

MAURICIO RAMOS LUTZ
JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS
ORGANIZADORES

Abordagens metodológicas para o ensino de geometria

GEPGE 
GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM GEOMETRIA

 Mundo
Acadêmico

MAURICIO RAMOS LUTZ
JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS
ORGANIZADORES

Abordagens metodológicas para o ensino de geometria

GEPGE 
GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM GEOMETRIA

 **Mundo**
Acadêmico

Santa Maria / Porto Alegre
2021

Copyright ©2021 dos organizadores.

Direitos desta edição reservados aos organizadores, cedidos somente para a presente edição à EDITORA MUNDO ACADÊMICO, em coedição com o Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria – GEPGEO, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana.



LICENCIADA POR UMA LICENÇA CREATIVE COMMONS

Atribuição - Não Comercial - Sem Derivadas 4.0
Internacional (CC BY-NC-ND 4.0)

Você é livre para:

Compartilhar - copie e redistribua o material em qualquer meio ou formato. O licenciante não pode revogar essas liberdades desde que você siga os termos da licença.

Atribuição - Você deve dar o crédito apropriado, fornecer um link para a licença e indicar se foram feitas alterações. Você pode fazê-lo de qualquer maneira razoável, mas não de maneira que sugira que o licenciante endossa você ou seu uso.

Não Comercial - Você não pode usar o material para fins comerciais.

Não-derivadas - Se você remixar, transformar ou desenvolver o material, não poderá distribuir o material modificado.

Sem restrições adicionais - Você não pode aplicar termos legais ou medidas tecnológicas que restrinjam legalmente outras pessoas a fazer o que a licença permitir.

Este é um resumo da licença atribuída. Os termos da licença jurídica integral está disponível em:

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

Os dados e conceitos emitidos nos trabalhos, bem como a exatidão das referências bibliográficas, são de inteira responsabilidade dos autores.

EXPEDIENTE:

Projeto gráfico, diagramação e capa:
Casalettras

Imagem da capa:
Montagem a partir do acervo livre de Pixabay.

Revisor linguístico:
André Firpo Beviláqua

Editor:
Marcelo França de Oliveira

Conselho Editorial
Prof. Dr. Amurabi Oliveira - UFSC
Prof. Dr. Aristeu Elisandro Machado Lopes - UFPEL
Prof. Dr. Elio Flores - UFPA
Prof. Dr. Fábio Augusto Steyer - UEPG
Prof. Dr. Francisco das Neves Alves - FURG
Prof. Dr. Jonas Moreira Vargas - UFPEL
Prof.ª Dr.ª Maria Eunice Moreira - PUCRS
Prof. Dr. Moacyr Flores - IHGRGS
Prof. Dr. Luiz Henrique Torres - FURG

Dados internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Ab761 Abordagens Metodológicas para o Ensino de Geometria / Mauricio Ramos Lutz e José Carlos Pinto Leivas (Org.) [edição eletrônica] Santa Maria: GEPGEO, Porto Alegre: Mundo Acadêmico, 2021.

104 p.
Bibliografia
ISBN: 978-65-89475-18-7

1. Ciências Exatas e da Terra - 2. Geometria e Topologia - 3. Geometria: ensino e aprendizagem - I. Lutz, Mauricio Ramos - II. Leivas, José Carlos Pinto - III. Título.

CDU:500.516

CDD: 516



EDITORA MUNDO ACADÊMICO
um selo da Editora Casalettras
R. Gen. Lima e Silva, 881/304 - Cidade Baixa
Porto Alegre - RS - Brasil CEP 90050-103
+55 51 3013-1407 - contato@casalettras.com
www.casalettras.com/academico



PREFÁCIO

Impossível seria iniciar este texto, sem fazer menção à força que impulsionou a produção aqui materializada, que vem do Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria, carinhosamente chamado de GEPGEO!

Fundado pelo Prof. Dr. José Carlos Pinto Leivas, no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIMAT) da Universidade Franciscana (UFN), o GEPGEO colabora com a formação continuada de professores em seus diferentes propósitos, fortalecendo a sua missão, desde 2016, em torno do renovar o saber, do qualificar o fazer e do transformar cada integrante.

Evidente é, também, o vigor que a união de um grupo carrega, marcado pela presença de diferentes vivências e olhares para o ensino, vigor esse representado por estudantes de pós-graduação e graduação da UFN, e de outras instituições, por professores da educação básica e superior, por egressos que continuam a sua trajetória, por pesquisadores nacionais e internacionais que colaboram continuamente.

A pandemia, apesar de ter trazido muitos desafios para as Instituições de Ensino, e para os seus docentes, também proporcionou ganhos pedagógicos, que podem ser constatados, tanto na prática pedagógica, quanto na pesquisa: rever com flexibilidade o plano de ensino das disciplinas, reavaliar seus conteúdos, métodos, referenciais e critérios avaliativos; aprender a utilizar recursos tecnológicos para desenvolver estratégias de pesquisa, ensino e aprendizagem remota; dialogar com outros colegas de diferentes instituições do país e do mundo, que já utilizam as tecnologias como apoio em sala de aula e prática de pesquisa; socializar e ajudar outros professores compartilhando recursos que já conhece e utiliza; ter vontade e motivação de aprender e empregar recursos digitais; saber lidar com imprevistos, incertezas e instabilidades;

tentar novamente e não desistir; reinventar-se, pensar e propor ações diferenciadas; ter discernimento e a consciência de que dar aulas on-line (remotas) não é a mesma coisa que dar aulas presencialmente; abrir-se a possibilidade da utilização de novas técnicas e metodologias de pesquisa, ensino e aprendizagem.

Hoje, mais do que nunca, reclama-se por uma Universidade que de fato seja centro de pesquisa, ensino e produção do conhecimento, que preserve e difunda a cultura da autonomia e da liberdade, que desenvolva o espírito reflexivo-crítico, e que seja comprometida com a inovação pedagógica, pois somente assim será possível o desabrochar e o despertar dos estudantes para o protagonismo dos seus processos formativos. Pensamos que é por esse caminho que passa grande parte do futuro das sociedades do século XXI. Enfim, a tendência da educação, de modo geral, é que o ensino virtual e o emprego de metodologias ativas, gradativamente, substituam as aulas tradicionais e expositivas. Trata-se de um caminho sem volta, mas que vem sendo estudado e discutido por pesquisadores e profissionais da educação, no sentido de aproveitarem essas vivências e experiências formativas, visando mudanças em todos os níveis de ensino. Portanto, além do rigor técnico e científico, observado na elaboração e sistematização dos textos que compõem o presente livro, destacamos o trabalho colaborativo que perpassa os encontros, as atividades, as pesquisas e as produções desenvolvidas pelo GEPGEO.

Felizes e gratos ficamos com a iniciativa desta publicação, que dissemina a experiência dos encontros formativos, bem como revela a essência do GEPGEO, carregada de conhecimentos e de valores franciscanos, que podem ser vistos e sentidos em cada um dos capítulos apresentados por meio da partilha, da cooperação, da solidariedade, e da transformação do saber.

A partilha marca o Capítulo 1, que expõe o ensino de geometria em jogos on-line, e o cuidado que o grupo teve em adaptar os conceitos por meio de recursos lúdicos, para facilitar a compreensão dos estudantes em diferentes níveis de ensino.

A cooperação marca o Capítulo 2, que levou o grupo a organizar um curso de extensão EaD, proporcionando subsídios para o ensino de Geometria.

A solidariedade marca o Capítulo 3, que apresenta relatos e produções dos professores participantes do curso, junto às atividades propostas, com o ensino da geometria por meio de dobraduras.

A transformação marca o capítulo 4, quando, por meio da “Visualização geométrica x Van Hiele”, o professor consegue identificar, nos estudantes, diferentes níveis de aprendizado.

Desejamos que a leitura desta produção represente um novo caminho para os leitores, cheio de Geometria e possibilidades, repleto de acolhimento e receptividade, assim como é o GEPGEO na vida de todos que o conhecem. Gratidão e parabéns a todos os envolvidos!

MARCOS ALEXANDRE ALVES
Pró-reitor de Pós-graduação e Pesquisa/UFN

THAIS SCOTTI DO CANTO-DOROW
Coordenadora PPGEICIMAT/UFN



APRESENTAÇÃO

SEMENTES PELO CAMINHO: A TRAJETÓRIA QUE LEVOU À CONSTRUÇÃO DESSE E-BOOK

Há uma história antiga sobre uma senhora que viajava, diariamente, em um ônibus, e, a cada dia, jogava sementes pela estrada. Um homem, muito curioso, perguntou o porquê daquela senhora fazer aquilo todos os dias, e ela lhe respondeu que era devido ao desejo de viajar com o caminho cheio de flores.

Mesmo com as adversidades climáticas e da viagem, a senhora continuava a fazer isso diariamente, até que, um certo dia, o caminho estava florido, mas a senhora não estava mais presente no ônibus, porque havia falecido. O homem, então, perguntava-se se o esforço daquela senhora havia valido a pena, obtendo a resposta nas indagações de uma criança, muito entusiasmada, à sua mãe, sobre os tipos de flores e suas respectivas cores. Naquele momento, o homem teve certeza de que as atitudes da senhora eram louváveis e, por isso, passara a repetir o ato diariamente.

De fato, em nossa trajetória como professores, agimos como a senhora, lançando sementes por onde passamos, como o homem, que por vezes interroga os resultados de tal ação, e como a criança, aproveitando o trabalho que outros tiveram antes de chegarmos ao ponto em que nos encontramos.

Assim, em referência a história contada, introduzimos as atividades apresentadas neste livro, registrando e destacando a palavra **GEOMETRIA**. O leitor poderá perguntar-se o porquê dessa ênfase. Justificamos pela imensa alegria de que a produção da obra ocorreu totalmente no contexto de um Grupo de Estudos e Pesquisas em

Geometria – GEPGEO, ligado a um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. O primeiro autor desta apresentação é o líder do grupo e professor na Universidade Franciscana – UFN. A segunda autora faz parte do grupo desde sua criação, em 2016, quando começou a realizar um mestrado na área e, atualmente, cursa o doutorado na mesma instituição. O terceiro autor está em fase conclusiva de seu doutorado, em que analisará a produção e o envolvimento do grupo em suas atividades de criação e de pesquisa, sempre voltadas ao ensino de Geometria em todos os níveis de escolaridade.

O GEPGEO surgiu em função de muitos alunos e ex-alunos do primeiro autor manifestarem interesse em formar um grupo de estudos em Geometria. Assim, no dia 18 de março de 2016, ocorreu o seu primeiro encontro, com alguns integrantes via Skype e outros presencialmente. Naquele ano, foram trabalhadas questões relativas à Topologia, seu ensino e sua aprendizagem. Nos anos seguintes, os estudos estiveram relacionados à utilização de materiais didáticos, abordando visualização, imaginação, gestos, resolução de problemas geométricos, entre outros, para o ensino de Geometria, tanto na formação inicial quanto na continuada.

O e-book ilustra um fato inovador para o grupo, uma vez que resulta do oferecimento inédito de um curso de extensão em Geometria, o qual foi realizado na modalidade a distância, em pleno período de pandemia da COVID-19, num total de 40 horas, com 10 horas semanais em cada módulo. Cada uma dessas etapas contou com a participação de quatro componentes do grupo. Além disso, o curso teve o importante apoio do Instituto Federal Farroupilha - IFFar - Campus Alegrete.

Cada um dos módulos trouxe adaptações de atividades já existentes, porém, nem sempre, ao alcance de professores/leitores, particularmente, por termos oferecido vagas a participantes de um grupo argentino e outro colombiano. Ambos os grupos, nas avaliações do curso, manifestaram a importância desse tipo de proposta, no sentido de que proporcionam reflexões que podem melhorar o ensino e a aprendizagem de Geometria. Nessa direção, cabe pensar não somente nos elementos responsáveis pela formação continuada de professores, mas também nas estratégias para que os docentes tenham condições teóricas e práticas de entender o modo pelo qual os estudantes aprendem Geometria. É preciso considerar

que, às vezes, faltam didáticas próprias para o professor no que tange ao ensino dessa área, o que, por extensão, inibe sua aprendizagem.

A Educação Matemática, apesar de estar em construção, principalmente em se tratando de Brasil, tem contribuído de forma direta para o “chão” da sala de aula. Isso pode ser constatado pelas pesquisas, estudos, metodologias e tendências da Educação Matemática, ao que se aliam os trabalhos do GEPGEO. Nesse sentido, parcerias são fundamentais para o desenvolvimento de melhorias, o que já vem ocorrendo com o grupo em apreço e, mais intensamente, no período atual, em que se vive a pandemia da COVID-19, colocando o professor a desenvolver sua imaginação para inovar a sala de aula. Nesse cenário, a Geometria necessita de atividades criativas, com o que o nosso grupo tem se preocupado, conforme mostramos no decorrer desta obra.

O GEPGEO tem estabelecido parcerias relevantes com as escolas, ao proporcionar atividades geométricas envolvendo alunos e professores, mesmo aqueles não pertencentes ao grupo. Esse tipo de trabalho conjunto possibilita pesquisas que validam sua importância para o ensino e a aprendizagem, como pode ser observado nas publicações dos seus componentes. Com mais propriedade, as parcerias se fortalecem, inclusive, na oferta do curso que originou este e-book.

Este trabalho, portanto, origina-se de um curso oferecido gratuitamente, o qual dá nome, também, ao e-book: “Abordagens Metodológicas para o Ensino de Geometria”. A parceria GEPGEO - IFFar - UFN foi primordial para o sucesso alcançado.

O curso foi dividido em quatro módulos, que constituem os capítulos do e-book, sendo que, para cada um deles, há o objetivo específico, como segue:

(a) capítulo 1 – “Jogos on-line para o ensino de geometria” - tem o objetivo de revisar conceitos geométricos a partir de imagens mentais expressas por meio de gestos e representações gráficas. As discussões teóricas e práticas voltam-se para dois jogos on-line: o “Geometria em Ação” e o “Gartic”. Ambos são adaptações, para a Geometria, de jogos já existentes.

(b) capítulo 2 – “Resolução de problemas em Geometria” - tem por objetivo descrever a experiência realizada no curso de extensão na modalidade a distância, trazendo alguns fundamentos teóricos e

atividades que abordam a resolução de problemas geométricos e que podem proporcionar ao professor subsídios para o ensino de Geometria.

(c) capítulo 3 – “Investigação de conceitos geométricos a partir de dobraduras” - tem por objetivo apresentar o planejamento, os recursos utilizados e alguns resultados da experiência, trazendo relatos e produções dos professores participantes do curso na reflexão das atividades propostas.

(d) capítulo 4 – “Visualização geométrica x Van Hiele” - com base nos níveis de Van Hiele e na habilidade de visualização, tem por objetivo explorar e analisar formas geométricas 2D (bidimensional) e 3D (tridimensional) em representações figurais que podem auxiliar o professor a identificar em qual nível de desenvolvimento em Geometria os alunos se encontram.

Portanto, o grupo acredita que oferecer um e-book envolvendo Geometria, em quatro apresentações didáticas bem dirigidas, pode favorecer o trabalho do professor que deseja desenvolver os conteúdos geométricos em suas turmas. No capítulo 1, é enfatizado o uso das tecnologias e dos jogos on-line, os quais, geralmente, despertam o interesse dos estudantes, podendo favorecer a aprendizagem e o prazer no estudo de Geometria. No capítulo 2, é apresentada uma metodologia que também propicia o interesse e a curiosidade do estudante, a saber, a resolução de problemas envolvendo questões visuais geométricas. No capítulo 3, são explorados recursos didáticos simples e de baixo custo, o que facilita sua aquisição por parte tanto dos professores quanto dos alunos, particularmente em comunidades com menor poder aquisitivo para obter materiais explorados comercialmente. Para finalizar e completar um ciclo de possibilidades, o último capítulo pode proporcionar ao professor acompanhar o nível de desenvolvimento do raciocínio geométrico de seus alunos, proporcionando uma atenção mais individualizada em sala de aula.

Esperamos, com este e-book, proporcionar novas aventuras pelo **”mundo geométrico”**, lançando sementes pela trajetória formativa daqueles que o vivenciam.

José Carlos Pinto Leivas
Anne Desconsi Hasselmann Bettin
Gabriel de Oliveira Soares



SUMÁRIO

PREFÁCIO5

APRESENTAÇÃO.....8

Capítulo I

JOGOS *ON-LINE* NO ENSINO DE GEOMETRIA.....13

LAURA TIEMME DE CASTRO

ANDRÉ FERREIRA DE LIMA

GUSTAVO ROSAS RODRIGUES

JONATHAN DE AQUINO DA SILVA

Capítulo II

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS33

CARMEN VIEIRA MATHIAS

ALEXANDRE JARDEL SCHWEIG HACKENHAAR

ANA PAULA STEFANELLO

GUSTAVO STREPPPEL DE OLIVEIRA

Capítulo III

INVESTIGAÇÃO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS A PARTIR
DE DOBRADURAS60

GABRIEL DE OLIVEIRA SOARES

DÉBORA DA SILVA DE LARA

DIONATAN DE OLIVEIRA NADALON

JUSSARA APARECIDA DA FONSECA

Capítulo IV

VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA X VAN HIELE80

JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS

ANNE DESCONSI HASSELMANN BETTIN

ERILÚCIA SOUZA DA SILVA

MAURICIO RAMOS LUTZ

SOBRE OS AUTORES98

Capítulo I

JOGOS *ON-LINE* NO ENSINO DE GEOMETRIA

LAURA TIEMME DE CASTRO
ANDRÉ FERREIRA DE LIMA
GUSTAVO ROSAS RODRIGUES
JONATHAN DE AQUINO DA SILVA

INTRODUÇÃO

Existem diferentes tipos de materiais didáticos a serem utilizados pelos professores em suas aulas, porém, não é sempre que conseguimos utilizá-los com a finalidade de facilitar a aprendizagem do conteúdo por parte do aluno. Um exemplo de recurso didático são os jogos (físicos ou digitais) que algumas vezes são utilizados em um momento de descontração com os alunos.

Nesse sentido, Grando (2003) apresenta alguns passos para que a utilização de jogos em sala de aula cumpra com objetivo pedagógico. Um dos momentos necessários é o “Jogo pelo Jogo” (GRANDO, 2003, p. 8), onde os alunos irão jogar para compreender as regras, sem intervenções do professor no processo. Porém, muitas vezes, acabamos não saindo desse momento. A esse respeito, a autora ressalta que “[...] a aprendizagem não está no jogo, mas nas intervenções realizadas” (p. 7).

A utilização de recursos didáticos nas aulas de matemática necessita ser intencionalmente planejada pelo professor e esse conhecedor dos limites e possibilidades de ação pedagógica de cada um desses recursos. [...] Há que se considerar se o recurso vem a facilitar, a oferecer uma ajuda manipulativa aos alunos, em vez de gerar um problema conceitual ou epistemológico (GRANDO, 2019, p. 415).

Por isso, quando utilizamos os jogos em sala de aula, devemos sempre realizar mediações para criar discussões matemáticas entre os alunos e incentivar o registro de estratégias e de dúvidas que surjam durante as jogadas.

Durante a pandemia causada pelo novo coronavírus (SARS-CoV-2), percebemos relatos de professores afirmando que a motivação de estudos para os estudantes ficou muito debilitada, visto que, com as aulas remotas, o contato físico e visual não acontecem. Uma ideia de motivação para as aulas, desenvolvimento de competências, bem como de aprendizagem, pode ser obtida por meio de jogos. Isso pode ocorrer de maneira *on-line*, onde os alunos continuarão estudando partes do conteúdo de forma lúdica e com diversão.

[...] quando bem planejados, os jogos podem atingir competências emocionais, pessoais e intelectuais. É sair do simples para um caminho mais complexo, de novos meios e novas descobertas, que podem aparentar riscos, mas que podem trazer ao aluno, senso crítico e desenvolvimento de aprendizagem mais significativa (CRUZ; LOPO, 2021, p. 28).

Destacamos que jogos, mesmo que, inicialmente, sem um objetivo pedagógico, podem ser adaptados para o conteúdo que se deseja trabalhar em sala de aula. Realizar a adaptação de jogos conhecidos pelos alunos pode causar uma participação mais efetiva destes durante a ação. Com isso e com uma mediação do professor, o jogo, que antes era somente recreativo, passa a se tornar, também, um interessante recurso didático.

O Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria (GEPGEO) realizou a adaptação para a geometria de dois jogos: o Imagem em Ação¹ e o *Gartic*². O primeiro se trata de um jogo de tabuleiro e o segundo um jogo *on-line*. Esses recursos didáticos foram apresentados no primeiro módulo do curso “Abordagens metodológicas para o ensino de Geometria”.

Neste capítulo, descrevemos como foi realizada a organização desse módulo, os materiais utilizados e o funcionamento de cada jogo.

1 Jogo de tabuleiro de mímica e de adivinhação da Grow. A cada rodada, as equipes devem adivinhar o que a mímica de um de seus integrantes quer expressar, para avançar as casas no tabuleiro. Ganha quem chegar ao final primeiro (MUNIZ et al., 2016).

2 Disponível em: <https://gartic.com.br/>.

Além disso, apresentamos a discussão das respostas de um questionário para verificar se os cursistas já haviam feito alguma aplicação de jogos em suas aulas e como eles utilizariam um dos jogos apresentados no módulo em suas práticas pedagógicas, além das interações realizadas com os participantes.

DESENVOLVIMENTO

Neste momento, apresentamos a organização do módulo, no qual constam os materiais obrigatórios e complementares escolhidos e produzidos, assim como os jogos trabalhados e o planejamento da *live* e das atividades avaliativas.

ORGANIZAÇÃO DO MÓDULO

O primeiro módulo do curso de extensão a distância “Abordagens metodológicas para o ensino de Geometria” teve como título “Jogos *on-line* no ensino de Geometria” e ocorreu entre os dias 31 de maio e 06 de junho de 2021, sendo organizado pelos quatro autores deste capítulo, com dois jogos adaptados. Os materiais foram disponibilizados na plataforma *Moodle* do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha - Campus Alegrete e estavam separados em: a) materiais obrigatórios, b) atividades e c) “saiba mais”.

Nosso objetivo foi revisar conceitos geométricos a partir de imagens mentais expressas por meio de gestos e representações gráficas, utilizando jogos *on-line* a fim de promover a interação dos alunos durante as aulas remotas.

MATERIAIS OBRIGATÓRIOS

Nesta seção, o aluno tinha à sua disposição vídeos sobre o funcionamento do jogo e sua organização, além do artigo de Grandó (2019). Escolhemos esse artigo porque a autora traz os momentos de aplicação do jogo, além de mostrar que ele pode ser utilizado como um material pedagógico.

Também disponibilizamos dois vídeos com as explicações de funcionamento de cada jogo. Os vídeos foram gravados pelas plataformas *Google Meet*³ e *Discord*⁴, com apoio do aplicativo *OBS Studio*⁵. Em seguida, foram editados por um dos autores deste capítulo.

GEOMETRIA EM AÇÃO - ON-LINE

Este jogo foi idealizado pelos integrantes do GEPGEO, durante as reuniões do grupo no ano de 2019, e inspirado no “Imagem em ação”, para ser desenvolvido de maneira presencial. Devido à pandemia no ano de 2020, o adaptamos para aplicações *on-line*.

O jogo é formado por um sorteador *on-line* contendo 102 conceitos da Geometria Plana, da Espacial e da Analítica, além de suas definições e representações gráficas. O professor também terá de criar duas salas no programa que utiliza para a chamada de vídeo com os alunos: uma sala principal, onde devem ser realizados os gestos; e uma sala secundária, na qual ocorrerá o sorteio.

