Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Metodologia para o Ensino de Matemática no Nível Médio.

Carlos Alberto Martinho Brayner Júnior
Ana Kely Martins da Silva
Pedro Franco de Sá

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

BELÉM/PA
2021

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

BRAYNER JÚNIOR, Carlos Alberto Martinho. SILVA, Ana Kely Martins da. Uma Sequência Didática para o Ensino de Equações Trigonométricas. Produto Educacional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, (PPGEM/UEPA), 2021.

ISBN: 978-65-00-32533-1

Educação Matemática; Ensino por Atividades; Ensino de Equações Trigonométricas.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: **"ENSINO DE EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS POR ATIVIDADES EXPERIMENTAIS".**

Mestrando (a): **CARLOS ALBERTO MARTINHO BRAYNER JÚNIOR**

Data da avaliação: **01/10/2021**

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado à:*

( ) Estudantes do Ensino Fundamental (X) Estudantes do Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental (X) Professores do Ensino Médio

( ) Outros: ______________________

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

(X) Sequência Didática ( ) Página na Internet ( ) Vídeo

( ) Texto Didático (alunos/professores) ( ) Jogo Didático ( ) Aplicativo

( ) Software ( ) Outro: ______________

b) *Possui URL:* ( ) Sim, qual o URL: ______________________

(X) Não ( ) Não se aplica

c) *É coerente com a questão-foco da pesquisa?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ______________________

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ______________________

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ______________________

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Possui sumário:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
b) *Possui orientações ao professor:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
c) *Possui orientações ao estudante:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
d) *Possui objetivos/finalidades:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
e) *Possui referências:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
f) *Tamanho da letra acessível:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
g) *Ilustrações são adequadas:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Foi aplicado?*

(X) Sim, onde: com grupo de estudantes do ensino médio da rede de educação básica

( ) Não, justifique: ______________________________

( ) Não se aplica

b) *Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?*

(X) Sim, onde:Nas escolas do ensino médio e em cursos de formação continuada de professores

( ) Não, justifique: ______________________________

( ) Não se aplica

c) *O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?*

(X) Sim, onde: Com grupo de estudantes da rede de ensino

( ) Não, justifique: ______________________________

( ) Não se aplica

d) *Em qual condição o produto educacional foi aplicado?*

( ) na escola, como atividade regular de sala de aula

( ) na escola, como um curso extra

(X) outro: em atividades virtuais no contexto da pandemia

e) *A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):*

( ) Alunos do Ensino Fundamental

(X) Alunos do Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental

( ) Professores do Ensino Médio

( ) outros membros da comunidade escolar, tais como ______________________

( ) outros membros da comunidade, tais como ______________________

O produto educacional foi considerado:

(X) APROVADO ( ) APROVADO COM MODIFICAÇÕES ( ) REPROVADO

MEMBROS DA BANCA	Assinaturas
Profa. Ana Kely Martins da Silva (Presidente) Doutora em Educação IES de Obtenção do Título: PUC/RJ	Ana Kely Martins da Silva
Profº. Pedro Franco de Sá (Membro Interno) Doutor em Educação IES de Obtenção do Título: UFRN	Pedro Sá
Profº. Iran Abreu Mendes (Membro Externo) Doutor em Educação IES de Obtenção do Título: UFRN	Iran Abreu Mendes

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO

Caro professor(a), o ensino de equações trigonométricas é de suma importância para o dia a dia dos estudantes, pois auxilia na compreensão de várias situações que perpassam por fenômenos da natureza como, por exemplo, o das marés que possibilita calcular o tempo para que o nível do mar atinja a altura máxima, bem como os processos fisiológicos para o cálculo do momento em que a pressão sanguínea de um ser humano atinge o valor mínimo, ou seja, o assunto pode ser explorado de forma a dar significado para o aprendizado do aluno.

O ensino deste conteúdo é tratado a partir do 2º ano do ensino médio e temos percebido a grande dificuldade tanto dos alunos para aprender quanto dos professores para ensinar, visto que não possuem uma metodologia adequada para ministrar diversos assuntos relacionados à trigonometria. Devido a este fato, o conteúdo acaba sendo deixado de ser ensinado no ensino básico e isso pode comprometer a formação de professores durante a graduação nos cursos de licenciatura e em outras áreas do conhecimento.

Os cálculos de ângulos através do seno, cosseno e tangente vão muito além do ensino médio, pois a trigonometria, de maneira geral, precisa ser aprofundada não só nos cursos de graduação de licenciatura em matemática, mas também em outras áreas como a própria engenharia, a astronomia, dentre outras nas quais a aprendizagem das equações trigonométricas é de suma importância para a determinação, por exemplo, de medidas precisas envolvendo cálculos de distâncias inacessíveis. Para tal, faz-se necessário que o ensino de trigonometria traga significado para quem está aprendendo, mas para que isso ocorra devemos buscar novas metodologias de ensino deste conteúdo.

O produto aqui apresentado é resultado da dissertação de mestrado de Brayner Júnior (2021), com o título O Ensino de Equações Trigonométricas por Atividades, onde o objetivo do autor consistiu em analisar os efeitos da aplicação de uma sequência didática por atividades sobre o desempenho de estudantes do 3º ano do ensino médio na resolução de questões sobre equações trigonométricas. Os resultados dessa dissertação foram muitos bons e devido a este fato temos a intensão de contribuir com a prática de ensino de professores que abordem este assunto em sala de aula ou até mesmo em formato remoto.

O objetivo deste produto é propor uma sequência didática para o ensino de equações trigonométricas e para seu desenvolvimento buscamos apoio em diversas pesquisas que nos direcionaram oportunizar aos estudantes uma participação colaborativa na aquisição do conhecimento.

2. ASPECTOS CURRICULARES

Quando falamos de equações trigonométricas, vale destacar que este é um conteúdo da trigonometria que tem deixado de ser ensinado em grande parte das escolas públicas ao nível de Brasil. Portanto, nesta subseção será apresentado um texto referente ao processo de ensino e aprendizagem que trata sobre o ensino de trigonometria que nos dará suporte para entendermos melhor o porquê da ausência deste conteúdo na grade curricular de grande parte das escolas públicas.

Segundo Nacarato (2002,p.29) o ensino de trigonometria no Brasil passa por três momentos históricos que estão ligados à sua abordagem metodológica, conforme a autora, estes momentos são:

> - Geométrico: Havia uma total integração entre a trigonometria e a geometria plana, todos os teoremas eram demonstrados usando a geometria euclidiana. Essa tendência permaneceu até 1929.
> - Geometria Vetorial: resultante de um movimento nacional, direcionado a uma matemática mais experimental e aplicada, dando ênfase à física como ponto de aplicabilidade da matemática. Essa tendência permaneceu dos anos 1930 a 1960.
> - Funções Circulares: Essa tendência surgiu com o advento da matemática moderna, até os meados dos anos 80. (NACARATO,2002,p.29)

Uma particularidade que nos aponta claramente a preferência dada às funções circulares, diz respeito às Orientações Curriculares para Ensino Médio (OCEM), que destacam esses tipos de funções como conceito central no ensino de trigonometria no Ensino Médio. Quanto a este diálogo, o documento aponta:

> No que se refere ao estudo das funções trigonométricas, destaca-se um trabalho com a Trigonometria, o qual deve anteceder a abordagem das funções seno, cosseno e tangente, priorizando as relações métricas no triângulo retângulo e as leis do seno e do cosseno como ferramentas essenciais a serem adquiridas pelos alunos no ensino médio, (BRASIL, 2006,p.74).

Este documento oficial ainda destaca a importância das funções circulares, no entanto, traz algumas novidades quanto às discussões geométricas da Trigonometria, ou seja, as orientações destacam a relevância de dar significado aos resultados da trigonometria a partir de elementos da geometria plana:

> Na introdução das razões trigonométricas seno e cosseno, inicialmente para ângulos com medida entre 0º e 90º, deve-se ressaltar que são as propriedades de semelhança de triângulos que dão sentido a essas definições; segue, então, com a definição das razões para ângulos de medida entre 90º e 180º. A partir das definições e de propriedades básicas de triângulos, devem ser justificados os valores se seno e cosseno relativos aos ângulos de medida 30º, 45º e 60º. (BRASIL,2006,p.74).

Outro ponto que as OCEM destacam, diz respeito a algumas transformações trigonométricas que podem ser dispensadas, além do estudo de outras funções inversas das funções seno, cosseno e tangente. Podemos dizer que este é um marco no ensino de trigonometria no Brasil, pois nas últimas três décadas, além de termos vivenciado uma ênfase sobre as funções circulares, presenciamos um modelo de algebrização da trigonometria, o currículo de trigonometria tornou-se tão extenso que praticamente tomava conta de todo o 2º ano do ensino médio e devido a este fato, o tratamento geométrico deste assunto era deixado de lado enquanto a abordagem algébrica era privilegiada.

De acordo com um estudo realizado por Pereira (2006) sobre o ensino da trigonometria no ensino médio, foi verificado que os docentes de matemática que atuam no ensino médio, têm carência de um aprofundamento histórico da trigonometria. Tais dificuldades foram atribuídas a diversos motivos, dentre eles, a grade curricular que possuía um conteúdo programático de trigonometria muito extenso, a falta de afinidade dos professores com o assunto, seu desenvolvimento histórico e suas aplicações contemporâneas em diversas áreas do conhecimento humano, todos estes fatos provenientes de estudos de trigonometria na educação básica.

Para Pereira (2006), a construção do conhecimento matemático apoia-se sobre suas raízes relacionando às práticas do dia a dia e constitui estratégias que visam facilitar a compreensão dos conteúdos estudados. Também, considera relevante a abordagem pedagógica, a reflexão e a interpretação das origens dos fatos históricos da matemática, pois leva o aluno a situar-se no tempo e no contexto social em que vivem, ajuda a criar ligações entre os diferentes conhecimentos matemáticos, além de lidar com situações novas e com as difíceis estratégias de ação, possibilitando uma aprendizagem significativa.

O mesmo autor relatou em suas observações que no conteúdo de trigonometria, o baixo desempenho dos alunos e as dificuldades de socialização na compreensão dos conceitos trigonométricos básicos estão relacionados à formação sua formação, pois em sua trajetória estudantil a maioria deles tem pouco ou nenhum conhecimento prévio.

Pereira (2006) ainda apontou outros fatores desfavoráveis como a metodologia tradicional, com o uso excessivo do cálculo, a exploração insuficiente de novos recursos pedagógicos, a falta de contextualização e da linguagem matemática conectadas com a realidade dos alunos, além disso a situação ainda se agrava nas aulas noturnas.

Portanto, considerando o foco na produção da aprendizagem significativa, ele propôs um estudo de trigonometria com foco na teoria Ausubeliana. Ele destacou que para a superação desse problema, no que se refere ao aprendizado da experiência docente de trigonometria, aliada à realidade do dia a dia, vai ao encontro das necessidades dos alunos, ao se preparar para a plena participação na vida social, cultural e profissional e com isso, poder desenvolver conhecimentos no três principais campos de competências de base matemática propostos nos PCNEM (Parâmetros Curriculares do Ensino Médio).

Realizando as análises sobre as reflexões do estudo feito pelo autor, podemos perceber que as dificuldades encontradas levaram ao desenvolvimento de um ensino de trigonometria, descontextualizado e sem significado para os alunos. Além disso, ao professor não basta ser apenas um exímio conhecedor da matéria, mas faz-se necessário que ele seja altamente criativo, cooperador, descobrir suas habilidades para motivar o aluno, ensinando-o a pensar e se tornar autônomo.

Diante de todas estas considerações, ainda vale destacar, dentro dos aspectos curriculares de trigonometria, que o ensino de equações trigonométricas não possui uma abordagem muito específica nos documentos oficiais como por exemplo, a própria Base Nacional Comum Curricular (BNCC), Orientações Curriculares Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+), dentre outros.

Para reforçar esta ideia, um estudo realizado por Sousa (2020), já nos mostra que desde as Orientações Curriculares Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) de 2006, as equações trigonométricas já têm sido deixadas de lado no estudos de conteúdos da trigonometria.

Ainda segundo Sousa (2020,p.36,37), os PCN+ propõem uma sistematização para o ensino da matemática, chamado de Temas Estruturadores do Ensino de Matemática, isto se dá por meio de três eixos a serem desenvolvidos, os quais são:

I. Álgebra: números e funções;

II. Geometria e medidas;

III. Análise de dados.

Dentro do trabalho do autor, o eixo norteador que engloba a Trigonometria é a Álgebra: números e funções. A partir dele são propostas duas unidades temáticas. Sejam elas: Variação de Grandezas e Trigonometria. Com isso, a autor destaca como o PCN+ trata a unidade temática de sua pesquisa:

> Trigonometria: do triângulo retângulo; do triângulo qualquer; da primeira volta.
> • Utilizar e interpretar modelos para resolução de situações-problema que envolvam medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos.
> • Compreender o conhecimento científico e tecnológico como resultado de uma construção humana em um processo histórico e social, reconhecendo o uso de relações trigonométricas em diferentes épocas e contextos sociais. (BRASIL,2006,p.123 apud SOUSA, 2020,p.36)

Observa-se que a ênfase sugerida está no estudo de tópicos elementares da Trigonometria, tais como triângulo retângulo e triângulo qualquer. E posteriormente fica inferido que o PCN+ sugere tratar apenas da primeira volta no ciclo trigonométrico, não abarcando o estudo das equações trigonométricas.

O autor ainda reforça como os PCN+ reiteram e propõem o ensino da Trigonometria no ensino médio:

> [...] o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas. (BRASIL,2006 p. 121, 122, apud.SOUSA,2020,p.37)

Além disso, Sousa (2020) destaca que este importante documento legal para o currículo faz uma crítica ao modelo tecnicista com o qual o conteúdo da Trigonometria em muitas situações pode ser vivenciado em sala da aula, característica esta dos modelos tradicionais de currículo. Assim, o PCN+ não sugere o estudo quando não há aplicabilidade de um conteúdo, principalmente no que diz respeito ao estudo das identidades trigonométricas em detrimento de um aprofundamento nos estudos das funções trigonométricas e na interpretação gráfica delas, ou seja, o papel docente concerne em não “perder tempo” com assuntos demasiados formais, com uso de fórmulas e sim “gastar as energias” com a parte mais aplicável da Trigonometria com gráficos.

Portanto, o PCN+ sugere ao docente que privilegie um currículo com ênfase das aplicações do seno, cosseno e tangente, deixando de lado suas relações trigonométricas derivadas, bem como sugere enfatizar os estudos da Trigonometria sob uma perspectiva histórica das aplicações dessas relações trigonométricas.

Quanto aos documentos mais recentes, como por exemplo, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o trabalho de Sousa (2020) aponta as três competências específicas nas quais os conteúdos de trigonometria estão inseridos, porém fica bem nítido que as equações trigonométricas não se apresentam de forma destacada dentro das competências citadas pelo autor. A seguir elencamos as três competências citadas por Sousa (2020), bem como as suas respectivas habilidades:

Quadro 1: Competência Específica 3

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística – para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
HABILIDADES
Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança.

Fonte: (BRASIL,2017 p.527, apud SOUSA,2020 p. 45)

Na competência específica 3, o autor delineou duas habilidades que englobam assuntos da Trigonometria. Ambas apontam para a habilidade de resolver e elaborar problemas. Assim, julgou que o trabalho do docente pode ser norteado a partir de tais habilidades. Conforme a primeira habilidade a ser buscada, o entendimento a respeito do estudo de movimentos periódicos e cíclicos cabe muito bem ao estudo das funções trigonométricas circulares, dada a sua relação com o ciclo trigonométrico e representação através do gráfico cartesiano.

Um exemplo de como o docente pode atingir tal objetivo é através do uso de softwares livres que tratem da geometria, tal como o Geogebra . Por ele, o professor tem um facilitador na sua maneira de mostrar o comportamento gráfico das funções trigonométricas estudadas e discutir assim, de uma maneira mais lúdica, as propriedades que tais funções possuem.

Quadro 2: Competência Específica 4

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
HABILIDADES
Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Fonte: (BRASIL,2017 p.531, apud SOUSA,2020 p. 47)

Como visto acima, a ênfase está no estudo das funções seno, cosseno a partir da compreensão do ciclo trigonométrico. E o autor cita mais uma vez que o docente pode fazer o uso de tecnologia digital com o software Geogebra como ferramenta que vise ilustrar uma representação gráfica de uma função.

Quadro 3 : Competência Específica 5

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5
Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.
HABILIDADES
Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos.

Fonte: (BRASIL,2017 p.533, apud SOUSA,2020 p. 48)

Nesta competência específica 5 o autor entende que a Trigonometria também ganha destaque, visto que esta pode ser estudada empregando recursos de tecnologias digitais (softwares), como expostas nos exemplos imediatamente anteriores. E visando um aprofundamento para ingresso no ensino superior, o docente pode trabalhar tópicos da Trigonometria que privilegiem demonstrações formais, tais como as relações trigonométricas fundamentais e as relações trigonométricas derivadas, como também abordar validações de teoremas no estudo dos triângulos.

A partir das observações de Sousa (2020), os conteúdos de Trigonometria começam a sofrer um alteração significativa com a nova proposta da BNCC. As propostas dos PCN+ e das OCEM contemplavam conteúdos tais como o radiano, ciclo trigonométrico e equações trigonométricas. Contudo, a BNCC não aponta que o docente aborde em suas aulas tais conteúdos mais analíticos que compõem o ciclo trigonométrico. Como foi visto nos exemplos, apenas os assuntos sobre funções trigonométricas e trigonometria no triângulo retângulo ganham destaque no currículo.

As mudanças no âmbito educacional tendem a serem conservadoras e a estruturação daquilo que é ensinado pelo docente gradativamente sofre influência de várias vertentes, sejam elas sociais, econômicas, políticas ou pedagógicas. E este tipo de mudança tende a aparecer nos livros didáticos. Sendo assim, conteúdos de Trigonometria outrora presentes nos livros de matemática do ensino médio podem ser futuramente parte de uma galeria de obras mais específicas e apenas vivenciados no âmbito do ensino superior.

Além de todas as discussões já citadas, vale destacar que as equações trigonométricas também têm sido abordadas de forma cada vez mais reduzida nos livros didáticos da escola pública. Em contrapartida, além de não ter um melhor destaque nos livros de matemática das instituições públicas, as equações trigonométricas já costumam ter uma melhor abordagem em outros livros que são normalmente utilizados nas instituições da rede privada.

Este fato acaba repercutindo de forma muito negativa no que diz respeito à preparação dos estudantes da escola pública para conseguirem o tão sonhado acesso aos centros de excelência de formação de nível superior, a exemplo podemos destacar as escolas militares como: o Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), o Instituto Militar de Engenharia (IME), Centro de Instrução Almirante Braz de Aguiar (CIABA), dentre outros.

Para evidenciarmos melhor o que foi dito, o quadro a seguir aponta que o conteúdo de equações trigonométricas é cobrado nas provas de processos seletivos de escolas militares de ensino superior do Brasil.

Quadro 4: Conteúdo de Equações Trigonométricas nos Editais dos Escolas Militares.

