadêmico G).
> *São repetições de um mesmo processo da figura inicial. Na qual a região da sua área vai se tornando cada vez menor.* (Acadêmico H).
> *São formas geométricas, com padrões complexos*[25] *e definidos por fórmulas, que se repetem infinitamente.* (Acadêmico K).

Comparando as respostas apresentadas pelos Acadêmicos B, C, G, H e K, percebemos uma evolução na formalização da definição. Por exemplo, o Acadêmico B, no pré-teste, relatou que fractal seria uma figura geométrica que sofre ampliação a partir de uma imagem inicial e agora já utiliza o terno “infinitas iterações”. Os Acadêmicos C e G, no pré-teste, usaram a palavra “repetição” e nessa etapa usaram os termos “infinitos níveis” e “iteração”, respectivamente. O Acadêmico H, em ambas as definições, utilizou-se do termo “repetições”, porém explicou melhor a definição nessa etapa. Por fim, o Acadêmico K, que inicialmente se referia a fractal com uma “parte ou todo de mesmo objeto”, já observou aqui existir padrões para as repetições. Dessa forma, concluímos que houve uma melhora na organização de uma definição de fractal para esses acadêmicos.

A segunda categoria é a dos acadêmicos que responderam corretamente, mas que não formalizaram uma definição no pré-teste. Vejamos as respostas apresentadas pelos Acadêmicos D, E, I, J e L.

> *O fractal é construído a partir da repetição de figuras geométricas, mas sem perder seu formato original.* (Acadêmico D).
> *A construção de um fractal se dá a partir de uma figura geométrica sem perder sua forma original, como se fosse uma repetição.* (Acadêmico E).
> *Um fractal é um conjunto de figuras semelhantes e proporcionais a outra figura da qual elas são geradas através de iterações.* (Acadêmico I).

---

[24] Em entrevista realizada com o Acadêmico C, ele esclareceu que utilizou o termo “estrutura geométrica” para dizer que é geometricamente estruturada, ou seja, que tem uma lógica e um cálculo por traz de cada traço, não sendo o fractal um desenho aleatório.
[25] Em entrevista realizada com o Acadêmico K, ele esclareceu que utilizou o termo “padrões complexos” para tentar explicar a complexidade de obtenção de uma figura quando tende ao infinito, mas que poderia substituir esse termo por padrões geométricos tranquilamente.

> *No meu ver, é como se repetimos uma construção se baseando na 1ª e assim fazemos várias vezes a mesma coisa sem perder a essência do original.* (Acadêmico J).
> *É uma relação que se repete de modo que aumenta ou diminui uma figura ou um segmento.* (Acadêmico L).

Observando as respostas, notamos uma preocupação desses participantes em inserir no conceito de fractal as palavras: repetição, iteração, semelhante, figura geométrica, o que vai ao encontro da definição formal apresentada por Feder (1998), Falconer (2003), Gouvea e Murari (2004) e Barbosa (2005). Agrupando as duas primeiras categorias de respostas corretas, constatamos que houve uma melhora na conceituação para aqueles que já tinham alguma ideia e também conseguimos para aqueles que não sabiam o que era fractal uma definição preliminar próxima à definição formal apresentada por esses autores. Acreditamos que isso tenha sido possível devido às mobilizações de mais de um tipo de representação (RLN, RF e RS) envolvidos nas atividades propostas.

Tivemos duas definições parcialmente corretas, observando que existe ainda uma confusão na organização das ideias para a formação desse conceito pelos acadêmicos A e F, conforme a escrita deles.

> *Fractal é uma maneira de calcular uma área n.* (Acadêmico A).
> *É uma sequência de segmentos que se multiplica n vezes, quanto menor a imagem do fractal ele tende ao infinito.* (Acadêmico F).

Percebemos, pela fala desses discentes, que eles tentaram reproduzir um conceito a partir de suas construções nas atividades propostas na Oficina 1 e não perceberam, como os demais colegas, que o fractal é uma forma geométrica se repetindo a partir de processos iterativos em escalas cada vez menores. Notamos que, mesmo mobilizando mais de um tipo de representação (RLN, RF e RS), ainda não foi possível ocorrer a compreensão desse conceito. Na busca de alcançar essa compreensão conceitual, iniciamos a Oficina 2 com a formalização do conceito de fractal e retomamos as definições apresentadas pelos discentes.

Após findar a Oficina 1, apresentamos, no Quadro 16, um resumo dos resultados das atividades propostas, assim como o número e a porcentagem de acadêmicos que as acertaram.

Quadro 16 – Quadro-resumo das atividades da Oficina 1

<table>
<tr><th colspan="2">Atividades</th><th>Número de alunos que acertaram</th><th>% de acertos</th></tr>
<tr><td colspan="2">Atividade 1 (esboço do desenho do fractal hexagonal de Dürer)</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Atividade 2 (construção do fractal hexagonal de Dürer)</td><td>12</td><td>100</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Atividade 3 (explorando o fractal hexagonal de Dürer)</td><td>Item a</td><td>12</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Item b</td><td>12</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Item c</td><td>12</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Item d</td><td>12</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Item e</td><td>12</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Item f</td><td>12</td><td>100</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Atividade 4 (conhecendo outros fractais)</td><td>Conjunto de Cantor</td><td>12</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Curva de Koch</td><td>12</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Triangulo de Sierpinsky</td><td>12</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Definição de fractal</td><td>10</td><td>83</td></tr>
</table>

Fonte: elaborado pelo autor.

O Quadro 16 mostra que na Atividade 1 houve 0% de acertos. Julgamos ser devido à mobilização de apenas um tipo de representação, no caso o RLN, pois, para haver a compreensão, segundo Duval (2009), devemos proporcionar ao aluno pelo menos dois tipos diferentes de representação. Sendo essa ocorrida nas demais atividades com os RLN, RF e RS, nas quais tivemos 100% de acerto, com exceção da Atividade 4, que envolvia a definição de fractal, com 83%. Essa última porcentagem não atingiu 100% devido, como mencionado anteriormente, aos discentes procurarem reproduzir o conceito com base nas construções das atividades da Oficina 1 e não perceberam padrões como repetição e processos iterativos.

Retomando os objetivos da Oficina 1, acreditamos tê-los alcançado com êxito, pois desenvolvemos a parte história do fractal de Dürer, além de todos os acadêmicos terem construído seu fractal hexagonal de Dürer no *GeoGebra*. Também tivemos 100% de acertos nas explorações geométricas propostas e aproximadamente 83% do grupo conseguiu chegar à elaboração de um conceito correto para fractal.

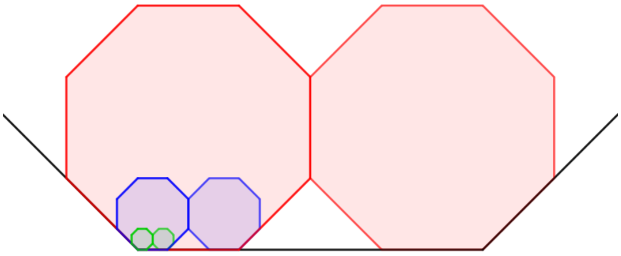
6.3 Oficina 2

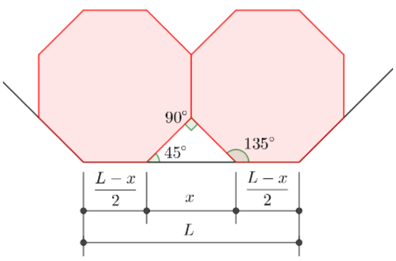
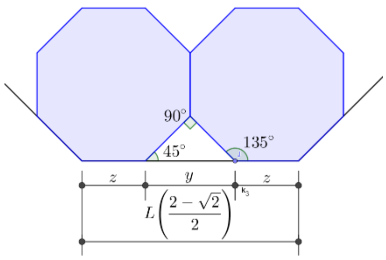
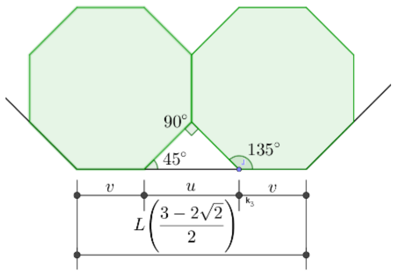
Após a finalização da Oficina 1, como dito anteriormente, os acadêmicos salvaram as resoluções em seus e-mails e enviaram para o professor/pesquisador o fractal hexagonal de Dürer. A partir desse envio, comparamos os passos realizados em suas construções e percebemos que todos seguiram o passo a passo apresentado na Atividade 2 da Oficina 1. Acreditamos que essa ocorrência se deva ao fato de a construção ser um processo iterativo a partir do nível 1.

A Oficina 2, por solicitação dos discentes, foi realizada em um único dia, sendo dividida em três atividades: (1) reconhecendo fractais e sua definição; (2) fractais clássicos, seus precursores e dimensão fractal; e (3) calculando as dimensões fractais. Não estava presente nesta atividade o Acadêmico H.

Antes de iniciarmos os trabalhos, o Acadêmico L encaminhou, por e-mail, a construção do fractal octogonal de Dürer e apresentou seus cálculos da medida do lado para cada nível até 3, conforme organizado no Quadro 17.

Quadro 17– Valores das medidas dos lados do octógono nos níveis 1, 2 e 3

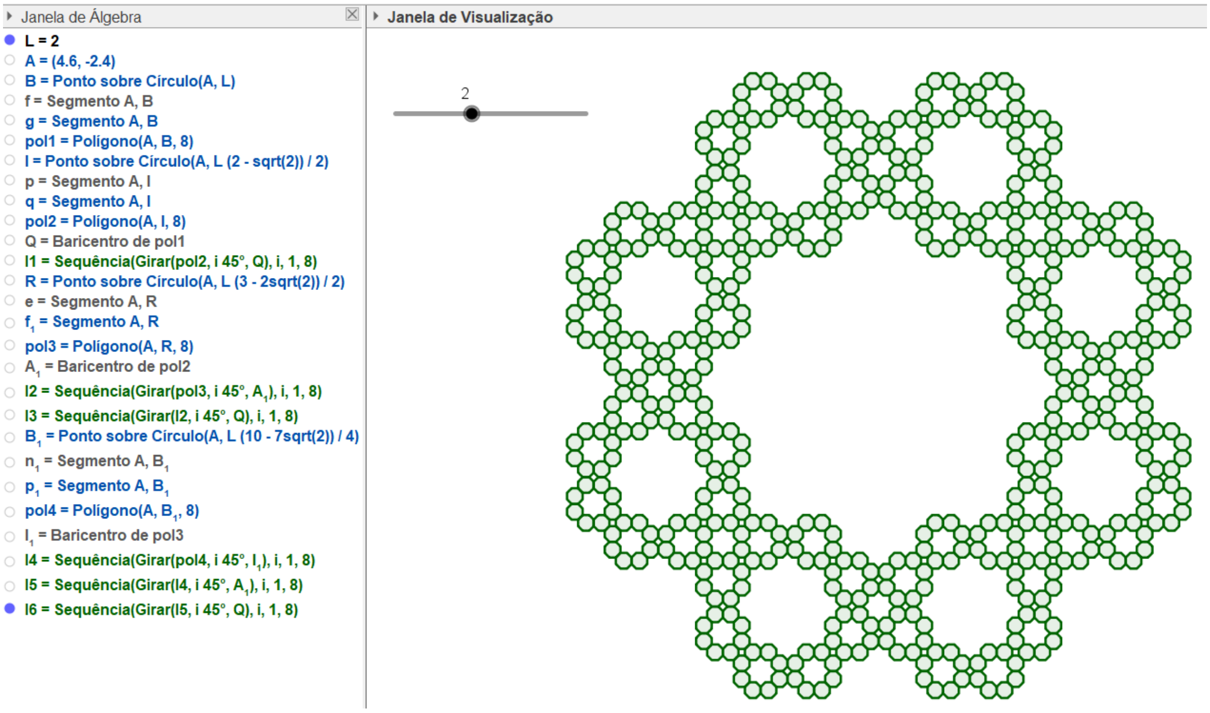


Nível 1	Nível 2	Nível 3
		
$x = L(\sqrt{2}-1)$	$y = L\left(\frac{3\sqrt{2}-4}{2}\right)$	$u = L\left(\frac{5\sqrt{2}-7}{2}\right)$
$\frac{L-x}{2} = L\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$	$z = L\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)$	$v = L\left(\frac{10-7\sqrt{2}}{4}\right)$

Fonte: dados apresentados pelo Acadêmico L.

A construção e os cálculos estão corretos, o que demonstrou ele ter entendido o processo que deveria ser feito para a determinação da medida do lado de cada nível, porém agora ele realizou a construção sem a utilização de tentativa e erro como tinha feito anteriormente, para os níveis 2 e 3. O acadêmico foi questionado pelo professor/investigador sobre o tempo de construção, tendo ele relatado ter demorado mais para realizar os cálculos das medidas dos lados de cada nível do que a construção no *GeoGebra*, que foi rápida. Isso ocorreu devido à sequência de comandos e à ideia ser a mesma utilizada para a construção do fractal hexagonal de Dürer, conforme podemos ver na Figura 39.

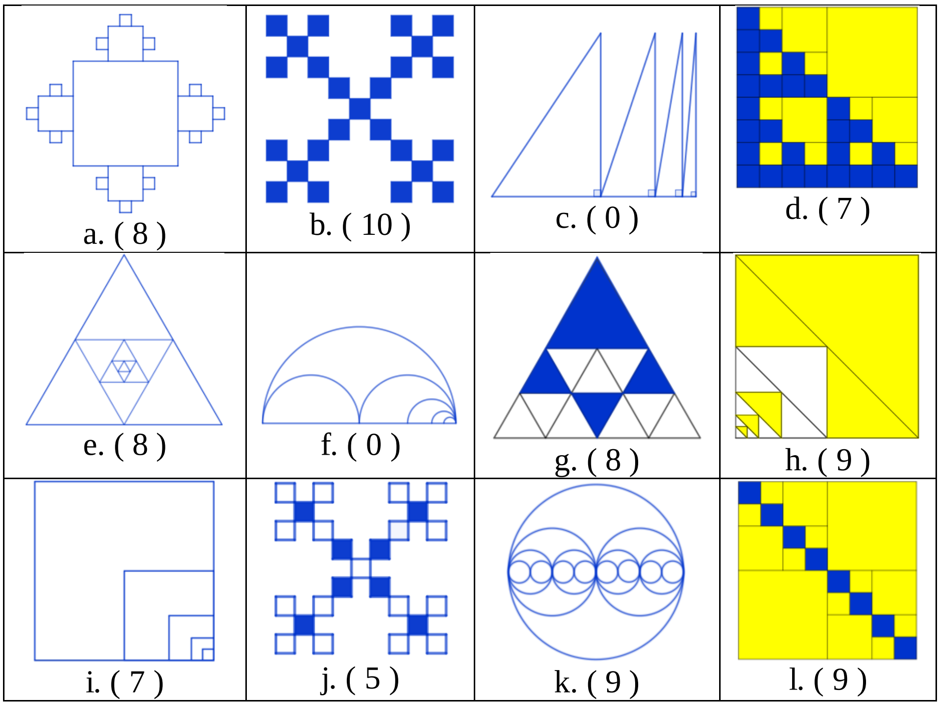
Figura 39 – Fractal octogonal de Dürer elaborado pelo Acadêmico L



Fonte: acervo do autor.

Iniciamos a Oficina 2 retomando o conceito de fractal a partir da construção anterior e, após, foram apresentadas 12 imagens (RF). Os acadêmicos deveriam marcar quais delas representam fractais e justificar de forma geral (RLN) como essa escolha foi feita (Atividade 1). No Quadro 18, apresentamos as figuras e o respectivo número de marcações que cada uma recebeu.

Quadro 18 – Figuras geométricas Oficina 2



Fonte: acervo do autor.

Após essa etapa, realizamos a correção comentando sobre cada imagem e porque ela era ou não um fractal. As imagens (b), (d), (e), (g), (i), (k) e (l) representam fractais, as demais não. Durante a correção, percebemos que alguns acadêmicos que marcaram as imagens (h) e (j) relataram que as classificaram como fractal não levando em conta a região pintada nas figuras geométricas. Quando planejamos as atividades, não percebemos que poderia haver essa confusão. Também, questionamos porque a maioria selecionou a imagem (a) como fractal ao que eles responderam não haver percebido existir elemento a mais e, devido a isso, consideraram-na um fractal.

Pelas respostas apresentadas nas justificativas, acreditamos que os acadêmicos entenderam o conceito de fractal, mesmo havendo marcações em imagens que não eram fractais. Vejamos algumas respostas.

> *As imagens foram escolhidas por serem parecidas, só com tamanhos diferentes.* (Acadêmico A).
> *Aparecem padrões geométricos.* (Acadêmico B).
> *Fractal é uma figura geométrica que possuí vários níveis, e cada nível de tamanho diferente.* (Acadêmico C).
> *As imagens escolhidas têm algo em comum, todas as formas geométricas se repetem mais de uma vez sempre em tamanho menor.* (Acadêmico F).
> *Padrões de figuras formadas, sob uma mesma condição, observando área total da figura de origem.* (Acadêmico K).

O todo se repete em escala menor, porém seguindo o mesmo padrão. (Acadêmico L).

O intervalo de tempo entre as oficinas foi de uma semana e, a partir das respostas apresentadas anteriormente e do conceito solicitado na Atividade 4 da Oficina 1, percebemos que houve o entendimento do que é um fractal pelos discentes, em especial pelos Acadêmicos A e F. Esses dois estudantes já haviam realizado uma conceituação considerada parcialmente correta. O Acadêmico A anteriormente tinha relatado que o fractal seria uma maneira de se calcular uma área e agora percebe a existência de um padrão de construção em tamanhos diferentes. O Acadêmico F tinha conceituado fractal a partir de uma sequência de segmentos e, nesse momento, ele percebeu a existência de "algo em comum" e um padrão de repetição nas imagens.

Dando seguimento, foi formalizada a definição de fractal baseada nos autores Stewart (1996), Barbosa (2005) e Feder (1988). Os discentes comentaram que suas respostas estavam certas com as apresentadas pelos autores. Sendo assim, percebemos que, por meio da mobilização dos RRS realizados na Oficina 1, os acadêmicos conseguiram compreender e gerar um conceito correto para fractal.

Finalizada a Atividade 1, iniciamos a Atividade 2, apresentando a história dos fractais e seus precursores, o que gerou uma maior atenção dos participantes para, posteriormente, desenvolverem o cálculo da dimensão fractal.

Acreditamos que o emprego da História da Matemática pode auxiliar no conhecimento matemático, ajudando o discente a compreender os métodos e fórmulas utilizados atualmente na Matemática. D'Ambrosio (2012, p. 27) relata que a História da Matemática "[...] é um elemento fundamental para perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de sua época." Apoiados nessa ideia do autor, optamos em trabalhar os fractais clássicos e seus precursores para, posteriormente, apresentar o cálculo da determinação da dimensão fractal.

Para facilitar o entendimento da dimensão fractal, optamos em utilizar as figuras geométricas já conhecidas da Geometria Euclidiana (segmento de reta, quadrado e cubo) e realizar algumas análises por meio de preenchimento de quadros. Nessa atividade apresentamos um RF e solicitamos que os acadêmicos realizem um RS, isto é, uma conversão de RF para RS, sendo esses os registros de partida. Após o preenchimento e a análise dos quadros, por meio do RS, os acadêmicos determinaram uma fórmula usando manipulações algébricas para o cálculo da dimensão fractal. Esse seria o registro de chegada (RS). Segundo Roncaglio e Nehring (2019, p. 85), "a compreensão da grande variedade de registros de representações utilizados em Matemática determina o seu ensino e sua aprendizagem". Portanto, faz sentido mobilizarmos mais de uma representação e verificarmos se os acadêmicos chegaram à determinação da fórmula da dimensão fractal.

O primeiro quadro que deveria ser preenchido envolve a divisão de um segmento de reta em 2, 3 e 4 partes. Na Figura 40, apresentamos as respostas do Acadêmico G.

Figura 40 – Repostas apresentadas pelo Acadêmico G para a divisão de um segmento

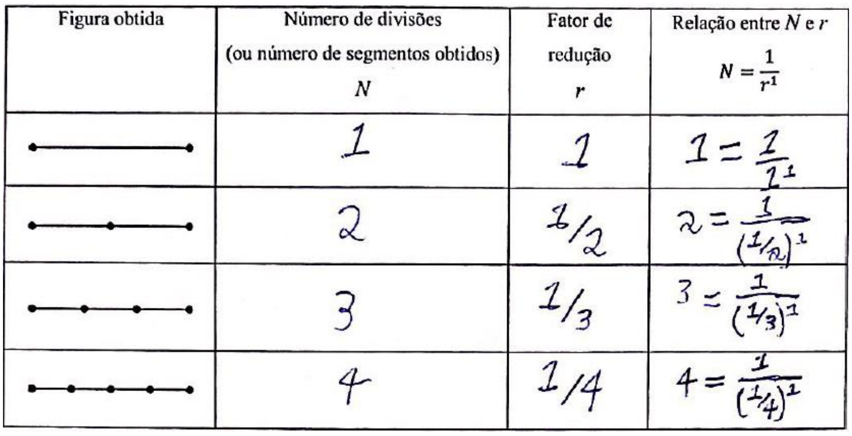


Figura obtida	Número de divisões (ou número de segmentos obtidos) N	Fator de redução r	Relação entre N e r $N = \frac{1}{r^1}$
	1	1	$1 = \frac{1}{1^1}$
	2	1/2	$2 = \frac{1}{(1/2)^1}$
	3	1/3	$3 = \frac{1}{(1/3)^1}$
	4	1/4	$4 = \frac{1}{(1/4)^1}$

Fonte: acervo do autor.

Já o segundo quadro a ser preenchido envolvia a divisão de cada lado de um quadrado em 2, 3 e 4 partes. Na Figura 41, apresentamos as respostas do Acadêmico G.

Figura 41 – Repostas apresentadas pelo Acadêmico G para a divisão dos lados de um quadrado

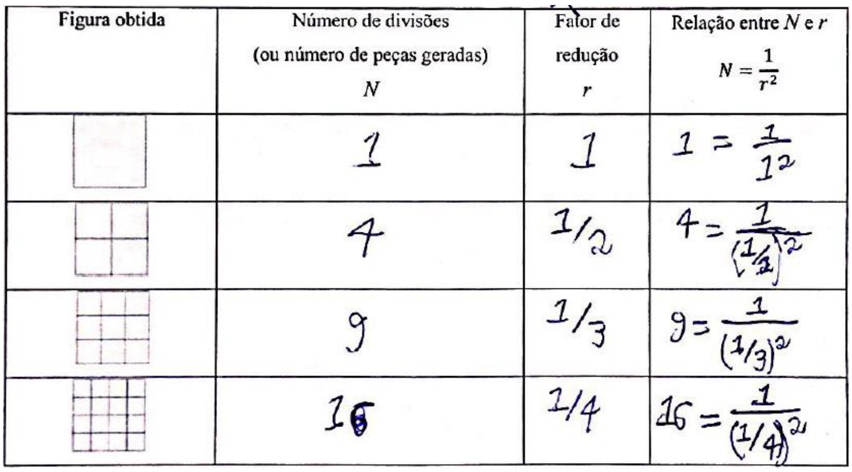
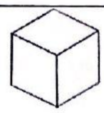
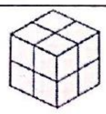
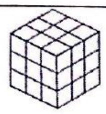
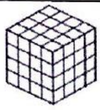


Figura obtida	Número de divisões (ou número de peças geradas) N	Fator de redução r	Relação entre N e r $N = \frac{1}{r^2}$
	1	1	$1 = \frac{1}{1^2}$
	4	1/2	$4 = \frac{1}{(1/2)^2}$
	9	1/3	$9 = \frac{1}{(1/3)^2}$
	16	1/4	$16 = \frac{1}{(1/4)^2}$

Fonte: acervo do autor.

Por último, o terceiro quadro a ser preenchido envolvia a divisão de cada aresta de um cubo em 2, 3 e 4 partes. Na Figura 42 apresentamos as respostas do Acadêmico G.

Figura 42 – Repostas apresentadas pelo Acadêmico G para a divisão dos lados de um quadrado

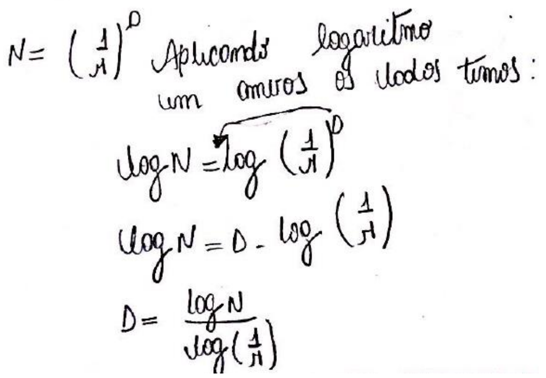
Figura obtida	Número de divisões (ou número de peças geradas) N	Fator de redução r	Relação entre N e r $N = \frac{1}{r^3}$
	1	1	$1 = \frac{1}{1^3}$
	8	$1/2$	$8 = \frac{1}{(1/2)^3}$
	27	$1/3$	$27 = \frac{1}{(1/3)^3}$
	64	$1/4$	$64 = \frac{1}{(1/4)^3}$

Fonte: acervo do autor.

Ao término desta etapa, percebemos que os acadêmicos não tiveram dificuldades no preenchimento dos quadros, todos chegaram às respostas corretas. Quando pensamos nas possíveis respostas dos discentes para a última coluna (relação entre o N e r), optamos por induzir previamente uma resposta ($N = \frac{1}{r^D}$, D= 1, 2 ou 3), no intuito de facilitar a determinação da fórmula do cálculo da dimensão fractal. Depois da obtenção das respostas, percebemos que teria sido melhor não ter apresentado a relação entre N e r, pois poderiam ocorrer outros resultados e explorações, enriquecendo, assim, a discussão em sala de aula e posteriormente nossa análise.

Entretanto, ainda faltava um passo para obterem a fórmula da dimensão fractal, ao que foram questionados sobre como seria uma relação genérica entre a quantidade (N) e o coeficiente de redução (r). Eles responderam que poderia ser representado por $N = \frac{1}{r^D}$, em que (D) é a dimensão. Continuando, perguntamos se poderíamos representar (N) de outra forma. Os acadêmicos responderam afirmativamente e poderia ser representado por $N = \left(\frac{1}{r}\right)^D$. A partir desse último RS, os discentes realizaram a dedução da fórmula da dimensão fractal. Na Figura 43, apresentamos as manipulações algébricas do Acadêmico E.

Figura 43 – Dedução da fórmula da dimensão fractal apresentada pelo Acadêmico E



Fonte: acervo do autor.

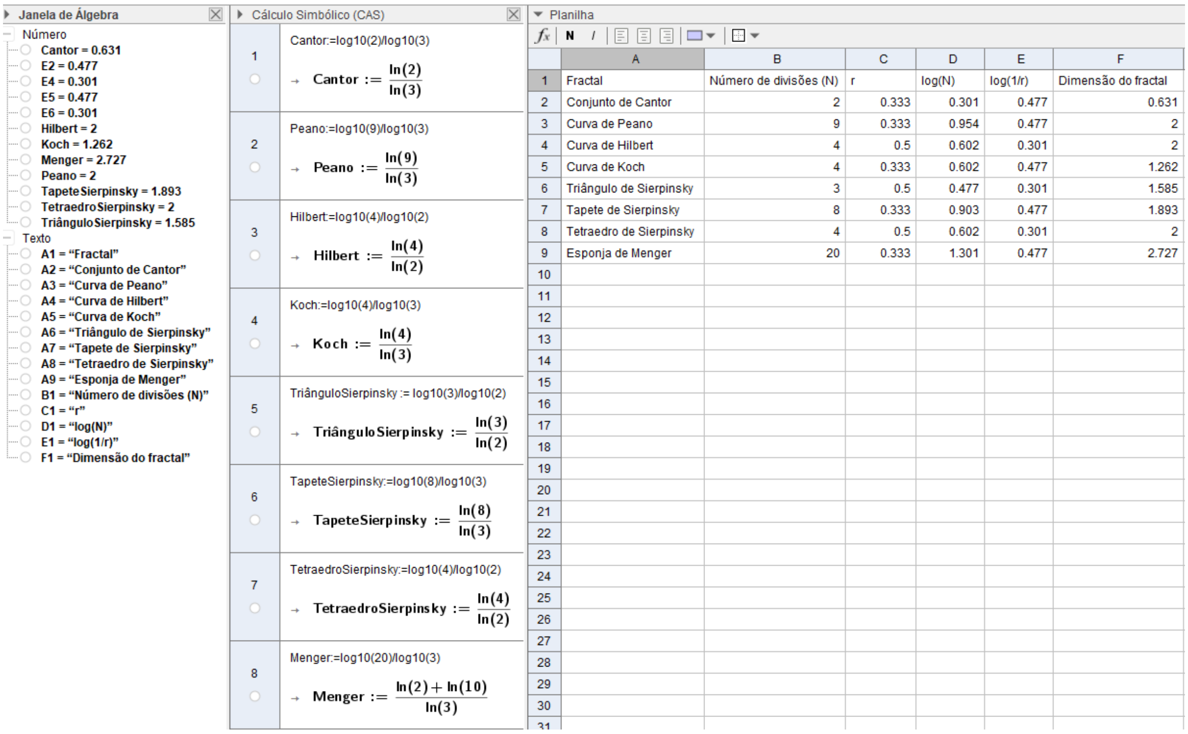
Os participantes chegaram à fórmula da dimensão fractal, porém alguns alunos tiveram dificuldade em aplicar propriedades de logaritmos, o que foi sanado pelo professor/pesquisador fazendo uma breve revisão das propriedades operatórias.

Para finalizar a Oficina 2, faltava a Atividade 3 e, para isso, fizemos um desafio: calcular a dimensão fractal de oito fractais na planilha e janela *CAS* do *GeoGebra*. Ao serem perguntados se já haviam trabalhado com esses recursos, responderam que não, então fizemos uma breve explicação de como deveriam ser inseridos os dados nas duas ferramentas do *software*.

Quando planejamos essa atividade, levamos em conta que os jovens “[...] estão cada vez mais conectados às tecnologias digitais, configurando-se como uma geração que estabelece novas relações com o conhecimento e que, portanto, requer que transformações aconteçam na escola”. (BACICH, NETO, TREVISANI, 2015, p. 47). Por esse viés, introduzimos o uso dessas duas novas ferramentas (planilha e janela *CAS*) para os discentes. Valente (2015, p. 15) afirma: “[...] criando oportunidades para a construção de seu conhecimento. O professor tem a função de mediador, consultor do aprendiz”. Julgamos ser necessário o incentivo e o uso das TD nos cursos de licenciatura, no caso presente, da licenciatura em Matemática e, para tal, promover a instrumentalização desses acadêmicos para suas futuras práticas pedagógicas.

Dando seguimento, os acadêmicos, por unanimidade, iniciaram os cálculos pela janela *CAS* e, posteriormente, completaram a planilha para comparar os resultados encontrados. Na Figura 44, apresentamos os RS do Acadêmico C. Nessa atividade não houve conversão, e sim tratamento, pois a representação do objeto matemático conservou o próprio registro de origem, ou seja, o registro de partida e os de chegada foram os mesmos (RS).

Figura 44 – Planilha e Janela CAS apresentada pelo Acadêmico C



Fonte: acervo do autor.

Como foi novidade para os discentes esse tipo de trabalho com planilha e janela *CAS* no *GeoGebra*, resolvemos fazer duas perguntas: o que você poderia dizer sobre a utilização dessas ferramentas para calcular a dimensão fractal? De qual delas mais gostou? Pelas respostas apresentadas, concluímos que eles gostaram das ferramentas e aprenderam a utilizar outras que o *GeoGebra* oferece. Porém, o grupo ficou dividido, sendo que alguns gostaram mais da planilha e outros mais da janela *CAS*, como vemos em algumas respostas a seguir.

> *Gostei mais da janela CAS, é mais simples de montar. Acabei me perdendo um pouco na planilha. Achei interessante, não sabia que existia, é sempre bom e importante saber mais.* (Acadêmico C).
> *Achei muito interessante a utilização destes recursos, uma prática importante de se trabalhar. Gostei mais da planilha, por apresentar recursos simples de calcular.* (Acadêmico E).
> *Eu achei muito boa a experiência de utilizar esses recursos, particularmente gostei mais de utilizar a planilha, pois é mais simples de se trabalhar e de compreender os processos.* (Acadêmico I).
> *Bom, eu gostei mais da janela CAS, por ser mais simples e objetiva, embora tenha que saber o uso de log é muito melhor que a planilha.* (Acadêmico J).

Consideramos ser importante o uso da planilha e janela *CAS* no *GeoGebra*, pois pode proporcionar um ambiente para investigações e, nesse caso, os acadêmicos investigaram os valores das dimensões de alguns fractais já estudados, além de realizar explorações de forma rápida e dinâmica. Melo e Silva (2013) relatam que o *GeoGebra* proporciona condições e autonomia para os alunos construírem seus próprios conhecimentos. Por esse viés, pensamos ser importante incentivar os acadêmicos a conhecerem e experimentarem outros recursos que o *GeoGebra* disponibiliza, o que confirma os registros dos estudantes.

Questionamos os alunos em relação a sua preferência e eles relataram que escolheram a planilha por se assemelhar a outras que já haviam utilizado. Os que preferiram a janela *CAS* disseram que foi pela curiosidade e por aprenderem uma ferramenta nova do *GeoGebra*.

Após terminar a Oficina 2, mostramos, no Quadro 19, um resumo dos resultados das atividades propostas, assim como o número e a porcentagem de acadêmicos que as acertaram.

Quadro 19 – Quadro-resumo das atividades da Oficina 2

Atividades		Número de alunos que acertaram	% de acertos
Atividade 1 (reconhecendo fractais e sua definição)	Imagem (a)	3	27
	Imagem (b)	10	91
	Imagem (c)	11	100
	Imagem (d)	7	64
	Imagem (e)	8	73
	Imagem (f)	11	100
	Imagem (g)	8	73
	Imagem (h)	2	18
	Imagem (i)	7	64
	Imagem (j)	6	54
	Imagem (k)	9	82
	Imagem (l)	9	82
Atividade 2 (fractais clássicos e seus precursores e dimensão fractal)		11	100
Atividade 3 (calculando as dimensões fractais)		11	100

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

O Quadro 19 mostra, na Atividade 1, ter havido marcações em imagens que não eram fractais. Por exemplo, na imagem (a), os discentes a marcaram por não perceberem a existência de uma parte a mais na figura. As imagens (h) e (j) foram assinaladas devido a região estar pintada. Percebemos que a maioria marcou as imagens que são fractais ((b), (d), (e), (g), (i), (k), (l)). Fazendo uma média dos acertos, encontramos 69% de marcações corretas. Atribuímos que esse valor não ter atingido 100% foi devido à utilização de um único tipo de representação, o RF. Se fôssemos aplicar novamente essa atividade, seria importante não apenas retomar verbalmente os conceitos elaborados na Atividade 4 da Oficina 1, mas já apresentar, de forma escrita (RLN), a definição formal trazida pelos autores Stewart (1996), Barbosa (2005) e Feder (1988). Dessa maneira, teríamos dois tipos de registros (RLN e RF) antes de pedirmos aos discentes para marcar as imagens fractais e quem sabe, dessa forma, aumentar o índice de acertos.

Para a Atividade 2, já tivemos uma preocupação de mobilizar mais de um tipo de representação, no caso o RF e o RS, e o resultado final foi que todos os acadêmicos chegaram à fórmula do cálculo da dimensão fractal. Por esse viés, apoiado em Duval (2009), percebemos a necessidade de mobilizar pelo menos dois tipos diferentes de representação.

Para a Atividade 3, os acadêmicos tiveram 100% de acerto no cálculo da dimensão fractal ao utilizarem a fórmula (RS) obtida na Atividade 2 e usaram, para sua determinação e comparação, os valores da planilha e janela CAS. Nessa atividade não houve conversão entre os registros, como nas anteriores, e sim tratamento, pois, como Henriques e Almouloud (2016) afirmam, se permanecemos em um mesmo sistema de registro, nesse caso RS, estaremos realizando tratamento.

Ao final dessa oficia, percebemos que ela ficou mais teórica e expositiva que as demais. Porém, acreditamos ser importante apresentar a esses futuros professores que a dimensão de um objeto não necessariamente pertence ao conjunto {0, 1, 2, 3}, característica que as figuras euclidianas possuem, mas que podem pertencer ao intervalo [0, 3], particularidade das figuras fractais. Mesmo assim, conseguimos alcançar os objetivos dessa oficina, pois os alunos conseguiram reconhecer os fractais, deduziram a fórmula da dimensão fractal e finalizaram calculando algumas dimensões fractais.

6.4 Oficina 3

A Oficina 3, novamente realizada em um único encontro, no intervalo de uma semana, foi dividida em três atividades: (1) conhecendo, (2) construindo e (3) explorando a Curva de Peano. Não estava presente nas atividades o Acadêmico D.

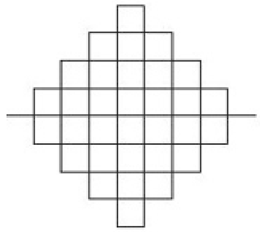
Iniciamos explicando o que iríamos trabalhar e logo começamos a Atividade 1. Antes de mostrarmos a imagem da Curva de Peano, desafiamos os acadêmicos a imaginar e apresentar um esboço a partir da apresentação da definição desse fractal.

Segundo Hilbert e Cohn-Vossen (1990,p. iii, tradução nossa) a imaginação visual pode "[...] iluminar a variedade de fatos e de problemas de Geometria e, além disso, é possível, em muitos casos, retratar o esboço geométrico dos métodos de investigação e demonstração [...]".

Exploramos a imaginação a partir da visualização que, para Dreyfus (1991), é um processo pelo qual as representações mentais ganham vida. Corroborando essa ideia, Cifuentes (2010, p. 25) conclui: “a visualização é uma forma de pensamento e, portanto, é possível também argumentar através dela”.

Dessa forma, apresentamos um RLN e verificamos se houve ou não a conversão para o RF. No Quadro 20, trazemos como se efetua a construção da Curva de Peano (RLN) e a imagem (RF) do referido fractal.

Quadro 20 – Conversão do RLN para RF na Curva de Peano

RLN	RF
Para iniciá-la, tomemos um segmento de reta de comprimento unitário. Dividimos esse segmento em três partes congruentes. No segmento central, desenhamos um retângulo, que é dividido pelo segmento inicial em dois quadrados congruentes. Ao final dessa primeira iteração, obtemos 9 segmentos de comprimento 1/3 cada. Para a segunda iteração, vamos repetir os passos anteriores, assim vamos obter 81 segmentos de comprimento 1/81.	

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Para Roncaglio e Nehring (2019, p. 84), “é fundamental o trabalho com as representações semióticas que sustentam a construção do conhecimento pelos sujeitos, em processo de aprendizagem, uma vez que elas possibilitam o desenvolvimento das funções cognitivas essenciais do pensamento humano”. Nesse sentido, estamos estimulando os acadêmicos a realizar suas representações, nesse caso RF, e consequentemente a conversão ente o RLN para o RF.

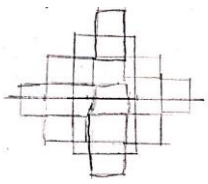
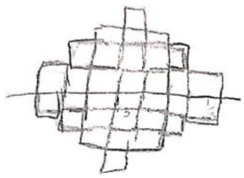
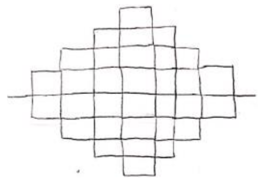
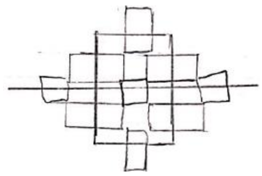
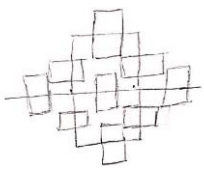
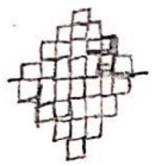
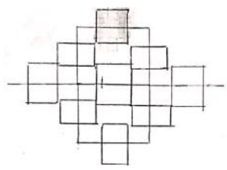
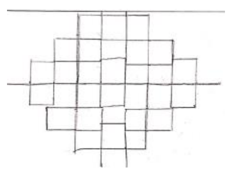
A coordenação entre esses dois tipos de registros só se dará por meio de duas operações: tratamentos ou conversões. Nesse caso, na Atividade 1, estamos realizando conversão, pois segundo Duval (2009, p. 58), “converter é transformar a representação de um objeto de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro”.

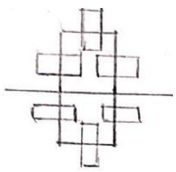
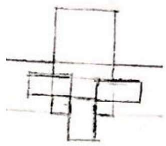
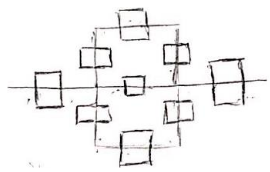
Para a realização de uma análise de conversão, é necessário existir uma representação no registro de partida, assim como uma representação terminal ou registro de chegada. (DUVAL, 2009). Como estamos trabalhando com dois tipos de registros: o RLN e o RF, o primeiro é o registro de partida e o segundo, o registro de chegada.

No Quadro 21, apresentamos os esboços dos trabalhos dos acadêmicos. Percebemos que os estudantes A, B, C, E, G, H, I conseguiram realizar a conversão do RLN para o RF de forma correta. Os demais discentes realizaram uma representação próxima à ideia da Curva de Peano.

Portanto, conseguimos mobilizar representações mentais a partir da imaginação e da visualização, concordando com os estudos de Hilbert e Cohn-Vossen (1990), Dreyfus (1991) e Cifuentes (2010).

Quadro 21 – Esboços apresentados para a Curva de Peano

Acadêmico A	Acadêmico B	Acadêmico C	Acadêmico E
			
Acadêmico F	Acadêmico G	Acadêmico H	Acadêmico I[26]
			

Acadêmico J	Acadêmico K	Acadêmico L
		

Fonte: acervo do autor.

Para finalizar esta primeira atividade, apresentamos a imagem para o fractal Curva de Peano e comentamos sobre os esboços realizados pelos estudantes. Os acadêmicos F, J, K e L relataram ter entendido a sua construção, porém não haviam conseguido esboçá-la conforme os demais participantes, por não terem aptidão para o desenho. O Acadêmico K também relatou que não teve tempo suficiente para a realização da atividade. Observando os esboços desses participantes, vemos que eles iniciaram a primeira iteração com a construção de forma correta, dividindo um segmento de reta unitário em três partes congruentes e no segmento central desenharam um retângulo (dividido pelo segmento inicial em dois quadrados congruentes). Para a segunda iteração, eles deveriam ter feito o mesmo processo anterior, porém, foi nesse passo que se equivocaram e não perceberam que os retângulos desenhados teriam alguns de seus vértices ligados a outros vértices de retângulos. Se houvesse essa percepção, haveria uma porcentagem maior de representações corretas.