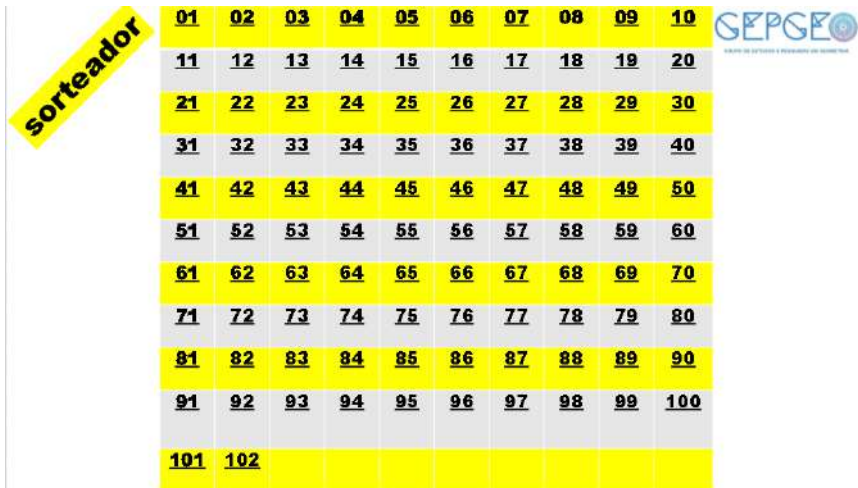
Para jogar, os alunos devem ser divididos em dois grupos e, a cada rodada, um participante de cada grupo deve gesticular o conceito geométrico sorteado, para que os membros da sua equipe o adivinhem. O início se dá quando o participante que irá realizar os gestos escolhe um número entre os possíveis no sorteador, como ilustra a Figura 1.

3 Aplicativo gratuito para videochamadas. Disponível em: <https://meet.google.com/>.

4 Aplicativo gratuito para chat, videochamadas e chamadas de áudio. Disponível em: <https://discord.com/>.

5 Aplicativo gratuito para *streaming* e gravação. Disponível em: <https://obsproject.com/pt-br/download>.

Figura 1: Sorteador



01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102								

Fonte: dados da pesquisa.

Após escolhido o número, aparecerá a palavra correspondente e será questionado ao participante se deseja ver o significado no glossário ou não, como ilustra a Figura 2. Caso o aluno não deseje consultar o glossário, basta clicar na seta à esquerda que retornará para o sorteador.


Figura 2: Carta sorteada



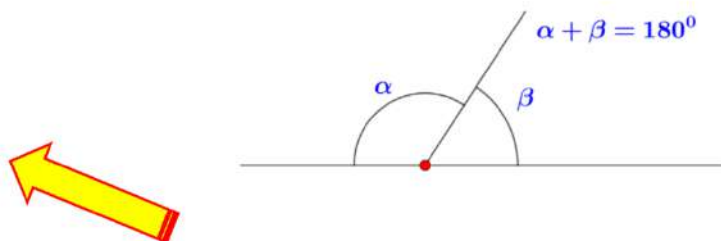
Fonte: dados da pesquisa.

Caso deseje consultar o glossário, o professor deve clicar no botão “sim”, de modo a obter a visualização do significado junto a uma ilustração (Figura 3). Após esse momento, os participantes devem retornar para a sala principal e começar os gestos e tentativas.

Figura 3: Glossário



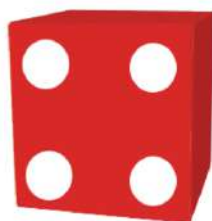
6) Ângulos suplementares: são aqueles ângulos cuja soma das medidas é igual a 180° .



Fonte: dados da pesquisa.

Após um dos grupos acertar, exatamente, a palavra escolhida, um dado *on-line* é utilizado para que os participantes possam ver quantas casas o grupo avançará no tabuleiro do jogo. A imagem do dado está ilustrada na Figura 4.

Figura 4: Dado *on-line*

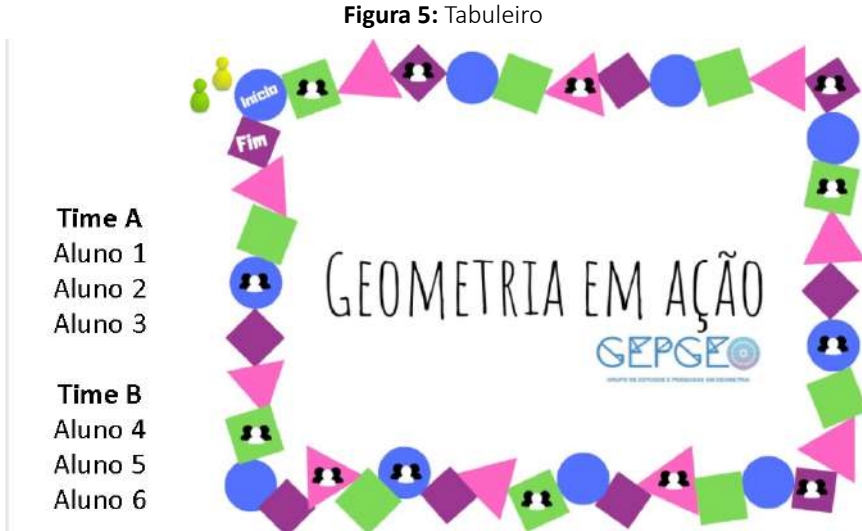


Lançar

Resultado : 4

Fonte: <https://www.dados-on-line.pt/> (Acesso em: 22 jul. 2021).

Finalmente, no tabuleiro *on-line* (Figura 5), o grupo avançará tantas casas quantas forem mostradas pelo dado. O processo se repetirá até que o grupo complete uma volta no tabuleiro ou até exceder o tempo de aula.



Fonte: dados da pesquisa.

A explicação sobre como jogar e sobre cada elemento do Geometria em Ação - *on-line* está disponível em vídeo⁶ e em Castro *et. al.* (2021).

GARTIC

O jogo *Gartic* dispõe de salas com diversos temas, que podem ser definidos pelo próprio site ou por qualquer pessoa. Nessas salas, há palavras relacionadas a tais assuntos, para que um jogador as desenhe enquanto os outros buscam adivinhar o que está sendo representado. De certa forma, podemos dizer que é uma adaptação do jogo “Imagem & Ação” para um modelo em que trocamos mímicas/gestos por desenhos.

Em um primeiro momento, o professor deve criar a sala com, no mínimo, 50 conceitos geométricos, para que o jogo possa ter várias

⁶ Disponível em: <https://youtu.be/uOoxjUAi1zo>.

possibilidades divididas entre fáceis, médias e difíceis, como ilustra a Figura 6.

Figura 6: Criação de palavras



Fonte: dados da pesquisa.

Quando o participante for desenhar, é possível realizar a escolha entre duas das palavras selecionadas no banco de dados criado pelo professor, conforme a Figura 7.

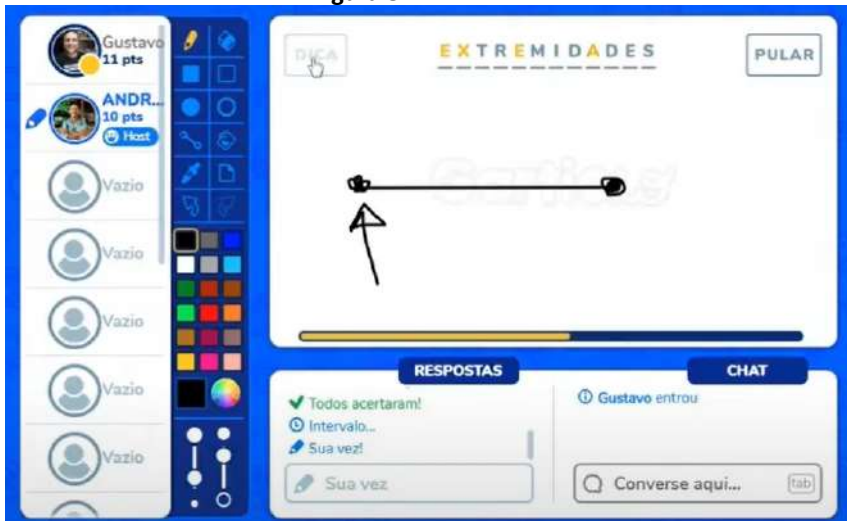
Figura 7: Escolhendo a palavra



Fonte: dados da pesquisa.

Ao desenhar, o participante encontrará várias ferramentas e cores disponíveis, inclusive com a possibilidade de fornecer dicas para os jogadores que estiverem tentando adivinhar o desenho (Figura 8).

Figura 8: Desenhando



Fonte: dados da pesquisa.

A partir dos conceitos trabalhados no jogo Geometria em Ação, criamos uma sala no jogo *Gartic*, a qual continha 50 palavras da Geometria Euclidiana para o nível do Ensino Fundamental. Esses termos deveriam ser desenhados e adivinhados pelos jogadores. Vale ressaltar que o banco de palavras utilizadas era o mesmo do jogo anterior (Geometria em Ação). A explicação sobre como jogar e sobre as ferramentas do *Gartic* está disponível em vídeo⁷.

LIVE E ATIVIDADE AVALIATIVA

Para uma melhor fluência e entendimento das atividades, propusemos uma *live* na plataforma *Google Meet*, em que mostramos o funcionamento dos dois jogos com os próprios participantes do minicurso. No primeiro momento, exploramos o jogo *Gartic*, de modo a apresentar as regras e a demonstrar, ao vivo, como criar uma sala a partir da seleção de palavras envolvendo conteúdos matemáticos da escolha do professor. Além disso, jogamos algumas rodadas, para que todos os integrantes pudessem experimentar as duas possibilidades do jogo.

No segundo momento, foi apresentado o jogo Geometria em Ação, com informações disponíveis em vídeos constantes do módulo, as quais foram retomadas pelos ministrantes do curso. Salientamos a necessidade da criação de duas salas, sendo uma delas para o sorteio das palavras e a outra para a realização dos gestos a serem realizados pelos participantes. Nesse momento, os participantes puderam, também, praticar o jogo.

Ao final da *live*, conversamos, com os participantes do curso, sobre os jogos utilizados, oportunizando trocas de experiências entre todos, inclusive sobre possíveis aplicações de outros jogos que, não necessariamente, envolvessem a Geometria.

Com relação à avaliação do módulo, elaboramos um questionário com respostas abertas envolvendo as impressões dos participantes sobre os dois jogos apresentados. Por meio desse instrumento, reunimos suas experiências com a aplicação de jogos em sala de aula, assim como um breve relato sobre a possível aplicação de um dos jogos em suas práticas pedagógicas.

7 Disponível em: https://youtu.be/xE_XYhf6dgo.

MATERIAIS COMPLEMENTARES

Para que os participantes do curso compreendessem, com mais clareza, o funcionamento do jogo, disponibilizamos um vídeo⁸ com a visão que o aluno terá ao jogar o Geometria em Ação – *on-line*. Assim, os professores teriam condições de perceber quais as possíveis dificuldades que enfrentariam durante a sua aplicação.

Também, oferecemos um vídeo⁹ no qual mostramos como montar uma sala no *Gartic*, incluindo desde a sua criação até a inserção das palavras desejadas pelo professor, levando em consideração o nível de dificuldade destas.

Foram gravados dois podcasts¹⁰, a fim de relatar experiências prévias de outras aplicações desses dois jogos, realizadas tanto de forma presencial quanto *on-line*. Foram indicados artigos publicados que abordam a temática. Em Soares, Castro e Leivas (2020), consta pesquisa realizada sobre o *Gartic* para o desenvolvimento de habilidades visuais em Geometria. O segundo artigo apresentado aborda o jogo “Geometria em Ação” com resultados de aplicação na Licenciatura em Matemática (SOARES et al., 2021). Finalmente, disponibilizamos o artigo de Cruz e Lopo (2021), pois trata exclusivamente de jogos digitais, que foi a principal finalidade de adaptação e de criação dos jogos por parte do GEPGEO.

RELATO DAS ATIVIDADES

No dia 01 de junho, aconteceu uma *live* na qual aplicamos os jogos Geometria em Ação e *Gartic* com os participantes, no intuito de esclarecer possíveis dúvidas sobre eles e de mostrar o passo a passo real da criação e da produção do material didático organizado pelo GEPGEO. Houve grande participação e interesse dos cursistas nesse momento. Comentamos com eles sobre o fato de que estarem vivenciando o jogo poderia valer como experiência para aplicações futuras, visto que foram

8 Disponível em: <https://youtu.be/q6yOC2gUxEk>.

9 Disponível em: <https://youtu.be/T346uQZK9Ek>.

10 Geometria em Ação: <https://youtu.be/rd1YIYDEj24>; *Gartic*: <https://youtu.be/mBQawwTmSdg>.

os “alunos” daquele encontro. Ao final, compartilhamos experiências sobre outras atividades e jogos que cada um já tinha feito ou participado.

Na conclusão do módulo, o participante deveria responder a três questões com relação à temática jogos e suas possíveis aplicações. A seguir, apresentamos as perguntas feitas e algumas das respostas recebidas.

Pergunta 1: Rapidamente, em no mínimo dois parágrafos, comente suas impressões sobre os dois jogos apresentados durante o módulo.

Quadro 1: Comentários feitos pelos participantes sobre o jogo Geometria em Ação

Comentários sobre o Geometria em Ação
O primeiro jogo apresentado faz com que o aluno que realiza a mímica, de fato, conheça o conceito que está desafiado a passar para o grupo, pois, caso o desconheça, não terá como o grupo descobrir corretamente o que foi proposto, o que leva o professor orientador da “brincadeira” a conseguir orientar seus próximos encontros, retomar conceitos ou ir em frente.
Em um outro momento, pude participar de uma oficina onde jogamos o jogo Geometria em Ação. Era no início da pandemia e eu estava me adaptando às atividades remotas. Durante o jogo, pude perceber o envolvimento dos alunos. O jogo trouxe a ideia de disputa, fez com que todos se envolvessem. Percebi, também, durante essa experiência, que os conceitos matemáticos envolvidos eram entendidos e identificados durante as partidas.
Já o Geometria em Ação dificulta a interação entre os alunos e não estimula a participação.
Sobre o jogo Geometria em Ação, o propósito é interessante e vai dar uma movimentada na sala, em uma aplicação presencial. Na aplicação remota, não sei se funcionaria, já que os alunos precisam abrir as suas câmeras e isso nem sempre é possível, pois alguns não abrem. O professor teria que tentar convencê-los, mas não poderia obrigá-los.
Sobre o jogo “Geometria em Ação”, minha impressão é que é um jogo muito interativo, bastante intrigante, mas que no “ <i>on-line</i> ” é muito lento. Para se jogar apenas com o celular, é muito complicado, mesmo porque a realidade do aluno condiz com um equipamento que não suporta duas salas e/ou a internet possui velocidade baixa. Porém, é um jogo que usarei no ensino presencial, uma vez que é muito instrutivo.

Fonte: dados da pesquisa.

Percebemos, a partir das respostas apresentadas no Quadro 1, que a ideia do jogo Geometria em Ação foi bem aceita pelos professores, visto que gera uma competição saudável, desafia o aluno e traz conhecimento. Porém, foram ressaltadas dificuldades para aplicações *on-line*, pelo fato de necessitar do uso de *webcams*, as quais, geralmente, não são utilizadas pelos alunos durante as aulas remotas. Também, foi argumentado que precisaria de uma internet estável para suportar duas salas de aula *on-line* abertas, bem como que, pela dinâmica necessária para a aplicação, a atividade poderia tornar-se lenta e cansativa, podendo desmotivar o aluno.

A partir da visão dos participantes, percebemos que, para a aplicação *on-line*, deve ser levada em consideração a viabilidade, de acordo com a realidade de cada turma. Porém, o jogo Geometria em Ação chamou a atenção pelo fato de utilizar os gestos como meio de comunicação e de possibilitar sua utilização em vários níveis de ensino, mostrando-se uma boa alternativa para a revisão de conteúdos ou, até mesmo, para a avaliação do ensino presencial.

Quadro 2: Comentários feitos pelos participantes sobre o jogo *Gartic*

Comentários sobre o Gartic
O jogo " <i>Gartic</i> " é fácil, leve e muito ágil. Pode ser adaptado a qualquer conteúdo disciplinar. Nunca havia imaginado esse uso e estou adorando. Já estou adaptando uma sala para jogar com meus alunos.
[...] nunca vi como um recurso possível de ser utilizado para o ensino de matemática. Contudo, após a leitura dos textos e a discussão ao longo da <i>live</i> , a ideia que eu tinha sobre a plataforma – um jogo de passatempo e de rir com os colegas/alunos –, foi ressignificada, tornando-a mais uma aliada no processo de ensino e de aprendizagem.
Muy divertido, pero al dibujar y no tener todos los elementos que faciliten el dibujo, termina siendo un poco fastidioso y puede que dejen el juego rápidamente.
O segundo, <i>Gartic</i> , por necessitar de conexão, achei mais complicado, pois boa parte da conexão das escolas públicas no Brasil pode não ser tão boa. Mas gostei da ideia e também acredito que é possível fazer no físico. Ao retirar uma carta, enquanto um estudante tenta desenhar, os outros vão tentando acertar.

Fonte: dados da pesquisa.

No Quadro 2, podemos notar que o jogo *Gartic* foi melhor aceito pelos participantes, visto que já era de conhecimento dos alunos e, até mesmo, de alguns professores, como um instrumento para diversão ou passatempo. A ideia de utilizá-lo para fins didáticos agradou. Mesmo necessitando de boa internet e se mostrando, em alguns casos, pouco favorável à aplicação, fazer a adaptação do *Gartic* para o papel pode ser a solução para as aulas presenciais.

Quadro 3: Comentários gerais feitos pelos participantes

Comentários gerais
O que é muito interessante é a possibilidade da aplicação remota e da adaptação a diferentes níveis de ensino e diferentes níveis de compreensão geométrica.
É importante registrar que os jogos são de fácil interação, o que considero um elemento importante para o uso tanto por parte dos professores quanto dos alunos, já que, às vezes, outras atividades com jogos tecnológicos possuem interfaces não muito amistosas e, com isso, afastam seu uso da sala de aula.
Ambos os jogos foram interessantes. Acredito que os alunos vão gostar, pois eles acham as aulas de matemática chatas e, com os jogos, além da aula ser divertida, eles ainda aprendem o conteúdo.
[...] o uso de jogos pode ser uma boa ferramenta para que eles se motivem a estudar neste período complexo que estamos enfrentando.
Genera un ambiente colaborativo de discusión y apoyo entre los alumnos, que hay que gestionar y regular como profesores.

Fonte: dados da pesquisa.

As respostas expostas no Quadro 3 nos mostram a necessidade de adaptações para as aulas durante o ensino remoto, visando uma maior participação dos alunos. Os jogos apresentados podem auxiliar nesse ponto. Notamos, também, que ambos os jogos foram bem vistos pelos participantes, principalmente pelo fato de serem adaptáveis conforme o ano escolar e/ou o conteúdo que está sendo trabalhado. Outro aspecto abordado é a competição saudável e a possibilidade de gerar uma maior interação entre os alunos.

Gostaríamos de destacar uma resposta em especial: “Por abordar os conceitos de forma leve e divertida, me motivam a criar um curso

de geometria extraclasse, pois acredito que os alunos terão gosto em participar e estaremos complementando o trabalho de sala de aula”. Isso vai ao encontro do objetivo geral do nosso curso e, particularmente, do nosso módulo, que é levar aos professores diferentes abordagens de ensino para aplicações nas escolas.

Pergunta 2: Relate suas experiências com aplicações de jogos na sala de aula (de maneira presencial ou remota)

Com as respostas a essa pergunta, notamos que os jogos foram utilizados, em sua maioria, por parte dos professores durante as aulas presenciais, para momentos de revisão e fixação dos conteúdos. Os participantes citaram experiências com gincanas e jogos, sendo eles: *Contig 60*, Jogos de tabuleiro, *Quiz*, *Kahoot*, jogos do *Wordwall*, *Yellowout*, *Quizizz*, Disco de Frações e *Stop de Frações*, Buraco Algébrico, “Quem sou eu?” (de Quadriláteros), Bingo de Equações do 2º grau (mas foi uma experiência ruim, pois os alunos acharam extenso e cansativo). Alguns professores também citaram que se sentiram inseguros para aplicarem jogos de forma remota, ou que ainda não tiveram a experiência de aplicação de maneira presencial, devido ao medo de que as brincadeiras e a bagunça saíssem do controle e os jogos perdessem a real finalidade.

Ressaltamos, aqui, a resposta de um professor que relata que: “Sempre apliquei mais jogos didáticos nas turmas de Ensino Fundamental (séries iniciais e finais). Para o Ensino Médio, costumo utilizar simuladores e *softwares* dinâmicos que proporcionem maior reflexão sobre o conteúdo estudado”. Isso mostra como os jogos são deixados de lado conforme o nível de escolaridade da turma. Acreditamos que os jogos podem ser aplicados em qualquer nível, com intenção didática ou, até mesmo, em um momento de descontração da turma.

Com o ensino remoto, a motivação dos alunos para o aprendizado e para as atividades do dia a dia acaba diminuindo. Percebemos a importância de aulas interativas para que os alunos adquiram mais vontade pelo que se estuda e participem das práticas pedagógicas. Assim, incentivamos que abordagens e metodologias desenvolvidas durante esse período sejam adaptadas para o ensino presencial, como relatado na resposta: “Acredito que seja algo que nunca mais eu vá deixar de usar, mesmo com o retorno do ensino presencial”.

Pergunta 3: Baseado no artigo e vídeos disponibilizados nesse módulo, escolha um dos jogos e comente como você organizaria uma aplicação do mesmo.

Na aplicação do jogo Geometria em Ação, os professores citam que é uma boa metodologia para revisão, bem como que esta pode ser aplicada de inúmeras maneiras, tanto na modalidade *on-line* quanto no modelo presencial. A Figura 9 ilustra uma resposta.

Figura 9: Resposta do participante A17

Luana Leal Alves
Jogos Online - Questionário
Questão 3
domingo, 13 jun 2021, 20:55

Baseado no artigo e vídeos disponibilizados nesse módulo, escolha um dos jogos e comente como você organizaria uma aplicação do mesmo.

Se eu trabalhasse com aulas síncronas, organizaria a aplicação do jogo "Geometria em Ação" do seguinte modo:

- Primeiro trabalharia com conceitos de Geometria;
- Após, em uma das aulas síncronas aplicaria o jogo;
- Faria uma explanação do jogo, como objetivos e regras;
- Organizava uma votação para escolher o "mestre" do jogo, que seria o responsável pelo tabuleiro;
- Começaríamos a jogar;
- Ao finalizar as rodadas, teríamos um momento para que os estudantes pudessem comentar sobre o momento;
- A avaliação, dos alunos, se dá através da participação e interação dos mesmo.

Fonte: dados da pesquisa.

Uma analogia aos pré e pós-testes pode ser entendida na seguinte resposta (Figura 10).

Figura 10: Resposta do participante A21

Wesley de Jesus Costa
Jogos Online - Questionário
Questão 3
domingo, 13 jun 2021, 20:59

Baseado no artigo e vídeos disponibilizados nesse módulo, escolha um dos jogos e comente como você organizaria uma aplicação do mesmo.

Escolhendo o jogo Geometria em Ação para aplicação de forma presencial, não descartando a possibilidade de aplicar remotamente, pensei a aplicação em turmas de ensino médio em dois momentos:

1º momento: visto que os alunos já desenvolveram no ensino fundamental, conhecimentos básicos sobre Geometria, usarei o jogo antes de iniciar o conteúdo no ensino médio, assim poderei ter uma análise do que os alunos lembram/já dominam, funcionando como um diagnóstico.