INSTITUIÇÃO	DATA DO EDITAL	CONTEÚDOS DE TRIGONOMETRIA
ITA (Instituto Tecnológico de Aeronáutica)	30/06/2021	1. fórmulas de adição, subtração e bissecção de arcos; 2. funções trigonométricas: propriedades e relações principais; 3. transformação de soma de funções trigonométricas em produtos; **4. equações e inequações trigonométricas.**
AFA (Academia da Força Aérea)	21/02/2020	1. Arcos e ângulos. 2.Circunferência trigonométrica. 3.Funções trigonométricas e funções trigonométricas inversas. 4.Relações fundamentais. 5.Redução ao 1º quadrante. 6.Relações de identidade e transformações. **7.Equações e inequações.** 8.Triângulo retângulo. 9.Triângulo qualquer: lei dos senos, lei dos cossenos e área.
IME (Instituto Militar de Engenharia)	31/05/2021	1. Propriedades de ângulos e arcos; 2. Conceito de arco e ângulo; 3. Relações trigonométricas; 4. Fórmula de adição, subtração e bissecção de arcos; 5. Transformação de soma em produto;

		6. Redução ao primeiro quadrante; 7. Funções trigonométricas e funções trigonométricas inversas; **8. Equações e inequações trigonométricas;** 9. Sistemas de equações e inequações trigonométricas; 10. Resolução de triângulos;
CIABA **(Centro de Instrução Almirante Braz de Aguiar)**	27/08/2020	1. arcos e ângulos; 2.relações métricas no triângulo retângulo; 3. funções trigonométricas; 4. gráficos; 5. relações entre funções trigonométricas; 6. redução ao 1º quadrante; 7. transformações trigonométricas; **8. equações trigonométricas;** 9. inequações trigonométricas; 10. resolução de triângulos quaisquer
AMAN **(Academia Militar das Agulhas Negras)**	29/04/2021	1. trigonometria no triângulo (retângulo e qualquer); 2. lei dos senos e lei dos cossenos; 3. unidades de medidas de arcos e ângulos: o grau e o radiano; 4. círculo trigonométrico, razões trigonométricas e redução ao 1º quadrante; 5.funções trigonométricas, transformações, identidades trigonométricas fundamentais, equações e

		inequações trigonométricas no conjunto dos números reais; 6. fórmulas de adição de arcos, arcos duplos, arco metade e transformação em produto; 7. as funções trigonométricas inversas e seus gráficos, arcos notáveis; **8. sistemas de equações e inequações trigonométricas e resolução de triângulos.**
Escola Naval	09/05/2019	1. Medidas de arcos e de ângulos em graus e radianos; 2. Arcos côngruos; Fórmula de adição, arco duplo e arco metade; 3. Transformação de soma em produto; 4. Funções trigonométricas; 5. Funções trigonométricas inversas; 6. Relações fundamentais e transformações; identidades **7. trigonométricas; Equações e inequações trigonométricas;** 8. Resolução entre os elementos de um triângulo qualquer.

Fonte: Autor,2021.

Diante do exposto, no quadro anterior, podemos perceber que as equações trigonométricas, de fato, vêm sendo cobradas recentemente nos vestibulares dos centros de formação de nível superior de grande relevância do Brasil e a ausência deste conteúdo da grade curricular das escolas públicas bem como dos livros didáticos adotados por estas instituições de ensino, faz com que o conhecimento matemático esteja sendo usado como um filtro social, isto é, impedindo que os alunos das escolas públicas tenham maiores chances de acessar estes centros de ensino superior. Para corroborar com essa ideia Soares e Scheide (2004, p.12) apontam que:

> A matemática tem atuado como filtro social, ao ser utilizada como instrumento de seleção e de dominação. No entanto, ela precisa ser ensinada como um instrumento para a interpretação do mundo em seus diversos contextos, o que supõe a formação para a criticidade, para a indignação, para a cidadania e não para a memorização, para a alienação, para a exclusão. (SOARES E SCHEIDE, 2004,p.12)

Para reforçar esta questão social no desenvolvimento curricular em matemática, Matos (2005) apontou que apesar dos discursos democráticos que procuram justificar a presença da disciplina de matemática nos currículos escolares, o ensino da matemática tem tido em muitos países uma função social de diferenciação e de exclusão.

Ainda segundo o autor, a matemática é tipicamente um mistério para muita gente e tem-lhe sido oferecido o papel de juiz pseudo - objetivo, que decide quem está apto e quem está inapto na sociedade, rotulando e posicionando as crianças, os jovens e os adultos como aptos ou como inaptos, e por isso tem servido como um dos guardiões do direito de participação nos processes de decisão da sociedade. A situação que se identifica na área da matemática não existe isoladamente daquilo que é um dos papéis da escola – a seleção e seriação arbitrária dos jovens. Tal como Torres (2001,p.171-172, apud Matos,p.1) afirma:

> “nas sociedades capitalistas, a escola justifica e produz desigualdades. Para este objetivo intervêm diversos elementos, incluindo percursos escolares, comportamentos racistas, consolidação de elites, sanções disciplinares, irrelevância das matérias curriculares para a vida das pessoas, deficiência e falta de eficácia das Escolas. […] a escola reproduz relações autoritárias, classistas, racistas e patriarcais. Isto […] é constituído pelo autoritarismo dos pais e o autoritarismo da produção, distribuição e consumo do conhecimento. O conhecimento em si, e por si, não é democrático” (TORRES, p.171-172,apud MATOS,p.1)

Por fim, podemos concluir que os estudos apontaram que a falta de uma metodologia adequada para o ensino de equações trigonométricas, a ausência deste conteúdo nos documentos oficiais e até mesmo um estudo mais aprofundado nos livros didáticos da escola pública, têm feito com que os professores deixem de ensinar as equações trigonométricas.

Ainda existem os argumentos, de grande parte dos docentes, que apontam a pouca aplicabilidade do assunto, ou que existem outros conteúdos de maior relevância, mas a realidade é que o assunto é cobrado no vestibulares dos centros de formação de nível superior mais importantes do Brasil e o estudante da escola pública acaba sendo tolhido de ter acesso a este conhecimento, com isso o ensino dos conteúdos matemáticos, como os de equações trigonométricas, está sendo usado filtro social.

3. ASPECTOS HISTÓRICOS

Uma breve abordagem histórica na qual o uso de métodos da trigonometria, incluindo as equações trigonométricas, ganhou destaque, diz respeito a um desafio lançado, no ano de 1593, por um matemático e médico belga chamado Adriaan Van Roomen, ao Rei da França Henrique IV. Tal desafio consistia em resolver uma equação algébrica que segundo Roomen, ninguém da França conseguiria resolvê-la e para defender a honra do país, o rei convocou ninguém menos que François Vietè, um advogado e administrador público apaixonado por matemática.

Segundo de Andrade (2018), em 1953, Adrian Van Roomen, professor de Matemática e Medicina na Bélgica, publicou um trabalho intitulado Ideae Mathematicae, que continha, entre outros problemas propostos, algo bastante desafiador: uma equação de grau 45 que em notação atual, pode ser escrita na seguinte forma:

$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12300x^{39} + 111150x^{37} - 740259x^{35} + 3764565x^{33} - 14945040x$
$+ 46955700x^{29} - 117679100x^{27} + 236030652x^{25} - 378658800x^{23} + 483841800x^{21}$
$488494125x^{19} + 384942375x^{17} - 232676280x^{15} + 105306075x13 - 34512075x^{11} +$
$7811375x^{9} - 1138500x^{7} + 95634x^{5} - 3795x^{3} + 45x = A$, sendo

$$A = \sqrt{\frac{7}{4}} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{\frac{15}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}$$

Na época, o embaixador belga apresentou esse problema a Henrique IV, rei da França, e chegou a dizer que ninguém do país conseguiria resolvê-lo. O rei convocou os franceses para “salvarem a honra da nação” e foi então que François Viète (1540-1603) entrou nessa história.

Figura 1: François Viète

François Viète nasceu no ano de 1540 em Fontenay-le-Comte, na França, e morreu no dia 13 de dezembro de 1603, em Paris. Um administrador público e advogado brilhante, era apaixonado por Matemática e foi responsável pela introdução notação da algébrica sistematizada, além de contribuir para a teoria das equações. Ficou conhecido como o Pai da Álgebra. Uma de suas muitas publicações é o In artem analyticum isagoge, que é o mais antigo trabalho sobre álgebra simbólica.

Fonte: de Andrade (2018)

Sem demora, Viète observou que essa equação, proposta por Roomen, poderia ser obtida por meio da utilização de fórmulas do seno do múltiplo de um arco, e obteve muitas das suas raízes. Um trabalho realizado por Campos (2017) apresenta o modo como Viète, recorrendo a processos algébricos, determinou as soluções da equação de Van Roomen.

Considere-se $A = 2sen(45\theta)$.

Sabe-se que $sen(3\alpha) = 3sen\,\alpha - 4sen^3\alpha$ é válida para qualquer $\alpha \epsilon \mathbb{R}$.

Se $\alpha = 15\theta$ obtém-se $sen(45\theta) = 3sen(15\theta) - 4sen^3(15\theta)$.

Considere-se $y = 2sen(15\theta)$ então

$2sen(45\theta) = 3y - y^3 \Leftrightarrow A = 3y - y^3$. **(1)**

Se $\alpha = 5\theta$ obtém-se $sen(15\theta) = 3sen(5\theta) - 4sen^3(5\theta)$

Considere-se $z = 2sen(5\theta)$ então $2sen(15\theta) = 3z - z^3 \Leftrightarrow y = 3z - z^3$. **(2)**

Sabe-se

sen(5θ) = 5sen θ – 20sen$^3\theta$ + 16sen$^5\theta$ $\Leftrightarrow$ sen$^5\theta$ = $\frac{1}{16}$ sen(5θ) – $\frac{5}{16}$ senθ + $\frac{5}{4}$ sen$^3\theta$.

Considere-se x = 2 sen θ então $\frac{1}{32}$ x^5 = $\frac{1}{32}$ z – $\frac{5}{32}$ x + $\frac{5}{32}$ x^3 $\Leftrightarrow$ $x^5 - 5x^3 + 5x = z$ **(3)**

Substituindo **(3)** em (**2**) e **(2)** em (**1**) obtém-se

A = $3y - y^3 = 3(3z - z^3) - (3z - z^3)^3 = 3(3(x^5-5x^3+5x) - (x^5-5x^3+5x)^3) - (3(x^5-5x^3+5x)-(x^5-5x^3+5x)^3)^3 = x^{45}-45x^{43}+945x^{41}-12300x^{39}+\cdots+95634x^5-3795x^3+45x$.

Desta forma, Viète decompôs a equação inicial de grau 45 em três equações mais simples: duas de grau 3 e uma de grau 5. Observe-se que 45 = 3 . 3 . 5.

As soluções da equação são obtidas pela igualdade:

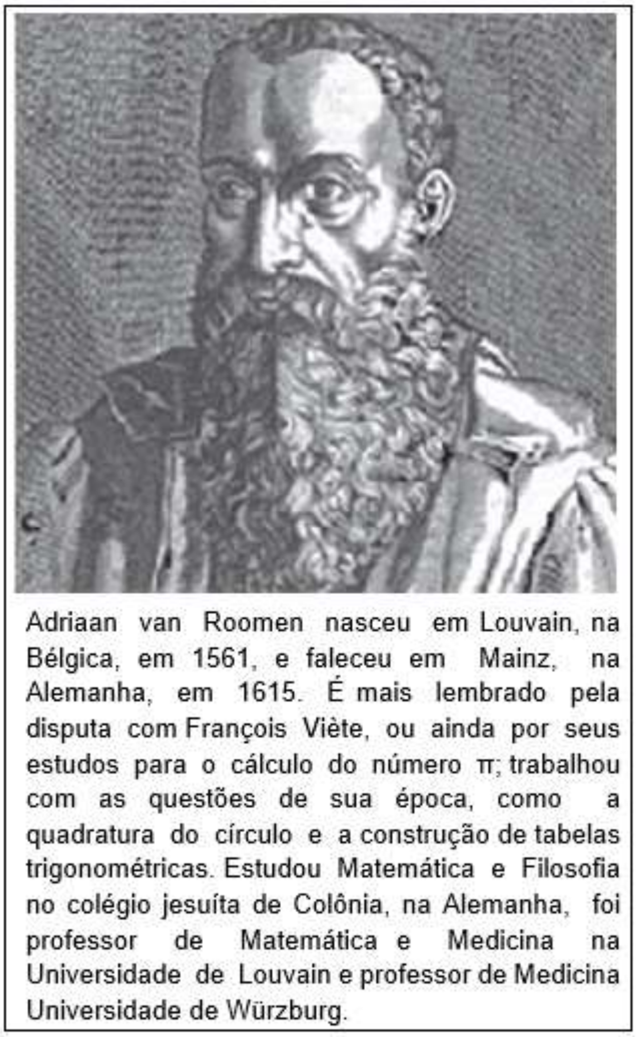
$$x_k = 2\, sen\left(\theta + \frac{2k\pi}{45}\right), k\epsilon\{0,1,2,\ldots,44\}$$

Solução esta que surgiu a partir de cálculos algébricos que foram realizados através da resolução de uma equação trigonométrica.

Dessa forma, todas as raízes podem ser calculadas e Viète foi o primeiro matemático a fazer uso significativo de métodos algébricos na trigonometria. Sua solução foi apresentada no trabalho intitulado Responsum, em 1595 e com isso, acabara-se a disputa para resolver esse problema, e Van Roomen chegou até a viajar para a França para conhecer Viète pessoalmente.

Ainda em relação aos estudos de Roomen quanto à trigonometria, podemos dar destaque à construção de tabelas trigonométricas com a medida mais precisa de ângulos que certamente contribuiu de maneira significativa para as diversas ciências como, por exemplo, a astronomia, a astrologia, as navegações, na matemática para o cálculo de ângulos nas equações trigonométricas que surgem em problemas envolvendo fenômenos da natureza, dentre outras ciências.

Figura 2: Adriaan Van Roomen



Fonte: de Andrade (2018)

Segundo um estudo realizado por Gonçalves e Oliveira (2007), citam que Roomen possuía um colega chamado Christoph Clavius, com o qual costumava comunicar-se através de cartas que continham assuntos da ordem técnica da matemática, como a quadratura do círculo e a construção de tabelas trigonométricas. Christoph Clavius era influente padre jesuíta que participou da elaboração do calendário gregoriano, além disso foi uma forte presença no Colégio Romano, onde atuou como professor desde 1565 até sua morte, em 1612. De sua atividade como professor, surgiram livros-texto, em especial o Comentário sobre os Elementos de Euclides e o Comentário sobre a Esfera de Sacrobosco, que influenciaram profundamente as gerações seguintes de matemáticos e astrônomos.

Os autores realizaram um estudo sobre as cartas e verificaram que Van Roomen dedicou uma parte considerável de sua correspondência com Clavius a seus estudos de trigonometria. Ele também cita George Joachim Rheticus (1514-1574) e o padre Christoph Grienberger, que foram matemáticos desse período notadamente dedicados à construção de tabelas trigonométricas. Na primeira carta de que se tem notícia que Van Roomen enviou a Clavius, em 11 de maio de 1592, ele já estava trabalhando na construção de tabelas de senos, não para encontrar um método de construção, mas somente pelo exercício matemático. A carta sem data, mas que provavelmente foi enviada no ano de 1601 para Clavius, trata exclusivamente dos cálculos de senos, tangentes e secantes de Rheticus e Grienberger. Apresenta também uma "Regra universal necessária para evitar erros nos cálculos de tangentes e secantes."

Hoje, o seno é usualmente considerado como uma função de uma variável, enquanto nos séculos XVI e XVII era tratado como dependendo de duas variáveis. Isso acontecia porque o raio utilizado nas circunferências trigonométricas não era unitário, como usamos atualmente, mas podia assumir diversos valores na forma 10^r, com r natural. Na carta de 11 de maio de 1582, por exemplo, van Roomen menciona que estava construindo tabelas com raios de 10^{16}.

De acordo com Gonçalves e Oliveira (2007), em notação moderna, se indicarmos por $SEN_r\, x$ o seno de um arco de medida x em relação a uma circunferência de raio 10^r, podemos escrever

$$SEN_r\, x = \text{sen}\, x \,.\, 10^r$$

Essa igualdade relaciona, portanto, um valor de seno do ponto de vista dos séculos XVI e XVII com um valor de seno do ponto de vista atual. As expressões seno total (sinus totus) e raio total (radius totus), que os matemáticos daquele período utilizavam, referem-se ao seno de 90 graus, pois este tem a mesma medida que o raio da circunferência. O seno total é representado pela potência 10^r, e cada estudioso, em princípio, utilizava o raio que achasse melhor para seus cálculos. Porém, segundo van Roomen, o tamanho desse raio não era tão livremente escolhido, pois essa escolha depende de quantas casas decimais são requeridas nos resultados.

A função cosseno não aparece comumente sob este nome naquele período. Quando necessário, fazia-se referência ao seno do complemento do ângulo dado. Naquele período, as funções tangentes e secantes são normalmente indicadas com esses nomes. As medidas dos senos do complemento, tangentes e secantes também eram calculadas em relação ao seno total, ou seja, em relação ao raio da circunferência dada. Assim,

$$SEN_r\,(90^o - x) = \text{sen}\,(90^o - x) \,.\, 10^r = \cos x \,.\, 10^r$$

$$TAN_r\ x = \tan x \cdot 10^r$$

$$SEC_r\ x = \sec x \cdot 10^r$$

No século XVI, muitos matemáticos trabalharam exaustivamente na construção de tabelas trigonométricas. Van Roomen, em 1592, na carta que enviou para Clavius, trabalhara já muito com cálculos trigonométricos. Em 1593, na sua obra Ideae mathematicae pars prima, traz os cálculos de lados de polígonos regulares de 3, 4, 5 e 15 lados, bem como dos polígonos obtidos a partir desses por sucessivas duplicações do número de lados, inscritos e circunscritos em uma circunferência de raio 1028 (BOCKSTAELE, 2009, 453, apud GONÇALVES E OLIVEIRA,2007,p.158).

Especial a esse respeito é a carta sem data, mas possivelmente enviada em 160, na qual a construção de tais tabelas é o único tema tratado. Essa carta pode ser dividida em três partes: inicia-se com uma censura às tabelas de Grienberger; em seguida, apresenta conselhos e regras para evitar erros na construção de tais tabelas; e, por fim, apresenta uma segunda censura, mas desta vez às tabelas de Rheticus.