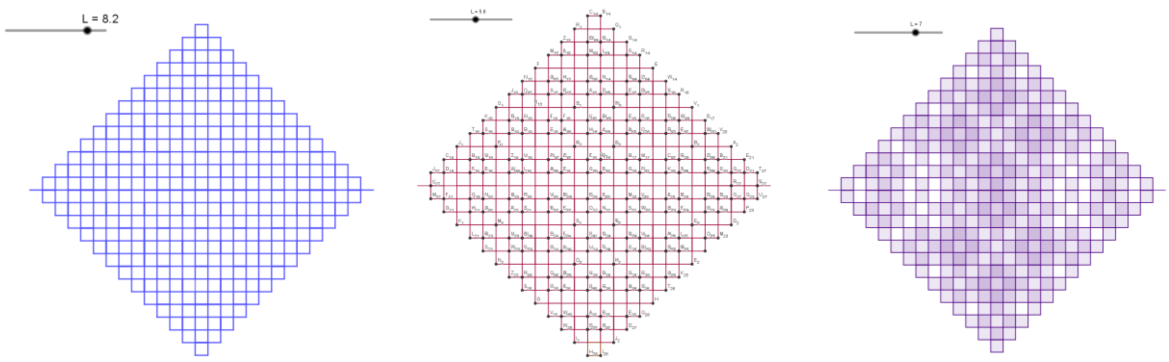
[26] O esboço do Acadêmico I, segundo relato dele, ficou incompleto na parte superior devido à falta de espaço disponibilizado.

Comparando com a Atividade 1 da Oficina 1 (esboço do fractal hexagonal de Dürer), constatamos haver uma melhoria significativa nas representações, pois aproximadamente 64% conseguiram esboçar a Curva de Peano conforme deveria ser. Não houve, naquela situação, nenhum esboço correto para o fractal hexagonal de Dürer.

Dando continuidade à Oficina 3, iniciamos a Atividade 2, que envolveu a construção da Curva de Peano no *GeoGebra*. Da mesma forma que na confecção do fractal hexagonal de Dürer, foi apresentado um passo a passo de sua construção. Explicamos como fazer para os níveis 0 e 1 e os acadêmicos solicitaram um tempo para tentar realizar os níveis 2 e 3. Todos os participantes concluíram a tarefa (RF), conforme podemos observar na Figura 45, com as construções dos acadêmicos B, E e H.

Figura 45 – Curva de Peano apresentada pelos Acadêmicos B, E e H

Acadêmico B | Acadêmico E | Acadêmico H

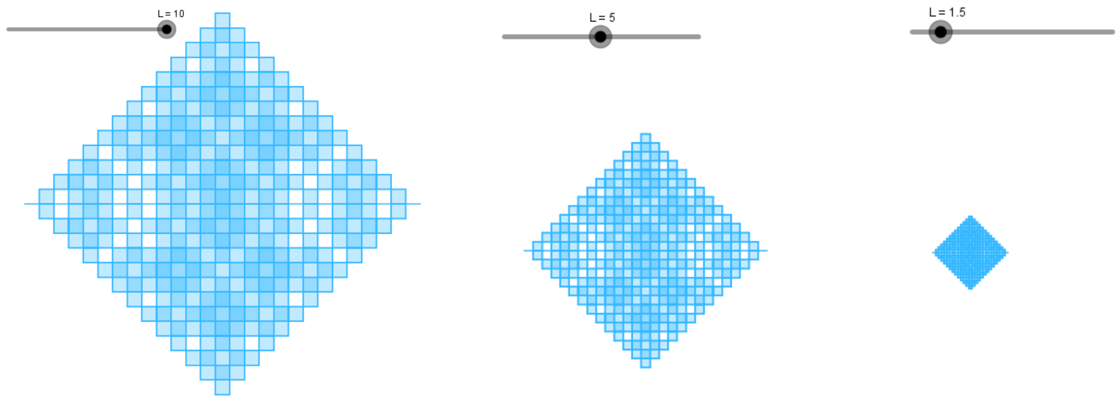


Fonte: acervo do autor.

Notamos que os acadêmicos tiveram maior facilidade na hora da construção. Isso pode ser devido a dois fatores: o primeiro, eles já estarem familiarizados com os comandos do *GeoGebra*; e o segundo, pela construção ser realizada por processos iterativos a partir do nível 1.

Ao final da construção, o Acadêmico G percebeu uma propriedade e comentou que, se movimentasse o controle deslizante para um valor máximo, um valor mínimo e um valor mediano, a área da região apresentada na tela seria a de um quadrado de lado L (Figura 46). Foi a partir da visualização que esse discente inferiu um dos futuros questionamentos que faríamos a respeito da Curva de Peano. Isso vem ao encontro da ideia de Cifuentes (2010) quando relata que, por meio da visualização, é possível argumentar e esse foi um exemplo prático disso.

Figura 46 – Curva de Peano apresentada pelo Acadêmico G



valor máximo valor mediano valor próximo de mínimo

Fonte: acervo do autor.

Após a finalização das construções, iniciamos a Atividade 3. Nessa parte da oficina, iríamos fazer questionamentos que analisassem a construção realizada. O primeiro deles era referente ao número de segmentos e à área gerada em cada quadrado, ou seja, os acadêmicos, usando os RLN e RF, deveriam observar e realizar um RS desde o nível 0 até chegar ao nível *n*. Portanto, tivemos como registros de partida o RLN e RF e registro de chegada o RS. Vejamos, na figura 47, a resposta apresentada pelo Acadêmico L.

Figura 47 – Resposta do Acadêmico L para a primeira questão da Atividade 3 Oficina 3

a) A partir da construção da Curva de Peano, analisar e preencher o Quadro 1 determinando a medida do lado e o número de segmentos gerados em cada nível até chegar ao nível n. Salientamos que n é um número natural qualquer.

Quadro 1 - Tamanho do lado e números de segmentos gerados na Curva de Peano de nível n.

	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	...	Nível n
Lado	L	$\frac{L}{3}$	$\frac{L}{9}$	$\frac{L}{27}$	...	$\frac{L}{3^n}$
Número de segmentos	3	9	81	729	...	9^n
Área de cada quadrado gerado	L^2	$\frac{L^2}{9}$	$\frac{L^2}{27}$	$\frac{L^2}{729}$	...	$\frac{L^2}{9^n}$

Fonte: acervo do autor.

Não houve dificuldade para esse primeiro questionamento e todos chegaram à reposta correta, consequentemente concluímos que houve conversão entre os registros. Em seguida, passamos para o segundo questionamento, referente à soma do comprimento dos segmentos da Curva de Peano. Essa questão foi dividida em duas partes, a primeira refere-se ao preenchimento de um quadro e a segunda é relativa à soma do comprimento dos segmentos. Da mesma forma que na questão anterior, os registros de partida foram o RLN e RF e registro de chegada o RS. Vejamos, na Figura 48 a resposta do Acadêmico C para a primeira parte do segundo questionamento.

Figura 48 – Resposta do Acadêmico C para a primeira parte da segunda questão da Atividade 3 Oficina 3

b) Se pensar em um valor para n muito elevado, ou seja, quando n tende a infinito, o que ocorre com a soma do comprimento dos segmentos, isto é, S_n?

A soma do comprimento dos segmentos na Curva de Peano é dada pelo número de segmentos multiplicado pelo tamanho do seu lado. Para melhor organização preencha o Quadro 2.

Quadro 2 – Soma do comprimento dos segmentos na Curva de Peano.

Nível	Soma dos segmentos
0	$1\ell = \ell$
1	$S_1 = 9 \cdot \frac{\ell}{3} = \frac{9}{3}\ell = 3\ell$
2	$S_2 = 81 \cdot \frac{\ell}{9} = \frac{81}{9}\ell = 9\ell$
3	$S_3 = 729 \cdot \frac{\ell}{27} = \frac{729}{27}\ell = 27\ell$
⋮	⋮
n	$S_n = 9^n \cdot \frac{\ell}{3^n} = \frac{3^{2n}}{3^n}\ell = 3^{2n-n}\ell = 3^n\ell$

Fonte: acervo do autor.

Já na segunda parte, os participantes chegaram à resposta esperada, porém quatro deles responderam usando a notação de limite (RS), dois optaram por escrever (RLN) e cinco atenderam à solicitação por meio da escrita e notação de limite (RLN e RS). Concluímos que houve conversão entre os registros. Na Figura 49, apresentamos a resposta do Acadêmico C, que utilizou duas notações para fazer sua justificativa.

Figura 49 – Resposta do Acadêmico C para a segunda questão da Atividade 3 da Oficina 3

$$\lim_{n \to \infty} 3^n \ell = \infty$$

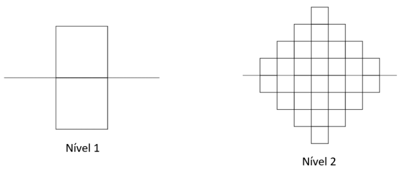
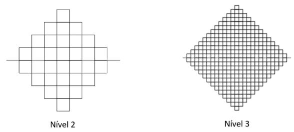
Quanto maior for o valor de n, menor será cada segmento, que tenderá ao infinito quando somado todos segmen_tos.

Fonte: acervo do autor.

Outra forma de responder seria utilizando a planilha do *GeoGebra*. Foi demonstrado como poderia ser utilizada e apresentamos a solução, comparando com as respostas obtidas pelos discentes. Mostramos que o resultado é o mesmo utilizando os dois recursos.

Os próximos 3 questionamentos foram referentes ao número de segmentos e número de quadrados gerados na Curva de Peano entre o nível 0 e o 1; entre o nível 1 e o 2 e entre o nível 2 e o 3. Para facilitar as respostas, foram apresentadas as imagens dos níveis 0, 1 e 2, para ser feita a contagem. Os discentes já haviam construído o nível 3 anteriormente. Não houve dificuldades para apresentarem as respostas, como pode ser observado na Quadro 22.

Quadro 22 – Respostas apresentadas pelos Acadêmicos E, K e L para o terceiro, quarto e quinto questionamentos da Oficina, respectivamente

c) Com base na imagem, o que você observa que está ocorrendo na passagem da construção do nível 0 para o nível 1?  	Resposta do Acadêmico E o comprimento do segmento de nivel o é um segmento de tamanho L E, o nivel 1 possui 9 segmentos, ou seja, o tamanho do segmento é $\frac{L}{3}$
d) Com base na imagem, o que você observa que está ocorrendo na passagem da construção do nível 1 para o nível 2?  	Resposta do Acadêmico K Nível 1 9 segmentos $\frac{L}{3}$ comprimento 2 quadrados Nível 2 81 segmentos $\frac{L}{9}$ tamanho 32 quadrados
e) Com base na imagem, o que você observa que está ocorrendo na passagem da construção do nível 2 para o nível 3?  	Resposta do Acadêmico L Nível 2 - 81 segmentos - Comprimento $\frac{L}{9}$ 32 quadrados. Nível 3 - 729 segmentos - Comprimento $\frac{L}{27}$ 338 quadrados.

Fonte: acervo do autor.

Acreditávamos que, para o quinto questionamento, os participantes poderiam ter dificuldades em determinar o número de quadrados gerados na Curva de Peano no nível 3. Porém, quase que imediatamente foram para a tela do computador e contaram quantos quadrados havia na figura. Novamente, fizeram o uso da visualização para chegar a uma resposta.

Nos cinco primeiros questionamentos, tivemos como registro de partida os RLN e RF e, como registro de chegada, os acadêmicos apresentaram RS e/ou RLN. Essas atividades foram pensadas e elaboradas para que os participantes mobilizassem mais de um tipo de representação, o que é sugerido por Duval (2009) e, a partir delas, chegassem por meio de tratamentos e conversões à reposta correta. Conjecturamos que houve a compreensão dos objetos matemáticos mobilizados nessas atividades.

Nesse contexto, destacamos a relevância dos recursos trazidos pelo *GeoGebra* para que os alunos possam buscar seus próprios caminhos na direção do conhecimento matemático. Assim, dentro de um ambiente controlado de erro, podem dar vazão as suas ideias sem que passos equivocados tragam maiores consequências. Essa liberdade de tentar, sem receio de errar, poderá contribuir para o seu gosto pela experimentação, que levará à construção de novas ideias, conceitos e pensamentos. Nesse sentido, Papert (1994) destaca que as construções mentais ocorrem de modo especialmente venturoso quando são apoiadas pela construção mais pública, no mundo concreto. Assim, criam-se possibilidades de exames, discussões e conjecturas. Ainda, o autor ressalta que as TD devem ser utilizadas como instrumentos que auxiliam os alunos a trabalhar e a pensar, tornando-se meios para a realização de projetos, fonte de pesquisa de conceitos e um elemento capaz de trazer ao mundo real construções mentais diversas.

Para finalizar, o sexto e último questionamento foi: se continuarmos as iterações até chegarmos a um nível *n*, em que *n* é um valor muito elevado (*n* tendendo a infinito), o que podemos conjecturar a respeito da área da superfície formada nesse processo? Essa questão corresponde àquela que o Acadêmico G havia respondido, anteriormente, por meio da visualização.

> *Que cada vez mais vai ser preenchida com os quadradinhos, podendo ser calculada pela área do quadrado.* (Acadêmico A).
> *Com n muito elevado, o valor da área da superfície irá tender a ser a área do quadrado.* (Acadêmico B).
> *A área vai ser totalmente preenchida, podendo ser calculada pela área do quadrado.* (Acadêmico C).
> *A área de um quadrado.* (Acadêmico E).
> *Que a área da figura fica preenchida e forma um quadrado, sendo que sua área pode ser calculada por* l^2. (Acadêmico F).
> *Ela pode ser calculada pela área do quadrado de lado l.* (Acadêmico G).
> *A área vai ficar cada vez mais preenchida, até ficar totalmente, e poderá ser calculada pela área de um quadrado.* (Acadêmico H).
> *Quando n tender ao infinito a área da figura ficará cada vez mais próxima de ser totalmente preenchida se assemelhando e podendo ser calculada como a área de um quadrado de lado l.* (Acadêmico I).
> *Uma área de um quadrado.* (Acadêmico J).
> *A área será totalmente preenchida e poderá ser calculada pela área de um quadrado.* (Acadêmico K).
> *Vai ficar igual a área de um quadrado.* (Acadêmico L).

Podemos observar que todos os discentes chegaram à conclusão de que, quando *n* for muito elevado, o valor da área da superfície tende a ser a área de um quadrado, porém apenas os acadêmicos F, G e I relataram que essa área poderia ser calculada pela medida do lado desse quadrado.

Após terminar o relato da Oficina 3, mostramos, no Quadro 23, um resumo dos resultados das atividades propostas, assim como o número e a porcentagem de acadêmicos que as acertaram.

Quadro 23 – Quadro-resumo das atividades da Oficina 3

<table>
<tr><th colspan="2">Atividades</th><th>Número de alunos que acertaram</th><th>% de acertos</th></tr>
<tr><td colspan="2">Atividade 1 (conhecendo a Curva de Peano)</td><td>7</td><td>64</td></tr>
<tr><td colspan="2">Atividade 2 (construção da Curva de Peano)</td><td>11</td><td>100</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Atividade 3 (explorando a Curva de Peano)</td><td>Item a</td><td>11</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Item b</td><td>11</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Item c</td><td>11</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Item d</td><td>11</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Item e</td><td>11</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Item f</td><td>11</td><td>100</td></tr>
</table>

Fonte: elaborado pelo autor.

O Quadro 23 mostra que, na Atividade 1, houve 64% de acertos. Constatamos uma melhora grande em relação à Atividade 1 da Oficina 1, na qual não houve acerto. Em conversa com os acadêmicos, eles justificaram essa melhoria devido a acharem que a descrição da construção da Curva de Peano (RLN) estava melhor escrita.

A Atividade 2, em função de eles estarem mais familiarizados aos comandos do *GeoGebra* e também de que o número de passos para realizar cada iteração ser menor, percebemos que a construção realizada foi mais rápida em comparação com a do fractal hexagonal de Dürer.

No entanto, para as Atividade 3, como tivemos a preocupação de mobilizar pelo menos dois tipos de registros (RLN e RF) e, consequentemente, tratamentos e conversões entre eles, acreditamos ser esse um dos motivos pelos quais todos os acadêmicos chegaram às respostas corretas. Colaborando essa ideia, Damm (2012) relata que, quando pensamos no processo de ensino e aprendizagem, devemos não só levar em conta a formação das representações e os tratamentos, mas também a conversão entre os diferentes tipos de registros de representação de um mesmo objeto matemático.

Também, durante a aplicação da segunda questão (item b) dessa atividade, percebemos que poderíamos ter solicitado aos acadêmicos a utilização da planilha do *GeoGebra* para chegar à resposta e, dessa forma, incentivar o uso dessa ferramenta.

Ao concluir essa oficina, constatamos que novamente conseguimos alcanças os objetivos propostos, desenvolvendo a parte histórica, a construção e as explorações de relações geométricas da Curva de Peano. Isso foi percebido pelas respostas aos questionamentos apresentadas pelos discentes.

6.5 Oficina 4

A Oficina 4, realizada em um único dia, no intervalo de uma semana, foi dividida em três atividades: (1) conhecendo, (2) construindo e (3) explorando o Tetraedro de Sierpinsky. Nessa última oficina, não estavam presentes os Acadêmicos F e G.

Iniciamos a oficina apresentando um panorama geral do que seria desenvolvido. Com o intuito de estimular a imaginação e a visualização, antes de exibirmos a imagem do Tetraedro de Sierpinsky, solicitamos realizarem um esboço dele a partir da apresentação da sua definição. Para Flores (2007, p. 34), "a visualização não é como um fim em si mesma, mas um meio para o entendimento de conceitos matemáticos". Nesse sentido acreditamos ser importante estimular a imaginação e a visualização dos discentes.

Assim, apresentamos um RLN (registro de partida) e verificamos se houve ou não a conversão para o RF (registro de chegada). No Quadro 24, trazemos como efetuar a construção do Tetraedro de Sierpinsky (RLN) e a imagem (RF) do referido fractal.

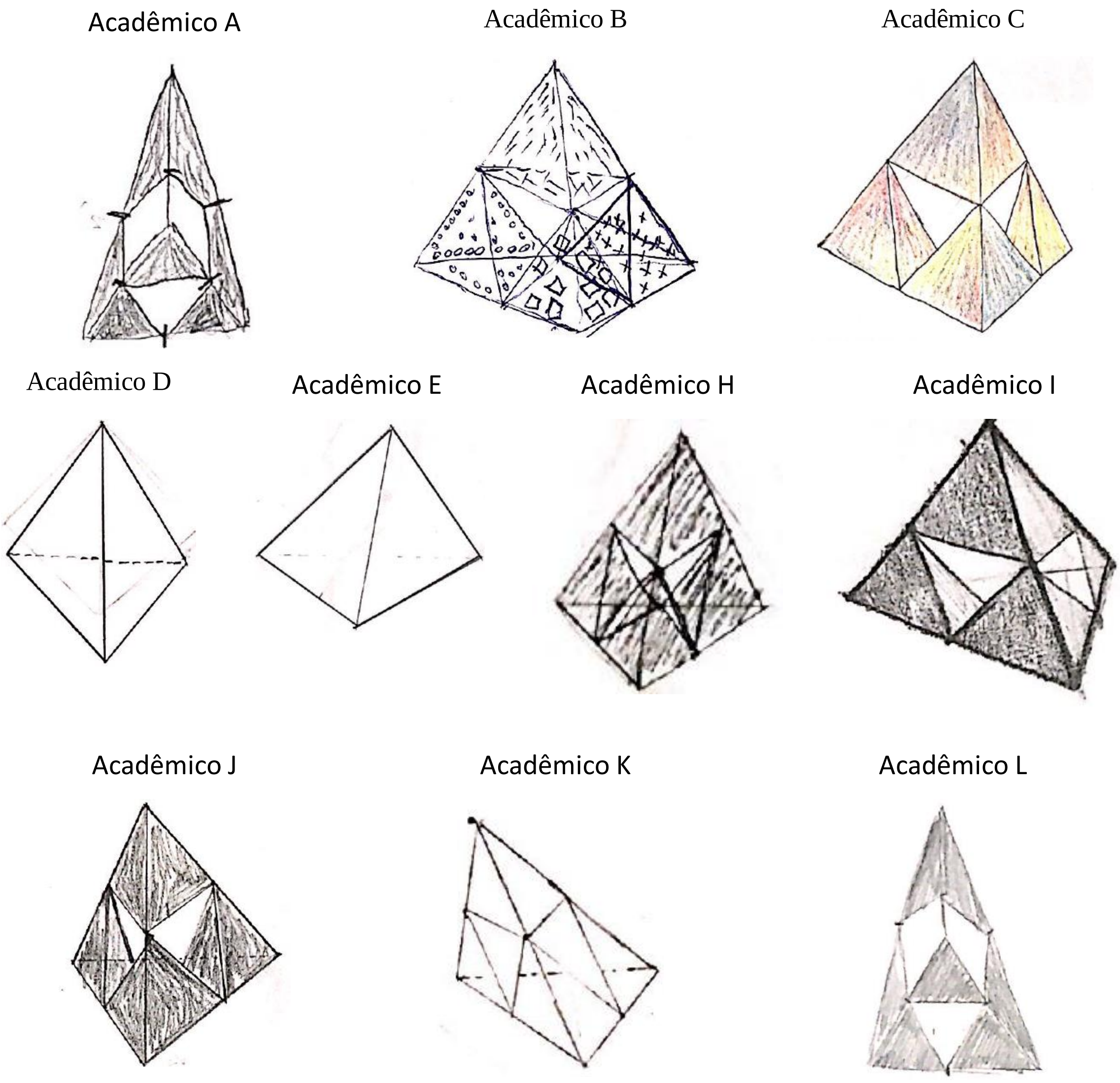
Quadro 24 – Conversão do RLN para RF na Tetraedro de Sierpinsky

RLN	RF
Primeiramente, localizamos os pontos médios de cada aresta do tetraedro e unimos, dois a dois, esses pontos médios por doze segmentos de reta, formando seis tetraedros menores e congruentes. Retiramos os dois tetraedros centrais (que formam um octaedro). Disso, resultam quatro tetraedros para, novamente, aplicarmos o mesmo processo. A cada nova iteração, a quantidade de tetraedros fica multiplicada por 4 e a medida da aresta é a metade da aresta do tetraedro anterior.	

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Estipulado um tempo inicial para a realização do esboço, apenas os Acadêmicos D e E não conseguiram fazer o nível 1 do Tetraedro de Sierpinsky. Alegando que não eram bons em fazer desenhos, realizaram apenas o nível 0. Na Figura 50, temos os esboços feitos pelos acadêmicos.

Figura 50 – Esboços apresentados para o Tetraedro de Sierpinsky



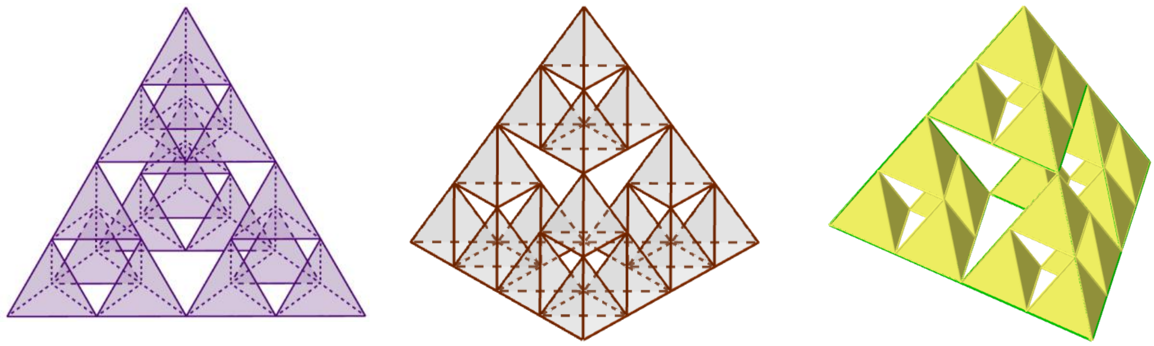
Fonte: acervo do autor.

Após o término do tempo destinado para a atividade, apresentamos, novamente, a imagem do Tetraedro de Sierpinsky. Comparando com a Atividade 1 da Oficina 1 (esboço do fractal hexagonal de Dürer, 0% de acerto) e com a Atividade 1 da Oficina 3 (Curva de Peano, 64% de acerto), conclui-se que houve melhoria nos esboços, pois 80% conseguiram desenhar o Tetraedro de Sierpinsky da forma correta. Destacamos que os dois primeiros esboços, o do fractal hexagonal de Dürer e o da Curva de Peano, eram fractais em duas dimensões, enquanto o terceiro era em três dimensões. Pelo fato de os acadêmicos já estarem habituados com esse tipo de dinâmica e pelo resultado de 80% ter sido satisfatório, acreditamos ter conseguido estimular a imaginação e a visualização destes acadêmicos, além da realização da conversão entre o RLN e o RF.

Prosseguindo com a oficina, iniciamos a Atividade 2, que envolveu a construção do Tetraedro de Sierpinsky no *GeoGebra*. A mesma sistemática utilizada na construção do fractal hexagonal de Dürer e da Curva de Peano foi aqui realizada, ou seja, fornecemos um roteiro com o passo a passo da construção. Apresentamos a construção dos níveis 0 e 1 e, por conta própria, eles já iniciaram o nível 2. Todos concluíram suas construções (RF), conforme podemos observar na Figura 51, em que são trazidas as dos acadêmicos H, J e K.

Figura 51 – Tetraedro de Sierpinsky apresentada pelos Acadêmicos H, J e K

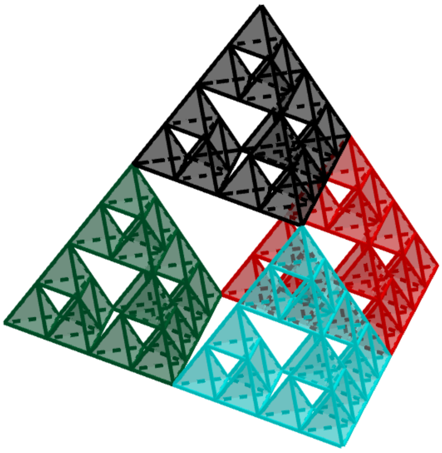
Acadêmico H | Acadêmico J | Acadêmico K



Fonte: acervo do autor.

Cada discente teve seu tempo para realizar a atividade no *GeoGebra*, uns mais rápidos, outros mais vagarosos. Em comparação com as outras construções solicitadas anteriormente, eles foram mais rápidos aqui, o que julgamos ser devido à familiarização com os comandos do *GeoGebra*, pelos processos iterativos e pela construção ser até o nível 2. Dessa forma, o Acadêmico L, que foi o primeiro a finalizar a construção do nível 2, perguntou se poderia continuar e fazer as iterações, chegando ao nível 3, com o que concordamos. Porém, solicitamos que, antes de continuar, salvasse o nível 2, para fornecer o registro para o professor. Durante o tempo restante destinado à construção, o discente não conseguiu finalizar o nível 3, então combinamos que ele faria em outro horário essa construção e nos enviaria. Passados dois dias, o Acadêmico L enviou seu arquivo com a construção do nível 3, a qual trazemos a seguir, na Figura 52.

Figura 52 – Nível 3 do Tetraedro de Sierpinsky apresentada pelo Acadêmico L



Fonte: acervo do autor.

Esse acadêmico é o mesmo que fez a construção do fractal octogonal de Dürer. Ficamos curiosos sobre as motivações que o levaram a ir além do que fora solicitado. Para tanto, realizamos alguns questionamentos, como seguem.

> *[professor/pesquisador] O que levou (motivou) você a realizar a construção do fractal octogonal de Dürer e o Tetraedro de Sierpinsky nível 3?*
> *[Acadêmico L] Depois de construir o fractal hexagonal de Dürer, fiquei curioso como seria a construção diminuindo o número de lados e/ou aumentando, primeiro fiz o triângulo e depois tentei fazer com oito lados. E sobre o tetraedro também estava curiosa para ver como ficaria o nível 3.*
> *[professor/pesquisador] Essa curiosidade a que você se refere foi uma curiosidade matemática de fazer os cálculos e descobrir o tamanho dos lados, no fractal octogonal de Dürer e Tetraedro de Sierpinsky, ou foi mais pela beleza e estética dos fractais?*
> *[Acadêmico L] Acho que uma mistura dos dois, a necessidade de descobrir os cálculos e a aplicação para construir os fractais.*

Com esse registro do acadêmico, percebemos que conseguimos estimular o discente em ir além do que foi desenvolvido na sala de aula. Em relação à beleza, Barbosa (2005) afirma sobre a existência dessa qualidade nas figuras fractais como motivação para o seu estudo, o que foi percebido na fala desse participante. Acreditamos ser inerente à docência incentivar o alunado a avançar além do que é estudado em sala de aula.

Dando continuidade à oficina, iniciamos a Atividade 3 com as explorações geométricas a partir da construção realizada na Atividade 2. O primeiro questionamento era referente ao número de tetraedros e arestas geradas em cada nível, ou seja, os acadêmicos, a partir do RLN e RF (registro de partida), deveriam observar e realizar a conversão para um RS (registro de chegada) desde o nível 0 até chegar ao nível *n*. Vejamos a resposta apresentada pelo Acadêmico E (Figura 53).

Figura 53 – Resposta do Acadêmico E para a primeira questão da Atividade 3 da Oficina 4

a) A partir da construção do Tetraedro de Sierpinsky, analisar e preencher a Quadro 1. Determine a quantidade de tetraedros e arestas geradas, bem como a medida delas, em cada nível, até chegar ao nível n. Salientamos que n é um número natural qualquer.

Quadro 1 - Medida do lado, número de hexágonos e área (em relação a A_0) para o Tetraedro de Sierpinsky de nível n.

	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	...	Nivel n
Lado	ℓ	$\frac{\ell}{2}$	$\frac{\ell}{4}$	$\frac{\ell}{8}$	...	$\frac{\ell}{2^n}$
Número de arestas	6	24	96	384	...	6.4^n
Número de tetraedros	1	4	16	64	...	4^n

Fonte: acervo do autor.

Como a dinâmica adotada é semelhante à das outras oficinas, percebemos que não houve dificuldades diante desse primeiro questionamento, chegando à reposta correta. Acreditamos ser importante para a formação desses acadêmicos aliar o uso da informática, em especial a inserção do *GeoGebra*, às práticas pedagógicas. Borba e Penteado (2010) afirmam que a Educação Matemática e a Informática não devem ser consideradas de forma separada, ou seja, as duas devem estar juntas com a finalidade de aproveitar as potencialidades que essa ligação possa gerar. Ainda, os autores relatam que a Informática precisa ser vista como uma possibilidade para a elaboração de novas práticas pedagógicas, as quais possam desencadear melhoria no processo de ensino e de aprendizagem. Corroborando essa ideia, Perrenoud (2002, p.130) explica que os *softwares* "ajudam a construir conhecimentos ou competências porque tornam acessíveis as operações ou manipulações impossíveis ou muito desencorajadoras se reduzidas ao papel e lápis".

Dando continuidade, passamos para o segundo questionamento referente à soma das medidas das arestas do Tetraedro de Sierpinsky. Essa questão foi dividida em duas partes, a primeira referente ao preenchimento de um quadro e a segunda relativa à soma das medidas das arestas. Como registros de partida, tivemos o RLN e o RS e como registro de chegada, o RLN ou RS. Vejamos na Figura 54 a resposta do Acadêmico C para a primeira parte do segundo questionamento.

Figura 54– Resposta do Acadêmico C para a primeira parte da segunda questão da Atividade 3 da Oficina 4

b) Se você pensar em um valor para *n* muito elevado, ou seja, *n* tendendo a infinito, o que ocorre com o soma das medidas dos comprimento das arestas, isto é, S_n?

A soma das medidas dos comprimento das arestas de um tetraedro é dada por $S = 6l$, a qual é denotada de S. Porém, a cada nível do Tetraedro de Sierpinsky se modifica a quantidade de tetraedros e a medida da aresta. Sendo assim, essa soma é dada pela multiplicação do número de tetraedros gerados em cada nível por 6 (número de arestas em cada tetraedro) e pela medida do lado l do tetraedro (que em cada nível terá um novo valor). Para melhor organização preencha o Quadro 2.

Quadro 2 – Soma das arestas do Tetraedro de Sierpinsky.

Nível	Soma das arestas
0	$S_0 = 6l = S$
1	$S_1 = 4.\left(\frac{6l}{2}\right) = 2S$
2	$S_2 = 16.\left(\frac{6l}{4}\right) = 4S$
3	$S_3 = 64.\left(\frac{6l}{8}\right) = 8S$
⋮	⋮
n	$S_n = 2^n.S$

Fonte: acervo do autor.

Conforme esperávamos, os participantes chegaram à resposta correta. Para a segunda parte da questão, tivemos apenas um que respondeu usando a notação de limite (RS), e os demais, nove acadêmicos, optaram por escrever (RLN). Na Figura 55, apresentamos a resposta do Acadêmico B, que utilizou notação de limite, e a do Acadêmico H, que explicou sua resposta.

Figura 55 – Respostas dos Acadêmicos B e H para a segunda parte da segunda questão da Atividade 3 da Oficina 4

Acadêmico B

$\lim_{n \to +\infty} 2^n.S = +\infty$

Acadêmico H

Quanto maior for o valor de n, maior vai ser o valor da soma das medidas do comprimento das arestas, ou seja, irá tender ao infinito.

Fonte: acervo do autor.

Ademais, mostramos que existe outra maneira de responder utilizando a planilha do *GeoGebra*. Apresentamos essa solução e a comparamos com as respostas obtidas pelos acadêmicos, mostrando que o resultado foi o mesmo, como não poderia deixar de ser.

Passamos para o terceiro questionamento, referente à soma das áreas do Tetraedro de Sierpinsky. Essa questão também foi dividida em duas partes, a primeira referente ao preenchimento de um quadro e a segunda relativa à soma das áreas. Da mesma forma que no questionamento anterior, os registros de partida foram o RLN e o RS; os de chegada, que os acadêmicos apresentaram, foram o RLN ou o RS. Na Figura 56, mostramos a resposta do Acadêmico A para a primeira parte do terceiro questionamento.

Figura 56 – Resposta do Acadêmico A para a primeira parte da terceira questão da Atividade 3 da Oficina 4

c) Conjecturando um valor para n muito elevado (n tendendo a infinito), o que você observa acontecer com a área total A_{t_n}?

A área total de um tetraedro é dada por: $A_t = l^2\sqrt{3}$, (denotada por A). Para cada nível do Tetraedro de Sierpinsky, ocorre variação do número de tetraedros gerados e a medida da aresta, logo a área total (para um nível n) será o resultado da multiplicação de $\sqrt{3}$. pelo número de tetraedros de cada nível pela medida de sua aresta elevado ao quadrado Para melhor organização preencha o Quadro 3.

Quadro 3 – Área total do Tetraedro de Sierpinsky.

Nível	Soma das áreas
0	$At_0 = l^2\sqrt{3} = A$
1	$At_1 = 4\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2\cdot\sqrt{3} = \frac{4l^2}{4}\sqrt{3} = A$
2	$At_2 = 16\cdot\left(\frac{l}{4}\right)^2\cdot\sqrt{3} = \frac{16}{16}l^2\sqrt{3} = A$
3	$At_3 = 64\cdot\left(\frac{l}{8}\right)^2\cdot\sqrt{3} = \frac{64}{64}l^2\cdot\sqrt{3} = A$
⋮	⋮
n	$At_n = 4^n\left(\frac{l}{2^n}\right)^2\sqrt{3} = \frac{2^{2n}}{2^{2n}}\cdot l^2\sqrt{3} = A$

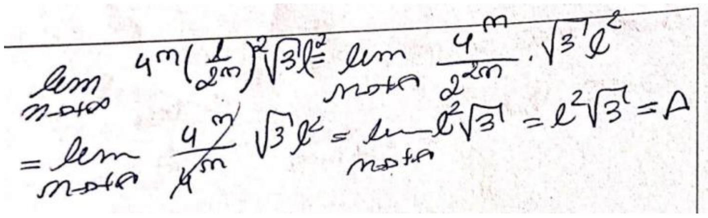
Fonte: acervo do autor.

Todos os discentes chegaram à resposta correta, porém, para a segunda parte da questão, novamente um respondeu usando a notação de limite (RS), e os nove optaram por escrever

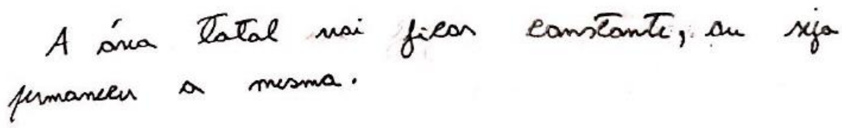
(RLN). Na Figura 57, apresentamos a resposta do Acadêmico B, que utilizou notação de limite, e do Acadêmico D, que explicou sua resposta.

Figura 57 – Respostas dos Acadêmicos B e D para a segunda parte da terceira questão da Atividade 3 da Oficina 4

Acadêmico B



Acadêmico D



Fonte: acervo do autor.

Fazendo uma análise dos três primeiros questionamentos, tomamos o cuidado de mobilizar mais de um tipo de representação (RLN e RS), conforme é sugerido por Duval (2009), para que houvesse a compreensão dos objetos matemáticos. Nessas questões, houve conversões entre os diferentes tipos de registros. Ainda segundo o autor, a compreensão em Matemática requer a existência da distinção do objeto e sua representação, além da percepção de que um mesmo objeto pode ser representado por meio de outras formas. Desse modo, a elaboração conceitual requer a coordenação de diferentes registros de representação de uma mesmo objeto matemático.

Finalizada a terceira questão, passamos para o quarto e último questionamento, referente ao volume do Tetraedro de Sierpinsky. Essa questão, para melhor organização, foi dividida em duas partes, a primeira é referente ao preenchimento de um quadro e a segunda é relativa à soma dos volumes. Como registros de partida, tivemos o RLN e o RS e como registro de chegada, o RLN ou o RS. Houve conversões do RLN para RS e do RS para RLN. Pensando nos registros mobilizados, Duval (2010, p.14) relata que “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de, ao menos, dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar, a todo momento, de registro de representação.” Corroborando essa ideia, Damm (2012) menciona que é somente por meio da coordenação de vários registros de representação, pelo indivíduo que apreende, que será possível a apreensão conceitual dos objetos matemáticos. Na Figura 58, apresentamos a resposta do Acadêmico I para a primeira parte do quarto questionamento.

Figura 58 – Resposta do Acadêmico I para a primeira parte da quarta questão da Atividade 3 da Oficina 4

d) Como seria o volume do Tetraedro de Sierpinsky (V_n) para valor para n muito elevado (n tendendo a infinito)?

O volume de um tetraedro é dado por: $V = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$. Salientamos que para cada nível do Tetraedro de Sierpinsky o que irá variar será a medida de sua aresta. Para melhor organização preencha o Quadro 4.

Quadro 4 – Volume do Tetraedro de Sierpinsky para n interações.

Nível	Soma dos volumes
0	$\frac{l^3\sqrt{2}}{12} = V$
1	$\frac{4(\frac{l}{2})^3\sqrt{3}}{12} = \frac{4 \cdot \frac{l^3}{8}\sqrt{3}}{12} = \frac{4}{8} \cdot V = \frac{1}{2} V$
2	$V_2 = \frac{16(\frac{l}{4})^3\sqrt{2}}{12} = \frac{16}{64} \cdot \frac{l^3\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{4} \cdot V$
3	$V_3 = \frac{64(\frac{l}{8})^3\sqrt{2}}{12} = \frac{64}{512} \cdot \frac{l^3\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{8} \cdot V$
⋮	⋮
n	$V_n = \frac{4^n \cdot (\frac{l}{2^n})^3\sqrt{2}}{12} = \frac{2^{2n}}{2^{3n}} \cdot \frac{l^3\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{2^n} \cdot V$

Fonte: acervo do autor.

Novamente os discentes chegaram à resposta correta. Acreditamos ser importante incentivar os acadêmicos a realizarem manipulações algébricas e, assim, desenvolver o pensamento algébrico que, segundo Ponte, Branco e Matos (2009), envolve o representar, o raciocinar e o resolver problemas. Dessa maneira, esse questionamento envolveu: o representar, por meio dos RS e RLN; o raciocinar de como seria o volume de um nível n em função de um volume inicial (V); e o resolver problemas, por meio das manipulações algébricas para obter a reposta desejada.

Para a segunda parte da questão, tivemos um resultado usando a notação de limite (RS), e os demais nove participantes escreveram (RLN). Vejamos na Figura 59 a resposta do Acadêmico B, que utilizou a notação de limite, e a do Acadêmico C, que explicou sua resposta.

Figura 59 – Respostas dos Acadêmicos B e C para a segunda parte da quarta questão da Atividade 3 da Oficina 4

Acadêmico B

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} V = 0$, PODEMOS DEIXAR IGUAL:

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \cdot V = V \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = V \cdot 0 = 0$

Acadêmico C

Quanto maior o valor de n, menor será o volume do tetraedro, isto é, o volume tenderá a zero.

Fonte: acervo do autor.

Novamente, poderíamos ter explorado o uso da planilha aqui. Sugerimos repensar para uma próxima aplicação a solicitação de seu uso, o que poderia enriquecer nossa discussão. Ao concluirmos essa última oficina, percebemos que os discentes já estavam habituados com a dinâmica, pois o processo foi semelhante ao das outras oficinas para fazer a generalização, não havendo dificuldades na realização das atividades propostas.

Após terminar a Oficina 4, mostramos, no Quadro 25, um resumo dos resultados das atividades propostas, assim como o número e a porcentagem de acadêmicos que as acertaram.

Quadro 25 – Quadro-resumo das atividades da Oficina 4

Atividades		Número de alunos que acertaram	% de acertos
Atividade 1 (conhecendo o Triângulo de Sierpinsky)		8	80
Atividade 2 (construção do Triângulo de Sierpinsky)		10	100
Atividade 3 (explorando o Triângulo de Sierpinsky)	Item a	10	100
	Item b	10	100
	Item c	10	100
	Item d	10	100

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

O Quadro 25 mostra que, na Atividade 1, ocorreu 80% de acertos. Dessa forma, houve uma melhora, em relação à Atividade 1 da Oficina 1, de 80%, e de 16%, em relação à Atividade 1 da oficina 3. Questionados sobre esse avanço, os acadêmicos relataram que um possível motivo estaria na redação da definição (RLN). Eles acharam mais simples e objetiva a escrita, sendo outra razão alegada já estarem habituados a esse tipo de dinâmica de utilizar a imaginação e a visualização.

Na Atividade 2, os discentes deveriam construir os níveis 0, 1 e 2 do fractal. Percebemos que, após a construção da primeira iteração (nível 1), os acadêmicos já se motivaram e foram realizando o nível 2 sem a necessidade do professor/pesquisador solicitar. Nessa última, os alunos levaram menor tempo para sua realização, comparado com as outras. Acreditamos que isso tenha ocorrido devido a construção ser até o nível 2 e já haver familiarização com os comandos do *GeoGebra*.

Já para as Atividade 3, conjecturamos que um dos motivos de termos obtidos 100% de acertos foi o cuidado de mobilizar pelo menos dois tipos de registros (RLN e RF) e, consequentemente, os tratamentos e as conversões entre eles.

De maneira geral, conseguimos inserir o uso da TD, com o uso do *GeoGebra*, porém não mais foi possível implementar o uso da planilha e da janela *CAS*, as quais foram efetivamente utilizadas na Oficina 2. O motivo desse acontecimento foi o fato de deixarmos livres, para os acadêmicos, a escolha das respostas, quando muitos optaram em descrever sua explicação (RLN) ou usaram a notação de limite (RS).

Finalizamos com os objetivos sendo alcançados, pois construímos e exploramos as relações geométricas envolvendo o Tetraedro de Sierpinsky. Isso foi observado pelas respostas aos questionamentos apresentadas pelos discentes.

Durante as atividades propostas nas quatro oficinas, os acadêmicos, passaram por vários tipos de registros. Para Duval (2009, 2012), realizar o domínio de diferentes registros de representação implica dominar as atividades cognitivas de identificar unidades significativas de cada registro, desenvolver tratamentos no domínio de cada um dos registros e converter unidades significativas de um registro de partida para um registro de chegada. Corroborando essa ideia, Damm (2012, p. 117) relata que “[...] é através das representações semióticas que se torna possível efetuar certas funções cognitivas essenciais do pensamento humano”, ou seja, as representações semióticas são indispensáveis ao pensamento matemático e à construção desse conhecimento. Com as atividades propostas e mediante as respostas apresentadas nas quatro oficinas, acreditamos ter mobilizado os registros necessários para a ocorrência da aprendizagem. O Quadro 26 apresenta uma síntese dos registros mobilizados de partida e de chegada em cada uma das atividades apresentadas nas quatro oficinas, assim como a porcentagem média de acertos.