2º momento: será na parte final do conteúdo de Geometria, usarei o jogo como revisão, para fixar com os alunos os conceitos trabalhados.

Justificando minha escolha para aplicação com o ensino médio: visto ter uma experiência menor com os alunos do ensino fundamental, pensei no nível de ensino que tenho mais experiência com os alunos e com a grade curricular. No entanto não descarto a aplicação com o nível fundamental, visto que em tal nível os alunos estão desenvolvendo o conhecimento básico matemática creio que será enriquecedor usar tal jogo com eles além de divertido, é claro!

Fonte: dados da pesquisa.

Percebemos que os participantes pensaram conforme suas realidades, propondo adaptações para a aplicação em suas turmas (Figura 11).

Figura 11: Resposta do participante A9

Wesley de Jesus Costa
Jogos Online - Questionário
Questão 3
domingo, 13 Jun 2021, 20:59

Baseado no artigo e vídeos disponibilizados nesse módulo, escolha um dos jogos e comente como você organizaria uma aplicação do mesmo.

Escolhendo o jogo Geometria em Ação para aplicação de forma presencial, não descartando a possibilidade de aplicar remotamente, pensei a aplicação em turmas de ensino médio em dois momentos:

1º momento: visto que os alunos já desenvolveram no ensino fundamental, conhecimentos básicos sobre Geometria, usarei o jogo antes de iniciar o conteúdo no ensino médio, assim poderei ter uma análise do que os alunos lembram/já dominam, funcionando como um diagnóstico.

2º momento: será na parte final do conteúdo de Geometria, usarei o jogo como revisão, para fixar com os alunos os conceitos trabalhados.

Justificando minha escolha para aplicação com o ensino médio: visto ter uma experiência menor com os alunos do ensino fundamental, pensei no nível de ensino que tenho mais experiência com os alunos e com a grade curricular. No entanto não descarto a aplicação com o nível fundamental, visto que em tal nível os alunos estão desenvolvendo o conhecimento básico matemática creio que será enriquecedor usar tal jogo com eles além de divertido, é claro!

Fonte: dados da pesquisa.

Porém, a maioria dos respondentes relatou aplicações com o jogo *Gartic*. Isso pode ter acontecido pelo fato de ele ser um jogo já disponível na internet e de não haver a necessidade da utilização de câmeras, o que pode facilitar a participação dos alunos.

Sobre uma possível aplicação do jogo *Gartic*, os professores destacam a necessidade de realização de um momento pós-jogo, no qual deve ocorrer a recapitulação dos conceitos trabalhados, reforçando suas características. Também, houve propostas de outros conteúdos a serem trabalhados com o jogo, por exemplo, quadriláteros notáveis e funções.

Grande parte dos participantes descreveram aplicações para a revisão de conteúdos trabalhados. Porém, um deles relatou que utilizaria como introdução ao estudo de Geometria Plana, para realizar um levantamento dos conhecimentos prévios e, após o estudo desse conteúdo, aplicar o mesmo jogo na avaliação da aprendizagem.

Por fim, houve uma ideia de adaptação do jogo por parte de um participante: “Organizaria a turma em trios onde, em cada rodada, apenas um integrante de cada trio ficaria responsável por desenhar ou tentar interpretar o desenho. Dessa forma, os outros dois colegas poderiam, paralelamente, pesquisar informações para tentar auxiliar o colega e, assim, estariam estudando e conhecendo sites que abordam os conteúdos, envolvendo toda a turma”.

A motivação de uma das participantes para a utilização do jogo *Gartic* nos chamou atenção: “Na minha visão, seria interessante utilizar esse jogo para que os alunos possam ter memórias das formas geométricas, pois os ajudaria na visão futura de gráficos e na melhor interpretação de funções, de acordo com o ensino de matemática nos diferentes níveis escolares”.

Isso nos mostra que os professores realmente entenderam que os jogos estão além de um momento de descontração da turma, pois, se bem conduzidos, podem se tornar uma ferramenta importante para a aprendizagem dos alunos, o que os auxiliará em conteúdos futuros.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso objetivo com o Módulo 1 do curso “Abordagens metodológicas para o ensino de Geometria” foi mostrar aos professores e futuros professores que participaram desse projeto dois jogos desenvolvidos pelo GEPGEO, sendo eles: Geometria em Ação e *Gartic*. O primeiro foi desenvolvido para o ensino presencial e adaptado para o ensino remoto, enquanto o segundo foi pensado somente para o ensino remoto. No decorrer da oficina, realizada de forma síncrona, pudemos notar um grande envolvimento dos participantes, o que ficou evidente quando os professores envolvidos começaram a fazer perguntas sobre a preparação dos jogos, levantando hipóteses sobre possíveis alterações destes, ou seja, como fazer adaptações para que as atividades fizessem sentido em seus respectivos contextos escolares.

Durante as partilhas com os participantes e a partir das análises das respostas do questionário, percebemos que o jogo que mais interessou a eles, para aplicação *on-line*, foi o *Gartic*, dado o fato de sua organização ser mais simples do que a do Geometria em Ação. Também notamos que alguns professores conheciam o jogo *Gartic*, mas não haviam pensado na possibilidade de utilizá-lo com objetivo educacional.

Chamou-nos a atenção como os participantes propuseram adaptações de ambos os jogos para a sua realidade. Foi destacada a possibilidade de adequação para o trabalho de outros tópicos da Matemática (e, até mesmo, de outros componentes curriculares). Além

disso, foram indicadas adaptações para a aplicação dos jogos de maneira presencial.

Isso nos mostra como o módulo levou os participantes a repensarem suas práticas a partir dos jogos propostos. Portanto, em nossa avaliação, o trabalho realizado atingiu o objetivo que havia sido traçado, além de vislumbrar outros horizontes, uma vez que acabou se tornando um espaço de aprendizagem colaborativa.

Para edições futuras do curso, pretendemos trazer novos jogos, tanto para aplicações *on-line* quanto para presenciais, visto que, no momento, as aulas presenciais, nas escolas, começam a retornar gradativamente. Finalmente, sentimos a necessidade de levar essas propostas para professores que atuam nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Logo, os conceitos que constam nos jogos precisarão ser adaptados para esse nível de ensino.

REFERÊNCIAS

CASTRO, L. T de; RODRIGUES, G. R.; MATHIAS, C. V.; HACKENHAAR, A. J. S.; LEIVAS, J. C. P. Geometria em Ação: uma possibilidade de aplicação on-line. In: V Mostra Gaúcha de Produtos Educacionais, 5., 2021. **Anais da V Mostra Gaúcha de Produtos Educacionais**. Santa Maria: UFN, 2021. Disponível em: https://www.upf.br/_uploads/Conteudo/Mostra%20Ga%C3%BAcha%20-%20anais%202021/14361.pdf. Acesso em: 01 ago. 2021.

CRUZ, L. A. M.; LOPO, A.B. 2 jogos digitais no ensino de geometria: desenvolvimento de um quiz. **Scientia**, Salvador, v. 6, n. 2, p. 22-40, maio/ago. 2021. Disponível em: <https://www.revistas.uneb.br/index.php/scientia/article/view/10124>. Acesso em: 01 ago. 2021.

GRANDO, R. C. A possibilidade de Antecipação de Noções e Conceitos Matemáticos via Jogos de Regras. In: **XI Conferência Interamericana de Educacion Matemática**, 2003, Blumenau. 11th Inter-American Conference on Mathematics Education. Blumenau: FURB - Universidade Regional de Blumenau, 2003.

GRANDO, R. C. Recursos didáticos na Educação Matemática: jogos e materiais manipulativos. **Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, v. 05, p. 393-416, 2019. DOI: <https://doi.org/10.36524/dect.v5i02.117>. Disponível em: <https://ojs.ifes.edu.br/index.php/dect/article/view/117>. Acesso em: 01 ago. 2021.

MUNIZ, L. M.; ALBUQUERQUE, N. L. B.; SANTOS, S. I. F. Jogos de empresas como uma ferramenta lúdica no desenvolvimento de habilidades empresariais: um estudo de caso na engenharia de produção da UFAL. In: SIMPÓSIO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO DE SERGIPE, 8., 2016. **Anais do VIII SIMPROD**. São Cristovão: UFS, 2016, p. 369-382. Disponível em: <https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/7671/2/JogosEmpresasFerramenta.pdf>. Acesso em: 22 jul. 2021.

SOARES, G. de O.; CASTRO, L. T. de; LEIVAS, J. C. P. “É a sua vez de desenhar!” o jogo *Gartic* no desenvolvimento das habilidades visuais em geometria. In: I Simpósio Sul-Americano de Pesquisa em Ensino de Ciências, 1., 2020. **Anais do I Simpósio Sul-Americano de Pesquisa em Ensino de Ciências**. Cerro Largo: UFFS, 2020. Disponível em: <https://portaleventos.uffs.edu.br/index.php/SSAPEC/article/view/14477> . Acesso em: 22 jul. 2021.

SOARES, G. de O.; CASTRO, L. T. de; STEFANELLO, A. P.; LEIVAS, J. C. P. O jogo “Geometria em Ação” na licenciatura em matemática: (re)visitando conceitos geométricos através de gestos. **Revista De Educação Da Universidade Federal Do Vale Do São Francisco**. v. 11, n. 24, p. 248–275, 2021. Disponível em: <https://www.periodicos.univasf.edu.br/index.php/revasf/article/view/1407> . Acesso em: 22 jul. 2021.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Além disso, agradecemos à Universidade Franciscana e ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha –Campus Alegrete pelo apoio prestado para o desenvolvimento do curso.

Capítulo II

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

CARMEN VIEIRA MATHIAS

ALEXANDRE JARDEL SCHWEIG HACKENHAAR

ANA PAULA STEFANELLO

GUSTAVO STREPPPEL DE OLIVEIRA

INTRODUÇÃO

A geometria é uma área da matemática cujo potencial para o ensino é vasto, pois está repleta de problemas interessantes e teoremas surpreendentes. Dessa forma, pode ser desenvolvida a partir de diversas abordagens e/ou metodologias de ensino. É parte integrante de nossa experiência cultural, sendo um elemento presente em vários aspectos do cotidiano, como citam Verona e Lopes (2016, p. 2):

Atualmente, inúmeras profissões utilizam conceitos geométricos, entre elas pode-se citar: a engenharia, a arquitetura, a astronomia, as pesquisas nas ciências exatas, as atividades de uma costureira, de um mestre de obras, de um coreógrafo, de um artista plástico, de um atleta ou técnico. Sendo assim, a importância da Geometria é inquestionável, tanto sob o ponto de vista prático quanto do aspecto instrumental na organização do pensamento.

Essa área da matemática permite que possamos imaginar e recorrer aos nossos sentidos visuais e intuitivos (LEIVAS, 2009). Como resultado, a geometria pode cativar o interesse dos alunos, principalmente daqueles que tendem a encontrar, em outras áreas da matemática, como aritmética e álgebra, a origem do fracasso e das incertezas, ao invés de entusiasmo

e de criatividade. Assim, ao trabalhar tópicos de geometria em sala de aula, os professores poderão permitir que mais alunos tenham sucesso na disciplina de matemática.

Esses aspectos e considerações visam a tornar a geometria um tópico que exige dos professores um maior preparo. Ensinar geometria envolve apreciar a história e o contexto cultural em que ela está inserida, assim como compreender os variados usos dessa área. Além disso, essa disciplina propicia o reconhecimento e a resolução de problemas geométricos interessantes. Significa que o professor deve ser capaz de dialogar com os alunos de uma forma estimulante e cativante, levando-os a compreender os processos.

Um dos processos inseridos no ensinar e no aprender geometria diz respeito à visualização de elementos geométricos, à resolução de problemas que os envolvem e ao raciocínio espacial. Sabe-se que, particularmente, o raciocínio espacial e a visualização são tópicos de interesse para educadores matemáticos (PRESMEG, 2006; LEIVAS, 2009; LOWRIE; LOGAN; RAMFUL, 2017). Esses tópicos são descritos como elementos essenciais para auxiliar os alunos a aprender a pensar matematicamente. As habilidades de visualização e de raciocínio espacial estão particularmente conectadas à resolução de problemas geométricos, visto que, ao solucionar um problema de natureza geométrica, os alunos podem interagir com imagens visuais ou mentais de várias maneiras. Ainda, conforme Castanho (2014, p. 2):

Os problemas vêm sendo compreendidos como situações em que o aluno põe em jogo seus conhecimentos, levanta e testa hipóteses para desenvolver um procedimento de resolução adequado, controla os resultados obtidos, explicita para os colegas seu ponto de vista e também faz uso das explicações dos colegas para repensar seu próprio caminho de resolução. Dessa forma, o aluno se aproxima cada vez mais do conhecimento matemático estudado.

Nesse contexto, este capítulo tem por objetivo descrever a experiência realizada no segundo módulo do curso de extensão “Abordagens metodológicas para o ensino de Geometria”. O referido módulo reuniu alguns subsídios teóricos e atividades que abordam a resolução de problemas geométricos, os quais serão apresentados e discutidos na próxima seção.

DESENVOLVIMENTO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) apresenta a resolução de problemas como um processo matemático, explicitando ser uma forma privilegiada da atividade nessa área, com potencial no desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (BRASIL, 2018). O mesmo documento menciona que os estudantes devem desenvolver habilidades relativas a esse processo. Além disso, pesquisas realizadas pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria - GEPGEO têm discutido sobre a relevância do tema (LEIVAS, 2019; 2021).

Com base nessas premissas, o Grupo de Trabalho responsável pelo segundo módulo do referido curso de extensão elegeu como assunto a resolução de problemas em Geometria. Nesse sentido, entendemos, assim como Leivas (2019), um problema como “qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método ‘correto’ específico de solução” (HIEBERT et al., 1997 apud VAN DE WALLE, 2019, p. 57).

Outro aspecto levado em consideração no planejamento das atividades foi o fato do módulo ser totalmente assíncrono¹. Nesse contexto, o Grupo de Trabalho selecionou, na literatura (artigos, livros e anais de eventos), problemas com as características supracitadas, assim como pesquisas que tratam de resolução de problemas. Esse processo de seleção de materiais é importante, pois, segundo Silva (2009, p. 7):

[...] os alunos já dispõem de várias tecnologias que lhes conduzem às informações e os professores têm participação importante na sugestão de roteiros de aprendizagem que levarão os educandos à construção crítica do conhecimento, o que certamente configura-se como um diferencial na Sociedade da Informação.

O módulo foi pensado para ser ofertado no ambiente de aprendizagem Moodle (“*Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment*”, em português, Aprendizagem Dinâmica Orientada a

¹ A natureza assíncrona da comunicação mediada por computadores tem por característica flexibilizar aos participantes o tempo de suas interações, ou seja, o participante da discussão tem muito mais liberdade para definir o horário de sua participação, bem como a profundidade de suas reflexões (CABEDDA, 2005).

Objetos Modulares) e desenvolvido pelos estudantes em 10 horas aula. Assim, foram apresentadas três seções de cunho obrigatório e uma seção optativa.

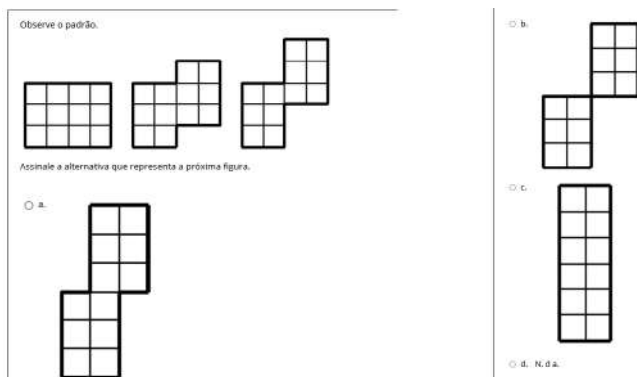
SOBRE O DESENVOLVIMENTO DAS TAREFAS

Na primeira seção, foi disponibilizado o artigo de Castanho (2014) para familiarizar os participantes quanto ao tema do módulo e aos tipos de problemas que desenvolvem o raciocínio geométrico. Após a leitura do texto, os alunos deveriam responder à seguinte tarefa: “Após ler o texto ‘O trabalho com problemas geométricos’, de Ana Flávia Alonço Castanho, disponível nos materiais, escreva um texto (de, no mínimo, 15 linhas) descrevendo quais tipos de problemas realmente estimulam o raciocínio geométrico”.

A segunda seção foi composta por um questionário (denominado tarefa 02) no qual os participantes tiveram a oportunidade de resolver problemas geométricos. Nessa tarefa, foram disponibilizadas sete questões, sendo duas objetivas e cinco descritivas.

A primeira questão (Figura 1), adaptada de Figueira et al. (2007), foi apresentada aos participantes de forma objetiva. Essa atividade teve como propósito desenvolver a capacidade de visualização e trabalhar com o fato de que figuras diferentes podem possuir a mesma área.

Figura 1: Questão 01 da tarefa 02

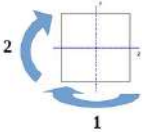


Fonte: adaptado de Figueira et al. (2007).

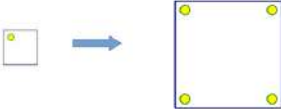
A segunda questão (Figura 2) também foi adaptada de Figueira et al. (2007) e possui o objetivo de trabalhar a capacidade de visualização e o conhecimento de simetria, os quais acontecem, nesse caso, por meio da reflexão.

Figura 2: Questão 02 da tarefa 02

Imagine que você pegou uma folha de papel no formato quadrado e dobrou duas vezes conforme a figura abaixo:




Imagine que você furou o canto superior esquerdo do quadrado obtido após a dobradura. Ao desdobrar o papel você deverá obter a seguinte imagem (os pontos amarelos representam os furos)



Ao decorrer da atividade, mantenha a configuração obtida após a dobradura acima.

Abaixo temos 3 configurações de furos que foram feitos no quadrado após as dobraduras:

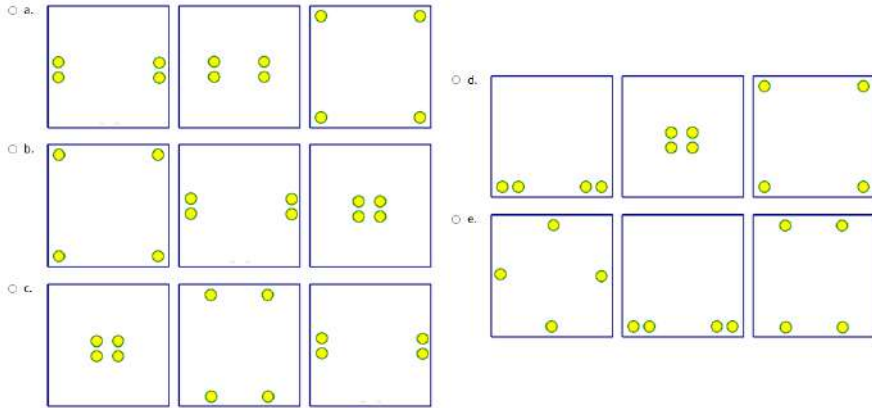


Assinale abaixo a opção que apresenta todas as configurações dos quadrados que foram furados conforme a ordem indicada acima:

Fonte: adaptado de Figueira et al. (2007).

Nessa questão, no início do problema, foi estabelecida uma ordem para a dobradura, mantendo uma orientação do quadrado. Essa explicação é muito importante e deve ser levada em consideração pelos participantes para que tenham êxito ao solucionar a tarefa. Assim, outro fator a ser trabalhado diz respeito às imagens que serão obtidas com os furos nos mesmos cantos, mas com o quadrado com uma orientação diferente. As opções de resposta fornecidas pelo grupo de trabalho estão ilustradas na Figura 3.

Figura 3: Possíveis respostas para a questão 02 da tarefa 02



Fonte: elaborado pelos autores.

A terceira questão (Figura 4) é descritiva e também foi adaptada de Figueira et al. (2007). A finalidade desse problema foi utilizar transformações geométricas para compor novas figuras.

Figura 4: Questão 03 da tarefa 02

Quais figuras geométricas você conhece? São muitas, né? Agora pense em quais figuras são possíveis formar a partir de um quadrado. Ficou confuso? Abaixo temos um exemplo: Tenha o seguinte quadrado:

É possível formar um paralelogramo a partir do quadrado? Você pode cortar, trasladar e rotacionar o quadrado. A resposta é: sim, é possível formar um paralelogramo a partir de um quadrado. Veja isto:

Corte o quadrado na sua diagonal, tendo assim dois triângulos. Faça agora a translação do triângulo obtido, obtendo assim um paralelogramo. Manuseie o quadrado da Figura a fim de formar um triângulo retângulo isósceles e um retângulo. Nas duas resoluções descreva o que você fez para chegar no resultado. Se achar necessário, pode enviar um anexo.

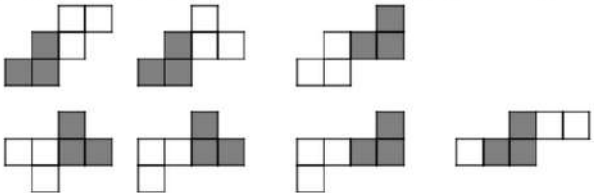
Fonte: adaptado de Figueira et al. (2007).

Com o objetivo de desenvolver a capacidade de visualização espacial, assim como de reconhecer o cubo e alguns de seus elementos,

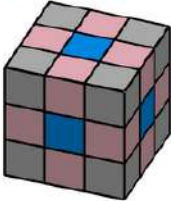
tais como vértices, arestas e faces, apresentou-se a quarta questão da tarefa 02 (Figura 5). Essa questão também foi fornecida aos participantes na forma descritiva e, assim como nas tarefas anteriores, foi adaptada de uma atividade de Figueira et al. (2007), tendo em vista que alguns itens foram modificados e as imagens reestruturadas.

Figura 5: Questão 04 da tarefa 02

Um cubo de madeira foi pintado de azul e após cortado em 8 cubos iguais. Todos esses 8 cubos possuem 3 faces pintadas. Veja algumas planificações para um desses 8 cubos e observe a posição das faces pintadas.



Agora, suponha que o mesmo cubo tenha sido cortado em 27 cubos iguais.



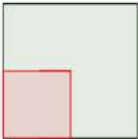
Quantos cubos possuem três, duas, uma e nenhuma faces pintadas?

Fonte: adaptado de Figueira et al. (2007).

A quinta questão, ilustrada na Figura 6, foi apresentada aos alunos na forma descritiva e adaptada de Geöcze (1982). Essa atividade teve o objetivo de trabalhar a noção de congruência de figuras planas, além de atentar para o fato de que figuras congruentes possuem a mesma área.

Figura 6: Questão 05 da tarefa 02

Um fazendeiro que vive em um terreno quadrado decide aposentar-se. Ele retém para si um quarto do terreno, como na figura, e doa o restante para seus quatro filhos.



Como se pode dividir o terreno a ser doado de modo que cada filho receba uma porção de mesma forma e dimensão?
Resolva o problema e tire uma foto ou faça uma construção utilizando alguma ferramenta digital (software) de seu conhecimento e poste como resposta.
Na resposta, não esqueça de descrever como você pensou para chegar nessa conclusão e quais foram, se houverem, as dificuldades para solucionar o problema?

Fonte: adaptado de Geöcze (1982).

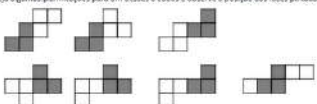
A sexta questão (Figura 7) utilizou a quarta questão como base e teve por objetivo perceber como os participantes da oficina a empregariam na prática de sala de aula.