Na primeira parte, van Roomen escreve sobre um conjunto de tabelas trigonométricas que Grienberger estava construindo: uma tabela de senos, que servia também para os senos dos complementos (nosso cosseno); uma tabela de secantes e uma de tangentes. Tanto a tabela de secantes com a de tangentes eram obtidas a partir da tabela de senos, através, respectivamente, das seguintes relações:

$$SEC_r\ x = 10^{2r} / SEN_r\ (90^o - x)$$

$$TAN_r\ x = 10^r \cdot SEN_r\ x / SEN_r\ (90_o - x)$$

Na carta de van Roomen, Gonçalves e Oliveira (2007) são informados que a tabela de senos de Grienberger apresentava os valores com 16 casas decimais, isto é, tratava-se de uma tabela em relação a um raio total igual a 10^{16}. Suas tabelas de secantes e tangentes, por outro lado, estavam sendo construídas para apresentar valores com 12 casas decimais, isto é, em relação a um raio total igual a 1012. Van Roomen, em sua censura, alerta Grienberger para o fato que é impossível, para alguns arcos, obter 12 casas decimais significativas para secantes e tangentes a partir de apenas 16 casas significativas de valores de senos. Segundo van Roomen, para que as tabelas de tangentes e secantes fossem exatas, seria preciso um aumento de oito dígitos na tabelas de senos, ou seja, para se construir as tabelas de tangentes e secantes desejadas seria necessária uma tabela de senos com 24 casas decimais. A partir dessa observação, van Roomen apresenta diversos conselhos para sanar os problemas das tabelas.

O mais importante desses conselhos é apresentado na segunda parte dessa carta, sob o título Regra universal necessária para evitar erros nos cálculos de tangentes e secantes. É esse talvez um dos mais sofisticados resultados de Adriaan van Roomen, em que ele estipula o exato número de casas que devem ser aumentadas em um valor individual de seno ou cosseno, a fim de se obter a secante e a tangente de um arco. Logo em seguida, van Roomen mostra uma tabela com uma explicação sobre o funcionamento da regra e, por último, apresenta dois corolários obtidos a partir da dita regra.

A regra é intricada, e seu enunciado requereria uma explicação que levaria este artigo para bem além dos limites desejados. Um exemplo, contudo, pode ser esclarecedor. Em relação ao raio total 10^{10}, tomemos o valor de seno de 1 minuto de grau, isto é sen (1'). Em uma tabela trigonométrica típica do século XVI, esse valor seria o número inteiro:

$$SEN_{10}\ (1') = \text{sen}\ (1')\ .\ 10^{10} = 2908882$$

A secante do arco do complemento de 1', ou seja, a secante do arco de medida 89º 59' pode ser calculada a partir do valor acima como

$$SEC_{10}\ (89º\ 59') = 10^{20}\ /\ 2908882 = 34377468731973$$

O problema que surge dessa situação, como van Roomen percebeu, é que o valor da secante obtida a partir do seno de 1' calculado acima é diferente da melhor aproximação inteira para o valor dessa secante:

$$SEC_{10}\ (89º\ 59') = 10^{10}\ .\ \sec\ (89º\ 59'\ ) = 34377468192663$$

Assim, de fato, um valor de seno em relação ao raio total 10^{10}, por mais exato que seja, não pode dar o valor da secante com todas as casas decimais corretas. A Regra universal necessária para evitar erros nos cálculos de tangentes e secantes provê um modo de sanar esse problema. Na terceira e última parte dessa carta, Van Roomen escreve uma censura às tabelas de Rheticus, dividida em três proposições, das quais, entretanto, somente duas sobreviveram. As duas proposições remanescentes referem-se aos erros cometidos por Rheticus na construção de suas tabelas de tangentes e secantes, na mesma linha dos erros de Grienberger.

Por fim, podemos perceber que já há muito tempo os conceitos trigonométricos, de forma geral, incluindo as equações trigonométricas, eram desenvolvidos para a resolução de problemas não só de uma matemática mais técnica, mas na resolução de problemas para o cálculo de ângulos que foram necessários para a confecção das tabelas trigonométricas que conhecemos na atualidade e que certamente ainda auxiliam em problemas do cotidiano que surgem nas outras ciências como a física, a astronomia, as navegações, dentre outras.

4. REVISÃO DE ESTUDOS

Neste capítulo apresentamos os resultados de uma revisão de estudos que tratam sobre o ensino e aprendizagem de trigonometria, dos quais procuramos enfatizar aqueles que tratavam de equações trigonométricas. O levantamento de estudos foi construído para conhecer o que se tem discutido na literatura acadêmica e científica sobre o processo de ensino e aprendizagem referente às equações trigonométricas, e que direcionou para a construção e planejamento da Sequência Didática proposta.

Essa revisão foi dividida em duas partes, as quais são:

1) Estudos Diagnósticos: Esses estudos irão permitir o entendimento das principais dificuldades dos alunos e dos professores no ensino e na aprendizagem de equações trigonométricas.

2) Estudos Experimentais: Os trabalhos apresentados nessa categoria realizaram atividades que não seguem a ordem expositiva em: definição, exemplos e exercícios, ou seja, buscaram realizar um ensino diferenciado sobre equações trigonométricas no ensino médio.

Os levantamentos de estudos possuem conhecimentos importantes acerca do ensino e aprendizagem de equações trigonométricas. Diante de todo os trabalhos revisados, construímos o quadro a seguir que sintetiza as principais informações das pesquisas revisadas, de acordo com cada categoria.

Quadro 5: Síntese dos Trabalhos Revisados

ESTUDOS DIAGNÓSTICOS	RESULTADOS
Mangas (2014); Feijó (2018); Silva(2011)	- Existe a necessidade da introdução das equações trigonométricas do tipo R(Senx,Cosx) = c, pois os estudantes apresentaram dificuldades em resolvê-las; - os estudos revelaram que os erros cometidos pelos participantes estão em todos os ramos da trigonometria, desde definições e conceitos até manipulações, inferências e generalizações. - Concluiu que o ensino de trigonometria, por não ter sido ministrado de forma completa, comprometeu o aprendizado dos alunos na escola pesquisada e o questionário aplicado veio reforçar que o pouco tempo de aula destinado para ensinar um conteúdo relativamente grande foi um fator agravante para os resultados insatisfatórios nas dez últimas questões realizadas.
ESTUDOS EXPERIMENTAIS	**RESULTADOS**
Silva (2018); Silva (2011); Mesquita (2014); Pinheiro (2008); Fernandes (2010); Pereira (2015).	- Foi possível observar que a maioria dos alunos demonstraram empenho nas atividades realizadas com jogos. Motivados pelo desafio de jogar em uma aula de Matemática, todos os alunos participaram de maneira igualitária, apesar das dificuldades inerentes a cada um, dando a chance

	de todos serem vencedores, resolvendo os problemas e planejando estratégias - A utilização dos recursos tecnológicos ampliou as possibilidades de aprendizagem no círculo trigonométrico, permitindo que os alunos atribuíssem significado ao conteúdo matemático, mesmo que não apenas às situações-problema com referência na realidade com as quais lidaram. Porém, algumas atividades não ficaram bem esclarecidas com o uso dos Applets devido os alunos sentirem dificuldades com situações algébricas. - A calculadora é uma ferramenta que ajuda a pensar e consequentemente pode contribuir para uma melhor aprendizagem. Ao longo da investigação, os alunos foram melhorando a sua capacidade de articulação entre representações analíticas e gráficas, podendo-se concluir que este facto contribuiu para uma melhor compreensão das funções trigonométricas. Constatou-se que quando a tarefa é conduzida com um bom documento de apoio gráfico, o aluno vai melhorando o seu conhecimento matemático para além do esperado, desenvolvendo um sentimento de satisfação pessoal e confiança nas suas capacidades. - O aluno, ao construir a circunferência trigonométrica, relaciona o objeto

	estudado com outros conceitos e teorias, ou seja, ele, ao estabelecer sua imagem mental, compreende o significado da definição, cria um conceito matemático e, ainda, amplia as possibilidades para o desenvolvimento das propriedades relacionadas expandindo seu domínio cognitivo. - Concluiu que das duas atividades aplicadas, a segunda apontou melhores resultados em relação à primeira. Tal fato foi justificado, pois as construções do ciclo trigonométrico e as projeções dos ângulos sobre os eixos coordenados foram visualizados e melhor entendidos com o uso do software Geogebra, além disso a atividade foi realizada em grupo. Diferente da segunda atividade, a primeira foi realizada, pelos alunos, de forma individual e tiveram que fazer as construções manualmente com o uso de lápis, régua, papel e transferidor, o que causou uma série de erros devido alguns estudantes não terem habilidades para o uso correto dos instrumentos geométricos. - Concluiu que, de um modo geral, os enfoques didáticos mais tradicionais, como, por exemplo, a utilização de apenas lousa e giz em aulas expositivas dificulta a aprendizagem desse conteúdo matemático por parte dos estudantes da educação básica. Essa constatação empírica motivou o autor para uma busca de métodos alternativos, mais interativos, que

	permitissem uma maior participação ativa dos estudantes. Dessa maneira, nasceu a ideia da utilização de um software de geometria dinâmica. Constatamos que o Geogebra pode ser uma ferramenta de grande utilidade para atingir os objetivos desejados, haja vista que ele possibilita a visualização dinâmica dos objetos matemáticos e permite que, ativamente, o aluno análise, conjecture, generalize e assimile.

Fonte: Revisão de Estudos, 2019.

Em alguns trabalhos analisados, verificamos que o uso de softwares de geometria dinâmica funciona como bons instrumentos de intervenção nas atividades voltadas para o ensino de trigonometria, pois são capazes de instigar a curiosidade dos estudantes fazendo com que consigam aprender conceitos que na metodologia tradicional de ensino são mais difíceis de serem compreendidos.

Dessa forma, aprender conteúdos, como as equações trigonométricas, usando a movimentação dos ângulos por meio de softwares de geometria dinâmica no ciclo trigonométrico torna a participação efetiva e mais prazerosa do estudante no processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo.

Além disso, percebemos que o ensino de trigonometria, quando abordado com o uso de materiais manipuláveis, pode ser uma potencial referência para compreensão dos conceitos deste conteúdo. O simples fato de o estudante ser levado a construir e de certa forma participar de maneira integral do processo de ensino e aprendizagem, faz uma grande diferença na autoestima dele.

Nas atividades envolvendo jogos, os pesquisadores conseguiram bons resultados tanto na resolução de equações trigonométricas, quanto na resolução das inequações trigonométricas, que são conteúdos difíceis de serem entendidos pelos estudantes na educação básica. Dessa forma, acreditamos que o ensino dos conteúdos de trigonometria deva trilhar caminhos que possibilitem o melhor aprendizado dos estudantes.

Por não termos muitos trabalhos específicos voltados para o ensino das equações trigonométricas, sugerimos que as metodologias ativas como o uso de jogos, os softwares de geometria dinâmica dentre outros, possam contribuir cada vez mais para o desenvolvimento de trabalhos sobre este tema e com isso obtermos mais resultados no aprendizado das equações trigonométricas.

Diante de todos os argumentos anteriormente expostos, vale reforçar que o desenvolvimento deste trabalho é de suma importância, uma vez que há uma grande dificuldade tanto conceitual quanto didática por parte do professor para ensinar equações trigonométricas e a trigonometria de forma geral. Por este motivo, nosso trabalho propõe-se a contribuir com as pesquisas supracitadas na tentativa de minimizar o problema enfrentado pelo professor, visto que existem muitos tópicos da trigonometria que o docente não domina e por conta disso, acaba deixando de ministrar os conteúdos.

No que diz respeito à falta de domínio do professor para ensinar trigonometria, podemos destacar que o assunto é visto de forma muito técnica no ensino médio e menos conceitual, ou seja, o aprendizado do conteúdo não favorece à aquisição de uma didática adequada para o ensino. Aliado a este problema, ainda podemos destacar a formação do professor, que na graduação ainda passa por problemas em estudos mais aprofundados de trigonometria que não são muito discutidos.

Com isso, esperamos que o desenvolvimento do nosso trabalho venha somar aos que destacamos em nossa revisão de estudos com o intuito de melhorar a prática do professor e consequentemente o seu aprendizado em relação aos conteúdos trigonométricos, e dessa forma ministrá-los de maneira mais segura aos estudantes.

O direcionamento desta revisão de estudos possibilitou ter um uma visão sobre muitos fatos relativos ao tema diante dos trabalhos revisados na área de equações trigonométricas, os quais contribuíram com o planejamento desse produto educacional no sentido de revelar a necessidade de estratégias didáticas e metodológicas para o ensino de equações trigonométricas, além de apresentar algumas sugestões importantes para a elaboração da Sequência Didática.

5. ENSINO POR ATIVIDADES

A sequência didática proposta nesse trabalho foi construída com base no Ensino por Atividades. No que diz respeito à esta metodologia de ensino, vale destacar que está pautada na formação da autonomia do aluno para a construção do seu conhecimento, sendo esta a principal especificidade desta metodologia, onde os conteúdos propostos possam ser descobertos pelo próprio aluno durante o processo de aprendizagem, tendo o professor apenas como orientador (MENDES e SÁ, 2006, p. 13).

Diante disso, vale reforçar que no ensino por atividades ocorre um processo de interação professor-aluno que acontece em sala de aula e que os papeis destes sujeitos devem estar muito bem definidos durante a execução da sequência de atividades. Não podemos deixar de destacar que este processo de ensino e aprendizagem é continuado e contínuo, isto é, o tempo inteiro vai acontecer esse movimento professor-aluno dentro de sala de aula por meio das atividades.

De acordo com Sá (2019), o ensino por atividades pode ser realizado por dois tipos básicos de atividade que são a de conceituação e a de redescoberta, as quais possuem características distintas.

A atividade de conceituação objetiva levar o estudante a percepção da ocorrência de um determinado tipo de situação ou objeto matemático, objetivando a construção da definição do objeto ao qual foi percebido durante o processo, ou seja, o objetivo de uma atividade de conceituação é a definição do objeto matemático.

A atividade de redescoberta tem por objetivo conduzir o estudantes ao descobrimento de uma relação/propriedade referente a um dado objeto ou operação matemática, correspondendo ao momento de exploração do objeto, a qual antecede a demonstração do resultado, não se limitando simplesmente na demonstração de um resultado matemático recorrente do processo.

Resumidamente, podemos dizer que enquanto atividade de conceituação visa a construção do conhecimento durante a definição do objeto matemático, a atividade de redescoberta tem o enfoque na construção do conhecimento a partir da descoberta das relações/propriedade durante a exploração do objeto matemático.

Segundo Sá (2019) apesar da distinção entre os objetivos de uma atividade de conceituação e de uma atividade de redescoberta, o ensino de matemática por meio de uma aula por ambos os tipos de atividade, podem ser divididos didaticamente em seis momentos, os quais descreveremos mais a diante, a saber: organização, apresentação, execução, registro, análise e institucionalização. A descrição destes seis momentos serão fundamentais para entendermos melhor quais os papeis do professor e do aluno neste processo de ensino e aprendizagem.

Diante da estrutura apresentada, podemos perceber que o Ensino por Atividades é uma metodologia que vai muito além do método tradicional de ensino que utiliza apenas definição seguida de exemplos e exercícios, fazendo com que o aluno seja um mero espectador sem interação alguma com o professor. Neste sentido, Sá (2009) afirma que:

> O ensino de matemática por meio de atividades pressupõe mútua colaboração entre professor e aluno durante o ato de construção do saber, pois a característica essencial desse tipo de abordagem metodológica de ensino está no fato de que os tópicos a serem aprendidos serão descobertos pelo próprio aluno durante o processo de busca, que é conduzido pelo professor até que ele seja incorporado à estrutura cognitiva do aprendiz (SÁ, 2009, p. 19).

Além disso, o autor afirma que as atividades devem orientar os discentes a perpassar por três fases: experimentação, comunicação oral e representação simbólica. Neste momento, o professor deverá esquematizar atividades que contenham: título, objetivo, material necessário, procedimento, espaços de observação e de conclusão da atividade.

Neste método de ensino, a atividade é tratada como uma pesquisa científica e o estudante como um pesquisador pois permite que desenvolvam habilidades como: observar, analisar, inferir, testar, planejar, conjecturar e concluir.

Para que haja efetividade no desenvolvimento do Ensino por atividades, Sá (2009) aponta que devemos ter alguns cuidados no desenvolvimento das atividades que deverão ser planejadas e aplicadas conforme destacamos a seguir:

> - Toda a atividade deve procurar conduzir o aluno a construção das noções matemáticas através de três fazes: a experiência, a comunicação oral das ideias apreendidas e a representação simbólica noções construídas;
> - As atividades devem prever um momento de socialização das informações entre os alunos, pois isso é fundamental para crescimento intelectual do grupo. Para que isso ocorra, o professor deve criar um ambiente adequado e de respeito mútuo entre os alunos e adotar a postura de um membro mais experiente do grupo e que possa colaborar na aprendizagem deles;
> - As atividades devem ter características de continuidade, visto que precisam conduzir o aluno ao nível de representação abstrata das ideias matemáticas construídas a partir das experiências concretas vivenciadas por ele;

> ➢ De acordo com o modelo proposto por Dockweiller(1996), as atividades propostas pelo professor podem se apresentar de três maneiras: desenvolvimento, conexão e abstração, de modo que sejam sequencialmente apresentadas e possam contribuir para a construção gradual dos conceitos matemáticos (SÁ, 2009, p.18).

De acordo com o trabalho de Sá (2019), apresentaremos a seguir os seis momentos supracitados para o ensino por atividades, bem como as respectivas atribuições que o professor e os estudantes deverão seguir para cada momento de realização das atividades propostas.

O primeiro momento diz respeito à organização, neste instante inicial a turma onde ocorrerá a aplicação da atividade deverá ser de preferência organizada pelo professor em equipes construídas de forma, preferencialmente, espontânea de no mínimo dois e no máximo quatro alunos. Essas atividades poderão ocorrer também de forma individual, porém não é recomendável uma vez que não estimula a troca de ideias entre os participantes, processo que é fundamental para o processo de aprendizagem. Corroborando com essa ideia, Sá (2019) recomenda que:

> Se houver o caso de algum estudante desejar realizar a atividade individualmente o professor deve, sem pressão alguma, tentar convencer o estudante da necessidade de realizar em grupo, mas se não conseguir deve permitir a realização individual e aguardar para ver o que acontecerá ao longo da realização das atividades.(SÁ, 2019, p.16).

Vale ressaltar que para a condução deste momento de organização das equipes, o professor deve mostrar segurança e que a atividade foi elaborada de forma bastante minuciosa e mostrar a importância dela para que os estudantes não se distraiam com situações que possam comprometer a execução da atividade.

Dando continuidade ao processo, chegamos ao segundo momento que trata da apresentação da atividade, que compete ao professor distribuir o material necessário para a realização da atividade incluindo o roteiro da mesma. Neste sentido vale destacar ao professor que, para atividades com procedimento mais longo é preferível que o roteiro seja disponibilizado de forma impressa para economizar tempo.

O terceiro momento refere-se à execução, que é correspondente à etapa da experimentação quando o professor manipula os materiais, realiza medidas e/ou cálculo, compara e/ou observa. Neste momento, numa aula por atividade experimental, espera-se que cada equipe realize os procedimentos estabelecidos para a atividade.

Neste momento, cabe ao professor permitir que as equipes desenvolvam sua atividade espontaneamente e com isso fiscalizar e dar suporte aos eventuais surgimentos de dúvidas ou ainda quando constatar a existência de dificuldades de estudantes que solicitem algum auxílio para a equipe durante o processo. Para tal, é de suma importância que o professor possa intervir com orientações clara e precisas que possibilitem a continuidade da atividade sem causar algum tipo de mal-estar aos seus estudantes.