Quadro 26 – Quadro-resumo das mobilizações das quatro oficinas

		Registro(s) mobilizado(s) de partida	Registro(s) mobilizado(s) de chegada	Média % de acertos
Oficina 1	Atividade 1	RLN	RF	0
	Atividade 2	RLN	RF	100
	Atividade 3	RLN e RF ou RLN e RS	RS ou RLN	100
	Atividade 4	RLN e RS	RS e/ou RLN	96
Oficina 2	Atividade 1	RF	RLN	69
	Atividade 2	RF e RS	RS	100
	Atividade 3	RS	RS	100
Oficina 3	Atividade 1	RLN	RF	64
	Atividade 2	RLN	RF	100
	Atividade 3	RLN e RF	RS e/ou RLN	100
Oficina 4	Atividade 1	RLN	RF	80
	Atividade 2	RLN	RF	100
	Atividade 3	RLN e RF	RS e/ou RLN	100

Fonte: elaborado pelo autor.

Como podemos observar, no Quadro 26, obtivemos uma porcentagem, com exceção da Atividade 1 da Oficina 1, entre 64% a 100%, o que consideramos um ótimo resultado, pois entendemos que houve a compreensão dos objetos matemáticos a partir de suas respectivas representações.

Em algumas das atividades, foi mobilizado apenas um tipo de registro de partida, entretanto, quanto mais registros pudermos apresentar aos discentes, melhor poderá ser a compreensão do objeto matemático, considerando que haverá tratamentos e conversões entre eles. Para Duval, é só a partir de conversões para diferentes registros que podemos distinguir o objeto matemático de sua representação, ao que ele acrescenta "[...] não é possível haver compreensão em matemática se não se distingue um objeto de sua representação" (DUVAL, 2009. p. 14). Ou seja, não podemos confundir os objetos matemáticos (um conjunto, uma função, um vetor, por exemplo), com suas representações (um desenho, uma definição, uma fórmula, por exemplo), destacando que um mesmo objeto pode ser dado por várias representações diferentes.

Por esse viés, o reconhecimento de um objeto matemático através de diversas representações é um motivo definitivo para que "[...] um aluno possa, por si próprio, transferir ou modificar formulações ou representações de informações durante uma resolução de problema" (DUVAL, 2010, p. 23). Dessa maneira, o trabalho pedagógico realizado, partindo desses registros, poderá proporcionar um exercício no funcionamento cognitivo do discente, considerando as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático.

Após a finalização da Oficina 4, solicitamos aos 10 acadêmicos presentes que permanecessem mais alguns minutos, pois queríamos aplicar um questionário com quatro itens. Esse tinha o intuito de saber a opinião deles a respeito das atividades desenvolvidas durante esses cinco encontros. No quadro 27, apresentamos o primeiro item, tendo todos marcado a alternativa sim.

Quadro 27 – Pergunta e respostas ao primeiro questionamento da pesquisa de opinião

Pergunta	Respostas
1) As expectativas que você tinha ao se inscrever no curso de Geometria Fractal foram atendidas? ( ) sim ( ) não ( ) em parte Indique, por favor, o que faltou?	Quatro alunos escreveram o seguinte no espaço o que faltou? *Faltou a presença de outros acadêmicos do curso de licenciatura em Matemática.* (Acadêmico B). *Não faltou nada, na verdade as expectativas foram mais que atendidas. Gostei muito mesmo!* (Acadêmico C). *Poderia ter tido mais construções no GeoGebra.* (Acadêmico E). *Poderia ter mais tempo, para fazermos algumas construções diferentes.* (Acadêmico J).

Fonte: acervo do autor.

O registro escrito do Acadêmico B é interessante, pois tivemos 23 interessados no Projeto de Ensino e, desses, 16 efetivaram a inscrição e 12 (75%) finalizaram o Projeto de Ensino, logo não foram preenchidas nove vagas. Não entraremos no mérito do porquê de os interessados não terem participado ou desistido, pois cada um, com certeza, teve seus motivos. Só podemos conjecturar que, se houvesse mais acadêmicos participando, teríamos uma maior diversidade de respostas para as oficinas, e quem sabe outras discussões e análises ocorreriam.

O Acadêmico C achou tudo muito interessante. Já o Acadêmico E relatou que gostaria de ter havido mais construções no *GeoGebra*. Em conversa com esse aluno, ele relatou que gostaria de ter construído outros fractais. Porém, cabe destacar que nossa intenção quando elaboramos as oficinas foi escolher construções pouco ou ainda não exploradas, selecionadas mediante a análise dos mapeamentos realizados para a pesquisa.

Em relação à escrita do Acadêmico J, quando registrou "construções diferentes", em entrevista relatou que poderia ser feita a construção de outros níveis das figuras propostas. Porém não foi nossa proposta criar muitos níveis, pois os processos são iterativos e algumas imagens poderiam demorar muito para serem produzidas. Acreditamos que fornecemos as ferramentas necessárias para esses discentes irem além de nossas propostas de construções. Um exemplo disso foi sobre o fractal octogonal de Dürer e o nível 3 do Tetraedro de Sierpinsky realizado pelo Acadêmico L.

Já a segunda questão foi dividida em três partes. No Quadro 28, apresentamos as perguntas e algumas respostas (houve muitas respostas semelhantes, então as agrupamos em cinco diferentes).

Quadro 28 – Pergunta e respostas ao segundo questionamento da pesquisa de opinião

Pergunta	Respostas
2) Em relação às atividades desenvolvidas durante o curso: a) Do que mais você gostou?	*Das construções no GeoGebra, por saber manusear pouco o GeoGebra foi um grande aprendizado.* (Acadêmico A). *Das expressões que elaboramos. Encontrar os termos genéricos, utilizar a noção de limite, para resolver as questões.* (Acadêmico B). *Eu gostei da Oficina 4 por que parece que ficou mais simples de fazer.* (Acadêmico D). *As construções feitas no GeoGebra, principalmente a Oficina 3.* (Acadêmico I). *As construções no GeoGebra. Em especial da primeira oficina.* (Acadêmico L).
b) Do que menos você gostou?	*Da oficina 3 por travar o computador.* (Acadêmico A). *Não houve algo que poderia dizer que não gostei.* (Acadêmico B). *Acho que todas as oficinas foram importantes.* (Acadêmico D). *Não houve algo que não tenha gostado.* (Acadêmico I). *Gostei de todas as atividades propostas.* (Acadêmico L)
Justifique sua resposta.	*O computador travou no momento do término da construção.* (Acadêmico A). *Gostei de todo o curso, e poderíamos ter algo de fractais nas ementas das disciplinas.* (Acadêmico B). *Eu gostei do curso por que a cada dia foram propostas desafiadoras.* (Acadêmico D). *Gostei mais das construções, pois através delas, pode-se ver de forma prática como um fractal é formado, o que para mim facilitou o aprendizado, além de nós dar a oportunidade de utilizar o GeoGebra.* (Acadêmico I). Ao construir os fractais no GeoGebra tornou-se mais fácil a visualização. (Acadêmico L).

Fonte: acervo do autor.

Em relação àquilo de que mais gostaram (todos responderam) e, pelos relatos apresentados, sentimos ter motivado esses discentes, pois foi um conteúdo do qual eles não tinham conhecimento e além disso puderam realizar construções no *GeoGebra*. Também, constatamos que as Oficinas 1 e 3 foram as mais apreciadas. Acreditamos que a Oficina 4, mesmo desenvolvendo construções no *GeoGebra*, não desafiou os discentes com novos comandos, apesar de ter envolvido a janela 3D.

Já para a segunda parte do questionamento: do que menos gostou, apenas cinco acadêmicos responderam. O Acadêmico A (pois os demais apenas disseram que gostaram das oficinas) relatou uma dificuldade relacionada à sua construção, ao "travar" o computador no final do processo. O "travar" foi no sentido de o computador deixar de funcionar corretamente, causando lentidão, ou mesmo o fechamento do *software* que estava sendo utilizado. Quando pensamos na construção de cada fractal, levamos em conta esse possível problema e foi um dos motivos pelo qual não foi solicitada a construção de outros níveis.

Para finalizar a terceira parte do questionamento, a justificativa, os cinco discentes que responderam a segunda parte também tiveram o cuidado de explicar. O Acadêmico B destacou a importância da temática fractal estar inserida nas ementas das disciplinas. Isso vem ao encontro do objetivo geral desta pesquisa, que é a possibilidade de inserção de noções de Geometria Fractal nos cursos de licenciatura em Matemática do IFFar com o uso das TD. Os Acadêmicos D e I, pelas escritas, justificaram do que mais gostaram, que foram as propostas e construções. O Acadêmico L destacou a importância da visualização a parir da construção no *GeoGebra*. Esse foi nosso intuito quando pensamos na produção dos fractais no *GeoGebra*, de facilitar o entendimento das explorações a partir da visualização. Segundo Goldenberg (1998, p. 37), os tipos de visualização de que os discentes necessitam,

> [...] tanto em contextos matemáticos como noutros, dizem respeito à capacidade de criar, manipular e "ler" imagens mentais de aspectos comuns a realidade; visualizar informação espacial e quantitativa, e interpretar visualmente a informação que lhe seja apresentada; rever e analisar passos anteriormente dados como objetos que podiam tocar e desenhar; e interpretar ou fazer aparecer, como por magia imagens de objetos ou ideias que nunca foram vistos.

Pensando por esse viés, uma das razões de ter inserido e investido na implementação da visualização nas Oficinas 1, 3 e 4 está associada às habilidades mentais e visuais que os acadêmicos podem vir a desenvolver e adquirir a partir desse tipo de atividade.

Como se trata de uma pesquisa de cunho qualitativo, Bogdan e Biklen (1994) ressaltam que pode ocorrer o surgimento de novas interpretações ou mesmo novas questões de pesquisa, sobre as quais não se havia pensado inicialmente. Nesse caso, surgiu a questão da exploração da visualização a partir da construção mental, dados o RLN e as explorações a partir da visualização da construção realizada no *GeoGebra*.

O terceiro questionamento envolveu saber a importância desse tipo de curso para a formação acadêmica dos discentes. Todos responderam sim, ou seja, é importante para sua formação acadêmica. Houve seis acadêmicos que justificaram suas respostas, porém, como elas foram semelhantes, agrupamos em três justificativas, representadas pelos Acadêmicos D, J e K. No Quadro 29, apresentamos a pergunta e as três respostas.

Quadro 29 – Pergunta e respostas ao terceiro questionamento da pesquisa de opinião

Pergunta	Respostas
3) Você considera importante cursos como este, ministrado para complementar sua formação acadêmica, visto que o conteúdo nele abordado não está contemplado no Projeto Pedagógico do Curso. ( ) sim ( ) não ( ) em parte Justifique sua resposta.	*Achei importante para a nossa formação por que ao utilizar softwares como o GeoGebra chama mais a atenção dos alunos.* (Acadêmico D). *Sempre acho importante fazer cursos além das aulas normais, pois acho de grande importância obter um pouco de conhecimento nos mais variados assuntos que se relacionem com a formação, que sejam de grande valia para nos futuramente.* (Acadêmico J). *Pois, propicia a interação do acadêmico com uma geometria diferente da Euclidiana, mostrando mais uma ferramenta de ensino que o acadêmico irá incorporar à sua formação.* (Acadêmico K).

Fonte: acervo do autor.

Observamos pelas respostas dos acadêmicos que eles consideram importante essa oferta de curso, mesmo ocorrendo fora do horário das aulas regulares. Consideramos que é a partir desse conhecimento apresentado na graduação que eles poderão levar essas experiências para suas futuras práticas pedagógicas na Educação Básica. Além disso, como destaca o Acadêmico K, estamos apresentando outro tipo de geometria, que não é estudada atualmente durante a graduação.

A formação de professores para atuarem em diferentes níveis de ensino da Educação Básica, segundo relata Mizukami, (2008, p. 216), é caracterizada por um "momento formal em que processos de aprender a ensinar e aprender a ser professor começam a ser construídos de forma mais sistemática, fundamentada e contextualizada". Colaborando com essa ideia, Imbernón (2011, p. 68) relata sobre a possibilidade "de uma bagagem sólida nos âmbitos científicos, cultural, contextual, psicopedagógico e pessoal que deve capacitar o futuro professor ou professora a assumir a tarefa educativa em toda sua complexidade". Acreditamos que cursos como esse (sobre Geometria Fractal), ofertados para os acadêmicos, qualificam sua formação inicial e quem sabe suas aulas na Educação Básica.

A quarta e última pergunta foi referente à possibilidade de se trabalhar a Geometria Fractal na Educação Básica. Todos responderam afirmativamente, ou seja, é possível e importante desenvolver esse tipo de conteúdo na Educação Básica. Da mesma forma que as demais perguntas, por haver respostas parecidas, agrupamo-las em quatro respostas, que são apresentadas juntamente com a pergunta no Quadro 30.

Quadro 30 – Pergunta e respostas ao quarto questionamento da pesquisa de opinião

Pergunta	Respostas
4) Você acha possível e importante trabalhar a Geometria Fractal na Educação Básica? ( ) sim ( ) não ( ) em parte Justifique sua resposta.	*É possível sim e importante também, os alunos aprenderam, mas tem que se trabalhar de uma forma mais simples, procurando sempre semelhanças com o cotidiano alunos.* (Acadêmico C). *É importante, pois durante a construção dos desenhos é possível trabalhar diversos conceitos ligados à geometria.* (Acadêmico E). *Por ser algo atrativo e que podemos aprender e visualizar o que estamos fazendo.* (Acadêmico H). *Sim, porque a Geometria Fractal está relacionada a outras geometrias e através dela podemos adquirir uma melhor compreensão das outras.* (Acadêmico I).

Fonte: acervo do autor.

As respostas dos acadêmicos vêm ao encontro das justificativas apresentadas por Barbosa (2005). Além disso, reforçamos essa necessidade de trabalhar a Geometria Fractal na Educação Básica, apoiados por Sallum (2005, p. 1), que explana:

> a introdução de fractais no ensino, além de satisfazer a curiosidade de quantos já ouviam falar nele, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever formulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzindo uma ideia intuitiva de limite e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométricas e estimo ao uso de tabelas.

Pelos relatos dos alunos, em especial o do Acadêmico C, as oficinas desenvolvidas não tiveram ligação direta com o cotidiano, não havíamos percebido esse detalhe, pois tentamos desenvolver junto com a Geometria Fractal a exploração de entes geométricos envolvidos. Também, por meio de entrevista, questionamos o Acadêmico C sobre o termo “forma mais simples”. Ele relatou que usou essa expressão no sentido de não aprofundar a construção dos fractais, ou seja, fazer a construção no nível 0, 1 e 2.

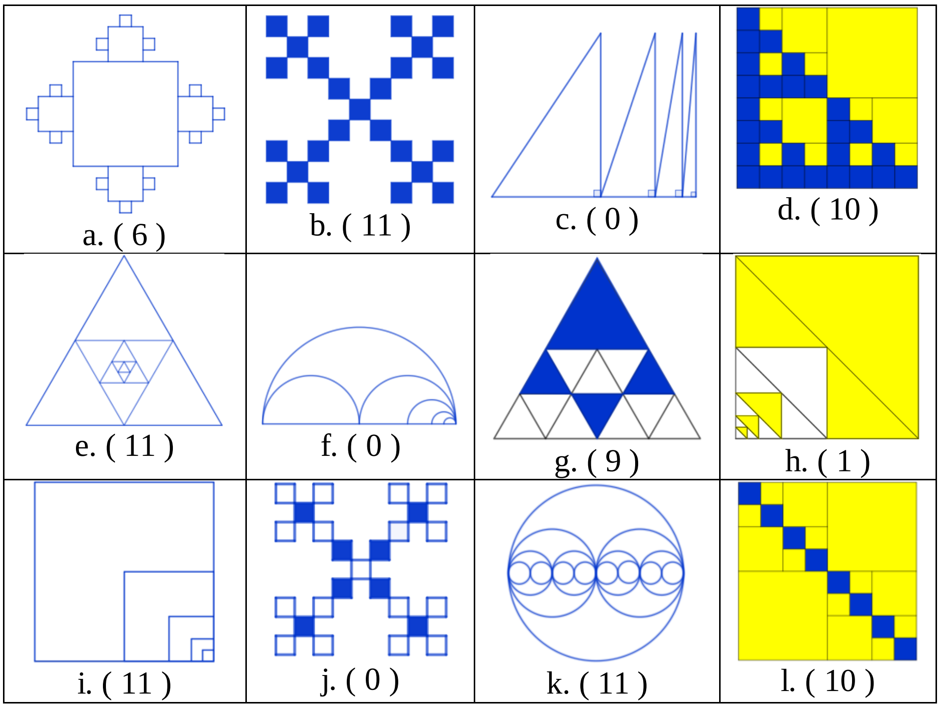
6.6 Pós-teste

Da mesma forma que aplicamos um pré-teste, no início das atividades, para verificar o conhecimento em relação à temática abordada, também empregamos um pós-teste, com a intencionalidade de verificar se houve ou não aprendizagem. Bell, Grossen e Perret-Clermont (1985) consideram importante determinar o nível de conhecimento que um sujeito possui acerca de um determinado conteúdo para garantir que ele compreende a tarefa proposta e que tenha um papel ativo durante a discussão e a confrontação.

Para tanto, replicamos a Atividade 1 da Oficina 2, aproximadamente seis meses após o término das oficinas, para o mesmo grupo que a realizaram, e verificamos se houve melhora ou não na identificação das imagens que são fractais e a respectiva justificativa. Para a realização do pós-teste, escolhi um dia da semana em que todos estivessem na instituição e os convidei a participar.

Responderam o pré-teste os mesmos 11 discentes que estavam presentes na Oficina 2. Naquele dia não estava presente o Acadêmico H. No Quadro 31, apresentamos essas figuras e o respectivo número de marcações que cada uma recebeu.

Quadro 31 – Figuras geométricas (pós-teste)



Fonte: acervo do autor.

Tivemos três acadêmicos (B, G e I) que selecionaram de forma correta todas as imagens que são fractais, o que não havia ocorrido no pré-teste, e dois participantes, acadêmicos E e L, que não selecionaram nenhuma imagem que não fosse fractal, mas deixaram de selecionar algumas que eram. Os demais discentes tiveram alguma marcação em imagens que não eram fractais.

Para podermos comparar se houve ou não melhora em relação aos acertos e erros, elaboramos o Quadro 32, em que apresentamos o número de marcações que cada imagem teve na Atividade 1 da Oficina 2 e o pós-teste, assim como uma comparação em forma de percentual aproximado.

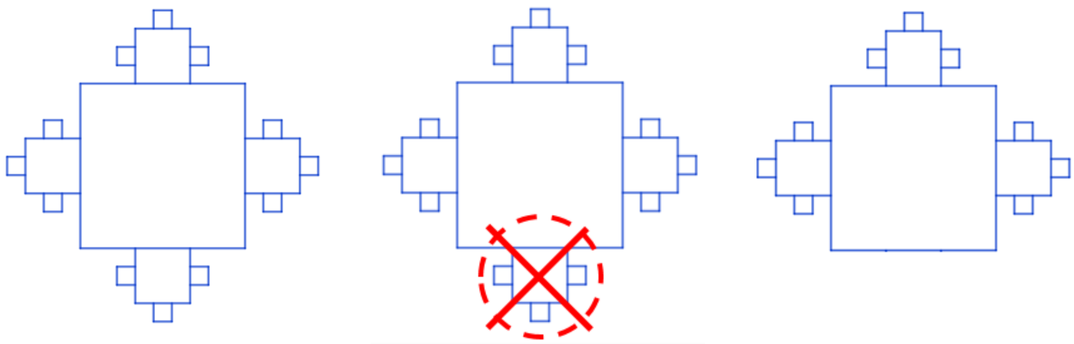
Quadro 32 – Figuras geométricas (pós-teste) e suas respectivas marcações

	Número de marcações de cada imagem		
Imagem	Atividade 1 Oficina 2	Pós-teste	Comparação (% aproximada)
(a)	8	6	Houve redução de erro em 18%.
(b)	10	11	Houve aumento de acerto em 9%.
(c)	0	0	Se manteve.
(d)	7	10	Houve aumento de acerto em 27%.
(e)	8	11	Houve aumento de acerto em 27%.
(f)	0	0	Se manteve.
(g)	8	9	Houve aumento de acerto em 9%.
(h)	9	1	Houve redução de erro em 73%.
(i)	7	11	Houve aumento de acerto em 36%.
(j)	5	0	Houve redução de erro em 45%.
(k)	9	11	Houve aumento de acerto em 18%.
(l)	5	10	Houve aumento de acerto em 45%.

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Observamos que houve redução na escolha das imagens (a), (h) e (j), logo, os discentes demonstram estar melhor identificando as imagens que são fractais. Porém, esses ainda escolheram a imagem (a) como sendo um fractal. Em relação a ela, questionamos os alunos que a marcaram e eles responderam que a selecionaram por acharem ser fractal. Esses participantes não perceberam que ela tem uma parte a mais, que a torna um não fractal, conforme se pode ver na Figura 60.

Figura 60 – Imagem (a) não fractal e imagem (a) transformada em fractal

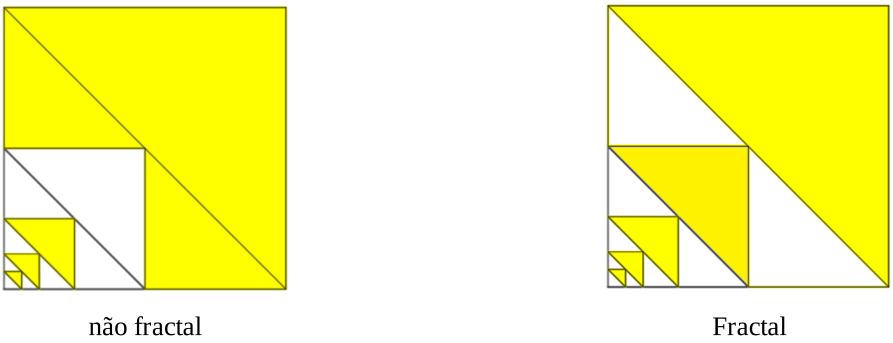


não fractal Fractal

Fonte: elaborada pelo próprio autor.

Quanto ao Acadêmico C, ele marcou a imagem (h). Questionado sobre essa resposta, relatou que se confundiu com a cor. Na Figura 61, apresentamos essa imagem não fractal e ela transformada em fractal, apenas com a modificação da coloração.

Figura 61 – Imagem (h) não fractal e imagem (h) transformada em fractal



Fonte: elaborada pelo próprio autor.

Após a marcação das imagens, os participantes teriam que justificar, de forma geral, o porquê de suas escolhas fractais. A seguir, trazemos as justificativas apresentadas pelos acadêmicos.

> *Escolhi as imagens por apresentarem padrões e semelhanças.* (Acadêmico A).
> *Há um padrão nas repetições (iterações).* (Acadêmico B).
> *Fractal é uma estrutura geométrica, que a cada nível, diminuí (ou pela metade, ou terça parte, ...), sendo cada vez menor.* (Acadêmico C).
> *São os que lembram uma sequência.* (Acadêmico D).
> *Acredito que as figuras geométricas marcadas são fractais pois são imagens que apresentam repetições de padrões.* (Acadêmico E).
> *São fractais pois ao analisarmos as imagens percebemos padrões e repetições* (Acadêmico F).
> *Há uma repetição em um novo nível da regra usada no último nível, sem acréscimo de alguma coisa.* (Acadêmico G).
> *São fractais, pois em cada figura existe uma lógica na construção de sua sequência, em que há uma razão na montagem de cada sequência do fractal.* (Acadêmico I).
> *São imagem que seguem certa razão e padrão para sua construção.* (Acadêmico J).
> *São fractais, pois formam sequências de figuras cada vez menores, seguindo uma regra de construção.* (Acadêmico K).
> *As imagens se repetem seguindo um padrão e uma razão de redução.* (Acadêmico L).

Mediante as respostas apresentada para a justificativa e as marcações das imagens que são fractais, podemos concluir que houve a compreensão do que é um fractal, mesmo depois de seis meses do término do Projeto de Ensino. Isso mostra consistência na aprendizagem desses indivíduos.

Acreditamos que os registros de representação foram importantes para mobilização e expressão dos pensamentos matemáticos construídas durantes as oficinas, pois, para Duval

(2012, p. 13), “o desenvolvimento das representações semióticas foi a condição essencial para a evolução do pensamento matemático”.

Comparando com o pré-teste, em que inicialmente apenas 5 acadêmicos (B, C, G, H e K) haviam ouvido falar sobre fractal, foi um avanço comprovar que todos possuem uma ideia e um conceito sobre o referido assunto. Cabe destacar que, na maioria das escritas, apareceram as palavras: padrões, repetições, sequências e, dessa forma, percebemos que eles entenderam o conceito de fractal e suas respostas se aproximam muito das definições apresentadas Stewart (1996), Barbosa (2005) e Feder (1988).

Portanto, com a finalização do pós-teste, podemos concluir que, para esse grupo de acadêmicos, conseguimos introduzir o conceito de fractal de forma satisfatória. Como eles são futuros professores, julgamos ser importante desenvolver outros conteúdos que não estão nas ementas das disciplinas. Além disso, também estimulamos e instrumentalizamos esses alunos para o uso das TD para suas futuras práticas pedagógicas.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, apresento[27] as principais considerações e resultados encontrados. Saliento ao leitor que a compreensão integral desta parte somente é possível para quem acompanhou a leitura dos capítulos anteriores, com especial atenção aos procedimentos metodológicos (Capítulo 5) e às análises e discussões dos resultados (Capítulo 6) e, dessa forma, observou as ideias empregadas para chegar aos resultados.

Quando eu pensava sobre uma temática, a fim de escolhê-la para o projeto de ingresso no curso de doutorado no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade Franciscana, e pelas minhas vivências pessoais e acadêmicas, já existia uma inquietação sobre o ensino de Geometria, em especial das geometrias não euclidianas.

Inicialmente, meus primeiros pensamentos foram desenvolver um trabalho com as geometrias não euclidianas no Ensino Superior, porém seria um estudo muito extenso e que talvez não fosse possível findar em 4 anos, então escolhi trabalhar com a Geometria Fractal. Também, já atuava como professor do curso de licenciatura em Matemática do IFFar – Campus Alegrete, desde seu início, em 2011. Assim já poderia envolver os acadêmicos como sujeitos de minha pesquisa.

Influenciado pela temática e motivado pelos desafios propostos pelo Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática, encontrei no IFFar – Campus Alegrete uma oportunidade e parceria para desenvolver as atividades que fundamentaram este trabalho de doutorado.

Como educador, sempre estou refletindo sobre meu fazer pedagógico, de forma a buscar novas ferramentas e referências teóricas para a construção da aprendizagem, pois, como Freire (1996, p. 52) define "[...] ensinar não é transferir conhecimento, mas criar possibilidades para sua própria produção ou sua construção."

Acredito que, com a aplicação do Projeto de Ensino (Geometria Fractal na formação docente: da teoria à pratica), por meio de uma sequência de atividades, foi possível apresentar aos acadêmicos participantes uma outra Geometria, que não consta no PPC. Por meio das respostas apresentadas pelos discentes e análise dos RRS, acredito que houve aprendizagem.

A sequência de atividades, apresentada nas oficinas, não deve ser única e imutável, pelo contrário, servir apenas de sugestões a serem desenvolvidas, pois cada sala de aula tem a sua característica e particularidade. Nesse caso, após o término da oficina, percebi que poderia ter explorado mais o uso de duas ferramentas do *GeoGebra*: a planilha e a janela *CAS*. Portanto,

---

[27] O texto deste capítulo está escrito na primeira pessoa do singular, pois envolve reflexões, experiências e a trajetória profissional do professor/pesquisador.

para uma próxima aplicação das oficinas, recomendo repensar as atividades e respostas do 6º questionamento da Atividade 3 da Oficina 1, do 2º questionamento da Atividade 3 da Oficina 3 e do 2º e 4º questionamento da Atividade 3 da oficina 4, já direcionando o discente a trabalhar com essas duas ferramentas.

Quem sabe, agora com o conhecimento da Geometria Fractal, os acadêmicos, em suas futuras práticas pedagógicas, quer no estágio supervisionado, quer depois de formados, possam aplicar esse conhecimento na Educação Básica, pois “[...] a experiência como aluno, não apenas nos cursos de formação docente, mas ao longo de toda a sua trajetória escolar, é constitutiva do papel que exercerá futuramente como docente”. (BRASIL, 2002b, p. 30).

Em relação a não constar no PPC nenhuma disciplina, obrigatória ou optativa, sobre geometrias não euclidianas, em 2020, ou mais tardar em 2021, deverá ocorrer a revisão e adequação (se necessário) do mesmo nas licenciaturas em Matemática do IFFar baseada na Resolução Nº 2, de 1º de julho de 2015. Essa define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior. Como sugestão, irei apontar a necessidade de inclusão de pelo menos uma disciplina de geometria não euclidiana, seja essa obrigatória ou optativa.

Justifico essa necessidade de inserção no PPC, por pensar que é importante o ensino de geometrias não euclidianas no Ensino Superior, uma vez que Leivas (2005/2006) ressalta que esse tipo de geometria pode ser útil para a obtenção de uma cultura geométrica pelo professor. É fundamental mostrar aos discentes a existência de outras geometrias além da Geometria Euclidiana, não sendo ela a única possível e praticável no mundo que nos cerca, uma vez que existem problemas que podem ser resolvidos pelas geometrias não euclidianas e não na euclidiana, como as navegações marítima e aérea.

Além disso, por meio do estudo das geometrias não euclidianas, pode-se incentivar o uso das TD. A Resolução Nº 2, de 1º de julho de 2015, também estimula o uso e ampliação das Tecnologias de Informação e Comunicação, como mostra o Artigo 5º inciso VI, o qual aponta “ao uso competente das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) para o aprimoramento da prática pedagógica e a ampliação da formação cultural dos(das) professores(as) e estudantes;” (BRASIL, 2015, p. 6). Apoio e incentivo o uso das TD na sala de aula, uma vez que elas podem promover aulas mais dinâmicas e participativas, além de estimular a autonomia do aluno.

O professor deve estar constantemente repensando seu fazer pedagógico, em formas de estimular a aprendizagem dos discentes, e por que não utilizar as TD como recursos metodológicos despertando o interesse por essa abordagem. Considero importante apresentar e incentivar o uso de *softwares* aos futuros professores, pois é a partir de seu conhecimento que irão construir sua prática pedagógica.

Para esta pesquisa, optei pelo uso do *GeoGebra* como um recurso metodológico para facilitar a visualização das construções obtidas de forma dinâmica na tela do computador. Segundo Leivas (2009, p. 22), a visualização é "[...] um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas geométricos ou analíticos." No decorrer da pesquisa, observei que surgiu mais uma questão de investigação, a qual não estava inclusa nos objetivos da pesquisa, pelo menos explicitamente. Essa foi a exploração da visualização a partir da construção mental, dado o RLN e a construção realizada no *GeoGebra*. Sobre essa última, destaco o relato do Acadêmico G, o qual fez uma conjectura a partir da visualização da Curva de Peano sobre a área da região apresentada na tela. Disse o estudante ser a área de um quadrado de lado L, o que, posteriormente, foi comprovado. Destaco que isso só foi possível devido à utilização do controle deslizante do *software* de GD, pois se a curva fosse construída de forma estática, penso que não teria sido possível a realização do que havia sido conjecturado.

Outro ponto que destaco, desde o início deste trabalho, meu esforço foi para apresentar noções de Geometria Fractal aos acadêmicos do curso de licenciatura em Matemática do IFFar – Campus Alegrete, tendo como questão norteadora da pesquisa: como investigar possibilidades de inserção de noções de Geometria Fractal nos cursos de licenciatura em Matemática do IFFar com a utilização das TD?

Saliento que, para responder a essa pergunta, o processo de ensino teve ênfase no uso da TD e o processo de aprendizagem foi analisado por meio dos RRS de Duval (2009; 2010), Machado (2010), Maggio e Nehring (2012), Damm (2012), Henriques e Almouloud (2016), entre outros, guiados a partir de uma sequência de atividades organizada em oficinas. Respondendo à pergunta que norteou a pesquisa, não tenho dúvida de que a resposta é afirmativa, ou seja, é possível inserir noções de Geometria Fractal, com o uso das TD, para discentes, população alvo envolvida no processo. Pelas situações apresentadas no Capítulo 6, percebo que também foi possível motivá-los para a realização das atividades e construção do próprio conhecimento. Como comprovação de minhas afirmações, destaco o fato da Acadêmica L, que foi além do solicitado nas atividades durante as oficinas e apresentou o fractal octogonal de Dürer até nível 3, o fractal hexagonal de Dürer para o nível 4 e o Tetraedro de Sierpinsky para o nível 3.

Retomo o objetivo geral da pesquisa: “investigar possibilidades de inserção de noções de Geometria Fractal nos cursos de licenciatura em Matemática do IFFar com o uso das TD” e apresento, a seguir, um recorte dos objetivos específicos originados a partir dele:

a) verificar, no Projeto Pedagógico dos cursos de licenciatura em Matemática adotado nos *campi* do IFFar, quais Geometrias são abordadas;

b) realizar um levantamento de conteúdos algébricos e geométricos que possam ser desenvolvidos a partir do estudo da Geometria Fractal;

c) explorar o ensino, por meio de TD, e a aprendizagem, através dos RRS, da Geometria Fractal;

d) planejar uma sequência de atividades com base em conhecimentos algébricos e geométricos (a partir da Geometria Fractal) que incluam o uso das TD;

e) executar e analisar uma sequência de atividades, com um grupo de alunos do curso de licenciatura em Matemática do IFFar – Campus Alegrete.

Com o intuito de responder cada um dos objetivos específicos, passo para a sua análise, individualmente. Para o primeiro, objetivo (a), foi constatado que são desenvolvidas três geometrias: Analítica, Plana e Espacial, todas elas Geometrias Euclidianas, não havendo a inserção de geometrias não euclidianas no currículo dos cursos.

Para contemplar o objetivo (b), foi realizado um estudo dos trabalhos a respeito da temática Geometria Fractal (subcapítulo 2.4) em teses, dissertações e periódicos científicos. Essa pesquisa forneceu subsídios para a elaboração das atividades desenvolvidas nas oficinas.

Quanto aos objetivos (c) e (d), foram planejadas atividades envolvendo o estudo da Geometria Fractal, com o uso das TD (ensino) e, ao mesmo tempo, pensado na forma de coleta dos RRS (aprendizagem). Saliento a importância dos RRS, pois eles não são somente um sistema de comunicação, mas também uma forma de organização de informações acerca do objeto matemático representado. Segundo Duval (2009), uma das dificuldades na compreensão de conceitos matemáticos está na dúvida que se possa ter entre a relação do objeto matemático e sua representação, sendo que a compreensão conceitual do objeto deve passar pelo entendimento dos seus diferentes registros de representação e das relações entre eles.

Findado esse planejamento, passo para o objetivo (e), executar e analisar as atividades aplicadas em forma de quatro oficinas (ver síntese das atividades no Quadro 10 no subcapítulo 5.3), conforme apresentados nos Apêndices 4, 5, 6 e 7 e os resultados analisados e discutidos no Capítulo 6. Dessa forma, finalizo com a certeza de que todos os objetivos específicos foram comtemplados, e que, mediante as análises das respostas apresentadas pelos acadêmicos durantes as oficinas e pós-teste, tenho a certeza de que foi possível inserir noções de Geometria Fractal com o uso das TD para este grupo focal.

Deixo como produto final desta tese, nos apêndices 4, 5, 6 e 7, a sequência de atividades aplicadas, que aborda os conteúdos de Geometria Fractal e que, talvez, venha a servir como instrumento para os professores da Educação Básica.

Destaco que nem tudo saiu conforme o planejado, infelizmente. Uma situação enfrentada foi de apenas 12 acadêmicos, dos 16 que confirmaram a inscrição, chegarem ao final das oficinas propostas no Projeto de Ensino. Gostaria da participação dos 23 que realizaram a pré-inscrição, enriquecendo as aprendizagens e discussões, porém os que não puderam participar tiveram seus motivos. Entretanto, houve situações que foram além do planejado, surpreendendo-me, por exemplo, a construção do Acadêmico L do nível 4 do fractal hexagonal de Dürer, fractal octogonal de Dürer e do nível 3 do Tetraedro de Sierpinsky, indo além do que era solicitado nas oficinas.

O Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática me ajudou na formação e qualificação profissional, proporcionando reflexões sobre o fazer e a prática pedagógica na sala de aula. Dessa forma, o estudo desenvolvido neste curso, no seu conjunto, gerou melhorias significativas no meu fazer pedagógico e abriu caminhos para a continuação de um trabalho reflexivo sobre a prática docente.

Reforço a importância e a necessidade de estudos como o realizado em uma instituição de ensino brasileira, que vão ao encontro das necessidades pedagógicas dos docentes. Para futuros trabalhos e pesquisas, destinadas ao ensino e aprendizagem de Geometria, recomendo a exploração de outras geometrias não euclidianas, como por exemplo, Geometria Esférica, Geometria Hiperbólica, entre outras. Vejo ser importante o ensino dessas outras geometrias e mostrar aos discentes que a Geometria Euclidiana não é a única possível e praticável em nosso cotidiano. Por esse viés, o estudo de geometrias não euclidiana pode apresentar novas discussões e reflexões sob o ponto de vista matemático. Cabe destacar que este tipo de trabalho apresenta contribuições na área da Educação Matemática, pois possibilita a inclusão de atividades envolvendo a Geometria Fractal no currículo da Formação Inicial dos cursos do IFFar, em que foi detectado não haver esta temática.

Espero que essas reflexões que apresentei, bem como as observações realizadas possam contribuir para a inserção da Geometria Fractal na Educação Básica e a utilização dos RRS. Dessa maneira, concluo com a expectativa de que esta pesquisa seja uma oportunidade para estudantes e professores pensarem sobre essa temática abordada e sua possibilidade de desenvolvimento na sala de aula com o uso das TD.

REFERÊNCIAS

ADAMI, Paulo Sérgio. **Fractais no Ensino Médio:** Uma sequência didática. 2013. 55 p. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/5925/5024.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 23 set. 2017.

ALEGRETE. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática.** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Campus Alegrete. Alegrete, 2014. Disponível em: <http://www.iffarroupilha.edu.br/projeto-pedag%C3%B3gico-de-curso/campus-alegrete> Acesso em 29 jan. 2018

ALMEIDA, Maria Elizabeth Bianconcini. Tecnologias Digitais na Educação: o futuro é hoje. In: ENCONTRO DE EDUCAÇÃO E TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO, 5., 2007, São Paulo. **Anais eletrônicos...** São Paulo: Universidade Estácio de Sá, 2007. Disponível em: <https://etic2008.files.wordpress.com/2008/11/pucspmariaelizabeth.pdf> Acesso em 15 ago. 2018.

ALMEIDA, Maria Elizabeth de. **ProInfo:** Informática e Formação de Professores. v. 1. Secretaria de Educação à Distância. Brasília: Ministério da Educação. 2000. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me002401.pdf> Acesso em: 30 ago. 2018.

ALVES, Célia Maria Felipe Santos Jordão. **Fractais:** Conceitos Básicos, Representações Gráficas e Aplicações ao Ensino não Universitário. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2007.

ANDRÉ, Regina Celi de Melo. Dificuldades na conversão de problemas envolvendo equação e a relação com o contrato didático**.** In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais...** Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2011. p. 01-12.

ARAÚJO, Jerrimar Moraes de. **Teoria Matemática Implícita na Geometria Fractal: construindo fractais com a ferramenta computacional Asymptote.** 2015. 71 p. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) – Universidade Federal de Roraima, Boa Vista, 2015. Disponível em: <http://www.bdtd.ufrr.br/tde_busca/ arquivo.php?codArquivo=308>. Acesso em: 23 set. 2017.

ARAÚJO, Jussara de Loiola; BORBA, Marcelo de Carvalho. Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola. (Orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 25-45.

ARCAVI, Abraham. The role of visual representation in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v.52, n.2, p. 215-241, 2003. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/3483015>. Acesso em: 27 dez. 2019.

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean (direcção) **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996. p. 193-217.

AZEREDO, Claudia Márcia Ribeiro de; et al. Geometria Fractal e progressões geométricas: análise de um simulador de fractais. **Revista Novas Tecnologias na Educação – RENOTE**, Porto Alegre, v.11, n.1, p. 1–10, jul. 2013. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/41644/26418>. Acesso em: 15 jan. 2018.

BACICH, Lilian; NETO, Adolfo Tanzi; TREVISANI, Fernando de Melo. **Ensino híbrido:** personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

BAIRRAL, Marcelo Almeida. **Tecnologias da Informação e Comunicação na formação e educação matemática.** v. 1. Seropédica: EDUR, 2009.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula.** Belo Horizonte: Autentica, 2005.

BATISTA, Bárbara Regina da Silveira. **Sequências numéricas a partir da Geometria Fractal para licenciandos em Matemática.** 2017. 74 p. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2017. Disponível em: <http://wwww.unifra.br/site/pagina/conteudo/51#>. Acesso em: 23 set. 2017.

BELL, Nancy; GROSSEN, Michèle; PERRET-CLERMONT, Anne-Nelly. Sociocognitive conflit and intellectual growth. In: BERKOWTZ, Marvin. **Peer Conflit and Psychological Growth** (New Directions for Child Development). San Francisco: Jossey-Bass, 1985. p. 41.54.

BENTO GONÇALVES. **Projeto pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática.** Bento Gonçalves, 2013. Disponível em: <http://www.bento.ifrs.edu.br/site/midias/arquivos/2014622164751963ppc_matema%CC%81tica.pdf>. Acesso em: 29 jan. 2018.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação.** Portugal: Porto Editora, 1994.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**: Sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. **Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul.** Bento Gonçalves. 2017. Disponível em: <http://ifrs.edu.br/institucional/>. Acesso em: 30 jan. 2018.

______. **Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha.** Santa Maria. 2016b. Disponível em: <http://www.iffarroupilha.edu.br/portal?view=default>. Acesso em: 30 jan. 2018.

______. **Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense.** Pelotas. 2015. Disponível em: < http://www.ifsul.edu.br/>. Acesso em: 30 jan. 2018.

______. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Conselho Pleno. Parecer Nº 09/2001, de 08 de maio de 2001. Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 8 set. 2002b. Seção 1, p. 31.

______. Ministério da Educação. **Portal da Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica.** Brasília, 2016a. Disponível em: <http://redefederal.mec.gov.br/instituicoes>. Acesso em: 30 jan. 2018.

______. Ministério da educação. Parecer CNE/CES 1.302/2001, de 6 de novembro de 2001. Dispõe sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 5 mar. 2002a. Seção 1, p. 15.

______. Resolução CONSUP nº 046/2016, de 26 de julho de 2016. Aprova o Regulamento de Ações, Programas e Projetos de Pesquisa, Ensino, Extensão, Desenvolvimento Institucional e Inovação do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha. **Conselho Superior**, Santa Maria, 26 jul. 2016.

______. Resolução Nº 2, de 1º de julho de 2015. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 2 jul. 2015. Seção 1, p. 8–12.

BREUNIG, Raquel Thaís; NEHRING, Cátia Maria; POZZOBON, Marta Cristina Cesar. Registros de Representação Algébricos: proposições de alunos do primeiro ano do ensino médio. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2010, Canoas. **Anais...** Canoas: Universidade Luterana do Brasil, 2010. p. 1-10.