Figura 7: Questão 06 da tarefa 02


A questão anterior teve como objetivo: desenvolver a capacidade de visualização espacial; conhecer o cubo e alguns de seus elementos como vértices, arestas e faces.

Um cubo de madeira foi pintado de azul e após cortado em 8 cubos iguais. Todos esses 8 cubos possuem 3 faces pintadas.

Veja algumas partições para um desses 8 cubos e observe a posição das faces pintadas.



Agora, suponha que o mesmo cubo tenha sido cortado em 27 cubos iguais.



Quantos cubos possuem três, duas, uma e nenhuma faces pintadas?
Como professor, em que ano escolar você utilizaria essa atividade?
Quais dificuldades você acha que os alunos poderiam ter ao resolver esse problema?

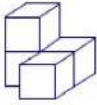
Fonte: elaborado pelos autores.

A última questão, disponibilizada na tarefa 02 (Figura 8), foi adaptada de Figueira et al. (2007) e teve dois objetivos. O primeiro foi coordenar e integrar visualizações de sólidos e o segundo foi idêntico ao da questão anterior. Observamos que essa atividade depende da representação plana do objeto e exige do participante um sistema de projeção para solucioná-la.

Figura 8: Questão 07 da tarefa 02

No nosso dia a dia é normal que, ao visualizar objetos, eles tenham diferentes formas de acordo com o ângulo em que estão sendo analisados. Ao olharmos uma garrafa, por exemplo, a vista de cima, a partir de sua tampa, formará uma imagem. Se olharmos a partir de sua base, teremos outra.

Nesse contexto, dada a pilha de cubos indicada na figura abaixo:



a) Represente, as três vistas dessa pilha: vista de cima, vista de baixo e vista de lado (anexe uma foto da sua resposta)

b) No espaço abaixo, responda as seguintes questões:

i) Você, como professor, aplicaria essa questão em sala de aula?

ii) Se sim, quais objetivos você acha que ela possui?

iii) Existe alguma dificuldade provável que os alunos encontrem durante a resolução?

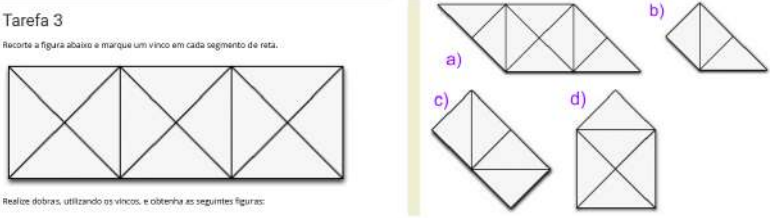
Fonte: elaborado pelos autores.

A tarefa 03, ilustrada na Figura 9, foi composta por uma atividade descritiva adaptada de Jahn e Santos (2021). Ao propor essa tarefa, tivemos por objetivo investigar o processo de resolução de problemas que os participantes iriam indicar ao resolvê-la.

Figura 9: Tarefa 03.

Tarefa 3

Recorte a figura abaixo e marque um vinco em cada segmento de reta.



Realize dobras, utilizando os vincos, e obtenha as seguintes figuras:

Para cada item:

i) Resolva o problema e tire uma foto e poste como resposta.

ii) Descreva (no espaço abaixo ou em um arquivo de texto) quantas dobras foram necessárias para reproduzir as figuras

iii) Não esqueça, caso ache pertinente descrever (no espaço abaixo ou em um arquivo de texto) como você pensou para chegar na solução e quais foram (se houverem) as dificuldades para solucionar cada problema.

Fonte: adaptado de Jahn e Santos (2021).

Além das tarefas acima descritas, o Grupo de Trabalho disponibilizou, em uma pasta denominada “Saiba Mais (materiais complementares)”, dois artigos sobre a metodologia de Resolução de Problemas, com o objetivo de ampliar os horizontes dos participantes sobre o tema do módulo. Na sequência, descreveremos como ocorreu a participação dos cursistas em cada uma das tarefas.

SOBRE A PARTICIPAÇÃO DOS CURSISTAS

O segundo módulo contou com a participação de 26 cursistas, os quais, neste capítulo, serão identificados pela letra A seguida de números de 1 a 26. Para fins de certificação, foram atribuídos pesos às tarefas, conforme ilustra o Quadro 1.

Quadro 1: Pesos atribuídos às tarefas

Tarefa	Peso
01	3,0
02	4,0
03	3,0

Fonte: elaborado pelos autores.

A tarefa 01, conforme exposto anteriormente, consistia na leitura de um artigo e na redação de um pequeno texto. Dos 26 alunos, 21 responderam a essa tarefa. Apenas o participante A6 apresentou uma resposta que fugia ao tema da pergunta.

As respostas apresentavam muitas semelhanças, retomando os aspectos expostos em Castanho (2014), o que evidencia que os alunos, efetivamente, leram o material disponibilizado. Em 13 respostas, observamos menções ao fato de que os enunciados dos problemas: precisam de intencionalidade (um objetivo bem definido); carecem de considerar os conhecimentos prévios dos alunos; sejam desafiadores, no sentido de não apresentarem solução por mera aplicação de processos prontos. Além disso, os participantes consideraram que os problemas que estimulam o raciocínio geométrico também precisam estimular a autonomia do aluno, permitindo que ele crie e teste hipóteses, a fim de validar as observações realizadas durante a resolução.

Nesse sentido, destacamos uma das respostas, a do participante A4 (Figura 10), a qual é condizente com o questionamento realizado, apresentando muitas semelhanças com as respostas dadas pelos demais participantes.

Figura 9: Exemplo de resposta esperada

Quando um professor trabalha em sala de aula com a resolução de problemas, essa abordagem metodológica, favorece aos estudantes, no momento de resolução do problema, pôr em prática suas capacidades de descobrir caminhos de resolução, de formular conjecturas, de validar ou não as conjecturas levantadas durante a resolução do problema, questionar, investigar, argumentar e dialogar com os colegas e professor sobre os caminhos traçados e as respostas encontradas, de modo que tornam-se mais ativos e participativos no processo de ensino e aprendizagem.

Nesse sentido, mais especificamente, em relação ao ensino de Geometria, o professor, ao sugerir situações problemas referentes a esse conteúdo, deverá propor problemas desafiadores aos alunos e com certo nível de dificuldade, nos quais os estudantes façam uso de conhecimentos já construídos e que construam novos conhecimentos para solucionar o problema proposto. As situações problemas propostas em sala de aula, também deverão favorecer a interação do aluno com o objeto, a autonomia para validar a resposta do problema e entre outras características. Sendo assim, problemas que façam uso das especificidades mencionadas acima serão capazes de estimular o raciocínio geométrico.

Fonte: dados oriundos da pesquisa.

As colocações feitas por A4 vão ao encontro do exposto no artigo proposto.

Os alunos só estão resolvendo problemas quando lançam mão de conhecimentos que já possuem e os põem em questão, ajustando-os e reformulando-os para chegar a novos conhecimentos. É necessário que o problema gere um certo grau de incerteza, inclua o levantamento de hipóteses e esteja aberto a uma variedade de percursos de resolução (CASTANHO, 2014, p. 3).

Percebemos, durante a leitura das respostas, que três participantes não dissertaram, diretamente, sobre ideias e passos, ilustrados no texto, quanto à resolução de problemas. Eles descreveram situações que, ao seu entendimento, condiziam com exemplos de problemas que poderiam ser utilizados com os alunos em sala de aula na educação básica. Nesse contexto, a Figura 10 ilustra a resposta dada pelo participante A1.

Figura 10: Exemplo de resposta esperada

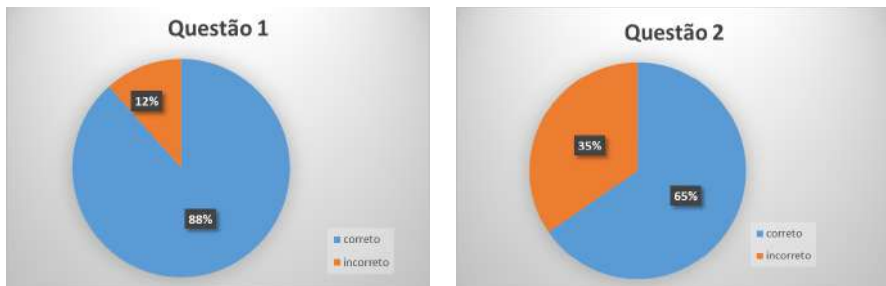
Exercícios como desenhar, a partir de um ponto específico, algum cômodo da casa, mostra empiricamente que não vivemos em um plano, nesta situação podemos introduzir volume e as dimensões de objetos, posição no local, novas distribuições de maneira a maximizar o uso do local. Exemplo: Um local totalmente abarrotado de moveis pode ser alterado a disposição deles a fim de que tenha maior espaço de circulação de pessoas?

Fonte: dados oriundos da pesquisa.

Observamos, na situação descrita por A1, que o problema foi apresentado com o objetivo explícito de justificar que o espaço ao nosso entorno não é plano e que nem sempre é possível representá-lo como tal, sendo tratado por ele como exercício. Além disso, o participante sugere que existe a oportunidade de introduzir as noções de volume, de dimensões dos objetos e de posições relativas no espaço. Esse problema se aproxima do exposto por Castanho (2014), ao argumentar que um problema é uma situação que necessita ter uma finalidade clara. No que segue, analisaremos as repostas fornecidas pelos participantes para a segunda tarefa.

Como citado anteriormente, a tarefa 02 era um questionário composto por 7 atividades e foi respondida por 26 participantes. As duas primeiras questões eram objetivas e a Figura 12 ilustra o índice de acertos para ambas.

Figura 12: Índice de acerto nas questões 01 e 02 da tarefa 02



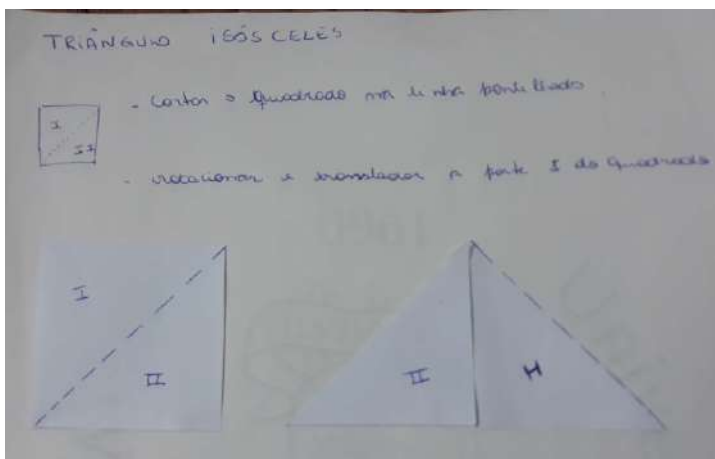
Fonte: elaborado pelos autores.

Os índices apresentados acima apenas revelam se os alunos tiveram êxito ou não ao responder a atividade, mas não trazem elementos de como os participantes pensaram para solucionar os problemas propostos. Nesse sentido, percebemos que questões objetivas não são suficientes no que tange às análises. Porém, o foco ao propô-las era que os participantes começassem a trabalhar a capacidade de visualização, o conhecimento de simetria e a percepção sobre áreas. Visto os índices de acerto, acredita-se que os objetivos foram cumpridos. No que segue, realizaremos um breve relato sobre as cinco questões discursivas respondidas pelos participantes.

Como citamos anteriormente, a terceira questão da tarefa 02 solicitava aos alunos que realizassem a construção de um retângulo e de um triângulo isósceles retângulo, a partir de um quadrado. Para isso, eles podiam usar do corte, da rotação e da translação das figuras. Das respostas obtidas, oito foram consideradas corretas, sete incorretas e seis parcialmente corretas.

Dentre as respostas corretas, apareceram algumas construções diferentes, porém, verificamos que todas iniciaram por meio do processo do corte do quadrado inicial. Observamos, também, que as respostas foram apresentadas em forma de texto, com construções no GeoGebra e recortes em folhas de ofício ou em desenho a mão livre. Uma das respostas consideradas corretas, no caso da construção do triângulo isósceles retângulo, foi a do participante A3 (Figura 13), que utilizou recortes para chegar à solução.

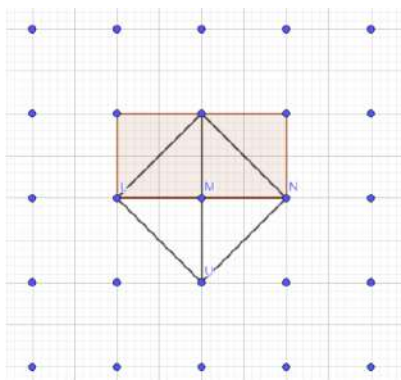
Figura 13: Exemplo de resposta correta para a questão 3 da tarefa 02



Fonte: dados oriundos da pesquisa.

Para a construção do retângulo, uma das resoluções consideradas corretas está ilustrada na Figura 14 e foi desenvolvida pelo participante A9, que utilizou o GeoGebra para esboçar sua resposta.

Figura 14: Exemplo de resposta correta para a questão 3 da tarefa 02



Fonte: dados oriundos da pesquisa.

Dentre as respostas consideradas parcialmente corretas e incorretas, alguns erros comuns foram: utilizaram operações que não estavam estabelecidas, como “esticar” o vértice do quadrado ou duplicar o quadrado dado; argumentaram que o quadrado já é um retângulo e não efetuaram nenhuma modificação. Nesse caso, como o solicitado era transformar um quadrilátero (com quatro lados iguais paralelos dois a dois) em outro quadrilátero (com dimensões dos lados dois a dois iguais e paralelos), consideramos que a solução apresentada não foi satisfatória. Quatro participantes (A4, A6, A18 e A23) apenas efetuaram o corte das figuras, argumentando que, com esse procedimento, chegava-se ao resultado. Os demais participantes que apresentaram incoerência na resolução esqueceram de responder a algum item ou não anexaram a imagem na qual estava a justificativa da construção.

Nenhum participante relatou dificuldade ao resolver a questão. Apenas um deles alegou que o exemplo dado na questão estava confuso, pois trazia a transformação de um quadrado para um paralelogramo. Porém, por definição, um quadrado é considerado um paralelogramo.

Ou seja, esse aluno não percebeu quais eram os objetivos do problema proposto.

A quarta questão, adaptada de Figueira et al. (2007), solicitava que os participantes respondessem quantos cubos possuíam três, duas, uma ou nenhuma face pintada no cubo ilustrado (Figura 7). Dos vinte e seis alunos que responderam ao questionário, nove não fizeram essa questão, um aluno não conseguiu atingir os objetivos propostos, onze resolveram o problema com êxito e cinco apresentaram respostas parcialmente corretas. A Figura 15 ilustra um exemplo de resposta considerada correta, apresentada por A13.

Figura 15: Exemplo de resposta correta para a questão 04 da tarefa 02

Temos 4 casos a serem analisados:

Caso 1 - 3 faces: Os cubinhos com três faces pintadas são aqueles que estão nos cantos do cubo grande. Logo, depois de separados, 8 cubinhos terão tinta azul em exatamente três faces;

Caso 2 - 2 faces: Os cubinhos com duas faces pintadas são aqueles com uma aresta contida no meio de cada aresta do cubo grande. Assim, depois de separados, $3 \times 4 = 12$ cubinhos terão tinta azul em exatamente duas faces;

Caso 3 - 1 face: Os cubinhos com apenas uma face pintada são aqueles que estão no centro de cada face do cubo grande. Logo, depois de separados, 6 cubinhos terão tinta azul em exatamente uma de suas faces.

Caso 4 - 0 face: Os cubinhos com zero face pintada são aqueles que estão no interior do do cubo grande. Logo, é a diferença entre o número total de cubos (27), pela soma dos cubos do caso 1, 2 3 (26). Portanto, $27 - 26 = 1$ cubinho sem face pintada.

Fonte: dados oriundos da pesquisa.

Observamos que, dos onze alunos que acertaram, apenas A13 explicitou o raciocínio, sendo que os demais colocaram a quantidade de cubos em cada caso. Percebemos que A13 confundiu uma das propriedades do cubo e, por isso, acabou chegando em uma resposta equivocada para o número de cubos com uma face pintada.

Cinco das respostas apresentadas para o problema estavam parcialmente corretas, uma vez que não forneciam soluções a todos os casos solicitados, ou apenas descreviam onde estavam os cubos de nenhuma, uma, duas ou três faces, sem identificar a quantidade. Nesse

sentido, uma dessas respostas, fornecida pelo participante A2, merece destaque (Figura 16).

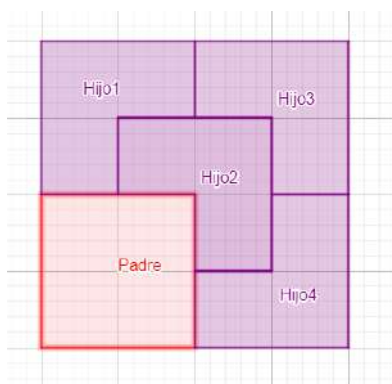
Figura 16: Exemplo de resposta parcialmente correta para a questão 04 da tarefa 02

Los cubos con una cara pintada son los centrales, que se encuentran en el centro de cada cara del cubo original. Como este tiene 8 caras, son 8 los cubos con una cara pintada.

Fonte: dados oriundos da pesquisa.

Conforme mencionado, a quinta questão foi adaptada de Geöcze (1982) e solicitava que os cursistas respondessem ao problema por meio de fotos, destacando as principais dificuldades encontradas ao tentarem resolvê-lo. Constatamos que oito participantes não responderam à questão, quatro justificaram a resposta, descrevendo brevemente a solução e as dificuldades encontradas, porém não anexaram nenhuma imagem. Oito participantes responderam de acordo com o esperado, contudo, todos apresentaram as mesmas ilustrações, exceto pelas cores e *designs* diferentes. Sete deles utilizaram o *software* Geogebra e apenas um respondeu a mão livre. A Figura 17 ilustra a resposta fornecida pelo participante A9.

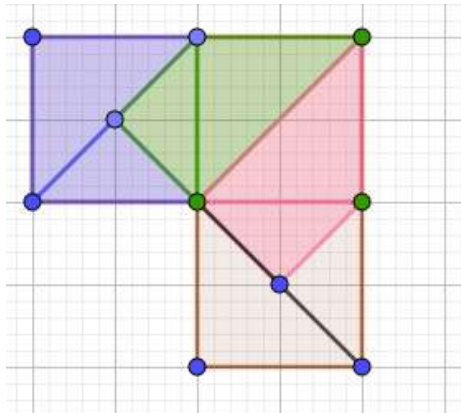
Figura 17: Exemplo de resposta esperada para a questão 5 da tarefa 02



Fonte: dados oriundos da pesquisa.

Observamos que seis participantes não resolveram o problema de forma correta, cinco deles apresentaram o mesmo desenho e, conseqüentemente, o mesmo erro. Nesse caso, os alunos encontraram terrenos de mesma área para cada filho, porém, não atentaram ao fato de que deveriam ser congruentes, ou seja, precisavam possuir o mesmo formato. As soluções apresentadas pelos 5 participantes consistiam em repartir a área que sobrava em 12 terrenos triangulares e, depois dessa divisão, fornecer a cada filho três partes, conforme a configuração ilustrada na Figura 18, oriunda da resolução do participante A11.

Figura 18: Exemplo de resposta incorreta para a questão 5 da tarefa 02



Fonte: dados oriundos da pesquisa.

Por fim, na sexta resposta considerada incorreta, o participante não apresentou uma divisão do terreno. Ao invés disso, supôs que o terreno original possuía 144 m^2 e determinou que cada filho teria um terreno de 27 m^2 . O cálculo está correto, mas não condiz com o problema proposto, visto que nenhuma metragem é fornecida.

Quanto às dificuldades, nem todos os participantes as expuseram, mas, daqueles que o fizeram, uma limitação enfatizada foi a de conseguir encontrar o formato do terreno. Essa barreira já era esperada, visto que o objetivo da questão era trabalhar a ideia de que figuras congruentes possuíam a mesma área. Porém, a figura a ser determinada era um hexágono em formato de “L”, que não é uma figura prototípica ao se

estudar geometria plana na educação básica. Em geral, quando se fala em congruência de figuras, ficamos condicionados a pensar em triângulos.

A questão 06, conforme mencionado anteriormente, usou como base a questão 04. Das 26 respostas, nove estavam em branco, ou seja, os participantes não responderam a nenhum dos dois itens que eram solicitados. Dos dezesseis alunos que responderam, catorze explicitaram suas opiniões para ambos os itens, e apenas dois não responderam ao segundo item.

Desses alunos, a maioria afirmou que utilizaria a atividade com estudantes do ensino médio ou em qualquer ano escolar. Alguns participantes citaram que poderiam utilizar essa questão no ensino fundamental ou no ensino superior, em uma disciplina de Geometria Espacial.

O segundo item questionava quais as possíveis dificuldades que os alunos teriam para resolver o problema. As principais dificuldades apontadas foram a interpretação, a percepção espacial e a imaginação do interior da figura para a visualização dos cortes. A Figura 19 ilustra a resposta apresentada pela participante A14.

Figura 19: Resposta fornecida pela participante A14

Em qualquer ano escolar, de qualquer etapa.

Provavelmente os alunos dos anos iniciais teriam dificuldades de identificar o "cubinho" central, já que eles tendem a identificar o que realmente enxergam.

Fonte: dados oriundos da pesquisa.

Outra possível dificuldade foi apresentada pelo participante A12 e está relacionada ao enunciado, tendo em vista que a ordem do problema explicita que o cubo é pintado de azul e, após a sua divisão em 27 cubos iguais, ele passa a possuir outras cores (Figura 20).

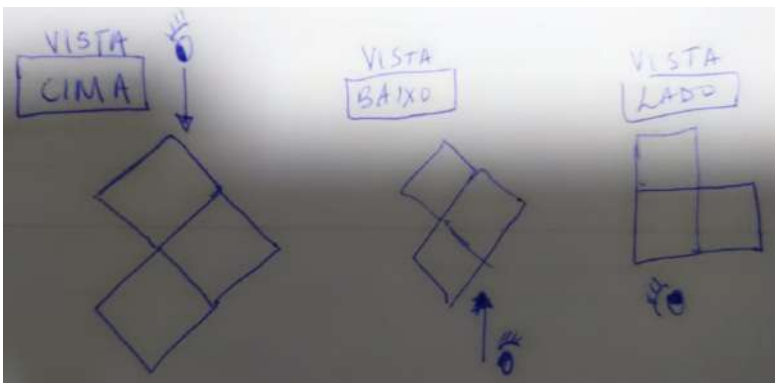
Figura 20: Resposta fornecida pelo participante A12

Usaria tal atividade no ensino médio, nas turmas de 2º ano, quando estivesse trabalhando com os mesmos planificação e sólidos Geométricos. (Penso nesse ano escolar pois é o mesmo com a qual já tive a oportunidade de trabalhar tal conteúdo).

As dificuldades que creio que teriam, em primeiro lugar seria interpretar o exemplo inicial, entender como que o cubo maior foi dividido e a partir daí entender o que se pede na pergunta do problema. Vejo um dos pontos negativos nessa questão que influenciariam a terem dificuldade é o fato de o cubo formado por 27 cubos não serem pintados de azul conforme enunciado, isso os confundiriam até perceberem que as faces coloridas são uma ajuda para identificar quantos cubos terão apenas três, duas, uma e nenhuma face pintadas. Ou seja, vejo que terão dificuldade em fazer tal divisão do cubo maior em cubos menores mentalmente.