No que diz respeito aos estudantes, faz-se necessário seguir as instruções previstas no roteiro da atividade com sua atenção voltada completamente para esta e com isto não dispersando-se em conversas paralelas em sua equipe e evitando visitar outros grupos para o mesmo fim. Eles devem ter a oportunidade de agir para obter os resultados buscados, mas também de receber orientações cuidadosas quando tiverem dificuldades ou dúvidas para realizar alguma ação prevista na atividade. As orientações devem ser claras e precisas para permitir o prosseguimento da atividade sem constrangimento dos executores.

Quando um questionamento ou dúvida evidenciar que sua origem é fruto de uma falha das orientações contidas no procedimento ou da confecção do material a ser utilizado o professor deve imediatamente socializar com a turma o fato e apresentar uma orientação que contorne o ocorrido e permita o prosseguimento da atividade, se possível. Esse tipo de situação pode evitado com um planejamento cuidadoso da atividade.

O quarto momento, trata do registro, que corresponde ao momento da sistematização da pesquisa científica, neste ponto espera-se que as equipes assinalem todas as informações obtidas no decorrer da execução dos procedimentos no espaço indicado no roteiro.

O professor durante a realização do registro deve supervisionar o desenvolvimento das ações e auxiliar dirimindo as eventuais dúvidas que possam ocorrer durante o processo. O ideal é que o roteiro da atividade contenha espaço adequado para o registro das informações produzidas durante o momento da execução ao professor cabe nesse momento, supervisionar o processo e realizar intervenções quando surgirem dúvidas.

No quinto momento, a análise, espera-se que cada equipe analise as informações que foram registradas e descubram uma relação válida entre as informações registradas. Este momento é crucial para o bom andamento da atividade devido, ser o momento quando os alunos deverão ter o primeiro acesso a informação desejada pelo professor.

Quando durante a análise alguma equipe apresentar dificuldade para perceber uma relação válida a partir das informações registradas o professor deve auxiliar a equipe por meio da formulação de questões que auxiliem os membros da mesma a perceberem uma relação válida. O momento da análise corresponde a análise dos resultados de uma pesquisa cientifica. Este momento deve ser concluído com a elaboração de uma conclusão pela equipe ou participante da atividade.

O momento final, a institucionalização, é o momento em que será produzida a conclusão oficial da turma a partir das conclusões que cada equipe elaborou no momento da análise. O momento da institucionalização corresponde grosso modo ao momento da elaboração das considerações finais de um trabalho científico.

O enunciado elaborado na primeira atividade realizada por uma turma sem experiencia com o ensino por atividades costuma não atender as condições de um texto de natureza conclusiva. É comum os estudantes reproduzirem na conclusão a relação obtida no momento da análise. Isto não é motivo de grandes preocupações devido ser uma consequência da pouca experiência dos aprendizes em realizarem atividades que solicitem a elaboração de textos conclusivos.

O professor, independente do formato das conclusões elaboradas pelas equipes, deve solicitar que um representante de cada equipe vá ao quadro e registre a conclusão elaborada pela sua equipe. Após analisar as conclusões registradas o professor deve perguntar as equipes quais das conclusões apresentadas permitem a alguém que não participou da atividade entender relação estabelecida.

Este momento é oportuno para que o professor teça considerações sobre as características de uma conclusão. Finalmente o professor pode elaborar junto com a turma uma conclusão que permita a alguém que não participou da atividade entender relação estabelecida.

A conclusão que foi elaborada em conjunto com a turma será denominada de conclusão da turma. Se for possível é positivo elaborar um registro pictórico da conclusão produzida ou mesmo elaboração de uma representação com símbolos matemáticos da conclusão. Com a elaboração da conclusão termina o momento da institucionalização e da atividade também.

Diante as ideias apresentadas por Sá (2019), o ensino por atividades norteou o desenvolvimento de uma sequência didática para o ensino de equações trigonométricas que será apresentada no próximo capítulo deste produto educacional.

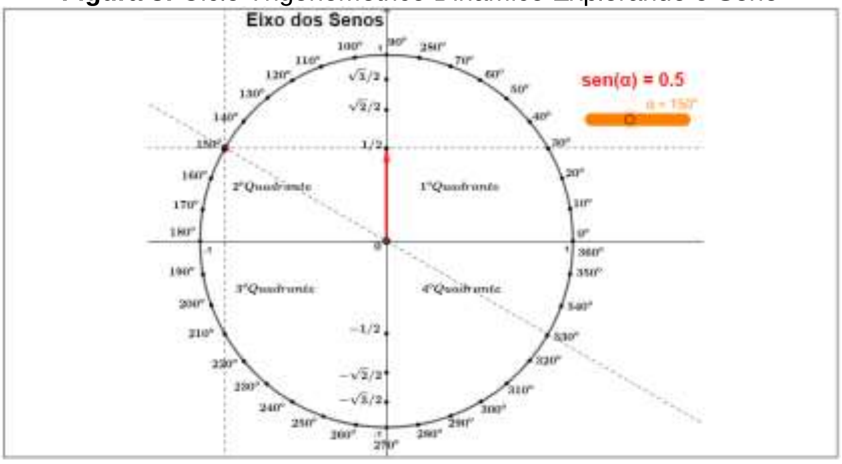
6. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo, estamos apresentando uma proposta de Sequência Didática como metodologia de ensino para as equações trigonométricas básicas com soluções na primeira volta. As atividades que a compõe foram elaboradas levando-se em conta as conclusões e entendimentos obtidos na revisão de estudos, assim como da metodologia Ensino por Atividades.

Vale destacar que as atividades utilizarão um ciclo trigonométrico dinâmico desenvolvido na plataforma do software de geometria dinâmica Geogebra para que os alunos manuseiem seja por meio de tablets, smartphones ou com o próprio computador.

As figuras a seguir, mostram o Applet do Geogebra desenvolvido para a manipulação dos estudantes nas atividades de equações trigonométricas.

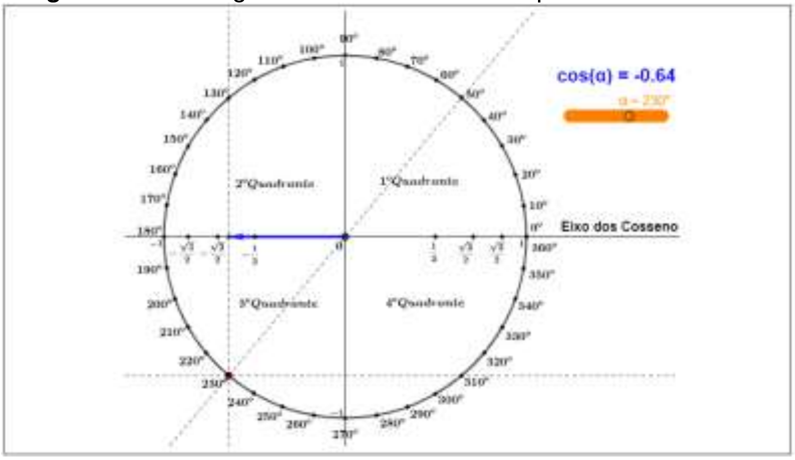
Figura 3: Ciclo Trigonométrico Dinâmico Explorando o Seno



Fonte: Produção do Autor,2021.

A figura anterior apresenta um Applet do Geogebra, no qual os alunos terão acesso para o desenvolvimento de equações trigonométricas envolvendo o seno de um arco x. Para poderem visualizar as soluções na primeira volta positiva, os discentes terão que movimentar o controle deslizante localizado à direita do ciclo trigonométrico.

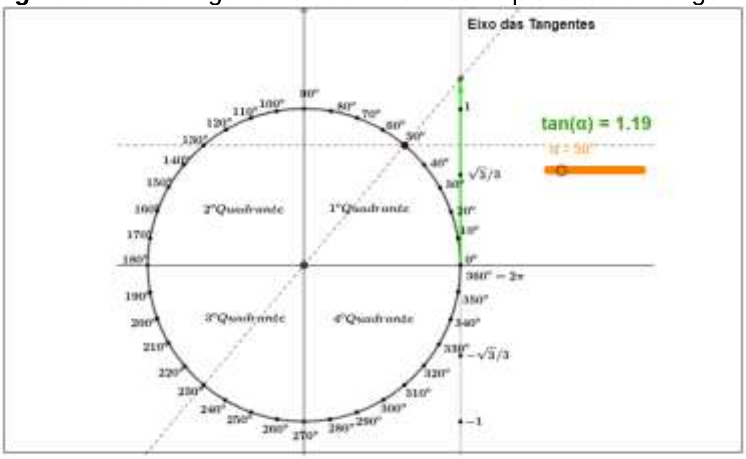
Figura 4: Ciclo Trigonométrico Dinâmico Explorando o Cosseno



Fonte: Produção do Autor,2021.

A figura anterior apresenta um Applet do Geogebra, no qual os alunos terão acesso para o desenvolvimento de equações trigonométricas envolvendo o cosseno de um arco x. Para poderem visualizar as soluções na primeira volta positiva, os discentes terão que movimentar o controle deslizante localizado à direita do ciclo trigonométrico.

Figura 5: Ciclo Trigonométrico Dinâmico Explorando a Tangente



Fonte: Produção do Autor,2021.

A figura anterior apresenta um Applet do Geogebra, no qual os alunos terão acesso para o desenvolvimento de equações trigonométricas envolvendo a tangente de um arco x. Para poderem visualizar as soluções na primeira volta positiva, terão que movimentar o controle deslizante localizado à direita do ciclo trigonométrico.

Desta forma, esperamos que o Applet do Geogebra auxilie os estudantes a perceberem as correspondências entre os ângulos, bem como as relações que possuem com os eixos do seno, cosseno e tangente e com isso consigam resolver as equações trigonométricas propostas nas atividades.

Vale destacar que nossa sequência didática terá como objetivo fazer com que os estudantes encontrem métodos de resolução para cada tipo de equação trigonométrica. Para tal, deverão perceber as regularidades que as soluções possuem em relação aos seus ângulos correspondentes no primeiro quadrante do ciclo trigonométrico.

As equações propostas nas atividades são do tipo:

a) sen x = a, com a > 0;

b) sen x = b, com b < 0.

c) sen(nx) = c, com c > 0 ou c <0.

d) sen $\left(\frac{x}{n}\right)$ = d, com d > 0 ou d < 0;

e) cos x = a, com a > 0;

f) cos x = b, com b < 0;

g) cos(nx) = c, com c > 0 ou c < 0;

i) cos $\left(\frac{x}{n}\right)$ = d, com d > 0 ou d < 0;

j) tg x = a, com a > 0;

k) tg x = b, com b < 0;

l) tg(nx) = c, com c > 0 ou c < 0;

m) tg $\left(\frac{x}{n}\right)$ = d, com d > 0 ou d < 0;

Por fim, podemos reforçar que para o desenvolvimento da sequência de atividades, o professor já deverá ter trabalhado com seus estudantes os conteúdos circunscritos para a resolução das equações trigonométricas propostas. Tais conteúdos perpassam pela trigonometria no triângulo retângulo e os conceitos referentes à trigonometria circular como, por exemplo, os arcos côngruos e as simetrias que serão de suma importância para aprendizagem efetiva do assunto.

Atividade 1

ATIVIDADE 1

Título: Resolução de equações do tipo sen x = a, com a > 0.
Objetivo: Descobrir a relação entre as soluções de equações do tipo sen x = a.
Material: Applet do Geogebra Ciclo trigonométrico Dinâmico e calculadora.
Procedimentos:
01. Com o auxílio do Ciclo trigonométrico Dinâmico mova o controle deslizante e identifique, no eixo dos senos, os valores indicados em cada equação.
02. Determine os ângulos no intervalo $[0^o, 360^o]$ cujos senos correspondem aos valores indicados em cada equação.
03. Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

Equação	Solução no 1º Quadrante α_1	Solução no 2º Quadrante α_2
a) sen x = 0,64		
b) sen x = 0,17		
c) sen x = 0,34		
d) sen x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$		
e) sen x = 0,94		
f) sen x = 0,26		
g) sen x = $\frac{\sqrt{2}}{2}$		
h) sen x = 0,42		
i) sen x = 0,77		
j) sen x = $\frac{1}{2}$		

OBSERVAÇÃO

CONCLUSÃO

Orientações Didáticas ao Professor:

A atividade 1 é composta de um quadro no qual os estudantes deverão preencher os espaços em branco com as soluções, da primeira volta, de cada equação trigonométrica do tipo sen x = a, com a > 0. Para tal, deverão utilizar o Applet do Geogebra disponível no link https://www.geogebra.org/m/qkhmvcy8.

Este Applet pode ser acessado através de um celular, tablet ou por computador e deve auxiliar os estudantes a encontrar as soluções no intervalo de [0º,360º] para cada uma das equações trigonométricas propostas na atividade. Após o preenchimento do quadro, os estudantes devem descrever a regularidade percebida por eles nos espaços destinados às observações e conclusões.

Sugerimos ao professor que oriente os alunos ao preenchimento do quadro com bastante atenção, pois qualquer ângulo escrito de forma equivocada pode ocasionar a não percepção das regularidades que os discentes deverão observar e consequentemente as observações e conclusões poderão não ser entendidas.

De acordo com as anotações dos alunos no campo destinado às observações, eles devem apresentar na área da conclusão a regularidade que perceberam sobre a relação matemática existente entre as soluções das equações trigonométricas propostas para esta atividade. Vale destacar que a regularidade esperada diz respeito a uma fórmula matemática que auxilie o estudante a encontrar o ângulo do segundo quadrante sabendo que é conhecido o valor do ângulo do primeiro quadrante. Caso os alunos não compreendam o que se deve concluir, o professor deve intervir realizando questionamentos do tipo: o que vocês podem perceber se somarem as soluções encontradas em cada equação? Isso pode esclarecer as possíveis dúvidas que estejam sentindo.

O alcance do objetivo dessa atividade deverá contribuir para que o aluno comece a perceber que sempre que souber os ângulos do primeiro quadrante, que normalmente são os ângulos notáveis de 30º, 45º e 60º, facilmente conseguirão encontrar os ângulos correspondentes no segundo quadrante para este tipo de equação trigonométrica.

A partir desse momento sugerimos ao professor que formalize a conclusão geral da atividade junto com os estudantes e logo em seguida poderá direcioná-los para a atividade 2 a seguir, onde os alunos devem seguir os mesmos procedimentos descritos na atividade anterior.

Atividade 2

ATIVIDADE 2

Título: Resolução de equações do tipo sen x = b, com b < 0.
Objetivo: Descobrir a relação entre as soluções de equações do tipo sen x = b.
Material: Applet do Geogebra Ciclo trigonométrico Dinâmico e calculadora.
Procedimentos:

01. Com o auxílio do Ciclo trigonométrico Dinâmico mova o controle deslizante e identifique, no eixo dos senos, os valores indicados em cada equação.

02. Determine os ângulos no intervalo $[0^o, 360^o]$ cujos senos correspondem aos valores indicados em cada equação.

03. Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

Equação	**Solução no 3º Quadrante α_3**	**Solução no 4º Quadrante α_4**	**Ângulo α_1 do 1º Quadrante equivalente ao ângulo α_3 do 3º Quadrante.**	**Ângulo α_1 do 1º Quadrante equivalente ao ângulo α_4 do 4º Quadrante.**
a) sen x = $-0{,}77$				
b) sen x = $-0{,}26$				
c) sen x = $-0{,}94$				
d) sen x = $-0{,}42$				
e) sen x = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$				
f) sen x = $-0{,}64$				
g) sen x = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$				
h) sen x = $-\frac{1}{2}$				
i) sen x = $-0{,}17$				
j) sen x = $-0{,}34$				

OBSERVAÇÃO

CONCLUSÃO

Orientações Didáticas ao Professor:

A atividade 2 é composta de um quadro no qual os estudantes deverão preencher os espaços em branco com as soluções, da primeira volta, de cada equação trigonométrica do tipo sen x = b, com b < 0. Para tal, deverão utilizar o mesmo Applet do Geogebra da atividade anterior.

Este Applet pode ser acessado através de um celular, tablet ou por computador e deve auxiliar os estudantes a encontrar as soluções no intervalo de [0º,360º]. Para cada uma das equações trigonométricas propostas na atividade, além dos estudantes completarem os espaços com as soluções de cada equação, deverão preencher os aos ângulos do primeiro quadrante que são côngruos das soluções encontradas. Após o completarem do quadro, os estudantes devem descrever a regularidade percebida por eles nos espaços destinados às observações e conclusões.

Mais uma vez chamamos a atenção do professor para que oriente os alunos ao preenchimento do quadro com bastante atenção, pois qualquer ângulo escrito de forma equivocada pode ocasionar a não percepção das regularidades que os discentes deverão observar e consequentemente poderão ter dificuldades em registrar suas observações e conclusões da atividade.

De acordo com as anotações dos alunos no campo destinado às observações, eles devem apresentar na área da conclusão a regularidade que perceberam sobre a relação matemática existente entre as soluções das equações trigonométricas propostas para esta atividade. Vale destacar que a regularidade esperada diz respeito a uma fórmula matemática que auxilie o estudante a encontrar o ângulo do terceiro e do quarto quadrante sabendo que é conhecido o valor do ângulo correspondente do primeiro quadrante. Caso os alunos não compreendam o que se deve concluir, o professor deve intervir realizando questionamentos do tipo: o que vocês podem perceber se subtraírem as ângulos do terceiro com ângulos correspondentes do primeiro quadrante? O que acontece se vocês somarem os ângulos do quarto quadrante com os seus correspondentes do primeiro quadrante? Isso pode esclarecer as possíveis dúvidas que estejam sentindo.

O alcance do objetivo dessa atividade deverá contribuir para que o aluno comece a perceber que sempre que souber os ângulos do primeiro quadrante, que normalmente são os ângulos notáveis de 30º, 45º e 60º, facilmente conseguirão

encontrar os ângulos correspondentes no terceiro e do quarto quadrante para o tipo este tipo de equação trigonométrica.

A partir desse momento sugerimos ao professor que formalize a conclusão geral da atividade junto com os estudantes e logo em seguida poderá os direcioná-los para a atividade 3 a seguir, onde os alunos devem seguir os mesmos procedimentos descritos na atividade anterior.

Atividade 3

ATIVIDADE 3

Título: Resolução de equações do tipo sen(nx) = c, com c > 0 ou c < 0.
Objetivo: Descobrir a solução geral de equações do tipo sen(nx) = c.
Material: Applet do Geogebra Ciclo trigonométrico Dinâmico e calculadora.
Procedimentos:
01. Com o auxílio do Ciclo trigonométrico Dinâmico mova o controle deslizante e identifique, no eixo dos senos, os valores indicados em cada equação.
02. Determine os ângulos no intervalo $[0^o, 360^o]$ cujos senos correspondem aos valores indicados em cada equação.
03. Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

Equação	Solução x_1	Solução x_2
a) sen x = $\frac{1}{2}$		
b) sen(2x) = $\frac{1}{2}$		
c) sen(3x) = $\frac{1}{2}$		
d) sen x = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$		
e) sen(3x) = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$		
f) sen(5x) = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$		
g) sen x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$		
h) sen(2x) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$		
i) sen(3x) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$		
j) sen(5x) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$		

OBSERVAÇÃO

CONCLUSÃO

Orientações Didáticas ao Professor:

A atividade 3 é composta de um quadro no qual os estudantes deverão preencher os espaços em branco com as soluções, da primeira volta, de cada equação trigonométrica do tipo sen(nx) = c, com c > 0 ou c < 0. Para tal, deverão utilizar o mesmo Applet do Geogebra da atividade anterior.