CAMARA, Alexsandra. Para ler com os Alunos: uma conversa inicial sobre a Geometria dos Fractais. **Educação Matemática em Revista**, n.29, p. 15–18, mar. 2010. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/170/161>. Acesso em: 15 jan. 2018.

CAÑIBANO, María Alejandra; VAZQUE, Patricia Sastre; GANDINI, Marcelo. Dimensión fractal en la enseñanza secundaria. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática.** n.28, p. 191–196, dic. 2010. Disponível em: <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2011/28/archivo_19_volumen28.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2018.

CANOAS. **Projeto pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática.** Canoas, 2012. Disponível em: <http://matematica.canoas.ifrs.edu.br/wp-content/uploads/2016/05/Projeto-Pedag%C3%B3gico-do-Curso.pdf >. Acesso em: 29 jan. 2018.

CAPRA, Fritjof. **A teia da vida:** uma nova compreensão cientifica dos sistemas vivos. Tradução de Newton Roberval Eichemberg. São Paulo: Cultrix, 2006.

CARVALHO, Marcelo Alves. **Um estudo sobre a inserção de atividades em educação na formal na disciplina Metodologia e Prática do Ensino de Física da Universidade Estadual de Londrina.** 2009. 136 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000148009> Acesso em: 18 ago. 2018.

CASTILHOS, Thiago Barcelos. **Possibilidades pedagógicas para introdução de Geometria Fractal no Ensino Básico e na formação de professores de Matemática.** 2014. 57 p. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2014. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=27791>. Acesso em: 23 set. 2017.

CAXIAS DO SUL. **Projeto pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática.** Caxias do Sul, 2017. Disponível em: <http://matematica.caxias.ifrs.edu.br/wp-content/uploads/2015/11/PPC-LM-2017.pdf>. Acesso em: 29 jan. 2018.

CIFUENTES, José Carlos. Do conhecimento matemático à educação matemática: uma “odisséia espiritual”. In: CLARETO, Sônia Maria; DETONI, Adlai Ralph; PAULO, Rosa Monteiro (org). **Filosofia, matemática e educação matemática:** compreensões dialogadas. Juiz de Fora: Ed. UFJF, 2010. p. 13-32.

COELHO, João Batista. **Geometria Fractal:** Um olhar sobre a necessidade de inclusão na estrutura curricular do Ensino Médio. 2015. 80 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=81594>. Acesso em: 23 set. 2017.

CRESWELL, John W. **Projeto de pesquisa:** métodos qualitativo, quantitativo e misto. Porto Alegre: Artmed, 2010.

CURY, Helena Noronha. Erros, dificuldades e obstáculos em produções escritas de alunos e professores. In: FROTA, Maria Clara Rezende; BIANCHINI, Bárbara Lutaif; CARVALHO, Ana Márcia Fernandes Tucci de. **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior.** Campinas: Papirus, 2013. p. 15-42.

DALPIAZ, Marcos Roberto. **Um estudo sobre fractais:** origem e proposta didática para aplicação em aula**.** 2016. 74 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/2698/1/CT_PROFMAT_M_Dalpiaz%2C%20Marcos%20Roberto_2016.pdf>. Acesso em: 23 set. 2017.

D’AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2012.

DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. **Educação Matemática:** uma introdução. 3. ed. rev. São Paulo: EDUC, 2012. p. 167-188.

DREYFUS, Tommy. Advanced Mathematical thinking. In: NESHER, Pearla; KILPATRICK, Jeremy. (Eds). **Mathematics and Cognition.** Cambridge: University Press, 1990. p. 113-134.

DREYFUS, Tommy. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, David. **Advanced Mathematical Thinking.** New York: Kluwer Academic, 1991. p. 25-40.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.) **Aprendizagem em Matemática:** Registros de Representação Semiótica. Campinas: Papirus, 2010. p. 11-33.

______. Quais teorias e métodos para a pesquisa sobre ensino de matemática? Tradução OLIVEIRA, Luciana da Costa. **Práxis Educativa**, v.7, n.2, p. 305-330, jul./dez. 2012. Disponível em: <https://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa/article/view/4694> A. Acesso em: 18 jan. 2020.

______. **Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Fisica, 2009.

______. **Sémiosis et pensée humaine:** Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**.** Berna: Peter Lang, 1995.

______. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

FALCONER, Kenneth. **Fractal geometry:** mathematical foundations and applications. 2. ed. New York: Wiley, 2003.

FEDER, Jens. **Fractals**. New York: Plenum Press, 1988.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

FLORES, Cláudia Regina. **Olhar, saber, representar:** sobre a representação em perspectiva. São Paulo: Musa Editora, 2007.

FREDERICO WESTPHALEN. **Projeto pedagógico do curso superior de Licenciatura em Matemática.** Frederico Westphalen, 2018. Disponível em: < <https://www.iffarroupilha.edu.br/component/k2/attachments/download/13568/185e23080cc17ce189e52fa9966ff5d2>. Acesso em: 18 dez. 2019.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia:** saberes necessários para a prática educativa. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1996.

FREITAS, José Luiz Magalhães de; REZENDE, Veridiana. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Revista Paranaense de Educação - RPEM**, v.3, n.3, p. 10–34, 2013. Disponível em: <http://www.fecilcam.br/revista/index. php/rpem/article/viewFile/963/pdf_122>. Acesso em: 18 ago. 2018.

GARNICA, Antônio Vicente Marafioti. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola. (org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica. p. 77-98, 2004.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GOLDENBERG, E. Paul. Seeing beauty in mathematics: Using Fractal Geometry to Build a Spirit of Mathematical Inquiry. In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (ed.). **Visualization in teaching an learning mathematics**. Washington, USA: Mathematical Association of America, 1991. p. 67-76.

GOLDENBERG; E, Paul. “Hábitos de pensamento”: um princípio organizador para o currículo (II). **Educação e Matemática**, n. 48, p. 37-44, 1998. Disponível em: <http://www.apm.pt/apm/revista/educ48/educ48_6.htm>. Acesso em: 27 abr. 2020.

GOLDENBERG, Mirian. **A Arte de Pesquisar.** 3. ed. Rio de Janeiro: Record, 1999.

GOMES, Antônio do Nascimento; SALVADOR, José Antônio. Dobras, cortes e Fractais no Ensino Fundamental. **Educação Matemática em Revista**, n.37, p. 5–13, nov. 2012. Disponível em: <http://sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/ 259/247>. Acesso em: 15 jan. 2018.

GÓNGORA, Antonio Rosales. De la tortura mental a los fractales. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática.** n.23, p. 129–143, sep. 2010. Disponível em: <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2010/23/Union_023_015.pdf >. Acesso em: 15 jan. 2018.

GOUVEA, Flávio Roberto. **Um Estudo de Fractais Geométricos através de Caleidoscópio e Softwares de Geometria Dinâmica.** 2005. 259 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2005. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91080>. Acesso em: 23 set. 2017.

GOUVEA, Flávio Roberto; MURARI, Claudemir. Fractais de bases caleidoscópicas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÂO MATEMÁTICA, 8, 2004, Recife/PE. **Anais eletrônicos...** Recife/PE: Universidade Federal de Pernambuco, 2004. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/03/CC27722924875.pdf>. Acesso em: 16 jan. 2018.

GRAVINA, Maria Alice. Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7., 1996. Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: UFMG, 1996. p. 1-14.

______. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.** 2001. 277 p. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação. Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/2545> Acesso em: 30 ago. 2018.

GRAVINA, Maria Alice; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. Midias digitais na Educação Matemática. In: GRAVINA, Maria Alice; BÚRIGO, Elizabete Zardo; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo; GARCIA, Vera Clotilde Vanzetto. (orgs). **Matemática, Mídias Digitais e Didática:** tripé para formação do professor de Matemática. 1. ed. Porto Alegre: Evangraf. 2012. p. 11-35.

HENRIQUES, Afonso; ALMOULOUD, Saddo Ag. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência e Educação**, Bauru , v.22, n.2, p. 465-487, 2016.

HILBERT, David; COHN-VOSSEN, S. **Geometry and the imagination.** New York: Chelsea Publishing Company, 1990.

IBIRUBÁ. **Projeto pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática.** Ibirubá, 2014. Disponível em: <http://www.ibiruba.ifrs.edu.br/site/midias/arquivos/2014422153752141 ppc_aprovado_2014.pdf>. Acesso em: 29 jan. 2018.

IMBERNÓN, Francisco. **Formação Docente e Profissional:** formar-se para a mudança e a incerteza. 9. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

IWAI, Marceli Megumi Hamazi. **Geometria Fractal**. 2015. 86 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=85308>. Acesso em: 23 set. 2017.

JANOS, Michel. **Geometria Fractal.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

JELINEK, Karin Ritter; KAMPFF, Adriana Justin Cerveira. A Geometria que existe além do olhar: levando a Geometria da natureza para dentro da escola. **Educação Matemática em Revista – RS**, Ano 10, v.1, n.10, p. 75–81, 2009. Disponível em: <http://sbemrs.org/revista/index.php/2011_1/article/view/23/22>. Acesso em: 15 jan. 2018.

JONES, Keith. Spatial thinking and visualisation. In: **Teaching and learning geometry 11-19.** London, GB. Royal Society, 2001. p. 55-56. Disponível em: <https://eprints.soton.ac.uk/38485/>. Acesso em: 30 dez. 2019.

JÚLIO DE CASTILHOS. **Projeto pedagógico do curso superior de Licenciatura em Matemática.** Júlio de Castilhos, 2014. Disponível em: <http://www.iffarroupilha.edu.br/projeto-pedag%C3%B3gico-de-curso/campus-j%C3%BAlio-de-castilhos>. Acesso em: 29 jan. 2018.

KALEFF, Ana Maria Roland. Registros Semióticos e Obstáculos Cognitivos na Resolução de Problemas Introdutórios às Geometrias não Euclidianas no Âmbito da Formação de Professores de Matemática. **Bolema**, ano 20, n.28, p. 69-94, 2007. Disponível em: <http://www.redalyc.org/pdf/2912/291221871005.pdf> Acesso em: 22 ago. 2018.

KARAKUS, Fatih. Um estudo sobre o modo como alunos compreendem Fractais. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v.27, n.47, p. 829–846, dez. 2013. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v27n47/07.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2018.

KENSKI, Vani Moreira. **Educação e tecnologias:** O novo ritmo da informação. Campinas: Papirus, 2012.

LEIVAS, José Carlos Pinto. Estimulando cultura geométrica para a escola básica. **Educação Matemática em Revista – RS**, Canoas, n. 7, p.43-51, 2005/2006.

______. Dimensão, logaritmo, fractal: estabelecendo conexões. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÂO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte/MG. **Anais eletrônicos...** Belo Horizonte/MG: Universidade de Belo Horizonte, 2007. Disponível em: <www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Minicurso/Trabalhos/ MC14171090091T.doc>. Acesso em: 16 jan. 2018.

______. **Imaginação, intuição e visualização:** a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 2009. 294 p. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação do Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009. Disponível em: <http://www.ppge.ufpr.br/teses/D09_leivas.pdf> Acesso em: 20 jan. 2020.

______. Educação Geométrica: reflexões sobre ensino e aprendizagem em Geometria. **Educação Matemática em Revista – RS**, Ano 13, v.1, n.13, p. 9–16, 2012. Disponível em: <http://sbemrs.org/revista/index.php/2011_1/ article/view/43/49>. Acesso em: 15 jan. 2018.

LERMAN, Stephen. A review of research perpectives on mathematics teacher education. In: LIN, Fou-Lai; COONEY, Thomas J. **Making sense of mathematics teacher educations.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. p. 33 – 52.

LESMOIR-GORDON, Nigel. **The Colours of Infinity:** The Beauty and Power of Fractals. London: Springer, 2010.

LÈVY, Pierre. **As tecnologias da inteligência:** o futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro: Editora 34, 1995.

LÉVY, Pierre; MORAES, Maria Cândida. **A conexão planetária:** o mercado, o ciberespaço, a consciência. São Paulo: Editora 34, 2001.

LOPES, Maria Regina Carvalho Macieira; et al. Fractais na Educação Básica: aprendendo com quebra-cabeças, arte francesa e cartões. **Educação Matemática em Revista**, n.41, p. 37-44, mar. 2014. Disponível em: < http://sbem.com.br/revista/ index.php/emr/article/view/331/ pdf>. Acesso em: 15 jan. 2018.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.) **Aprendizagem em Matemática:** Registros de Representação Semiótica. 7. ed. Campinas, SP: Papirus, 2010.

MAGGIO, Deise Pedroso; NEHRING, Cátia Maria. Saberes docentes acerca de representações semióticas do conceito de função. **Boletim GEPEM** (Online), n.61, p. 95-108, Jul./Dez. 2012. Disponível em: <http://doi.editoracubo.com.br/10.4322/gepem. 2014.016> Acesso em: 20 ago. 2018.

MANDELBROT, Benoit B. **The fractal geometry of nature.** New York: W.H. Freeman and Company, 1977.

______. **Objectos Fractais.** Lisboa: Gradiva, 1989.

MARTEL, Eugenio M. Fedriani; VILLALÓN, Ángel F. Tenorio. Matemáticas del más allá: el infinito. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática.** n.21, p. 37–58, mar. 2010. Disponível em: <http://www.fisem.org/www/union/revistas/ 2010/21/ Union_021_008.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2018.

MELO, André Luís Canuto Duarte; SILVA, Gilmar Silvestre da Cruz. O uso do software geogebra no estudo de funções. In: ENCONTRO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES, 6., 2013. Aracaju. **Anais eletrônicos...** Aracaju: UNIT, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ifs.edu.br/biblioteca/bitstream/123456789/326/1/Utiliza%C3%A7%C3%A3o%20do%20Software%20Geogebra%20como_SILVA%2C%20Gilmar%20Silvestre%20da%20Cruz.pdf>. Acesso em: 18 ago. 2018.

MENDONÇA, Fernando Antônio Cavalcante. **Aplicações da Geometria Fractal:** uma proposta didática para o Ensino Médio. 2014. 160 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2016. Disponível em: <http://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/2412/1/Aplica%C3%A7%C3%B5es%20da%20geometria%20fractal_%20uma%20proposta%20did%C3%A1tica%20para%20o%20ensino%20m%C3%A9dio.pdf>. Acesso em: 23 set. 2017.

MINGORANCI, Simone. **A Geometria Fractal aliada à contextualização, protagonismo juvenil e tecnologias como proposta de melhoria no processo ensino/aprendizagem da Matemática na Educação Básica.** 2014. 121 p. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, 2014. Disponível em: < http://repositorio.cbc.ufms.br:8080/jspui/ bitstream/123456789/2336/1/Simone %20Mingoranci.pdf>. Acesso em: 23 set. 2017.

MIZUKAMI, Maria da Graça Nicolette. Aprendizagem da docência: conhecimento específico, contextos e práticas pedagógicas. In: NACARATO, Adair Mendes; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela (Orgs.). **A formação do professor que ensina matemática perspectivas e pesquisas.** Belo Horizonte: Autêntica, 2008. p. 213-231.

MONTENEGRO, Gildo Aparecido. **Geometria Descritiva.** Vol. 1. Edgard Blücher: São Paulo, 1991.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo. **Análise textual discursiva.** Ijuí: Unijuí, 2011.

MOURA, Delano Vieira de. **Introdução à Geometria Fractal.** 2016. 72 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2016. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94351>. Acesso em: 23 set. 2017.

MOREIRA, Rafael de Lima. **Fractais.** 2013. 81 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do ABC, Santo Ándre, 2013. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=43101>. Acesso em: 20 ago. 2018.

MUCHERONI. Laís Fernandes. **Dimensão de Hausdorff e algumas aplicações.** 2017. 63 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2017. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/151653/mucheroni_lf_me_rcla.pdf?sequence=3>. Acesso em: 25 fev. 2020.

NASCIMENTO, Maristel do; SILVA, Sani de Carvalho Rutz da; MACIEL, Nilcéia Aparecida. Uma proposta didática para o ensino de Geometria Fractal em sala de aula na Educação Básica. **Vidya**, Santa Maria, v.32, n.2, p. 113–132, jul./dez. 2012. Disponível em: <https://www.periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/view/ 277/253>. Acesso em: 15 jan. 2018.

NEGRI, Marília Gomes. **Introdução ao estudo dos fractais**. 2014. 60 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/3879>. Acesso em: 23 set. 2017.

NETO, Antonio Furtado Landim. **Tópicos da Geometria Fractal e aplicações**. 2015. 96 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=73319>. Acesso em: 23 set. 2017.

NICOLA, Celso Henrique. **Conhecendo fractal no Ensino Médio** – Árvore Pitagórica. 2013. 58 p. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/ bitstream/handle/ufscar/5949/5485.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 23 set. 2017.

NUNES, Raquel Sofia Rebelo. **Geometria Fractal e aplicações.** 2006. 78f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Porto, Portugal, 2006. Disponível em: <http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf>. Acesso em: 23 set. 2017.

OLIVEIRA, Celina Couto de; et al. **Ambientes Informatizados de Aprendizagem** – Produção e avaliação de software educativo. Campinas: Papirus, 2001.

OLIVEIRA, Genilton José Cavalcante de. **Ensaios fractais à luz do Ensino Médio**. 2016. 144 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2016. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_ tcc3.php?id=628>. Acesso em: 23 set. 2017.

OSÓRIO. **Projeto pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática.** Osório, 2017. Disponível em: <http://www.osorio.ifrs.edu.br/site/midias/arquivos/ 201785151713363ppc_mat_osorio-alteracao_resolucao_066_de_15_08_17_brasao_pb.pdf>. Acesso em: 29 jan. 2018.

PADILHA, Teresinha Aparecida Faccio. Aprendizagens matemáticas a partir da construção de Fractais. **Educação Matemática em Revista**, n.39, p. 5–48, ago. 2013. Disponível em: <http:// www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/286/pdf>. Acesso em: 15 jan. 2018.

PAIXÃO, Rogério da Silva. **O ensino de fractais no Ensino Fundamental**. 2014. 68 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014. Disponível em: <http://www.profmat.uem.br/dissertacoes-2/Rogerio_paixao.pdf>. Acesso em: 23 set. 2017.

PAPERT, Seymour. **A máquina das crianças.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

PEITGEN, Heinz-Otto; JÜRGENS, Hartmut; SAUPE, Dietmar. **Chaos and Fractals:** New Frontiers of Science. 2. ed. New York: Springer, 2004.

PEREIRA, Thales de Lélis Martins. **O uso do software GeoGebra em uma Escola Pública:** interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio. 2012. 122 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012. Disponível em: <https://repositorio. ufjf.br/jspui/bitstream/ufjf/1790/1/thalesdelelismartinspereira.pdf> Acesso em: 30 ago. 2018.

PERLIN, Patrícia. **Geometria Dinâmica:** uma proposta de atividades no estudo de triângulos através do GeoGebra. 2010. 63 p. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática. Centro de Ciências Naturais e Exatas, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2010. Disponível em: <https://repositorio. ufsm.br/bitstream/handle/1/13426/TCCE_EM_2010_PERLIN_PATRICIA.pdf?sequence=1& isAllowed=y> Acesso em: 30 ago. 2018.

PERRENOUD, Philippe. **Dez novas competências para ensinar.** Porto Alegre: Artmed, 2002.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no Ensino Básico.** Ministério da Educação de Portugal, 2009. Disponível em: <https://repositorio.ipsantarem.pt/handle/10400.15/1994> Acesso em: 31 dez. 2019.

PORTO, Tania Maria Esperon. As tecnologias de comunicação e informação na escola; relações possíveis... relações construídas. **Revista Brasileira de Educação.** Rio de Janeiro. v.11, n.31, p. 43-57, jan./abr. 2006.

RABAY, Yara Silvia Freire. **Estudo e aplicações da Geometria Fractal.** 2013. 103 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal de Paraíba, João Pessoa, 2013. Disponível em: <http://tede.biblioteca.ufpb.br/handle/tede/7651#preview-link0>. Acesso em: 23 set. 2017.

REIS, Jakson Ney da Costa. **Fractais no Ensino Médio:** Da observação de padrões da natureza ao uso do Geogebra. 2014b. 92 p. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Universidade Federal Rural do Semiárido, Mossoró, 2014. Disponível em: <https://ppgmat.ufersa.edu.br/wp-content/uploads/sites/58/2016/02/Disserta%C3%A7%C3%A3o-Jackson-Ney.pdf>. Acesso em: 23 set. 2017.

REIS, Walter. **Geometria Fractal:** Uma abordagem voltada para o Ensino Médio. 2014. 125 p. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Universidade Federal do Maranhão, São Luis, 2014a. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=1544>. Acesso em: 23 set. 2017.

RONCAGLIO, Viviane; NEHRING, Cátia Maria. **Registros de representação semiótica:** conversão e tratamento em vetores. 1. ed. Curitiba: Appris, 2019.

SALLUM, Élvia Mureb. Fractais no Ensino Médio. **Revista do Professor de Matemática.** Rio de Janeiro, v.57, p. 1-8, 2005. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/57/1.htm>. Acesso em: 04 jan. 2020.

SANTA ROSA. **Projeto pedagógico do curso superior de Licenciatura em Matemática.** Santa Rosa, 2014. Disponível em: <http://www.iffarroupilha.edu.br/projeto-pedag%C3%B3gico-de-curso/campus-santa-rosa>. Acesso em: 29 jan. 2018.

SANTAELLA, Lucia. **O que é semiótica.** São Paulo: Brasiliense, 2012.

SANTOS, Talita Securon dos. **A Inclusão das Geometrias não Euclidianas no Currículo da Educação Básica.** 138 p. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR, 2009. Disponível em: <http://www.pcm.uem.br/dissertacao-tese/70> Acesso em: 22 ago. 2018.

SÃO BORJA. **Projeto pedagógico do curso superior de Licenciatura em Matemática.** São Borja, 2014. Disponível em: <http://www.iffarroupilha.edu.br/projeto-pedag%C3%B3gico-de-curso/campus-s%C3%A3o-borja>. Acesso em: 29 jan. 2018.

SERRA, Celso Penteado; et al. **Fractais:** propriedades e construção. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2005. Disponível em: <https://docs.ufpr.br/~ewkaras/ ic/geralic2003.pdf>. Acesso em: 12 jan. 2018.

SILVA, Sérgio Florentino da; et al. Tópicos Atuais em Matemática e Etnomatemática: pontos de convergência. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT**, Florianópolis, v.11, n.2, p. 418–436, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/ index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11n2p418/33649>. Acesso em: 15 jan. 2018.

SPINADEL, Vera Winitzky de; PERERA, Jorge Gustavo; PERERA, Jorge Hernàn. **Geometria Fractal.** 3. ed. Buenos Aires: Nueva, 1993.

STEWART, Ian. **Os Números da Natureza**: a realidade irreal da imaginação matemática. Rio de Janeiro: Rocco, 1996.

TARJA, Sanmya Feitosa. **Informática na Educação:** Novas ferramentas pedagógicas para o professor na atualidade. 4. ed. São Paulo: ÉRICA, 2001.

VALENTE, José Armando. **Computadores e conhecimento:** repensando a educação. Campinas: UNICAMP, 1998.

______. Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador: o papel do computador no processo ensino-aprendizagem. In: ALMEIDA, Maria Elizabeth Brisola Brito Prado; MORAN, José Manuel (Org.) **Integração das Tecnologias na Educação.** Secretaria de Educação a Distância. Brasilia: Ministério da Educação, 2005. p. 23-31.

______. Prefácio. In: BACICH, Lilian; NETO, Adolfo Tanzi; TREVISANI, Fernando de Mello (orgs.). **Ensino híbrido:** personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015, p. 13-17.

VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Um olhar sobre a modelagem Matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica.** 2007. 54 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007. Disponível em: <http://www.uel.br/pos/mecem/pdf/Dissertacoes/ rodolfo_vertuan.pdf> Acesso em: 15 ago. 2018.

VITABAR, Fabián. Imágenes fractales con GeoGebra. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática.** n.24, p. 161–175, dic. 2010. Disponível em: <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2010/24/Union_024_016.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2018.

YIN, Robert k. **Estudo de caso:** planejamento e métodos. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v22n2/1516-7313-ciedu-22-02-0465.pdf> Acesso em: 2 set. 2018.

APÊNDICES

Apêndice 1 – Trabalho completo publicado no 5º SIPEMAT

5º SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
5º INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON RESEARCH IN MATHEMATICAL EDUCATION
5ºSIMPÓSIO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
5º SYMPOSIUM INTERNATIONAL SUR LA RECHERCHE EM ÉDUCTION MATHÉMATIQUE
27 a 29 de junho de 2018 – BELÉM - PARÁ - BRASIL
ANAIS - ISSN: 2446-6336

GEOMETRIA FRACTAL: Estudos nos programas de Ensino de Matemática e Ensino de Ciências e Matemática

Mauricio Ramos Lutz[1]
José Carlos Pinto Leivas[2]

RESUMO

A presente comunicação científica é parte da pesquisa da tese de doutorado do primeiro autor, sob a orientação do segundo, a qual é utilizada para fundamentar a justificativa sobre os estudos na temática Geometria Fractal. Teve como propósito analisar produções acadêmicas, sobre Geometria Fractal, oriundas do Banco de Teses e Dissertações da CAPES, as quais foram realizadas no período de 2013 a 2017, nas áreas de Ensino de Matemática e Ensino de Ciências e Matemática. Do levantamento preliminar, feito com a busca pelas palavras chave "geometria AND fractal", foram selecionadas para análise sete dissertações. A pesquisa se realizou em cinco momentos. No primeiro deles, verificou-se a autoria, área de concentração, ano da defesa e título do trabalho. No segundo e terceiro momentos foram analisados os objetivos e justificativas das dissertações. Já no quarto momento, foi analisada a escrita (parte teórica) e as atividades propostas. Nesta última etapa constatou-se que houve dissertações que envolveram mais de um nível de ensino, em que ocorreram seis trabalhos propostos para o Ensino Médio, um para o Ensino Fundamental e dois para o Ensino Superior. Entre as atividades apresentadas as que mais apareceram foram a construção do Triângulo de Sierpinski, Árvore Pitagórica e Curva de Koch. Para finalizar as análises, em um quinto momento, foram verificadas as conclusões que os autores trouxeram em seus trabalhos. Conclui-se que não existe, até o momento da pesquisa, tese sobre a referida temática o que torna a proposta de tese inédita. Também, desses sete trabalhos, todos envolveram atividades práticas e, desses, apenas seis utilizaram a inserção de tecnologias no Ensino Médio e/ou Ensino Fundamental e um que aplicou atividades com alunos do Ensino Superior.

Palavras-chave: Geometria fractal. Mapeamento. Ensino e aprendizagem.

INTRODUÇÃO

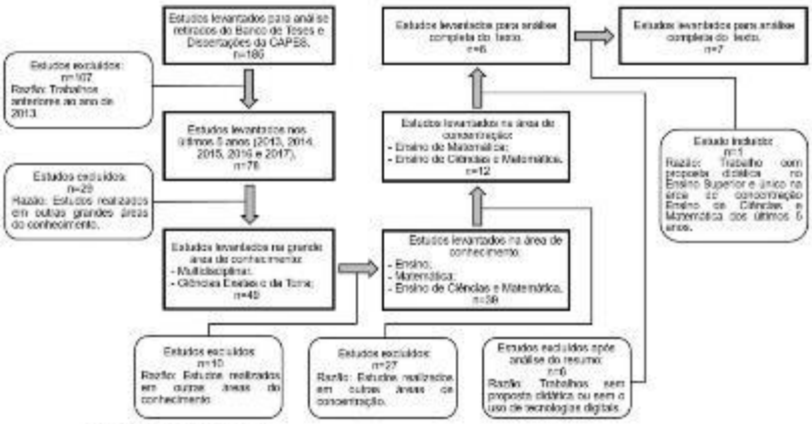
Para desenvolver a pesquisa, precisa-se estar atualizado com aquelas realizadas e publicadas recentemente, a fim de buscar subsídios que contribuam com a proposta para a tese de doutorado a que se referem os autores. Portanto, o objetivo desse mapeamento é verificar o que está sendo pesquisado nos

[1] Instituto Federal Farroupilha – IFFAR. mauricio.lutz@iffarroupilha.edu.br
[2] Centro Universitário Franciscano – UNIFRA. leivasjc@unifra.br

programas de pós-graduação stricto senso nas áreas de concentração Ensino de Matemática e Ensino de Ciência e Matemática, na temática Geometria Fractal, com a inserção do uso de tecnologias digitais, em âmbito nacional. Nessa pesquisa, houve interesse nos trabalhos que tiveram aplicações/propostas desenvolvidas e qual o público envolvido, particularmente, foi dada ênfase no Ensino Superior, uma vez que a tese pretendida volta-se a tal nível.

Para a realização do mapeamento, utilizou-se o Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES. Foram recuperadas 185 pesquisas ocorridas, em âmbito nacional, publicadas entre 1987 e 2017, selecionadas pelas palavras-chave "geometria AND fractal". A pesquisa foi feita em outubro de 2017. Após essa busca inicial, foi realizado seu refinamento, pois nem todos os trabalhos encontrados foram de interesse, pois estava-se interessado em trabalhos que tiveram propostas/aplicações que utilizassem a inserção de tecnologias e, se possível, no Ensino Superior. A Figura 1 apresenta uma síntese desse processo de refinamento, do qual restaram 7 dissertações para serem analisadas em sua totalidade e cujos resultados serão apresentados a seguir.

Figura 1 – Síntese do processo de obtenção das 7 dissertações recuperadas no Banco de Teses e Dissertações da CAPES sobre o tema Geometria Fractal.



Fonte: Autoria própria.

Na próxima seção apresenta-se a análise das sete dissertações. Tal análise foi dividida em cinco momentos. No primeiro momento verificou-se a autoria, área de concentração, ano da defesa e título do trabalho. No segundo e terceiro momentos foram analisados os objetivos e justificativas das dissertações. Já no quarto momento, foi analisada fundamentação teórica e as atividades propostas. Para finalizar as análises, no quinto momento, foram verificadas as conclusões que os autores trouxeram em seus trabalhos.

MAPEAMENTO

A primeira dissertação analisada é de autoria de Adami (2013), desenvolvida na área de Ensino de Matemática, apresentada no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de São Carlos, intitulada "Fractais no Ensino Médio: Uma sequência didática".

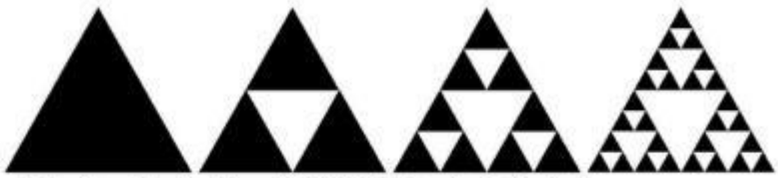
Essa dissertação teve por objetivo dar condições para que os alunos construíssem noções sobre as aplicações da Geometria Fractal e dos sistemas dinâmicos, ajudando-os a perceber a importância da Matemática para o desenvolvimento dos mais diversificados campos do conhecimento humano (ADAMI, 2013). Aliado a esse objetivo, o autor utilizou-se de recurso tecnológico, em especial, do software Geogebra (software gratuito para o ensino e aprendizagem de Matemática com funções para álgebra, geometria, planilhas de cálculo).

Adami (2013), justifica a escolha da temática e forma de aplicação a partir da necessidade de trabalhar, com os alunos do Ensino Médio, noções de geometrias não euclidianas e aplicações da Matemática nas mais diversas áreas da atuação humana. Ele buscou, assim, motivar os alunos a perceberem uma matemática além daquela proposta para resolver problemas, os quais nem sempre são contextualizados ou estão distantes da realidade dos alunos. O seu púbico foi alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola privada e as atividades desenvolvidas foram realizadas no turno inverso.

O trabalho inicialmente se desenvolveu por meio de uma pesquisa de análise bibliográfica que englobou: alguns conceitos inicias de fractais (breve histórico e cálculo de sua dimensão), Triângulo de Sierpinski, sistemas dinâmicos, software Geogebra e Engenharia Didática, baseada nos pressupostos de Michèle Artigue. A Engenharia Didática, conforme Artigue (1996), é desenvolvida em quatro fases: a primeira fase são as análises prévias; a segunda é a concepção e análise a priori das situações didáticas da engenharia; a terceira é o desenvolvimento da experimentação; e a quarta e última fase são as análises a posteriori e validação.

A segunda parte desse trabalho foi a realização de três atividades, duas utilizando materiais manipulativos e uma com o uso do software Geogebra. A primeira atividade foi o "Jogo do Caos", que é um algoritmo criado pelo matemático Michael Fielding Barnsley, em 1988 e, uma de suas versões, consiste na formação de um fractal com iterações a partir de um ponto interno de um triângulo (ADAMI, 2013). A segunda atividade foi para os alunos obterem pontos médios de segmentos determinados aleatoriamente no interior de um triângulo. Essa, foi pensada na tentativa de obter um maior número de pontos, uma vez que a primeira pudesse não apresentar resultados significativos. Da mesma forma que na atividade 1 os pontos obtidos foram determinados de modo aleatório. A terceira e última atividade foi a construção do Triângulo de Sierpinsk, conforme Figura 2, com o auxílio do software Geogebra, a qual tinha como objetivo implementar uma rotina computacional para ser executada e que repetisse as condições da segunda.

Figura 2 – Triângulos de Sierpinski com 0, 1, 2 e 3 iterações, respectivamente.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Sierpinski

Adami (2013), concluiu, ao final de seu trabalho, que suas atividades marcaram um espaço de reflexão sobre a importância da Matemática e de tecnologias para o desenvolvimento científico. Foi a partir destas atividades que ele pode criar outras situações problematizadoras, como por exemplo, determinar a dimensão de um fractal ou mesmo contextualizar conteúdos do Ensino Médio, como funções, logaritmos, números complexos, sequências, entre outros. O autor acredita que atividades como essas possam trazer para a sala de aula reflexões interessantes sobre a evolução da Matemática e como ela pode contribuir para que os alunos percebam sua beleza, e não como sinônimo de fórmulas e cálculos que nem sempre são interessantes para eles.

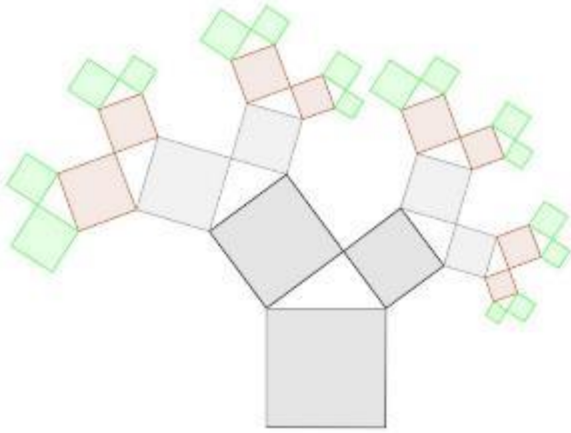
O segundo trabalho, também da Universidade Federal de São Carlos, é de autoria de Nicola (2013) e foi desenvolvido na área de Ensino de Matemática. Foi apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas em parceria com o Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, intitulada "Conhecendo Fractal no Ensino Médio – Árvore Pitagórica".

O trabalho de Nicola (2013) teve por objetivo a apresentação para os alunos da ideia de Geometria Fractal de maneira simples. Foi construído no software Geogebra o fractal Árvore Pitagórica e, consequentemente, a exploração do Teorema de Pitágoras, aplicando conceitos matemáticos já estudados em anos anteriores.

O autor justifica sua escolha por essa temática por apresentar uma propriedade fundamental da geometria – a semelhança. Acrescenta que as figuras mostram uma configuração que pode despertar a atenção e o interesse dos alunos e, consequentemente, os motivando a compreenderem conceitos matemáticos. A utilização de um software de geometria dinâmica também auxiliou o aprendizado desses alunos. O púbico foi uma turma de 30 alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola privada.

O trabalho iniciou com uma breve descrição da escola, dos alunos e do professor, logo após esta etapa o autor realizou uma pesquisa por meio de análise bibliográfica que desenvolveu conceitos de alguns fractais percursores, como por exemplo, Conjunto de Cantor, Curva de Koch, Floco de Neve de Koch, Triângulo de Sierpinski e Árvore Pitagórica. O último foi o centro do estudo dessa dissertação (Figura 3). A metodologia utilizada para a realização desse estudo foi a Engenharia Didática de Michèle Artigue.

Figura 3 – Árvore Pitagórica nível 3 destacando as cores em cada nível.



Fonte: Nicola (2013, p. 43).

Na sequência, o autor desenvolveu, passo a passo, a construção da Árvore Pitagórica no software Geogebra, com o grupo de alunos. Após essa construção ele iniciou a exploração de conceitos matemáticos. Primeiro, foi a contagem do número de quadrados apresentados no nível 3 da Árvore Pitagórica e, para finalizar, foi explorado o teorema de Pitágoras.

Nicola (2013), finalizou seu trabalho concluindo que foi uma experiência válida, salientando a importância do uso da informática na sala de aula, pois isso já é uma realidade de nossos educandos, sendo que a escola deve se aliar e acompanhar a evolução tecnológica. Também, concluiu que os professores têm de procurar se apropriar dessa realidade, por meio de cursos de formação inicial ou continuada, pois cada vez mais os alunos estão inseridos nesse meio informatizado.

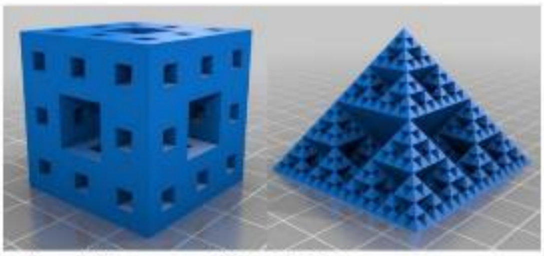
A terceira dissertação analisada é de autoria de Castilhos (2013), desenvolvida na área de Ensino de Matemática, apresentada no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal Fluminense – Campus Niterói, intitulada "Possibilidades pedagógicas para introdução de Geometria Fractal no Ensino Básico e na formação de professores de Matemática."

Essa dissertação teve por objetivo apresentar propostas de atividades empregando fractais para serem utilizados em sala de aula no Ensino Básico (Fundamental e Médio) e na formação de professores, podendo ser na graduação ou em formação continuada.

Castilhos (2014), justificou a escolha desse tema devido ao fractal possibilitar desenvolver contagem, frações, área, perímetro, razão, proporcionalidade, conteúdos esses desenvolvidos no Ensino Fundamental de uma forma diferente. Já no Ensino Médio, com a introdução inicial do conceito de fractal, acompanhado de sua parte histórica e, com o auxílio da tecnologia, construir a ideia de infinito, um conceito de difícil entendimento. Além disso, outro ponto importante, destacado pelo autor, é um exemplo de aplicação em logaritmo na determinação da dimensão fractal. Afirma, também, que pode ser desenvolvido o conceito de recursividade, pensamento indutivo, progressão geométrica e composições de função por meio de iterações nos objetos fractais, utilizando-se de uma construção geométrica para introdução desses conceitos, o que para o aluno é mais palpável, ou seja, trabalhar conceitos abstratos em materiais concretos.

A dissertação iniciou com uma pesquisa de cunho bibliográfico, que englobou: um breve histórico da Geometria Fractal até chegar à sua definição. Apresentou o Conjunto de Cantor, Curva de Peano, Curva de Hilbert, Curva de Koch, Ilha de Koch, Triângulo de Sierpinski, Carpete de Sierpinski, Cubo de Sierpinski e Pirâmide de Sierpinski (Figura 4). Após esta parte o autor trabalhou com dimensão fractal e comprimento de uma curva.

Figura 4 – Cubo e Pirâmide de Sierpinski.



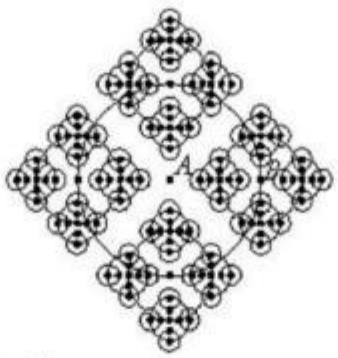
Fontes: https://www.thingiverse.com/thing:533896.
https://www.thingiverse.com/thing:204503.

Na segunda parte dessa dissertação, o autor desenvolveu as atividades aplicadas no 7° e 8° ano do Ensino Fundamental, 1° e 2° ano do Ensino Médio e estudantes de licenciatura em Matemática.

O autor propõe, para o 7° e 8° ano do Ensino Fundamental, a construção do Triângulo de Sierpinski, utilizando cartolina para desenvolver conceitos de geometria e de fração para o 7° ano. Os conceitos de geometria, razão e potência, constavam das atividades para o 8° ano. Também, teve como objetivo promover a interdisciplinaridade entre Matemática e Artes, quando foram utilizados 8 períodos de aula, sendo 4 desses para cada disciplina na aplicação da atividade.

Para o 1° ano do Ensino Médio ele propõe o uso do software Geogebra para a construção do Tetracírculo, conforme Figura 5, com a utilização de 6 períodos de aula. A atividade teve por objetivo desenvolver conceitos de geometria, além de introduzir a tecnologia no ensino da Matemática por meio de software de geometria dinâmica, apresentando uma aplicação de progressão geométrica e, consequentemente, formalizando o conceito de infinito e limitado.

Figura 5 – Tetracírculo.



Fonte: Castilhos (2014, p. 33).

Já na atividade do 2° ano do Ensino Médio, ele propõe desenvolver o conceito de Geometria Fractal, calculando a dimensão de um objeto fractal natural e seu comprimento, também fazendo uso da interdisciplinaridade com Geografia e

Biologia. A atividade teve como objetivo a apresentação do conceito de Geometria Fractal, trabalhando com aplicação de logaritmo e discutindo a importância do cálculo da dimensão de uma fronteira. Ele explorou a fronteira do litoral da cidade de Armação dos Búzios.

Para os alunos do curso de licenciatura em Matemática, o autor propôs mostrar uma maneira de ensinar potência, razão, progressão geométrica, resolver problemas que envolvem infinito e limite, generalizar situações por meio de fórmulas matemáticas, apresentar o conceito de Geometria Fractal e recolher opiniões sobre a introdução de fractais no Ensino Básico.

Castilhos (2014), finalizou seu trabalho concluindo que sua pesquisa revelou que os alunos se interessaram mais por Matemática quando a mesma foi apresentada com uma atividade dinâmica ou quando apresentou uma aplicação, pois eles se sentiram instigados e questionados a resolver a situação proposta, principalmente por ela ter sido feita de forma interdisciplinar na apresentação dos conteúdos.

O quarto trabalho, de autoria de Mingoranci (2014), foi desenvolvido na área de Ensino de Matemática, tendo sido apresentado no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT em parceria com a Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – Campus de Três Lagoas. A dissertação foi intitulada "A Geometria Fractal aliada à contextualização, protagonismo juvenil e tecnologias como proposta de melhoria no processo ensino/aprendizagem da Matemática na Educação Básica".

O estudo de Mingoranci (2014) teve por objetivo a inserção do estudo da Geometria Fractal, sendo utilizada como um conteúdo curricular capaz de motivar e enriquecer as aulas de Matemática, consequentemente, melhorando o processo de ensino e aprendizagem.

A autora justificou sua escolha pela Geometria Fractal devido ela permitir o estímulo de diversas habilidades necessárias para o entendimento não só da Matemática, mas do mundo em geral, por exemplo, saber pensar iterativamente e recursivamente e no desenvolvimento da percepção de autossimilaridade e do raciocínio dedutivo. Além do mais, fornece ferramentas ao professor para trabalhar diferentes sentidos como visão, audição e atividades manuais. Também possibilita a abordagem de diversos conteúdos matemáticos de áreas não geométricas como de outras disciplinas, podendo ser utilizada como tema central para um projeto interdisciplinar.