Fonte: dados oriundos da pesquisa.

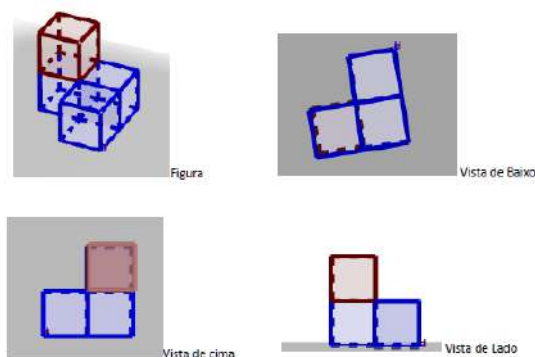
A sétima questão foi respondida por dezesseis participantes. Destes, quatro não anexaram nenhum tipo de esboço, ou seja, não responderam ao primeiro item. Dos doze participantes que responderam à primeira parte da tarefa, cinco o fizeram da forma correta. A Figura 21 ilustra um exemplo de resposta correta para o item a) da questão 07, apresentada pelo participante A2.

Figura 21: Exemplo de resposta correta

Fonte: dados oriundos da pesquisa.

Observamos, também, que oito alunos utilizaram algum tipo de *software* para ilustrar a resposta ao primeiro item. O participante A1 (Figura 22) fez uso do *software* de matemática dinâmica GeoGebra.

Figura 22: Exemplo de resposta correta



Fonte: dados oriundos da pesquisa.

Percebemos que esse participante utilizou o *software* não apenas como ferramenta para ilustrar, mas também para resolver a questão. Nesse caso, é impossível saber se o aluno responderia corretamente à atividade ou se teria a mesma dificuldade dos sete participantes que enviaram esboços que não estavam de acordo com o esperado. Esses sete alunos confundiram a vista de baixo com a vista frontal. A questão 07 foi adaptada de Figueira et al. (2007) e, nesse material, era solicitada a vista frontal ao invés da vista inferior.

Quanto ao segundo item, quinze participantes explicitaram suas ideias para os três subitens. Todos eles responderam afirmativamente ao primeiro subitem, indicando que essa é uma questão que pode ser aplicada em sala de aula. O segundo subitem questionou a respeito dos objetivos da questão. Nesse caso, oito alunos citaram que o objetivo era desenvolver as habilidades de visualização espacial. Também nesse subitem, duas participantes (A17 e A14) indicaram uma habilidade descrita na BNCC, ainda que sem citar a fonte: “reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar

objetos em perspectiva” (BRASIL, 2018, p. 318). Isso é ilustrado na Figura 23.

Figura 23: Resposta fornecida pelo participante A17

Essa questão pode ser aplicada e trabalhada com o conteúdo de vistas ortogonais, 9 ano.

Com o objetivo de auxiliar os estudantes na visão espacial e projeções dos objetos. Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

Fonte: dados oriundos da pesquisa.

Um participante (A10) citou o cálculo de áreas e volumes, o que não era esperado. Os demais responderam que, a partir dessa atividade, os alunos conseguiriam compreender as diferenças entre os espaços bidimensional e tridimensional. O terceiro subitem questionava a respeito das dificuldades que os alunos poderiam encontrar. A maioria relatou que a maior dificuldade se encontrava no fato de o aluno ter de visualizar as diferentes vistas do objeto apenas olhando a figura. Para sanar a dificuldade (algo que não foi questionado), cinco participantes sugeriram que o professor trabalhasse com material concreto e dois recomendaram o uso de algum aplicativo ou *software*. Nesse subitem, uma resposta chamou nossa atenção (Figura 24).

Figura 24: Resposta fornecida pelo participante A26

iii) Os alunos apresentam a dificuldade de conseguir mentalmente rotacionar as figuras/sólidos para visualizar a pilha de cubos olhando por outros ângulos, sendo assim creio que sentiriam dificuldade em conseguir desenhar as vistas pedidas.

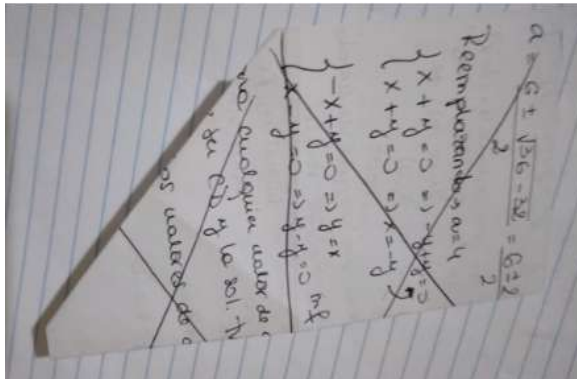
Fonte: dados oriundos da pesquisa.

Percebemos, nesse caso, que a dificuldade relatada pelo participante foi exatamente a mesma que ele teve ao responder o primeiro item. No que segue, faremos um relato sobre a última tarefa, a qual, conforme apresentado anteriormente, consiste em uma série de dobraduras que devem ser realizadas a partir de uma figura com vincos marcados sobre

si. Nesse sentido, foi solicitado que os participantes realizem o menor número de dobraduras para chegar a 4 figuras que foram estabelecidas previamente, distribuídas em itens a, b, c, d.

Esse problema contou com um total de vinte e duas respostas, das quais vinte estavam com imagens das construções solicitadas. Um participante (A16) não retornou a tarefa, pois disse não ter como imprimir o modelo. Além desse aluno, as respostas do participante A2 não foram consideradas satisfatórias, pois as imagens enviadas (Figura 25) não mostravam com clareza os vincos da figura.

Figura 25: Resposta fornecida pelo participante A2



Fonte: dados oriundos da pesquisa.

Ao todo, 20 participantes enviaram imagens legíveis das construções realizadas. As respostas foram analisadas quanto ao menor número de dobras necessárias para resolver cada item do problema proposto, conforme apresentamos no Quadro 02.

Quadro 02: Quantidade de dobras feitas pelos participantes para cada item da tarefa 03

Número de dobras	1	2	3	4	5	6
a		20				
b		2	2	7	9	
c	1	1	2	3	12	1
d	1	3	10	4	2	

Fonte: dados oriundos da pesquisa.

Observamos, então, que, para resolver o primeiro item, os 20 participantes precisaram de apenas duas dobras. Essa era a resposta que estávamos esperando, pois “transformar” o retângulo no paralelogramo (Figura 26) é uma tarefa bem óbvia.

Figura 26: Primeiro item da tarefa 03

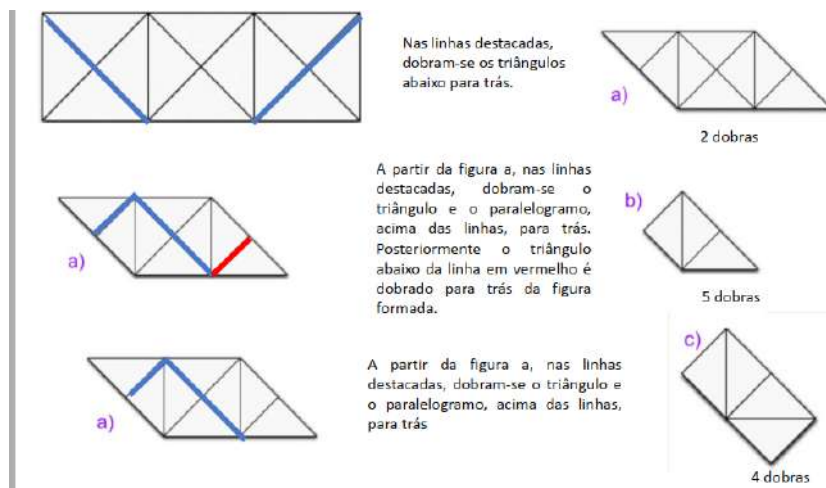


Fonte: dados oriundos da pesquisa.

O número mínimo de dobras necessárias para resolver o item b do problema proposto eram duas. Apenas dois participantes conseguiram entender que essa era a melhor configuração. Tanto no item c quanto no item d, dois deles relataram que resolveram os problemas fazendo apenas uma única dobra. Entretanto, vale lembrar que nenhuma das construções é possível de ser realizada com apenas uma dobra. Assim, entendemos que houve erro de digitação ou de interpretação de como as dobras deveriam ser feitas e contadas.

Dentre as respostas enviadas, destaca-se a do participante A25, que apresentou uma solução detalhada do problema, conforme ilustra a Figura 27.

Figura 27: Resposta da tarefa 03



Fonte: dados oriundos da pesquisa.

Quanto às dificuldades apresentadas durante a resolução, foram poucos os participantes que relataram ter algum problema. Muitos deles consideraram a tarefa divertida e desafiadora.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo teve por objetivo descrever a experiência realizada no segundo módulo do curso de extensão “Abordagens metodológicas para o ensino de Geometria”, ofertado no primeiro semestre de 2021, via ambiente Moodle. Em particular, no segundo módulo, foram disponibilizados aos participantes artigos sobre a resolução de problemas geométricos e três tarefas. Na primeira tarefa, solicitamos aos participantes que, após a leitura do texto, descrevessem que tipos de problemas realmente estimulavam o raciocínio geométrico. A maioria dos alunos respondeu a tarefa com êxito, apenas um participante fugiu ao tema. Percebemos, portanto, que foi uma boa estratégia para um curso a distância. Porém, em uma próxima edição, pensamos que criar

um fórum de discussão sobre o tema poderá fornecer maior dinamismo e interação entre os participantes.

A segunda tarefa foi estruturada na forma de um questionário, com duas perguntas objetivas e cinco dissertativas. Observamos que, para cursos a distância, as questões objetivas não fornecem subsídios para verificar como o aluno está pensando, o que é muito importante na resolução de problemas geométricos. Nas questões dissertativas, em contrapartida, foi possível compreender como os participantes estruturaram suas respostas. Nesse tópico, também sentimos falta de um fórum no qual os participantes pudessem compartilhar suas experiências. No ambiente, foi disponibilizado um fórum de dúvidas, mas nenhum participante o utilizou.

Na tarefa 03, trabalhamos a resolução de problemas geométricos a partir de uma perspectiva diferente, utilizando materiais manipulativos. Percebemos que a maioria dos alunos se esforçou para executar a tarefa. Porém, não foi possível atingir uma forma eficaz de comunicação, para que houvesse um compartilhamento de ideias. Para uma próxima edição, pensamos que um encontro síncrono seria ideal para a discussão conjunta dos problemas propostos na terceira tarefa.

Nosso objetivo, ao ofertar esse módulo, foi chamar a atenção dos participantes para a possibilidade de utilizar diferentes estratégias para a resolução de problemas geométricos. Observamos que a pouca experiência dos autores interferiu no processo de aprendizagem dos participantes, pois não houve interação e momentos desse tipo fizeram falta. Esse aprendizado certamente será levado em consideração no planejamento de um próximo curso, caso ocorra.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base>. Acesso em: 01 mar. 2018.

CABEDA, Marcelo. O chat-fórum: uma idéia de uso híbrido, síncrono e assíncrono, através de uma única ferramenta normalmente assíncrona, o fórum virtual. In: **Proceedings of Congresso Internacional de Educação à Distância**. 2005. p. 18-22.

CASTANHO, Ana Flavia Alonço. O trabalho com problemas geométricos. **Revista Nova Escola**. 2014. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/2057/o-trabalho-com-problemas-geometricos>. Acesso: 10 abr. 2021

FIGUEIRA, Carla; LOUREIRO, Cristina; LOBO, Elsa; RODRIGUES, Maria Paula; ALMEIDA, Pedro . Visualização e Geometria nos primeiros anos. **Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1º e 2º Ciclos**, v. 1, 2007.

GEÖCZE, Zoárd A.L. Problemas propostos e probleminhas. **Revista do professor de matemática**. SBM, n. 1, 1982.

JAHN, Ana Paula; SANTOS, Marcos A. O Raciocínio Espacial no Ensino e Aprendizagem de Geometria na Educação Básica. 20º Encontro USP-Escola. 2021

LEIVAS, José Carlos Pinto. Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. **Paraná: UFPR**, 2009.

LEIVAS, José Carlos Pinto. Resolução de problemas e sala de aula invertida: homeomorfismo entre um parabolóide e um plano. **Ensino da Matemática em Debate**, v. 8, n. 1, p. 81-99, 2021.

LEIVAS, José Carlos Pinto. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS. **Educação Matemática Sem Fronteiras: Pesquisas em Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 1-22, 2019.

LOWRIE, Thomas; LOGAN, Tracy; RAMFUL, Ajay. Visuospatial training improves elementary students' mathematics performance. **British Journal of Educational Psychology**, v. 87, n. 2, p. 170-186, 2017.

PRESMEG, Norma. Visualization and learning in mathematics education. **Encyclopedia of mathematics education**, p. 900-904, 2020.

SILVA, Ivanda Maria Martins. Múltiplos papéis dos professores na educação a Distância e práticas de letramento digital. CONGRESSO INTERNACIONAL ABED DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA, 15, Recife, 2009. Anais eletrônicos. Disponível em: <http://www.abed.org.br/congresso2009/CD/trabalhos/252009084314.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2021.

VAN DE WALLE, John A. **Matemática no Ensino Fundamental-: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula**. Penso Editora, 2009.

VERONA, Viviane Aparecida; LOPES, Maria Regina Macieira. Aplicação da Geometria Espacial em Ambientes Diversos. 2016. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2455-8.pdf>. Acesso em: 28 jul. 2021.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Universidade Franciscana e ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Campus Alegrete pelo apoio prestado ao desenvolvimento do curso.

Capítulo III

INVESTIGAÇÃO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS A PARTIR DE DOBRADURAS

GABRIEL DE OLIVEIRA SOARES

DÉBORA DA SILVA DE LARA

DIONATAN DE OLIVEIRA NADALON

JUSSARA APARECIDA DA FONSECA

INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática na sala de aula, em especial, o de Geometria, teve muitos avanços teóricos e metodológicos nos últimos tempos. Desde a década de 70, com o advento da área de Educação Matemática no país, diversas práticas têm sido pensadas em busca de melhorias na aprendizagem dessa disciplina.

Mesmo que autores como Lorenzato (1995) já apontassem dificuldades referentes ao trabalho de conceitos geométricos por parte dos professores, cremos que, atualmente, algumas dessas perspectivas os têm incentivado na promoção de um ambiente de ensino e de aprendizagem mais efetivo.

Essas dificuldades, entretanto, não estão somente do lado dos professores. Enquanto trabalhos como o de Soares, Vargas e Leivas (2020) apontam percepções e sentimentos negativos de estudantes do Ensino Médio com relação à Matemática, estudos como os de Hiratsuka (2006, p. 56) indicam um quadro bastante desfavorável da aprendizagem de Geometria na Educação Básica, afirmando que “as avaliações realizadas pelos órgãos oficiais apontam para o não aprendido dos seus conteúdos

e para o não desenvolvimento de habilidades e competências relacionadas a este tema”.

Assim, compreendendo que o ensino da Geometria na escola “envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento” (BRASIL, 2018, p. 273), faz-se necessário refletir sobre potenciais metodologias que possam dar suporte a esse trabalho, as quais podem ser diversas.

Castiblanco e Velázquez (2021), por exemplo, trazem aspectos positivos no desenvolvimento da criatividade em Matemática com resolução de problemas geométricos; Brito (2018) aponta uma compreensão fenomenológica da aprendizagem da Geometria por meio da Modelagem Matemática; Soares et al. (2021) apresentam contribuições de um jogo no estudo de conceitos geométricos; entre outras.

Outra metodologia que vem sendo bastante explorada é a utilização de materiais didáticos que, na perspectiva de Leivas et al. (2017, p. 268), são concebidos como “todos os recursos materiais que podem ser utilizados pelo professor, de forma intencional, explorados pelos estudantes e que propiciem a construção do conhecimento”.

Segundo Sousa Neto e Silveira (2016, p. 24),

o uso de materiais didáticos nas aulas de geometria promove o debate entre os estudantes, troca de ideias, contribui para minimizar as diversas formas de abstração existentes na concepção do aprendente, proporciona a visualização das figuras geométricas, além de tornar as aulas de matemática dinâmicas, interativas, participativas. Permitem uma aproximação da matemática teórica com o fazer na prática, contribuem para esclarecer traços muitas vezes obscuros no desenho feito na lousa pelo professor.

Nesse sentido, existe uma gama de materiais que podem auxiliar os estudantes em uma aprendizagem mais significativa de Geometria em sala de aula. Dentre eles, está a utilização de dobraduras que, segundo Guimarães (2015, p. 30), “é capaz de despertar a criatividade e facilitar o entendimento de conceitos matemáticos, [...] saindo do abstrato e incluindo o concreto com a manipulação de simples pedaços de papel”.

Corroborando o apontado por Guimarães (2015), Oliveira e Camargo (2016) acrescentam que:

a utilização das dobraduras estimula a coordenação motora e o desenvolvimento de memorização, pois, ao construí-las, devemos seguir passo a passo cada dobra, o que exige muita atenção e concentração, habilidades importantes de serem desenvolvidas com o aluno. Essa atividade favorece muito o trabalho em grupo e a cooperação e paciência, pois são os elementos essenciais para a construção de uma dobradura, contribuindo, desse modo, com a socialização dos alunos (p. 8).

Diante do exposto, reconhecendo o potencial que as dobraduras podem ter no ensino e na aprendizagem da Geometria, o terceiro módulo do curso de extensão “Abordagens metodológicas para o Ensino de Geometria”, intitulado “Investigação de conceitos geométricos a partir de dobraduras”, explorou a investigação matemática no desenvolvimento de uma tarefa que envolvia a construção de uma dobradura de polígonos estrelados¹.

Dessa forma, este capítulo tem por objetivo apresentar o planejamento, os recursos utilizados no módulo e alguns resultados dessa experiência, trazendo relatos e produções dos professores participantes do curso na reflexão das atividades propostas.

ORGANIZAÇÃO DO MÓDULO E DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

O terceiro módulo do curso de extensão foi realizado no período de 14 de junho a 20 de junho de 2021. Para essa etapa, foram planejadas três atividades com o viés da investigação matemática, além de atividades que envolviam reflexões teóricas sobre a metodologia em questão e vivências dos participantes com a utilização de dobraduras. No que segue, são apresentadas as atividades, sua construção e alguns resultados produzidos pelos cursistas no decorrer do módulo.

O módulo foi dividido em três seções de cunho obrigatório e duas de cunho optativo. As primeiras foram planejadas com o propósito de elucidar a metodologia utilizada, a saber, a investigação matemática. Além disso, destacaram as contribuições das dobraduras para o ensino de Geometria, exemplificando com construções já estudadas pelo Grupo

¹ Chamamos de polígono estrelado n/k o polígono complexo de n lados obtidos a partir da divisão de uma circunferência em n partes congruentes, ligando-se sucessivamente os pontos de divisão de k em k .

de Estudos e Pesquisas em Geometria (GEPGEO). Ao final, incluía a atividade investigativa do módulo, composta de três partes.

Enquanto isso, as atividades de cunho optativo corresponderam a um fórum de dúvidas e a um *chat* para a construção das dobraduras e para as leituras dos textos de produções do grupo que envolviam essa temática.

Como a investigação matemática foi a escolha metodológica para a atividade, o primeiro tópico do módulo a apresentava, trazendo uma tarefa que consistia na leitura do primeiro capítulo do livro “Investigações Matemática na Sala de Aula”, de autoria de João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira (2019), intitulado “Investigar em Matemática”.

No texto em apreço, os autores apresentam concepções iniciais acerca da metodologia, compreendendo-a como uma atividade de ensino e de aprendizagem que “ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2019, p. 9).

Além disso, nessa metodologia, o aluno “é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e professor” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2019, p. 9).

Assim, após realizarem a leitura do capítulo, os alunos foram convidados a acessarem a plataforma *Mentimeter*² e responderem ao seguinte questionamento: “Após realizar a leitura do texto, digite três palavras-chave que você acredita que sintetizam as ideias apresentadas no mesmo”. A intenção, com essa tarefa, era construir uma nuvem de palavras que sistematizasse as concepções do grupo participante.

O segundo tópico tratava das dobraduras no ensino de Matemática. Após apresentar algumas definições, foi elaborado um vídeo³ trazendo as experiências vivenciadas pelo GEPGEO com a utilização de dobraduras. A Figura 1 ilustra algumas telas do vídeo, no qual são comentadas experiências referenciadas em Rosa et al. (2019), Leivas et al. (2017), Leivas, Lara e Soares (2018) e Fonseca, Lutz e Leivas (2019).

2 Disponível em: <https://www.mentimeter.com/>.

3 Disponível em: <https://youtu.be/teUpGUbHUAA>.

Figura 1: Frames do vídeo apresentado sobre as experiências com dobraduras



Fonte: os autores (2021).

Assim, após assistirem o vídeo, os cursistas foram convidados a participarem de um fórum, no qual deveriam comentar sobre suas percepções, opiniões e experiências com a utilização de dobraduras, seja como professor ou como estudante. Pensamos nesse fórum como uma maneira de compartilhar e ressignificar o já experienciado, a partir de discussões com os outros participantes e professores.

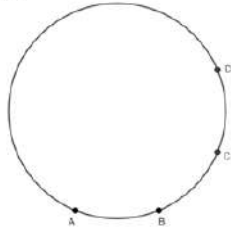
Por fim, foi proposta a tarefa central do módulo, que relacionava a existência dos polígonos estrelados e a construção de uma dobradura de dois destes. Essa atividade esteve dividida em três partes. A primeira, apresentada no Quadro 1, abordava as ideias iniciais sobre a existência de figuras obtidas a partir de pontos em uma circunferência.

Quadro 1: Primeira parte da terceira atividade

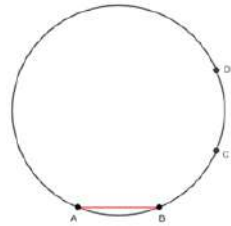
Inicialmente, vamos explorar figuras obtidas a partir de pontos sobre uma circunferência. Para tal, trazemos algumas ideias iniciais:

Consideremos uma circunferência dividida em n partes iguais. Vejamos que figuras são obtidas quando ligamos os pontos que determinam essa divisão, saltando de k em k pontos.

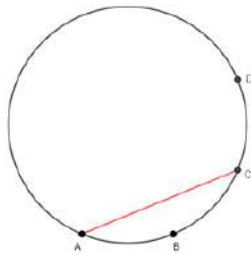
O que significa saltar de k em k pontos?



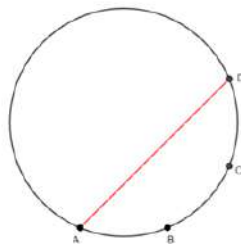
Saltando de um em um ponto ($k=1$), temos:



Saltando de dois em dois pontos ($k=2$), temos:



Saltando de três em três pontos ($k=3$), temos:



E assim sucessivamente.

Dessa forma, consideramos um salto a partir de um ponto inicial. Contamos uma quantidade k de pontos e fazemos a ligação entre eles.

Para melhor compreendermos, vamos explorar um caso específico. Baixe o Arquivo 1, disponível nos materiais complementares desse módulo do curso, em que ilustramos a divisão da circunferência em oito partes iguais, sendo marcados os pontos A1, A2, A3..., A8. Explore os saltos, marcando e desmarcando as caixas indicativas dos pulos no arquivo do [GeoGebra](#).