Este Applet pode ser acessado através de um celular, tablet ou por computador e deve auxiliar os estudantes a encontrar as soluções no intervalo de [0º,360º]. Para cada uma das equações trigonométricas propostas na atividade, além dos estudantes completarem os espaços com as soluções de cada equação base, isto é, equações do tipo sen x = a e sen x = b, os discentes deverão encontrar as soluções das equações sen(nx) = c baseando-se nas respostas encontradas para as equações base.

Mais uma vez chamamos a atenção do professor para que oriente os alunos ao preenchimento do quadro com bastante atenção, pois qualquer ângulo escrito de forma equivocada pode ocasionar a não percepção das regularidades que os discentes deverão observar e consequentemente poderão ter dificuldades em registrar suas observações e conclusões da atividade.

De acordo com as anotações dos alunos no campo destinado às observações, eles devem apresentar na área da conclusão a regularidade que perceberam sobre a relação matemática existente entre as soluções das equações trigonométricas sen(nx) = c. Vale destacar que a regularidade esperada diz respeito a uma fórmula matemática que auxilie o estudante a encontrar o valor de x realizando a divisão das soluções de cada equação base pelo valor de "n". Caso os alunos não compreendam o que se deve concluir, o professor pode intervir realizando questionamentos do tipo: Para que o valor do arco (nx) seja igual aos ângulos da equação base, que operação matemática vocês devem realizar para descobrir o valor de x? Isso pode esclarecer as possíveis dúvidas que estejam sentindo.

O alcance do objetivo dessa atividade deverá contribuir para que o aluno comece a perceber que sempre que souber os ângulos das equações base, que normalmente são os ângulos notáveis de 30º, 45º e 60º, facilmente conseguirão encontrar o valor de x para as equações sen(nx) = c.

A partir desse momento sugerimos ao professor que formalize a conclusão geral da atividade junto com os estudantes e logo em seguida poderá os direcioná-los

para a atividade 4 a seguir, onde os alunos devem seguir os mesmos procedimentos descritos na atividade anterior.

Atividade 4

ATIVIDADE 4

Título: Resolução de equações do tipo sen $\left(\frac{x}{n}\right)$ = d, com d > 0 ou d < 0.

Objetivo: Descobrir a solução geral de equações do tipo sen $\left(\frac{x}{n}\right)$ = d.

Material: Applet do Geogebra Ciclo trigonométrico Dinâmico e calculadora.

Procedimentos:

01.Com o auxílio do Ciclo trigonométrico Dinâmico mova o controle deslizante e identifique, no eixo dos senos, os valores indicados em cada equação.

02. Determine os ângulos no intervalo $[0^o, 360^o]$ cujos senos correspondem aos valores indicados em cada equação.

03. Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

Equação	**Solução x_1**	**Solução x_2**
a) sen x = $\frac{1}{2}$		
b) sen $\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$		
c) sen $\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}$		
d) sen x = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$		
e) sen $\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$		
f) sen x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$		
g) sen $\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$		
h) sen $\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$		
i) sen x = 0,34		
j) sen $\left(\frac{x}{2}\right)$ = 0,34		

OBSERVAÇÃO

CONCLUSÃO

Orientações Didáticas ao Professor:

A atividade 4 é composta de um quadro no qual os estudantes deverão preencher os espaços em branco com as soluções, da primeira volta, de cada equação trigonométrica do tipo $sen\left(\frac{x}{n}\right) = d$, com d > 0 ou d < 0. Para tal, deverão utilizar o mesmo Applet do Geogebra da atividade anterior.

Este Applet pode ser acessado através de um celular, tablet ou por computador e deve auxiliar os estudantes a encontrar as soluções no intervalo de [0º,360º]. Para cada uma das equações trigonométricas propostas na atividade, além dos estudantes completarem os espaços com as soluções de cada equação base, isto é, equações do tipo sen x = a e sen x = b, os discentes deverão encontrar as soluções das equações $sen\left(\frac{x}{n}\right) = d$ baseando-se nas respostas encontradas para as equações base.

Mais uma vez chamamos a atenção do professor para que oriente os alunos ao preenchimento do quadro com bastante atenção, pois qualquer ângulo escrito de forma equivocada pode ocasionar a não percepção das regularidades que os discentes deverão observar e consequentemente poderão ter dificuldades em registrar suas observações e conclusões da atividade.

De acordo com as anotações dos alunos no campo destinado às observações, eles devem apresentar na área da conclusão a regularidade que perceberam sobre a relação matemática existente entre as soluções das equações trigonométricas $sen\left(\frac{x}{n}\right) = d$. Vale destacar que a regularidade esperada diz respeito a uma fórmula matemática que auxilie o estudante a encontrar o valor de x realizando a multiplicação das soluções de cada equação base pelo valor de “n”. Caso os alunos não compreendam o que se deve concluir, o professor pode intervir realizando questionamentos do tipo: Para que o valor do arco $\left(\frac{x}{n}\right)$ seja igual aos ângulos da equação base, que operação matemática vocês devem realizar para descobrir o valor de x? Isso pode esclarecer as possíveis dúvidas que estejam sentindo.

O alcance do objetivo dessa atividade deverá contribuir para que o aluno comece a perceber que sempre que souber os ângulos das equações base, que normalmente são os ângulos notáveis de 30º, 45º e 60º, facilmente conseguirão encontrar o valor de x para as equações $sen\left(\frac{x}{n}\right) = d$.

A partir desse momento sugerimos ao professor que formalize a conclusão geral da atividade junto com os estudantes e logo em seguida poderá os direcioná-los para as questões de aprofundamento de equações trigonométricas envolvendo o seno de um arco.

Atividade de Aprofundamento das Atividades 1,2,3 e 4

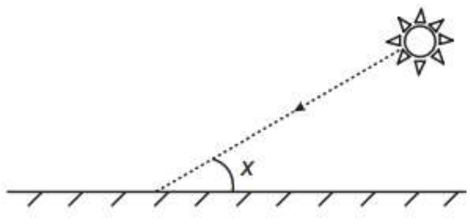
Lista de questões com equações trigonométricas do tipo seno.

Para cada uma das questões, utilize a tabela dos ângulos notáveis do ciclo trigonométrico.

TABELA DOS VALORES DOS ARCOS NOTÁVEIS

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

01**. (ENEM – ADAPTADA)** Os raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura.



Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por I = 4· sen(x), onde I mede a intensidade luminosa, em candelas (cd). Sabendo que em determinado dia, a intensidade luminosa do raio solar atingiu o valor I = 2 cd, qual o valor do ângulo x formado entre o raio do sol e a superfície do lago?

02. **(OBJETIVO-SP)** Resolva a equação trigonométrica sen (2x – 90º) = $\frac{1}{2}$, com x ∈ [0,360º].

03. Resolver a equação 2 sen x – $\sqrt{2}$ = 0 sabendo que 0º ≤ x ≤ 360º.

04. **(FGV)** A equação 4. sen^{2}x = 1 para 0º ≤ x ≤ 360º, tem conjunto verdade igual a

(A) {30º}

(B) {60º}

(C) {30º, 210º}

(D) {30º, 150º}

(E) {30º, 150º,210º,330º}

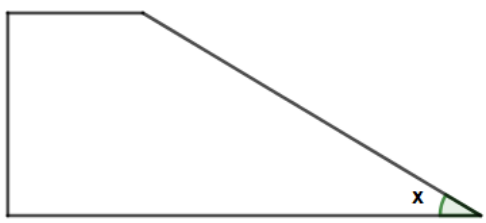
05. **(OBJETIVO-SP)** Resolva a equação 4.sen^{2}x – 3 = 0 supondo 0º ≤ x ≤ 360º.

06. A distância horizontal percorrida por uma bola de futebol depende, entre outros fatores, da velocidade inicial e do ângulo formado pela trajetória da bola com a horizontal. Representando a velocidade inicial por v e o ângulo por α, podemos determinar essa distância d pela equação $d = \frac{v^2}{10} .sen\alpha$. Sabendo que em certo chute a bola percorreu uma distância d =16,2 m com velocidade v = 18m/s, qual é a medida do ângulo α?

07. Qual o conjunto solução da equação 2.sen $\frac{x}{3}$ = $\sqrt{3}$, com x ∈ [0,360º]?

08. Qual o conjunto solução da equação sen 5x = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, com x ∈ [0,360º]?

09. Para a construção da rampa da figura abaixo, um engenheiro precisou resolver a equação trigonométrica sen x = $\frac{1}{2}$.



Diante dessa situação, qual a medida do ângulo, em graus, encontrada pelo engenheiro?

10. **(UFRN)** A projeção da quantidade a ser vendida de determinado produto para os próximos dois anos pode ser aproximada pela equação Q = 64 + 36 sen 45t, onde t representa o tempo em meses. Sabendo que t ∈ [0,8], para qual(is) valores de t a quantidade Q vendida do produto será igual a 100 unidades?

Orientações Didáticas ao Professor

Sugerimos ao professor que no momento que os alunos estiverem respondendo esta atividade de aprofundamento, disponibilize uma tabela trigonométrica com os ângulos notáveis (30º, 45º e 60º) para auxiliar a resolução das equações trigonométricas propostas para esta atividade.

Caso os alunos tenham muita dificuldade, recomendamos que o professor mostre a eles as conclusões que tiveram, pois isso pode ajudar a relembrarem da regularidade percebidas por eles. Assim que todos os estudantes tiverem respondido, eles devem ser encaminhados para a etapa de formalização onde será discutido com eles os possíveis métodos propostos por eles na atividade e outros métodos mais formais.

As atividade 5,6,7 e 8 que estão apresentadas a seguir, tratam sobre uma aula envolvendo as equações trigonométricas do tipo cosseno, onde os estudantes devem ser requisitados a mostrarem os conhecimentos obtidos nas atividades anteriores.

Atividade 5

ATIVIDADE 5

Título: Resolução de equações do tipo cos x = a, com a > 0.
Objetivo: Descobrir a relação entre as soluções de equações do tipo cos x =a.
Material: Applet do Geogebra Ciclo trigonométrico Dinâmico e calculadora.
Procedimentos:
01. Com o auxílio do Ciclo trigonométrico Dinâmico mova o controle deslizante e identifique, no eixo dos cossenos, os valores indicados em cada equação.
02. Determine os ângulos no intervalo $[0^o, 360^o]$ cujos cossenos correspondem aos valores indicados em cada equação.
03. Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

Equação	Solução no 1º Quadrante α_1	Solução no 4º Quadrante α_4
a) cos x = 0,15		
b) cos x = 0,77		
c) cos x = 0,34		
d) cos x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$		
e) cos x = $\frac{1}{2}$		
f) cos x = 0,94		
g) cos x = $\frac{\sqrt{2}}{2}$		
h) cos x = 0,42		
i) cos x = 0,26		
j) cos x = 0,60		

OBSERVAÇÃO

CONCLUSÃO

Orientações Didáticas ao Professor:

A atividade 5 é composta de um quadro no qual os estudantes deverão preencher os espaços em branco com as soluções, da primeira volta, de cada equação trigonométrica do tipo cos x = a, com a > 0. Para tal, deverão utilizar o Applet do Geogebra disponível no link https:// geogebra.org/m/gwneyyr8.

Este Applet pode ser acessado através de um celular, tablet ou por computador e deve auxiliar os estudantes a encontrar as soluções no intervalo de [0º,360º] para cada uma das equações trigonométricas propostas na atividade. Após o preenchimento do quadro, os estudantes devem descrever a regularidade percebida por eles nos espaços destinados às observações e conclusões.

Sugerimos ao professor que oriente os alunos ao preenchimento do quadro com bastante atenção, pois qualquer ângulo escrito de forma equivocada pode ocasionar a não percepção das regularidades que os discentes deverão observar e consequentemente as observações e conclusões poderão não ser entendidas.

De acordo com as anotações dos alunos no campo destinado às observações, eles devem apresentar na área da conclusão a regularidade que perceberam sobre a relação matemática existente entre as soluções das equações trigonométricas propostas para esta atividade. Vale destacar que a regularidade esperada diz respeito a uma fórmula matemática que auxilie o estudante a encontrar o ângulo do quarto quadrante sabendo que é conhecido o valor do ângulo do primeiro quadrante. Caso os alunos não compreendam o que se deve concluir, o professor deve intervir realizando questionamentos do tipo: o que vocês podem perceber se somarem as soluções encontradas em cada equação? Isso pode esclarecer as possíveis dúvidas que estejam sentindo.

O alcance do objetivo dessa atividade deverá contribuir para que o aluno comece a perceber que sempre que souber os ângulos do primeiro quadrante, que normalmente são os ângulos notáveis de 30º, 45º e 60º, facilmente conseguirão encontrar os ângulos correspondentes no quarto quadrante para este tipo de equação trigonométrica.

A partir desse momento sugerimos ao professor que formalize a conclusão geral da atividade junto com os estudantes e logo em seguida poderá direcioná-los para a atividade 6 a seguir, onde os alunos devem seguir os mesmos procedimentos descritos na atividade anterior.

Atividade 6

ATIVIDADE 6

Título: Resolução de equações do tipo cos x = b, com b < 0.
Objetivo: Descobrir a relação entre as soluções de equações do tipo cos x = b.
Material: Applet do Geogebra Ciclo trigonométrico Dinâmico e calculadora.
Procedimentos:
01. Com o auxílio do Ciclo trigonométrico Dinâmico mova o controle deslizante e identifique, no eixo dos cossenos, os valores indicados em cada equação.
02. Determine os ângulos no intervalo $[0^o, 360^o]$ cujos cossenos correspondem aos valores indicados em cada equação.
03. Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

Equação	Solução no 2º Quadrante (α_2)	Solução no 3º Quadrante (α_3)	Ângulo α_1 do 1º Quadrante equivalente ao ângulo α_2 do 2º Quadrante.	Ângulo α_1 do 1º Quadrante equivalente ao ângulo α_3 do 3º Quadrante.
a) cos x = –0,77				
b) cos x = –0,26				
c) cos x = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$				
d) cos x = –0,42				
e) cos x = –0,94				
f) cos x = –0,6				
g) cos x = –0,34				
h) cos x = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$				
i) cos x = –0,17				
j) cos x = $-\frac{1}{2}$				

OBSERVAÇÃO

CONCLUSÃO

Orientações Didáticas ao Professor:

A atividade 6 é composta de um quadro no qual os estudantes deverão preencher os espaços em branco com as soluções, da primeira volta, de cada equação trigonométrica do tipo cos x = b, com b < 0. Para tal, deverão utilizar o mesmo Applet do Geogebra da atividade anterior.

Este Applet pode ser acessado através de um celular, tablet ou por computador e deve auxiliar os estudantes a encontrar as soluções no intervalo de [0º,360º]. Para cada uma das equações trigonométricas propostas na atividade, além dos estudantes completarem os espaços com as soluções de cada equação, deverão preencher os aos ângulos do primeiro quadrante que são côngruos das soluções encontradas. Após o completarem do quadro, os estudantes devem descrever a regularidade percebida por eles nos espaços destinados às observações e conclusões.

Mais uma vez chamamos a atenção do professor para que oriente os alunos ao preenchimento do quadro com bastante atenção, pois qualquer ângulo escrito de forma equivocada pode ocasionar a não percepção das regularidades que os discentes deverão observar e consequentemente poderão ter dificuldades em registrar suas observações e conclusões da atividade.

De acordo com as anotações dos alunos no campo destinado às observações, eles devem apresentar na área da conclusão a regularidade que perceberam sobre a relação matemática existente entre as soluções das equações trigonométricas propostas para esta atividade. Vale destacar que a regularidade esperada diz respeito a uma fórmula matemática que auxilie o estudante a encontrar o ângulo do segundo e do terceiro quadrante sabendo que é conhecido o valor do ângulo correspondente do primeiro quadrante. Caso os alunos não compreendam o que se deve concluir, o professor deve intervir realizando questionamentos do tipo: o que vocês podem perceber se somarem as ângulos do segundo com os ângulos correspondentes do primeiro quadrante? O que acontece se vocês subtraírem os ângulos do terceiro quadrante com os seus correspondentes do primeiro quadrante? Isso pode esclarecer as possíveis dúvidas que estejam sentindo.

O alcance do objetivo dessa atividade deverá contribuir para que o aluno comece a perceber que sempre que souber os ângulos do primeiro quadrante, que normalmente são os ângulos notáveis de 30º, 45º e 60º, facilmente conseguirão

encontrar os ângulos correspondentes no segundo e do terceiro quadrante para o tipo este tipo de equação trigonométrica.

A partir desse momento sugerimos ao professor que formalize a conclusão geral da atividade junto com os estudantes e logo em seguida poderá os direcioná-los para a atividade 7 a seguir, onde os alunos devem seguir os mesmos procedimentos descritos na atividade anterior.

Atividade 7

ATIVIDADE 7

Título: Resolução de equações do tipo cos(nx) = c, com c > 0 ou c < 0.
Objetivo: Descobrir as soluções de equações do tipo cos(nx) = c.
Material: Applet do Geogebra Ciclo trigonométrico Dinâmico e calculadora.
Procedimentos:
01. Com o auxílio do Ciclo trigonométrico Dinâmico mova o controle deslizante e identifique, no eixo dos cossenos, os valores indicados em cada equação.
02. Determine os ângulos no intervalo $[0^o, 360^o]$ cujos cossenos correspondem aos valores indicados em cada equação.
03. Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

Equação	Solução x_1	Solução x_2
a) cos x = $\frac{1}{2}$		
b) cos(2x) = $\frac{1}{2}$		
c) cos(3x) = $\frac{1}{2}$		
d) cos x = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$		
e) cos(3x) = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$		
f) cos(5x) = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$		
g) cos x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$		
h) cos(2x) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$		
i) cos(3x) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$		
j) cos(5x) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$		

OBSERVAÇÃO

CONCLUSÃO

Orientações Didáticas ao Professor:

A atividade 7 é composta de um quadro no qual os estudantes deverão preencher os espaços em branco com as soluções, da primeira volta, de cada equação trigonométrica do tipo cos(nx) = c, com c > 0 ou c < 0. Para tal, deverão utilizar o mesmo Applet do Geogebra da atividade anterior.

Este Applet pode ser acessado através de um celular, tablet ou por computador e deve auxiliar os estudantes a encontrar as soluções no intervalo de [0º,360º]. Para cada uma das equações trigonométricas propostas na atividade, além dos estudantes completarem os espaços com as soluções de cada equação base, isto é, equações do tipo cos x = a e cos x = b, os discentes deverão encontrar as soluções das equações cos(nx) = c baseando-se nas respostas encontradas para as equações base.