O trabalho, inicialmente, se desenvolveu por meio de análise bibliográfica que englobou cinco tópicos: definição de fractal; autossimilaridade; precursores da Geometria Fractal e suas criações; dimensão fractal; e aplicações.

A segunda parte de sua dissertação apresenta uma breve revisão sobre a Geometria Fractal na sala de aula, em que finaliza apresentado uma proposta de aplicação. Portanto, a autora descreve, nesse trabalho, apenas uma proposta de aplicação o que o diferencia das outras dissertações apresentadas até o momento. Ela utilizou o software de geometria dinâmica Geogebra e, para tanto, apresentou o passo a passo para a construção da Curva de Koch, Ilha de Koch ou Floco de Neve, Triângulo de Sierpinski e Fractal Pitagórico ou Árvore Pitagórica.

Mingoranci (2014) finalizou seu trabalho enfatizando ter apresentado com êxito conceitos da Geometria Fractal. Também, destacou que o trabalho não foi idealizado com o intuito de defender a inclusão da Geometria Fractal como conteúdo do currículo de Matemática na Educação Básica. Além disso, relatou que a geometria pode desenvolver diversos sentidos, habilidades e a possibilidade de se trabalhar com conteúdo matemático variados, bem como de outras disciplinas, evidenciando um tema a ser inserido nas escolas por meio de projetos interdisciplinares.

A quinta dissertação analisada é de autoria de Reis (2014), desenvolvida na área de Ensino de Matemática, apresentada no Programa de Pós-Graduação em Matemática em parceria com o Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal Rural do Semiárido – Campus Mossoró, intitulada "Fractais no Ensino Médio: Da observação de padrões da natureza ao uso do Geogebra."

Essa dissertação teve por objetivo propor uma breve análise de padrões geométricos da natureza como ponto inicial para a introdução da Geometria Fractal no currículo do Ensino Médio e a inserção do uso de tecnologias digitais na sala de aula, em especial com o uso do software Geogebra.

A escolha da Geometria, por Reis (2014), como tema central, justifica-se principalmente por ela permear o mundo em que vivemos. A plena compreensão das competências e habilidades relacionadas a essa área da Matemática é indispensável, se for considerado o quanto a geometria está presente no cotidiano dos alunos. A abordagem da Geometria Fractal no Ensino Médio é uma proposta que visa levar aos alunos um primeiro contato com uma Geometria não Euclidiana e a temas importantes na área da computação como as recorrências e, até mesmo, mais timidamente, às estruturas lógicas dos algoritmos de programação.

A dissertação inicia com uma pesquisa bibliográfica, a qual apresentou: um breve histórico da Geometria Fractal e fractais famosos, como por exemplo, o Conjunto de Cantor, a Curva de Koch e o Triângulo de Sierpinski,

Na segunda parte, ele apresentou o púbico em que realizou a aplicação, que foi de 24 alunos do 3° ano do Ensino Médio de uma escola Estadual. Ele realizou uma aula de campo para coleta de materiais que seriam utilizados em aula, na Praia do Requenguela, situada no litoral leste do Ceará. Após esta análise, ele propôs aos alunos a construção de alguns fractais com a utilização do software Geogebra. Foram construídos a Curva de Koch, o Triângulo de Sierpinski, a Árvore Pitagórica e, para essas três primeiras construções, ele elaborou um manual. Depois, solicitou aos alunos que criassem outro tipo de fractal. Para finalizar, ele propôs a exploração matemática dos fractais que foram construídos anteriormente, analisando área, perímetro e fator de crescimento.

Reis (2014) finalizou sua pesquisa relatando que os conceitos de progressão geométrica, análise combinatória e noções de geometria plana foram bem explorados. As construções no software GeoGebra viabilizaram a fixação das ideias de razão e proporção. Além disso, temas transversais como as recorrências tiveram boa aceitação por parte dos alunos; acreditou que seu trabalho teve êxito entre seus alunos.

A penúltima dissertação analisada é de autoria de Araújo (2015), desenvolvida na área de Ensino de Matemática, apresentada Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Roraima, intitulada "Teoria Matemática Implícita na Geometria Fractal: Construindo fractais com a ferramenta computacional Asymptote."

Essa dissertação, teve por objetivo realizar um estudo sobre os fractais pioneiros, destacando suas principais características e relacionando-os com conteúdo matemático presente no currículo da Educação Básica, fazendo o uso de tecnologias digitais na sala de aula, em especial com o uso do software Asymptote.

A justificativa da escolha da Geometria, por Araújo (2015), como tema central de sua pesquisa de mestrado, é por despontar curiosidades nos alunos, além de uma imensa possibilidade de aplicações. Porém, é, ainda, pouquíssimo trabalhada e conhecida.

A dissertação inicia com uma pesquisa bibliográfico que explorou: o axioma da indução; progressões geométricas, teorema de Pitágoras, números complexos, Conjunto de Cantor, fractais pioneiros.

Na segunda parte, ele apresentou uma proposta para alunos do Ensino Médio com a utilização do software Asymptote, o qual possui uma linguagem descritiva para gráficos vetoriais que fornece um sistema de coordenadas matemáticas para desenho técnico. Ele apresentou o passo a passo para a construção da Árvore Pitagórica, Curva de Koch, Triângulo de Sierpinski e Conjunto de Mandelbrot.

Araújo (2015) finalizou seu trabalho relatando que foi possível perceber que muitos conteúdos básicos de Matemática podem ser desenvolvidos utilizando os conceitos de fractais. Esse estudo pode ser usado tanto para apresentar um conteúdo novo, como para fixar conceitos já trabalhados anteriormente. Desta forma, o autor acredita que, introduzir o estudo da Geometria Fractal na sala de aula, pode dar aos alunos a oportunidade de investigar tópicos da Matemática tradicional por um novo ângulo e, de certa forma, mais motivador.

A última dissertação analisada é de autoria de Batista (2017), desenvolvida na área de Ensino de Ciências e Matemática, apresentada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro Universitário Franciscano, intitulada "Sequências numéricas a partir da Geometria Fractal para licenciandos em Matemática." O trabalho da referida autora, foi selecionado para estudo pois independente de não utilizar tecnologias digitais ele é o único que desenvolveu sua propostas utilizando como público alunos do Ensino Superior.

Esse trabalho teve por objetivo investigar quais as contribuições do uso Geometria Fractal quando utilizada para introdução do conteúdo de sequências numéricas para licenciandos em Matemática.

Para Batista (2017) a inserção de Geometria Fractal na introdução de sequências numéricas, na formação de professores de Matemática, conecta-se às competências e habilidades próprias do educador matemático, fazendo com que o licenciando desenvolva estratégias de ensino que favoreçam a sua criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos.

O trabalho inicia com uma pesquisa bibliográfica que explorou: os conceitos de Investigação Matemática, o ensino de Geometria e a Geometria Fractal (auto similaridade, dimensão fractal e processo iterativo de construção).

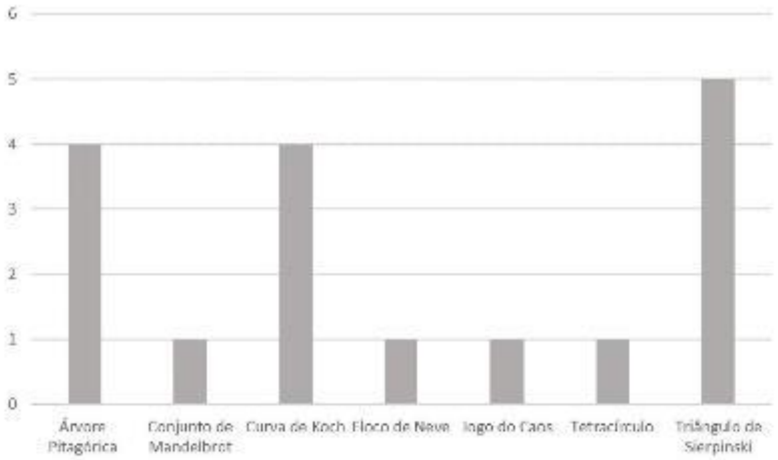
Na segunda parte da dissertação a autora apresentou o púbico de sua aplicação, que foram 9 alunos do curso de licenciatura em Matemática de uma instituição privada, em que foram usados 4 períodos para a realização/desenvolvimento da atividade. Ela desenvolveu com os alunos o Floco de Neve ou Curva de Koch, utilizando para a construção papel, régua e compasso. Para finalizar a atividade eles deveriam preencher um quadro, ao qual tinham que completar com a quantidade de segmentos em cada iteração, medida do lado, área e perímetro de cada objeto fractal a partir de sua dimensão

Batista (2017) concluiu sua pesquisa relatando que a Investigação Matemática, envolvendo a construção de um fractal e nela explorando o conteúdo de sequências numéricas, propiciou aos participantes uma nova forma de abordagem desse conteúdo, o que foi ratificado nas falas e nos registros deles. Também, destacou que os envolvidos relataram que a visualização e construção do fractal levou, de maneira direta, ao conceito de sequência numérica, bem como ao de convergência, assim possibilitando a conexão entre os conteúdos.

Em cinco trabalhos analisados, nos quais houve aplicação, os autores utilizaram como instrumento de coleta de dados registros fotográficos, anotações, material confeccionado pelos participantes e as construções e atividades realizadas e registradas em diário de campo durante os encontros.

Por meio da análise das sete dissertações, constatamos que algumas trouxeram sua propostas a mais de um nível de ensino, sendo que seis desenvolveram propostas para o Ensino Médio, um para Ensino Fundamental e dois para o Ensino Superior. No Gráfico 1 apresenta-se um resumo das atividades apresentadas nas dissertações.

Gráfico 1 – Resumo das atividades apresentadas nas sete dissertações.



Fonte: Autoria própria.

Analisando o Gráfico 1, pode-se concluir que a maioria dos trabalhos trouxe a construção do Triângulo de Sierpinski (5), Curva de Koch (4) e Árvore Pitagórica (4).

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Após a pesquisa realizada pode-se tecer algumas considerações sobre a temática Geometria Fractal. Foi constatado que não existe, até o momento da pesquisa, no Banco de Teses e Dissertações da CAPES, tese sobre a referida temática o que torna a proposta de tese inédita. Um segundo ponto relevante é que teve apenas sete trabalhos que envolveram atividades práticas e, desses, apenas seis utilizaram a inserção de tecnologias no Ensino Médio e/ou Ensino Fundamental e um que aplicou atividades com alunos do Ensino Superior.

Outro destaque é sobre as atividades aplicadas nas dissertações, nas quais as construções mais utilizadas foram o Triângulo de Sierpinski, em cinco trabalhos, Curva de Koch e Árvore Pitagórica, em 4 trabalhos. Portanto, a partir desse levantamento se irá procurar desenvolver outras atividades, diferentes das exploradas na literatura investigada, de construções fractais utilizando recursos tecnológicos.

REFERÊNCIAS

ADAMI, Paulo Sérgio. **Fractais no Ensino Médio:** Uma sequência didática. 2013. 55 p. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean (direcção) **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996. p. 193-217.

BATISTA, Bárbara Regina da Silveira. **Sequências numéricas a partir da Geometria Fractal para licenciandos em Matemática.** 2017. 74 p. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2017.

CASTILHOS, Thiago Barcelos. **Possibilidades pedagógicas para introdução de Geometria Fractal no Ensino Básico e na formação de professores de Matemática.** 2014. 57 p. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2014.

MINGORANCI, Simone. **A Geometria Fractal aliada à contextualização, protagonismo juvenil e tecnologias como proposta de melhoria no processo ensino/aprendizagem da Matemática na Educação Básica.** 2014. 121 p. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, 2014.

NICOLA, Celso Henrique. **Conhecendo fractal no Ensino Médio** – Árvore Pitagórica. 2013. 58 p. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

REIS, Jakson Ney da Costa. **Fractais no Ensino Médio:** Da observação de padrões da natureza ao uso do Geogebra. 2014. 92 p. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Universidade Federal Rural do Semiárido, Mossoró, 2014.

.

Apêndice 2 – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) a participar da pesquisa **denominada** "Possibilidade de inserção da geometria fractal na licenciatura em Matemática do IFFar", a ser desenvolvida pelo professor Mauricio Ramos Lutz, doutorando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana.

Tem por **objetivo** investigar possibilidades de inserção de noções de Geometria Fractal nos cursos de licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha com o uso das Tecnologias Digitais.

As **justificativas** desta pesquisa, se deve entre outros motivos, aos cursos de licenciatura em Matemática do IFFar desenvolverem em seus currículos somente a Geometria Euclidiana, além de haver poucos trabalhos científicos com aplicação relacionando a Geometria Fractal e o uso da tecnologia computacional.

A **metodologia de pesquisa** é de cunho qualitativo, ao qual para a obtenção de dados será desenvolvido e aplicado uma oficina com duração de 20 horas, utilizando como **metodologia de ensino** o uso das tecnologias digitais, que nesse caso será o computador e o *software GeoGebra*.

A **coleta dos dados** ocorrerá a partir de três instrumentos: observação direta e anotações do pesquisador em seu diário de campo; registros escritos pelos acadêmicos; e registros figurais realizados no *GeoGebra*.

A **análise dos dados**, se apoia no método qualitativo, buscando analisar os procedimentos de resolução dos alunos em relação aos diferentes tipos de transformações (tratamento ou conversões) das representações semióticas.

A sua **participação é voluntária** e, em momento algum, esta pesquisa servirá para a identificação e/ou julgamento de suas opiniões.

O teor da oficina apresenta **riscos mínimos**, considerados inerentes à vida diária. Também, **não pretende causar danos** morais ou riscos à sua saúde física, mental, social ou espiritual. Caso você se sentir desconfortável, a pesquisa será imediatamente interrompida e você receberá suporte inicial do próprio pesquisador que se responsabiliza para viabilizar atendimento profissional, se necessário.

Os **benefícios** pela sua participação estão relacionados à complementação de sua formação acadêmica, já que a temática Geometria Fractal não está presente em conteúdo de disciplinas disponibilizados no Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Farroupilha.

A sua participação na pesquisa **não lhe acarretará prejuízo financeiro**, bem como não será remunerada. Você tem **direito à ressarcimento e à indenização** diante de eventuais danos decorrentes da pesquisa, bem como de **retirar o seu consentimento** a qualquer momento, sem qualquer prejuízo ou sanção. Ainda, você tem o direito de ter **acesso aos resultados** da pesquisa.

Eu,____, fui informado(a) dos objetivos da pesquisa, justificativa, metodologia, coleta e análise dos dados, bem como os benefícios e riscos, acima mencionada, de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que em qualquer momento **poderei solicitar novas informações e modificar minha decisão** se assim desejar. O pesquisador certificou-me de que minha **identidade será preservada**. Em caso de dúvidas **poderei chamar** o **pesquisador responsável**, Mauricio Ramos Lutz pelo telefone (55) 99101 7474 **ou o Comitê de Ética** da Universidade Franciscana pelo telefone (55) 3220-1200, Ramal 1289. Declaro que concordo em participar deste estudo, que recebi uma via deste TCLE e que me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Alegrete, ___/___/___

____

Assinatura do participante

Mauricio Ramos Lutz
Pesquisadora responsável

____

Assinatura do pesquisador

Apêndice 3 – Projeto de Ensino

FORMULÁRIO - REQUERIMENTO DE CADASTRO DE PROJETO DE ENSINO
1. IDENTIFICAÇÃO
Título do Projeto: **Geometria Fractal na formação docente: da teoria à prática**
1.1 Coordenador: **Mauricio Ramos Lutz**
1.2 Curso ou Área de Vinculação: **Licenciatura em Matemática**
1.3 Tipo de Financiamento (x) Auto-Financiado (   ) Financiamento Interno (concorrerá no Edital de Fomento) (   ) Financiamento Externo (Indicar:_______________________________________)
1.4 Público Alvo: **alunos do curso de licenciatura em Matemática**
1.5 N° de Pessoas a serem diretamente atingidas: **25 participantes**
1.6 Período de realização: **abril a setembro de 2019**
1.7 Tipo de Projeto: **(   ) Intervenção Continuada   (x) FIC – Carga Horária Total: 20 h   (   ) Ação de Ensino**
2. RECURSOS HUMANOS
a) Coordenador

Nome: Mauricio Ramos Lutz	SIAPE:
E-mail: mauricio.lutz@iffarroupilha.edu.br	Cel:

b) Colaborador(es)

Nome	Docente / TAE	N° de horas no projeto

c) Estudante voluntário (se houver)

4. REQUERIMENTO DE CADASTRO

Assinatura ______________________________

Nome: Mauricio Ramos Lutz

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA
***Campus* ALEGRETE**

GEOMETRIA FRACTAL NA FORMAÇÃO DOCENTE: DA TEORIA À PRÁTICA

Alegrete
2019

SUMÁRIO

1 RESUMO

2 JUSTIFICATIVA E DIAGNÓSTICO

3 OBJETIVOS

4 METODOLOGIA

5 RESULTADOS

6 PRODUTOS

7 AVALIAÇÃO

8 PROCESSO SELETIVO

9 REFERÊNCIAS

ANEXOS

I ORÇAMENTO

1 RESUMO

O presente projeto de ensino[28] tem como objetivo inserir noções de Geometria Fractal, envolvendo o uso da tecnologia computacional, nesse caso com o uso do *software GeoGebra*, no curso de licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha (IFFar) – campus Alegrete. A escolha da temática se deve, entre outros motivos, ao fato de os cursos de licenciatura em Matemática do IFFar desenvolverem em seus currículos somente a Geometria Euclidiana, além de haver poucos trabalhos científicos com aplicação relacionando a Geometria Fractal e o uso da tecnologia computacional. Como aporte teórico, será utilizada a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval (2009), com o intuito de poder analisar as diferentes mobilizações de registros de representação que podem ocorrer para a apreensão de um objeto matemático. A metodologia é de cunho qualitativo. Os sujeitos da pesquisa serão acadêmicos do curso de licenciatura em Matemática do IFFar – campus Alegrete.

2 JUSTIFICATIVA E DIAGNÓSTICO

Não sabemos bem sobre as origens da Geometria, pois os primórdios desse conhecimento são mais antigos que a própria escrita. Boyer (1996) acredita que ela nasceu no Egito pelas necessidades práticas de medir terras após enchentes anuais do rio Nilo. Tais medidas eram necessárias para regular a quantidade de terra que cada indivíduo possuía e, assim, estabelecer cobranças de impostos.

O reconhecimento da Geometria Euclidiana na Matemática e no cotidiano das pessoas é inegável, posto que, por meio dela, aprendemos sobre formas e medidas, que facilmente são encontradas na natureza, seja em estruturas com padrões regulares, como, por exemplo, uma fachada de uma casa, uma caixa de sapato, entre outros objetos industrializados. Entretanto, na natureza existem outras formas que escapam a esse regramento, não tendo como descrevermos ou analisarmos partindo da visão da Geometria Euclidiana. A partir dessa dificuldade, foram criados outros sistemas axiomáticos, como os representados pelas geometrias não euclidianas.

Kaleff (2007) realizou uma pesquisa com professores de Matemática, na qual apontou que mais de 50% dos profissionais em atividade relataram não ter estudado Geometrias Não-Euclidianas durante sua graduação e 34% declararam que não sabiam do que se tratavam.

[28] A proposta de projeto de ensino é parte integrante da pesquisa de doutorado realizada pelo coordenador.

Santos (2009), apoiando-se em seus conhecimentos como professora no Ensino Superior e nos resultados conseguidos em pesquisa com professores de escolas estaduais da cidade de Maringá, estado do Paraná, relata que são raros os cursos de licenciatura em Matemática que trabalham essas Geometrias.

Para o presente projeto, realizamos um levantamento em grades curriculares de cursos de licenciatura em Matemática do Instituto Federal Farroupilha (IFFar), com a finalidade de identificarmos, nas propostas curriculares dos referidos cursos, a presença de conteúdos de geometrias não euclidianas ou tópicos relacionados.

O IFFar apresenta 11 campi: Alegrete, Frederico Westphalen, Jaguari, Júlio de Castilhos, Panambi, Santa Rosa, Santo Ângelo, Santo Augusto, São Borja, São Vicente do Sul e Uruguaiana. Cinco de suas unidades têm o curso de licenciatura em Matemática: Alegrete, Frederico Westphalen, Júlio de Castilhos, Santa Rosa e São Borja. (BRASIL, 2016).

Analisando os Projetos Pedagógicos de Curso (PPC) – Alegrete (2014), Frederico Westphalen (2018), Júlio de Castilhos (2014), Santa Rosa (2014) e São Borja (2014) – vemos que os cursos de licenciatura em Matemática possuem três disciplinas de Geometria, disponibilizadas entre o segundo e o quarto semestres do curso. Outra constatação, mediante a análise das ementas, é que não são oferecidas aos alunos outras Geometrias a não ser a Geometria Euclidiana.

Para verificar e justificar a relevância do assunto, Geometria Fractal, foi realizado mapeamento dos últimos 10 anos (2008–2017) nas publicações acadêmicas nacionais e internacionais na área de Ensino, em especial atenção às com escopo em Educação Matemática ou Multidisciplinar. Para tanto, foram recuperados 14 trabalhos (10 nacionais e 4 internacionais), sendo possível constatar que a maioria deles constituem-se como propostas e/ou relatos de experiências que ocorreram com a Educação Básica. Ademais, muito poucos utilizaram algum tipo de *software* ou objeto de aprendizagem.

Também, com a mesma finalidade, foi realizado um segundo mapeamento, agora no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) dos últimos 5 anos (2013–2017), dando ênfase aos trabalhos que tiveram propostas/aplicações de atividades com uso de tecnologias digitais. Após a realização da pesquisa sobre a temática Geometria Fractal, foi averiguado que, até o momento da realização da pesquisa, obtivemos 7 dissertações, sendo que seis envolviam proposta/aplicação de atividades com o uso de tecnologias digitais no Ensino Fundamental e/ou Médio e uma com desenvolvimento de atividades no Ensino Superior.

Depois de realizarmos o levantamento no IFFar e esses dois mapeamentos, percebemos que esse tema não é desenvolvido nos cursos de licenciatura em Matemática, sendo também pouco explorado nos periódicos científicos.

Outro motivo da escolha da Geometria Fractal como tema desse projeto deu-se por ela perpassar o mundo em que vivemos. O entendimento das competências e habilidades associadas a essa área da Matemática é fundamental, se considerarmos o quanto a Geometria, de forma geral, está presente no cotidiano de nosso alunado. Além disso, a Geometria Fractal permite, por exemplo, saber pensar iterativamente e recursivamente e desenvolver a percepção de autossimilaridades e raciocínio dedutivo.

Barbosa (2005), em seu livro "Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula", aponta uma vasta possibilidade de tópicos de Matemática que podem ser desenvolvidos na sala de aula, por exemplo, a exploração de temas como sequências, contagem, frações, razão, proporcionalidade, perímetro, área, volume, sempre olhando pelo viés dos padrões e o senso estético dos fractais. Além disso, estimula o uso de tecnologias digitais em sala de aula, no nosso caso, o *software* de Geometria Dinâmica (GD) *GeoGebra*, possibilita outra postura do professor, em que ele se torna um mediador do conhecimento e o aluno, um sujeito ativo de sua aprendizagem.

Ainda, segundo o autor, as justificativas para inserir Geometria Fractal no ensino se dão por:

> • conexões com várias ciências;
> • deficiências da Geometria Euclidiana para o estudo de formas da natureza, desde que é, em geral, apenas apropriada para formas do mundo oriundas do humano, como construções de casas, prédios, pontes, estradas, máquinas etc.; os objetos naturais são com frequência mais complicados e exigem uma geometria mais rica, que os modela com fractais, possibilitando desenvolver projetos educacionais sobre temas transversais voltados para a compreensão de fenômenos que ocorram nos diversos ambientes;
> • difusão e acesso aos computadores e a tecnologias da informática nos vários níveis de escolarização;
> • existência do belo nos fractais e possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo e arte aplicada à construção de fractais, entendendo-se arte como toda ação que envolve simultaneamente emoção, habilidade e criatividade;
> • sensação de surpresa diante da ordem na desordem. BARBOSA (2005, p. 19).

Aliado ao que foi exposto anteriormente, salientamos o interesse de proporcionar o contato dos futuros educadores com a Geometria Fractal e com o uso de recursos tecnológicos, no intuito de que, futuramente, os conhecimentos adquiridos qualifiquem sua prática docente e, consequentemente, os auxilie no processo de ensino e aprendizagem na Educação Básica.

Ao refletirmos sobre a forma de organização e desenvolvimento do conhecimento geométrico nos cursos de licenciatura em matemática, encontramos uma realidade preocupante: a maioria se detém a desenvolver apenas os conceitos da geometria euclidiana, não ofertando em seus currículos disciplinas que contemplem o estudo das geometrias não-euclidianas, deixando de lado essa importante faceta da construção do conhecimento geométrico.

3 OBJETIVOS

Este projeto tem por objetivo geral: inserir noções de Geometria Fractal envolvendo o uso da tecnologia computacional no curso de licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha (IFFar) – campus Alegrete.

A partir do objetivo geral foram elencados os seguintes objetivos específicos:

a) Conhecer a cronologia dos fractais e alguns fractais clássicos;

b) Chegar à elaboração de uma definição de fractal;

c) Construir alguns fractais utilizando o *GeoGebra*;

d) Explorar as relações geométricas envolvidas nos fractais previamente construídos no *GeoGebra*;

e) Determinar e calcular a fórmula da dimensão fractal.

4 METODOLOGIA

A presente pesquisa é de natureza qualitativa de cunho interpretativo. Segundo Goldenberg (1999), a preocupação do pesquisador, em uma pesquisa qualitativa, é com o aprofundamento da compreensão do fenômeno e não com sua representatividade numérica. Ao empregar a abordagem qualitativa, almejamos compreender os modos como os alunos, em uma situação específica, pensam, agem e buscam a generalização de conteúdos matemáticos. Já na concepção de Garnica (2004, p. 86),

> o adjetivo "qualitativa" estará adequado às pesquisas que reconhecem: (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, se vale de suas perspectivas e filtros eventuais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configurados; (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas.

A esse respeito, Bogdan e Biklen (1994) relatam que as investigações qualitativas apresentam algumas características fundamentais, como o interesse maior pelo processo do que pelos resultados ou produtos, a importância do significado atribuído pelos sujeitos às suas ações e a descrição minuciosa. Nesse sentido, os autores afirmam que

> a abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para construir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 49).

Os autores Goldenberg (1999), Garnica (2004), Bogdan e Biklen (1994) reforçam a importância do contato direto com o sujeito da pesquisa, pois é por meio dele que se pode complementar os dados recolhidos. Portanto, nesse sentido, frequentar o ambiente de pesquisa tem sua relevância para que se conheça o contexto em que a investigação está inserida, o que é o caso presente, no qual o pesquisador está inserido no contexto como professor efetivo da instituição onde realizará a pesquisa, sendo conhecedor dos sujeitos envolvidos.

Pensando nas atividades a serem desenvolvidas e coleta de dados no Projeto de Ensino, planejamos realizar 8 encontros, um por semana, com duração de 2,5 horas cada, totalizando 20 horas. Em todos os encontros, faremos uso das tecnologias digitais, nesse caso o *GeoGebra*. Iremos utilizar o Laboratório de Informática da Instituição, o qual dispõe de 25 computadores. No Quadro 1, apresentamos as atividades que serão contempladas durantes a realização do Projeto de Ensino.

Quadro 1 – Atividades a serem desenvolvidas durante o Projeto de Ensino.

	Atividade prevista
1º e 2º encontro	Fractal de Dürer.
3º e 4º encontro	Dimensão Fractal.
5º e 6º encontro	Curva de Peano.
7º e 8º encontro	Tetraedro de Sierpinsky.

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Portanto, apoiando a ideia de Bogdan e Biklen (1994) de que pesquisa qualitativa é descritiva, os instrumentos para a obtenção dos dados, que julgamos necessários, serão obtidos a partir de:

a) observação direta e anotações do pesquisador em seu diário de campo;

b) registros escritos pelos acadêmicos;

c) figuras realizadas no *GeoGebra*.

Para Yin (2005), o emprego de múltiplas fontes de dados, (no nosso caso, produções escritas dos acadêmicos, diário de campo do pesquisador e construções no *GeoGebra*) permite ter um conjunto mais variado para a realização de uma análise fidedigna. O uso desses instrumentos possibilita o cruzamento de informações, se necessário, o que permite, por um lado, garantir os diferentes olhares dos investigados no estudo e, por outro, ao pesquisador obter outras perspectivas do mesmo fenômeno, criando situações para uma melhor análise dos dados.

5 RESULTADOS

Com a realização do projeto, esperamos contribuir com o ensino e a aprendizagem da Geometria Fractal e com as reflexões acerca da formação docente na área da matemática, em especial, aquela desenvolvida no Instituto Federal Farroupilha – campus Alegrete.

6 PRODUTOS

Os dados coletados terão como produto resultante a tese de doutorado do coordenador deste projeto, além de outras produções acadêmicas, tais como artigos científicos, que possam vir a ser produzidas a partir dela.

7 AVALIAÇÃO

Os instrumentos de avaliação serão as atividades proposta em cada encontro, a serem desenvolvidas com os acadêmicos durante a realização do projeto. A análise dos dados será realizada a partir das observações do coordenador e por meio de materiais elaborados pelos alunos em sala de aula.

8 PROCESSO SELETIVO

A seleção dos participantes será realizada por ordem de inscrição e pode participar qualquer aluno regularmente matriculado no curso de Licenciatura em Matemática do IFFar – campus Alegrete.

9 REFERÊNCIAS

ALEGRETE. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática.** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Campus Alegrete. Alegrete, 2014.

Disponível em: <http://www.iffarroupilha.edu.br/ projeto-pedag%C3%B3gico-de-curso/campus-alegrete> Acesso em: 29 jan. 2018

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula.** Belo Horizonte: Autentica, 2005.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação.** Portugal: Porto Editora, 1994.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. **Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha.** Santa Maria. 2016. Disponível em: <http://www.iffarroupilha. edu.br/portal?view=default>. Acesso em: 30 jan. 2018.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Fisica, 2009.

FREDERICO WESTPHALEN. **Projeto pedagógico do curso superior de Licenciatura em Matemática.** Frederico Westphalen, 2018. Disponível em: <https://www.iffarroupilha.edu.br/component/k2/attachments/download/13568/185e23080cc17ce189e52fa9966ff5d2>. Acesso em: 18 dez. 2019.

GARNICA, Antônio Vicente Marafioti. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola. (orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica. p. 77-98, 2004.

GOLDENBERG, Mirian. **A Arte de Pesquisar.** 3. ed. Rio de Janeiro: Record, 1999.

JÚLIO DE CASTILHOS. **Projeto pedagógico do curso superior de Licenciatura em Matemática.** Júlio de Castilhos, 2014. Disponível em: <http://www.iffarroupilha.edu.br/ projeto-pedag%C3%B3gico-de-curso/campus-j%C3%BAlio-de-castilhos>. Acesso em: 29 jan. 2018.

KALEFF, Ana Maria Roland. Registros Semióticos e Obstáculos Cognitivos na Resolução de Problemas Introdutórios às Geometrias não Euclidianas no Âmbito da Formação de Professores de Matemática. **Bolema**, ano 20, n.28, p. 69-94, 2007. Disponível em: <http://www.redalyc.org/pdf/2912/ 291221871005.pdf> Acesso em: 22 ago. 2018.

SANTA ROSA. **Projeto pedagógico do curso superior de Licenciatura em Matemática.** Santa Rosa, 2014. Disponível em: <http://www. iffarroupilha.edu.br/projeto-pedag%C3%B3gico-de-curso/campus-santa-rosa>. Acesso em: 29 jan. 2018.

SANTOS, Talita Securon dos. **A Inclusão das Geometrias não Euclidianas no Currículo da Educação Básica.** 138 p. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a

Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR, 2009. Disponível em: <http://www.pcm.uem.br/ dissertacao-tese/70> Acesso em: 22 ago. 2018.

SÃO BORJA. **Projeto pedagógico do curso superior de Licenciatura em Matemática.** São Borja, 2014. Disponível em: <http://www.iffarroupilha. edu.br/projeto-pedag%C3%B3gico-de-curso/campus-s%C3%A3o-borja>. Acesso em: 29 jan. 2018.

YIN, Robert k. **Estudo de caso:** planejamento e métodos. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ciedu/ v22n2/1516-7313-ciedu-22-02-0465.pdf> Acesso em: 2 set. 2018.

ANEXOS

I – ORÇAMENTO

a) Materiais de Consumo*				
Descrição	Unidade	Quantidade	Valor Unit. (R$)	Valor Total (R$)
TOTAL (R$)				

* Indicar somente os materiais que precisam ser adquiridos

b) Materiais Permanentes*				
Descrição	Unidade	Quantidade	Valor Unit. (R$)	Valor Total (R$)
TOTAL (R$)				

* Indicar somente os materiais que precisam ser adquiridos

c) Diárias				
Descrição do deslocamento	Unidade	Quantidade	Valor Unit. (R$)	Valor Total (R$)
TOTAL (R$)				

d) Bolsas			
Participantes do projeto	Número de bolsas (4 a 10)	Valor da bolsa	Total
Bolsista 1			
Bolsista 2			
TOTAL (R$)			
Valor Total do Orçamento (a+b+c+d)*			

* Os Projetos de Ensino que necessitarem de recursos superiores aos definidos no Edital de Fomento de Projetos do IF Farroupilha deverão ter o orçamento autorizado previamente pela Direção de Ensino e Direção de Administração/Direção Geral, com detalhamento dos itens que serão custeados pelo orçamento do *Campus*.

Apêndice 4 – Oficina 1 – Fractal hexagonal de Dürer

Objetivos da oficina 1:

- Desenvolver a parte histórica do fractal de Dürer;
- Construir o fractal hexagonal de Dürer utilizando o *GeoGebra*;
- Explorar as relações geométricas envolvidos no fractal hexagonal de Dürer;
- Chegar à elaboração de uma definição de fractal.

Duração: 5 horas (dois encontros de 2,5 horas).

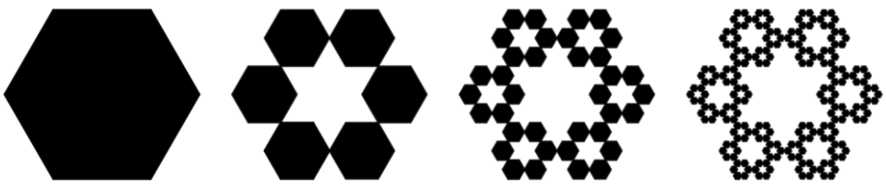
Atividade 1 – Histórico do fractal de Dürer

Iniciaremos a oficina, explanando para os alunos a parte história do fractal de Dürer, assim como sua forma de construção.

Histórico do fractal de Dürer

O alemão Albrecht Dürer (1471–1528), pintor, ilustrador, matemático e teórico de arte é o autor dos fractais que levam seu nome (Figura 1). Também é atribuída a Dürer a autoria da construção do desenho do pentágono regular utilizando apenas régua e compasso. (OLIVEIRA, 2016).

Figura 1 – Fractal hexagonal de Dürer



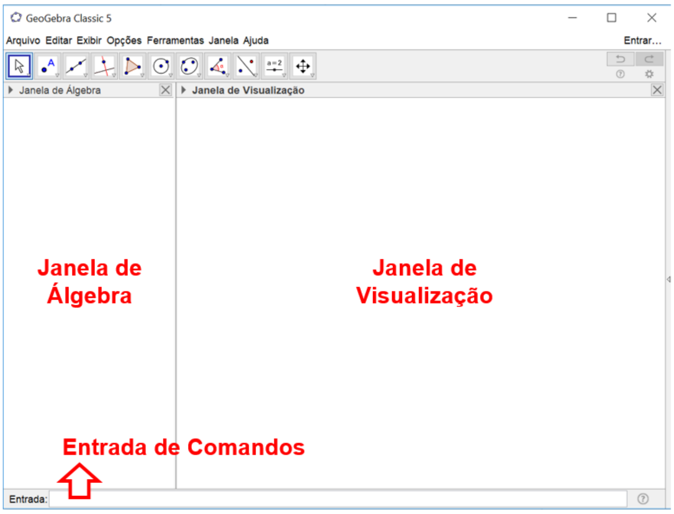
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra.*

Para essa oficina, iremos desenvolver o fractal hexagonal de Dürer. Mas afinal, o que é o fractal hexagonal de Dürer? Para Barbosa (2005), ele é um fractal construído a partir de um hexágono regular, em que, a cada iteração (ou repetição de procedimentos), ocorre a substituição de cada vértice do polígono original por um hexágono regular com a mesmo número de lados, de forma que um de seus ângulos coincida com o ângulo do hexágono regular inicial, com a condição de que os hexágonos regulares gerados tenham um vértice em comum.

Atividade 2 – Construção do fractal hexagonal de Dürer

A construção do fractal hexagonal de Dürer será realizada com o auxílio do *GeoGebra* e, para melhor compreensão, a dividiremos em 4 etapas, cujos passos/níveis da construção apresentaremos a seguir. Salientamos que os alunos já possuem um conhecimento sobre os comandos do *GeoGebra*. Essa construção foi planejada para ser executada pelo professor em um passo a passo junto aos alunos, com o intuito de revisar os comandos do *software*, além de explorar características do fractal hexagonal de Dürer. Durante a atividade, iremos utilizar três áreas de trabalhos do *GeoGebra*, a “Janela de Álgebra”, “Janela de Visualização” e a “Entrada de Comandos”, conforme apresentamos na Figura 2.

Figura 2 – Áreas de trabalho do *GeoGebra* utilizadas para a construção do fractal de Dürer



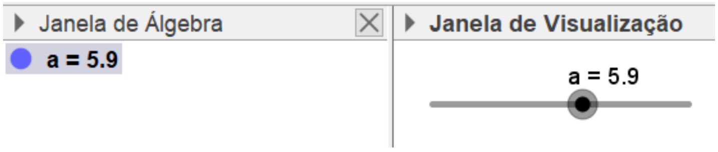
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Etapa 1: nível 0

Construção do hexágono regular - protocolo de construção:

a) Inserir um controle deslizante, denominado de L, com valor mínimo 0,1 e valor máximo 10, com incremento 0,1 (Figura 3). Optamos por utilizar o controle deslizante para evitar empregar um valor fixo para a medida do lado do hexágono que iremos construir posteriormente. Por esse motivo, escolhemos um incremento de 0,1, ou seja, a medida do lado do hexágono irá variar de 0,1 em 0,1 unidade de comprimento, mas poderia ser qualquer outro valor.

Figura 3 – Controle deslizante



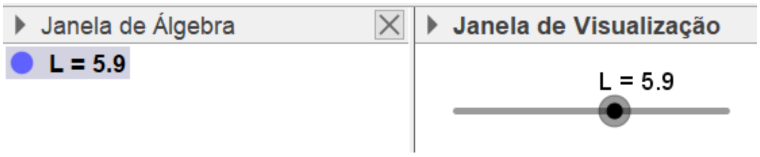
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: ControleDeslizante(<Mínimo>, <Máximo>, <Incremento>)

Sintaxe preenchida: ControleDeslizante(0.1, 10, 0.1)

Renomear o controle deslizante para L (de lado). Esse controle deslizante irá definir o tamanho do lado inicial do hexágono regular (Figura 4).

Figura 4 – Controle deslizante renomeado



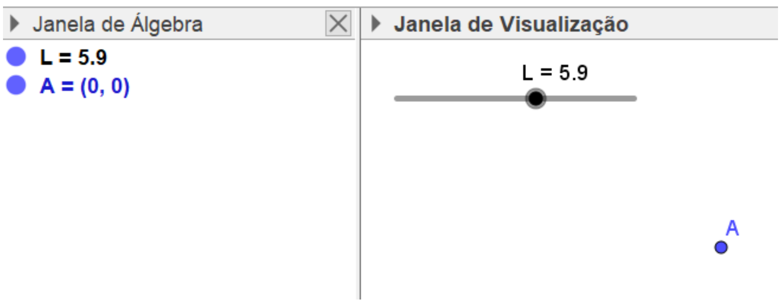
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: Renomear(<Objeto>, <Nome>)

Sintaxe preenchida: Renomear(a, L)

b) Criar um ponto A (Figura5) com coordenadas (0,0).

Figura 5 – Ponto A.



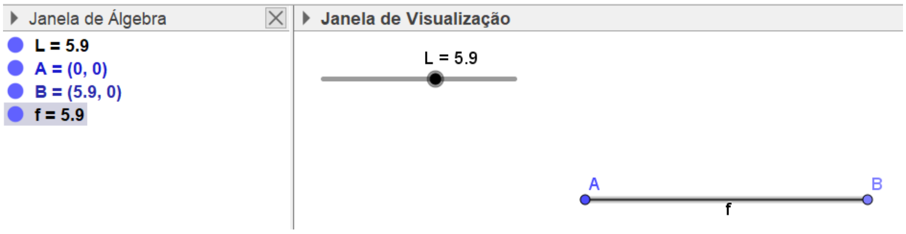
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: A=(x,y)

Sintaxe preenchida: A=(0, 0)

c) Criar um segmento f de comprimento L com origem no Ponto A. Observe a Figura 6.

Figura 6 – Segmento f de comprimento L



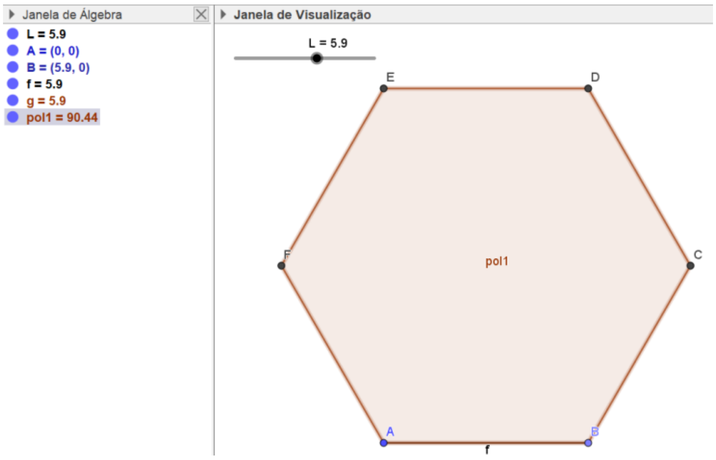
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: Segmento(<Ponto>, <Comprimento>)

Sintaxe preenchida: Segmento(A, L)

d) Criar um polígono (pol1) regular de 6 lados com ponto inicial A e final B, como ilustrado na Figura 7.

Figura 7 – Hexágono regular de lado l



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: Polígono(<Ponto>, <Ponto>, <Número de Vértices>)

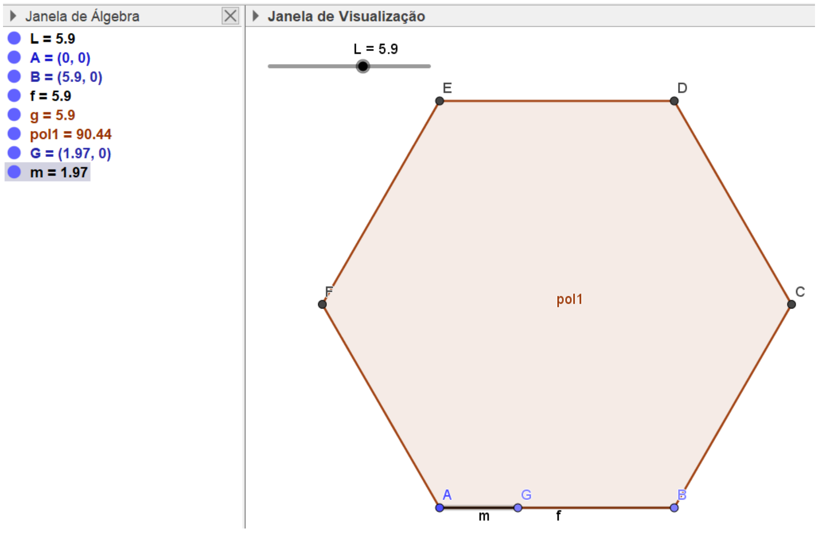
Sintaxe preenchida: Polígono (A, B, 6)

Etapa 2: nível 1.