Após explorar, responda:

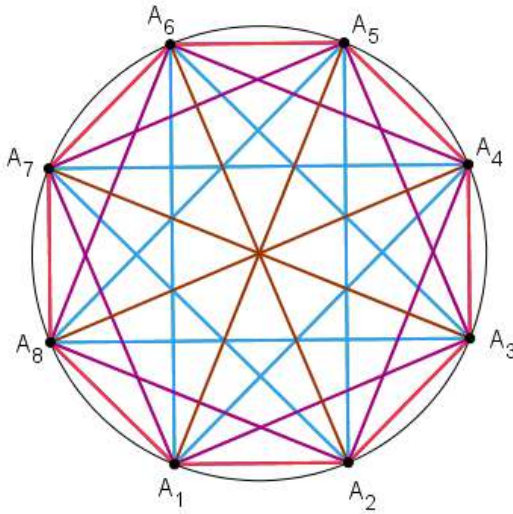
1. Que figura obtemos ao saltar de um em um ponto ($k=1$)?
2. Que figura obtemos ao saltar de dois em dois pontos ($k=2$)?
3. Que figura obtemos ao saltar de três em três pontos ($k=3$)?
4. Que figura obtemos ao saltar de quatro em quatro pontos ($k=4$)?
5. Que figura obtemos ao saltar de cinco em cinco pontos ($k=5$)?
6. Que figura obtemos ao saltar de seis em seis pontos ($k=6$)?
7. Que figura obtemos ao saltar de sete em sete pontos ($k=7$)?
8. O que podemos concluir a partir do observado?

Fonte: adaptado de Clubes de Matemática da OBMEP (s/d.).

O arquivo 1, mencionado na atividade descrita no Quadro 1, foi construído⁴ no *software* GeoGebra. Nesse arquivo, é possível visualizar a obtenção de diferentes polígonos, a partir de saltos de uma determinada quantidade de pontos sobre uma circunferência dividida em n partes iguais. A Figura 2 ilustra algumas opções de figuras obtidas com a exploração do arquivo.

⁴ Applet 5. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/um-pouco-sobre-poligonos-poligonos-uma-primeira-definicao-2/um-pouco-sobre-poligonos-estrelas/>.

Figura 2: Arquivo 1, construído no GeoGebra



- ✓ Definindo a circunferência
- ✓ Dividindo a circunferência em 8 partes iguais
- ✓ Saltando de 1 em 1 e ligando os pontos $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_1$
- ✓ Saltando de 2 em 2 e ligando os pontos $A_1A_3A_5A_7A_1 A_2A_4A_6A_8A_2$
- ✓ Saltando de 3 em 3 e ligando os pontos $A_1A_4A_7A_2A_5A_8A_3A_6A_1$
- ✓ Saltando de 4 em 4 não obtemos figuras fechadas
- ✓ Saltando de 5 em 5 e ligando os pontos $A_1A_6A_3A_8A_5A_2A_7A_4A_1$
- ✓ Saltando de 6 em 6 e ligando os pontos $A_1A_7A_5A_3A_1 A_2A_8A_6A_4A_2$
- ✓ Saltando de 7 em 7 e ligando os pontos $A_1A_8A_7A_6A_5A_4A_3A_2A_1$

Fonte: Clubes de Matemática da OBMEP (s/d.).

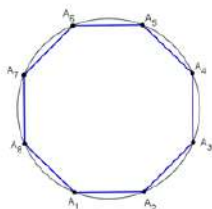
Assim, ao responder as questões propostas na atividade, esperávamos que os participantes pensassem sobre as figuras obtidas e tentassem relacioná-las, para então, passarmos a conhecer as estrelas obtidas por pontos ligados sobre uma circunferência.

A segunda parte da atividade só foi liberada após o participante responder aos oito questionamentos apresentados no Quadro 1. Nesta, fornecemos uma definição para estrelas e estrelas falsas, conforme a atividade apresentada no Quadro 2.

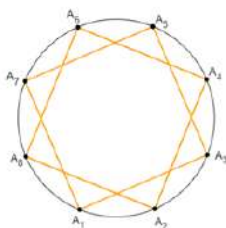
Quadro 2: Segunda parte da terceira atividade

Na atividade anterior, você observou que dividindo uma circunferência em oito partes iguais e ligando esses pontos por segmentos de retas, saltando de k em k pontos (k de 1 a 7), obtivemos diferentes figuras.

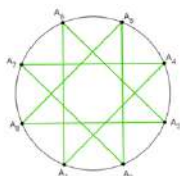
Para $k=1$ e $k=7$, obtemos um octógono regular.



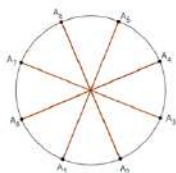
Para $k=2$ e $k=6$, obtemos uma estrela falsa.



Para $k=3$ e $k=5$, obtemos uma estrela.



Para $k=4$, obtemos segmentos de reta concorrentes.



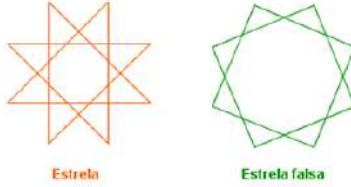
Assim, a partir do observado, definimos como estrela a figura fechada, na qual, partindo de uma de suas pontas e percorrendo continuamente um único caminho, passamos por todas as outras pontas e voltamos para a ponta da qual partimos.

Já na representação das estrelas falsas, não obtemos uma figura fechada, tendo em vista que elas são formadas por sobreposição de polígonos regulares. As figuras abaixo ilustram o explicado no caso da divisão em oito partes.

Assim, a partir do observado, definimos como estrela a figura fechada, na qual, partindo de uma de suas pontas e percorrendo continuamente um único caminho, passamos por todas as outras pontas e voltamos para a ponta da qual partimos.

Já na representação das estrelas falsas, não obtemos uma figura fechada, tendo em vista que elas são formadas por sobreposição de polígonos regulares. As figuras abaixo ilustram o explicado no caso da divisão em oito partes.

Oito pontas



Assim, após a leitura, responda:

1. Em nosso caso, a estrela foi formada quando tomamos a circunferência dividida em oito partes ($n=8$), marcamos os saltos de três em três pontos ($k=3$) e de cinco em cinco pontos ($k=5$). Da mesma forma, obtivemos uma estrela falsa quando marcamos os saltos de dois em dois pontos ($k=2$) e de seis em seis pontos ($k=6$). O que podemos observar sobre esses valores?
2. Se formos dividir uma circunferência em n partes iguais, que condição devemos ter entre n e k para obtermos uma estrela (verdadeira)?

Fonte: adaptado de Clubes de Matemática da OBMEP (s/d.).

Dessa forma, após definir o que era uma estrela e uma estrela falsa, propusemos aos participantes que investigassem quais condições garantiriam que obtivéssemos uma estrela verdadeira. Esse exercício veio como uma preparação para a terceira parte da atividade, em que foi definida, de maneira matemática precisa, uma estrela. Desse modo, foi possível expandir o conceito para o trabalho com polígonos estrelados, que era o que se objetivava construir com a tarefa proposta.

Então, por fim, a terceira parte da atividade propunha que os alunos, conhecendo essas definições, fabricassem suas estrelas, conforme o apresentado no Quadro 3.

Quadro 3: Terceira parte da terceira atividade

Na atividade 2, destacamos a diferença entre estrela e falsa estrela. Observamos que estrelas são obtidas em uma circunferência dividida em n partes, com ligação de k em k pontos, quando n e k são primos entre si, ou seja, $\text{mdc}(n,k)=1$. Assim, chegamos à seguinte definição de estrela.

Definição (Estrela).

Sejam n e k números naturais tais que $n > 4$ e $1 < k < n - 1$. Chamamos de estrela de n pontas a toda figura (n,k) , tal que n e k sejam primos entre si, ou seja, $\text{mdc}(n,k)=1$.

Podemos ampliar essa compreensão ao trabalharmos com estrelas enquanto polígonos estrelados. Vejamos a seguinte definição.

Definição (Polígonos Estrelados).

Chamamos de polígono estrelado n/k ou polígono complexo de n lados obtido a partir da divisão de uma circunferência em n partes congruentes, ligando-se sucessivamente os pontos de divisão de k em k .



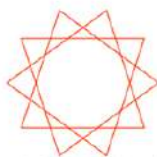
polígono estrelado regular 5/2 (ou 5/3)



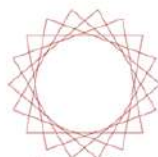
polígono estrelado regular 7/2 (ou 7/5)



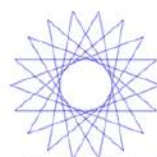
polígono estrelado regular 7/3 (ou 7/4)



polígono estrelado regular 10/3 (ou 10/7)



polígono estrelado regular 18/5 (ou 18/13)



polígono estrelado regular 18/7 (ou 18/11)

Fabricando Estrelas

Para essa etapa, iremos construir polígonos estrelados a partir de dobraduras. Nessa atividade, você precisará dos seguintes materiais:

- 1 Folha de papel laminado (cor de sua preferência)
- Régua
- Lápis e Borracha
- Tesoura
- Transferidor
- Fita adesiva ou cola

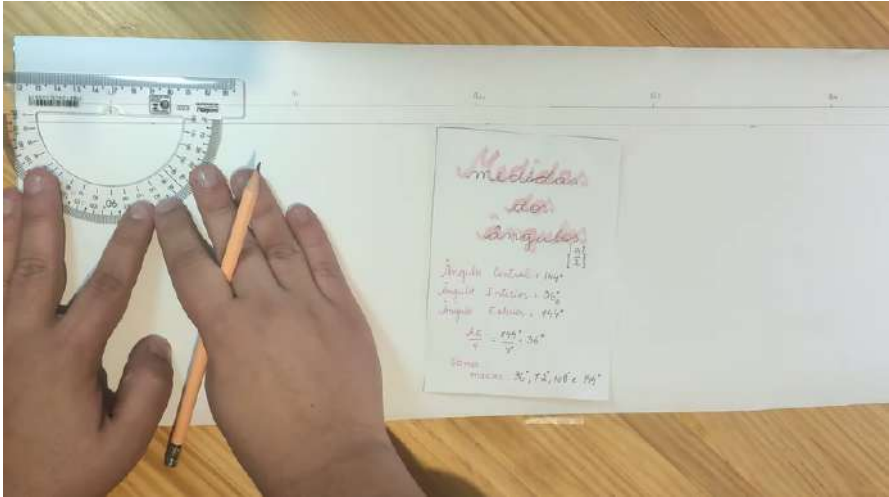
O vídeo mostra o processo de construção da dobradura 5/2, ou seja, um pentagrama. Para tal, solicitamos que você o assista e, copiando os passos apresentados nele, construa a figura apresentada. Além disso, solicitamos que você construa a figura 9/2, um eneagrama, utilizando os mesmos passos do vídeo para sua construção.

Construídas as dobraduras, tire uma foto dos polígonos construídos e poste nesta atividade, para a conclusão das tarefas da semana.

Fonte: adaptado de Clubes de Matemática da OBMEP (s/d.).

Logo, como citado no Quadro 3, construímos um vídeo que ensinava os passos necessários para a construção da figura solicitada. A Figura 3 ilustra um trecho do vídeo⁵, em que era feita a construção.

Figura 3: Frame do vídeo apresentando a construção da dobradura



Fonte: os autores (2021).

Após realizar a construção, os participantes do curso teriam concluído as atividades propostas para essa semana. Ademais, havia um fórum e foi marcado um *chat on-line* para sanar possíveis dúvidas que pudessem surgir durante a construção da dobradura apresentada pelo vídeo. Assim, idealizamos que, com essas atividades, os participantes poderiam experimentar o processo de criação de uma dobradura, investigando, antes dessa etapa, os conceitos relacionados ao conhecimento geométrico explorado e refletindo sobre sua importância no ensino de Geometria.

ALGUNS RESULTADOS

As atividades propostas no módulo 3 tiveram a participação de, em média, 20 cursistas, o que consideramos um bom índice para esse

⁵ Disponível em: <https://youtu.be/hg0m8LMQU5s>.

Figura 5: Alguns relatos do fórum proposto aos participantes

5a Dobraduras por - domingo, 20 jun 2021, 15:43

Olá!

Em minha experiência como professora de Matemática, ainda não tive a oportunidade de usar dobraduras. Penso que seja interessante aplicar nas aulas e para tanto acredito que esse curso me ajudará para que seja possível essa aplicação.

5b Dobraduras por - quarta, 16 jun 2021, 18:00

Em sala de aula, (pelo tempo de experiência) ainda não tive a oportunidade de trabalhar com dobraduras com meus alunos, mas certamente farei algum trabalho assim que começar a trabalhar com geometria em sala de aula.

5c Dobraduras e os conceitos primitivos por - segunda, 14 jun 2021, 16:07

A alguns anos trouxe para minha prática docente o uso de dobraduras, no ensino médio ensinar os conceitos primitivos e as vezes "chato para os alunos", e por causa de um evento na escola, observei que os alunos adoravam dobrar, e produziam lindas peças de origami.

Vi potencial nessa atividade e a incorporei em minhas aulas, todos anos fazemos algumas figuras com o objetivo oculto de estudar os conceitos primitivos da geometria.

Fico maravilhada com a capacidade de absorção dos conceitos apenas utilizando a técnica de dobraduras, sem a necessidade de decorar e sim de entender. Já no ensino fundamental utilizo o livro as "3 partes" como base da construção do conhecimento, uma vez entendida a técnica, eles passam a produzir sua própria história com as figuras feitas com dobraduras. Particularmente acredito que a arte de dobrar é uma das atividades mais lindas e produtivas em sala de aula.

Fonte: dados da pesquisa (2021).

Assim, acreditamos que o fórum pode ter sido um espaço para conhecer as experiências de outros colegas e pensar em possíveis cenários de aplicação para atividades que utilizassem as dobraduras.

Sobre a atividade final, composta pelas três partes, pudemos observar que grande parte dos participantes obteve sucesso na realização e na discussão das questões propostas.

Com exceção de dois participantes, os demais conseguiram estabelecer as relações esperadas com as questões da primeira parte da atividade. A Figura 6 ilustra as respostas de um destes.

Figura 6: Resposta de um participante às primeiras questões

1. Que figura obtemos ao saltar de um em um ponto ($k=1$)? *Octógono*
2. Que figura obtemos ao saltar de dois em dois pontos ($k=2$)? *Estrela falsa ou quadrados*
3. Que figura obtemos ao saltar de três em três pontos ($k=3$)? *Estrela*
4. Que figura obtemos ao saltar de quatro em quatro pontos ($k=4$)? *Segmentos de reta concorrentes.*
5. Que figura obtemos ao saltar de cinco em cinco pontos ($k=5$)? *Estrela*
6. Que figura obtemos ao saltar de seis em seis pontos ($k=6$)? *Estrela falsa ou quadrados*
7. Que figuras obtemos ao saltar de sete em sete pontos ($k=7$)? *Octógono*
8. O que podemos concluir a partir do observado? *Observando as figuras no software GeoGebra, pode constatar que quando $k=1$ e $k=7$ as figuras (octógonos) se coincidem; quando $k=2$ e $k=6$ as figuras (estrelas falsas) também se coincidem; quando $k=3$ e $k=5$ acontece a mesma situação citada para as figuras anteriores, as estrelas se coincidem e; quando com $k=4$ forma-se segmentos de reta concorrentes.
Sendo assim, ao considerar o número de saltos (k) e o número de pontos fixos que a circunferência possui (8 pontos), pensei na relação que envolve o par ordenado: $(n, n-k)$, sendo n o número de pontos e k o número de saltos. Diante do exposto, ao substituir os saltos e o ponto no par ordenado, obtemos as figuras disponíveis no arquivo do GeoGebra. isto é, para $k=1$, temos (8,7); para $k=2$, temos (8,6); para $k=4$ temos (8,4); para $k=5$ temos (8, 3); para $k=6$ temos (8,2) e; para $k=7$ temos (8,1).*

Fonte: dados da pesquisa (2021).

Podemos perceber, a partir da Figura 6, que o participante já conhecia a ideia das estrelas e estrelas falsas, chamando-as assim antes mesmo de trabalharmos com a nomenclatura. Ademais, a relação estabelecida na questão oito é válida e se assemelha ao esperado, destacando o reconhecimento de um padrão para os pares de figuras e a criação dos pares ordenados de forma correta. A resposta poderia ser complementada caso o participante comentasse o padrão observado pelos valores dos saltos, por exemplo, o porquê das figuras com $k=2$, $k=4$ e $k=6$ não gerarem estrelas, ou seja, o Máximo Divisor Comum (MDC) ser diferente de um.

Para as questões dispostas na segunda parte da atividade, poucos participantes conseguiram reconhecer a questão do MDC ser igual a um, sendo que a maioria ficou ligada ao fato de os números serem pares ou ímpares. A Figura 7 ilustra a resposta de dois participantes, sendo que um chegou à conclusão esperada (Figura 7b) e outro apresentou a dificuldade citada (Figura 7a).

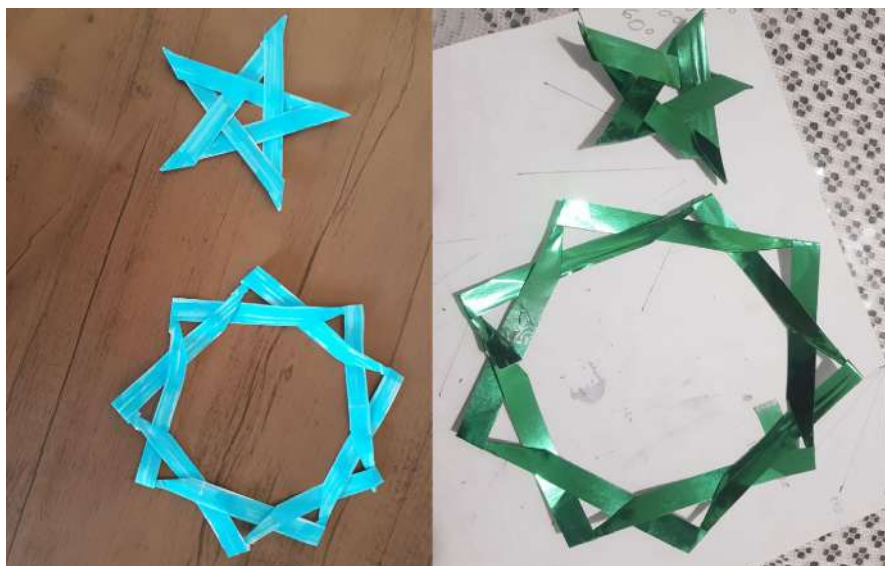
Figura 7: Resposta de dois participantes às questões da segunda parte da tarefa

<p>Sí n es un número natural par, k debe ser impar para obtener estrellas verdaderas.</p> <p>Sí n es impar, k debe ser par para construir estrellas verdaderas.</p>	7a
<p>1. Em nosso caso, a estrela foi formada quando tomamos a circunferência dividida em oito partes ($n=8$), e marcamos os saltos de três em três pontos ($k=3$) e de cinco em cinco pontos ($k=5$). Da mesma forma, obtivemos uma estrela falsa quando marcamos os saltos de dois em dois pontos ($k=2$) e de seis em seis pontos ($k=6$). O que podemos observar sobre esses valores? Pelo que pude observar, quando n par e k também par, a figura obtida é uma estrela falsa. Já quando o mesmo n for par e k ímpar, a figura obtida é uma estrela. Outra observação é que para $n=8$, $k=3$ e $k=5$ o máximo divisor comum (m.d.c) de k e n é 1: O que não acontece quando $n=8$, $k=2$ e $k=6$.</p> <p>2. Se formos dividir uma circunferência em n partes iguais, que condição devemos ter entre n e k para obtermos uma estrela (verdadeira)? Seguindo o raciocínio acima quando n for par e k ímpar e o mdc (n,k)=1, resulta em uma estrela.</p>	7b

Fonte: dados da pesquisa (2021).

No geral, mesmo que não tenham conseguido estabelecer a conexão com o Máximo Divisor Comum, acreditamos que a relação estabelecida demonstra que os passos da investigação foram bem desenvolvidos pelos participantes, sendo o refinamento da definição apresentado na continuidade da tarefa, de forma a possibilitar que chegassem à conclusão de maneira correta.

Por fim, quando solicitados que construíssem os polígonos por dobraduras, os participantes mostraram habilidade técnica e os construíram de maneira correta, seguindo os passos apresentados no vídeo. Esse fato pode ser ilustrado pela Figura 8, que traz a construção de dois participantes.

Figura 8: Dobraduras construídas por dois participantes

Fonte: dados da pesquisa (2021).

Diante do exposto, cremos que o módulo proporcionou um espaço de reflexão aos professores e aos estudantes de licenciatura que participaram do curso, fazendo-os conjecturar sobre possibilidades de aplicações das dobraduras no ensino de Geometria. Nesse sentido, o módulo possibilitou vivências que exploraram diferentes formas de pensar sobre esse recurso e sobre a organização de uma tarefa com a investigação matemática em tempos pandêmicos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo teve por objetivo apresentar as práticas realizadas no terceiro módulo do curso de extensão “Abordagens metodológicas para o Ensino de Geometria”, trazendo relatos e produções dos professores participantes do curso na reflexão das atividades propostas.

Sobre as atividades apresentadas, cremos que estas poderiam ser utilizadas pelos professores nos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, ao explorarem temas como o Máximo Divisor Comum,

em uma ampliação das noções de polígonos ou, ainda, em um trabalho com os entes geométricos mobilizados na construção da dobradura.

Nesse sentido, há um potencial pedagógico bastante diverso para a tarefa, cabendo ao professor reconhecer a profundidade que deseja dar à atividade em sala de aula, com seus alunos. É possível, até mesmo, explorar recursos como o transferidor, o qual poucas vezes tem espaço no ambiente escolar.

Quanto ao andamento do módulo, acreditamos que a organização didática proposta dificultou, em alguns momentos, o desenvolvimento das atividades pelos participantes. Como havia a necessidade da entrega da primeira parte da atividade para a liberação de acesso à segunda, e da entrega da segunda parte para o acesso à terceira, alguns deles acabaram por não concluírem as três partes propostas para o estudo. Esse é um fator que, enquanto grupo de pesquisa, pretendemos refletir para possíveis próximas turmas do curso, ou em outros momentos em que se utilizem as atividades.

Por fim, reiterando o citado anteriormente, consideramos que o módulo proporcionou uma boa experiência aos professores em formação inicial ou continuada, no sentido de oferecer um espaço de reflexão para a utilização das dobraduras nas aulas de Matemática.

Nesse sentido, a participação no curso, de forma geral, poderá promover, em um futuro não tão distante, uma qualificação dos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática no âmbito escolar, por meio de metodologias que diversifiquem a atividade docente e as formas de aprender Matemática na sala de aula.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base nacional comum curricular**. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf. Acesso em: 27 jul. 2021.

BRITO, D. S. **Aprender geometria em práticas de modelagem matemática: uma compreensão fenomenológica**. 2018. 205f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina - PR, 2018.

CASTIBLANCO, C. F. C.; VELÁSQUEZ, O. J. R. Algunas consideraciones sobre el pensamiento divergente y la creatividad a partir de la resolución de un problema geométrico con múltiples vías de solución. **Números**, v. 107, p. 91-108, 2021.

CLUBES DE MATEMÁTICA DA OBMEP. **Um pouco sobre polígonos – Polígonos, uma primeira definição.** s/d. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/um-pouco-sobre-poligonos-poligonos-uma-primeira-definicao-2/>. Acesso em: 01 maio 2021.

FONSECA, J. A.; LUTZ, M. R.; LEIVAS, J. C. P. Desenvolvendo o conceito de cônicas a partir de dobraduras. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIII, 2019. **Anais...** Cuiabá, SBEM - MT, 2019.