Mais uma vez chamamos a atenção do professor para que oriente os alunos ao preenchimento do quadro com bastante atenção, pois qualquer ângulo escrito de forma equivocada pode ocasionar a não percepção das regularidades que os discentes deverão observar e consequentemente poderão ter dificuldades em registrar suas observações e conclusões da atividade.

De acordo com as anotações dos alunos no campo destinado às observações, eles devem apresentar na área da conclusão a regularidade que perceberam sobre a relação matemática existente entre as soluções das equações trigonométricas cos(nx) = c. Vale destacar que a regularidade esperada diz respeito a uma fórmula matemática que auxilie o estudante a encontrar o valor de x realizando a divisão das soluções de cada equação base pelo valor de “n”. Caso os alunos não compreendam o que se deve concluir, o professor pode intervir realizando questionamentos do tipo: Para que o valor do arco (nx) seja igual aos ângulos da equação base, que operação matemática vocês devem realizar para descobrir o valor de x? Isso pode esclarecer as possíveis dúvidas que estejam sentindo.

O alcance do objetivo dessa atividade deverá contribuir para que o aluno comece a perceber que sempre que souber os ângulos das equações base, que normalmente são os ângulos notáveis de 30º, 45º e 60º, facilmente conseguirão encontrar o valor de x para as equações cos(nx) = c.

A partir desse momento sugerimos ao professor que formalize a conclusão geral da atividade junto com os estudantes e logo em seguida poderá os direcioná-los

para a atividade 8 a seguir, onde os alunos devem seguir os mesmos procedimentos descritos na atividade anterior.

Atividade 8

ATIVIDADE 8

Título: Resolução de equações do tipo cos $\left(\frac{x}{n}\right)$ = d, com d > 0 ou d < 0.

Objetivo: Descobrir as soluções de equações do tipo cos $\left(\frac{x}{n}\right)$ = d.

Material: Applet do Geogebra Ciclo trigonométrico Dinâmico e calculadora.

Procedimentos:

01. Com o auxílio do Ciclo trigonométrico Dinâmico mova o controle deslizante e identifique, no eixo dos cossenos, os valores indicados em cada equação.

02. Determine os ângulos no intervalo $[0^o, 360^o]$ cujos cossenos correspondem aos valores indicados em cada equação.

03. Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

Equação	Solução x_1	Solução x_2
a) cos x = $\frac{1}{2}$		
b) cos $\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$		
c) cos $\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}$		
d) cos x = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$		
e) cos $\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$		
f) cos x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$		
g) cos $\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$		
h) cos $\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$		
i) cos x = 0,34		
j) cos $\left(\frac{x}{2}\right)$ = 0,34		

OBSERVAÇÃO

CONCLUSÃO

Orientações Didáticas ao Professor:

A atividade 8 é composta de um quadro no qual os estudantes deverão preencher os espaços em branco com as soluções, da primeira volta, de cada equação trigonométrica do tipo $cos\left(\frac{x}{n}\right) = d$, com d > 0 ou d < 0. Para tal, deverão utilizar o mesmo Applet do Geogebra da atividade anterior.

Este Applet pode ser acessado através de um celular, tablet ou por computador e deve auxiliar os estudantes a encontrar as soluções no intervalo de [0º,360º]. Para cada uma das equações trigonométricas propostas na atividade, além dos estudantes completarem os espaços com as soluções de cada equação base, isto é, equações do tipo cos x = a e cos x = b, os discentes deverão encontrar as soluções das equações $cos\left(\frac{x}{n}\right) = d$ baseando-se nas respostas encontradas para as equações base.

Mais uma vez chamamos a atenção do professor para que oriente os alunos ao preenchimento do quadro com bastante atenção, pois qualquer ângulo escrito de forma equivocada pode ocasionar a não percepção das regularidades que os discentes deverão observar e consequentemente poderão ter dificuldades em registrar suas observações e conclusões da atividade.

De acordo com as anotações dos alunos no campo destinado às observações, eles devem apresentar na área da conclusão a regularidade que perceberam sobre a relação matemática existente entre as soluções das equações trigonométricas $cos\left(\frac{x}{n}\right) = d$. Vale destacar que a regularidade esperada diz respeito a uma fórmula matemática que auxilie o estudante a encontrar o valor de x realizando a multiplicação das soluções de cada equação base pelo valor de “n”. Caso os alunos não compreendam o que se deve concluir, o professor pode intervir realizando questionamentos do tipo: Para que o valor do arco $\left(\frac{x}{n}\right)$ seja igual aos ângulos da equação base, que operação matemática vocês devem realizar para descobrir o valor de x? Isso pode esclarecer as possíveis dúvidas que estejam sentindo.

O alcance do objetivo dessa atividade deverá contribuir para que o aluno comece a perceber que sempre que souber os ângulos das equações base, que normalmente são os ângulos notáveis de 30º, 45º e 60º, facilmente conseguirão encontrar o valor de x para as equações $cos\left(\frac{x}{n}\right) = d$.

A partir desse momento sugerimos ao professor que formalize a conclusão geral da atividade junto com os estudantes e logo em seguida poderá os direcioná-los para as questões de aprofundamento de equações trigonométricas envolvendo o cosseno de um arco.

Atividade de Aprofundamento das Atividades 5,6,7 e 8

Lista de questões com equações trigonométricas do tipo cosseno.

Para cada uma das questões, utilize a tabela dos ângulos notáveis do ciclo trigonométrico.

TABELA DOS VALORES DOS ARCOS NOTÁVEIS

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

01. Qual o conjunto solução da equação $2.\cos x - 1 = 0$, com $x \in [0,360º]$?

02.Resolva a equação $4.\cos^2 x - 3 = 0$, com $x \in [0,360º]$?

03. **(UESPI – PI - Adaptada)** Em virtude da procura por certo produto ser maior em determinados meses do ano e menor em outros, seu preço, durante todo decorrer do ano de 2005, variou segundo a equação $P = 120 + 80.\cos 30t$, em que P é o preço do produto, em reais, e t é o mês do ano. Em quais meses do ano o valor do preço P era de 80 reais?

04. Dada a equação $1 + \cos x = 1,5$, qual o conjunto solução no intervalo $x \in [0,360º]$?

05. Qual o conjunto solução da equação cos 2x = $-\frac{1}{2}$, com x ∈ [0,360º]?

06. Qual o conjunto solução da equação cos 3x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, com x ∈ [0,360º]?

07. Qual o conjunto solução da equação cos 5x = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, com x ∈ [0,360º]?

08. Quais os valores de x que satisfazem o conjunto solução da equação 8.cos (3x) = −4 no intervalo x ∈ [0,360º]?

09. **(UNIRIO)** O conjunto-solução da equação cos 2x = $\frac{1}{2}$, onde x é um arco no intervalo x ∈ [0,360º], é dado por:

a) {60°, 300°}

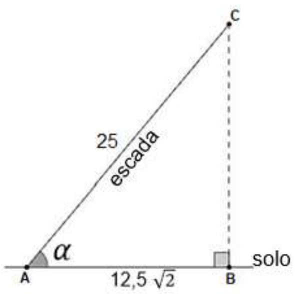
b) {30°, 330°}

c) {30°, 150°}

d) {30°, 150°, 210°, 330°}

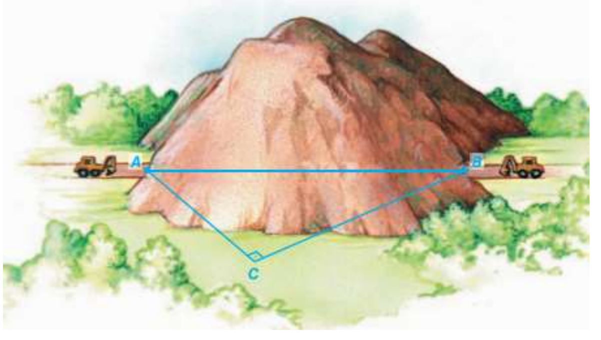
e) {15°, 165°, 195°, 345°}

10.**(PISM)** Um pedreiro deseja colocar uma rampa de comprimento 25 m que deverá ficar apoiada numa parede como mostra a figura a seguir:



Qual o valor do ângulo α formado entre a escada e o solo?

11. Um túnel de 300 m de comprimento será construído em linha reta, unindo dois pontos, A e B, da base de uma montanha. Uma equipe de trabalhadores fará a perfuração a partir de A, e outra equipe a partir de B. Para determinar a direção das perfurações, para que os dois trechos cavados se encontrem, um engenheiro fixou um ponto C no terreno próximo à montanha, de modo que o ângulo ACB fosse reto e AC 5 150 m. Qual deve ser a medida do ângulo que a direção dos dois trechos da perfuração deve formar com o lado AC do triângulo ABC para que não haja desencontro desses trechos?



Orientações Didáticas ao Professor

Sugerimos ao professor que no momento que os alunos estiverem respondendo esta atividade de aprofundamento, disponibilize uma tabela trigonométrica com os ângulos notáveis (30º, 45º e 60º) para auxiliar a resolução das equações trigonométricas propostas para esta atividade.

Caso os alunos tenham muita dificuldade, recomendamos que o professor mostre a eles as conclusões que tiveram, pois isso pode ajudar a relembrarem da regularidade percebidas por eles. Assim que todos os estudantes tiverem respondido, eles devem ser encaminhados para a etapa de formalização onde será discutido com eles os possíveis métodos propostos por eles na atividade e outros métodos mais formais.

As atividade 9,10,11 e 12 que estão apresentadas a seguir, tratam sobre uma aula envolvendo as equações trigonométricas do tipo tangente, onde os estudantes devem ser requisitados a mostrarem os conhecimentos obtidos nas atividades anteriores.

Atividade 9

ATIVIDADE 9

Título: Resolução de equações do tipo tg x = a.
Objetivo: Descobrir a relação entre as soluções de equações do tipo tg x = a.
Material: Applet do Geogebra Ciclo trigonométrico Dinâmico e calculadora.
Procedimentos:
01. Com o auxílio do Ciclo trigonométrico Dinâmico mova o controle deslizante e identifique, no eixo das tangentes, os valores indicados em cada equação.
02. Determine os ângulos no intervalo $[0^o, 360^o]$ cuja tangente corresponde aos valores indicados em cada equação.
03. Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

Equação	Solução no 1º Quadrante α_1	Solução no 3º Quadrante α_3
a) tg x = 0,18		
b) tg x = 0,70		
c) tg x = 1		
d) tg x = $\frac{\sqrt{3}}{3}$		
e) tg x = 0,36		
f) tg x = 0,84		
g) tg x = 0,47		
h) tg x = $\sqrt{3}$		
i) tg x = 1,43		
j) tg x = 1,19		

OBSERVAÇÃO

CONCLUSÃO

Orientações Didáticas ao Professor:

A atividade 9 é composta de um quadro no qual os estudantes deverão preencher os espaços em branco com as soluções, da primeira volta, de cada equação trigonométrica do tipo $tg\ x = a$, com $a > 0$. Para tal, deverão utilizar o Applet do Geogebra disponível no link https://www.geogebra.org/m/ufmeezqf

Este Applet pode ser acessado através de um celular, tablet ou por computador e deve auxiliar os estudantes a encontrar as soluções no intervalo de [0º,360º] para cada uma das equações trigonométricas propostas na atividade. Após o preenchimento do quadro, os estudantes devem descrever a regularidade percebida por eles nos espaços destinados às observações e conclusões.

Sugerimos ao professor que oriente os alunos ao preenchimento do quadro com bastante atenção, pois qualquer ângulo escrito de forma equivocada pode ocasionar a não percepção das regularidades que os discentes deverão observar e consequentemente as observações e conclusões poderão não ser entendidas.

De acordo com as anotações dos alunos no campo destinado às observações, eles devem apresentar na área da conclusão a regularidade que perceberam sobre a relação matemática existente entre as soluções das equações trigonométricas propostas para esta atividade. Vale destacar que a regularidade esperada diz respeito a uma fórmula matemática que auxilie o estudante a encontrar o ângulo do terceiro quadrante sabendo que é conhecido o valor do ângulo do primeiro quadrante. Caso os alunos não compreendam o que se deve concluir, o professor deve intervir realizando questionamentos do tipo: o que vocês podem perceber se subtraírem as soluções encontradas em cada equação? Isso pode esclarecer as possíveis dúvidas que estejam sentindo.

O alcance do objetivo dessa atividade deverá contribuir para que o aluno comece a perceber que sempre que souber os ângulos do primeiro quadrante, que normalmente são os ângulos notáveis de 30º, 45º e 60º, facilmente conseguirão encontrar os ângulos correspondentes no terceiro quadrante para este tipo de equação trigonométrica.

A partir desse momento sugerimos ao professor que formalize a conclusão geral da atividade junto com os estudantes e logo em seguida poderá direcioná-los para a atividade 10 a seguir, onde os alunos devem seguir os mesmos procedimentos descritos na atividade anterior.

Atividade 10

ATIVIDADE 10

Título: Resolução de equações do tipo tg x = b, com b < 0.
Objetivo: Descobrir a relação entre as soluções de equações do tipo tg x = b.
Material: Applet do Geogebra Ciclo trigonométrico Dinâmico e calculadora.
Procedimentos:
01. Com o auxílio do Ciclo trigonométrico Dinâmico mova o controle deslizante e identifique, no eixo das tangentes, os valores indicados em cada equação.
02. Determine os ângulos no intervalo $[0^o, 360^o]$ cuja tangente corresponde aos valores indicados em cada equação.
03. Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

Equação	**Solução no 2º Quadrante α_2**	**Solução no 4º Quadrante α_4**	**Ângulo α_1 do 1º Quadrante equivalente ao ângulo α_2 do 2º Quadrante.**	**Ângulo α_1 do 1º Quadrante equivalente ao ângulo α_4 do 4º Quadrante.**
a) tg x = −0,18				
b) tg x = −0,70				
c) tg x = −0,47				
d) tg x = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$				
e) tg x = −0,36				
f) tg x = −1,43				
g) tg x = −1				
h) tg x = $-\sqrt{3}$				
i) tg x = −0,84				
j) tg x = −1,19				

OBSERVAÇÃO

CONCLUSÃO

Orientações Didáticas ao Professor:

A atividade 10 é composta de um quadro no qual os estudantes deverão preencher os espaços em branco com as soluções, da primeira volta, de cada equação trigonométrica do tipo tg x = b, com b < 0. Para tal, deverão utilizar o mesmo Applet do Geogebra da atividade anterior.

Este Applet pode ser acessado através de um celular, tablet ou por computador e deve auxiliar os estudantes a encontrar as soluções no intervalo de [0º,360º]. Para cada uma das equações trigonométricas propostas na atividade, além dos estudantes completarem os espaços com as soluções de cada equação, deverão preencher os aos ângulos do primeiro quadrante que são côngruos das soluções encontradas. Após o completarem do quadro, os estudantes devem descrever a regularidade percebida por eles nos espaços destinados às observações e conclusões.

Mais uma vez chamamos a atenção do professor para que oriente os alunos ao preenchimento do quadro com bastante atenção, pois qualquer ângulo escrito de forma equivocada pode ocasionar a não percepção das regularidades que os discentes deverão observar e consequentemente poderão ter dificuldades em registrar suas observações e conclusões da atividade.

De acordo com as anotações dos alunos no campo destinado às observações, eles devem apresentar na área da conclusão a regularidade que perceberam sobre a relação matemática existente entre as soluções das equações trigonométricas propostas para esta atividade. Vale destacar que a regularidade esperada diz respeito a uma fórmula matemática que auxilie o estudante a encontrar o ângulo do segundo e do quarto quadrante sabendo que é conhecido o valor do ângulo correspondente do primeiro quadrante. Caso os alunos não compreendam o que se deve concluir, o professor deve intervir realizando questionamentos do tipo: o que vocês podem perceber se somarem as ângulos do segundo com os ângulos correspondentes do primeiro quadrante? O que acontece se vocês somarem os ângulos do quarto quadrante com os seus correspondentes do primeiro quadrante? Isso pode esclarecer as possíveis dúvidas que estejam sentindo.

O alcance do objetivo dessa atividade deverá contribuir para que o aluno comece a perceber que sempre que souber os ângulos do primeiro quadrante, que normalmente são os ângulos notáveis de 30º, 45º e 60º, facilmente conseguirão

encontrar os ângulos correspondentes no segundo e do quarto quadrante para o tipo este tipo de equação trigonométrica.

A partir desse momento sugerimos ao professor que formalize a conclusão geral da atividade junto com os estudantes e logo em seguida poderá os direcioná-los para a atividade 11 a seguir, onde os alunos devem seguir os mesmos procedimentos descritos na atividade anterior.

Atividade 11

ATIVIDADE 11

Título: Resolução de equações do tipo tg nx = c, com c > 0 ou c < 0.
Objetivo: Descobrir a relação entre as soluções de equações do tipo tg nx = c.
Material: Applet do Geogebra Ciclo trigonométrico Dinâmico e calculadora.
Procedimentos:
01. Com o auxílio do Ciclo trigonométrico Dinâmico mova o controle deslizante e identifique, no eixo das tangentes, os valores indicados em cada equação.
02. Determine os ângulos no intervalo $[0^o, 360^o]$ cuja tangente corresponde aos valores indicados em cada equação.
03. Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

Equação	Solução x_1	Solução x_2
a) tg x = 0,84		
b) tg 2x = 0,84		
c) tg 3x = 0,84		
d) tg x = $-\sqrt{3}$		
e) tg 2x = $-\sqrt{3}$		
f) tg 3x = $-\sqrt{3}$		
g) tg x = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$		
h) tg 2x = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$		
i) tg x = 1		
j) tg 3x = 1		

OBSERVAÇÃO

CONCLUSÃO

Orientações Didáticas ao Professor:

A atividade 11 é composta de um quadro no qual os estudantes deverão preencher os espaços em branco com as soluções, da primeira volta, de cada equação trigonométrica do tipo tg(nx) = c, com c > 0 ou c < 0. Para tal, deverão utilizar o mesmo Applet do Geogebra da atividade anterior.

Este Applet pode ser acessado através de um celular, tablet ou por computador e deve auxiliar os estudantes a encontrar as soluções no intervalo de [0º,360º]. Para cada uma das equações trigonométricas propostas na atividade, além dos estudantes completarem os espaços com as soluções de cada equação base, isto é, equações do tipo tg x = a e tg x = b, os discentes deverão encontrar as soluções das equações tg(nx) = c baseando-se nas respostas encontradas para as equações base.

Mais uma vez chamamos a atenção do professor para que oriente os alunos ao preenchimento do quadro com bastante atenção, pois qualquer ângulo escrito de forma equivocada pode ocasionar a não percepção das regularidades que os discentes deverão observar e consequentemente poderão ter dificuldades em registrar suas observações e conclusões da atividade.

De acordo com as anotações dos alunos no campo destinado às observações, eles devem apresentar na área da conclusão a regularidade que perceberam sobre a relação matemática existente entre as soluções das equações trigonométricas tg(nx) = c. Vale destacar que a regularidade esperada diz respeito a uma fórmula matemática que auxilie o estudante a encontrar o valor de x realizando a divisão das soluções de cada equação base pelo valor de “n”. Caso os alunos não compreendam o que se deve concluir, o professor pode intervir realizando questionamentos do tipo: Para que o valor do arco (nx) seja igual aos ângulos da equação base, que operação matemática vocês devem realizar para descobrir o valor de x? Isso pode esclarecer as possíveis dúvidas que estejam sentindo.