Construção de 6 hexágonos no interior do hexágono inicial, seguindo as orientações a seguir:

e) Criar um segmento m de comprimento (L/3) com origem no ponto A. Observe a Figura 8.

Figura 8 – Segmento n de comprimento (L/3)



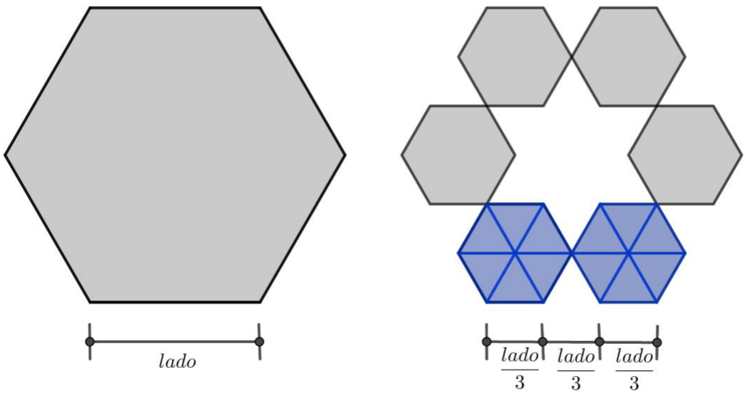
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: Segmento(<Ponto>, <Comprimento>)

Sintaxe preenchida: Segmento(A, L/3)

O comprimento é de L/3 do comprimento do lado inicial porque o triângulo formado pelo lado do hexágono inicial e dos hexágonos gerados é equilátero, conforme exemplificado na Figura 9.

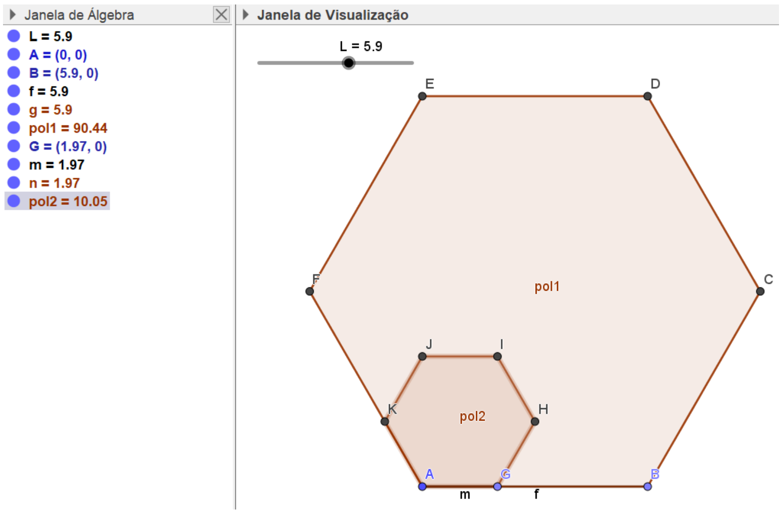
Figura 9– Detalhe do comprimento do lado do fractal hexagonal de Dürer



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

f) Criar um polígono (pol2) regular de 6 lados com ponto inicial A e final G, como na Figura 10.

Figura 10 – Hexágono regular de lado (L/3)



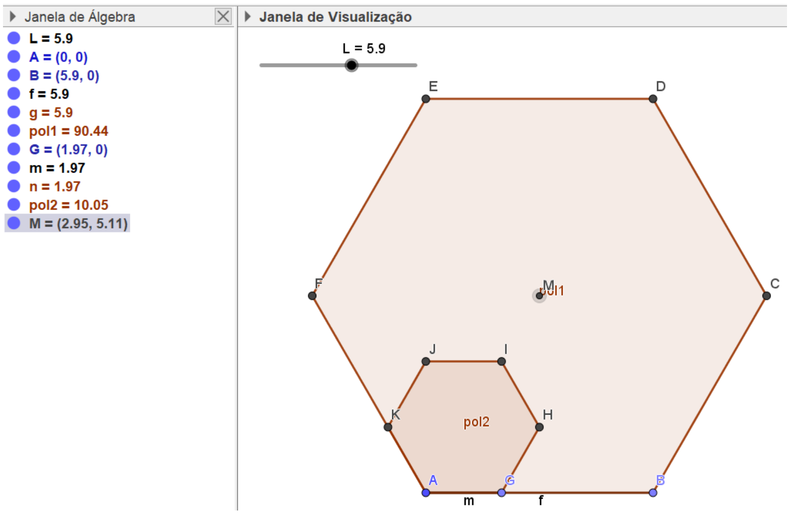
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: Polígono(<Ponto>, <Ponto>, <Número de Vértices>)

Sintaxe preenchida: Polígono(A, G, 6)

g) Criar um ponto M centro de gravidade do hexágono inicial, como mostrado na Figura 11.

Figura 11 – Ponto M (centro de gravidade do hexágono inicial)



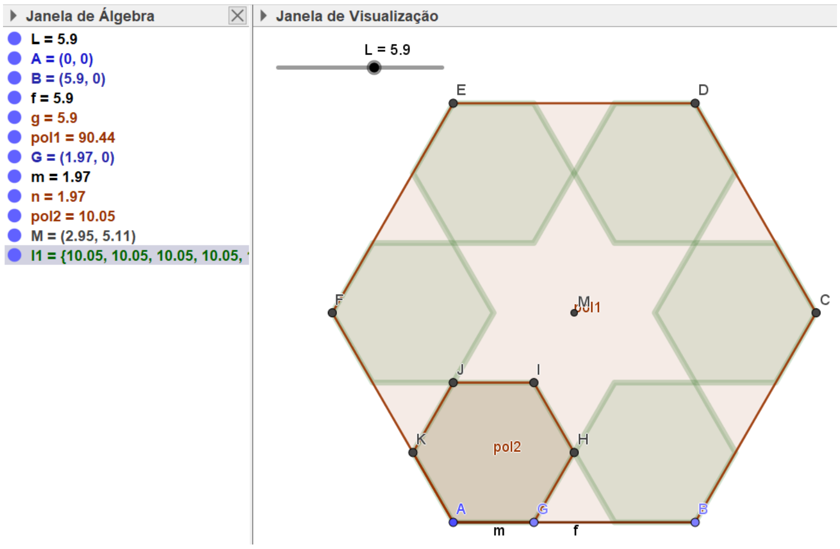
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: CentroDeGravidade(<Polígono>)

Sintaxe preenchida: CentroDeGravidade(pol1)

h) Criar mais 5 hexágonos regulares. Para tanto, utilizar o comando sequência e girar simultaneamente o hexágono regular (pol2) de lado (L/3), (Figura 12).

Figura 12 – Criação da lista 1 com os 6 novos hexágonos regulares



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: Sequência(Girar(<Objeto>, <Ângulo>, <Ponto>), <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>)

Sintaxe preenchida: Sequência(Girar(pol2, i*60°, M), i, 1, 6)

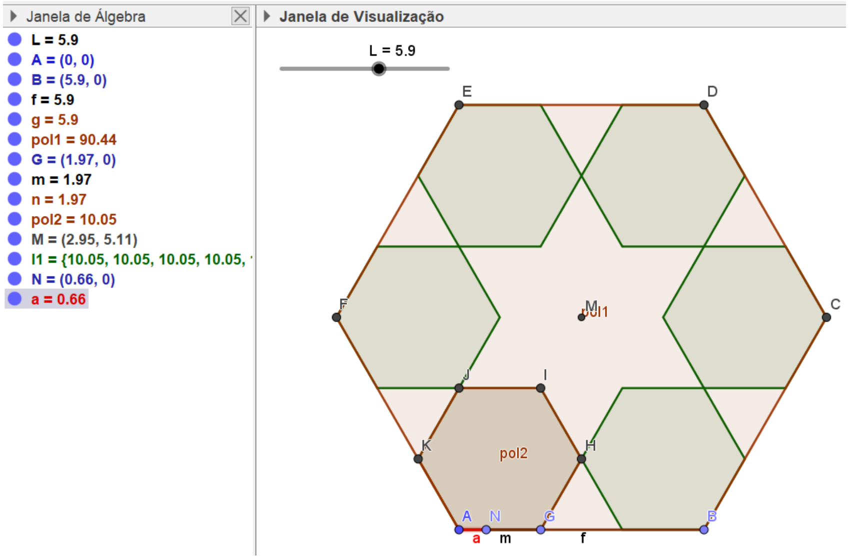
O comando sequência irá criar uma lista de objetos, nesse caso a lista 1, que é constituída de hexágonos regulares com lado L/3 do lado do hexágono inicial.

Etapa 3: nível 2

Construção de 6 novos hexágonos no interior dos 6 hexágonos que surgiram na Etapa 2, seguindo as orientações:

i) Criar um segmento a de comprimento (L/9) com origem no ponto A, ilustrado na Figura 13.

Figura 13 – Segmento b de comprimento (L/9)



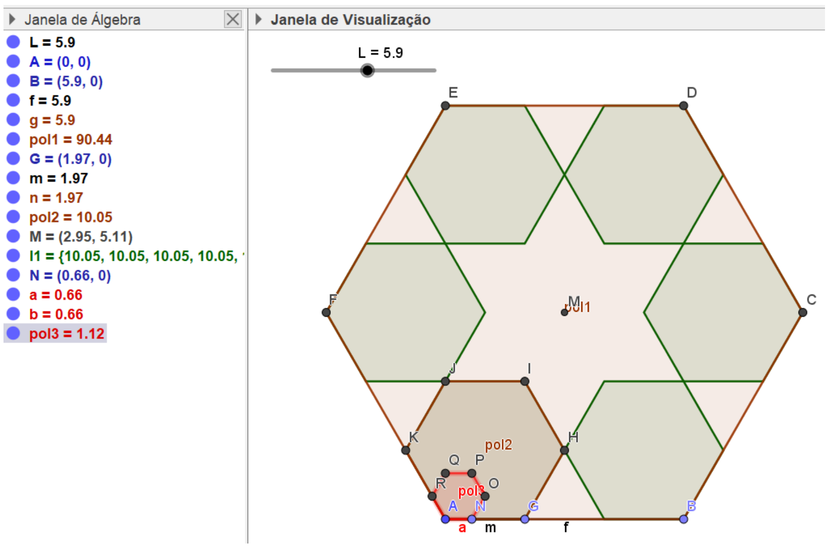
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: Segmento(<Ponto>, <Comprimento>)

Sintaxe preenchida: Segmento(A, L/9)

j) Criar um polígono (pol3) regular de 6 lados com ponto inicial A e final N, conforme Figura 14.

Figura 14 – Hexágono regular de lado (L/9)



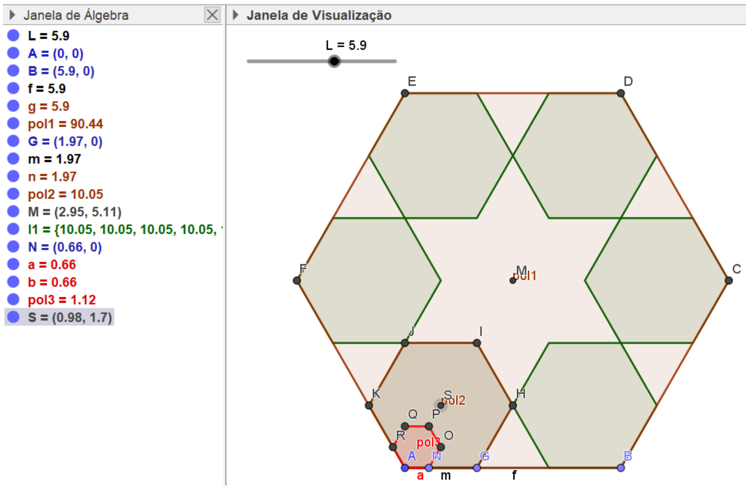
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: Polígono(<Ponto>, <Ponto>, <Número de Vértices>)

Sintaxe preenchida: Polígono (A, N, 6)

k) Criar um ponto S que é o centro de gravidade do hexágono (pol2) criado no nível 1. Veja a Figura 15.

Figura 15 – Ponto S (centro de gravidade do hexágono criado no nível 1)



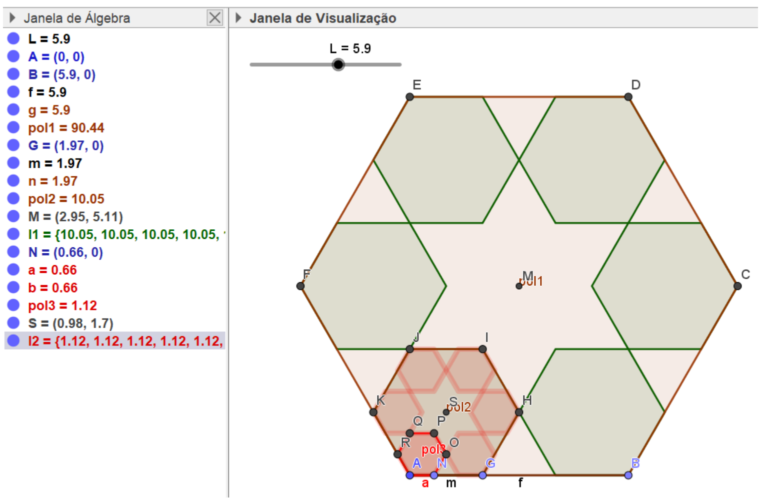
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: CentroDeGravidade(<Polígono>)

Sintaxe preenchida: CentroDeGravidade(pol2)

l) Criar mais 5 hexágonos regulares no hexágono gerado na etapa 2. Para tanto, utilizar o comando sequência e girar simultaneamente no hexágono regular (pol3) de lado (L/9), conforme a Figura 16.

Figura 16 – Criação da lista 2 com os 6 novos hexágonos regulares



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

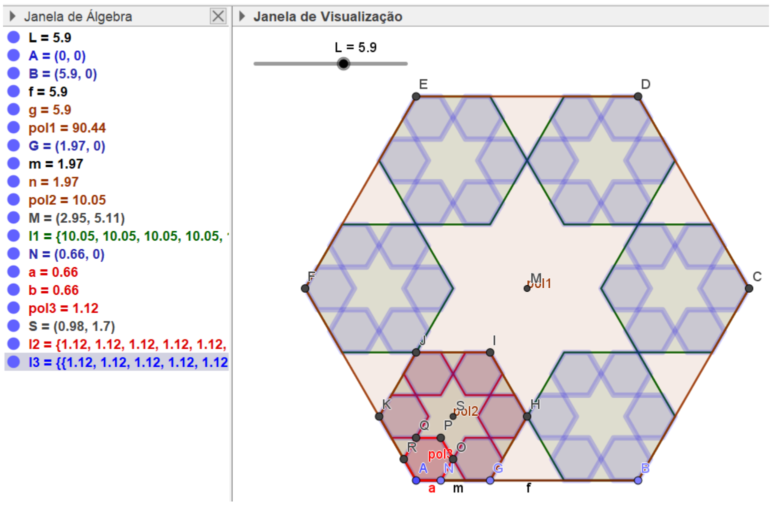
Sintaxe: Sequência(Girar(<Objeto>, <Ângulo>, <Ponto>), <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>)

Sintaxe preenchida: Sequência(Girar(pol3, i*60°, S), i, 1, 6)

O comando sequência irá criar uma lista de objetos, nesse caso, a lista 2, constituída de hexágonos regulares com lado medindo L/9 do lado do hexágono inicial.

m) Criar os demais hexágonos em cada um dos hexágonos gerados na Etapa 2. Para tanto, iremos utilizar o comando sequência e girar, simultaneamente, na lista 2, ilustrado na Figura 17.

Figura 17 – Criação da lista 3 com os 6 novos hexágonos regulares em cada um dos hexágonos gerados na Etapa 2



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: Sequência(Girar(<Objeto>, <Ângulo>, <Ponto>), <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>)

Sintaxe preenchida: Sequência(Girar(l2, i*60°, M), i, 1, 6)

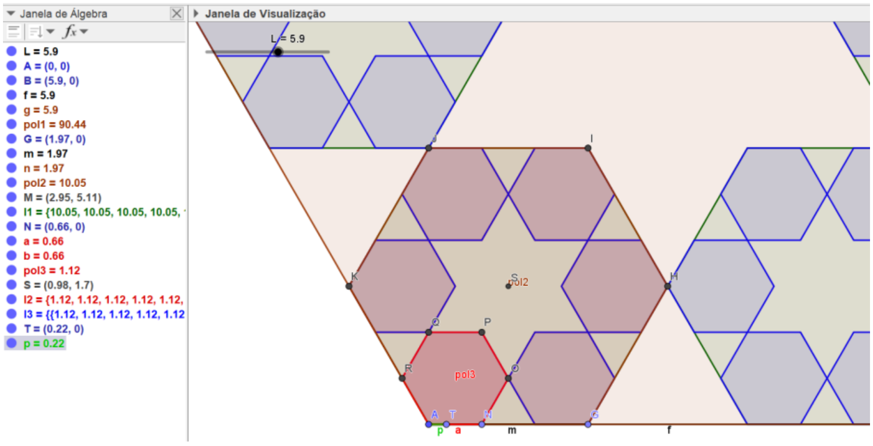
O comando sequência irá criar uma lista de objetos, nesse caso a lista 3, que são os hexágonos regulares com lado L/9 do lado do hexágono inicial.

Etapa 4: nível 3

Construção de 6 novos hexágonos no interior de cada um dos 36 hexágonos que surgiram na Etapa 3, como orientado a seguir:

n) Criar um segmento p de comprimento fixo (L/27) com origem no Ponto A. Veja a Figura 18.

Figura 18 – Segmento p de comprimento (L/27)



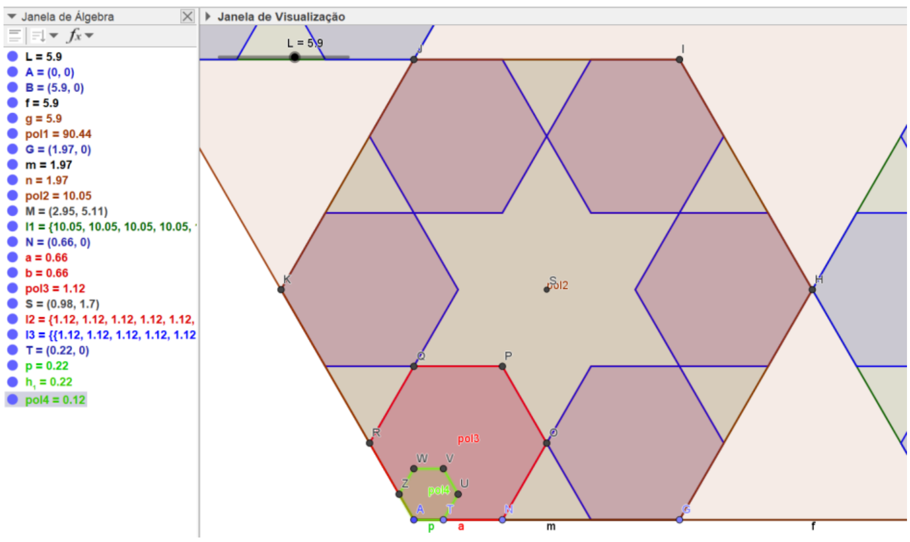
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: Segmento(<Ponto>, <Comprimento>)

Sintaxe preenchida: Segmento(A, L/27)

o) Criar um polígono (pol4) regular de 6 lados com ponto inicial A e final T, segundo a Figura 19.

Figura 19 – Hexágono regular de lado (L/27)



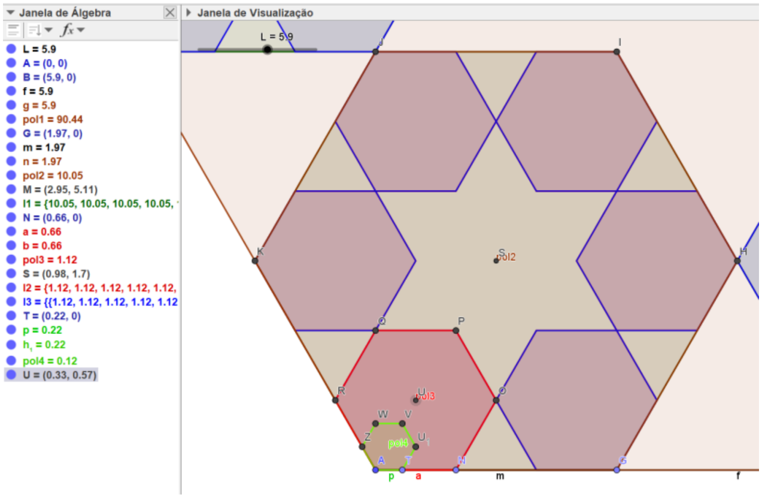
Fonte: construção do próprio autor no GeoGebra.

Sintaxe: Polígono(<Ponto>, <Ponto>, <Número de Vértices>)

Sintaxe preenchida: Polígono(A, T, 6)

p) Criar um ponto U, que é o centro de gravidade do hexágono (pol3) criado no nível 2. Veja na Figura 20.

Figura 20 – Ponto U (centro de gravidade do hexágono criado no nível 2)



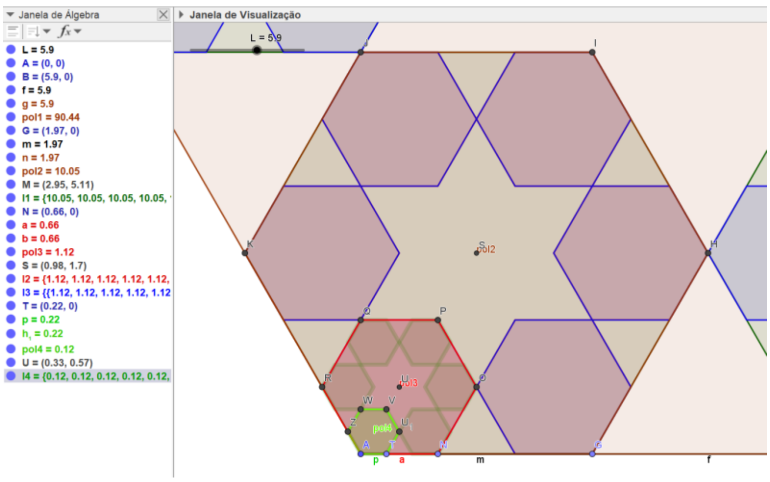
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: CentroDeGravidade(<Polígono>)

Sintaxe preenchida: CentroDeGravidade(pol3)

q) Criar mais 5 hexágonos regulares no hexágono gerado na etapa 3. Para tanto, iremos utilizar o comando sequência e girar simultaneamente no hexágono regular (pol4) de lado (L/27). Observe a Figura 21.

Figura 21 – Criação da lista 4 com os 6 novos hexágonos regulares



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

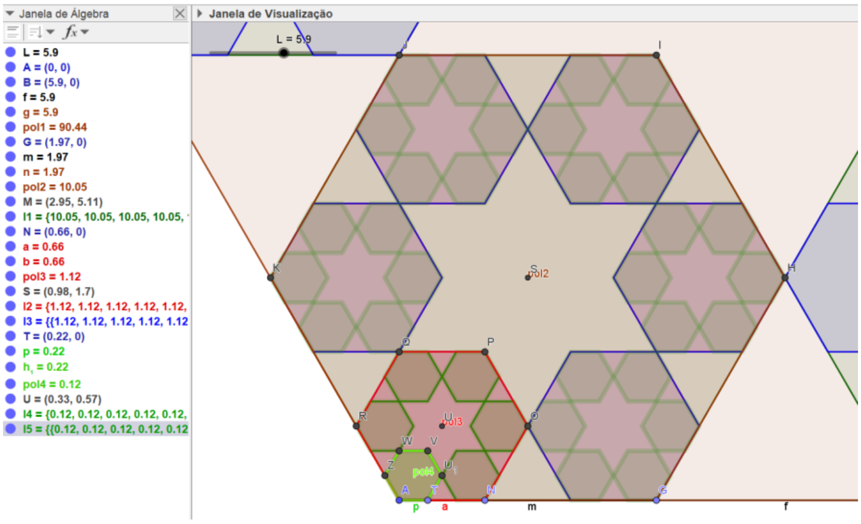
Sintaxe: Sequência(Girar(<Objeto>, <Ângulo>, <Ponto>), <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>)

Sintaxe preenchida: Sequência(Girar(pol4, i*60°, U), i, 1, 6)

O comando sequência irá criar uma lista de objetos, nesse caso a lista 4, que são os hexágonos regulares com lado L/27 do lado do hexágono inicial.

r) Criar os demais hexágonos em cada um dos hexágonos com lado (L/27). Para tanto, iremos utilizar o comando sequência e girar simultaneamente na lista 4, conforme indicado na Figura 22.

Figura 22 – Criação da lista 5 com os 6 novos hexágonos regulares em cada um dos hexágonos gerados na lista 4



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

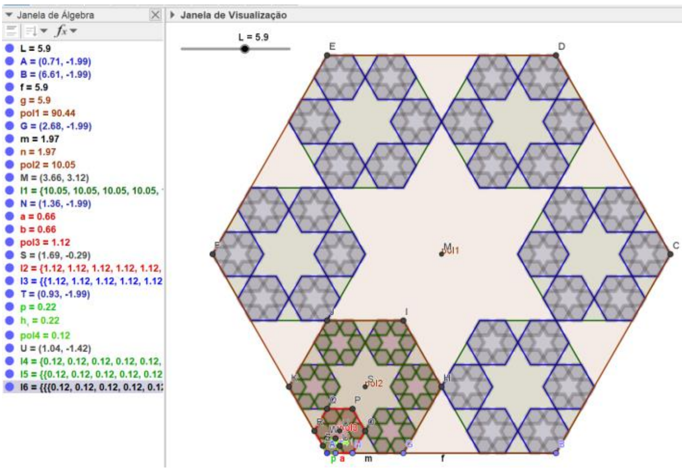
Sintaxe: Sequência(Girar(<Objeto>, <Ângulo>, <Ponto>), <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>)

Sintaxe preenchida: Sequência(Girar(l4, i*60°, S), i, 1, 6)

O comando sequência irá criar uma lista de objetos, nesse caso a lista 5, que são os hexágonos regulares com lado L/27 do lado do hexágono inicial.

s) Criar os demais hexágonos em cada um dos hexágonos com lado (L/27). Para tanto, iremos utilizar o comando sequência e girar simultaneamente na lista 5. Veja na Figura 23.

Figura 23 – Criação da lista 6 com os 6 novos hexágonos regulares em cada um dos hexágonos gerados na lista 4



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

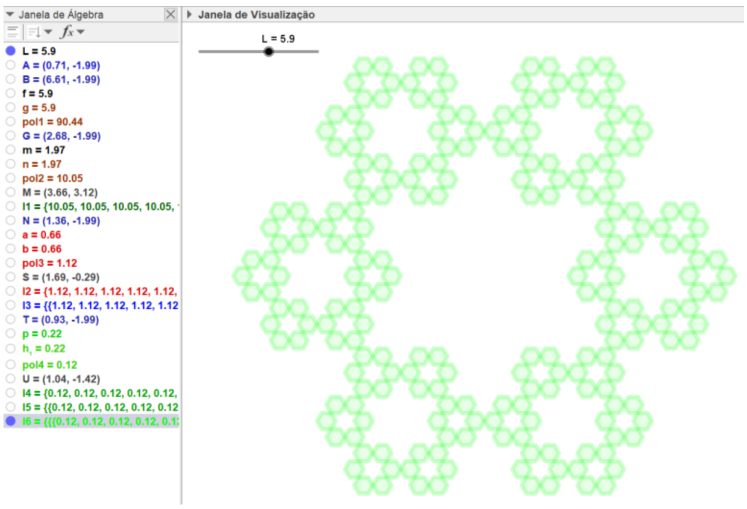
Sintaxe: Sequência(Girar(<Objeto>, <Ângulo>, <Ponto>), <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>)

Sintaxe preenchida: Sequência(Girar(l5, i*60°, M), i, 1, 6)

O comando sequência irá criar uma lista de objetos, nesse caso a lista 6, que são os hexágonos regulares com lado L/27 do lado do hexágono inicial.

t) Para finalizar, podemos deixar visível na janela de álgebra somente o controle deslizante e a lista 6, ocultando outros objetos que não são necessários, conforme a Figura 24.

Figura 24 – Fractal hexagonal de Dürer nível 3

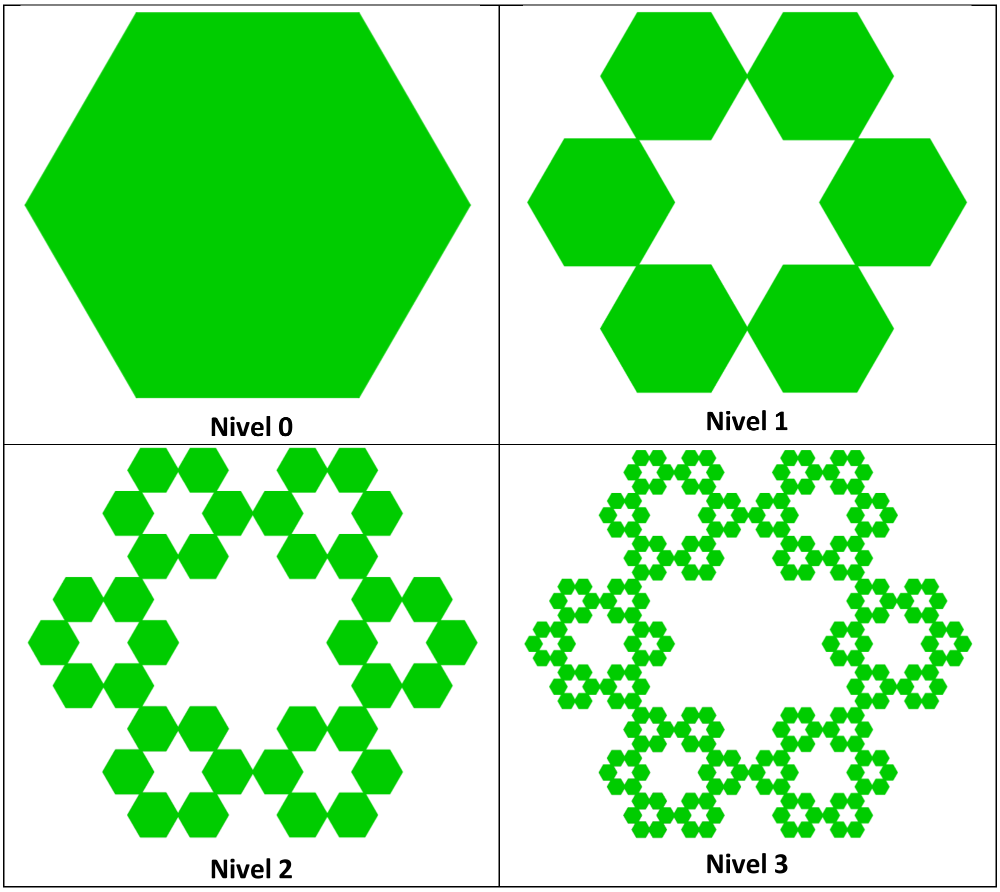


Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Atividade 3 – Explorando o fractal hexagonal de Dürer

A partir de algumas imagens, vamos observar e registrar o que está ocorrendo nas construções representadas na Figura 25. Para tanto, entregaremos um roteiro aos participantes, o qual deverá ser devolvido ao professor ao final da atividade para análise.

Figura 25 – Fractal hexagonal de Dürer nível 0, 1, 2 e 3



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

a) Qual é o valor da área da região hexagonal obtidas no nível 0 (A_0)? Explique como você obteve essa área.

Resposta:

A área do hexágono regular será igual a 6 vezes a área do triângulo equilátero que é dada por $\frac{(L)^2\sqrt{3}}{4}$, em que L é a medida do lado desse triângulo. Portanto, sabendo que o lado do hexágono regular é L, sua área é dada por: $A_0 = \frac{6(L)^2\sqrt{3}}{4}$.

b) Qual é o valor de cada uma das áreas das regiões hexagonais obtidas no nível 1 (A_1) ? E o valor total, obtido em função de A_0?

Resposta:

Sabendo que o lado do hexágono regular mede L/3, temos que a área de cada região hexagonal é dada por $\frac{6(L/3)^2\sqrt{3}}{4}$ e, como temos 6 regiões hexagonais, sua área fica multiplica por 6, logo: $A_1 = 6\left(\frac{6(L/3)^2\sqrt{3}}{4}\right) = 6\left(\frac{6(L^2/9)\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{6}{9}\left(\frac{6L^2\sqrt{3}}{4}\right)$.

Mas $A_0 = \frac{6(L)^2\sqrt{3}}{4}$, portanto, a relação entre a área da região hexagonal do nível 1 e a do nível 0 é dada por: $A_1 = \frac{2}{3}A_0$.

c) Qual é o valor de cada uma das áreas das regiões hexagonais obtidas no nível 2 (A_2)? E o valor total, obtido em função de A_0?

Resposta:

Sabendo que o lado do hexágono regular mede L/9, temos que a área de cada região hexagonal é dada por $\frac{6(L/9)^2\sqrt{3}}{4}$. Como temos 36 regiões hexagonais, sua área fica multiplicada por 36, logo: $A_2 = 36\left(\frac{6(L/9)^2\sqrt{3}}{4}\right) = 36\left(\frac{6(L^2/81)\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{36}{81}\left(\frac{6L^2\sqrt{3}}{4}\right)$.

Mas $A_0 = \frac{6(L)^2\sqrt{3}}{4}$, portanto, a relação entre a área da região hexagonal do nível 2 e a do nível 0 é dada por: $A_2 = \frac{36}{81}A_0 = \frac{4}{9}A_0$.

d) Qual é o valor de cada uma das áreas das regiões hexagonais obtidas no nível 3 (A_3) ? E o valor total, obtido em função de A_0?

Resposta:

Sabendo que o lado do hexágono regular mede L/27, temos que cada região hexagonal é dada por $\frac{6(L/27)^2\sqrt{3}}{4}$. Como temos 216 regiões hexagonais, sua área fica multiplica por 216, logo: $A_3 = 216\left(\frac{6(L/27)^2\sqrt{3}}{4}\right) = 216\left(\frac{6(L^2/729)\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{216}{729}\left(\frac{6L^2\sqrt{3}}{4}\right)$.

Mas $A_0 = \frac{6(L)^2\sqrt{3}}{4}$, portanto, a relação entre a área da região hexagonal do nível 3 e a do nível 0 é dada por: $A_3 = \frac{216}{729}A_0 = \frac{8}{27}A_0$.

e) A partir das observações, cálculos e explicações feitos nos itens anteriores, preencha o Quadro 1, determinando medida do lado, número de hexágonos e a área (em relação a A_0) para um fractal hexagonal de Dürer de nível n. Salientamos que n é um número natural genérico.

Quadro 1 - Medida do lado, número de hexágonos e a área (em relação a A_0) para um fractal hexagonal de Dürer de nível n.

	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	...	Nível n
Lado	l	$\frac{l}{3}$	$\frac{l}{9}$	$\frac{l}{27}$	...	$\frac{l}{3^n}$
Número de hexágonos	1	6	36	216	...	6^n
Área total em relação a A_0	A_0	$\frac{2}{3}A_0$	$\frac{4}{9}A_0$	$\frac{8}{27}A_0$	...	$\frac{2^n}{3^n}A_0$ ou $\left(\frac{2}{3}\right)^n A_0$

Fonte: autoria própria.

f) Se pensarmos em um valor de n muito elevado, ou seja, n tender a infinito, o que ocorrerá com a área A_n?

Resposta esperada:

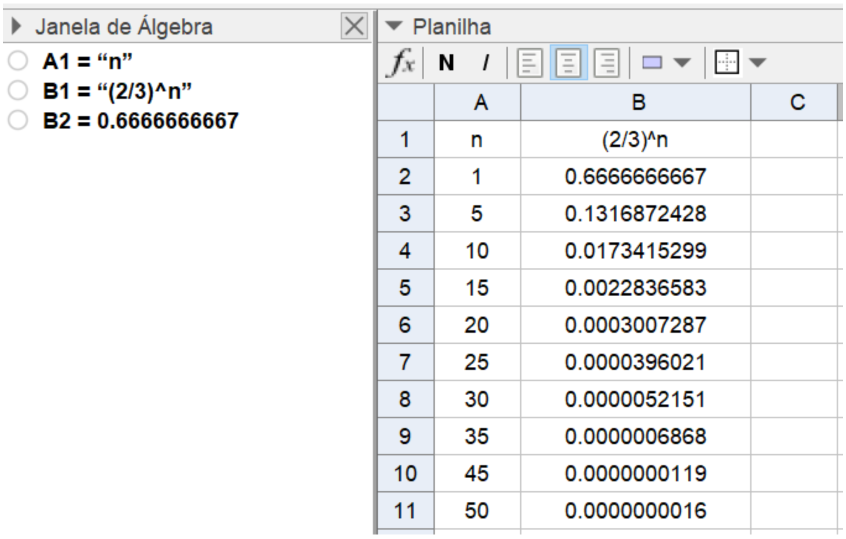
A área $A_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n A_0$, observamos que a área é dada por uma função exponencial decrescente, a qual diminui em um fator de 2/3.

Portanto:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n A_0\right) = A_0\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = A_0(0) = 0$$

Outra forma mais intuitiva é atribuir valores para n e ver o que ocorre com a área, utilizando a Planilha disponível no *GeoGebra*, conforme apresentado na Figura 26.

Figura 26 – Calculo da área A_n para alguns valores de n



	A	B	C
1	n	(2/3)^n	
2	1	0.6666666667	
3	5	0.1316872428	
4	10	0.0173415299	
5	15	0.0022836583	
6	20	0.0003007287	
7	25	0.0000396021	
8	30	0.0000052151	
9	35	0.0000006868	
10	45	0.0000000119	
11	50	0.000000016	

Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

A partir da análise da Figura 26, observamos que, quanto maior for o valor de n, menor será o valor da área; portanto, para um n tendendo a infinito, a área A_n tende a zero.

Atividade 4 – Conhecendo outros fractais

Da mesma forma que na atividade 2, os alunos receberão um roteiro com a atividade 4, a qual será devolvida para o professor ao final da oficina.

Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor

O matemático russo Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) é conhecido por ter contribuído imensamente para a teoria dos conjuntos e utilizado de forma pioneira o símbolo $\mathbb{R}$ para designar o conjunto dos números reais. (OLIVEIRA, 2016).

Segundo Janos (2008), em 1883, Cantor publicou um trabalho no qual é construído um conjunto, que é atualmente denominado de Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor. Formado por uma quantidade infinita de segmentos de dimensões muito pequenas (tanto mais próximas de zero, quanto mais segmentos tomarmos), o Conjunto de Cantor é constituído por partes autossemelhantes e possui cardinalidade igual à dos números complexos ou dos números reais, ou seja, é não-enumerável. Veja Figura 27.

Figura 27 – Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor

Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Montenegro (1991), Barbosa (2005) e Janos (2008) apresentam a regra para a construção do Conjunto de Cantor. Ele é um subconjunto infinito de pontos no intervalo [0, 1]. Para o construirmos, consideramos o intervalo fechado [0, 1] e o dividimos em 3 partes congruentes, retirando a parte central (ou terço médio). Dessa maneira, ficamos com 2 intervalos fechados disjuntos, de comprimento 1/3 do inicial. Repetindo esse processo aos intervalos formados, obtemos agora 2^2 intervalos fechados de comprimento 1/9 ou $\frac{1}{3^2}$. Para uma próxima iteração, obtemos 2^3 intervalos fechados de comprimento 1/27 ou $\frac{1}{3^3}$.

a) A partir da observação da Figura 27, preencha o Quadro 2 e responda: se o número n de iterações (n é um número natural qualquer) for muito grande, o que acontece com a medida do comprimento do segmento resultante? Argumente sua resposta.

Resposta esperada:

Quadro 2 – Medida do comprimento de cada segmento e número de intervalos fechados na Poeira de Cantor por níveis.

	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	...	Nível n
Comprimento de cada segmento	l	$\frac{l}{3}$	$\frac{l}{9}$	$\frac{l}{27}$	...	$\frac{l}{3^n}$
Número de intervalos fechados	1	2	4	8	...	2^n

Fonte: autoria própria.

Como o valor de *n* aumenta infinitamente para cada iteração, o comprimento de cada segmento irá tender a zero.

Curva de Koch

O matemático sueco Niels Fabian Helge von Koch (1870–1924) é reconhecido por ter descrito um dos primeiros fractais de curva em 1904, a Curva de Koch, a qual, mais tarde, originou a Ilha de Koch ou Floco de Neve de Koch, sendo que ambas as construções são feitas pelo mesmo processo.

Segundo Spinadel, Perera e Perera (1993), a Curva de Koch (Figura 28) foi considerada uma curva "patológica", pois ela é exemplo de curva contínua que não tem tangente em nenhum dos seus pontos, além de ter a propriedade de que, dados dois pontos quaisquer sobre a curva, o comprimento do arco entre os dois é infinito.

Figura 28 – Curva de Koch

Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Segundo Barbosa (2005) e Iwai (2015), podemos construir a Curva de Koch a partir de um segmento de reta, dividindo-o em três partes congruentes, em que a parte central será a base para a construção de um triângulo equilátero, sendo suprimida após sua construção. Assim, resultarão quatro segmentos de reta com tamanho de 1/3 do segmento original. Aplicando, novamente, esse processo de construção, obtemos 16 segmentos com tamanho de 1/9 do segmento original.

b) A partir da observação da Figura 28, preencha o Quadro 3 e responda: se o número n de iterações (n é um número natural) for muito grande, qual vai ser o comprimento da curva naquele nível? Justifique sua resposta.

Resposta esperada:

Quadro 3 – Comprimento de cada segmento e número de segmentos de retas na Curva de Koch.

	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	...	Nível n
Comprimento de cada segmento	L	$\frac{l}{3}$	$\frac{l}{9}$	$\frac{l}{27}$	...	$\frac{l}{3^n}$
Número de segmentos de retas	1	4	16	64	...	4^n

Fonte: autoria própria.

Como o valor de *n* aumenta infinitamente para cada iteração, o comprimento da curva irá tender a infinito.

Fractais de Sierpinsky

Barbosa (2005) relata que o Triângulo e o Tapete de Sierpinsky, apresentados em 1916, são obras do matemático polonês Waclaw Sierpinsky (1882–1969). Iwai (2015) destaca as contribuições excepcionais de Sierpinsky para a teoria dos conjuntos (pesquisa sobre o axioma da escolha e da hipótese do contínuo), teoria dos números, teoria de funções e topologia.

Para construir o Triângulo de Sierpinsky, Janos (2008) inicia o processo com um triângulo equilátero. Inicialmente, encontramos o ponto médio de cada lado. Posteriormente, unimos esses pontos por três segmentos de reta, formando quatro triângulos menores e congruentes, sendo que o triângulo central deve ser retirado, sobrando três triângulos para aplicarmos novamente o procedimento. A cada nova iteração, a quantidade de triângulos congruentes fica multiplicada por três e a medida do lado é igual à metade da medida do lado do triângulo anterior, conforme representado na Figura 29.

Figura 29 – Triângulo de Sierpinsky

Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

c) A partir da observação da Figura 29, preencha o Quadro 4 e responda: se o número n de iterações (n é um número natural) for muito grande, qual vai ser o valor da área da região triangular nesse nível n? Justifique sua resposta.