GUIMARÃES, V. G. **Ensinando a geometria euclidiana no ensino fundamental por meio de recursos manipuláveis.** 2015. 82 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2015.

HIRATSUKA, P. I. O lúdico na superação de dificuldades no ensino de geometria. **Educação em Revista**, v. 7, n. 1/2, p. 55-66, 2006.

LEIVAS, J. C. P.; LARA, D. S.; SOARES, G. O. Polígonos: dobra aqui, dobra ali e um objeto esquecido: o transferidor. **Ensino e Tecnologia em Revista**, v. 1, n. 2, p. 209-225, 2017.

LEIVAS, J. C. P.; NADALON, D. O.; LUTZ, M. R.; SOARES, G. O. Recurso didático para ensino geometria: o uso de dobras de papel para obter regiões poligonais/ polígonos. **REAMEC**, v. 5, n. 2, p. 265-281, 2017.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria?. **A Educação Matemática em Revista - SBEM**, v. 3, n. 4, p. 3-13, 1995.

OLIVEIRA, N. S. D.; CAMARGO, J. A. **O mundo da Geometria conhecido através de dobraduras.** 2016. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_artigo_mat_uepg-neidedasilvadominguesdeoliveira.pdf. Acesso em: 20 maio 2021.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. Investigar em Matemática. In: PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019. p. 1-10.

ROSA, C. D.; LEIVAS, J. C. P.; LUTZ, M. R.; FONSECA, J. A. Deduzindo a fórmula para cálculo de diagonais de um polígono: uma experiência no Ensino Fundamental. **Revista de Ciência e Inovação**, v. 4, n. 1, p. 22-35, 2019.

SOARES, G. O.; CASTRO, L. T.; STEFANELLO, A. P.; LEIVAS, J. C. P. O jogo “Geometria em ação” na licenciatura em Matemática: (re)visitando conceitos geométricos por meio de gestos. **REVASF**, v. 11, n. 24, p. 248–275, 2021.

SOARES, G. O.; VARGAS, A. V.; LEIVAS, J. C. P. Percepções e sentimentos de alunos do Ensino Médio em relação à matemática. **BOCEHM**, v. 7, n. 19, p. 5-23, 2020.

SOUSA NETO, P. R.; SILVEIRA, M. R. A. Materiais didáticos para o ensino e aprendizagem da geometria. **BoEM**, v. 4., n. 6., p. 1-27, 2016.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Além disso, agradecemos à Universidade Franciscana e ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Campus Alegrete, pelo apoio prestado ao desenvolvimento do curso.

Capítulo IV

VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA X VAN HIELE

JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS
ANNE DESCONSI HASSELMANN BETTIN
ERILÚCIA SOUZA DA SILVA
MAURICIO RAMOS LUTZ

INTRODUÇÃO

Pensamento visual é algo que pode ser desenvolvido nas pessoas ou é algo nato? Iniciamos o capítulo com este questionamento, sem a expectativa de respondê-lo, até porque respostas prontas, em Educação, podem conduzir a equívocos, no contexto específico deste estudo, em Educação Matemática. Essa área consolida-se a partir de eminentes matemáticos de origem, que passam a se envolver com os processos de ensinar e de aprender.

Entendemos que um grupo de estudos e pesquisas, no nosso caso em Geometria, tem muito a contribuir para a formação de um pensamento visual, facilitando a compreensão, tanto de professores quanto alunos, a respeito dessa área. A Geometria, muitas vezes, é deixada de lado no desenvolvimento dos currículos, nos diversos graus de ensino, por falta de metodologias adequadas, por exemplo.

Retomamos, aqui, autores/pesquisadores como Piaget (1896-1980), biólogo e psicólogo que trouxe contribuições importantes para a questão do desenvolvimento da aprendizagem matemática em geral e, particularmente, da Geometria. O autor indica, dentre outras descobertas,

que a geometria topológica¹ é mais natural para a aprendizagem da criança do que a euclidiana, uma vez que independe do conceito de distâncias.

Freudenthal (1905-1990), originalmente matemático, contribuiu com a área dura, por assim dizer, da Matemática, a saber, a topologia. Começou a interessar-se por literatura, filosofia e história, destacando-se, assim, na Educação Matemática, em que ele considera “Matemática como uma tarefa educacional”, título de um de seus livros. Suas ideias embasaram uma abordagem importante para o ensino do que é a Educação Matemática Realística².

Skemp (1919-1995) articulou Psicologia, Matemática e Educação, trazendo uma importante contribuição ao estabelecer dois tipos de aprendizagem: a compreensão instrumental, que ocorre por memorização ou habitual, e a compreensão relacional, a qual corresponde a uma aprendizagem esquemática ou inteligente. Ambas são importantes de serem abordadas no ensino de Geometria e merecem ser aprofundadas, tanto na formação inicial quanto na continuada.

D’Ambrósio (1932-2021) foi um matemático brasileiro que passou a dedicar-se a divulgar uma matemática humanizadora, na medida que criou a Etnomatemática, ou seja, a Matemática encontrada nos diferentes contextos, sejam eles sociais, culturais ou econômicos.

Raymond Duval (1937–atual) é filósofo e psicólogo de formação desde a década de 70, desenvolvendo pesquisas associadas à psicologia cognitiva, o que tem contribuído para a área de Educação Matemática. Segundo Duval (2010, p. 11), o objetivo da Matemática é “contribuir para o desenvolvimento geral de capacidades de raciocínio, de análise e de visualização”. Ele destaca que, para haver a compreensão matemática, faz-se necessária uma abordagem cognitiva, porém, esta deve buscar retratar os processos de aquisição de conhecimentos que possibilite ao aluno compreender, efetuar e controlar a variedade dos procedimentos matemáticos que lhe são propostos em situações de ensino.

Poderíamos continuar discorrendo por inúmeros estudiosos de diversas áreas que passaram a preocupar-se com o ensino e a aprendizagem das matemáticas e, em especial, da Geometria, área de interesse do

1 A Geometria Topológica é um tipo de geometria não euclidiana.

2 Considera que a aprendizagem matemática origina-se o de situações reais, permitindo ao aluno reinventar a Matemática.

GEPGEO – Grupo de Estudos e Pesquisa em Geometria, ligado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana - UFN.

O objetivo do capítulo apresentado corresponde ao módulo quatro do curso de extensão promovido pelo GEPGEO: “Com base nos níveis de Van Hiele e na habilidade de visualização, explorar e analisar formas geométricas 2D (bidimensional) e 3D (tridimensional) em representações e no ambiente cotidiano”. Para cumprir com tal objetivo, delineamos os seguintes tópicos: visualização; níveis de Van Hiele (1º e 2º - atenção maior e conexão com habilidades visuais); recursos didáticos para o ensino de Geometria; classificação de quadriláteros a partir de atividade com tiras de papel colorido e atividades avaliativas.

Assim, na sequência indicada de autores/pesquisadores, trazemos os Van Hiele, com a criação de um modelo de desenvolvimento do pensamento em Geometria, por volta dos anos 1950. Nasser (1992) desenvolveu seu doutorado na Inglaterra, com uma pesquisa na escola secundária brasileira, usando a Teoria de Van Hiele. Ao afirmar que, no Brasil, até por volta dos anos 1950-60, da mesma forma que em outros países, não haviam sido realizadas pesquisas que evidenciassem o fraco desempenho dos estudantes em Geometria. A autora/pesquisadora afirma que os alunos frequentemente chegam aos anos finais do Ensino Fundamental sem um primeiro contato com um sistema formal de Geometria, faltando experiências prévias em atividades espaciais e de visualização. O casal Van Hiele também partiu dessa premissa sobre as limitações e dificuldades dos alunos, porém no contexto da Holanda, o que os levou a investigar com mais profundidade o processo de formação de pensamento geométrico, culminando em um modelo próprio.

Acreditamos que, embora alguns avanços tenham ocorrido no quesito ensino e aprendizagem de Geometria, ainda há muito a ser desenvolvido, a fim de alcançar um patamar satisfatório. Nessa direção, o presente capítulo apresenta possibilidades de explorar habilidades visuais em diversos níveis de escolaridade, levando em consideração um módulo de um curso de extensão realizado em formato não presencial, do qual participaram estudantes e professores de diversas regiões do Brasil, bem como da Argentina e da Colômbia. O curso teve a parceria do GEPGEO, Universidade Franciscana (UFN) e Instituto Federal Farroupilha (IFFar).

A partir da elaboração inicial do modelo de Van Hiele, algumas alterações foram feitas, todas envolvendo a estrutura de níveis (ao todo são cinco), porém, sua denominação e ordenação apresentam algumas variações, como iniciar por nível 0 para uns e nível 1 para outros. Neste trabalho, os níveis são: 1º nível (básico, reconhecimento ou visualização), 2º nível (análise), 3º nível (abstração ou dedução informal), 4º nível (dedução) e 5º nível (rigor).

Em função do nosso interesse pelo assunto visualização, discutiremos, neste capítulo, algumas características dessa habilidade, a qual consideramos relevantes para o desenvolvimento do pensamento geométrico do estudante. O tema habilidades visuais tem sido bastante discutido e estudado na atualidade, inclusive no *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (IGPME), o que demonstra sua importância. Além disso, o líder do GEPGEO tem defendido essa habilidade, proporcionando alternativas metodológicas para empregar a Geometria como uma didática para ensinar Matemática em suas variadas vertentes. Isso vai diretamente ao encontro do que preconiza o nível inicial da Teoria de Van Hiele, uma vez que o estudante, nesse nível, reconhece, compara e nomeia figuras geométricas a partir de sua aparência global, ou seja, visual. Para isso, pode recorrer a recursos didáticos de diferentes naturezas.

Nessa direção, indicar a utilização de recursos didáticos diversos é sempre oportunar, principalmente aos professores, opções para o ensino, conforme o que dispõe a comunidade na qual estão inseridos. Lorenzato (2008) define: “Material didático (MD) é qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem” (p. 18). Na perspectiva de Leivas et al. (2017, p. 268), estes são concebidos como “todos os recursos materiais que podem ser utilizados pelo professor, de forma intencional, explorados pelos estudantes e que propiciem a construção do conhecimento”. Os autores destacam que o professor deve levar em conta que a utilização, *per se*, de atividades manipulativas ou visuais não garante a aprendizagem, fazendo-se necessárias atividades mentais.

DESENVOLVIMENTO

Para desenvolver o módulo do curso, optamos por iniciá-lo com um vídeo motivador produzido pela Professora Dra. Lilian Nasser³, no qual explora fundamentos da Teoria de Van Hiele. Esse material vai ao encontro do explanado no parágrafo anterior quanto aos aspectos visuais preconizados por Lorenzato (2008) como um tipo de recurso didático.

No módulo do curso indicado, foram propostas duas atividades: a) a primeira, com base nas indicações do Projeto Fundação, por Nasser e Sant'Ana (2000); b) a segunda, envolvendo construções com tiras de papel, adaptadas de Rego e Rego (1999).

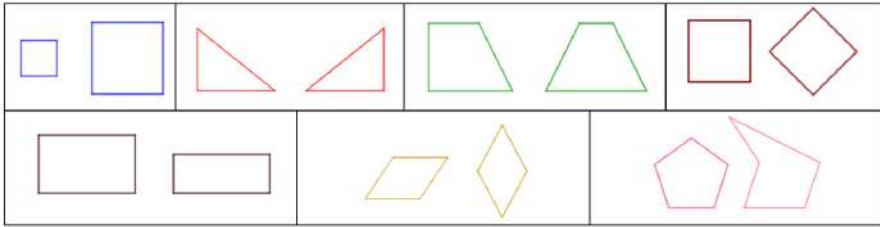
Na sequência, apresentamos cada uma das atividades propostas aos cursistas.

A) ATIVIDADE INVESTIGATIVA 1: ESTUDO DOS NÍVEIS DE VAN HIELE

Nesta atividade, optamos por investigar o nível de desenvolvimento do raciocínio dos participantes em Geometria, bem como suas habilidades visuais na exploração e na análise de formas geométricas 2D. Nessa etapa, nos fixamos nos níveis 1 e 2 de Van Hiele.

Assim, para a realização dessa atividade, os participantes responderam quais semelhanças e diferenças poderiam ser percebidas, com base na visualização de pares de figuras geométricas 2D, conforme ilustrado na Figura 1. Para a coleta das respostas, foi utilizado o *Google Forms*.

³ O vídeo pode ser encontrado no seguinte endereço: <https://www.youtube.com/watch?v=3o0JEHRRBj0>.

Figura 1: Pares de figuras geométricas analisadas pelos participantes

Fonte: adaptado de Nasser e Sant'anna (2000).

Essa atividade pode ser analisada segundo a Teoria de Van Hiele, tomando por base os seguintes níveis:

Nível 1 (nível básico, reconhecimento ou visualização): identifica, compara e atribui nome às figuras geométricas, com base na sua aparência global, sem prestar atenção nas propriedades que as definem, por exemplo, forma e tamanho.

Nível 2 (análise): analisa as figuras com base em seus elementos, reconhecendo suas propriedades. Van Hiele (1986) comenta que o aluno pode, por exemplo, identificar que o quadrado possui os quatro lados iguais, mas não reconhecer que um retângulo é um paralelogramo.

Nível 3 (abstração ou dedução informal): estabelece relações entre as propriedades de uma figura, bem como que, ao compará-la com outra figura, uma propriedade pode decorrer de outra. Faz, assim, distinção entre as figuras e a orientação de classes de figuras geométricas. Aqui, é possível estabelecer relações entre um retângulo e um paralelogramo, conforme Van Hiele (1986). Ainda, pode apresentar justificativa, por meio de deduções feitas no nível anterior.

Nível 4 (dedução): usa definições para justificar e elaborar demonstrações formais, fazendo distinções entre postulados, teoremas e definições.

Nível 5 (rigor): é capaz de fazer análises de outras geometrias, dentre elas, as não euclidianas, compreendendo e fazendo comparações.

A partir dos níveis apresentados, não existe uma única resposta correta, pronta e acabada, para a atividade. Ela depende de uma análise minuciosa e individual das respostas de cada participante. Se fosse analisada só a forma geométrica quadrada (Figura 1), por exemplo, já dariam cinco gabaritos, mas só uma forma não indica em qual nível o

participante se encontra. Ao analisar as respostas de um indivíduo na figura do quadrado e depois na do triângulo, ele pode ser classificado no nível 1 e no nível 2, respectivamente. Isso leva a concluir que, sem um exame detalhado de múltiplas formas, não é possível afirmar em qual nível de desenvolvimento do raciocínio o indivíduo se encontra na atividade proposta.

Portanto, a análise deve ser feita com base nas ideias globais de todas as formas geométricas que constam na atividade, para ser mais precisa a identificação do nível e, conseqüentemente, a fixação dos níveis 1 e 2 de Van Hiele, originalmente prevista na proposta. Isso se constitui como exemplo de uma possível atividade a ser aplicada na Educação Básica, a qual pode ser feita individualmente pelos alunos e, em seguida, as respostas serem debatidas com a turma. O professor pode formular e desenvolver, juntamente aos alunos, conceitos e propriedades características de cada figura e grupo ao qual ela pertence.

Identificar o nível de desenvolvimento do raciocínio geométrico dos estudantes da escola básica pode auxiliar a organizar materiais pedagógicos e atividades que visem aproximação entre os níveis dos alunos, preparando-os para avançar ao próximo nível e auxiliando-os no desenvolvimento de habilidades visuais. Tarefas desse tipo podem promover a capacidade de desenvolver habilidades de percepção espacial sugeridas por Del Grande (1994), ou seja: coordenação visual-motora, percepção de figuras em campos, constância de percepção, percepção da posição no espaço, percepção de relações espaciais, discriminação visual e memória visual.

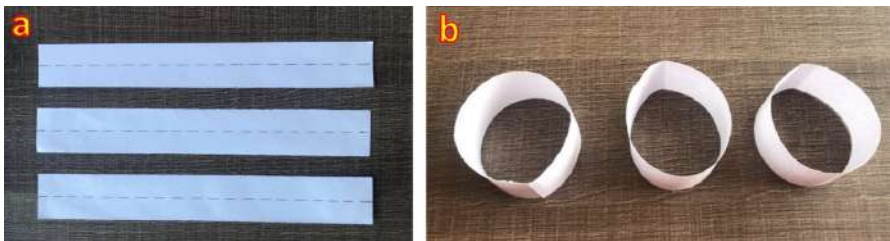
Conforme o participante realiza a atividade, desenvolve habilidades visuais na exploração e na análise de formas geométricas 2D, as quais não foram percebidas e analisadas antes, talvez por falta de foco, atenção e concentração, ou, ainda, por desconhecimento ou simplesmente por não julgá-las importantes quando exploradas. Na seqüência, envolvendo outras figuras geométricas, ele pode resgatar tais percepções necessárias.

B) ATIVIDADE INVESTIGATIVA 2: ESTUDO DOS QUADRILÁTEROS

Nesta atividade, pensamos na introdução do estudo de alguns quadriláteros (quadrado, retângulo, losango e paralelogramo), a partir de suas características e propriedades (primeiro nível de Van Hiele). Para isso, utilizamos a segunda indicação feita por Lorenzato (2008) a respeito de recursos didáticos, ou seja, o uso de material manipulativo.

Para realizar a atividade, é necessário ter à disposição algumas folhas de papel colorido (de preferência tamanho A4 ou Ofício) ou papel jornal, além de tesoura e cola. Inicialmente, são cortadas várias tiras de papel com comprimentos de 30 cm e de 15 cm e de largura de 4 cm. Em seguida, deve marcar-se uma linha pontilhada a partir do ponto médio do lado de menor dimensão (Figura 2 (a)). Depois de recortadas as tiras, é necessário colá-las, formando anéis (ou argolas) de papel, como na Figura 2 (b).

Figura 2: Tiras recortadas e coladas



Fonte: acervo dos autores.

Após, iniciamos uma série de questionamentos, no intuito de investigar as construções propostas.

a) Primeira investigação

O que acontece quando cortamos o anel pela linha pontilhada, conforme apresentado na Figura 3?

Figura 3: Anel com a linha pontilhada



Fonte: acervo dos autores.

Resposta esperada: Deveriam aparecer dois anéis de mesmo comprimento e largura.

b) Segunda investigação

Colar dois anéis iguais aos da primeira investigação, um perpendicularmente ao outro, como apresentado na Figura 4. O que acontece se cortarmos os dois anéis colados, seguindo as linhas tracejadas, como fizemos na primeira investigação?

Figura 4: Dois anéis colados perpendicularmente.

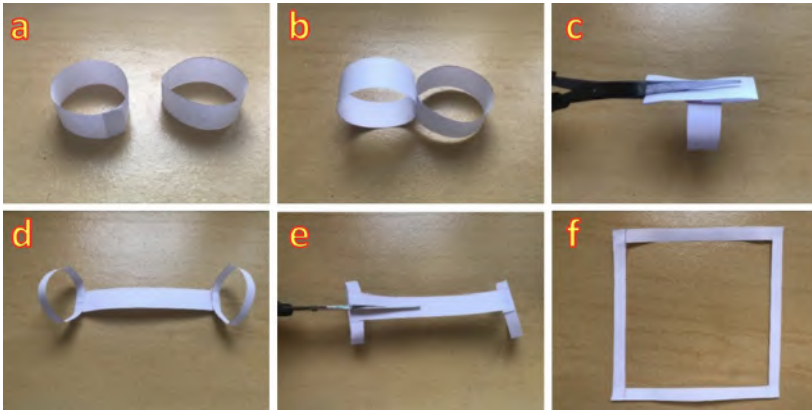


Fonte: acervo dos autores.

Resposta esperada: Após pegar os dois anéis de mesmo tamanho (Figura 5a), colar de forma perpendicular um ao outro (Figura 5b) e recortar um dos anéis no sentido longitudinal (Figura 5c), ficamos com um objeto parecendo uma alga, ou seja, dois anéis unidos por um "segmento de reta" (Figura 5d). Para concluir,

cortamos de forma longitudinal a tira (segmento de reta) (Figura 5e), obtendo uma nova figura (Figura 5f). Após cortados os dois anéis, teremos um formato quadrado (colocar sobre uma superfície plana).

Figura 5: Estudo do quadrado



Fonte: acervo dos autores.

Podemos aproveitar e explorar com os alunos as características da figura geométrica obtida. Se ela é um quadrado, então deve possuir os quatro lados de mesma medida, paralelos entre si, e os quatro ângulos internos retos, ou seja, medindo 90° .

c) Terceira investigação

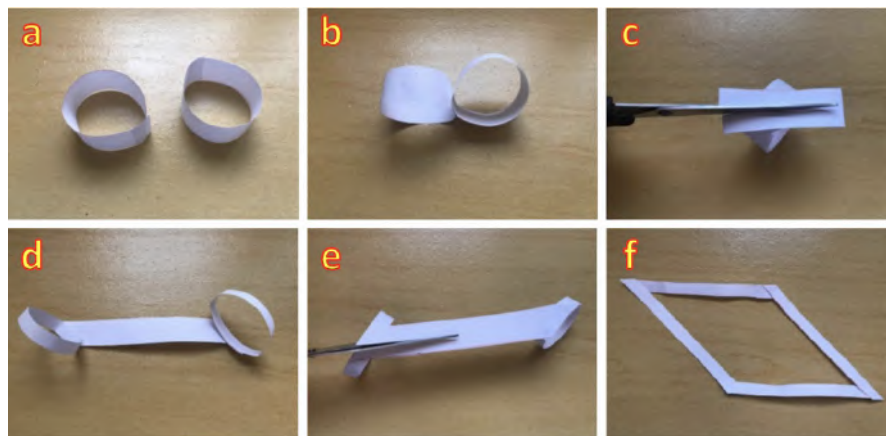
Como deveriam ser colados os anéis para que o resultado fosse um losango (não quadrado)? Os dois anéis iniciais devem ser do mesmo tamanho?

Resposta esperada: Devem ser de mesmo tamanho, colados inclinados um em relação ao outro.

Após experimentar várias possibilidades de colagem de anéis de tamanhos diferentes, chegamos à conclusão de que devemos pegar duas tiras de papel de dimensões iguais e colarmos no formato de anel (Figura 6a). Em seguida, colar os dois anéis de forma inclinada um em relação ao outro (Figura 6b). Depois, recortar um dos anéis no sentido longitudinal (Figura 6c), ficando com um objeto semelhante a uma algema, ou seja,

dois anéis unidos por um segmento de reta (Figura 6d). Para finalizar, cortar de forma longitudinal a tira (segmento de reta) (Figura 6e), formando um novo objeto (Figura 6f) que se assemelha a uma figura geométrica.

Figura 6: Estudo do losango



Fonte: acervo dos autores.

Após a construção, o professor pode explorar com os discentes as características dessa figura geométrica. Se ela é um losango, então deve possuir os quatro lados congruentes, os ângulos opostos também de mesma medida e as diagonais cortando-se ao meio.

d) Quarta investigação

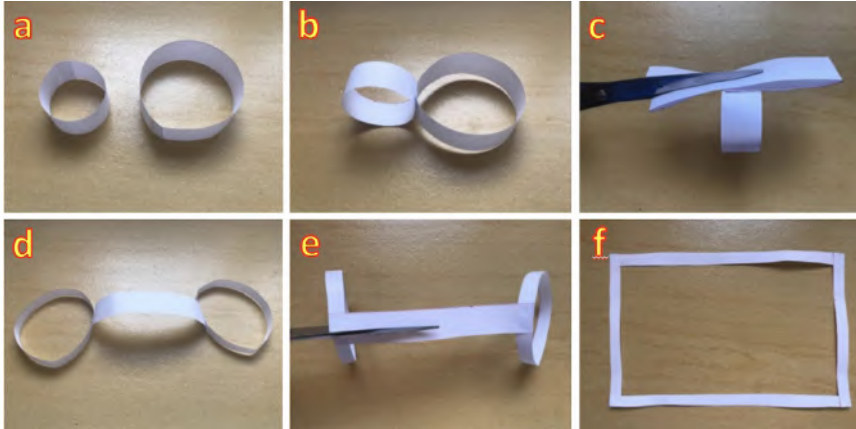
Como devem ser os anéis iniciais para que o resultado da nova construção seja um retângulo (não quadrado)? Devem ter as mesmas dimensões ou serem diferentes? Os anéis devem ser colados perpendicularmente um ao outro ou não?

Resposta esperada: Devem ter tamanhos diferentes, colados perpendicularmente um ao outro.

Após ter experimentado várias possibilidades de colagem de anéis de tamanhos diferentes, chegamos ao formato de anel (Figura 7a). Depois, colamos os dois anéis de forma perpendicular (Figura 7b).

Dando continuidade, recortar um dos anéis no sentido longitudinal (Figura 7c), ficando com um objeto semelhante a uma alga, isto é, dois anéis unidos por um segmento de reta (Figura 7d). Para finalizar, cortamos de forma longitudinal a tira (segmento de reta) (Figura 7e), obtendo um novo objeto (Figura 7f).

Figura 7: Estudo do losango



Fonte: acervo dos autores.

O professor pode explorar com os alunos as características dessa figura geométrica. Nesse caso, obtemos um retângulo em que seus lados opostos são paralelos entre si e de mesma medida e seus ângulos internos medem 90° .

e) Quinta investigação

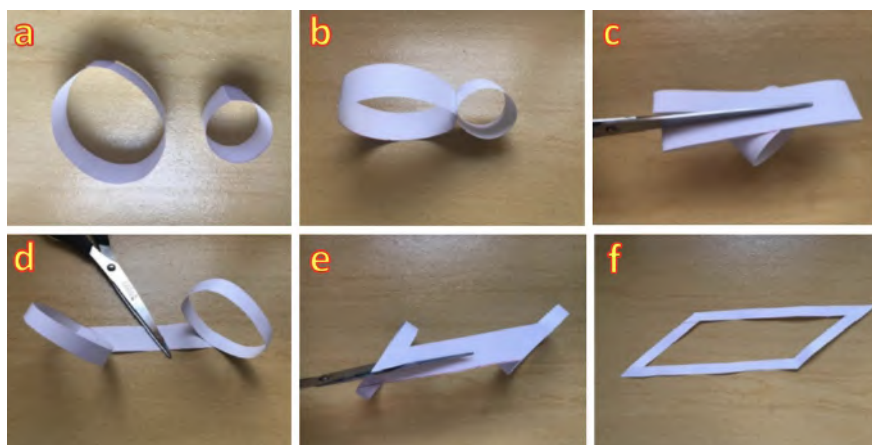
Como devem ser os anéis e como podemos colá-los para que o resultado seja um paralelogramo (não quadrado)?

Resposta esperada: De tamanhos diferentes, colados inclinados um em relação ao outro.

Após ter experimentado várias possibilidades de colagem de anéis e de tamanhos diferentes, chegamos ao resultado de que devemos pegar duas tiras de papel de dimensões diferentes e colar no formato de anel (Figura 8a). Depois, colamos os dois anéis de forma inclinada

um em relação ao outro (Figura 8 b). Dando continuidade, recortamos um dos anéis no sentido longitudinal (Figura 8 c), ficando com um objeto semelhante a uma alga, quer dizer, dois anéis unidos por um segmento de reta (Figura 8d). Por fim, cortamos de forma longitudinal a tira (segmento de reta) (Figura 8e), obtendo, dessa forma, um novo objeto (Figura 8f).

Figura 8: Estudo do paralelogramo



Fonte: acervo dos autores.

Realizada a construção, é possível examinar com os alunos as características dessa figura geométrica. Se ela for um paralelogramo, deve possuir os lados opostos paralelos entre si e de iguais dimensões. Além disso, os ângulos opostos são congruentes e suas diagonais cortam-se ao meio.

f) Sexta investigação

Outro tipo de quadrilátero, o trapézio, não pode ser obtido de modo semelhante. Por que isso ocorre?

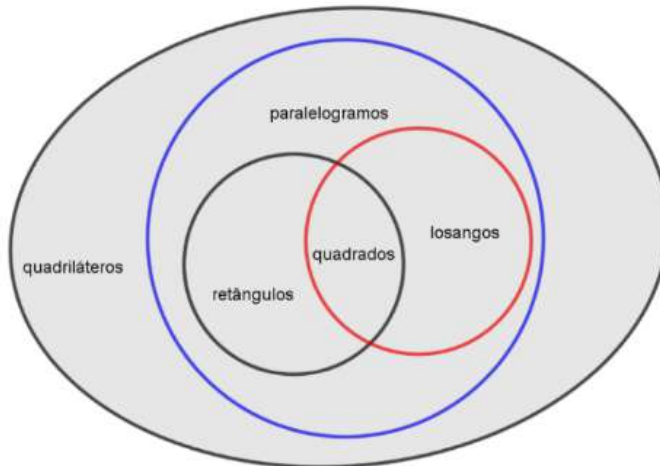
Resposta esperada: O trapézio, ao contrário dos quadriláteros obtidos anteriormente, tem apenas dois lados paralelos. Por esse motivo, não tem como confeccioná-lo utilizando a colagem dos anéis.

g) Sétima investigação

Estabeleça uma relação entre o conjunto dos quadriláteros, dos paralelogramos, dos retângulos, dos losangos e dos quadrados. O que existe no conjunto dos quadriláteros que não existe no dos paralelogramos? E no dos paralelogramos que não existe no dos retângulos? E no dos retângulos que não existe no dos losangos?

Resposta esperada: O conjunto dos quadriláteros contém os conjuntos dos paralelogramos. Da mesma forma, o conjunto dos paralelogramos contém o conjunto dos retângulos e dos losangos; e, para finalizar, o conjunto dos retângulos e dos losangos contém o conjunto dos quadrados. Essa relação pode ser vista na Figura 9.

Figura 9: Relação entre os conjuntos dos quadriláteros



Fonte: acervo dos autores.

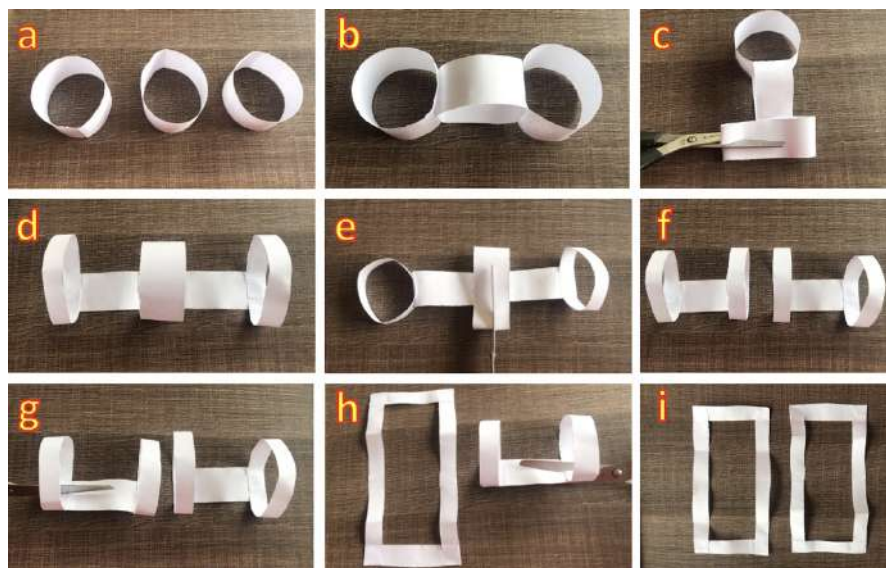
h) Oitava investigação

Colar três anéis com as mesmas dimensões, cada um perpendicular ao seguinte, e cortar de forma similar ao realizado anteriormente. O que acontece?

Separamos três tiras de papel de mesmas dimensões e colamos no formato de anel (Figura 10 a). Depois disso, colamos os três anéis um perpendicularmente ao outro (Figura 10b). Em seguida, recortamos um dos anéis no sentido longitudinal (Figura 10c), ficando com uma figura

semelhante a uma alga com um anel colado entre as duas extremidades (Figura 10d). Agora, recortamos no sentido longitudinal o anel que ficou colado entre as duas extremidades da etapa anterior (Figura 10e), ficando com um objeto semelhante a duas algas (Figura 10f). Dando continuidade, cortamos uma das algas de forma longitudinal à tira (segmento de reta), resultando, assim, em um novo objeto (Figura 10g). Com essa etapa concluída, obtemos uma nova figura semelhante a um retângulo e continuamos com uma alga (Figura 10h). Para fecharmos a atividade, cortamos a outra alga de forma análoga à anterior, obtendo, dessa forma, mais um objeto (Figura 10i). Após a finalização, temos dois objetos que se assemelham a retângulos.

Figura 10: Utilizando três anéis na construção do objeto



Fonte: acervo dos autores.

Essas sugestões de investigação foram adaptadas do livro *Matemática II*, dos autores Rogéria Gaudêncio do Rêgo e Rômulo Marinho do Rêgo, publicado em 1999, pela Editora da Universidade Federal de Pernambuco.

Além disso, destacamos que foram disponibilizados materiais complementares relacionando a Teoria de Van Hiele à Investigação Matemática, à Visualização, à Representação Geométrica e ao Teorema de

Pitágoras, com o objetivo de que os participantes do curso aprofundassem seus conhecimentos sobre o tema em apreço, bem como observassem produções de componentes do próprio GEPGEO.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como pesquisadores e professores de Matemática, percebemos que, muitas vezes, o ensino de Geometria é desenvolvido de modo tradicional, ou seja, utilizando lápis, papel, giz e quadro, por meio da exposição oral do educador. Entendemos que essa forma de ensino pode ser boa apenas para aqueles alunos que têm facilidade na visualização e na representação das figuras geométricas. Entretanto, uma parcela de alunos necessita desenvolver esse conhecimento de outra maneira. Quais estratégias dispomos para isso? Neste capítulo, apresentamos formas além da tradicional, com enfoque na teoria de Van Hiele.

Essa teoria diz respeito ao ensino e à aprendizagem de Geometria. Ela foi desenvolvida nos anos 1950, sendo dividida em cinco níveis de aprendizagem, do mais simples ao mais complexo. Esses níveis são determinados pelo ensino, sugerindo que o pensamento geométrico evolui de modo lento, desde as formas iniciais até formas dedutivas finais, em que a intuição e a dedução vão se articulando. Nasser e Sant'anna (2000, p. 7) mencionam, ainda, que o “progresso nos níveis depende mais da aprendizagem do que da idade ou da maturação do sujeito. Por isso, cabe ao professor selecionar as atividades que o aluno deve vivenciar para que ele avance para o nível seguinte”. Dessa forma, o professor tem um papel determinante para fazer os alunos progredirem nos níveis da teoria. Sem um planejamento adequado, essa progressão dos níveis acaba sendo limitada, pois os alunos não têm as experiências necessárias.

Acreditamos ser importante oportunizar aos alunos atividades diferenciadas no desenvolvimento dos conhecimentos geométricos. A teoria de Van Hiele pode contribuir para a ampliação, possibilitando a professores e a pesquisadores uma busca por formas variadas de mediar o conhecimento. Destacamos que a teoria de Van Hiele promove o detalhamento dos diferentes tipos de raciocínio geométrico dos alunos ao longo de sua formação escolar. Além disso, por meio da elaboração de

atividades, o professor pode desenvolver um nível de raciocínio superior ao que o estudante já possui.

A partir das atividades propostas no módulo do curso de extensão, percebemos que o modelo de Van Hiele pode ser um excelente referencial para professores de Matemática, pois apresenta inúmeras possibilidades de comunicação que podemos ter com nossos alunos. Ainda, a teoria apresenta maneiras de desenvolver novos conceitos, com a finalidade de buscar a compreensão e o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Com base nas atividades planejadas, podemos identificar qual o grau de dificuldade apresentado pelos alunos e em qual nível de compreensão do pensamento geométrico eles se encontram, o que possibilita enriquecer o momento de estudo em sala de aula.

A partir da aplicação das atividades 1 e 2, assim como dos resultados oriundos dos indivíduos que as realizaram, foi possível inferir que ambas são pertinentes e atendem aos pressupostos teóricos indicados sobre a teoria. Assim, ao adaptar tais atividades em duas situações, envolvendo recursos distintos, o material pode servir ao professor para aplicações em sua sala de aula, em diversos níveis de escolaridade.

Afirmamos isso em função do grupo de participantes que variou não apenas em termos de nível de formação, mas também no que diz respeito à localidade geográfica (regional, nacional e internacional). Alguns indicativos que levam a essa afirmação dizem respeito ao *feedback* fornecido no processo avaliativo ao final do curso. Por fim, vale ressaltar, a partir dos *feedbacks* fornecidos pelos participantes da atividade, que o trabalho é viável, mesmo na modalidade remota como foi realizado. Somente com material escrito, o estudante não tem maiores possibilidades de interagir com professor e com colegas, o que não aconteceu com o curso, tendo em vista que os participantes poderiam experienciar a manipulação orientada de material tridimensionais e suas respectivas representações. Por isso, o registro aqui, em um e-book, pode alcançar outros professores, de forma a possibilitar uma adaptação para a realidade de suas salas de aula.

REFERÊNCIAS

- DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (Org.) **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas: Papirus, 2010. p. 11-33.
- LORENZATO, Sérgio. **O laboratório de ensino de Matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, 2006.
- NASSER, Lilian. **Using the Van Hiele Theory to Improve Secondary School Geometry in Brazil**. Thesis (PhD degree of the University of London). King's College London, Centre for Educational Studies, 1992. 394p.
- NASSER, Lilian; SANT'ANNA, Neide P. **Geometria segundo a Teoria de Van Hiele**. Projeto Fundão, UFRJ, 2 ed., 2000.
- REGO, Rogéria Gaudêncio do; REGO, Rômulo Marinho do Rego. **Matemática II**. João Pessoa: Ed. Universitária/UFPB, 1999.
- VAN-HIELE, P. M. **Structure and Insight**. Florida: Academic Press, 1986.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Além disso, agradecemos à Universidade Franciscana e ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Campus Alegrete pelo apoio prestado durante o desenvolvimento do curso.



SOBRE OS AUTORES

ALEXANDRE JARDEL SCHWEIG HACKENHAAR

Estudante do sétimo período do curso de Licenciatura Plena em Matemática na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), participa desde outubro de 2020 do Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria – GEPGEO, na Universidade Franciscana (UFN). Possui algumas experiências com ensino remoto, foi monitor, durante 2017 e 2018 do Programa de Iniciação Científica da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – PIC OBMEP. Atualmente, atua como bolsista no Programa Residência Pedagógica em Matemática da UFSM. Quanto a pesquisa, possui interesse em diferentes metodologias para o ensino de Geometria, modelagem matemática e aplicações de equações diferenciais.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/5812219124526088>

ANA PAULA STEFANELLO

Acadêmica do sétimo semestre do curso de Licenciatura Plena em Matemática na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), participa desde 2019 do Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria – GEPGEO, na Universidade Franciscana (UFN), foi bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET) matemática e do projeto Institucional Fundo de Incentivo à Pesquisa (FIPE). Atualmente, atua como bolsista na Central de Tutoria do Centro de Ciências Naturais e Exatas (CCNE) da UFSM e desenvolve pesquisa sobre Sistemas Dinâmicos Caóticos. Além disso, possui interesse em temas relacionados ao ensino de Geometria.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/9100975364864297>

ANDRÉ FERREIRA DE LIMA

Graduado em Licenciatura Plena em Matemática pela Autarquia de Ensino Superior de Arcoverde (2008). Possui uma Especialização em Matemática pela Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) e outra em Economia Solidária com Ênfase em Educação de Jovens e Adultos pela Universidade Federal de Campina Grande (UFCG). Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEPB, 2015. Participante dos Grupos de Pesquisas: Leitura e Escrita em Educação Matemática (UEPB); Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria, na Universidade Franciscana (UFN) e do grupo Interlocações entre Geometria e Educação Matemática da Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho (UNESP). Atualmente é doutorando em Educação Matemática na UNESP – Rio Claro.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/9886964787846754>

ANNE DESCONSI HASSELMANN BETTIN

Doutoranda em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Franciscana (UFN), com bolsa da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior (CAPES). Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela mesma instituição, Possui duas graduações: uma em Ciências Contábeis pelo Centro Universitário (UNISEB) e outra em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM).

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/5491202340393139>

CARMEN VIEIRA MATHIAS

Professora de Matemática na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Membro da comissão de extensão do Centro de Ciências Naturais e Exatas da UFSM, membro do conselho fiscal da Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica (AnpMat), colabora com o projeto Livro Aberto de Matemática e participa desde 2018 do Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria- GEPGEO, na Universidade Franciscana (UFN). Licenciada em Matemática pela UFSM, realizou os cursos de mestrado e doutorado em Matemática na Universidade Federal do Rio Grande do Sul e um estágio de pós-doutorado com ênfase em ensino de matemática na UFN. Quanto a pesquisa, possui interesse na realização de investigações sobre o uso de tecnologias digitais e sua importância no processo de visualização de entes geométricos.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/0112509701698645>

DÉBORA DA SILVA DE LARA

Mestra em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Franciscana de Santa Maria (UFN). Possui Licenciatura Plena em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha (IFFar) – Campus Alegrete. Integrante do Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria (GEPGEO), ligado à UFN; e do Grupo de Estudos em Políticas e Gestão Educacional (GEPGE), ligado ao IFFar. Atualmente é professora de Matemática no Colégio Raymundo Carvalho em Alegrete e no colégio da Universidade da Região da Campanha (URCAMP) em São Gabriel.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/5568168584569413>

DIONATAN DE OLIVEIRA NADALON

Professor Regente de Matemática, Escola Nossa Senhora de Fátima, atuando no 3º Ano do Ensino Médio. Mestre em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (UFN), com bolsa (Taxa) da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Possui Licenciatura Plena em Matemática pela mesma instituição. Integrante do Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria (GEPGEO), ligado à UFN.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/5299471506068127>

ERILÚCIA SOUZA DA SILVA

Doutoranda em Educação pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), com bolsa da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas (FAPEAM). Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Franciscana (UFN) e licenciada em matemática pela Universidade Federal do Amazonas (UFAM). Atualmente é professora da Secretaria Municipal de Educação de Manaus, Amazonas.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/6667336973919096>

GABRIEL DE OLIVEIRA SOARES

Doutorando em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (UFN), com bolsa da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior (CAPES). Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela mesma instituição. Especialista em Matemática pela Universidade Federal de Rio Grande (FURG). Possui Licenciatura Plena em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha (IFFar) – Campus Alegrete. Integrante do Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria (GEPGEO), ligado à UFN; e do Grupo de Estudos em Políticas e Gestão Educacional (GEPGE), ligado ao IFFar.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/5182622667860285>

GUSTAVO ROSAS RODRIGUES

Possui graduação em Matemática pela Universidade de Santa Cruz do Sul (UNISC), mestrado profissionalizante em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) e ensino médio pelo Colégio Militar de Porto Alegre. Atualmente é Professor da Escola de Educação Básica Educar-se e do Centro de Ensino Integrado de Santa Cruz do Sul. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Geometria e Topologia. Participa do Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria (GEPGEO) da Universidade Franciscana (UFN) desde 2020.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/3851162542293474>

GUSTAVO STREPPEL DE OLIVEIRA

Acadêmico do sétimo semestre do curso de Licenciatura Plena em Matemática na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), participa desde 2020 do Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria – GEPGEO, na Universidade Franciscana (UFN) e foi bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática, desenvolvendo atividades de ensino, pesquisa e extensão. Atualmente, é bolsista do Programa Bolsas de Licenciatura – PROLICEN, com o projeto de ensino denominado "A produção de vídeos abordando a resolução de problemas geométricos".

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/3956142540515635>

JONATHAN DE AQUINO DA SILVA

Doutorando em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (UFN), Mestre no Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT – Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Possui Licenciatura Plena em Matemática pela mesma instituição. Participa do Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria da Universidade Franciscana (UFN) desde 2017.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/2067783748592998>

JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS

É doutor em Educação (Matemática) pela Universidade Federal do Paraná (UFPR), mestre em Matemática Pura e Aplicada pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e licenciado em Matemática pela Universidade Católica de Pelotas (UCPEL). Atualmente é professor e pesquisador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (UFN).

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/0314545667166824>

JUSSARA APARECIDA DA FONSECA

Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Possui especialização em Matemática pela mesma instituição, mestrado em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Ensino da Matemática (UFRGS) e doutorado em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Franciscana (UFN). Atualmente, é professora de Matemática do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico do Instituto Federal Farroupilha (IFFar) – Campus São Vicente do Sul. Integrante do Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria (GEPGEO), ligado à UFN.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/4707830828760893>

LAURA TIEMME DE CASTRO

Mestranda em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (UFN), com bolsa da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior (CAPES). Pós-Graduanda em Gestão Escolar – Especialização da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Possui Licenciatura Plena em Matemática pela mesma instituição. Participa do Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria da Universidade Franciscana (UFN) desde 2019 e do Grupo de Pesquisa, Ensino e Extensão Docência, Escola e Formação de Professores da UFSM desde 2020.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/0577482029166511>

MAURICIO RAMOS LUTZ

É doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Franciscana (UFN), mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), especialista em Matemática, Mídias Digitais e Didática pela UFRGS e licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Atualmente é professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico no Instituto Federal Farroupilha (IFFar). Integrante do Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria (GEPGEO), ligado à UFN e Grupo de Estudos e Pesquisas em Tecnologias Digitais na Educação (GEPTec), ligado ao IFFar.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/5099730179818142>

O e-book é constituído de quatro capítulos adaptados de um curso de extensão, oferecido, na modalidade a distância, por membros de um Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria – GEPGEO do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana, em parceria com o Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete.

Cada capítulo tem por autores quatro membros do referido grupo e todos versam sobre temas de Geometria envolvendo didáticas distintas de modo a proporcionar ao leitor (professores e futuros professores de Matemática) algumas possibilidades de inclusão em suas práticas profissionais. O primeiro teve a opção de explorar as tecnologias por meio de jogos online a fim de motivar para o curso nos demais módulos. No capítulo, seus autores trazem avaliações dos participantes sobre possibilidades de utilizar o Geometria e Ação e o Gartic, bem como as aprendizagens adquiridas no curso. De forma similar, a metodologia de Resolução de Problemas, com a exploração de visualização, foi exposta no segundo capítulo. Foi apresentada uma diversidade de problemas geométricos para os diversos níveis de ensino.

No terceiro e no quarto capítulos são explorados recursos materiais diversos, como dobraduras para obtenção de polígonos no terceiro e, no quarto, para classificar quadriláteros utilizando a Teoria de Van Hiele. Portanto, o e-book oferece uma diversidade de possibilidades que podem contribuir para a prática docente de Geometria.

The block contains the "Mundo Acadêmico" logo, which consists of a stylized globe icon and the text "Mundo Acadêmico". Below the logo is a standard 1D barcode with the numbers "9 1786589 1475187" printed underneath. At the bottom of the block, the website "casaletras.com/academico-livros" and the ISBN "978-65-89475-18-7" are displayed.

casaletras.com/academico-livros

ISBN: 978-65-89475-18-7