O alcance do objetivo dessa atividade deverá contribuir para que o aluno comece a perceber que sempre que souber os ângulos das equações base, que normalmente são os ângulos notáveis de 30º, 45º e 60º, facilmente conseguirão encontrar o valor de x para as equações tg(nx) = c.

A partir desse momento sugerimos ao professor que formalize a conclusão geral da atividade junto com os estudantes e logo em seguida poderá os direcioná-los

para a atividade 12 a seguir, onde os alunos devem seguir os mesmos procedimentos descritos na atividade anterior.

Atividade 12

ATIVIDADE 12

Título: Resolução de equações do tipo tg $\frac{x}{n}$ = d, com d > 0 ou d < 0.

Objetivo: Descobrir a relação entre as soluções de equações do tipo tg $\frac{x}{n}$ = d.

Material: Applet do Geogebra Ciclo trigonométrico Dinâmico e calculadora.

Procedimentos:

01. Com o auxílio do Ciclo trigonométrico Dinâmico mova o controle deslizante e identifique, no eixo das tangentes, os valores indicados em cada equação.

02. Determine os ângulos cuja tangente corresponde aos valores indicados em cada equação.

03. Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

Equação	**Solução x_1**	**Solução x_2**
a) tg x = $\frac{\sqrt{3}}{3}$		
b) tg $\frac{x}{2}$ = $\frac{\sqrt{3}}{3}$		
c) tg $\frac{x}{3}$ = $\frac{\sqrt{3}}{3}$		
d) tg x = $\sqrt{3}$		
e) tg $\frac{x}{2}$ = $\sqrt{3}$		
f) tg $\frac{x}{3}$ = $\sqrt{3}$		
g) tg x = − 0,58		
h) tg $\frac{x}{2}$ = − 0,58		
i) tg x = 1		
j) tg $\frac{x}{2}$ = 1		

OBSERVAÇÃO

CONCLUSÃO

Orientações Didáticas ao Professor:

A atividade 12 é composta de um quadro no qual os estudantes deverão preencher os espaços em branco com as soluções, da primeira volta, de cada equação trigonométrica do tipo $tg\left(\frac{x}{n}\right) = d$, com d > 0 ou d < 0. Para tal, deverão utilizar o mesmo Applet do Geogebra da atividade anterior.

Este Applet pode ser acessado através de um celular, tablet ou por computador e deve auxiliar os estudantes a encontrar as soluções no intervalo de [0º,360º]. Para cada uma das equações trigonométricas propostas na atividade, além dos estudantes completarem os espaços com as soluções de cada equação base, isto é, equações do tipo tg x = a e tg x = b, os discentes deverão encontrar as soluções das equações $tg\left(\frac{x}{n}\right) = d$ baseando-se nas respostas encontradas para as equações base.

Mais uma vez chamamos a atenção do professor para que oriente os alunos ao preenchimento do quadro com bastante atenção, pois qualquer ângulo escrito de forma equivocada pode ocasionar a não percepção das regularidades que os discentes deverão observar e consequentemente poderão ter dificuldades em registrar suas observações e conclusões da atividade.

De acordo com as anotações dos alunos no campo destinado às observações, eles devem apresentar na área da conclusão a regularidade que perceberam sobre a relação matemática existente entre as soluções das equações trigonométricas $tg\left(\frac{x}{n}\right) = d$. Vale destacar que a regularidade esperada diz respeito a uma fórmula matemática que auxilie o estudante a encontrar o valor de x realizando a multiplicação das soluções de cada equação base pelo valor de "n". Caso os alunos não compreendam o que se deve concluir, o professor pode intervir realizando questionamentos do tipo: Para que o valor do arco $\left(\frac{x}{n}\right)$ seja igual aos ângulos da equação base, que operação matemática vocês devem realizar para descobrir o valor de x? Isso pode esclarecer as possíveis dúvidas que estejam sentindo.

O alcance do objetivo dessa atividade deverá contribuir para que o aluno comece a perceber que sempre que souber os ângulos das equações base, que normalmente são os ângulos notáveis de 30º, 45º e 60º, facilmente conseguirão encontrar o valor de x para as equações $tg\left(\frac{x}{n}\right) = d$.

A partir desse momento sugerimos ao professor que formalize a conclusão geral da atividade junto com os estudantes e logo em seguida poderá os direcioná-los para as questões de aprofundamento de equações trigonométricas envolvendo a tangente de um arco.

Atividade de Aprofundamento das Atividades 9,10,11 e 12

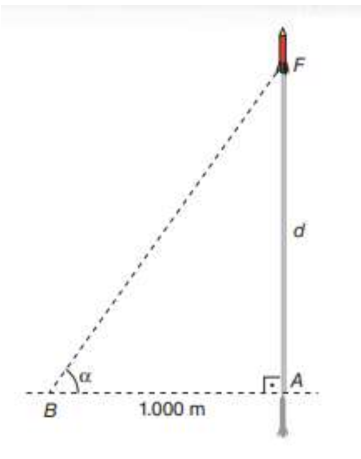
Lista de questões com equações trigonométricas do tipo tangente.

Para cada uma das questões, utilize a tabela dos ângulos notáveis do ciclo trigonométrico.

TABELA DOS VALORES DOS ARCOS NOTÁVEIS

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

01. Um foguete F, lançado em trajetória vertical de um ponto A do solo plano e horizontal, é monitorado a partir de um ponto B do solo, distante 1.000 m de A. Qual(is) serão as possíveis medidas do ângulo A$\hat{B}$F, quando a distância AF for igual a 1.000 m?



02. De um ponto T, a 15 m de altura em relação ao plano de uma estrada horizontal, um guarda rodoviário observa um automóvel sob um ângulo de medida x, em grau, em relação à vertical $\overline{TB}$, sendo B um ponto do plano da estrada. Determine as possíveis medidas x para que a distância entre o automóvel e o ponto B seja maior que $5\sqrt{3}$ m.

03. (UFRGS) Qual o conjunto solução da equação tg x – 1 = 0 no intervalo [0,360º]?

04. Qual o conjunto solução da equação 3.tg $-\sqrt{3}$ = 0, com x ∈ [0,360º]?

05. Qual o conjunto solução da equação $3.tg^2x - 3 = 0$, com x ∈ [0,360º]?

06. Qual o conjunto solução da equação 4.tg x = $-4\sqrt{3}$, com x ∈ [0,360º]?

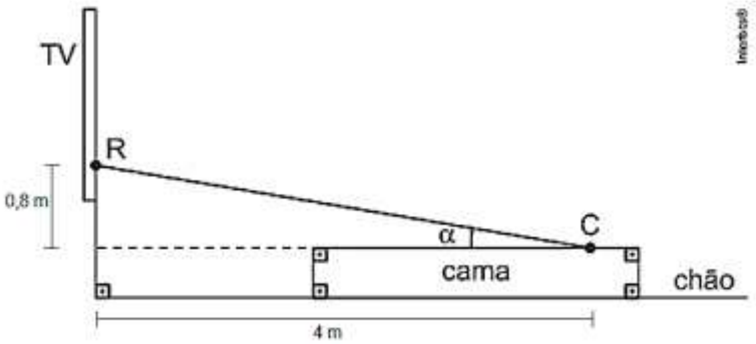
07. Qual o conjunto solução da equação tg 2x = $\frac{\sqrt{3}}{3}$, com x ∈ [0,360º]?

08. Qual o conjunto solução da equação tg 3x = 1, com x ∈ [0,360º]?

09. Qual o conjunto solução da equação tg 5x = $-\sqrt{3}$, com x ∈ [0,360º]?

10. Quais os valores de x que satisfazem o conjunto solução da equação 2.tg (3x) = -2 no intervalo x ∈ [0,360º]?

11. **(PUC)** Paulo está deitado na cama e assistindo à TV. Na figura, C representa um ponto sobre a cama a partir do qual o controle remoto da TV foi acionado na direção do receptor de sinal indicado por R. A medida do ângulo entre a linha que representa o sinal transmitido e a cama é igual a α.

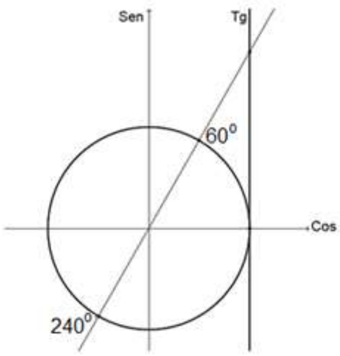


Dados:

α	11,3°	11,5°	12,1°	12,4°	78,5°
sen α	0,196	0,199	0,210	0,215	0,980
cos α	0,981	0,980	0,978	0,977	0,199
tg α	0,200	0,203	0,214	0,220	4,915

Qual a medida do ângulo α mostrado na situação da figura anterior?

12. Observe o ciclo trigonométrico a seguir:



Podemos concluir que os ângulos assinalados, no intervalo x ∈ [0º, 360º], correspondem ao conjunto solução da equação

(A) sen x = $\sqrt{3}$

(B) cos x = $\sqrt{3}$

(C) tg x = $\sqrt{3}$

(D) sen x = $-\sqrt{3}$

(E) tg x = $-\sqrt{3}$

Orientações Didáticas ao Professor

Sugerimos ao professor que no momento que os alunos estiverem respondendo esta atividade de aprofundamento, disponibilize uma tabela trigonométrica com os ângulos notáveis (30º, 45º e 60º) para auxiliar a resolução das equações trigonométricas propostas para esta atividade.

Caso os alunos tenham muita dificuldade, recomendamos que o professor mostre a eles as conclusões que tiveram, pois isso pode ajudar a relembrarem da regularidade percebidas por eles. Assim que todos os estudantes tiverem respondido, eles devem ser encaminhados para a etapa de formalização onde será discutido com eles os possíveis métodos propostos por eles na atividade e outros métodos mais formais.

7. CONSIDERAÇÕES

O objetivo deste produto educacional foi apresentar uma Sequência Didática para o ensino de equações trigonométricas. A construção deste produto levou em consideração várias informações, dentre elas, tem-se os aspectos curriculares sobre o ensino de equações trigonométricas, os aspectos históricos e a revisão de estudos sobre o ensino e aprendizagem de trigonometria dentre os quais enfatizamos os que trabalharam equações trigonométricas, além da utilização da metodologia Ensino por Atividades.

Através dos aspectos curriculares, podemos perceber quanto o ensino de equações trigonométricas, que o conteúdo tem deixado de ser ministrado nas escolas públicas e nos livros didáticos tem se mostrado de forma bastante resumida e com poucas atividades diferenciadas para que o estudantes exponham suas conclusões. Apesar de não estar escrito de forma explícita nos documentos oficiais, as equações trigonométricas têm sido cobradas nos centros de excelência de formação de nível superior como por exemplo as escolas militares, dessa forma podemos dizer que o ensino desse conteúdo está sendo usado como filtro social.

Os aspectos históricos nos possibilitaram entender como as equações trigonométricas foram úteis para as ciências, como a astronomia e as grandes navegações, pois o desenvolvimento de tabelas trigonométricas com ângulos cada vez mais precisos foram fundamentais para cálculos de distâncias inacessíveis. Além disso, as equações trigonométricas foram importantes para a resolução de equações polinomiais de grau 45, como o problema lançado por Van Roomen que foi resolvido por Vietè através de conhecimentos de trigonometria.

A revisão de estudos possibilitou ter um uma visão sobre muitos fatos relativos ao tema diante dos trabalhos revisados na área de trigonometria, os quais contribuíram com o planejamento desse produto educacional, no sentido de revelar a necessidade de estratégias didáticas e metodológicas para o ensino de equações trigonométricas, além de apresentar algumas sugestões importantes para a elaboração da Sequência Didática.

Em meio às compreensões obtidas na revisão de estudos, bem como a busca de estratégias de ensino que poderiam ser eficazes para o assunto de equações trigonométricas, surgiu a possibilidade de utilizar a metodologia Ensino por Atividades. No estudo realizado sobre este direcionamento, foi possível construir a sequência didática apresentada no capítulo 6.

Por fim, a Sequência Didática apresentada foi utilizada em uma dissertação de mestrado do autor Brayner Júnior (2021) com estudantes do terceiro ano do ensino médio. Pelo fato dos resultados, dessa dissertação, terem sido considerados muito bons, apresentamos a Sequência Didática presente nela como um produto educacional neste livro, acompanhada com orientações didáticas para que os professores possam utilizá-la em sala de aula, ou em aula remota, e estando sujeita a ajustes pelo docente para melhor se adequar a cada situação.

Por meio deste produto educacional, esperamos contribuir para facilitar a prática docente no que diz respeito ao planejamento e execução de aulas sobre o assunto equações trigonométricas e a trigonometria de forma geral, tanto no Ensino Médio, quanto no Ensino Superior.

REFERÊNCIAS

AIMI, Silvia. **Contribuições das tecnologias da informação e comunicação ao processo de generalização matemática**. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14, 2010, Campo Grande. Anais... Campo Grande, 2010. Disponível em: . Acesso em: 31 out. 2010.

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **Revemat.** Florianópolis, 2008. v. 3, n. 1, p. 62-77. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/19811322.2008v3n1p62. Acesso em: 10/02/2020.

ANDRADE, Maria Margarida de. **Introdução à metodologia do trabalho científico.** 6ª ed. São Paulo: Atlas, 2003.

ANGELO, C. L. **Uma leitura das falas de alunos do ensino fundamental sobre a aula de Matemática**. 2012.160f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, RioClaro-SP,2012.

ANTAR NETO, Aref et al. **Noções de Matemática:** Trigonometria. Fortaleza: Vestseller, v. 3, 2009.

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 193-217.

BARCELOS, Gilmara Teixeira, et al. **Applets em ambientes de geometria dinâmica**: ações para a formação de professores de Matemática. Novas Tecnologias na Educação. CINTED-UFRGS, v. 7, nº 3, dezembro, 2009. Disponível em: . Acesso em: 29 out. 2010.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. **Educação Matemática:** pesquisa em movimento. 2ª ed. rev. São Paulo: Cortez, 2005.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR, José Ruy; DE SOUSA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma Matemática**. Volume 3. – 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

BORBA, M.C.; VILLARREAL, M.E. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking**: information and communication Technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005. (Mathematics Education Library,39).

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R. da; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática:** Sala de aula e internet em movimento. 2016. p. 46-48.

BRANCO, Emerson Carlos Castelo. **A Importância das Deduções das Fórmulas Trigonométricas para a Construção de uma Aprendizagem Significativa**. 2013. 87f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Centro de Ciências Exatas e Tecnologia Departamento de Matemática, Universidade Federal do Maranhão, São Luís -MA, 2013.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**. Brasília, DF, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf. Acesso em 18/02/2020.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio**: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Básico. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, MEC, 2006.

BRASIL, Ministério da Educação. **Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB/Prova Brasil.** Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. Ministério da Educação, Secretária da Educação Média e Tecnologia. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

BRAYNER JÚNIOR, Carlos Alberto Martinho. **Ensino de Equações Trigonométricas por Atividades Experimentais.** 2021, 304f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2021.

BRITO, A. de J.; MOREY, B. B. **Geometria e trigonometria:** dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental. In: John A. Fossa (org). Presenças Matemáticas. Natal: Edufrn, 2004. p. 9 – 33.

CAMPOS, Inês da Silva Pinto. **Trigonometria:** encantos e recantos de uma abordagem didática. 2017. Tese de Doutorado.

CORREA, Rosana dos Passos; MONTEIRO, Rúbia Soraia Barata; SÁ; Pedro Franco de. **TRAJETÓRIA DAS TRIGONOMETRIAS**: uma incursão histórica. (2015). Disponível em:. Acesso em: 10 jul. 2021.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação para uma sociedade em transição.** 2. ed. Campinas: Papirus, 2001.p.98.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em Contextos**. Volume 3. – 1ª ed. São Paulo: Ática, 2020.

DE ANDRADE, Lenimar Nunes. Trigonometria e Equações Polinomiais. **Revista do Professor de Matemática**, v. 83, p.1-4, 2018.

DE ANDRADE, Thais Marcelle. **Matemática Interligada**. Volume 2. – 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2020.

DE FREITAS, Luciana Maria Tenuta; LONGEN, Adilson; BLANCO, Rodrigo Morozetti. **Interação Matemática**. Volume 6. – 1ª ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2020.

DE LEONARDO, Fábio Martins. **Conexões – Matemática e suas Tecnologias.** Volume 4. – 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2020.

DE SOUSA, Airtonelton Magalhães. **CURRÍCULO DE TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO:** UMA ANÁLISE NOS DOCUMENTOS OFICIAIS, PNLD E ENEM. 2020. Tese de Doutorado. UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE.

FEIJÓ, Rachel Saffir Araújo Alves. **Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria:** um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal. 2018. 108f. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília, Brasília, 2018. Disponível em: https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/32144/1/2018_RachelSaffirAra%C3%BAjoAlvesFeij%C3%B3.pdf. Acesso em: 3 fev. 2020.

FERNANDES, Ricardo Uchoa. **Estratégias pedagógicas com o uso de tecnologias para o ensino de trigonometria na circunferência.** 2010. 127f. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em:< https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11445 >. Acesso em: 14 de mai. 2019.

FILIPIAK; CIANI; TOILLIER. **Trigonometria: uma intervenção pedagógica no 2º ano do Ensino Médio de um colégio estadual de Dois Vizinhos**. São Paulo: Cadernos PDE, p.3, 2016.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. Boletim da SBEM. SBM: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.

FREITAS, Raquel Silva de, *et. al*. (2016). **As dificuldades apresentadas por professores e alunos no ensino da Trigonometria**. In: Anais do III Congresso Nacional de Educação – CONEDU. Campina Grande-PB: Realize Eventos & Editora, 2016. Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV056MM4_SA8_ID11161_17082016154442.pdf>. Acesso em: 24 jun 2019.

GONÇALVES, Carlos HB; OLIVEIRA, Zaqueu Vieira. A Atividade Matemática de Adriaan van Roomen. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 10, n. 20, p. 147-164, 2010.

GREBOT, Guy; MOREIRA, Paulo V. **Planejamento x realidade no ensino de geometria no DF**. VII Encontro Brasiliense de Educação Matemática, 2017.

IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua**. 2016-2017.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria**. V. 3. São Paulo: Editora Atual, 2016.

LOBO, Weriton de Souza; JESUS, Gilson Bispo de; MADRUGA, Zulma Elizabete de Freitas. Teoria das Situações Didáticas: uma proposta de ensino de Inequações utilizando a Régua Trigonométrica. **Com a Palavra, o Professor**, v. 2, n. 3, p. 25-46, 2017.

LOPES, M., OLIVEIRA, Davidson Paulo Azevedo, AMORIN, Frank Victor. **O uso do software GeoGebra como recurso didático na sala de aula de matemática**.

Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN/Brasil, Instituto Federal de Minas Gerais – IFMG/Brasil, Instituto Federal do Rio Grande do Norte – IFRN/Brasil.