Resposta esperada:

Quadro 4 – Comprimento do lado do triângulo, número de triângulos gerados e área em relação à área inicial (A_0) para o fractal de Sierpinsky de n iterações.

	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	...	Nivel n
Comprimento do lado do triângulo	L	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{4}$	$\frac{l}{8}$	...	$\frac{l}{2^n}$
Número de triângulos gerados	1	3	9	27	...	3^n
Área em relação a A_0	A_0	$\frac{3}{4}A_0$	$\frac{9}{16}A_0$	$\frac{27}{64}A_0$	...	$\frac{3^n}{4^n}A_0$

Fonte: autoria própria.

Como o valor de *n* aumenta infinitamente para cada iteração, o valor da área vai tender a zero.

d) Considerando os três exemplos de fractal apresentados: Conjunto de Cantor, Curva de Koch e Triângulo de Sierpinsky, além da construção do fractal hexagonal de Dürer, como você poderia definir um fractal, ou seja, o que você entende que seja um fractal?

Resposta esperado:

Os fractais são figuras geométricas as quais têm suas estruturas se repetindo em escalas cada vez menores.

A partir das respostas apresentadas, serão realizadas algumas entrevistas individuais com os alunos, para verificar sua compreensão sobre essa definição.

Referências

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

IWAI, Marceli Megumi Hamazi. **Geometria Fractal**. 2015. 86 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=85308>. Acesso em: 23 set. 2017.

JANOS, Michel. **Geometria Fractal.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

MONTENEGRO, Gildo Aparecido. **Geometria Descritiva.** Vol. 1. Edgard Blücher: São Paulo, 1991.

OLIVEIRA, Genilton José Cavalcante de. **Ensaios fractais à luz do Ensino Médio**. 2016. 144 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2016. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=628>. Acesso em: 23 set. 2017.

SPINADEL, Vera Winitzky de; PERERA, Jorge Gustavo; PERERA, Jorge Hernàn. **Geometria Fractal.** 3. ed. Buenos Aires: Nueva, 1993.

Apêndice 5 – Oficina 2 – Dimensão fractal

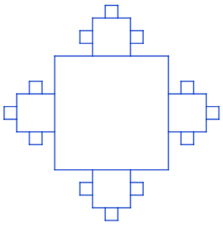
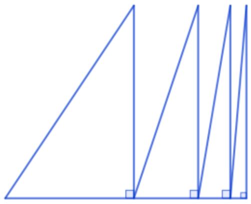
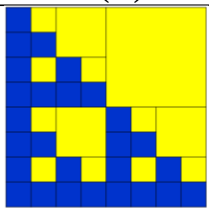
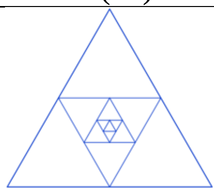
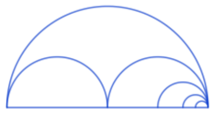
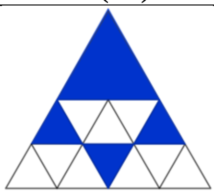
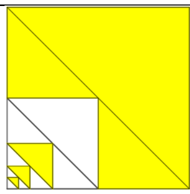
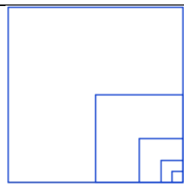
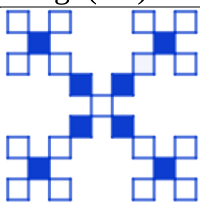
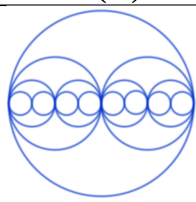
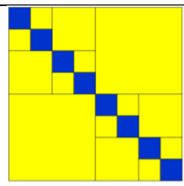
Objetivos da oficina 2:
- Reconhecer fractais a partir de sua estrutura;
- Conhecer a cronologia de fractais e alguns fractais clássicos;
- Apresentar a fórmula da dimensão fractal;
- Calcular a dimensão de alguns fractais.

Duração: 5 horas (dois encontros de 2,5 horas).

Atividade 1 – Reconhecendo fractais e sua definição

A partir da análise do Quadro 1, marque com x quais imagens representam fractais e justifique sua escolha.

Quadro 1 – Figuras geométricas

 a. ( )	 b. (x)	 c. ( )
 d. (x)	 e. (x)	 f. ( )
 g. (x)	 h. ( )	 i. (x)
 j. ( )	 k. (x)	 l. (x)

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Imagens que são fractais: b, d, e, g, i, k, l.

Justificativa: As imagens selecionadas são fractais, pois as suas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos.

Para retomar a oficina 1, a partir da devolutiva dos alunos, iremos apresentar a uma definição para fractal, trazendo alguns autores, como por exemplo:

- Para Stewart (1996, p. 12), "Os fractais são formas geométricas que repetem sua estrutura em escalas cada vez menores".

- Fractais são entes que constituem uma imagem de si próprios em cada uma de suas partes, sendo elas semelhantes e definindo assim a propriedade de autossimilaridade. (BARBOSA, 2005).

- Feder (1988, p. 11, tradução nossa): "Um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos".

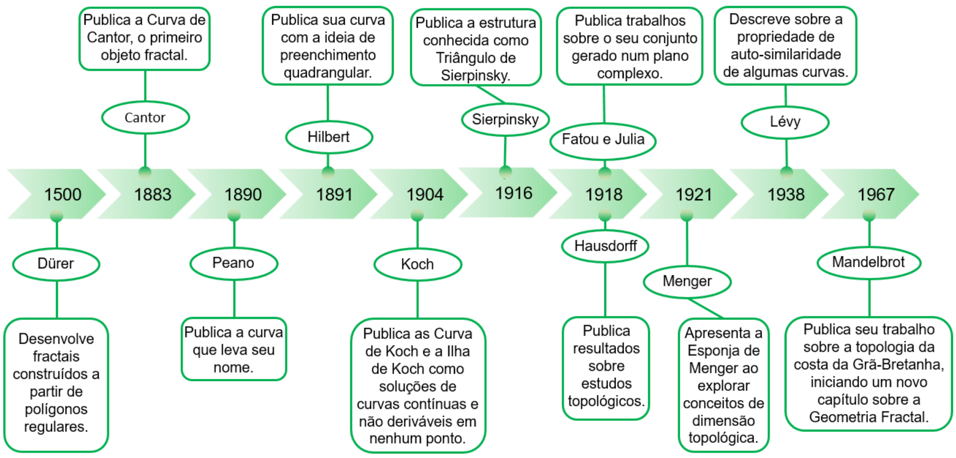
Atividade 2 – Fractais clássicos e seus percussores e dimensão fractal

A atividade 2 será expositiva e dialogada com os alunos, sendo apresentada, em um primeiro momento, a cronologia dos fractais clássicos e seus percursores. Em continuidade, no segundo momento, desenvolveremos, junto com os alunos, a determinação da fórmula da dimensão fractal.

Fractais clássicos e seus percursores

Apesar de o termo Geometria Fractal ter sido criado por Mandelbrot na década de 70, diversos estudos antecederam essa época e vários objetos matemáticos, atualmente, são considerados fractais. Para um melhor entendimento, traçamos uma breve linha cronológica, apresentada na Figura 1, com base nos trabalhos de Rabay (2013) e Neto (2015), relatando autoria e obra de acordo com o respectivo ano de publicação.

Figura 1 – Linha cronológica da Geometria Fractal



Fonte: elaborada pelo próprio autor.

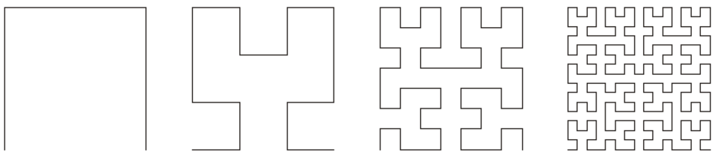
Anteriormente, vimos os fractais de Dürer, Conjunto de Cantor, Curva de Koch e Triângulo de Sierpinsky. Agora veremos, a seguir, os aspectos estruturais de alguns objetos fractais pioneiros, que foram desenvolvidos no decorrer da história, os quais constituem o início da Geometria Fractal, e seus percussores.

Curva de Hilbert

David Hilbert (1862–1943) foi um matemático alemão cuja maior contribuição à Matemática, segundo Barbosa (2005), foi a organização da Geometria Euclidiana na forma axiomática.

A Curva de Hilbert, descoberta em 1891 (Figura 2) percorre todos os pontos de um quadrado, logo, ela pertence a uma família das curvas de Peano. Entretanto, essa curva possui pequenas diferenças, comparada à de Peano. A primeira é que, a cada iteração do seu processo recursivo, a curva preenche quadrados menores, mas ela nunca se intercepta. Outra característica dessa curva é que ela passa por todos os pontos de uma superfície e, por meio do seu processo de recursividade, seu comprimento é infinito. (PAIXÃO, 2014).

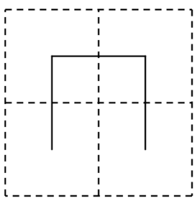
Figura 2 – Curva de Hilbert



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Para realizar sua construção, seguimos a relatada por Negri (2014). Primeiramente (Etapa 1), tomemos um quadrado de lado *l*, formamos 4 quadrados ligando os pontos médios de seus lados opostos e, após unir os pontos centrais desses quadrados, forma-se a curva com 3 segmentos consecutivos, como apresentada na Figura 3.

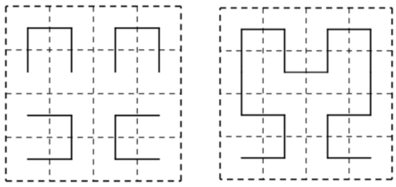
Figura 3 – Etapa 1 da construção Curva de Hilbert



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Na segunda parte da construção (Etapa 2), representada na Figura 4, cada um dos 4 quadrados pequenos é substituído por outros 4 quadrados. Logo após, são ligados os pontos centrais dos 16 novos quadrados como foi feito na etapa anterior.

Figura 4 – Etapa 2 da construção Curva de Hilbert



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra.*

Veja que rotações convenientes são realizadas de forma que todos os pontos centrais ficam interligados, sem que exista intersecção da curva. Esse processo é repetido indefinidamente, de forma que a origem da curva sempre ocupe o canto inferior esquerdo, e sua extremidade fique no canto inferior direito, como pode ser visto na Figura 8. Segundo Mendonça (2014), se continuarmos esse processo de iteração n vezes, teremos 4^n quadrados e o comprimento da curva é dado por $(4^n - 1)\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Tapete de Sierpinsky

O Tapete de Sierpinsky é uma variação da Triângulo de Sierpinsky e, sendo assim, para a construção do Tapete de Sierpinsky (Figura 5), utilizamos a mesma técnica de construção do Triângulo de Sierpinsky, porém, a figura geométrica utilizada agora é um quadrado.

Figura 5 – Tapete de Sierpinsky

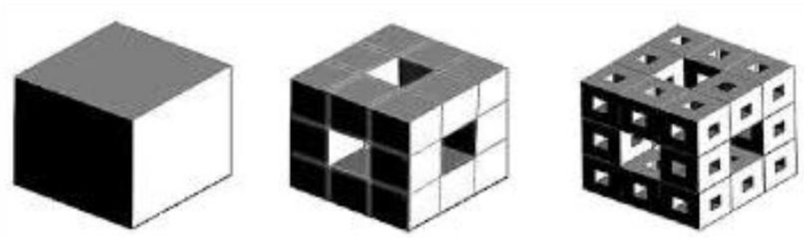
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra.*

Barbosa (2005) parte de um quadrado, dividindo-o em nove pequenos quadrados congruentes e eliminando o central. Após essa etapa, aplicamos esse mesmo procedimento em cada um dos oito quadrados restantes e, assim, sucessivamente e iterativamente. A cada nova iteração, a quantidade de quadrados fica multiplicada por oito e a medida do lado é 1/3 da medida do lado do quadrado anterior. Repetindo esse processo *n* vezes, teremos formado 8^n quadrados de $\frac{1}{3^n}$ da medida da aresta do quadrado inicial.

Esponja de Menger

Segundo Negri (2014), a Esponja de Menger (Figura 6) foi criada pelo matemático austríaco Karl Menger (1902–1985), em 1921. Ela é uma generalização tridimensional do Tapete de Sierpinsky, tendo sua construção baseada na mesma forma, porém o processo iterativo é feito a partir de um cubo.

Figura 6 – Esponja de Menger



Fonte: adaptado Negri (2014, p. 42).

Montenegro (1991) apresenta o processo de construção da Esponja de Menger em duas etapas, considerando um cubo de aresta *l*. Na primeira, dividimos o cubo em 27 cubos menores e congruentes, cada um com uma aresta igual a 1/3 da aresta inicial (processo similar ao do Tapete de Sierpinsky) em cada face do cubo. Removemos o cubo central e os 6 cubos que têm uma face localizada no meio de cada face do maior. A segunda etapa consiste em repetir o processo da etapa 1 nos 20 cubos restantes e, assim, sucessivamente.

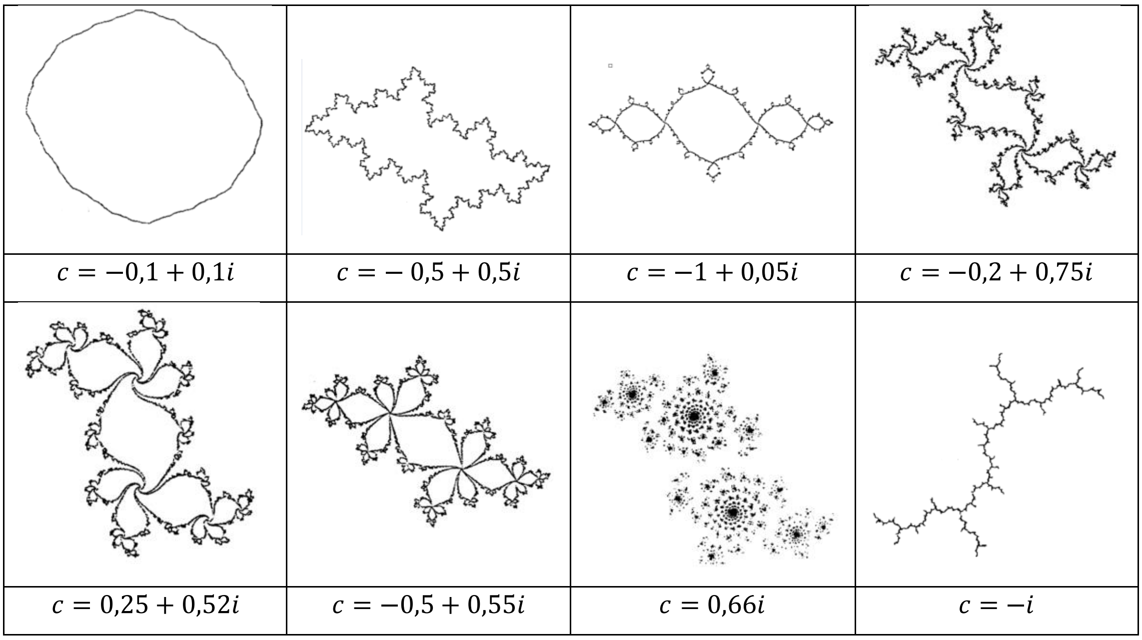
Observamos que, a cada nova iteração, a quantidade de cubos fica multiplicada por 20, e a medida da aresta é 1/3 da medida da aresta do cubo anterior. Portanto, se repetirmos *n* vezes o processo, teremos formado 20^n cubos com arestas medindo $\frac{1}{3^n}$ da aresta do cubo inicial.

Conjunto de Fatou e Julia

No período da Primeira Guerra Mundial, em 1918, os matemáticos franceses Pierre Fatou (1878–1929) e Gaston Julia (1893–1978) publicaram trabalhos sobre o estudo de propriedades iterativas envolvendo números complexos estudadas sem o auxílio computacional. É interessante destacarmos que Fatou e Julia, embora fossem da mesma época, não desenvolveram seus trabalhos em conjunto. Lamentavelmente, esses estudos permaneceram esquecidos até serem recuperados por Mandelbrot, ao usá-los como base para o desenvolvimento do que hoje denominamos Conjunto de Mandelbrot, cuja representação gráfica se tornou símbolo da Geometria dos Fractais. (BARBOSA, 2005).

Segundo Peitgen, Jürgens e Saupe (2004), Fatou e Julia exploraram o que ocorre com a imagem no plano complexo quando se emprega, iterativamente, a função $f(z) = z^2 + c$ para um z complexo inicial e c, um complexo constante. Cabe salientar, para melhor compreensão, que a construção parte com um $z_0 = a_0 + ib_0$ e cada iteração parte de um z_n conhecido para obter $z_{n+1} = (z_n)^2 + c$. Relatam os autores que a sequência de pontos deve ter uma das duas características: a primeira, as órbitas convergem para a origem; e a segunda, essas órbitas tendem ao infinito. A Figura 7 apresenta algumas amostras do Conjunto de Julia.

Figura 7 – Algumas amostras do Conjunto de Julia para a função quadrática $\boldsymbol{f(z) = z^2 + c}$



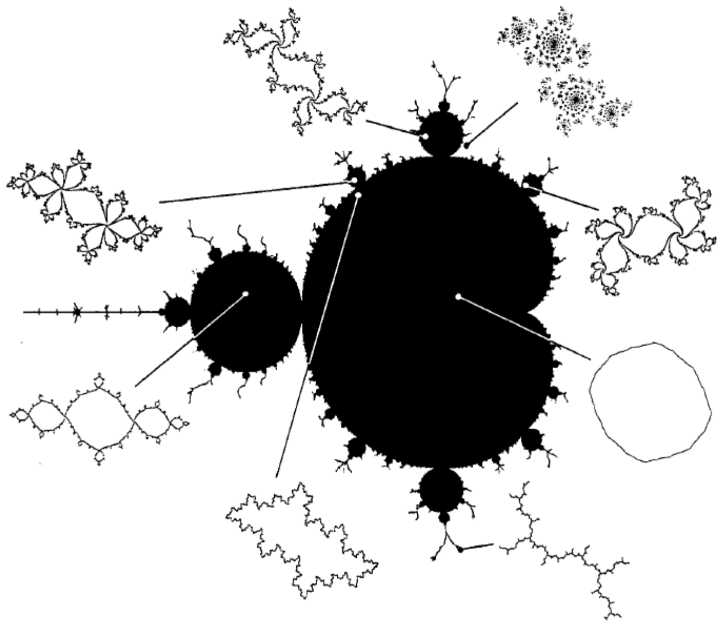
Fonte: adaptado de Falconer (2003, p. 214).

Conjunto de Mandelbrot

Os trabalhos de Fatou e Julia, como relata Barbosa (2005, p. 45), “forneceram as bases matemáticas para Mandelbrot, que soube aproveitá-los e desenvolvê-los com recursos computacionais para seu conjunto conhecido hoje como Conjunto de Mandelbrot”. Negri (2014) e Moura (2016) relatam que, no final da década de 70 (1979), Mandelbrot tentou elaborar uma forma de generalizar os Conjuntos de Julia, no caso de funções quadráticas, com a variação do parâmetro c. Utilizaram isso para desenhar as regiões estudadas por Fatou e Julia de maneira a verificar o comportamento caótico que produz a estrutura fractal. Quando nos referimos ao termo "comportamento caótico", o estamos atribuindo ao fenômeno de imprevisibilidade.

Dalpiaz (2016), em sua pesquisa, resume o Conjunto de Mandelbrot como uma expressão matemática essencial para a construção de imagens dadas pela fórmula iterativa no plano do número complexos ($z = x + iy$) expressa por $z_{n+1} = (z_n)^2 + c$. Nela, $c = a + ib$ é uma constante complexa e devemos partir de um certo valor para z_0. O autor conclui que o Conjunto de Mandelbrot é o conjunto dos valores de c tais que, para $z_0 = 0$, a sequência de valores definida recursivamente permanece limitada. A Figura 8 apresenta o Conjunto de Mandelbrot, com a variação de c e seus correspondentes Conjuntos de Julia, apresentado anteriormente na Figura 8.

Figura 8 – Conjunto de Mandelbrot apresentando vários valores para c e seus correspondentes Conjuntos de Julia



Fonte: Falconer (2003, p. 213).

Dimensão fractal ou dimensão Housdorff-Besicovitch

Uma característica dos fractais é sua dimensão. Ela difere da Topológica e Euclidiana, pois seu número não é necessariamente inteiro. Esse número representa o grau de ocupação de um fractal no espaço, estando relacionado com o seu grau de irregularidade.

Segundo Lesmoir-Gordon (2010, p. 10-11, tradução nossa), o conceito de dimensão, nos moldes da Geometria Euclidiana, nos diz que:

> (a) Um segmento de reta tem dimensão 1, pois entende-se que qualquer ponto *A* do segmento pode ser especificado usando apenas uma coordenada, isto é, um ponto *A* está a uma distância de *x* unidades de uma extremidade do segmento.
> (b) Um quadrado tem dimensão 2, isto é, qualquer ponto *A* do quadrado pode ser determinado usando apenas duas coordenadas *(x, y)*, de sorte que *x* é a distância de *A* até o lado esquerdo e *y* é a distância de *A* até o lado inferior do quadrado.
> (c) Um cubo tem dimensão 3, pois entende-se que qualquer ponto *A* do cubo pode ser especificado usando apenas três coordenadas *(x, y, z)*, onde *x*, *y* e *z* representam, respectivamente, as distâncias de *A* até a face esquerda, a face inferior e a face traseira.

Nessa perspectiva, um ponto, isoladamente, não tem direções, portanto tem dimensão zero. Uma linha tem um único sentido de direção, logo, tem dimensão 1; no quadrado, encontram-se duas direções, portanto tem dimensão 2 e, no cubo, temos três direções, sua dimensão é 3. Partindo por esse viés, a dimensão de um objeto é a quantidade de coordenadas necessárias para representar, de forma única, um ponto do objeto. Assim, ela é um número inteiro positivo. Veremos, no decorrer dessa oficina, que a dimensão de um fractal também pode ser um número real positivo e não somente um número inteiro positivo. Mas será um número real positivo qualquer? Esclareceremos isso mais adiante.

O número que representa a dimensão fractal pode ser calculado pelo método da Dimensão de Hausdorff-Besicovitch, em homenagem aos matemáticos Felix Hausdorff (1868-1942) e Abram Samoilovitch Besicovitch (1891–1970), considerados fundadores da Topologia Moderna e que contribuíram para os trabalhos de Mandelbrot. Para Reis (2014a, p. 34), "Define-se então dimensão de uma curva fractal como sendo um número que caracteriza a maneira na qual a medida do comprimento entre dois pontos aumenta à medida que a escala diminui".

Para Mandelbrot (1989, p. 14), a dimensão fractal pode ser concebida com a noção de,

> [...] curvas planas muito irregulares, que sua dimensão fractal se situa entre 1 e 2, a respeito de certas superfícies muito enrugadas e cheias de pregas, que a sua dimensão fractal está entre 2 e 3 e, enfim, conjuntos de pontos sobre uma linha cuja a dimensão fractal está entre 0 e 1.

Complementando a concepção de Mandelbrot, para dimensão fractal, Capra (2006, p. 119) explica: "Quanto mais denteados forem os contornos de um relâmpago ou as bordas de uma nuvem e, quanto mais acidentadas forem as formas de uma linha litorânea ou de uma montanha, mais altas serão suas dimensões fractais".

Sendo assim, a dimensão de Hausdorff-Besicovitch permite calcular a dimensão dos fractais que, com a ampliação ou redução, permanecem autossemelhantes. Para entender esse processo de cálculo da dimensão fractal, utilizaremos figuras geométricas já conhecidas da Geometria Euclidiana, tomando como exemplo um segmento de reta, um quadrado e um cubo, até chegarmos à generalização da dimensão.

Tomemos um segmento de reta, o dividimos em 2, 3 e 4 partes e realizamos algumas análises, conforme apresentado no Quadro 2.

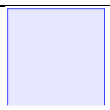
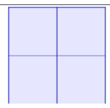
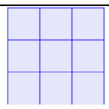
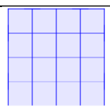
Quadro 2 – Figura obtida e relação entre o número de divisões e o fator de redução para um segmento

Figura obtida	Número de divisões (ou número de segmentos obtidos) N	Fator de redução r	Relação entre N e r $N = \frac{1}{r^1}$
	1	*1*	$1 = \frac{1}{1^1}$
	2	*1/2*	$2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^1}$
	3	*1/3*	$3 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^1}$
	4	*1/4*	$4 = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^1}$

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Tomemos um quadrado de lado C. Vamos dividir cada lado em 2, 3 e 4 partes e realizar algumas investigações, conforme apresentado no Quadro 3.

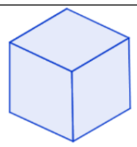
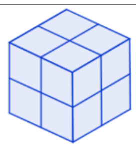
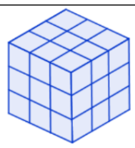
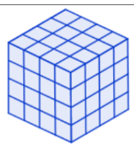
Quadro 3 – Figura obtida e relação entre o número de divisões e o fator de redução para um quadrado

Figura obtida	Número de divisões (ou número de peças geradas) N	Fator de redução r	Relação entre N e r $N = \frac{1}{r^2}$
	*1*	*1*	$1 = \frac{1}{1^2}$
	*4*	*1/2*	$4 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$
	*9*	*1/3*	$9 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$
	*16*	*1/4*	$16 = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}$

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Para finalizar os exemplos, tomemos um cubo de aresta C e vamos dividi-la em 2, 3 e 4 partes e realizar o estudo conforme apresentado no Quadro 4.

Quadro 4 – Figura obtida e relação entre o número de divisões e o fator de redução para um cubo

Figura obtida	Número de divisões (ou número de peças geradas) N	Fator de redução r	Relação entre N e r $N = \frac{1}{r^3}$
	*1*	*1*	$1 = \frac{1}{1^3}$
	*8*	*1/2*	$8 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$
	*27*	*1/3*	$27 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^3}$
	*64*	*1/4*	$64 = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^3}$

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Analisando a divisão do segmento, do quadrado e do cubo, podemos observar que a quantidade N de partes semelhantes ao todo é igual ao inverso do coeficiente de redução (r) elevado à dimensão (D) da figura. Portanto,

$$N = \frac{1}{r^D} = \left(\frac{1}{r}\right)^D.$$

Na Geometria Euclidiana, a dimensão (D) de uma reta, ou segmento de reta é 1, enquanto quadrados são figuras bidimensionais, portanto sua dimensão é igual a 2. Por sua vez, cubos são figuras tridimensionais, logo sua dimensão é igual a 3.

Aplicando logaritmo em ambos os lados da igualdade $N = \left(\frac{1}{r}\right)^D$, iremos obter, após algumas manipulações algébricas, a igualdade

$$D = \frac{logN}{\log\frac{1}{r}}.$$

Pela definição, em Geometria Euclidiana, a dimensão de um objeto pertence ao conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$. Pela definição de Hausdorff-Besicovitch, a dimensão fractal pertence ao intervalo

[0, 3] e, conforme estabelecido por Mandelbrot (1977), a dimensão fractal deve refletir a textura, consistência, completude e densidade.

Assim sendo, a dimensão de Hausdorff-Besicovitch é válida para calcular a dimensão de quaisquer objetos, sejam eles figuras euclidianas com dimensão inteira positiva, ou como figuras fractais com dimensão fracionária. Cabe destacar que nem sempre a dimensão dos fractais é fracionária, mas dimensão fracionária é uma característica que as figuras euclidianas não possuem.

Atividade 3 – Calculando as dimensões fractais

Vamos determinar a dimensão de alguns fractais que foram abordados até o momento neste trabalho. Para tanto vamos utilizar a Planilha e a Janela CAS (*Computer Algebra System*) do *GeoGebra* e preencher o Quadro 5. A turma será dividida em dois grupos, sendo que um utilizará a Planilha e o outro, a Janela CAS. Após concluírem, os grupos irão apresentar os resultados encontrados.

Quadro 5 – Dimensões de alguns fractais

Fractal	Número de divisões N	Fator de redução r	Dimensão fractal $D = \frac{logN}{\log\frac{1}{r}}$
Conjunto de Cantor	*2*	*1/3*	$D \cong 0{,}631$
Curva de Peano	*9*	*1/3*	$D = 2$
Curva de Hilbert	*4*	*1/2*	$D = 2$
Curva de Koch	*4*	*1/3*	$D \cong 1{,}262$
Triângulo de Sierpinsky	*3*	*1/2*	$D \cong 1{,}585$
Tapete de Sierpinsky	*8*	*1/3*	$D \cong 1{,}893$
Tetraedro de Sierpinsky	*4*	*1/2*	$D = 2$
Esponja de Menger	*20*	*1/3*	$D \cong 2{,}727$

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Na Figura 9, apresentamos os valores que foram inseridos para a determinação da dimensão fractal. Para facilitar o cálculo, inserimos duas colunas auxiliares para determinar o log N e o log (1/r), para posterior resolução da dimensão fractal. No *GeoGebra* a sintaxe de logaritmo na base 10 pode ser dada de três formas, a primeira diretamente com o comando lg(x), a segunda com o comando log10(x), e a última maneira log(b, x), onde b é a base e x é o logaritmando.

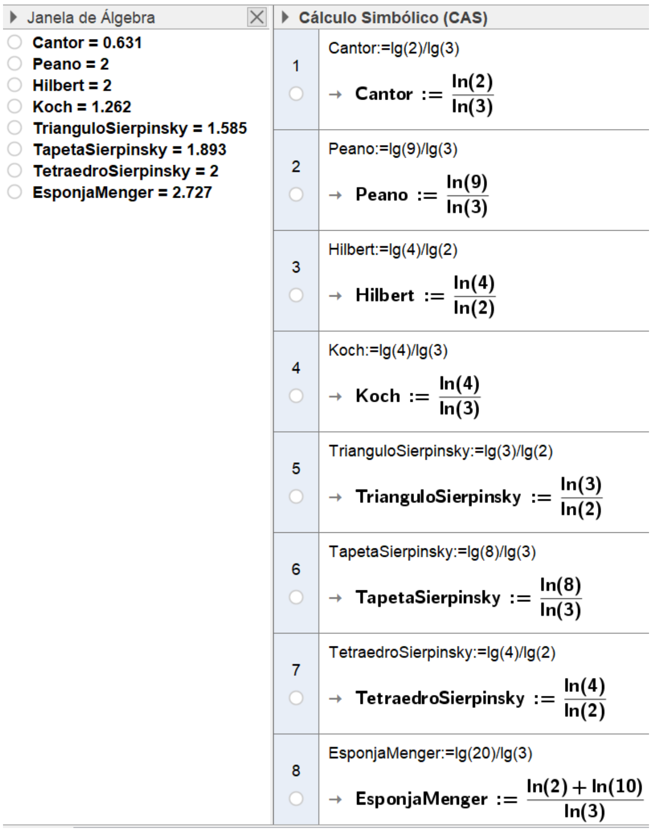
Figura 9 – Cálculo das dimensões fractais na Planilha do *GeoGebra*

	A	B	C	D	E	F
1	Fractal	Número de divisões (N)	Fator de redução (r)	log (N)	log (1/r)	Dimensão fractal
2	Conjunto de Cantor	2	0.333	0.301	0.477	0.631
3	Curva de Peano	9	0.333	0.954	0.477	2
4	Curva de Hilbert	4	0.5	0.602	0.301	2
5	Curva de Koch	4	0.333	0.602	0.477	1.262
6	Triângulo de Sierpinsky	3	0.5	0.477	0.301	1.585
7	Tapete de Sierpinsky	8	0.333	0.903	0.477	1.893
8	Tetraedro de Sierpinsky	4	0.5	0.602	0.301	2
9	Esponja de Menger	20	0.333	1.301	0.477	2.727

Fonte: elaborada pelo próprio autor.

Outra forma de determinar a dimensão fractal é com a utilização da janela CAS, observando simultaneamente os resultados na janela de álgebra, conforme ilustrado na Figura 10.

Figura 10 – Cálculo das dimensões fractais na janela CAS do *GeoGebra*



Fonte: elaborada pelo próprio autor.

Referências

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula.** Belo Horizonte: Autentica, 2005.

CAPRA, Fritjof. **A teia da vida:** uma nova compreensão cientifica dos sistemas vivos. Tradução de Newton Roberval Eichemberg. São Paulo: Cultrix, 2006.

DALPIAZ, Marcos Roberto. **Um estudo sobre fractais:** origem e proposta didática para aplicação em aula**.** 2016. 74 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/2698/1/CT_PROFMAT_M_Dalpiaz%2C%20Marcos%20Roberto_2016.pdf>. Acesso em: 23 set. 2017.

FALCONER, Kenneth. **Fractal geometry:** mathematical foundations and applications. 2. ed. New York: Wiley, 2003.

FEDER, Jens. **Fractals**. New York: Plenum Press, 1988.

LESMOIR-GORDON, Nigel. **The Colours of Infinity:** The Beauty and Power of Fractals. London: Springer, 2010.

MANDELBROT, Benoit B. **Objectos Fractais.** Lisboa: Gradiva, 1989.

MENDONÇA, Fernando Antônio Cavalcante. **Aplicações da Geometria Fractal:** uma proposta didática para o Ensino Médio. 2014. 160 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2016. Disponível em: <http://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/2412/1/Aplica%C3%A7%C3%B5es%20da%20geometria%20fractal_%20uma%20proposta%20did%C3%A1tica%20para%20o%20ensino%20m%C3%A9dio.pdf>. Acesso em: 23 set. 2017.

MONTENEGRO, Gildo Aparecido. **Geometria Descritiva.** Vol. 1. Edgard Blücher: São Paulo, 1991.

MOURA, Delano Vieira de. **Introdução à Geometria Fractal.** 2016. 72 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2016. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94351>. Acesso em: 23 set. 2017.

NEGRI, Marília Gomes. **Introdução ao estudo dos fractais**. 2014. 60 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/3879>. Acesso em: 23 set. 2017.

NETO, Antonio Furtado Landim. **Tópicos da Geometria Fractal e aplicações**. 2015. 96 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=73319>. Acesso em: 23 set. 2017.

PAIXÃO, Rogério da Silva. **O ensino de fractais no Ensino Fundamental**. 2014. 68 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014. Disponível em: <http://www.profmat.uem.br/dissertacoes-2/Rogerio_paixao.pdf>. Acesso em: 23 set. 2017.

PEITGEN, Heinz-Otto; JÜRGENS, Hartmut; SAUPE, Dietmar. **Chaos and Fractals:** New Frontiers of Science. 2. ed. New York: Springer, 2004.

RABAY, Yara Silvia Freire. **Estudo e aplicações da Geometria Fractal.** 2013. 103 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal de Paraíba, João Pessoa, 2013. Disponível em: <http://tede.biblioteca.ufpb.br/handle/tede/7651#preview-link0>. Acesso em: 23 set. 2017.

REIS, Walter. **Geometria Fractal:** Uma abordagem voltada para o Ensino Médio. 2014. 125 p. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2014a. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=1544>. Acesso em: 23 set. 2017.

STEWART, Ian. **Os Números da Natureza**: a realidade irreal da imaginação matemática. Rio de Janeiro: Rocco, 1996.

Apêndice 6 – Oficina 3 – Curva de Peano

Objetivos da oficina 3:

- Desenvolver a parte histórica da Curva de Peano;
- Construir a Curva de Peano, utilizando o *GeoGebra*;
- Explorar relações geométricas envolvidas na Curva de Peano.

Duração: 5 horas (dois encontros de 2,5 horas cada um).

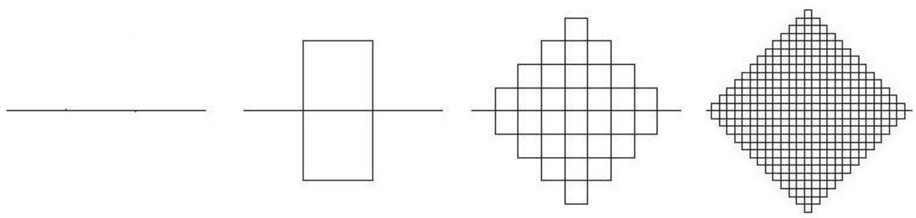
Atividade 1 – Conhecendo a Curva de Peano

A atividade 1 é expositiva e dialogada com os alunos, sendo apresentado, em um primeiro momento, o historio da Curva de Peano e, após, analisar sua característica.

Curva de Peano

O matemático italiano Giuseppe Peano (1858–1932) publicou em 1890 um estudo aprofundado das noções de continuidade e dimensões, no qual relata a curva que leva seu nome, em que prometia cobrir totalmente uma superfície plana quadrangular. (BARBOSA, 2005). Para melhor exemplificação, veja a Figura 1.

Figura 1 – Curva de Peano



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Na confecção da Curva de Peano empregamos o processo iterativo. Para tanto, utilizamos a construção conforme Coelho (2015) e Iwai (2015) apresentam em seus trabalhos. Para iniciá-la, tomemos um segmento de reta de comprimento unitário. Dividimos esse segmento em três partes congruentes. No segmento central, desenhamos um retângulo, que é dividido pelo segmento inicial em dois quadrados congruentes. Ao final dessa primeira iteração, obtemos 9 segmentos de comprimento 1/3 cada. Para a segunda iteração, vamos repetir os passos anteriores, assim vamos obter 81 segmentos de comprimento 1/81. Continuando esse processo de iteração *n* vezes, teremos 9^n segmentos de comprimento $\frac{1}{3^n}$.

Atividade 2 – Construção da Curva de Peano

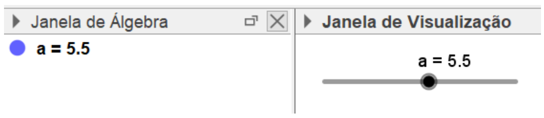
A construção da Curva de Peano, nesta atividade, é realizada no *GeoGebra* e, para sua melhor compreensão, a dividiremos em 4 etapas, cujos passos são fornecidos aos estudantes via projetor multimídia e verbalmente. Como ocorrido em encontros anteriores, exploramos a “Janela de Álgebra”, “Janela de Visualização” e a “Entrada de comandos”, estando essa última na parte inferior da tela do computador. Além disso, forneceremos a sintaxe que o software oferece e a mesma preenchida (recomendada para a atividade).

Etapa 1: nível 0

Construção da Curva de Peano - protocolo de construção:

a) Inserir um controle deslizante denominado de L com valor mínimo 0,1, valor máximo 10 e incremento 0,1, conforme figura 2. Novamente optamos por utilizar o controle deslizante para evitar empregar um valor fixo para o segmento da Curva de Peano posteriormente ser construído. Muito embora pudéssemos optar por qualquer valor do incremento, optamos pelo 0,1.

Figura 2 – Controle deslizante



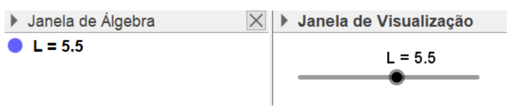
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: ControleDeslizante(<Mínimo>, <Máximo>, <Incremento>)

Sintaxe preenchida: ControleDeslizante(0.1, 10, 0.1)

Renomear o controle deslizante para L (de linha), uma vez que o *GeoGebra* o nomeia de acordo com a ordem alfabética. Esse controle deslizante definirá o tamanho da linha (segmento) inicial da Curva de Peano (Figura 3).

Figura 3 – Controle deslizante renomeado



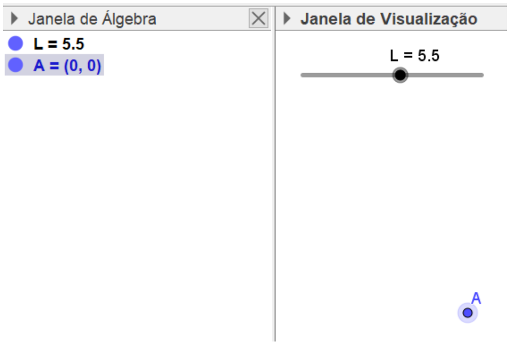
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: Renomear(<Objeto>, <Nome>)

Sintaxe preenchida: Renomear(a, L)

b) Inserir o ponto A com coordenadas (0,0), como ilustramos na Figura 4.

Figura 4 – Ponto A



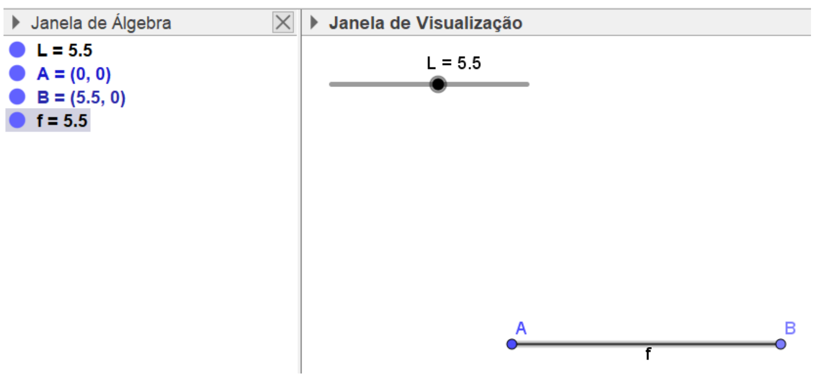
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: A=(x, y)

Sintexe preenchida: A=(0, 0)

c) Inserir um segmento f de comprimento L com origem no ponto A. A Figura 5 ilustra essa etapa da construção.

Figura 5 – Segmento f de comprimento L



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: Segmento(<Ponto>, <Comprimento>)

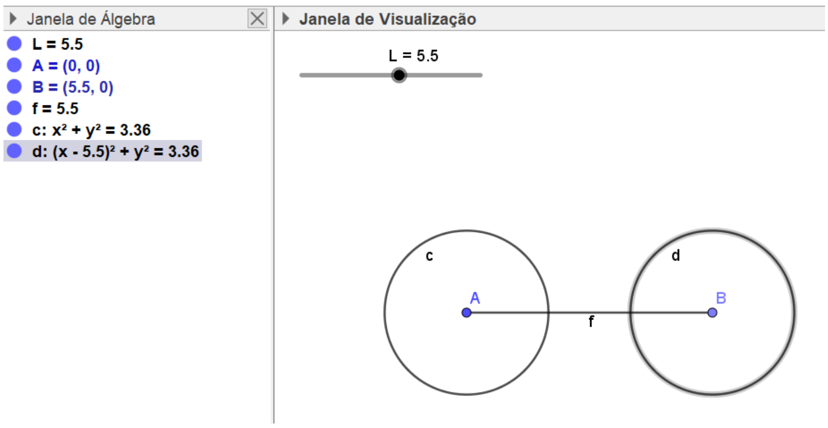
Sintexe preenchida: Segmento(A, L)

Etapa 2: nível 1

Obtenção de 9 segmentos gerados a partir do segmento AB originado no nível 1- protocolo de construção:

d) Criar duas circunferências c e d, uma com centro em A e raio L/3 e outra em centro B e raio L/3 (Figura 6).

Figura 6 – Circunferências c e d



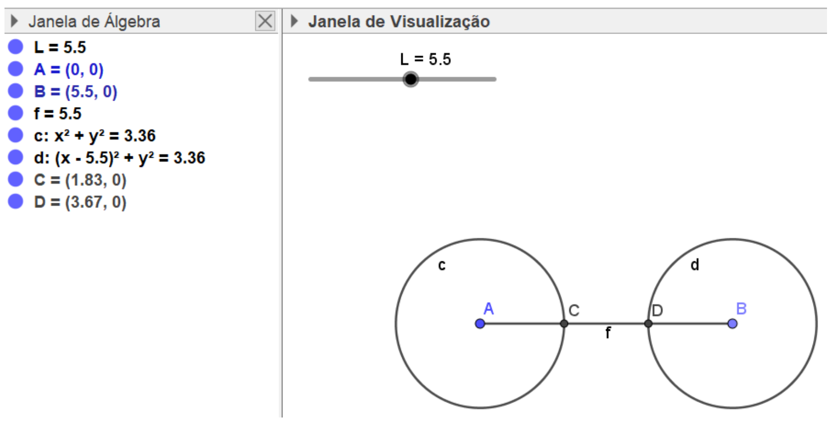
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: Círculo(<Ponto>, <Raio>)

Sintaxe preenchida: Círculo(A, L/3); Círculo(B, L/3), separadamente.

e) Determinar os pontos de intersecção C e D das circunferências c e d, respectivamente, com o segmento f. Veja Figura 7.

Figura 7 – Pontos C e D



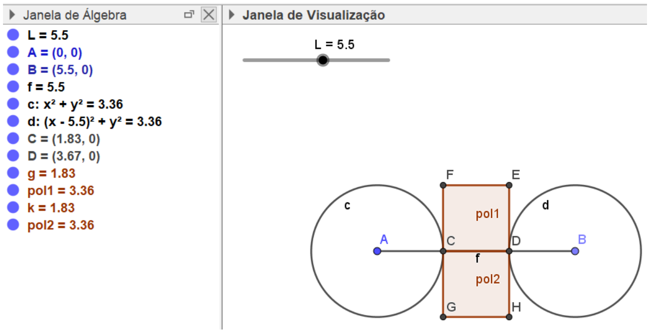
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: Interseção(<Objeto>, <Objeto>)

Sintaxe preenchida: Interseção(c, f); Interseção(d, f)

f) Criar dois polígonos regulares de 4 lados, conforme ilustra a Figura 8.

Figura 8 – Curva de Peano nível 1



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

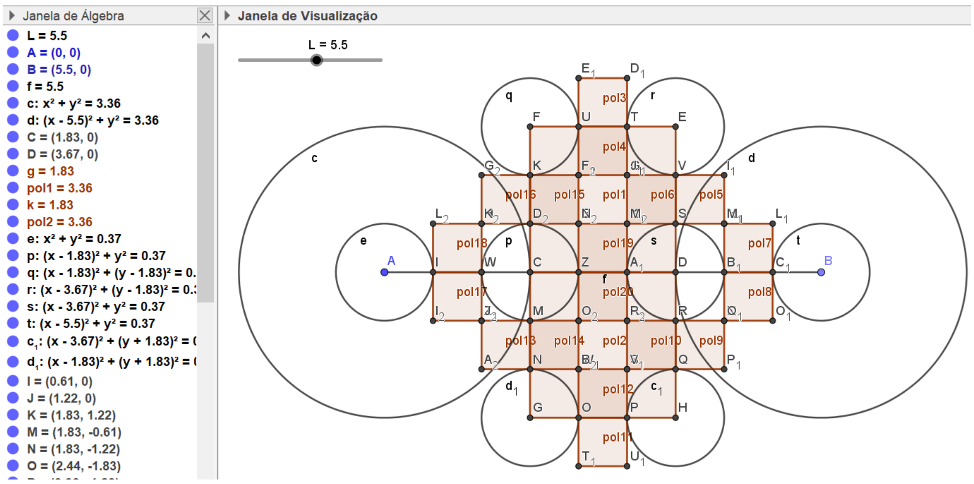
Sintaxe: Polígono(<Ponto>, <Ponto>, <Número de Vértices>)

Sintaxe preenchida: Polígono(C, D, 4); Polígono(D, C, 4)

Etapa 3: nível 2

Obtenção de 81 segmentos gerados a partir dos 9 segmentos obtidos no nível 1 da Curva de Peano. Para tanto, iremos repetir os passos fornecidos nos itens d, e, f do nível 1 (Figura 9). A circunferência gerada no item d tem raio L/3, porém, no nível 2, o raio passa a ser L/9.

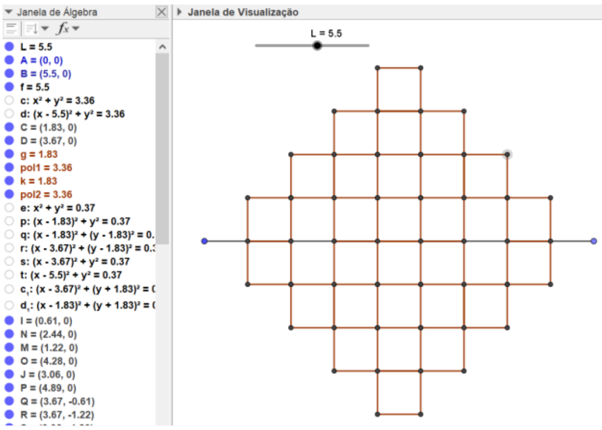
Figura 9 – Curva de Peano nível 2 com todos os elementos geométricos



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Antes de ir para a etapa 4 (nível 3), vamos deixar somente os segmentos e os pontos visíveis para facilitar a execução da próxima etapa, conforme ilustra a Figura 10.

Figura 10 – Curva de Peano nível 2

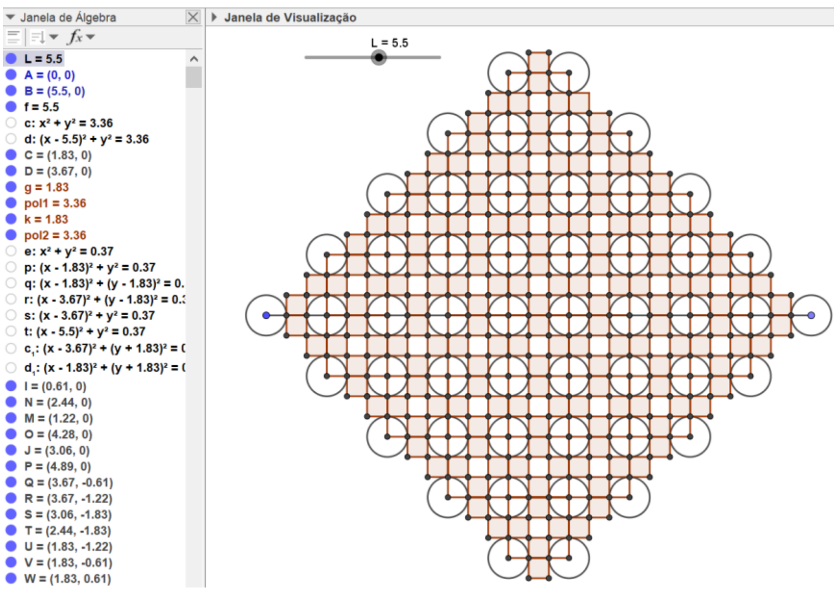


Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Etapa 4: nível 3

Obtenção de 729 segmentos gerados a partir dos 81 segmentos obtidos no nível 2 da Curva de Peano. Para tanto, iremos repetir os passos dos itens d, e e f do nível 1, conforme ilustra a Figura 11. A circunferência gerada no item d tem raio L/3, porém, para o nível 3, o raio passa a ser L/27.

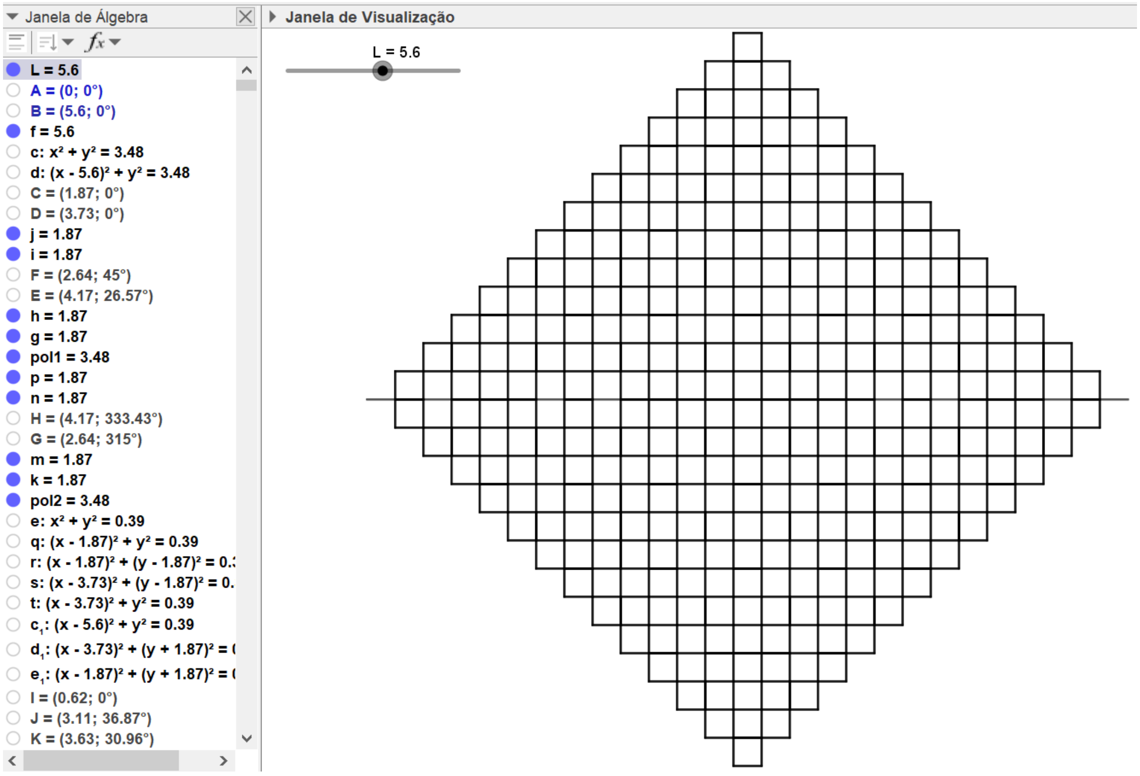
Figura 11 – Curva de Peano nível 3 não finalizada



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

i) Para finalizar, iremos deixar visível somente os segmentos gerados no nível 3, ocultando outros objetos que não são necessários. Observe a Figura 12.

Figura 12 – Curva de Peano nível 3 finalizada



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Atividade 3 – Exploração da Curva de Peano

a) A partir da construção da Curva de Peano, analisar e preencher o Quadro 1, determinando a medida do lado e o número de segmentos gerados em cada nível até chegar ao nível n. Salientamos que n é um número natural qualquer.

Quadro 1 - Tamanho do lado e números de segmentos gerados na Curva de Peano de nível n

	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	...	Nível n
Lado	L	$\frac{l}{3}$	$\frac{l}{9}$	$\frac{l}{27}$	...	$\frac{l}{3^n}$
Número de segmentos	1	9	81	729	...	9^n
Área de cada quadrado gerado	-	$\frac{l^2}{9}$	$\frac{l^2}{81}$	$\frac{l^2}{729}$	...	$\frac{l^2}{9^n}$

Fonte: autoria própria.

b) Se pensar em um valor para n muito elevado, ou seja, quando n tende a infinito, o que ocorre com a soma do comprimento dos segmentos, isto é, S_n?

A soma do comprimento dos segmentos na Curva de Peano é dada pelo número de segmentos multiplicado pelo tamanho do seu lado. Para melhor organização, preencha o Quadro 2.

Resposta esperada:

Quadro 2 – Soma do comprimento dos segmentos na Curva de Peano

Nível	Soma dos segmentos
0	$S_0 = 1.l = l$
1	$S_1 = 9..\frac{l}{3} = \frac{9}{3}.l = 3S$
2	$S_2 = 81.\frac{l}{9} = \frac{81}{9}.l = 9S$
3	$S_3 = 729.\frac{l}{27} = \frac{729}{27}.l = 27S$
$\vdots$	$\vdots$
N	$S_n = 9^n.\frac{l}{3^n} = \frac{3^{2n}}{3^n}.l = (3^n).l$

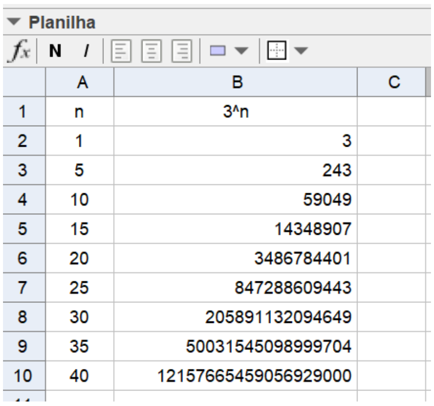
Fonte: autoria própria.

$S_n = (3^n).l$. Há duas formas para resolver: uma é atribuindo valores a n e verificando seu comportamento e a outra é por meio do limite quando n tende a infinito, ou seja:

$$\lim_{n\to\infty}((3^n).l) = l.\lim_{n\to\infty}(3^n) = \infty$$

Para atribuir valores, utilizaremos a Planilha do *GeoGebra*, apresentada na Figura 13.

Figura 13 – Soma dos comprimentos da Curva de Peano n.


Planilha

	A	B	C
1	n	3^n	
2	1	3	
3	5	243	
4	10	59049	
5	15	14348907	
6	20	3486784401	
7	25	847288609443	
8	30	205891132094649	
9	35	50031545098999704	
10	40	12157665459056929000	

Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Como podemos observar na Figura 13, conforme aumentamos o valor de *n*, também teremos valores cada vez mais elevados para a soma. Podemos concluir que a soma tende a um valor muito grande, ou seja, ao infinito.

c) Com base na Figura 14, o que você observa que está ocorrendo na construção do nível 0 para o nível 1?

Figura 14 – Curva de Peano nível 0 e nível 1

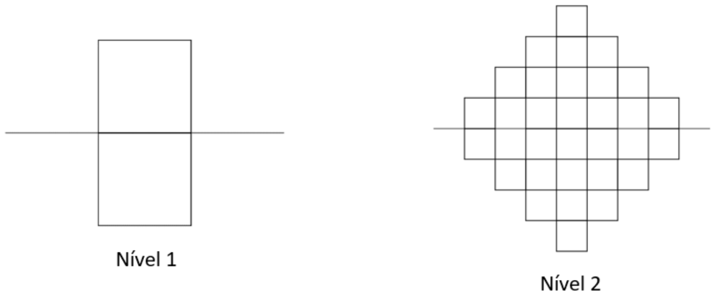
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Resposta esperada:

O nível 0 é apenas um segmento de reta cujo comprimento mede L. O nível 1 possui 2 quadrados de lados medindo L/3.

d) Com base na Figura 15, o que você observa que está ocorrendo na passagem da construção do nível 1 para o nível 2?

Figura 15 – Curva de Peano nível 1 e nível 2



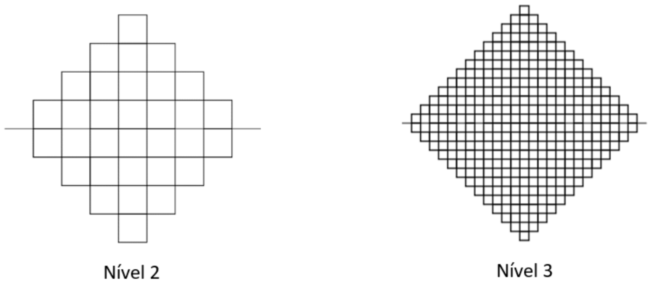
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Resposta esperada:

O nível 1 possui dois quadrados de lado medindo L/3, enquanto que o nível 2 possui 32 quadrados de lados medindo L/9.

e) Com base na Figura 16, o que você observa que está ocorrendo na passagem da construção do nível 2 para o nível 3?

Figura 16 – Curva de Peano nível 2 e nível 3



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Resposta esperada:

O nível 2 possui 32 quadrados de lado medindo L/9. O nível 3 possui 338 quadrados de lados medindo L/27.

f) Se continuarmos as iterações até chegar a um nível n, em que *n* é um valor muito elevado (*n* tendendo a infinito), o que podemos conjecturar a respeito da área da superfície formada nessa iteração?

Resposta esperada:

Quando *n* for muito elevado, o valor da área da superfície tende a ser a área de um quadrado, pois essa figura geométrica está sendo preenchida cada vez por quadrados menores.

Referências

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula.** Belo Horizonte: Autentica, 2005.

COELHO, João Batista. **Geometria Fractal:** Um olhar sobre a necessidade de inclusão na estrutura curricular do Ensino Médio. 2015. 80 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=81594>. Acesso em: 23 set. 2017.

IWAI, Marceli Megumi Hamazi. **Geometria Fractal**. 2015. 86 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=85308>. Acesso em: 23 set. 2017.

Apêndice 7 – Oficina 4 – Tetraedro de Sierpinsky

Objetivos da oficina 4:

- Construir o Tetraedro de Sierpinsky utilizando o *GeoGebra*;
- Explorar relações geométricas envolvidas no Tetraedro de Sierpinsky.

Duração: 5 horas (dois encontros de 2,5 horas).

Atividade 1 – Conhecendo o Tetraedro de Sierpinsky

A atividade 1 é expositiva e dialogada com os alunos, sendo apresentado em um primeiro momento o histórico do Tetraedro de Sierpinsky e, após, busca de suas características.

Tetraedro de Sierpinsky

Um segundo fractal que leva o nome de Sierpinsky é o Tetraedro de Sierpinsky (Figura 1), sendo esse uma ampliação tridimensional do Triângulo de Sierpinsky.

Figura 1 – Tetraedro de Sierpinsky

Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Iwai (2015) apresenta a construção do Tetraedro de Sierpinsky, iniciando o processo com um tetraedro. Primeiramente, localizamos o ponto médio de cada aresta e unimos esses pontos médios por doze segmentos de reta, formando seis tetraedros menores e congruentes. Retiramos os dois tetraedros centrais (que formam um octaedro). Disso, resultam quatro tetraedros, para novamente aplicarmos o mesmo processo. A cada nova iteração, a quantidade de tetraedros fica multiplicada por 4 e a medida da aresta é a metade da aresta do tetraedro anterior. Portanto, se repetirmos *n* vezes o processo, teremos formado 4^n tetraedros com arestas medindo $\frac{1}{2^n}$ da aresta do tetraedro inicial.

O Tetraedro de Sierpinsky, no nível 0, pode ser encontrado no endereço <https://www.geogebra.org/m/yav6jwjh>; o nível 1, no endereço

<https://www.geogebra.org/m/ppsekprs>; e o nível 2 no endereço <https://www.geogebra.org/m/aaayt9ne>. Esses endereços são do repositório de materiais denominado "GeoGebra Materiais" (<https://www.geogebra.org/materials?lang=pt>). Tal repositório é um espaço em que se pode depositar materiais criados no *GeoGebra*, estando disponível para *download*. Pode ser deixado em modo público (todos terão acesso), modo particular (só o autor terá acesso) ou em modo compartilhado (algumas pessoas previamente determinadas terão acesso).

Atividade 2 – Construção do Tetraedro de Sierpinsky

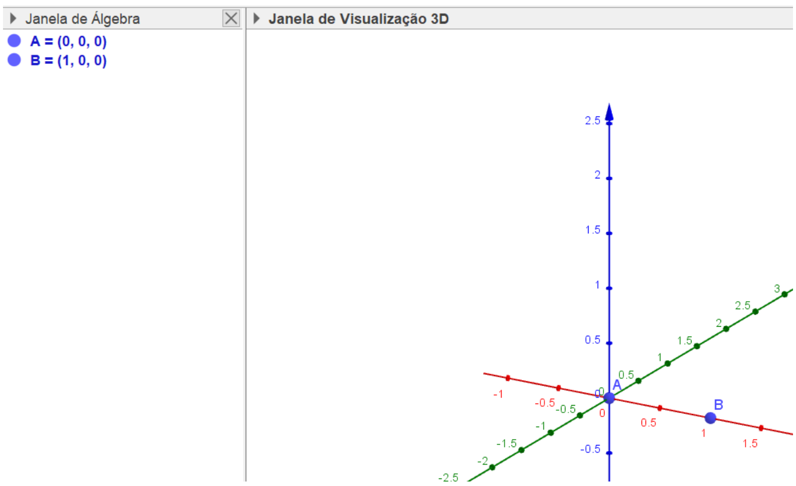
A construção do Tetraedro de Sierpinsky será realizada com o auxílio do *GeoGebra* e, para melhor compreensão, a dividiremos em 3 etapas. Apresentaremos os passos de construção na sequência.

Etapa 1: nível 0

Protocolo de construção: novamente exploramos a "Janela de Álgebra" e "Entrada de Comandos", porém com a utilização da "Janela de Visualização 3D".

a) Inserir os pontos A (0, 0, 0) e B (1, 0, 0), conforme ilustrado na Figura 2.

Figura 2 – Pontos A e B



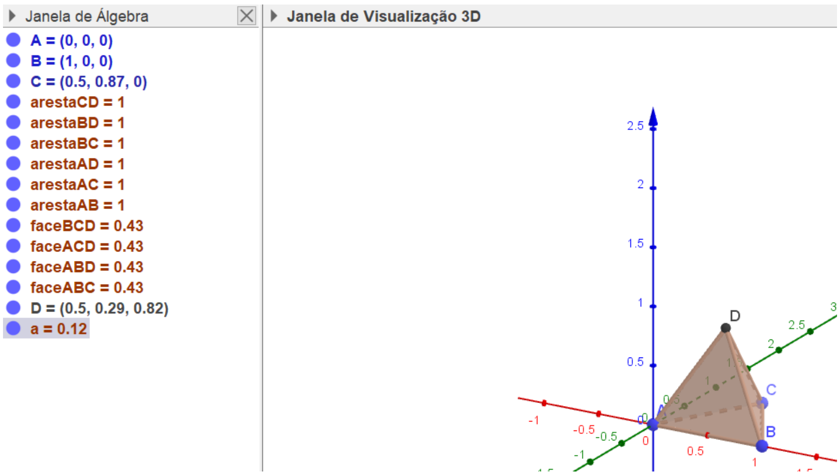
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: A=(x, y, z); B=(x, y, z)

Sintaxe preenchida: A=(0, 0, 0); B=(1, 0, 0)

b) Criar um tetraedro com os pontos A e B. A Figura 3 ilustra a construção.

Figura 3 – Tetraedro ABCD



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: Tetraedro(<Ponto>, <Ponto>)

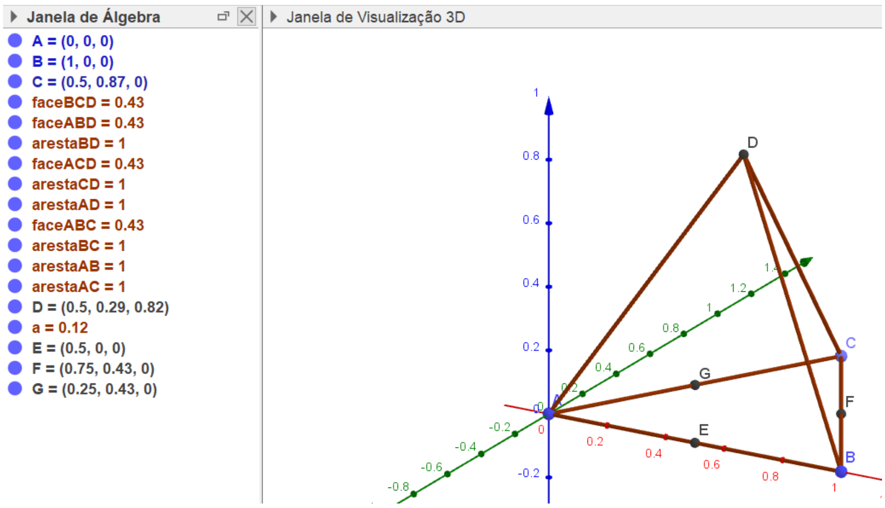
Sintaxe preenchida: Tetraedro(A, B)

Etapa 2: nível 1

Construção de 4 tetraedros no interior do tetraedro inicial, seguindo o protocolo:

c) Marcar os pontos médios E, F e G referentes aos segmentos AB, BC e AC, respectivamente. Observe a Figura 4 e a respectiva construção.

Figura 4 – Pontos médios E, F e G



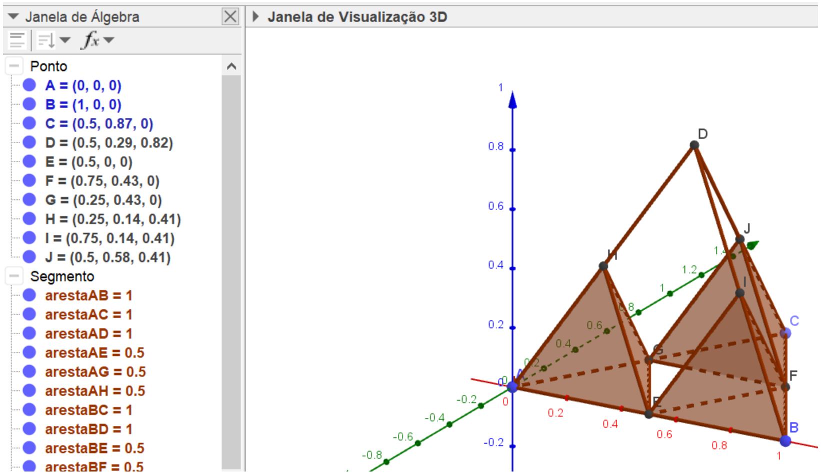
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: PontoMédio(<Ponto>, <Ponto>)

Sintaxe preenchida: PontoMédio(A, B); PontoMédio(B, C); PontoMédio(A, C), separadamente.

d) Criar três tetraedros com os pontos AEG, EBF e GFC. Veja Figura 5, ilustrando a construção.

Figura 5 – Tetraedros AEGH, EBFI e GFCJ



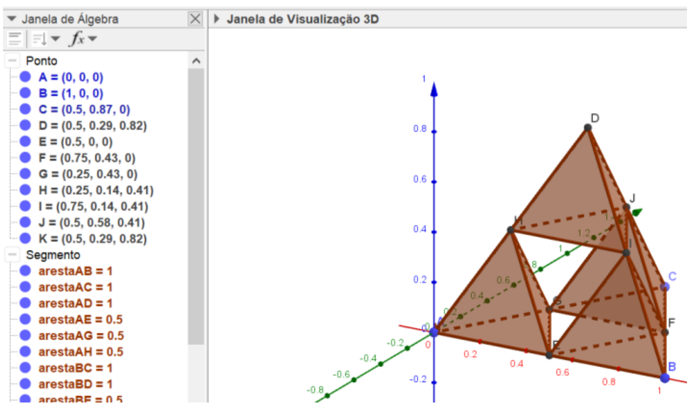
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: Tetraedro(<Ponto>, <Ponto>, <Ponto>)

Sintaxe preenchida: Tetraedro(A, E, G); Tetraedro(E, B, F); Tetraedro(G, F, C), separadamente.

e) Criar o quarto e último tetraedro do nível 1 com os pontos H, I e J, conforme ilustra a Figura 6.

Figura 6 – Tetraedro HIJD



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: Tetraedro(<Ponto>, <Ponto>, <Ponto>)

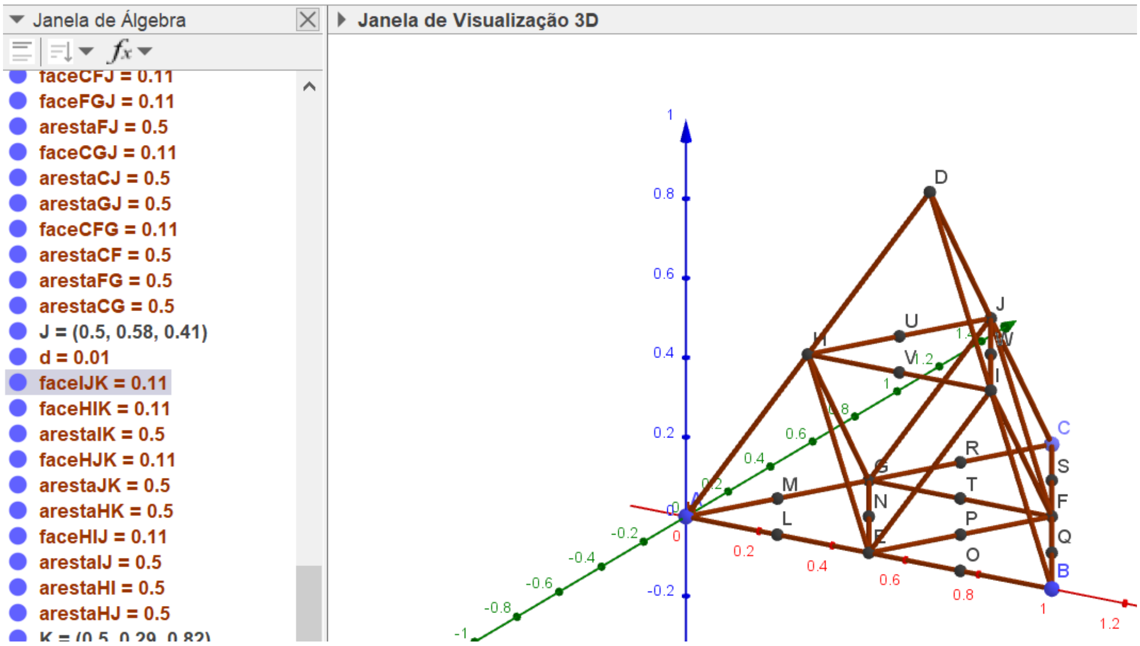
Sintaxe preenchida: Tetraedro(H, I, J)

Etapa 3: nível 2

Construção de 4 tetraedros no interior de cada tetraedro gerado no nível 1, protocolo de construção:

f) Marcar os pontos médios L, M, N, O, P, Q, R , S, T, U, V e W referentes aos segmentos AE, AG, EG, EB, EF, FB, GC, FC, GF, HJ, HI e IJ, respectivamente. A Figura 7 ilustra essa etapa.

Figura 7 – Segmento f de comprimento l



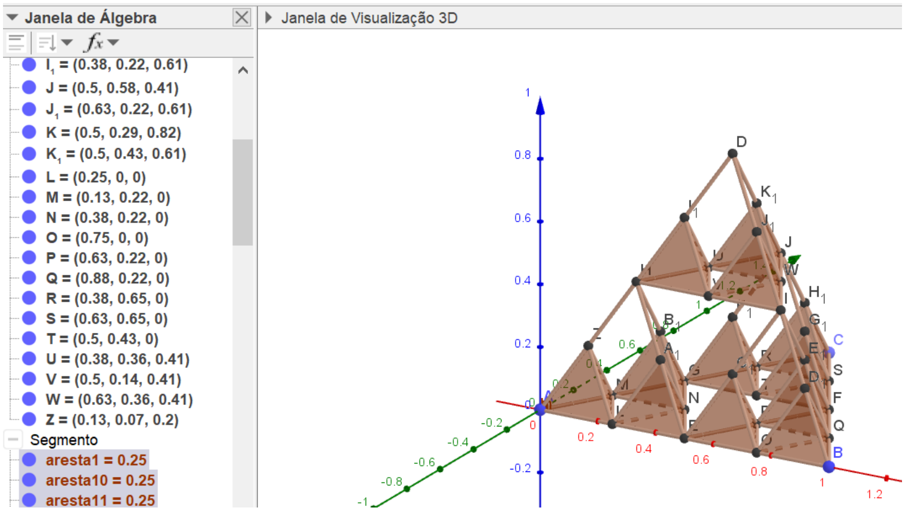
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: PontoMédio(<Ponto>, <Ponto>)

Sintaxe preenchida: PontoMédio(A, E); PontoMédio(A, G); PontoMédio(E, G); PontoMédio(E, B); PontoMédio(E, F); PontoMédio(F, B); PontoMédio(G, C); PontoMédio(F, C); PontoMédio(G, F); PontoMédio(H, J); PontoMédio(H, I); PontoMédio(I, J), separadamente.

g) Criar 12 tetraedros com os pontos ALM, LEN, MNG, EOP, OBQ, PQF, GTR, TFS, RSC, HVU, VIW e UWJ. Veja a Figura 8 ilustrando essa situação.

Figura 8 – Tetraedros ALMZ, LENA$_1$, MNGB$_1$, EOPC$_1$, OBQD$_1$, PQFE$_1$, GTRF$_1$, TFSG$_1$, RSCH$_1$, HVUI$_1$, VIWJ$_1$ e UWJK$_1$



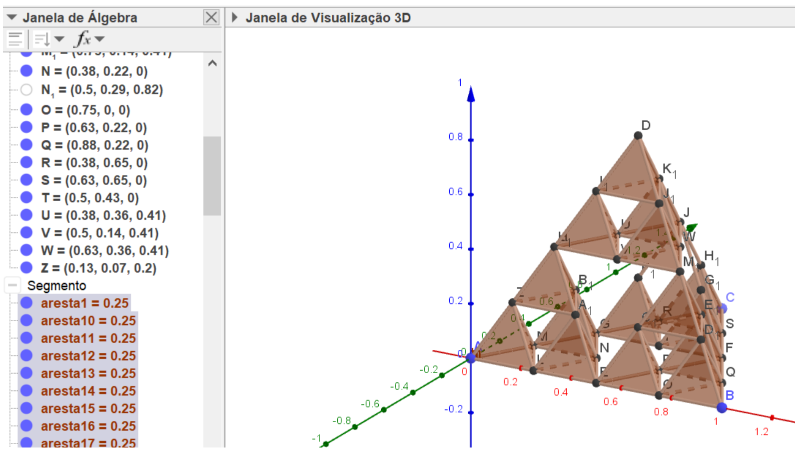
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: Tetraedro(<Ponto>, <Ponto>, <Ponto>)

Sintaxe preenchida: Tetraedro(A, L, M); Tetraedro(L, E, N); Tetraedro(M, N, G); Tetraedro(E, O, P); Tetraedro(O,B,Q); Tetraedro(P,Q,F); Tetraedro(G,T,R); Tetraedro(T, F, S); Tetraedro(R, S, C); Tetraedro(H, V, U); Tetraedro(V, I, W); Tetraedro(U, W,J), separadamente.

h) Criar os últimos 4 tetraedros do nível 2 com os pontos ZA$_1$B$_1$, C$_1$D$_1$E$_1$, F$_1$G$_1$H$_1$ e I$_1$J$_1$K$_1$, conforme ilustra a Figura 9.

Figura 9 – Tetraedros ZA$_1$B$_1$H, C$_1$D$_1$E$_1$I, F$_1$G$_1$H$_1$J e I$_1$J$_1$K$_1$D



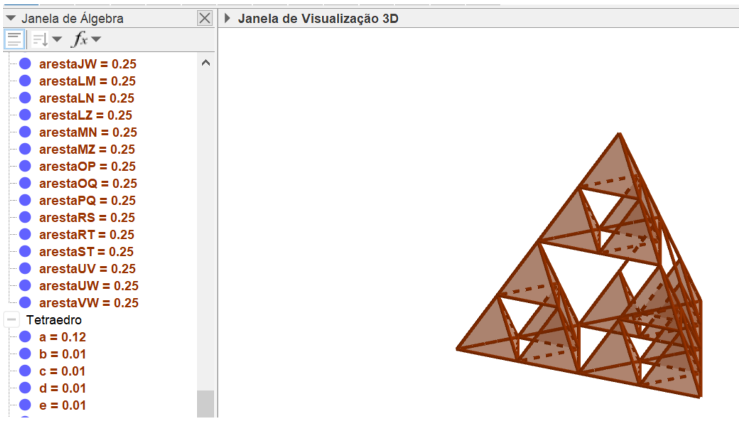
Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Sintaxe: Tetraedro(<Ponto>, <Ponto>, <Ponto>)

Sintaxe preenchida: Tetraedro(Z, A_1, B_1); Tetraedro(C_1, D_1, E_1); Tetraedro(F_1, G_1, H_1); Tetraedro(I_1, J_1, K_1)

i) Para finalizar, deixar visível somente os tetraedros construídos no nível 2, ocultando outros objetos que não são necessários, como pode ser observado na Figura 10.

Figura 10 – Tetraedro de Sierpinsky nível 2



Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Atividade 3 – Exploração do Tetraedro de Sierpinsky

a) A partir da construção do Tetraedro de Sierpinsky, analisar e preencher o Quadro 1. Determinar a quantidade de tetraedros e arestas geradas, bem como a medida delas, em cada nível, até chegar ao nível n. Salientamos que n é um número natural qualquer.

Quadro 1 - Medida do lado, número de hexágonos e área (em relação a A_0) para o Tetraedro de Sierpinsky de nível n

	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	...	Nivel n
Lado	L	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{4}$	$\frac{l}{8}$	...	$\frac{l}{2^n}$
Número de arestas	6	24	96	384	...	6.4^n
Número de tetraedros	1	4	16	64	...	4^n

Fonte: autoria própria.

b) Se você pensar em um valor para *n* muito elevado, ou seja, *n* tendendo a infinito, o que ocorre com o soma das medidas dos comprimentos das arestas, isto é, S_n?

A soma das medidas dos comprimentos das arestas de um tetraedro é dada por $S = 6l$, a qual é denotada de S. Porém, a cada nível do Tetraedro de Sierpinsky, modifica-se a quantidade de tetraedros e a medida da aresta. Sendo assim, essa soma é dada pela multiplicação do número de tetraedros gerados em cada nível por 6 (número de arestas em cada tetraedro) e pela medida do lado l do tetraedro (que em cada nível terá um novo valor). Para melhor organização, preencha o Quadro 2.

Resposta esperada:

Quadro 2 – Soma das arestas do Tetraedro de Sierpinsky

Nível	Soma das arestas
0	$S_0 = 6l = S$
1	$S_1 = 4.6.\frac{l}{2} = \frac{4}{2}.6l = 2S$
2	$S_2 = 16.6.\frac{l}{4} = \frac{16}{4}.6l = 4S$
3	$S_3 = 64.6.\frac{l}{8} = \frac{64}{8}.6l = 8S$
$\vdots$	$\vdots$
N	$S_n = 4^n.6.\frac{l}{2^n} = \frac{2^{2n}}{2^n}.6l = 2^n S$

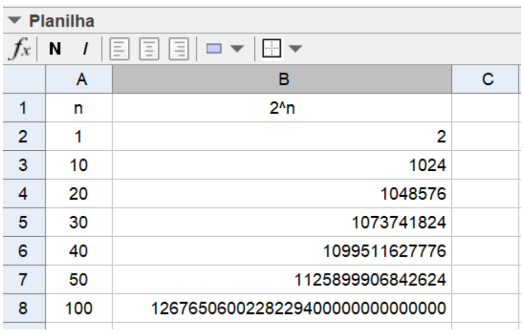
Fonte: autoria própria.

$S_n = 2^n S$. Temos duas formas para encontrar essa relação: uma é atribuindo valores a n e verificar seu comportamento; a outra é por meio do limite, quando n tende a infinito, ou seja:

$$\lim_{n\to\infty}(2^n S) = S.\lim_{n\to\infty}(2^n) = \infty$$

Para atribuir valores, iremos utilizar a Planilha do *GeoGebra*, conforme apresentado na Figura 11.

Figura 11 – Soma das arestas do Tetraedro de Sierpinsky nível n



Planilha

	A	B	C
1	n	2^n	
2	1	2	
3	10	1024	
4	20	1048576	
5	30	1073741824	
6	40	1099511627776	
7	50	1125899906842624	
8	100	1267650600228229400000000000000	

Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Como podemos observar na Figura 11, conforme aumentamos o valor de *n*, também teremos valores cada vez mais elevados para a soma. Portanto, podemos concluir que essa soma tende a um valor muito grande, ou seja, a infinito.

c) Conjecturando um valor para *n* muito elevado (*n* tendendo a infinito), o que você observa acontecer com a área total A_{t_n}?

A área total de um tetraedro é dada por: $A_t = l^2\sqrt{3}$, (denotada por *A)*. Para cada nível do Tetraedro de Sierpinsky, ocorre variação do número de tetraedros gerados e da medida da aresta. Logo, a área total (para um nível *n*) será o resultado da multiplicação de $\sqrt{3}$ pelo número de tetraedros de cada nível pela medida de sua aresta elevado ao quadrado Para melhor organização, preencha o Quadro 3.

Resposta esperada:

Quadro 3 – Área total do Tetraedro de Sierpinsky

Nível	Soma das áreas
0	$A_{t_0} = l^2\sqrt{3} = A$
1	$A_{t_1} = 4.\left(\frac{l}{2}\right)^2\sqrt{3} = \frac{4}{4}(l^2\sqrt{3}) = A$
2	$A_{t_2} = 16.\left(\frac{l}{4}\right)^2\sqrt{3} = \frac{16}{16}(l^2\sqrt{3}) = A$
3	$A_{t_3} = 64.\left(\frac{l}{8}\right)^2\sqrt{3} = \frac{64}{64}(l^2\sqrt{3}) = A$
$\vdots$	$\vdots$
N	$A_{t_n} = 4^n.\left(\frac{l}{2^n}\right)^2\sqrt{3} = \frac{2^{2n}}{2^{2n}}(l^2\sqrt{3}) = A$

Fonte: autoria própria.

Portanto, a área total para um nível *n*, de iterações, é igual à área do tetraedro no nível 0. Em outras palavras, a área da superfície desse fractal se mantém a mesma, pois a perda e o acréscimo de determinadas faces se anulam. Por exemplo, no nível 1, são removidos 4 triângulos de cada face do tetraedro, cada um com face igual a ¼ da área A da face do tetraedro inicial, como são acrescidos 4 triângulos de mesma área das retiradas do interior do tetraedro. O mesmo ocorrerá nas demais etapas da construção do Tetraedro de Sierpinsky.

d) Como seria o volume do Tetraedro de Sierpinsky (V_n) para valor para n muito elevado (n tendendo a infinito)?

O volume de um tetraedro é dado por: $V = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$. Salientamos que, para cada nível do Tetraedro de Sierpinsky, o que irá variar será a medida de sua aresta. Para melhor organização, preencha o Quadro 4.

Resposta esperada:

Quadro 4 – Volume do Tetraedro de Sierpinsky para *n* iterações

Nível	Soma dos volumes
0	$V_0 = \frac{l^3\sqrt{2}}{12} = V$
1	$V_1 = 4\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3\sqrt{2}}{12} = \frac{4}{8}\left(\frac{l^3\sqrt{2}}{12}\right) = \frac{1}{2}V$
2	$V_2 = 16\frac{\left(\frac{l}{4}\right)^3\sqrt{2}}{12} = \frac{16}{64}\left(\frac{l^3\sqrt{2}}{12}\right) = \frac{1}{4}V$
3	$V_3 = 64\frac{\left(\frac{l}{8}\right)^3\sqrt{2}}{12} = \frac{64}{512}\left(\frac{l^3\sqrt{2}}{12}\right) = \frac{1}{8}V$
$\vdots$	$\vdots$
N	$V_n = 4^n\frac{\left(\frac{l}{2^n}\right)^3\sqrt{2}}{12} = \frac{2^{2n}}{2^{3n}}\left(\frac{l^3\sqrt{2}}{12}\right) = \frac{1}{2^n}V$

Fonte: autoria própria.

Logo, $V_n = \frac{1}{2^n}V$, temos duas formas para resolver, uma atribuindo valores a n e verificar seu comportamento e a outra é por meio do limite, quando n tende a infinito, ou seja:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}V\right) = V.\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$$

Para atribuir valores, iremos utilizar a Planilha do *GeoGebra*, conforme apresentado na Figura 12.

Figura 12 – Volume do Tetraedro de Sierpinsky nível n

Planilha

	A	B
1	n	1/2^n
2	1	0.5
3	2	0.25
4	3	0.125
5	4	0.0625
6	5	0.03125
7	6	0.015625
8	7	0.0078125
9	8	0.00390625
10	9	0.001953125
11	10	0.0009765625

Fonte: construção do próprio autor no *GeoGebra*.

Como podemos observar na Figura 12, conforme aumentamos o valor de *n*, os valores dos volumes se aproximam cada vez mais de zero. Concluímos que o volume tende a zero.

Referência

IWAI, Marceli Megumi Hamazi. **Geometria Fractal**. 2015. 86 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=85308>. Acesso em: 23 set. 2017.