LOPES, Maria Maroni. **Construção e aplicação de uma sequência didática para o ensino de trigonometria usando software GeoGebra**. 2010. 141 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

LOPES, M. M. **Sequência didática para o ensino de trigonometria usando o software GeoGebra.** Boletim de Educação Matemática, v. 27, n. 46, 2013.

MANGAS, Evaristo José das. **“Proposta de Introdução do Tema Equações Trigonométricas da Forma R (Senx,Cosx = c) no Capítulo I**: Trigonometria, no Programa da 11ª Classe do II Ciclo do Ensino Secundário”.2014. Trabalho de Conclusão de Curso. Instituto Superior de Ciências da Educação da Huíla Departamento de Ciências Exatas Repartição de Matemática.

MATOS, João Filipe. **Matemática, educação e desenvolvimento social– questionando mitos que sustentam opções actuais em desenvolvimento curricular em matemática**. Retrieved October, v. 10, p. 2007, 2005.

MENDES, I. A.; SÁ, Pedro Franco de. **Matemática por atividades:** sugestões para a sala de aula. 1. ed. Natal: Flecha do tempo, 2006. v. 1. 84p.

MERCADO, L. P. L. (org). **Novas tecnologias na educação:** reflexões sobre a prática. Maceió: EDUFAL, 2002.

MESQUITA, João Gaspar Moreda de Sousa. **A utilização da calculadora gráfica no estudo das funções trigonométricas**. 2014. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Ciências e Tecnologia Universidade Nova de Lisboa.

OLIVEIRA, Ivanilde Apoluceno de. Prefácio. In: SÁ, Pedro Franco de; JUCÁ, Rosineide de Sousa. **Matemática por atividades:** experiências Didáticas bem-sucedidas. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

NACARATO,M. **O Ensino de trigonometria:** tendência e perspectivas. In: VI Reunión de Didática de la Matemática Del Cono Sur. Buenos Aires, 2002.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática; uma análise da influência francesa**, 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica. 2001.

PACHECO, Marina Buzin; ANDREIS, Greice da Silva Lorenzzetti. **Análise na rede pública estadual de ensino de Caxias do Sul das causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do ensino médio**. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, v. 1, n. 1, 2015.

PEREIRA,C.S.; **Aprendizagem em trigonometria no Ensino Médio:** Contribuições da teoria da aprendizagem significativa. 1ª Edição. Paco Editorial: Jundiaí – SP,2013.

SÁ, Pedro Franco de. As atividades experimentais no ensino de matemática. **REMATEC**, v. 15, n. 35, p. 143-162, 2020.

SÁ, Pedro Franco de. **Atividades para o ensino de Matemática no nível fundamental.** Belém: EDUEPA, 2009.

SÁ, Pedro Franco de. **Possibilidades do ensino de matemática por atividades**. Organizado por Demétrius Gonçalves de Araújo. – Belém: SBEM-PA, 2019.

SANCHEZ, Jesus Dicásio García. **Dificuldades de Aprendizagem e Intervenção Psicopedagógica**. Porto Alegre: Artmed, 2004.

SANTOS, Francisco Nórdman Costa Santos. **O Ensino de Polígonos por Atividades**. 2020. 268f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2020.

SANTOS, Victor Cesar Paixão. **Mathlets:** possibilidades e potencialidades para uma abordagem dinâmica e questionadora no ensino de Matemática. 2008. 102f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

SCHEIDE, Tereza de Jesus Ferreira; SOARES, Marlene Aparecida. **Professor de matemática:** um educador a serviço da construção da cidadania. Anais VIII Encontro nacional de Educação Matemática. VIII ENEM, 2004.

SILVA, A. C. B.; GOMES, A. S. **Conheça e utilize Software Educativo: avaliação e planejamento para a educação básica**. Recife: Pipa Comunicação, 2015.

SILVA, Marlizete Franco. **Trigonometria, modelagem e tecnologias:** um estudo sobre uma sequência didática. 2011.238f. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011. Disponível em: <http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_SilvaMF_1.pdf >. Acesso em: 17 de mai. 2019.

SILVA, Maria Alcileide da. **Ensino da Trigonometria no 2º ano do Ensino Médio na Escola Melquíades Vilar no município de Taperoá-PB**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011. Disponível em: http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/690/1/PDF%20%20Maria%20Alcileide%20da%20Silva.pdf. Acesso em: 08 de fev. 2020.

SILVA, Marlizete Franco da; FROTA, Maria Clara Rezende. **O uso de applets no ensino de trigonometria**. In: SEMINÁRIO DO PROGRAMA DE MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA, 1, 2010, Belo Horizonte. Anais... Belo Horizonte, 2010.

SILVA, Rodolfo Máximo de Lima. **Jogos pedagógicos na aprendizagem de trigonometria do ensino médio**. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo, Lorena, 2018. Disponível em: <http://teses.usp.br/teses/disponiveis/97/97138/tde-03122018-175550/>. Acesso em: 10 de jun. 2019.

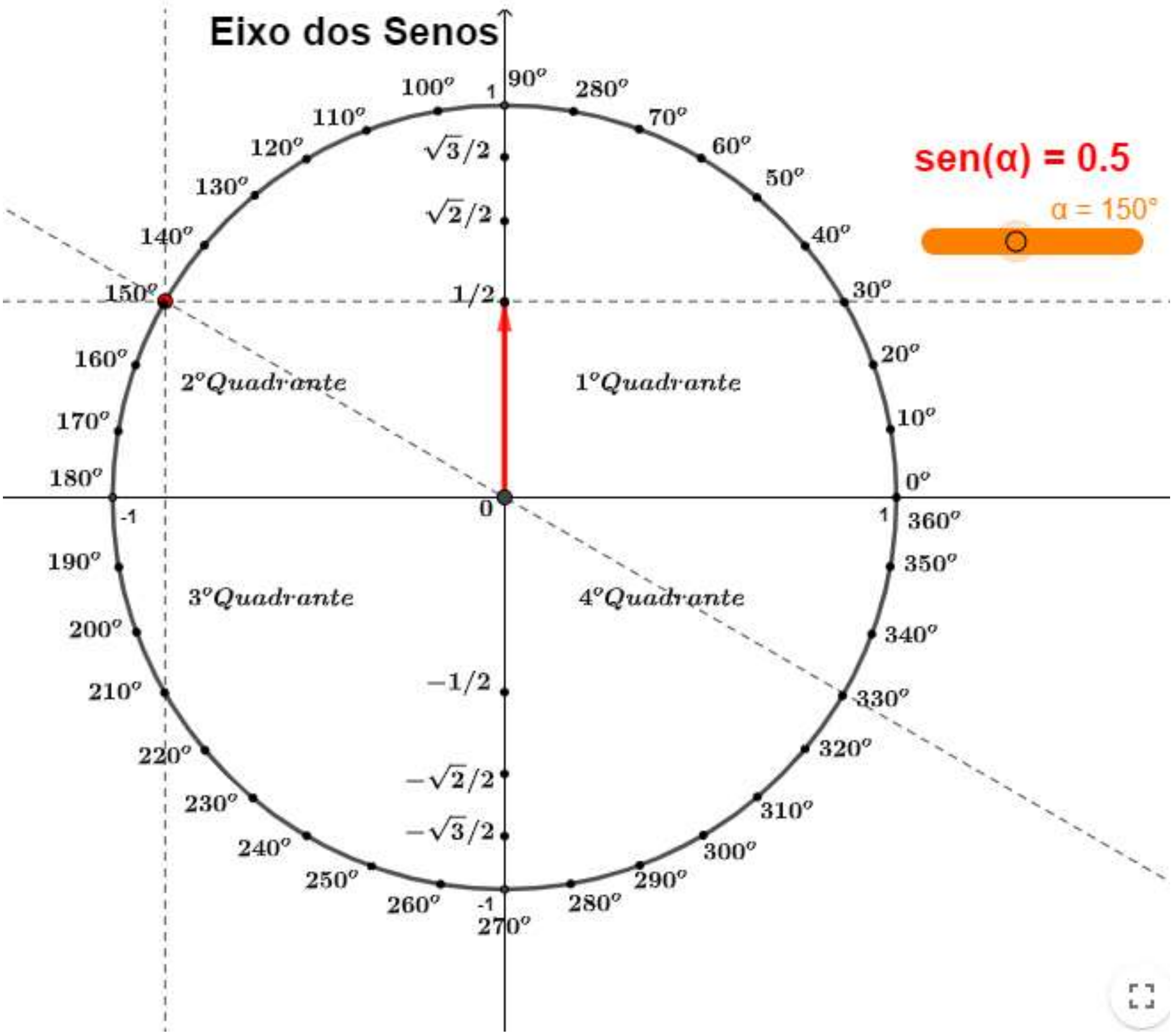
SOUZA, Joamir. **Multiversos Matemática**. Volume 3. – 1ª ed. São Paulo: FTD,2020.

PEREIRA, Edcarlos. **A utilização de Applets no Geogebra para a Aprendizagem da Trigonometria no Ensino Médio**. 2015. 121 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Alagoas – UFAL, Maceió, 2015.

PINHEIRO, E. **O ensino de Trigonometria na educação básica a partir da visualização e interpretação geométrica do ciclo trigonométrico**. Belo Horizonte: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2008.

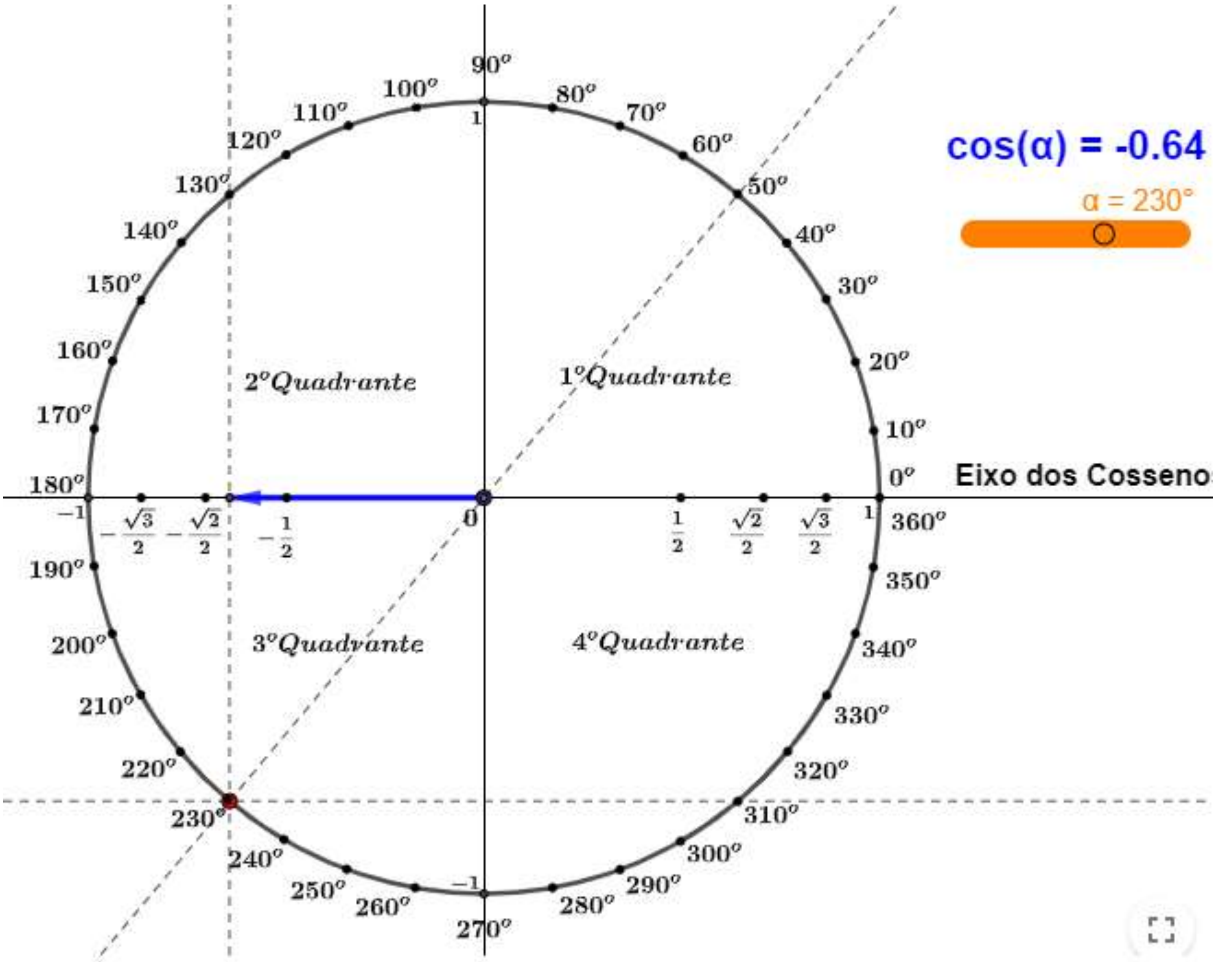
APÊNDICES

APÊNDICE A: APPLET DO GEOGEBRA – CICLO TRIGONOMÉTRICO DINÂMICO PARA EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DO TIPO SENO



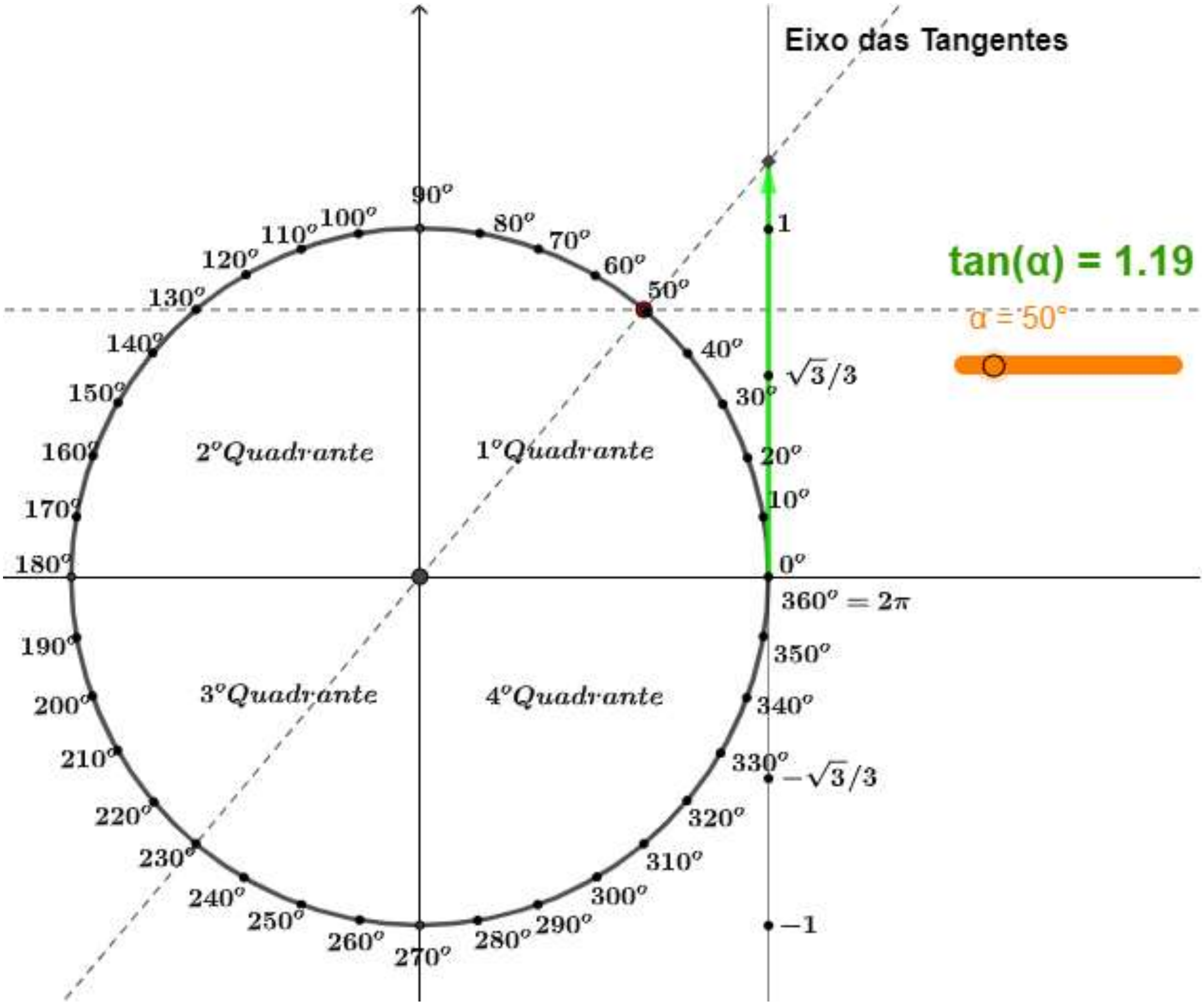
LINK DO APPLET: https://www.geogebra.org/m/qkhmvcy8

APÊNDICE B: APPLET DO GEOGEBRA – CICLO TRIGONOMÉTRICO DINÂMICO PARA EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DO TIPO COSSENO



LINK DO APPLET: https://www.geogebra.org/m/gwneyyr8

APÊNDICE C: CICLO APPLET DO GEOGEBRA – CICLO TRIGONOMÉTRICO DINÂMICO PARA EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DO TIPO TANGENTE



LINK DO APPLET: https://www.geogebra.org/m/ufmeezqf

Carlos Alberto Martinho Brayner Júnior

Possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade do Estado do Pará (2003); Especialização em Educação Matemática pela Universidade do Estado do Pará (2005); Atua como professor efetivo na Secretaria de Estado e Educação desde 2012; Atua como professor da rede particular de ensino desde 2010. Mestrado em Ensino de Matemática pelo PPGEM/UEPA(2021).

Pedro Franco de Sá

Possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1988); Mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1996) e Doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2003). Foi diretor, no período de junho de 2012 a maio de 2016, do Centro de Ciências Sociais e Educação da Universidade do Estado do Pará onde é professor Titular de Educação Matemática do Departamento de Matemática, Estatística e Informática desde 2013.

ANA KELY MARTINS DA SILVA

Graduada em Pedagogia pela Universidade do Estado do Pará- UEPA (1992), Tendo Curso de Especialização em Metodologia da Educação Superior pela PUC/MG; É mestre em Ciências da Educação Docência Universitária - IPLAC/ UEPA (2000). É doutora em Educação pela PUC/RJ. E Pós-Doutora em Educação com ênfase em Psicologia Cognitiva pela Universidade de Flores (Buenos Aires). Atua profissionalmente como professora efetiva da Universidade do Estado do Pará- UEPA, desde 1994. E na FACI/DEVRY. Possui experiência em EAD desde 2002, quando atuou no PROGESTÃO e com disciplinas nesta modalidade. Vem aprofundando os estudos na área de Educação, com ênfase na EDUCAÇÃO SUPERIOR, atuando principalmente nos seguintes temas: educação superior, formação de professor, gestão democrática e pesquisa e educação Matemática.

UEPA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem